UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

# Álgebras de Clifford: Classificações e Representações

**José Ginaldo de Souza Farias**

João Pessoa-PB

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

# Álgebras de Clifford: Classificações e Representações

por

**José Ginaldo de Souza Farias**

sob orientação do

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta**

João Pessoa-PB

30 de Agosto de 2013

F224a Farias, José Ginaldo de Souza.
Álgebra de Clifford: classificações e representações / José Ginaldo de Souza Farias.- João Pessoa, 2013.
92f.
Orientador: Napoleón Caro Tuesta
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Álgebra de Clifford. 3. Grupo Pin e Spin. 4. Representações e classificações.

UFPB/BC CDU: 51(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

# Álgebras de Clifford: Classificações e Representações

por

**José Ginaldo de Souza Farias**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada em 30 de agosto de 2013.

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta** (Orientador)

Diogo Diniz P. S. Silva

**Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG**

**Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB**

*A minha família*

# Agradecimentos


- A Deus, princípio e razão de tudo.

- A minha família que sempre me deram força e acreditaram em mim, em especial aos meus pais Josefa e Givaldo, ao meu irmão Genaldo, aos meus avós, aos meus primos que são verdadeiros irmãos de coração Edilson, Maria José e Cony Black.

- Ao meu orientador Prof. Dr Napoleón, pela paciência, apoio, disponibilidade e dedicação, sem o qual este trabalho não teria sido possível.

- Aos professores Dr. Diogo Diniz e Dr. Antônio de Andrade e Silva, por participarem da banca proporcionando valiosas sugestões que servirão para o meu crescimento e aprendizado.

- A minha família Pedregal, Mônica, Mariana, Tony, Rainely, Gérsica, Luan, Renato,Wanderson, Eudes e Milena, por todo o carinho e pelos momentos de felicidade que me proporcionaram em toda essa jornada.

- Aos todos os meus amigos do mestrado em especial a minha turma 2011.2, Felipe, Eberson, Carlos, Moisés, Rafael, Renato, Mônica, Gérsica, Eudes e Erinaldo.

- Aos meus amigos Alex e Gisélia por todo o incentivo e encorajamento nessa caminhada.

- A todos os professores do Departamento de matemática da UFPB.

- Aos professores do Departamento de Matemática da UEPB, Vandenberg Lopes Vieira, Aldo Trajano e Ernesto, por terem me dado todo o apoio durante a graduação e por me incentivarem a chegar no mestrado.

- A CAPES pelo apoio financeiro.

*"Tudo posso naquele que me fortalece"*

*Filipenses 4:13*

# Resumo

Neste trabalho, estudamos as álgebras de Clifford $Cl(V, \Phi)$ associadas aos espaços quadráticos $(V, \Phi)$, de maneira universal, construtiva e como quantização da álgebra exterior. Classificamos todas as álgebras de Clifford associadas as espaços quadráticos de Minkowski $(\mathbb{R}^{p+q}, \Phi_{p,q})$, onde $\Phi_{p,q}(u) = u_1^2 + ... + u_p^2 - (u_{p+1}^2 + ... + u_{p+q}^2), \quad u = (u_1, ..., u_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$, as quais denotamos por $Cl_{p,q}$, bem como suas complexificações. Para tanto, usaremos resultados importantes como o teorema da periodicidade de Carton/Bott. Além disso, estudamos as suas representações, destacando a Representação Adjunta Torcida, as Representações Spin e Semi-Spin e por meio do número de Radon-Hurwitz estudamos as representações das álgebras $Cl_{0,k}$.

**Palavras-chaves:** Álgebras de Clifford, grupo $Pin$ e $Spin$, representações e classificações.

# Abstract

In this paper, we study Clifford algebras so universal and constructive as quantization of exterior algebra, we classify all Clifford algebras associated with the quadratic Minkowski spaces $(\mathbb{R}^{p+q}, \Phi_{p,q})$, where $\Phi_{p,q}(u) = u_1^2 + ... + u_p^2 - (u_{p+1}^2 + ... + u_{p+q}^2),\ u = (u_1, ..., u_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$, which we denote by $Cl_{p,q}$, as well as their complexifications. To do so, we use important results as the periodicity theorem Carton / Bott. The, we study their representations, emphasizing the Twisted Adjoint Representataion, Spin Representation and the Spin-Half Representation moreover using the number of Radon-Hurwitz we study representations of the algebras $Cl_{0,k}$.

# Sumário

# Introdução

Do ponto de vista histórico, as primeiras álgebras não-comutativas surgiram entre 1843 e 1844, nos trabalhos de Hamilton, com os quatérnions e Grassmann com a álgebra exterior ([2],pag.149).

Entre os anos de 1850-1860, novos exemplos de álgebras foram sendo introduzidos por Cayley, desenvolvendo assim a teoria das matrizes, que embora não as considerasse uma álgebra, se se podia considerar um primeiro exemplo notável de uma representação linear de uma álgebra. Por volta de 1870, surgiram outros exemplos importantes de álgebras, mais precisamente as álgebras de dimensão finita sobre os corpos de reais ou complexos.

Nessa direção B.Pierce da os primeiros passos. É a ele quem William K. Clifford atribui a noção de produto tensorial que usou implicitamente em uma generalização dos quatérnios de Hamilton, e explicitamente para o estudo de suas álgebras.

As álgebras geométricas ou álgebras de Clifford, foram criadas William K. Clifford entre 1878 e 1882, quando este introduziu uma nova regra de multiplicação na álgebra exterior de Grassmann ([8], pag. 320-322).

Essas álgebras foram redescobertas independentemente por R. Lipschitz entre 1880 e 1886, que reconheceu a descoberta anterior de Clifford em seu livro " *Untersuchungen über die Summen von Quadraten*" de 1886.

Nossa intenção neste trabalho é estudar a classificação das álgebras de Clifford associadas aos espaços quadráticos de Minkowski $(\mathbb{R}^{p+q}, \Phi_{p,q})$, onde $\Phi_{p,q}(u) = u_1^2 + ... + u_p^2 - (u_{p+1}^2 + ... + u_{p+q}^2)$, $u = (u_1, ..., u_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$, as quais denotaremos por $Cl_{p,q}$. Elas são importantes em nosso estudo, pois a partir delas podemos classificar todas as álgebras de Clifford reais e complexas associadas a espaços quadráticos de dimensão finita não-degenerados.

Como a teoria das representações estuda estruturas algébricas abstratas representando seus elementos como estruturas em álgebras lineares, faremos um estudo sobre as representações das álgebras de Clifford. Para isso, objetivamos apresentar tais álgebras apresentando conceitos e resultados inerentes as estas estruturas. No primeiro capítulo, abordamos alguns conceitos fundamentais da álgebra multilinear, como produto tensorial, álgebra tensorial e álgebra exterior.

No segundo capítulo, apresentaremos as álgebras de Clifford associadas a espaços quadráticos $(V, \Phi)$, as quais denotaremos por $Cl(V, \Phi)$. Abordando-as sob três pontos de vista: como um par universal, de maneira construtiva e por último como uma quantização da álgebra exterior.

No terceiro capítulo, apresentaremos a classificação das álgebras de Clifford, a partir de isomorfismos, dentre eles o principal teorema da teoria das classificações, o chamado Teorema de Carton-Bott. E por último, concluímos com o quarto capítulo, apresentando as representações das álgebras de Clifford. Esse estudo será feito com a compreensão inicial da representação de uma álgebra, passando em seguida a definição de representação de uma álgebra de Clifford e continuando o estudo abordamos alguns conceitos e tipos especiais de representações como as representações ortogonais e representações *Spin* e *Semi-Spin*, finalizando nosso estudo com a as representações das álgebras $Cl_{0,k}$.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo, vamos estudar os principais conceitos e resultados da Álgebra Multilinear os quais giram em torno da noção de produto tensorial de espaços vetoriais, estes conceitos são necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Neste capítulo $\mathbb{K}$ denotará um corpo de característica diferente de 2 .

## 1.1 Produto Tensorial de Espaços Vetoriais

**Definição 1.1.** Sejam $V$ e $W$ dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Um produto tensorial de $V$ e $W$ é um par $(T, \sigma)$, onde $T$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\sigma : V \times W \longrightarrow T$ é uma aplicação $\mathbb{K}$-bilinear com a seguinte propriedade universal:
Dado $H$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\varphi : V \times W \longrightarrow H$ uma aplicação $\mathbb{K}$-bilinear, existe uma única aplicação $\mathbb{K}$- linear $f : T \to H$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & H \\ & T \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

, isto é, $f \circ \sigma = \varphi$.

**Proposição 1.1.** O produto tensorial entre dois espaços vetoriais existe e é único, a menos de isomorfismo.

**Prova:** (Existência) Consideremos o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $L$ com base $V \times W$ e seja $N$ o subespaço de $L$ gerado pelos elementos da forma:

( i ) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y)$

(ii ) $(x, \lambda y_1 + \mu y_2) - \lambda(x, y_1) - \mu(x, y_2)$.

Onde $x, x_1, x_2 \in V$, $y, y_1, y_2 \in W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Definamos $T = L/N$ e seja $\pi : L \longrightarrow L/N$ a projeção canônica. Agora definamos a aplicação $\sigma : V \times W \longrightarrow T$ por $\sigma(x, y) = \pi(x, y)$, isto é, $\sigma = \pi \circ i$, com $i : V \times W \longrightarrow L$ é a inclusão. Vamos mostrar que $\sigma$ é bilinear. De fato,

$$\sigma(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \pi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\pi(x_1, y) + \mu\pi(x_2, y) = \lambda\sigma(x_1, y) + \mu\sigma(x_2, y)$$

Analogamente, prova-se que $\sigma$ é linear na segunda variável. Agora vamos provar que $(T, \sigma)$ possui a propriedade universal. Com efeito, seja $H$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\varphi : V \times W \longrightarrow H$ uma aplicação $\mathbb{K}$-bilinear. Como $L$ tem base $V \times W$, existe uma única aplicação $\mathbb{K}$-linear $h : L \longrightarrow H$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & L \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

comuta.

Observemos que $N \subset Ker h$. De fato,

$$h((\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y)) = h(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda h(x_1, y) - \mu h(x_2, y) =$$

$$= \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda\varphi(x_1, y) - \mu\varphi(x_2, y) = 0$$

Assim, pelo teorema fundamental das aplicações $\mathbb{K}$-lineares existe $f : L/N \longrightarrow H$ tal que $f \circ \pi = h$, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "h"'] & & L/N \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Portanto, $f \circ \sigma = f \circ \pi \circ i = (f \circ \pi) \circ i = h \circ i = \varphi$. O que mostra nossa afirmação.

(Unicidade) Vamos provar a unicidade, isto é, dados $(T, \sigma)$ e $(Z, \tau)$ dois produtos tensoriais de $V$ e $W$, existe um isomorfismo entre $T$ e $Z$. Com efeito, Como $T$ é um produto tensorial, existe $g : T \longrightarrow Z$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\tau"'] & & T \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Analogamente, como $Z$ é um produto tensorial, existe $j : Z \longrightarrow T$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & T \\
& Z \arrow[ur, dashed, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Daí, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & T \arrow[dl, dashed, "j \circ g"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

comuta. Como $1_T \circ \sigma = \sigma$,temos pela unicidade que $h \circ g = 1_T$. Analogamente $g \circ h = 1_Z$ Portanto, $g$ é um isomorfismo $\mathbb{K}$- linear.

$\blacksquare$

**Observação 1.1.** O produto tensorial de $V$ por $W$ será denotado por $V \otimes W$. Dado $(v, w) \in V \times W$ vamos denotar por $v \otimes w$ o elemento $\sigma(v, w)$ de $V \otimes W$. É possível provar que o conjunto $\{v \otimes w / v \in V, w \in W\}$ gera o espaço vetorial $V \otimes W$. Assim todo elemento de $V \otimes W$ é da forma $\sum_i (v_i \otimes w_i)$,com $v_i \in V$ e $w_i \in W$. Além disso, se $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ são bases de $V$ e $W$ respectivamente, então $\{u_1 \otimes u_2 / u_1 \in \mathfrak{B}_1, u_2 \in \mathfrak{B}_2\}$ é uma base de $V \otimes W$. Em particular, se $V$ e $W$ tem dimensões iguais a $m$ e $n$, respectivamente, então $V \otimes W$ tem dimensão $m \cdot n$ ( [4],pag. 18).

**Proposição 1.2.** Se $V$,$W$ e $U$ são $K$-espaços vetoriais quaisquer, então valem:

(i) $K \otimes V \simeq V$

(ii) $V \otimes W \simeq W \otimes V$

(iii) $(V \otimes W) \otimes U \simeq V \otimes (W \otimes U)$

**Prova:** Veja ([4],pág 17) ■

## 1.2 Produto Tensorial de Álgebras

**Definição 1.2.** Uma $\mathbb{K}$-álgebra (associativa) é um par $(A, \cdot)$, onde $A$ é um $K$-espaço vetorial e $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ é uma aplicação $\mathbb{K}$-bilinear chamada *multiplicação* que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b)$ para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

(ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para quaisquer $a, b, c \in A$.

(iii) Existe um elemento $1_A$ tal que $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$, para todo $a \in A$.

**Definição 1.3.** Seja $A$ uma $\mathbb{K}$-álgebra. Dizemos que um subespaço vetorial $B$ de $A$ é uma subálgebra de $A$ se $B$ é multiplicativamente fechado, isto é, se $b_1, b_2 \in B$, então $b_1 b_2 \in B$.

**Definição 1.4.** Sejam $A$ e $B$ duas $\mathbb{K}$-álgebras. Uma transformação $\mathbb{K}$-linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para quaisquer $x, y \in A$ e $\varphi(1_A) = \varphi(1_B)$.

**Definição 1.5.** Sejam $A$ uma $\mathbb{K}$-álgebra e $G$ um grupo comutativo. Definimos uma $G$-graduação em $A$ como sendo uma família $(A_g)_{g \in G}$ de subespaços vetoriais de $A$ tais que

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

e

$$A_g A_h \subseteq A_{g+h},$$

para quaisquer $g, h \in G$. Dizemos que uma $\mathbb{K}$-álgebra é $G$-graduada se ela possui uma $G$-graduação

**Exemplo 1.1.** $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de álgebras graduadas como veremos adiante.

### 1.2.1 Algebra Tensorial de um Espaço Vetorial

**Definição 1.6.** Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Para cada $p \geq 0$, o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\bigotimes^p V$, onde

$$\bigotimes^{p} V := V \otimes \cdots \otimes V, \quad \text{para} \quad p \geq 2, \quad \bigotimes^{0} V := \mathbb{K} \quad \text{e} \quad \bigotimes^{1} V := V$$

é chamado de $p$-ésima *potência tensorial* de $V$.

Para cada par de inteiros não negativos $(p, q)$, existe uma única aplicação $\mathbb{K}$-bilinear

$$\phi : \otimes^p V \times \otimes^q V \to \otimes^{p+q} V \tag{1.1}$$

tal que

$$\phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p, x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}.$$

**Definição 1.7.** Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma *álgebra tensorial* sobre $V$ é um par $(A, i)$, onde $A$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra e $i : V \longrightarrow A$ é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear satisfazendo a seguinte propriedade universal: Dada uma $\mathbb{K}$-álgebra $H$ e uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $\varphi : V \longrightarrow H$, existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $h : A \longrightarrow H$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & & H \\ & A \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

**Proposição 1.3.** A álgebra tensorial de um espaço vetorial existe e é única, a menos de isomorfismo.

**Prova:** (Existência) Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Consideremos o $\mathbb{K}$-espaço vetorial

$$A = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \otimes^p V$$

Desde que $\bigotimes^p V \otimes \bigotimes^q V \subset \bigotimes^{p+q} V$, as potências tensoriais definem uma estrutura de álgebra $\mathbb{Z}$-graduada não negativa (isto e, $A_n = 0$, para todo $n < 0$) sobre $A$.
Vamos mostrar que $(A, i)$ satisfaz a propriedade universal.

Sejam $H$ uma $\mathbb{K}$-álgebra e $\varphi : V \longrightarrow H$ uma aplicação $\mathbb{K}$-linear, para definir $h$ consideremos uma aplicação $p$-linear

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \longrightarrow H$$

Dada por

$$(x_1, ..., x_p) \longmapsto \varphi(x_1) \cdot ... \cdot \varphi(x_p)$$

Pela a propriedade universal do produto tensorial existe uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $h_p : \otimes^p V \longrightarrow H$ tal que

$$h_p(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_p).$$

Então a aplicação $\mathbb{K}$-linear $h : A \longrightarrow H$ dada por

$$h(u) = \sum_p h_p u_p \qquad u_p \in \otimes^p V, u = \sum_p u_p$$

é um homomorfismo. De fato, se $u, v \in A$ são elementos decomponíveis (isto é, elementos da forma $u = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ e $v = y_1 \otimes \cdots \otimes y_p$), então

$$h(uv) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_p) \cdot \varphi(y_1) \cdots \varphi(y_p) = h(u) \cdot h(v).$$

Como todo elemento de $A$ é uma soma de tensores decomponíveis e $h$ é linear, então $h$ preserva produto.

A prova da unicidade do par $(A, i)$ pode ser feita de maneira análoga a prova da unicidade do produto tensorial.

■

**Notação:** Iremos denotar a álgebra tensorial de um espaço vetorial $V$ por $T(V)$.

### 1.2.2 A Álgebra Exterior de um Espaço Vetorial

#### Aplicações Alternadas

Sejam $V$ e $W$ dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e seja

$$\varphi : \underbrace{V \times ... \times V}_{p} \longrightarrow W$$

uma aplicação $p$-linear. Então toda permutação $\sigma \in S_p$ determina outra aplicação $p$-linear $\sigma\varphi$ dada por

$$\sigma\varphi(x_1, ..., x_p) = \varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}).$$

Segue que $(\tau\sigma)\varphi = \tau(\sigma\varphi)$ e $i\varphi = \varphi$, onde $Id : W \longrightarrow W$ é a identidade.

**Definição 1.8.** Uma aplicação $p$-linear $\varphi : V \times ... \times V \longrightarrow W$ é chamada *alternada* se

$$\sigma\varphi = \epsilon_\sigma \varphi \quad para \quad todo \quad \sigma \in S_n,$$

Onde $\epsilon_\sigma = 1$ ou $\epsilon_\sigma = -1$. Uma condição equivalente é expressa na seguinte proposição:

**Proposição 1.4.** Uma aplicação $p$-linear $\varphi : \underbrace{V \times ... \times V}_{p} \longrightarrow W$ é alternada se, e somente se,

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = 0$$

sempre que $x_i = x_j$, para pelo menos um par de índices $(i, j)$ com $i \neq j$.

**Prova:** Suponhamos que $\varphi$ é alternada e que $x_i = x_j \quad (i \neq j)$. Seja $\tau$ uma transposição. Então

$$\varphi(x_1, ..., x_p) = -\tau\varphi(x_1, ..., x_p) = -\varphi(x_1, ..., x_p)$$

Logo, $\varphi(x_1, ..., x_p) = 0$. Reciprocamente, assuma que $\varphi$ satisfaz a igualdade $\varphi(x_1, ..., x_p) = 0$. Então se $\tau = (i, j)$ é uma transposição, segue que

$$\varphi(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_p) + \varphi(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_p) =$$

$$\varphi(x_1, ..., x_i + x_j, ..., x_i + x_j, ..., x_p) - \varphi(x_1, .., x_i, ..., x_i, ..., x_p) - \varphi(x_1, ..., x_j, ..., x_j, ..., x_p) = 0,$$

isto é,

$$\varphi + \tau\varphi = 0$$

Logo, $\varphi$ é alternada.

$\blacksquare$

**Proposição 1.5.** Sejam $W$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $\varphi : \underbrace{V \times ... \times V}_{p} \longrightarrow W$ uma aplicação $p$-linear e $f : \otimes^p V \longrightarrow W$a aplicação induzida por $\varphi$. Então $\varphi$ é alternada se, e somente se, $N^p(V) \subset Kerf$, onde $N^p(V)$ é o subespaço gerado por todos os produtos $x_1 \otimes ... \otimes x_p$ tal que $x_i = x_j$ para pelo menos uma par $i \neq j$.

**Prova:** $\varphi$ é alternativa se , e somente se,$\varphi(x_1, ..., x_p) = 0$, sempre que $x_i = x_j$ para pelo menos um par $(i, j), i \neq j$. Mas

$$\varphi(x_1, ..., x_p) = f(x_1 \otimes ... \otimes x_p)$$

e assim $\varphi$ é alternativa se, e somente se, $f$ se anula nos geradores de $N^p(V)$. Logo, $N^p(V) \subset Kerf$. $\blacksquare$

**Definição 1.9.** Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma $p$-ésima potência exterior de $V$ é um par $(E, \phi)$, onde $E$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\phi : \underbrace{V \times ... \times V}_{p} \longrightarrow E$ é uma aplicação alternada com a seguinte propriedade universal : Dado $H$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\varphi : V \times \cdots \times V \longrightarrow H$ uma aplicação $p$-linear alternada, existe uma única aplicação $\mathbb{K}$-linear $f : E \longrightarrow H$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times ... \times V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & H \\ & E \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

**Teorema 1.1.** *A $p$-ésima potência exterior de um espaço vetorial $V$ existe e é única, a menos de isomorfismo.*

**Prova:** Para provar a existência, definamos

$$E = \otimes^p V / N^p(V).$$

Seja $\phi : \underbrace{V \times ... \times V}_{p} \longrightarrow E$ a aplicação $p$-linear definida por

$$\phi(x_1, ..., x_p) = \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p).$$

Onde $\pi$ denota a projeção

$$\pi : \otimes^p V \longrightarrow \otimes^p V / N^p(V).$$

Verifica-se facilmente que $N^p(V) \subset Ker\pi$. Assim, pela proposição (1.5) temos que $\phi$ é alternada. Além disso, considerando $\varphi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \longrightarrow H$ uma aplicação $p$-linear alternada, sabemos que $\varphi$ determina uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $h : \otimes^p V \longrightarrow H$ tal que

$$h(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \varphi(x_1, ..., x_p). \tag{1.2}$$

Como $\varphi$ é alternada, a restrição $\varphi|_{N^p(V)}$ é nula e assim, pelo teorema fundamental das aplicações $\mathbb{K}$-lineares, existe

$$f : \otimes^p V / N^p(V) \longrightarrow H$$

tal que $f \circ \pi = h$ . Combinando esta relação com a igualdade (1.2), obtemos

$$\varphi(x_1, ..., x_p) = f \circ \pi(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = f \circ \phi(x_1, ..., x_p)$$

De onde temos que

$$\varphi = f \circ \phi$$

, ou seja, $\phi$ satisfaz a propriedade universal.
Suponhamos $(E, \phi)$ e $(E^{'}, \phi^{'})$ duas potências exteriores de $V$. Vamos mostrar que existe um isomorfismo entre $E$ e $E^{'}$. Com efeito, como $E$ é uma potência exterior de $V$, então existe uma única aplicação $\mathbb{K}$-linear $f$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
V \times ... \times V \arrow[rr, "i'"] \arrow[dr, "i"'] & & E' \\
& E \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Analogamente, como $E^{'}$ é uma potência exterior de $V$, existe uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $g$, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
V \times ... \times V \arrow[rr, "i'"] \arrow[dr, "i"'] & & E' \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

Consequentemente, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
V \times ... \times V \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "i"'] & & E \arrow[dl, dashed, "g \circ f"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

Como $1_E \circ i = i$, temos pela unicidade das aplicações $g$ e $f$ que $g \circ f = 1_E$. Analogamente mostra-se que $f \circ g = 1_{E'}$.
Portanto $f$ é um isomorfismo e $f^{-1} = g$.

■

Denotaremos a $p$-ésima potência exterior de $V$ por $\wedge^p V$, os elementos da forma $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ são chamados de *decomponíveis* e um elemento de $x \in \wedge^p V$ é chamado de *p-vetor*.

**Definição 1.10.** Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma *álgebra exterior* sobre $V$ é um par $(A, i)$, onde $A$ é uma álgebra associativa com unidade $1_A$ e $i : V \longrightarrow A$ é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear satisfazendo a seguinte propriedade universal: Dada uma álgebra $H$ e $\varphi : V \longrightarrow H$ uma aplicação $\mathbb{K}$-linear satisfazendo

$$\varphi(v)^2 = 0 \tag{1.3}$$

existe um único homomorfismo $f : A \longrightarrow H$ tal que o seguinte diagrama comuta :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & & H \\ & A \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

, isto é, $f \circ i = \varphi$.

**Teorema 1.2.** *A álgebra exterior de um espaço vetorial $V$ existe e é única, a menos de isomorfismo.*

**Prova:** Consideremos agora a seguinte soma direta

$$A = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \wedge^p V.$$

As projeções $\pi_p : \otimes^p V \longrightarrow \wedge^p V$ com núcleo $N^p(V)$ determinam a projeção

$$\pi : T(V) \longrightarrow A$$

com $Ker\pi = \sum_p N^p(V) = N(V)$. Assim temos um isomorfismo $\mathbb{K}$-linear

$$f : T(V)/N(V) \longrightarrow A$$

Como $T(V)/N(V)$ é uma álgebra associativa, existe uma multiplicação em $A$, a qual denotaremos por $\wedge$ , tal que $f$ torna-se um homomorfismo de álgebras. Assim, temos

$$u \wedge v = \pi(\tilde{u} \otimes \tilde{v}), \quad u \in A \quad e \quad v \in A,$$

Onde $\tilde{u} \in T(V),\ \tilde{v} \in T(V)$ são elementos tais que $\pi(\tilde{u}) = u$ e $\pi(\tilde{v}) = v$. Esta multiplicação em $A$ a torna uma álgebra associativa e com unidade $1_A$. Agora seja $H$ uma $\mathbb{K}$-álgebra e $\varphi : V \longrightarrow H$ uma aplicação $\mathbb{K}$-linear satisfazendo

$$\varphi(v)^2 = 0 \tag{1.4}$$

Notemos primeiro que a igualdade acima implica que

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) + \varphi(y) \cdot \varphi(x) = 0 \qquad x, y \in V. \tag{1.5}$$

De fato, se $x, y \in V$ são vetores quaisquer, então

$$0 = (\varphi(x+y))^2 = \varphi(x+y)\varphi(x+y) = \varphi(x)^2 + \varphi(x)\cdot\varphi(y) + \varphi(y)\cdot\varphi(x) + \varphi(y)^2 = \varphi(x)\cdot\varphi(y) + \varphi(y)\cdot\varphi(x).$$

Para definir $h$ consideremos, para todo $p \geq 2$, uma aplicação $p$-linear

$$\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \longrightarrow H$$

definida por

$$\alpha(x_1, .., x_p) = \varphi(x_1) \cdot ... \cdot \varphi(x_p).$$

Então, segue de (1.5) que $\alpha$ é alternada e consequentemente, existe uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $h^p : \wedge^p V \longrightarrow H$ tal que

$$h^p(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \varphi(x_1) \cdot ... \cdot \varphi(x_p) \qquad p \geq 2.$$

Definamos $h : A \longrightarrow H$ uma aplicação linear cuja restrição a $\wedge^p V$ é igual a $h^p, p \geq 0$. Para provar que $h$ é um homomorfismo, sejam $u = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ e $v = x_{p+1} \wedge \cdots \wedge x_{p+q}$ dois elementos decomponíveis. Então

$$h(u \wedge v) = h(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p+q}) = \varphi x_1 \cdot ... \cdot \varphi x_{p+q} = (\varphi x_1 \cdot ... \cdot \varphi x_p)(\varphi x_{p+1} \cdot ... \cdot \varphi x_{p+q})$$

$$h(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) \cdot h(x_{p+1} \wedge \cdots \wedge x_{p+q}) = h(u) \cdot h(v).$$

■

**Notação:** Denotaremos a álgebra exterior de $V$ por $\bigwedge V$.

A multiplicação

$$\wedge : \wedge^p V \times \wedge^q V \longrightarrow \wedge^{p+q} V$$

definida por

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, v_{p+1} \wedge \cdots \wedge v_q) \longmapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+q}$$

Torna $\bigwedge V$ uma álgebra (associativa) $\mathbb{Z}$-graduada não negativa. A álgebra exterior não é comutativa porém ela possui a seguinte propriedade que substitui a comutatividade, isto é,

$$u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u \quad u \in \wedge^p V, \quad v \in \wedge^q V.$$

Daí segue que,

$$u \wedge v = v \wedge u, \quad \text{se } p \text{ ou } q \text{ é par.} \tag{1.6}$$

e

$$u \wedge u = 0, \quad \text{se } p \text{ é ímpar.} \tag{1.7}$$

# Capítulo 2

# Álgebras de Clifford

As álgebras de Clifford são álgebras associativas que generalizam sistemas numéricos como os números reais, complexos e quatérnios, além da sua importância nas aplicações á várias áreas de pesquisa como a física teórica, física quântica e geometria. Neste capítulo vamos apresentar as álgebras de Clifford associada a um espaço quadrático sob três pontos de vista: categórico, original e como quantização da álgebra exterior.

## 2.1 Definição e exemplos

Seja $(V, \Phi)$ um espaço quadrático e seja $A$ uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa. Dizemos que uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $\phi : V \longrightarrow A$ é uma *aplicação de Clifford* se para todo $v \in V$,

$$\phi(v)^2 = \Phi(v) \cdot 1_A \tag{2.1}$$

**Definição 2.1.** Seja $(V, \Phi)$ um espaço quadrático. Uma *álgebra de Clifford* é um par $(Cl(V, \Phi), \phi)$, onde $Cl(V, \Phi)$ é uma álgebra (associativa) juntamente com uma aplicação de Clifford $\phi : V \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ satisfazendo a seguinte propriedade universal:
**(Cl)** Dada uma $\mathbb{K}$-álgebra $A$ (associativa) e uma aplicação de Clifford $\varphi : V \longrightarrow A$, existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $f : Cl(V, \Phi) \longrightarrow A$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & A \\ & Cl(V,\Phi) \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

**Observação 2.1.** A condição **(Cl)** é equivalente as seguintes condições :

$(Cl_1)$ $Cl(V,\Phi)$ é gerada como álgebra por $Im\phi$ e pela unidade $1_{Cl(V,\Phi)}$;

$(Cl_2)$ Para toda a aplicação de Clifford $\varphi : V \longrightarrow A$ existe um homomorfismo de álgebras $f : Cl(V,\Phi) \longrightarrow A$ tal que o diagrama (2.2) é comutativo.

Com efeito, é claro que as condições $(Cl_1)$ e $(Cl_2)$ implicam a definição. Reciprocamente, supondo $(Cl)$, a condição $(Cl_2)$ é imediatamente satisfeita. Para estabelecermos a condição $(Cl_1)$ denotemos por $H$ a subálgebra de $Cl(V,\Phi)$ gerada por $Im\phi$ e $\tilde{\phi}$ sendo $\phi$, considerada como aplicação em $H$. Então, $\tilde{\phi}$ é claramente uma aplicação Clifford. Consequentemente existe um único homomorfismo $f : Cl(V,\Phi) \longrightarrow H$ tal que

$$f \circ \phi = \tilde{\phi}.$$

Por outro lado, se $i : H \longrightarrow Cl(V,\Phi)$ é a aplicação inclusão, temos

$$i \circ \tilde{\phi} = \phi.$$

Agora consideremos a aplicação $i \circ f : Cl(V,\Phi) \longrightarrow Cl(V,\Phi)$. Então das relações acima, temos

$$(i \circ f) \circ \phi = i \circ (f \circ \phi) = i \circ \tilde{\phi} = \phi.$$

Por outro lado,

$$I \circ \phi = \phi,$$

onde $I$ é a identidade em $Cl(V,\Phi)$. Assim, a unicidade implica que

$$i \circ f = I.$$

Portanto $i$ é sobrejetiva e assim $H = Cl(V,\Phi)$.

**Teorema 2.1.** *Dado $(V,\Phi)$ um espaço quadrático a álgebra de Clifford $Cl(V,\Phi)$ existe e é única a menos de isomorfismo.*

**Prova:** Para provarmos a existência, consideremos a álgebra tensorial $T(V)$ e seja $J$ o ideal gerado pelos os elementos da forma

$$v \otimes v - \Phi(v).1, \quad v \in V, \quad \text{onde } \ 1 \in \otimes^0 V = \mathbb{K}$$

Definamos $Cl(V, \Phi) := T(V)/J$ e seja $\pi : T(V) \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ a projeção canônica.
Seja $\phi : V \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ dada por

$$\phi = \pi \circ i \quad \text{onde} \quad i : V \longrightarrow T(V) \quad \text{é a aplicação inclusão.}$$

**Afirmação 1.** $(Cl(V, \Phi), \phi)$ satisfaz $(Cl_1)$ e $(Cl_2)$.

De fato, observemos inicialmente que, para $v \in V$,

$$(\phi(v))^2 = (\pi \circ i(v))^2 = \pi(i(v))^2 = \pi(v \otimes v) = \Phi(v).1.$$

Como $T(V)$ é gerada por $V$ e $\pi$ é sobrejetiva, temos que $\phi$ satisfaz a condição $(Cl_1)$. Para estabelecermos a condição $(Cl_2)$, seja $\varphi : V \longrightarrow A$ uma aplicação $\mathbb{K}$-linear tal que

$$\varphi(v)^2 = \Phi(v)., 1$$

pela propriedade universal da álgebra tensorial $\varphi$ estende-se para um homomorfismo

$$h : T(V) \longrightarrow A.$$

Este homomorfismo satisfaz

$$h(v \otimes v - \Phi(v).1) = \varphi(v)^2 - \Phi(v)1_A = 0.$$

Logo, $J \subset Kerh$ e assim existe $f : Cl(V, \Phi) \longrightarrow A$ tal que $f \circ \phi = \varphi$, com efeito,

$$f \circ \phi(v) = f \circ \pi \circ i(v) = f \circ \pi(v) = h(v) = \varphi(v) \quad x \in V.$$

Portanto a condição $(Cl_2)$ é satisfeita.
Agora, para provarmos a unicidade consideremos $(Cl(V, \Phi), \phi)$ e $(\tilde{C}l(V, \Phi), \tilde{\phi})$ duas álgebras de Clifford de $(V, \Phi)$. Então existem únicos homomorfismos $f : Cl(V, \Phi) \longrightarrow \tilde{C}l(V, \Phi)$ e $g : \tilde{C}l(V, \Phi) \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ tais que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\tilde{\phi}"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \tilde{C}l(V,\Phi) \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& Cl(V,\Phi) &
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\tilde{\phi}"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \tilde{C}l(V,\Phi) \\
& Cl(V,\Phi) \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

, isto é, $\tilde{\phi} = f \circ \phi \quad e \quad \phi = g \circ \tilde{\phi}$.

Daí segue que

$$\tilde{\phi} = (f \circ g) \circ \tilde{\phi} \quad e \quad \phi = (g \circ f) \circ \phi.$$

Assim, pela condição **(Cl)** temos

$$f \circ g = I_{\tilde{Cl}} \quad e \quad g \circ f = I_{Cl}.$$

Logo, $f$ e $g$ são isomorfismos tais que $g = f^{-1}$.

■

**Observação 2.2.** Como $\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v) = 2B(u,v)$, temos pela condição (2.1), a seguinte igualdade

$$\phi(u)\phi(v) + \phi(v)\phi(u) = 2B(u,v).1_{Cl(v,\Phi)}. \tag{2.3}$$

Consequentemente, se $dimV = n$ e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é uma base ortogonal de $V$, então igualdade (2.3) se reescreve como

$$\phi(e_i)\phi(e_j) + \phi(e_j)\phi(e_i) = 0 \quad para \quad todo \quad i \neq j.$$

Vejamos agora os exemplos clássicos de álgebras de Clifford:

**Exemplo 2.1.** Seja $V = \mathbb{R}$ e $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x) = -x^2$. Vamos mostrar que a álgebra de Clifford $Cl(\mathbb{R}, \Phi)$ é $\mathbb{C}$. Para isto, consideremos a aplicação $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\phi(x) = xi$. Observemos que $\phi$ é uma aplicação de Clifford,

$$\phi^2(x) = (xi)^2 = -x^2 = \Phi(x).1_{\mathbb{C}}.$$

Agora, seja $A$ uma $\mathbb{R}$-álgebra e $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow A$ uma aplicação $\mathbb{R}$-linear tal que

$$\varphi(x)^2 = \Phi(x).1_A.$$

Consideremos o homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(a+bi) = a + b\varphi(1)$, temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & A \\ & \mathbb{C} \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

De fato, $f \circ \phi(x) = f(xi) = x\varphi(1) = \varphi(x)$. Por outro lado seja $g : \mathbb{C} \longrightarrow A$ um homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras tal que,

$$g \circ \phi = \varphi.$$

Então, $g(a+bi) = ag(1) + bg(i) = ag(1) + bg(\phi(1)) = a \cdot 1 + b\varphi(1) = f(a+bi)$. Portanto, $Cl(\mathbb{R}, \Phi) = \mathbb{C}$.

**Exemplo 2.2.** Seja $V = \mathbb{R}$ e $\Phi(a) = a^2$ a forma quadrática associada. O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com o produto $(a,b).(c,d) = (ac+bd, ad+bc)$,é uma álgebra associativa com (1,0) como elemento unitário. Vamos mostrar que $Cl(\mathbb{R}, \Phi)$ é $\mathbb{R}^2$. Com efeito, consideremos a aplicação $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(a) = (0,a)$, então $\phi(a)^2 = a^2(1,0)$. Agora, seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow A$, um homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras definido por $f(a,b) = a.1_A + b.\varphi(1)$. Então temos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & A \\
& \mathbb{R}^2 \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato, $f \circ \phi(x) = f(\phi(x)) = f(0,x) = 0 \cdot 1 + x \cdot \varphi(1) = \varphi(x)$. Por outro lado seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow A$ um homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras tal que,

$$g \circ \phi = \varphi$$

Então, $g(a,b) = g((a,0)+(0,b)) = g(a,0)+g(0,b) = ag(1,0)+bg(0,1) = a\cdot 1_A+bg(\phi(1)) = a \cdot 1_A + b\varphi(1) = f(a,b)$.

**Exemplo 2.3.** Seja $V = \mathbb{K}$ e $\Phi = 0$ a forma quadrática nula. Neste caso, $Cl(\mathbb{K}, \Phi) = \mathbb{K}[x]/(x^2)$, pois $\bigwedge \mathbb{K} = \mathbb{K}[x]/(x^2)$. Isto é generalizado no seguinte exemplo:

**Exemplo 2.4.** Seja $V$ um espaço vetorial e $\Phi$ é a forma quadrática nula em $V$, então $Cl(V, \Phi) = \bigwedge V$, pois como $Cl(V, \Phi) = T(V)/\langle v \otimes v - \Phi(v).1 \rangle$, temos que

$$Cl(V, \Phi) = T(V)/\langle v \otimes v \rangle = \bigwedge V$$

**Exemplo 2.5.** Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear em $\mathbb{R}^2$ definida por $B((a,b),(c,d)) = -(ac+bd)$, cuja forma quadrática associada é $\Phi((a,b)) = -(a^2+b^2)$.

Consideremos a aplicação $\mathbb{R}$-linear

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{H}$$
$$(a,b) \longmapsto ai + bj,$$

onde $\mathbb{H}$ é a álgebra dos quatérnios, temos que $\phi(a,b)^2 = (ai+bj)^2 = -(a^2+b^2) = \Phi(a,b).1_{\mathbb{H}}$. Vamos mostrar que $\mathbb{H}$ é a álgebra de Clifford $Cl(\mathbb{R}^2,\Phi)$. De fato, sejam $A$ uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa e $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow A$ uma aplicação $\mathbb{R}$-linear, tal que

$$\varphi(a,b)^2 = \Phi(a,b).1_A$$

Consideremos o homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $f : \mathbb{H} \longrightarrow A$ dado por $f(a+bi+cj+dk) = a + b\varphi(1,0) + c\varphi(0,1) + d\varphi(1,0)\varphi(0,1)$, então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & A \\ & \mathbb{H} \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

De fato, $f \circ \phi(a,b) = f(ai+bj) = a\varphi(1,0) + b\varphi(0,1) = \varphi(a,0) + \varphi(0,b) = \varphi(a,b)$. Além disso $f$ é única. De fato, seja $g : \mathbb{H} \longrightarrow A$ um homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras tal que

$$g \circ \phi = \varphi.$$

Então, $g(a+bi+cj+dk) = a + bg(i) + cg(j) + dg(k) = a + bg(\phi(1,0)) + cg(\phi(0,1)) + dg(\phi(1,0)\phi(0,1)) = a+b\varphi(1,0)+c\varphi(0,1)+d\varphi(1,0)\varphi(0,1) = f(a+bi+cj+dk)$. Portanto, $Cl(\mathbb{R}^2,\Phi) = \mathbb{H}$.

**Exemplo 2.6.** Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ definida por $\Phi(x,y) = x^2 - y^2$. A álgebra de Clifford $Cl(\mathbb{R}^2,\Phi)$ é $M_2(\mathbb{R})$ . De fato, consideremos $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ uma aplicação $\mathbb{K}$-linear definida por $\phi(x,y) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & -x \end{bmatrix}$.
Observemos que

$$\phi(x,y)^2 = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & -x \end{bmatrix}^2 = x^2 - y^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \Phi(x,y)1_{M_2(\mathbb{R})}.$$

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow A$ uma aplicação $\mathbb{R}$-linear. Consideremos o homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow A$ definido por

$$f \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{a+d}{2}1_A + \frac{a-d}{2}\varphi(1,0) + \frac{c-b}{2}\varphi(0,1) - \frac{c+b}{2}\varphi(1,0)\varphi(0,1)$$

.

Então o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & A \\ & M_2(\mathbb{R}) \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato, $f \circ \phi(a,b) = f \begin{bmatrix} a & -b \\ b & -a \end{bmatrix} = a\varphi(1,0) + b\varphi(0,1) = \varphi(a,b)$. Por outro lado, seja $g : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow A$ um homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, tal que

$$g \circ \phi = \varphi.$$

Então, $g \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{a+d}{2} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{a-d}{2} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{c-b}{2} g \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{c+b}{2} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{a+d}{2} 1_A + \frac{a-d}{2}\varphi(1,0) + \frac{c-b}{2}\varphi(0,1) - \frac{c+b}{2}\varphi(1,0)\varphi(0,1) = f(a,b)$. Portanto, $M_2(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Clifford para $\mathbb{R}^2$.

**Exemplo 2.7.** Vamos apresentar as matrizes de Pauli e suas relações com as álgebras de Clifford. Antes, consideremos a seguinte tabela:

| Notação | Matriz | Ação |
|---|---|---|
| I | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | Identidade |
| -I | $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ | rotação de ângulo $\pi$ |
| J | $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ | rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ |
| -J | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ | rotação de ângulo $-\frac{\pi}{2}$ |
| U | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ | reflexão em torno de $y = 0$ |
| -U | $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | reflexão em torno de $x = 0$ |
| Q | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ | reflexão em torno de $y = x$ |
| -Q | $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ | Reflexão em torno de $y = -x$ |

Estas matrizes satisfazem as seguintes relações

$$Q^2 = U^2 = J^4 = I, \quad QU = -UQ = J, \quad QJ = -JQ = U, \quad JU = -UJ = Q.$$

As *matrizes Spin de Pauli* $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bem como as *matrizes associadas de Pauli* $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ são descritas na tabela abaixo.

| Notação | Matriz | Notação | Matriz |
|---|---|---|---|
| $\sigma_0 = I$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\tau_0 = I$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $\sigma_1 = Q$ | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ | $\tau_1 = iQ$ | $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ |
| $\sigma_2 = iJ$ | $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ | $\tau_2 = -J$ | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ |
| $\sigma_3 = U$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ | $\tau_3 = iU$ | $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ |

Como elementos da álgebra associativa $M_2(\mathbb{C})$, elas satisfazem

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I, \quad \tau_0^2 = I \quad \text{e} \quad \tau_1^2 = \tau_2^2 = \tau_3^2 = -I$$

Enquanto

$$\sigma_j \sigma_k = -i\sigma_l, \quad \tau_j \tau_k = \tau_l,$$

onde $\{j,k,l\}$ é uma permutação cíclica de $\{1,2,3\}$. As matrizes de Pauli são importantes pois se identificam com as álgebras Clássicas de Clifford no seguinte sentido:
Definamos

$$U_{0,0} = \{\lambda\sigma_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad U_{0,1} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_{1,0} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_{0,2} = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{bmatrix}, \quad x_j \in \mathbb{R} \right\}$$

É de fácil verificação que cada um destes conjuntos são subálgebras reais de $M_2(\mathbb{C})$. Além disso, das aplicações de Clifford definidas abaixo

$$0 \longmapsto 0, \quad x \longmapsto x\tau_2, \quad x \longmapsto x\sigma_1, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1\tau_1 + x_2\tau_2$$

temos os seguintes isomorfismos

$$U_{0,0} \cong \mathbb{R}, \quad U_{1,0} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad U_{0,1} \cong \mathbb{C}, \quad U_{0,2} \cong \mathbb{H}.$$

Sejam $QVec$ e $AA$ as categorias dos espaços quadráticos e das álgebras associativas respectivamente (veja exemplos B.3 e B.4 ).

**Proposição 2.1.** A álgebra de Clifford define um funtor $Cl$ da categoria dos espaços quadráticos $QVec$ para a categoria das álgebras associativas $AA$.

**Prova:** Sejam $(V, \Phi_V)$ e $(W, \Phi_W)$ espaços quadráticos e $Cl(V, \Phi_W)$ e $Cl(W, \Phi_W)$ as suas álgebras de Clifford correspondentes. Agora, seja $f : V \longrightarrow W$ uma isometria em $QVec$ (ver B.3) , isto é, $\Phi_W \circ f = \Phi_V$ e consideremos $\phi_W \circ f : V \longrightarrow Cl(W, \Phi_W)$. Observemos que ela é uma aplicação de Clifford:

$$(\phi_W \circ f)(v)^2 = (\phi_W(f(v)))^2 = \Phi_W(f(v)).1_W = \Phi_V(v).1_W,$$

onde $1_W$ é o elemento unitário de $Cl(W, \Phi_W)$. Então pela propriedade universal de $Cl(V, \Phi)$, existe um único homomorfismo de álgebras $Cl(f) : Cl(V, \Phi_V) \longrightarrow Cl(W, \Phi_W)$, tal que

$$Cl(f) \circ \phi_V = \phi_W \circ f.$$

Em particular, se $V = W$, e a isometria considerada é a identidade segue da unicidade que $Cl(Id) = Id_{Cl(V,\Phi_V)}$ Mais ainda, se $(X, \Phi_X)$ é um terceiro espaço quadrático e $g : W \longrightarrow X$ é uma isometria de $W$ em $X$ com $g \circ \Phi_X = \Phi_W$, então a aplicação de Clifford $\phi_X \circ g : W \longrightarrow Cl(X, \Phi_X)$ induz um único homomorfismo de álgebras $Cl(g) : Cl(W, \Phi_W) \longrightarrow Cl(X, \Phi_X)$. Agora verificando-se que a composição de duas isometrias é ainda uma isometria e que a aplicação $\phi_X \circ (g \circ f)(x) : V \longrightarrow Cl(X, \Phi_X)$ é uma aplicação de Clifford, obtemos um único homomorfismo de álgebras $Cl(g \circ f) : Cl(V, \Phi_V) \longrightarrow Cl(X, \Phi_X)$ que pela unicidade é igual a composição $Cl(g) \circ Cl(f)$. Isto mostra que o funtor $Cl$ é covariante.

■

**Proposição 2.2.** A aplicação de Clifford $\phi : V \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ é injetiva.

**Prova:** Seja $\mu : \bigwedge V \longrightarrow End(\bigwedge V)$ o homomorfismo de álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas, que a cada $x \in \bigwedge V$ associa o operador de multiplicação $\mu(x)$, definido por $\mu(x)v = x \wedge v$ e seja $I : V^* \longrightarrow End(\bigwedge V)$, que a cada $h \in V^*$ associa um operador de substituição definido por

$$I(h)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle x_i, h \rangle x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_p$$

De C.6, temos que $I$ induz pela propriedade universal da álgebras exterior um único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras $t : \bigwedge V^* \longrightarrow End(\bigwedge V)$. Além disso, consideremos $B$ uma aplicação bilinear e

$$\begin{array}{rccccl} B^\bullet : & V & \longrightarrow & V^* & & \\ & v & \longmapsto & B^\bullet(v) : & V \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & u \longmapsto & B^\bullet(v)(u) = B(u, v) \end{array}$$

De posse dessas aplicações, seja $f : V \longrightarrow End(\bigwedge V)$ a aplicação $\mathbb{K}$-linear definida por $f(v) = \mu(v) + t(B^\bullet(v))$. Pela propriedade universal da álgebra tensorial existe um único homomorfismo de álgebras $\tilde{f} : T(V) \longrightarrow End(\bigwedge V)$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & End(\bigwedge V) \\ & T(V) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

, isto é, $\tilde{f} \circ i = f$.

Além disso, das relações de comutação definidas em C.3,C.6 e C.8, observamos que a aplicação $\mathbb{K}$-linear $f$ satisfaz a seguinte igualdade:

$$f(v)f(w) + f(w)f(v) = \langle B^\bullet(w), v\rangle + \langle B^\bullet(v), w\rangle = 2B(v, w).$$

Ou seja, $f$ é uma aplicação de Clifford. Logo, existe um único homomorfismo de álgebras

$$f_{Cl} : Cl(V, \Phi) \longrightarrow End(\bigwedge V) \tag{2.4}$$

,tal que, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\phi=\pi\circ i"'] & & End(\bigwedge V) \\ & Cl(V,\Phi) \arrow[ur, dashed, "f_{Cl}"'] & \end{tikzcd}$$

, onde $\pi : T(V) \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ é a projeção canônica. Logo, se $\pi \circ i(v) = 0$, então $f(v) = 0$, isto é, $\mu(v) + t(B^\bullet(v))(x) = 0 \Rightarrow v \wedge x + B(v, x) = 0$ para todo $x \in \bigwedge V$, em particular para $x = 1$ temos

$$0 = f(v)(1) = \mu(v)(1) + t(B^\bullet(v))(1) = v$$

Portanto $\phi : V \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ é injetiva.

∎

**Observação 2.3.** Devido a injetividade de $\phi$, vamos de agora em diante por simplicidade de notação, escrever $v$ ao invés de $\phi(v)$. Assim, a condição (2.1) pode ser reescrita como sendo

$$v^2 = \Phi(v) \cdot 1$$

e a relação (2.3) é reescrita como

$$uv + vu = 2B(u, v)\cdot$$

Além disso, pela condição $(Cl_1)$ a álgebra de Clifford é gerada pelo espaço vetorial $V$ e pela unidade $1_{Cl(V,\Phi)}$ e se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $V$, então

$$e_j^2 = \Phi(e_j) \cdot 1, \quad 1 \leq j \leq n$$

e

$$e_j e_k = -e_k e_j, \quad 1 \leq j, k \leq n, j \neq k.$$

**A $\mathbb{Z}_2$-graduação de $Cl(V, \Phi)$**

Sabemos que a álgebra de Clifford $Cl(V, \Phi)$ define um funtor $Cl$ da categoria dos espaços quadráticos $QVec$ para a categoria das álgebras associativas $AA$. Em particular, dada a isometria $f : V \longrightarrow V$ definida por $f(v) = -v$,existe um único $\mathbb{K}$-automorfismo de álgebras $Cl(f) : Cl(V, \Phi) \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ satisfazendo as seguintes propriedades :

$$Cl(f) \circ Cl(f) = Id \quad \text{e} \quad Cl(f)(\phi(v)) = -\phi(v) \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Ou seja, esse automorfismo é uma *involução* a qual denotaremos por $\alpha$. Desta forma, a álgebra de Clifford $Cl(V, \Phi)$ pode ser decomposta nos seguintes subespaços

$$Cl(V, \Phi) = Cl^0(V, \Phi) \oplus Cl^1(V, \Phi), \tag{2.5}$$

onde $Cl^0(V, \Phi) = \{x \in Cl(V, \Phi) | \alpha(x) = x\}$ e $Cl^1(V, \Phi) = \{x \in Cl(V, \Phi) | \alpha(x) = -x\}$. Além disso,

$$Cl^0(V, \Phi) \cdot Cl^0(V, \Phi) \subset Cl^0(V, \Phi), \quad Cl^0(V, \Phi) \cdot Cl^1(V, \Phi) \subset Cl^1(V, \Phi)$$
$$Cl^1(V, \Phi) \cdot Cl^1(V, \Phi) \subset Cl^0(V, \Phi), \quad Cl^1(V, \Phi) \cdot Cl^0(V, \Phi) \subset Cl^1(V, \Phi).$$

Chamando de grau zero o elemento 0 e grau $r$ o monômio da forma $x_1 \cdots x_r$, temos que $Cl^0(V, \Phi)$ é uma subálgebra da álgebra de Clifford, cujos elementos são combinações lineares de monômios de grau *par*, enquanto que $Cl^1(V, \Phi)$ é apenas um subespaço, cujos elementos são combinações lineares de monômios de grau *ímpar*. Os elementos de $Cl^0(V, \Phi)$ são chamados elementos *homogêneos* de grau par e os elementos de $Cl^1(V, \Phi)$

são chamados de elementos *homogêneos* de grau ímpar. Isto define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $Cl(V,\Phi)$, razão pela qual chamaremos $\alpha$ de *involução com grau.* A de Clifford $Cl(V,\Phi)$ é chamada de *álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada ou superálgebra.* A álgebra oposta de Clifford, a qual denotamos $Cl^{op}(V,\Phi)$, é a álgebra de Clifford $Cl(V,\Phi)$ com a multiplicação definida por $x \cdot^{op} y = y \cdot x$, a partir dela outra involução de fundamental importância no estudo das álgebras de Clifford, é obtida da seguinte forma: Considere o automorfismo $f : V \longrightarrow V$ definido por $f(x) = x$, obtemos um anti-automorfismo $Cl(f) : Cl(V,\Phi) \longrightarrow Cl(V,\Phi)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$Cl(f)(v \cdot w) = Cl(f)(w) \cdot Cl(v) \quad \text{e} \quad Cl(f)(\phi(v)) = \phi(v) \quad \text{para todo} \quad v, w \in V.$$

Por simplicidade de notação esta involução será denotada por $t$.

**Observação 2.4.** Se $V$ possui dimensão finita $n$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de $V$, pela injetividade de $\phi$, os homomorfismos $\alpha$ e $t$ ficam definidos na base $\{e_1, ..., e_n\}$ da seguinte forma:

$$t(e_i) = e_i$$

$$t(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}) = e_{i_k} e_{i_{k-1}} \cdots e_{i_1}$$

onde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ e $t(1) = 1$. A aplicação $\alpha$ é definido por

$$\alpha(e_i) = -e_i$$

$$\alpha(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}) = (-1)^k e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k},$$

onde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ e $\alpha(1) = 1$.

### A álgebra de Clifford e a álgebra exterior

Existem algumas relações importantes entre a álgebra de Clifford $Cl(V,\Phi)$ e a álgebra exterior de $V$. Antes de apresentá-las, vejamos a seguinte definição:

**Definição 2.2.** Seja $A$ é uma $K$-álgebra. Uma filtração $F$ de $A$ é uma família de subespaços $\{F^i A\}_{i \geq 0}$ de $A$, tais que

(i) $K = F^0 A \subset F^1 A \subset \cdots \subset F^r A \subset F^{r+1} \subset \cdots \subset A$

(ii) $\bigcup_r F^r A = A$

(iii) $F^r A \cdot F^s A \subset F^{r+s} A, \quad r, s \geq 0$

A *álgebra graduada associada* de $(A, F)$ é definida como

$$Gr(A, F) = \bigoplus_r F^r A / F^{r-1} A,$$

onde o produto é dada por

$$(a + F^{r-1}A)(b + F^{s-1}A) = ab + F^{r+s-1}A, \quad a \in F^r A, b \in F^s A. \tag{2.6}$$

Toda álgebra graduada possui uma filtração natural, que no caso da álgebra tensorial $T(V)$ é dada por $\tilde{F}^0 T(V) \subset \tilde{F}^1 T(V) \subset \tilde{F}^2 T(V) \subset \cdots$, onde cada subespaço é definido por

$$\tilde{F}^r T(V) = \bigoplus_{s \leq r} \otimes^s V.$$

Se definirmos $F^i Cl = \pi_\Phi(\tilde{F}^i T(V))$, onde $\pi_\Phi$ denota a projeção canônica da álgebra tensorial de $V$ na álgebra de Clifford $Cl(V, \Phi)$, obtemos uma filtração $F^0 Cl \subset F^1 Cl \subset F^2 Cl \subset \cdots$ da álgebra de Clifford $Cl(V, \Phi)$. Assim, a álgebra de Clifford $Cl(V, \Phi)$ é uma álgebra filtrada. Da multiplicação acima, induze-se uma aplicação

$$(F^r Cl / F^{r-1} Cl) \times (F^t Cl / F^{t-1} Cl) \longrightarrow (F^{r+t} Cl / F^{r+t-1} Cl).$$

Denotando $\mathbb{F}^* Cl(V, \Phi) = \bigoplus_{r \geq 0} \mathbb{F}^r$, onde $\mathbb{F}^r = F^r Cl / F^{r-1} Cl$, obtemos a álgebra graduada associada.

**Proposição 2.3.** Para toda forma quadrática $\Phi$, a álgebra graduada associada de $Cl(V, \Phi)$ é isomorfa a álgebra exterior $\bigwedge V$.

**Prova:** A aplicação $\varphi_r : \otimes^r V \longrightarrow F^r Cl \pi_F \longrightarrow \mathbb{F}^r$, dada por $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \longmapsto [v_{i_1} \cdots v_{i_r}]$ é $r$-linear alternada e portanto induz uma aplicação linear $\psi_r : \wedge^r V \longrightarrow \mathbb{F}^r$. Claramente cada $\psi_r$ é sobrejetiva. Por outro lado, as aplicações $\psi_r$ induzem um homomorfismo sobrejetivo de álgebras graduadas $\psi : \bigwedge V \longrightarrow \mathbb{F}^* Cl(V, \Phi)$. Afirmamos que $\psi$ é injetiva. Com efeito, o núcleo de cada $\varphi_r : \otimes^r V \longrightarrow \mathbb{F}^r$ é constituído de somandos $r$-homogêneos de elementos $x \in J = \langle v \otimes v - \Phi(v) \rangle$ de grau $\leq r$. Assim, qualquer elemento $x \in Ker \varphi_r$ se escreve como uma soma finita $x = \sum a_i \otimes (v_i \otimes v_i - \Phi(v_i)) \otimes b_i$, onde $v_i \in V$ e $a_i, b_i$ são tensores tais que $\deg a_i + \deg b_i \leq r - 2$. Os elementos da parte homogênea de $x$ é $\sum a_i \otimes (v_i \otimes v_i) \otimes b_i$, onde $(\deg a_i + \deg b_i = r - 2)$. Como $v_i \wedge v_i = 0$ para todo $i \geq 0$, vemos que a imagem de $x$ na álgebra exterior é zero. Consequentemente a aplicação $\psi_r : \wedge^r V \longrightarrow \mathbb{F}^r$ é injetiva. Como a aplicação $\psi : \bigwedge V \longrightarrow \mathbb{F}^*$ é decomposta na soma direta das aplicações $\psi_r$, resulta que $\psi : \bigwedge V \longrightarrow \mathbb{F}^*$ é injetiva. $\blacksquare$

**Observação 2.5.** A Proposição anterior diz que o produto de Clifford é um aprimoramento do produto exterior que é determinado pela forma quadrática $\Phi$. Lembremos que $Cl(V,0) = \bigwedge V$ .

**Proposição 2.4.** Seja $\mathbb{K}$ uma corpo de característica diferente de zero. Então existe um monomorfismo canônico como espaços vetoriais

$$\bigwedge V \hookrightarrow Cl(V,\Phi) \tag{2.7}$$

compatível com as filtrações.

**Prova:** Seja $f : V \times \cdots \times V \longrightarrow Cl(V,\Phi)$ a aplicação $r$-linear definida por

$$f(v_1 \cdots v_r) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma} sign(\sigma) v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(r)}, \tag{2.8}$$

onde $\sigma \in S_r$. Claramente $f$ induz uma aplicação linear $\tilde{f} : \wedge^r V \longrightarrow Cl(V,\Phi)$ cuja imagem está em $F^r Cl$. A composição de $\tilde{f}$ com a projeção $F^r Cl \longrightarrow \mathbb{F}^r$ resulta na aplicação $\psi_r : \wedge^r V \longrightarrow Cl(V,\Phi)$ obtida na prova da proposição anterior. Consequentemente $\tilde{f}$ é injetiva, e portanto a soma direta dessas aplicações é uma aplicação injetiva.

$\blacksquare$

Já vimos que a álgebra de Clifford é uma superálgebra, isto é, $\mathbb{Z}_2$-graduada. Vamos introduzir agora o *super produto tensorial* $A\widehat{\otimes}B$ de duas super álgebras $A = A^0 \oplus A^1$ e $B = B^0 \oplus B^1$. A estrutura vetorial é dada pelo produto tensorial $A \otimes B$ e a multiplicação é definida por

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{ij}(aa') \otimes (bb')$$

para $a' \in A^i$ e $b \in B^j$.

O super produto tensorial é uma super álgebra ou $\mathbb{Z}_2$-graduada com

$$(A\widehat{\otimes}B)^0 = A^0 \otimes B^0 + A^1 \otimes B^1$$

$$(A\widehat{\otimes}B)^1 = A^1 \otimes B^0 + A^0 \otimes B^1.$$

Sabemos que a soma direta de dois espaços quadráticos $(V,\Phi_V)$ e $(W,\Phi_W)$ é um espaço quadrático denotado por $(V \oplus W, \Phi_V \oplus \Phi_W)$. Uma questão natural é a de relacionarmos a álgebra de Clifford $Cl(V \oplus W, \Phi_V \oplus \Phi_W)$ associada ao espaço quadrático

$(V \oplus W, \Phi_V \oplus \Phi_W)$ com as álgebras de Clifford $Cl(V, \Phi_V)$ e $Cl(W, \Phi_W)$. A resposta é simples pois leva-se em consideração a $\mathbb{Z}_2$-graduação da álgebra de Clifford como mostraremos a seguir.

Sejam $(V, \Phi)$ e $(W, \Psi)$ dois espaços quadráticos de dimensão finita. Consideremos a forma quadrática $\Phi \oplus \Psi$, em $V \oplus W$ definida por

$$(\Phi \oplus \Psi)(v, w) = \Phi(v) + \Psi(w).$$

Se escrevemos $\phi_V : V \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ e $\phi_W : W \longrightarrow Cl(W, \Psi)$, podemos definir uma aplicação linear

$$f : V \oplus W \longrightarrow Cl(V, \Phi)\widehat{\otimes} Cl(W, \Psi)$$

definida por

$$f(v, w) = \phi_V(v) \otimes 1_{Cl(W,\Psi)} + 1_{Cl(V,\Phi)} \otimes \phi_W(w).$$

**Proposição 2.5.** A aplicação linear $f$ induz um isomorfismo de álgebras

$$\tilde{f} : Cl(V \oplus W, \Phi_V \oplus \Phi_W) \longrightarrow Cl(V, \Phi)\widehat{\otimes} Cl(W, \Psi).$$

**Prova:** Para $(v, w) \in V \oplus W$ temos

$$f(v, w)^2 = \phi_V(v)^2 \otimes 1_{Cl(W,\Psi)} + 1_{Cl(V,\Phi)} \otimes \phi_W(w) + (-1)^0 \phi_V(v) \otimes \phi_W(w) +$$

$$+(-1)^1(\phi_V(v) \otimes \phi_W(w)) + 1_{Cl(V,\Phi)} \otimes \phi_W(w)^2$$

$$= (\Phi \oplus \Psi)(v, w) \cdot (1_{Cl(V,\Phi)} \otimes 1_{Cl(W,\Psi)})$$

Assim, pela universalidade da álgebra de Clifford $Cl(V \oplus W, \Phi \otimes \Psi)$, $f$ é estendido unicamente para um homomorfismo de álgebras $\tilde{f} : Cl(V \oplus W, \Phi \otimes \Psi) \longrightarrow Cl(V, \Phi)\tilde{\otimes} Cl(W, \Psi)$.

O homomorfismo inverso é obtido da seguinte forma:

Sejam $\varphi : Cl(V, \Phi_V) \longrightarrow Cl(V \oplus W, \Phi_{V \oplus W})$ e $\psi : Cl(W, \Phi_W) \longrightarrow Cl(V \oplus W, \Phi_{V \oplus W})$ as aplicações induzidas pelas inclusões $i : V \longrightarrow V \oplus W$ e $j : W \longrightarrow V \oplus W$, tais que

$$\varphi \circ \phi_V = \phi_{V \oplus W} \circ i \quad \text{e} \quad \psi \circ \phi_W = \phi_{V \oplus W} \circ j.$$

Ou seja,

$$\varphi(v) = (v, 0) \quad \text{e} \quad \psi(w) = (0, w), \text{para todo} \quad v \in V, w \in W.$$

Então o homomorfismo inverso é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{-1} : Cl(V, \Phi_V)\widehat{\otimes}Cl(W, \Phi_W) &\longrightarrow Cl(V \oplus W, \Phi_{V\oplus W}) \\ v \otimes w &\longmapsto \varphi(v) \cdot \psi(w) \end{aligned}$$

■

**Corolário 2.1.** Se $(V, \Phi)$ é um espaço quadrático de dimensão $n$, então $\dim Cl(V, \Phi) = 2^n$.

**Prova:** Primeiro vamos considerar o caso em que $\dim V = 1$, seja $\{e_1\}$ a base canônica de $V$ e seja $A$ o espaço vetorial gerado pelos elementos $e_1$ e pela unidade da álgebra de Clifford $1_{Cl(V,\Phi)}$. Então

$$e_1 \cdot 1_{Cl(V,\Phi)} = 1_{Cl(V,\Phi)} \cdot e_1 = e_1 \quad \text{e} \quad e_1^2 = (e_1, e_1)1_{Cl(V,\Phi)}$$

Assim, $A$ é uma álgebra. É fácil ver que a aplicação inclusão $i : V \longrightarrow A$ induz um isomorfismo $Cl(V, \Phi) \cong A$. Assim, $\dim Cl(V, \Phi) = 2$. De um modo geral, sejam $\{e_i\}$ uma base ortogonal de $V$ e denote por $V_i$ o subespaço de dimensão 1 de $V$ gerado por $e_i$. Então temos a seguinte decomposição ortogonal

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

Assim, pela Proposição 2.5

$$Cl(V, \Phi) = Cl(V_1, \Phi_1)\tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes}Cl(V_n, \Phi_n).$$

Logo,

$$\dim Cl(V, \Phi) = 2^n.$$

■

**Corolário 2.2.** Se $(V, \Phi)$ é um espaço quadrático de dimensão finita. Então a aplicação definida na proposição 2.4 é um isomorfismo de espaços vetoriais, chamado de *quantização da álgebra exterior*.

**Prova:** Sabemos que $\bigwedge V \hookrightarrow Cl(V, \Phi)$ é um monomorfismo. Logo, pelo corolário anterior ele é um isomorfismo pois, $\dim Cl(V, \Phi) = \dim \bigwedge V = 2^n$. ■

# Capítulo 3

# Classificações das Álgebras de Clifford

Neste capítulo, vamos estudar as álgebras de Clifford associadas aos espaços de Minkowski $(\mathbb{R}^{p+q}, \Phi_{p,q})$, onde $\Phi_{p,q}(u) = u_1^2 + ... + u_p^2 - (u_{p+1}^2 + ... + u_{p+q}^2), \quad u = (u_1, ..., u_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$, as quais denotaremos por $Cl_{p,q}$. Elas são importantes em nosso estudo, pois a partir delas podemos classificar todas as álgebras de Clifford reais e complexas associadas a espaços quadráticos de dimensão finita não-degenerados. Vamos definir alguns isomorfismos fundamentais para esta classificação.

**Lema 3.1.** Existem $\mathbb{R}$-isomorfismos de álgebras

$$Cl_{0,n+2} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$$

$$Cl_{n+2,0} \simeq Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}$$

$$Cl_{p+1,q+1} \simeq Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$$

para todo, $n, p, q \geq 0$.

**Prova:** Sejam $\Phi_{0,n+2}(x) = -\|x\|^2$, onde $\|x\|$ é a norma Euclideana (usual) de $\mathbb{R}^{n+2}$, e $\{e_1, ..., e_{n+2}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+2}$ com o produto interno Euclideano usual. Sejam também $\{e_1^{'}, ..., e_n^{'}\}$ e $\{e_1^{''}, e_2^{''}\}$ os conjuntos geradores canônicos de $Cl_{n,0}$ e $Cl_{0,2}$ respectivamente, isto é,

$$(e_i^{'})^2 = -1 \quad \text{e} \quad e_i^{'}e_j^{'} = -e_j^{'}e_i^{'}, \quad \text{para todo} \quad i \neq j$$

e

$$e_1^{''}e_2^{''} = -e_2^{''}e_1^{''}, \quad (e_2^{''})^2 = -1, (e_1^{''})^2 = -1.$$

Seja $f : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$ a aplicação linear determinada por:

$$f(e_i) = \begin{cases} e_i^{'} \otimes e_1^{''}e_2^{''}, & \text{para} \quad 1 \leq i \leq n \\ 1 \otimes e_{i-n}^{''}, & \text{para} \quad n+1 \leq i \leq n+2. \end{cases}$$

Observe que para todo $1 \leq i, j \leq n$, temos

$$f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = (e_i^{'}e_j^{'} + e_j^{'}e_i^{'}) \otimes (e_1^{''}e_2^{''})^2 = -2\delta_{ij}1 \otimes 1.$$

Também, para $n+1 \leq i, j \leq n+2$, temos

$$f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = 1 \otimes (e_{i-n}^{''}e_{j-n}^{''} + e_{j-n}^{''}e_{i-n}^{''}) = -2\delta_{ij}1 \otimes 1$$

e

$$f(e_i)f(e_k) + f(e_k)f(e_i) = 2e_i^{'} \otimes (e_1^{''}e_2^{''}e_{n-k}^{''} + e_{n-k}^{''}e_1^{''}e_2) = 0,$$

para $1 \leq i \leq n$ e $n+1 \leq k \leq n+2$ e observando que $e_{k-n}^{''} = e_1^{''}$ ou $e_{k-n}^{''} = e_2^{''}$. Assim, se $x = \sum_{i=1}^{n+2} x_i e_i$, temos que

$$f(x)^2 = (\sum_{i=1}^{n+2} f(x_i))(\sum_{j=1}^{n+2} f(x_j)) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j f(e_i)f(e_j) + \sum_{i,j=n+1}^{n+2} x_i x_j f(e_i)f(e_j) =$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j (f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i)) + \sum_{n+1 \leq i \leq j \leq n+2} x_i x_j (f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i)) =$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} x_i x_j 1 \otimes 1 - \sum_{i,j=n+1}^{n+2} \delta_{ij} x_i x_j 1 \otimes 1 = -\sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 1 \otimes 1 = \Phi_{0,n+2}(x) 1 \otimes 1.$$

Daí, pela propriedade universal da álgebra de Clifford $Cl_{0,n+2}$, $f$ se estende unicamente para um homomorfismo de álgebras

$$\tilde{f} : Cl_{0,n+2} \longrightarrow Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}.$$

É claro que $\tilde{f}$ é um homomorfismo sobrejetor, pois leva os geradores de $Cl_{0,n+2}$ nos geradores de $Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$. Além disso,

$$\dim Cl_{0,n+2} = 2^{n+2} = 2^n \cdot 2 = \dim Cl_{n,0} \dim Cl_{0,2} = \dim Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2},$$

e assim $\tilde{f}$ é um isomorfismo. A prova do segundo isomorfismo é identicamente análoga a primeira.

Para provarmos o terceiro isomorfismo, consideremos $\{e_1, ..., e_{p+1}, \epsilon_1, ..., \epsilon_{q+1}\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^{p+q+2}$ tal que $\Phi_{p+1,q+1}(e_i) = 1$ e $\Phi_{p+1,q+1}(\epsilon_j) = -1$ para $i = 1, ..., p+1$ e $j = 1, ..., q+1$. Consideremos também $\{e_1^{'}, ..., e_p^{'}, \epsilon_1^{'}, ..., \epsilon_q^{'}\}$ um conjunto de geradores de $Cl_{p,q}$ e $\{e_1^{''}, \epsilon_1^{''}\}$ um conjunto de geradores de $Cl_{1,1}$.

Seja $f : \mathbb{R}^{p+q+2} \longrightarrow Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$ definido na base como segue:

$$f(e_i) = \begin{cases} e_i^{'} \otimes e_1^{''}\epsilon_1^{''}, & \text{para} \quad 1 \leq i \leq n \\ 1 \otimes e_1^{''}, & \text{para} \quad i = p+1, \end{cases}$$

e

$$f(\epsilon_j) = \begin{cases} \epsilon_j^{'} \otimes e_1^{''}\epsilon_1^{''}, & \text{para} \quad 1 \leq j \leq q \\ 1 \otimes \epsilon_1^{''}, & \text{para} \quad j = q+1. \end{cases}$$

Por um cálculo inteiramente análogo ao anterior obtém-se

$$f(x)^2 = \Phi_{p+1,q+1}(x) \cdot 1 \otimes 1 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^{p+q+2}.$$

E finalmente em analogia ao caso anterior também concluímos que $f$ estende-se para o isomorfismo $\tilde{f} : Cl_{p+1,q+1} \longrightarrow Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$. ■

Vamos agora estudar alguns isomorfismos entre álgebras matriciais.

**Proposição 3.1.** Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $A$ uma $\mathbb{K}$-álgebra. Então temos os seguintes isomorfismos de álgebras:

(i) $M_n(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} A \simeq M_n(A)$;

(ii) $M_n(M_m(A)) \simeq M_{nm}(A)$;

(iii) $M_n(A) \otimes_{\mathbb{K}} M_m(K) \simeq M_{nm}(A) \quad$ para todo $\quad m, n \geq 0$.

**Prova:** Para provar o primeiro isomorfismo, consideremos a aplicação $\mathbb{K}$-bilinear $\gamma : A \times M_n(K) \longrightarrow M_n(A)$ definida por

$$\left[ a, \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \right] \longmapsto \begin{pmatrix} a\lambda_{11} & \cdots & a\lambda_{1n} \\ a\lambda_{n1} & \cdots & a\lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

Então esta aplicação induz um homomorfismo de álgebras $\tilde{\gamma} : A \otimes M_n(K) \longrightarrow M_n(A)$. Como $A \otimes K^{n^2} \simeq A^{n^2}$, temos que o seguinte diagrama :

$$\begin{tikzcd} A \otimes_{\mathbb{K}} M_n(\mathbb{K}) \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d, "\simeq"'] & M_n(A) \arrow[d, "\simeq"] \\ A \otimes K^{n^2} \arrow[r, "\simeq"] & A^{n^2} \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

é comutativo. Portanto, $\tilde{\gamma}$ é um isomorfismo.

Agora, observando que cada matriz de ordem $n$, com entradas sendo blocos de ordem $m$, pode ser vista como uma matriz de ordem $nm$. Assim, temos o isomorfismo $M_n(M_m(A)) \simeq M_{nm}(A)$. Observemos ainda que $M_n(A) \otimes M_m(K) \cong M_n(M_m(A)) \simeq M_{nm}(A)$, com isso obtemos o terceiro isomorfismo. ■

**Proposição 3.2.** Temos os seguintes $\mathbb{R}$-isomorfismos de álgebras:

(i) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$;

(ii) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq M_2(\mathbb{C})$;

(iii) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq M_4(\mathbb{R})$.

**Prova:** Para provarmos $(i)$, consideremos o isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\varphi : \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ definido por

$$(1,0) \longmapsto \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + i \otimes i), \quad (0,1) \longmapsto \frac{1}{2}(1 \otimes 1 - i \otimes i)$$

Para provarmos $(ii)$, notemos que o corpo $\mathbb{C}$ é isomorfo ao subanel de $\mathbb{H}$ gerado por $i$. Assim, podemos ver $\mathbb{H}$ como um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com a multiplicação por escalar a esquerda.

Considerando a aplicação $\mathbb{R}$-bilinear $\pi : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \longrightarrow Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ dada por

$$\pi_{y,z}(x) = yx\bar{z},$$

onde $y \in \mathbb{C}$ e $x, z \in \mathbb{H}$, obtemos a aplicação $\mathbb{R}$-linear $\tilde{\pi} : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$. Observemos ainda que, $Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \simeq M_2(\mathbb{C})$. Como

$$\tilde{\pi}_{y,z} \circ \tilde{\pi}_{y',z'} = \tilde{\pi}_{yy',zz'},$$

a aplicação $\tilde{\pi}$ é um homomorfismo de álgebras. Além disso, verifica-se na base de $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ que $\tilde{\pi}$ é injetiva. Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) = \dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{C})) = 8$, temos que $\tilde{\pi}$ é um isomorfismo. Finalmente, para provarmos $(iii)$, consideremos a aplicação $\mathbb{R}$-bilinear $\Psi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \simeq M_4(\mathbb{R})$ definida por $\Psi_{z_1,z_2}(x) = z_1 x \bar{z}_2$. A aplicação $\mathbb{R}$-linear $\bar{\Psi} : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ é um homomorfismo de álgebras de mesma dimensão e injetivo. Logo, $\tilde{\Psi}$ é um isomorfismo de álgebras. ■

Vamos apresentar agora o principal teorema da periodicidade.

**Teorema 3.1** (Cartan/Bott)**.** *Para todo $n \geq 0$, temos os seguintes isomorfismos de álgebras:*

$$Cl_{n+8,0} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}$$

$$Cl_{0,n+8} \simeq Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8}$$

*Além disso,*

$$Cl_{0,8} = Cl_{8,0} = M_{16}(\mathbb{R})$$

**Prova:** Vamos mostrar que $Cl_{0,8} \simeq M_{16}(\mathbb{R})$.
Pelo Lema 3.1 temos os seguintes isomorfismos

$$Cl_{0,n+2} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$$

$$Cl_{n+2,0} \simeq Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}$$

Assim,

$$Cl_{n+8,0} \simeq Cl_{0,n+6} \otimes Cl_{2,0} \simeq Cl_{n+4,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \simeq \cdots \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0}.$$

Como $Cl_{0,2} = \mathbb{H}$ e $Cl_{2,0} = M_2(\mathbb{R})$, pela Proposição 3.1, obtemos

$$Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \simeq \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R}) \simeq M_4(\mathbb{R}) \otimes M_4(\mathbb{R}) \simeq M_{16}(\mathbb{R}).$$

Por outro lado,

$$Cl_{8,0} \simeq Cl_{0,6} \otimes Cl_{2,0} \simeq Cl_{4,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \simeq Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \simeq$$

$$\simeq \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R}) \simeq M_4(\mathbb{R}) \otimes M_4(\mathbb{R}) \simeq M_{16}(\mathbb{R}).$$

Portanto,

$$Cl_{n+8,0} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}$$

De modo análogo demonstra-se o segundo isomorfismo.

$\blacksquare$

Observemos agora que a complexificação de uma álgebra de Clifford é pela propriedade universal das álgebras de Clifford, uma álgebra de Clifford (sobre $\mathbb{C}$). Com efeito, seja $(V, \Phi)$ um espaço quadrático real e consideremos a complexificação $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$. Definamos a forma bilinear em $V_{\mathbb{C}}$ por

$$(z_1 \otimes u, z_2 \otimes v)_{V_{\mathbb{C}}} = z_1 z_2 (u, v), \quad z_1 z_2 \in \mathbb{C}, u, v \in V.$$

Então a aplicação de inclusão $j : V \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ é uma isometria e assim estende-se para um $\mathbb{R}$-homomorfismo de álgebras de Clifford $j_{\mathbb{C}} : Cl(V, \Phi) \longrightarrow Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_{\mathbb{C}})$. Agora, consideremos a aplicação linear complexa

$$\varphi : \mathbb{C} \otimes Cl(V, \Phi) \longrightarrow Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_{\mathbb{C}})$$

dada por

$$\varphi(z \otimes x) = z.j_{\mathbb{C}}(x)$$

para todo $z \in \mathbb{C} \quad$ e $\quad x \in Cl(V, \Phi)$. Para mostrar que $\varphi$ é um isomorfismo, consideremos a aplicação linear $\psi : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C} \otimes Cl(V, \Phi)$ dada por

$$\psi(u + vi) = 1 \otimes u + i \otimes v.$$

Então

$$(\psi(u+iv))^2 = 1 \otimes u^2 - 1 \otimes v^2 + i(uv+vu) = [(u,u) - (v,v)](1 \otimes 1_{Cl}) + 2i(u,v)(1 \otimes 1_{Cl}) =$$

$$= (u + iv, u + iv)_{V_{\mathbb{C}}} \cdot (1 \otimes 1_{Cl}) \quad u, v \in V.$$

Assim, $\psi$ estende-se para o homomorfismo $\tilde{\psi} : Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathbb{C} \otimes Cl(V, \Phi)$. Segue das definições que $\tilde{\psi} \circ \varphi = Id_{\mathbb{C} \otimes Cl(V,\Phi)}$ e $\varphi \circ \tilde{\psi} = Id_{Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_{\mathbb{C}})}$. Assim $\varphi$ é um isomorfismo. Portanto,

$$\mathbb{C} \otimes Cl(V, \Phi) \simeq Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_{\mathbb{C}}).$$

Em particular, a complexificação da álgebra de Clifford $Cl_{p,q}$, é a álgebra de Clifford (sobre $\mathbb{C}$) correspondente ao espaço quadrático de Minkowski complexificado $(\mathbb{C}^{p+q}, \Phi_{p,q}^{\mathbb{C}})$, ou seja,

$$\mathbb{C} \otimes Cl(V, \Phi) \simeq Cl(\mathbb{C}^{p+q}, \mathbb{C} \otimes \Phi_{p,q}).$$

Como todas as formas quadráticas não-degeneradas em $\mathbb{C}^n$ são equivalentes sobre $Cl(\mathbb{C}^n, \Phi_{\mathbb{C}})$, podemos expressar $\Phi_n^{\mathbb{C}}$ por

$$\Phi_n^{\mathbb{C}}(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

para alguma base ortonormal. Denotamos $Cl(\mathbb{C}^n, \Phi_n^{\mathbb{C}}) = Cl(n, \mathbb{C})$. Como uma complexificação do lema 3.1, temos o seguinte teorema de periodicidade:

**Teorema 3.2.** *Temos o seguinte isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras:*

$$Cl(n+2, \mathbb{C}) \simeq Cl(n, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} Cl(2, \mathbb{C}),$$

*onde* $Cl(2, \mathbb{C}) = M_2(\mathbb{C})$.

**Prova:** Como $Cl(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,n} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{n,0}$, pelo Lema 3.1, temos

$$Cl(n+2, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,n+2} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (Cl_{n,0} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,2}) \simeq (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{n,0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,2}).$$

Porém, $Cl_{0,2} = \mathbb{H}$, $Cl(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{n,0}$ e $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq M_2(\mathbb{C})$. Assim temos, $Cl(2, \mathbb{C}) = M_2(\mathbb{C})$ e $Cl(n+2, \mathbb{C}) \simeq Cl(n, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})$.

■

**Corolário 3.1.** $Cl(2k, \mathbb{C}) \simeq M_{2^k}(\mathbb{C})$ e $Cl(2k+1, \mathbb{C}, \mathbb{C}) \simeq M_{2^k}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^k}(\mathbb{C})$

**Prova:** Vamos provar o segundo isomorfismo por indução sobre $k$. Observemos que para $k = 1$, temos

$$Cl(3, \mathbb{C}) \simeq Cl(1{+}2, \mathbb{C}) \simeq Cl(1, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} Cl(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,1} \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{C} \oplus (\mathbb{C})) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})$$

$$\simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) \simeq M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}).$$

Agora, supondo a afirmação válida para $k$, temos

$$Cl(2k+1, \mathbb{C}) \simeq Cl(2k+3, \mathbb{C}) \simeq Cl((2k+1)+2, \mathbb{C}) \simeq Cl(2k+1, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})$$

$$\simeq (M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) \simeq M_{2^{k+1}}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^{k+1}}(\mathbb{C}).$$

De maneira análoga prova-se que $Cl(2k, \mathbb{C}) \simeq M_{2^k}(\mathbb{C})$, o que conclui a demonstração.

■

Com base nos isomorfismos de álgebras que apresentamos nesta seção, as álgebras de Clifford $Cl(V, \Phi)$ reais e complexas estão classificadas nas seguintes tabelas:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | $M_2(\mathbb{R})$ | $M_{16}(\mathbb{C})$ | $M_{16}(\mathbb{H})$ | $M_{16}(\mathbb{C}) \oplus M_{16}(\mathbb{C})$ | $M_{32}(\mathbb{H})$ |
| 7 | $M_8(\mathbb{C})$ | $M_8(\mathbb{H})$ | $M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$ | $M_{32}(\mathbb{C})$ | $M_{64}(\mathbb{R})$ |
| 6 | $M_4(\mathbb{H})$ | $M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$ | $M_8(\mathbb{H})$ | $M_{16}(\mathbb{C})$ | $M_{32}(\mathbb{R})$ |
| 5 | $M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$ | $M_4(\mathbb{H})$ | $M_8(\mathbb{C})$ | $M_{16}(\mathbb{R})$ | $M_{16}(\mathbb{R}) \oplus M_{16}(\mathbb{R})$ |
| 4 | $M_2(\mathbb{H})$ | $M_4(\mathbb{C})$ | $M_8(\mathbb{R})$ | $M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$ | $M_{16}(\mathbb{R})$ |
| 3 | $M_2(\mathbb{C})$ | $M_4(\mathbb{R})$ | $M_4(\mathbb{R}) \oplus M_4(\mathbb{R})$ | $M_8(\mathbb{R})$ | $M_8(\mathbb{C})$ |
| 2 | $M_2(\mathbb{R})$ | $M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$ | $M_4(\mathbb{R})$ | $M_4(\mathbb{C})$ | $M_4(\mathbb{H})$ |
| 1 | $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ | $M_2(\mathbb{R})$ | $M_2(\mathbb{C})$ | $M_2(\mathbb{H})$ | $M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$ |
| 0 | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{H}$ | $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ | $M_2(\mathbb{H})$ |
| p/q | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | $M_{64}(\mathbb{C})$ | $M_{128}(\mathbb{R})$ | $M_{128}(\mathbb{R}) \oplus M_{128}(\mathbb{R})$ | $M_{256}(\mathbb{R})$ |
| 7 | $M_{64}(\mathbb{R})$ | $M_{64}(\mathbb{R}) \oplus M_{64}(\mathbb{R})$ | $M_{128}(\mathbb{R})$ | $M_{128}(\mathbb{C})$ |
| 6 | $M_{32}(\mathbb{R}) \oplus M_{32}(\mathbb{R})$ | $M_{64}(\mathbb{R})$ | $M_{64}(\mathbb{C})$ | $M_{64}(\mathbb{H})$ |
| 5 | $M_{32}(\mathbb{R})$ | $M_{32}(\mathbb{C})$ | $M_{32}(\mathbb{H})$ | $M_{32}(\mathbb{H}) \oplus M_{32}(\mathbb{H})$ |
| 4 | $M_{16}(\mathbb{C})$ | $M_{16}(\mathbb{H})$ | $M_{16}(\mathbb{H}) \oplus M_{16}(\mathbb{H})$ | $M_{32}(\mathbb{H})$ |
| 3 | $M_8(\mathbb{H})$ | $M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$ | $M_{16}(\mathbb{H})$ | $M_{32}(\mathbb{C})$ |
| 2 | $M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$ | $M_8(\mathbb{H})$ | $M_{16}(\mathbb{C})$ | $M_{32}(\mathbb{R})$ |
| 1 | $M_4(\mathbb{H})$ | $M_8(\mathbb{C})$ | $M_{16}(\mathbb{R})$ | $M_{16}(\mathbb{R}) \oplus M_{16}(\mathbb{R})$ |
| 0 | $M_4(\mathbb{C})$ | $M_8(\mathbb{R})$ | $M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$ | $M_{16}(\mathbb{R})$ |
| p/q | 5 | 6 | 7 | 8 |

# Capítulo 4

# Representações de Álgebras de Clifford

A teoria das representações estuda estruturas algébricas abstratas representando seus elementos como estruturas em álgebras lineares, como vetores, espaços e transformações lineares, ou seja, a teoria das representações faz um objeto abstrato se tornar mais concreto, descrevendo os seus elementos como as matrizes e as operações algébricas em termos de adição de matrizes e multiplicação de matrizes. Neste capítulo $\mathbb{K}$ denotará um corpo e $( \ , \ )$ uma forma $\mathbb{K}$-bilinear.

## 4.1 Representações de uma Álgebra

Nosso particular interesse nesta seção, é fazer um breve estudo sobre as representações de álgebras, descrevendo alguns elementos importantes da teoria. Ao logo desta seção, $A$ denotará uma $\mathbb{K}$-álgebra.

**Definição 4.1.** *Uma representação de* $A$ em um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\rho : A \longrightarrow End(V)$ onde $End(V)$ é a álgebra dos operadores lineares de $V$. Uma representação é dita *fiel*, se $\rho$ é injetivo.

O *grau* de uma representação $\rho : A \longrightarrow End(V)$ é a dimensão do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V$. O espaço vetorial $V$ é chamado de *espaço de representação.*

**Exemplo 4.1.** Se $V = \{0\}$ então $\rho : A \longrightarrow End(\{0\})$ é uma representação, onde $\rho(a)$ é o operador nulo, para todo $a \in A$.

**Exemplo 4.2.** Se $V = A$ e $\rho : A \longrightarrow End(A)$, onde $\rho(a)$ é o operador de multiplicação a esquerda por $a$, isto é, $\rho(a)b = ab$. Esta representação é chamada de representação regular.

**Definição 4.2.** Um subespaço $W \subset V$ é *estável* sobre $\rho$, se $\rho(a)w \in W$ para todo $w \in W$ e $a \in A$.

**Definição 4.3.** Uma representação é chamada *irredutível*, se os únicos subespaços estáveis são $W = \{0\}$ e $W = V$.

Em particular se $\rho$ é sobrejetiva, então ela é uma representação irredutível, pois supondo a existência de um subespaço vetorial $W$ estável diferente dos subespaços triviais,então existe um $a \in A$ tal que $\rho(W)$.

**Exemplo 4.3.** Seja $Cl(\mathbb{R}^2, \Phi) = M_2(\mathbb{R})$. A representação real $\rho : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow End(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, tal que

$$\rho(A)(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y),$$

onde $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é irredutível. De fato, como $M_2(\mathbb{R})$ é uma *álgebra simples* sobre os reais, isto é, seus únicos ideais são os triviais ([5],pag.20). Além disso, como $\mathbb{R}^2$ é um $M_2(\mathbb{R})$-módulo a esquerda, temos que $\rho$ é irredutível ([5],pag.30).

Duas representações $\rho_1$ e $\rho_2$ de $A$ em $V_1$ e $V_2$ respectivamente são chamadas *equivalentes*, se existe um isomorfismo linear $\Psi : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que

$$\Psi \circ \rho_1(a) = \rho_2(a) \circ \Psi, \quad a \in A.$$

Neste caso escrevemos $\rho_1 \sim \rho_2$.
Sejam $\rho_1$ e $\rho_2$ representações de $A$ em $V_1$ e $V_2$, respectivamente. Então a representação de $A$ em $V_1 \oplus V_2$, denotada por $\rho_1 \oplus \rho_2$, é definida por

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(a) := \rho_1(a) \oplus \rho_2(a), \quad a \in A.$$

Ela é chamada *soma direta* de $\rho_1$ e $\rho_2$.
De modo similar, o *produto tensorial* $\rho_1 \otimes \rho_2$, é uma representação em $V_1 \otimes V_2$ definida por

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(a) = \rho_1(a) \otimes \rho_2(a), \quad a \in A.$$

É possível verificar que se $\rho_1 \sim \rho_2$ e $\tau_1 \sim \tau_2$, então $\rho_1 \oplus \tau_1 \sim \rho_2 \oplus \tau_2$ e $\rho_1 \otimes \tau_1 \sim \rho_2 \otimes \tau_2$.

## 4.2 Representações de uma Álgebra de Clifford

Seja $Cl(V, \Phi)$ uma álgebra de Clifford sobre um espaço quadrático $(V, \Phi)$ e seja $\rho$ uma representação de $Cl(V, \Phi)$ em um espaço vetorial $n$-dimensional $E$. Então a restrição de $\rho$ a $V$ é uma aplicação linear $\rho_V : V \longrightarrow End(E)$. Esta aplicação linear é injetiva se a forma quadrática $\Phi$ é não-degenerada. De fato, suponhamos que $\rho_V(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in V$. Então

$$\rho(x_0 y + y x_0) = \rho(x_0) \circ \rho(y) + \rho(y) \circ \rho(x_0) = 0, \text{ para todo } y \in V.$$

Como

$$x_0 y + y x_0 = 2(x_0, y) 1_{Cl(V,\Phi)},$$

Obtemos

$$(x_0, y) = 0, \qquad y \in V.$$

Consequentemente $x_0 = 0$. Assim $\rho_V$ é injetiva.

**Exemplo 4.4.** Vimos na prova da proposição 2.2 que a aplicação $f : V \longrightarrow End(\bigwedge V)$ definida $f(v) = \mu(v) + I(B^\bullet(v))$, é uma aplicação de Clifford. Portanto, ela induz um homomorfismo de álgebras $f_{Cl} : Cl(V, \Phi) \longrightarrow End(\bigwedge V)$ que é uma representação da álgebra de Clifford $Cl(V, \Phi)$ na álgebra exterior $\bigwedge V$.

### 4.2.1 Representações Ortogonais

Uma representação de uma álgebra de Clifford $Cl(V, \Phi)$ em um espaço vetorial euclideano $E$ com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, é chamada *ortogonal*, se

$$\langle \rho(x)u, \rho(x)v \rangle = \epsilon(x, x) \cdot \langle u, v \rangle \quad x \in V, \quad u, v \in E, \text{ onde } \epsilon = \pm 1.$$

Ela é chamada *ortogonal positiva* se $\epsilon = 1$ e *ortogonal negativa* se $\epsilon = -1$. Assim, se $\rho$ é ortogonal positiva, então

$$\langle \rho(x)u, \rho(x)v \rangle = (x, x) \cdot \langle u, v \rangle.$$

Para cada $x \in Cl(V, \Phi)$, denotemos por $\rho^*(x)$ a adjunta de $\rho(x)$. Observemos que, para cada $u, v \in E$, temos

$$\langle u, (\rho^*(x) \circ \rho)(x)v \rangle = \langle \rho(x)u, \rho(x)v \rangle = (x, x)\langle u, v \rangle.$$

Portanto,

$$\rho^*(x) \circ \rho(x) = (x, x)I_V.$$

Por outro lado, para cada $v \in E$ e $x \in V$,

$$(\rho(x) \circ \rho(x))v = \rho(x^2)v = (x, x)Iv.$$

Estas relações implicam que $\rho^*(x) = \rho(x)$, ou seja, os operadores $\rho(x)$ são auto-adjuntos ou simétricos. Se $\rho$ é ortogonal negativa, prova-se (de maneira análoga) que os operadores $\rho(x)$ são anti-simétricos.

**Proposição 4.1.** Seja $(V, \Phi)$ um espaço quadrático, cuja forma bilinear associada $(\ ,\ )$ é positiva (resp. negativa) definida. Então toda representação de $Cl(V, \Phi)$ em um espaço Euclideano é equivalente a uma representação ortogonal positiva (resp. negativa ).

**Prova:** Suponhamos que $\dim V = n$ e seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de $V$ tal que

$$(e_i, e_j) = \epsilon \cdot \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, ..., n).$$

Então

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\epsilon\delta_{ij}.1_{Cl(V,\Phi)}$$

Em particular, $e_i^2 = \epsilon.1_{Cl(V,\Phi)}$, e assim os elementos $e_i$ são invertíveis. Denotando por $Cl^*(V, \Phi)$, o grupo dos elementos invertíveis de $Cl(V, \Phi)$, temos que $e_i \in Cl^*(V, \Phi)$. Seja $G$ o subgrupo de $Cl^*(V, \Phi)$ gerado pelos elementos $e_i$ e $1_{Cl(V,\Phi)}$, com $i = 1, ..., n$. Notemos que $G$ é finito.

Seja $\rho : Cl^*(V, \Phi) \longrightarrow End(E)$ uma representação de $Cl(V, \Phi)$ em um espaço euclideano $(E, <\ ,\ >)$. Vamos introduzir um novo produto interno em $E$ da seguinte maneira

$$\langle u, v\rangle_0 = \sum_{a \in G} \langle \rho(a)u, \rho(a)v\rangle.$$

Então temos para $g \in G$

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle_0 = \sum_{a \in G} \langle \rho(a)\rho(g)u, \rho(a)\rho(g)v\rangle = \sum_{a \in G} \langle \rho(ag)u, \rho(ag)v\rangle =$$

$$= \sum_{a \in G} \langle \rho(a)u, \rho(a)v\rangle = \langle u, v\rangle_0 \quad u, v \in E.$$

Assim,

$$\langle \rho(a)u, \rho(a)v\rangle_0 = \langle u, v\rangle_0 \qquad g \in G \tag{4.1}$$

Como a dimensão de $E$ é finita, existe um automorfismo $\Psi$ de $E$ tal que

$$\langle \Psi(u), \Psi(v) \rangle = \langle u, v \rangle_0 \quad u, v \in E.$$

Agora fixemos

$$P(a) = \Psi \circ \rho(a) \circ \Psi^{-1}, \qquad a \in Cl(V, \Phi)$$

Então $P$ é uma representação de $Cl(V, \Phi)$ equivalente a $\rho$. Além disso,

$$\langle P(g)u, P(g)v \rangle = \langle \Psi \circ \rho(g) \circ \Psi^{-1}(u), \Psi \circ \rho(g) \circ \Psi^{-1}(v) \rangle = \langle \rho(g) \circ \Psi^{-1}(u), \rho(g) \circ \Psi^{-1}(v) \rangle_0 =$$

$$= \langle \Psi^{-1}(u), \Psi^{-1}(v) \rangle_0 = \langle u, v \rangle \qquad g \in G, u, v \in E.$$

Assim,

$$\langle P(g)u, P(g)v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Em particular, se fixarmos $P(e_i) = \sigma_i \quad (i = 1, ..., n)$, então

$$\langle \sigma_i u, \sigma_i v \rangle = \langle u, v \rangle \qquad u, v \in E,$$

e assim

$$\sigma_i^* \circ \sigma_i = I \qquad (i = 1, ..., n).$$

Por outro lado, temos

$$\sigma_i \circ \sigma_i = \sigma_i^2 = P(e_i^2) = (e_i, e_i).I = \epsilon.I \qquad (i = 1, ..., n)$$

Dessas relações, obtemos

$$\sigma_i^* = \epsilon.\sigma_i \qquad (i = 1, ..., n)$$

Pela linearidade, obtemos

$$P^*(x) = \epsilon.P(x) \qquad x \in V.$$

Segue que,

$$\langle P(x)u, P(x)v \rangle = \langle P^*(x)P(x)u, v \rangle = \epsilon.\langle P(x)^2 u, v \rangle = \epsilon.\langle P(x^2)u, v \rangle = \epsilon.(x, x)\langle u, v \rangle \quad x \in V.$$

Esta relação mostra que $P$ é uma representação. Em particular, se a forma bilinear for positiva (respectivamente negativa) definida, então $P$ é uma representação ortogonal positiva (respectivamente negativa).

∎

## 4.3 A Representação Adjunta Torcida

**Definição 4.4.** Seja $(V, \Phi)$ um espaço quadrático de dimensão $n$ com a forma bilinear associada não-degenerada, a qual denotaremos por $B$. Denotemos por $Cl^*(V, \Phi)$ o grupo multiplicativo dos elementos invertíveis de $Cl(V, \Phi)$. Então a aplicação definida por

$$\begin{array}{rccc} \rho_{ad}: & Cl^*(V,\Phi) & \longrightarrow & End(Cl(V,\Phi)) \\ & a & \longmapsto & \alpha(a)ua^{-1} \end{array}, \quad a \in Cl^*(V,\Phi), u \in Cl(V,\Phi),$$

onde $\alpha$ denota a involução de grau, é chamada de *representação adjunta torcida* de $Cl^*(V, \Phi)$.

Segue da definição que

$$\rho_{ad}(\alpha(a))u = \alpha(\alpha(a))u\alpha(a)^{-1} = \alpha(\alpha(a)\alpha^{-1}(u)a^{-1}) = \alpha \circ \rho_{ad} \circ \alpha^{-1}(u),$$

ou seja,

$$\rho_{ad}(\alpha(a)) = \alpha \circ \rho_{ad}(a) \circ \alpha^{-1}. \tag{4.2}$$

**Definição 4.5.** Seja $(V, \Phi)$ um espaço quadrático de dimensão finita. O *Grupo de Clifford associado a* $(V, \Phi)$ é o grupo

$$\Gamma(V, \Phi) = \{x \in Cl^*(V, \Phi)|\ \alpha(x) \cdot v \cdot x^{-1} \in V \text{ para todo } v \in V\}.$$

Em outras palavras, o Grupo de Clifford consiste de todos os elementos de $Cl^*(V, \Phi)$ para os quais $V$ é estável sobre a representação adjunta torcida $\rho_{ad}$.

**Proposição 4.2.** O Grupo de Clifford é estável sob a involução grau $\alpha$ e o anti-automorfismo $t$.

**Prova:** Seja $a \in \Gamma(V, \Phi)$. Então pela fórmula 4.2, temos,

$$\rho_{ad}(\alpha(a))x = \alpha\rho_{ad}(a)\alpha^{-1}(x) = -\alpha\rho_{ad}(a)x = \rho_{ad}(a)x \in V \qquad x \in V.$$

Assim, $\alpha(a) \in \Gamma(V, \Phi)$.
Para provarmos que $\Gamma(V, \Phi)$ é estável sob $t$. Consideremos $a \in \Gamma(V, \Phi)$, através de um cálculo simples mostramos que $a^{-1} \in \Gamma(V, \Phi)$ e assim temos

$$\alpha(a^{-1})xa \in V \qquad x \in V.$$

Aplicando $t$ temos

$$t(a)xt(\alpha(a^{-1})) \in V \qquad x \in V.$$

Consequentemente, como $\alpha$ comuta com $t$

$$\alpha(t(a))x(t(a))^{-1} \in V \qquad x \in V.$$

Assim, $t(a) \in \Gamma(V, \Phi)$.

■

**Definição 4.6.** Seja $(V, \Phi)$ uma álgebra de Clifford. A *conjugação* em $Cl(V, \Phi)$ é uma aplicação definida por

$$x \longmapsto t(\alpha(x))$$

para todo $x \in Cl(V, \Phi)$.

Observemos que

$$t \circ \alpha = \alpha \circ t$$

e que a conjugação é uma involução. Se $V$ possui dimensão finita e $\{e_1, \cdots e_n\}$ é uma base de $V$, a conjugação fica definida por

$$\bar{e_i} = -e_i$$

$$\overline{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}} = (-1)^k e_{i_k} e_{i_{k-1}} \cdots e_{i_1}$$

onde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ e claramente, $\bar{1} = 1$.
Denotemos por $Cl^*(V, \Phi)$, o grupo dos elementos invertíveis de $Cl(V, \Phi)$.

A partir de $\alpha$ e $t$, podemos definir uma *norma* na álgebra de Clifford:

$$\begin{array}{cccc} N: & Cl(V, \Phi) & \longrightarrow & Cl(V, \Phi) \\ & x & \longmapsto & x \cdot \bar{x} \end{array}.$$

Definimos a partir do grupo de Clifford, o *Grupo de Clifford Especial*

$$\Gamma^+(V, \Phi) = \Gamma(V, \Phi) \cap Cl^0(V, \Phi).$$

Observemos que $N(v) = v \cdot \bar{v} = -v^2 = -\Phi(v) \cdot 1_{Cl(V,\Phi)}$ para todo $v \in V$. Além disso, se $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é uma base de $V$,temos

$$N(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}) = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \cdot \overline{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}} = (-1)^k e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \cdot e_{i_k} e_{i_k - 1} \cdots e_{i_1} =$$

$$= (-1)^k e_{i_1}^2 e_{i_2}^2 \cdots e_{i_k}^2 = (-1)^k \Phi(e_{i_1}) \Phi(e_{i_2}) \cdots \Phi(e_{i_k}) \cdot 1_{Cl(V,\Phi)}.$$

**Proposição 4.3.** Seja $(V,\Phi)$ um espaço quadrático. Para todo elemento $x \in \Gamma(V,\Phi)$, se $\Phi(x) \neq 0$, então a aplicação $\rho_x : V \longrightarrow V$ dada por

$$v \longmapsto \alpha(x)vx^{-1} \qquad v \in V$$

é a reflexão sobre o hiperplano $H$ ortogonal ao vetor $x$.

**Prova:** Recordemos que a reflexão $s$ sobre o hiperplano $H$ ortogonal ao vetor $x$ é dada por

$$s(u) = u - 2\frac{\varphi(u,x)}{\Phi(x)}x.$$

Como,

$$x^2 = \Phi(x)\cdot 1 \quad e \quad u\cdot x + x\cdot u = 2\varphi(u,x)\cdot 1$$

temos,

$$s(u) = u - 2\frac{\varphi(u,x)}{\Phi(x)}x = u - 2\varphi(u,x)\frac{1\cdot x}{\Phi(x)} = u - 2\varphi(u,x)\frac{1}{\Phi(x)}\cdot x = u - 2\varphi(u,x)\frac{1}{x^2}\cdot x =$$

$$= u - 2\varphi(u,x)x^{-1} = u - 2\varphi(u,x)(1\cdot x^{-1}) = u - (2\varphi(u,x)1)\cdot x^{-1} = u - (u\cdot x + x\cdot u)\cdot x^{-1} =$$

$$= -x\cdot u\cdot x^{-1} = \alpha(x)\cdot u\cdot x^{-1},$$

visto que $\alpha(x) = -x$, para todo $x \in V$. ∎

**Observação 4.1.** Sabemos pela proposição 4.2 que o grupo de Clifford é estável sob o anti-automorfismo $t$ e a involução de grau $\alpha$. Da mesma forma $\Gamma(V,\Phi)$ também é estável sob a conjugação $x \longrightarrow t\circ\alpha(x)$.

Vamos mostrar que $\rho$ é um homomorfismo de $\Gamma(V,\Phi)$ no grupo ortogonal $O(V,\Phi)$ das isometrias de $V$.

**Lema 4.1.** Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\Phi$ uma forma quadrática não degenerada O núcleo da aplicação $\rho : \Gamma(V,\Phi) \longrightarrow End(V)$ é o grupo $\mathbb{K}^*\cdot 1$ dos múltiplos escalares não-nulos da unidade da álgebra de Clifford.

**Prova:** Seja $x \in Cl^*(V,\Phi)$ e suponhamos que $x \in \ker(\rho)$, então $\rho(x) = Id$, o que implica que $\alpha(x)v = vx$, para todo $v \in V$. Decompondo $x$ em suas partes par e ímpar, obtemos

$$x = x^0 + x^1 \qquad x^0 \in Cl^0(V,\Phi), \quad x^1 \in Cl^1(V,\Phi).$$

Segue do fato de $\alpha(x)v = vx$ para todo $v \in V$ que

$$vx^0 = x^0 v \qquad e \qquad -x^1 v = vx^1.$$

Sabemos que $x^0$ e $x^1$ podem ser escritos como combinações lineares de elementos da forma $e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k}$ onde os $e_{i_j}$ estão numa base ortogonal $\{e_1, ..., e_n\}$ de $V$ e $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$. Aplicando sucessivas vezes a relação

$$e_i e_j + e_j e_i = 2B(e_i, e_j)$$

podemos expressar $x^0$ e $x^1$ convenientemente nas formas

$$x^0 = a + e_1 b \qquad \mathbf{e} \qquad x^1 = c + e_1 d, \tag{4.3}$$

onde a,b,c,d não contém o vetor $e_1$. Por sua vez, aplicando o automorfismo $\alpha$, obtemos

$$a + e_1 b = x^0 = \alpha(x^0) = \alpha(a) - e_1 \alpha(b)$$

e

$$-c - e_1 d = \alpha(x^1) = \alpha(c) - e_1 \alpha(d)$$

Daí temos que $a$ e $d$ são elementos pertencentes a $Cl^0(V, \Phi)$, enquanto $c$ e $b$ são elementos pertencentes a $Cl^1(V, \Phi)$. Agora, multiplicando as igualdades 4.3 por $e_1$ e $-e_1$ respectivamente, obtemos as expressões

$$e_1 a + e_1^2 b = e_1 x^0 = x^0 e_1 = a e_1 + e_1 b e_1 = a e_1 - e_1^2 b$$

e

$$-e_1 c - e_1^2 d = -e_1 x^1 = x^1 e_1 = c e_1 + e_1 d e_1 = c e_1 + e_1^2 d.$$

Isto implica que $2e_1^2 b = 0$ e $2e_1^2 d = 0$, ou seja, que $b = 0$ e $d = 0$. Logo, $b$ e $d$ independem de $e_1$. Podemos aplicar o mesmo argumento para os outros elementos básicos $e_2, ..., e_n$ e concluir ao final que $x^0$ e $x^1$ independem dos vetores da base, o que implica, que $x^0$ e $x^1$ estão no corpo $\mathbb{K}$ e portanto $x = x^0 + x^1$ também pertence a $\mathbb{K}$. Como $x \neq 0$, visto que $x \in \Gamma(V, \Phi)$, então $x \in \mathbb{K}^* \cdot 1$. Portanto, $\ker \rho \subset \mathbb{K}^* \cdot 1$. A inclusão contrária é trivialmente verificada devido ao fato de que $\mathbb{K}^* \cdot 1 \subset Cl^0(V, \Phi)$ ∎

**Observação 4.2.** O lema acima não é válido para formas degeneradas. Por exemplo, se $\Phi \equiv 0$, então $Cl(V, \Phi) = \bigwedge V$. Considere o elemento $x = 1 + e_1 e_2$. Claramente, $x^{-1} = 1 - e_1 e_2$. Mas, para $v \in V$, temos

$$\alpha(1 + e_1 e_2) v (1 - e_1 e_2)^{-1} = (1 + e_1 e_2) v (1 - e_1 e_2) = v.$$

Contudo, $1 + e_1e_2$ não é um múltiplo escalar de 1.

Apresentamos no inicio da seção a definição de função norma numa álgebra de Clifford, daremos agora mais evidência a importância desta.

**Proposição 4.4.** Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\Phi$ uma forma quadrática não degenerada. Se $x \in \Gamma(V, \Phi)$, então $N(x) \in \mathbb{K}^* \cdot 1$.

**Prova:** Basta mostrarmos que $N(x)$ pertence ao núcleo de $\rho$. Seja $x \in \Gamma(V, \Phi)$, então

$$\alpha(x)vx^{-1} \in V \quad \text{para todo } v \in V.$$

Aplicando o anti-automorfismo $t$, obtemos

$$t(x)^{-1}vt(\alpha(x)) = \alpha(x)vx^{-1},$$

visto que $t$ é a identidade em $V$. Assim obtemos,

$$v = t(x)\alpha(x)v(t(\alpha(x))x)^{-1} = \alpha(\bar{x}x)v(\bar{x}x)^{-1},$$

assim $\bar{x}x \in \ker \rho$. Pela observação 4.1, temos que $\bar{x} \in \Gamma(V, \Phi)$, e assim, $x\bar{x} = \bar{\bar{x}}\bar{x} \in \ker \rho$.

■

**Observação 4.3.** Quando $\Phi(v) = -\|v\|^2$, onde $\|v\|$ é a norma Euclidiana padrão de $v$, temos $N(v) = \|v\|^2 \cdot 1$. Porém, para outras formas quadráticas, é possível que $N(v) = \lambda \cdot 1$ onde $\lambda < 0$.

**Proposição 4.5.** A restrição da norma ao grupo de Clifford $\Gamma(V, \Phi)$ é um homomorfismo, $N : \Gamma(V, \Phi) \longrightarrow \mathbb{K}^* \cdot 1$, e $N(\alpha(x)) = N(x)$ para todo $x \in \Gamma(V, \Phi)$.

**Prova:** Sejam $x, y \in \Gamma(V, \Phi)$, então

$$N(xy) = xy\overline{xy} = xy\bar{y}\bar{x} = xN(y)\bar{x} = x\bar{x}N(y) = N(x)N(y),$$

Onde a terceira igualdade é válida porque $N(x) \in \mathbb{K} \cdot 1$. Além disso,

$$N(\alpha(x)) = \alpha(x)\overline{\alpha(x)} = \alpha(x)\alpha(\bar{x}) = \alpha(x\bar{x}) = \alpha(N(x)) = N(x).$$

■

**Proposição 4.6.** Seja $V$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\Phi$ uma forma quadrática não degenerada. Então $V \subseteq \Gamma(V,\Phi)$ e $\rho(\Gamma(V,\Phi)) \subseteq O(V,\Phi)$.

**Prova:** Seja $x \in \Gamma(V,\Phi)$ e $v \in V$, com $v \neq 0$. Temos

$$N(\rho(x)v) = N(\alpha(x)vx^{-1} = N(\alpha(x))N(v)N(x^{-1}) = N(x)N(v)N(x)^{-1} = N(v),$$

visto que $N : \Gamma(V,\Phi) \longrightarrow \mathbb{K}^* \cdot 1$. Porém, para $v \in V$, sabemos que

$$N(v) = -\Phi(v) \cdot 1.$$

Assim, $\rho_{ad}(x)$ preserva norma e assim, $\rho_{ad}(x) \in O(V,\Phi)$

■

### 4.3.1 Os grupos *Pin* e *Spin*

Nesta seção iremos estudar os grupos *Pin* e *Spin* associados inicialmente aos espaços de Minkowisk $\mathbb{R}^n$ com a forma quadrática $\Phi_{0,n}(x_1,...,x_n) = -x_1^2 - ... - x_n^2$. Em seguida estenderemos nosso estudo para o os espaços de Minkowisk $(\mathbb{R}^{p+q}, \Phi_{p,q})$.

**Definição 4.7.** Definimos o *grupo Pin* , o qual denotaremos por $Pin(n)$, como sendo o núcleo $\ker(N)$ do homomorfismo $N : \Gamma(\mathbb{R}^n, \Phi_{0,n}) \longrightarrow \mathbb{R}^* \cdot 1$ e o *grupo Spin*, o qual denotaremos por $Spin(n)$, como sendo a interseção $Pin(n) \cap \Gamma(\mathbb{R}^n, \Phi_{0,n})^+$.

Observemos que se $N(x) = 1$, então $x$ é um elemento invertível e $x^{-1} = \bar{x}$, visto que $x\bar{x} = N(x) = 1$. Assim podemos reescrever os grupos *Pin* e *Spin* da seguinte forma:

$$Pin(n) = \{x \in Cl_{0,n}^* |\ \alpha(x)vx^{-1} \in \mathbb{R}^n \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n, N(x) = 1\}$$

e

$$Spin(n) = \{x \in Cl_{0,n}^0 |\ xvx^{-1} \in \mathbb{R}^n \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n, N(x) = 1\}$$

Para o próximo corolário precisamos do seguinte resultado, conhecido como teorema de Cartan-Dieudonné, cuja demonstração omitiremos, mas pode ser vista em Garling ([5],pag 77, teorema 4.8.1).

**Teorema 4.1.** *A restrição de $\rho$ ao grupo $Pin(n)$, é um homomorfismo sobrejetivo, $\rho : Pin(n) \longrightarrow O(n)$, cujo núcleo é $\{-1,1\}$, e a restrição de $\rho_{ad}$ ao grupo $Spin(n)$, é um homomorfismo sobrejetivo, $\rho : Spin(n) \longrightarrow SO(n)$, cujo núcleo é $\{-1,1\}$.*

**Prova:** Pela proposição anterior temos a aplicação $\rho : Pin(n) \longrightarrow O(n)$. É de fácil verificação que $\rho$ é um homomorfismo. Pelo teorema de Cartan-Dieudonné ([5], pag 77 ) toda isometria $f \in O(n)$ é uma composição $f = s_1 \circ \cdots \circ s_k$ de reflexões $s_j$ de hiperplanos. Se assumirmos que $s_j$ é uma reflexão de sobre o hiperplano $H_j$ ortogonal ao vetor não-nulo $w_j$, pela proposição 4.3 , temos $\rho(w_j) = s_j$. Como em nosso contexto $N(w_j) = \|w_j\|^2 \cdot 1$, podemos substituir $w_j$ por $w_j/\|w_j\|$, de forma que $N(w_1 \cdots w_k) = 1$, então

$$f = \rho_{ad}(w_1 \cdots w_k),$$

e portanto $\rho$ é sobrejetiva. Note que

$$\ker(\rho|Pin(n)) = \ker(\rho) \cap \ker(N) = \{t \in \mathbb{R}^* \cdot 1| \quad N(t) = 1\} = \{-1, 1\}.$$

Agora, suponhamos por absurdo que $\rho(Spin(V;\Phi)) \neq SO(V;\Phi)$. Então existe uma $f \in O(V;\Phi)$ tal que $\rho(x) = f$ para algum $x \in Spin(V,\Phi)$.
Observemos que escolhendo uma base $\{e_1, ..., e_n\}$ de $V$ com $v = e_1$ e $B(v, e_j) = 0$ para $j \geq 2$, temos $\rho_{ad}(v)(e_1) = -e_1$ e $\rho(v)(e_j) = e_1$, $j \geq 2$. Com isso $\det \rho(v) = -1$, e consequentemente,

$$SO(V,\Phi) = \{s_1 \circ \cdots \circ s_k; k \text{ é par}\}.$$

Daí, $f$ pode ser escrita como $f = \rho(w_1 \cdots w_{2k+1})$, e assim $\rho(x) = \rho(w_1 \cdots w_{2k+1})$, o que implica pelo lema 4.1, que $x^{-1}w_1 \cdots w_{2k+1} \in \mathbb{K}^* \cdot 1$. Portanto, para algum $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$x = \frac{1}{\lambda} w_1 \cdots w_{2k+1} \Rightarrow \alpha(x) = \frac{1}{\lambda} \alpha(w_1) \cdots \alpha(w_{2k+1})$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = \frac{1}{\lambda} w_1 \cdots w_{2k+1} = -x.$$

O que é um absurdo, pois $x \in Spin(n)$. Isto conclui a demonstração.

■

Denotando o conjunto dos elementos $v \in \mathbb{R}^n$ com $N(v) = 1$ por $S^{n-1}$. Nos temos o seguinte corolário do teorema acima:

**Corolário 4.1.** O grupo $Pin(n)$ é gerado por $S^{n-1}$ e todo elemento do grupo $Spin(n)$ pode ser escrito como um produto de um número par de elementos de $S^{n-1}$.

Agora, vamos generalizar a teoria dos grupos *Pin* e *Spin* para os espaços de Minkowski $(\mathbb{R}^{p+q}, \Phi_{p,q})$. Neste caso, os grupos Clifford $\Gamma(\mathbb{R}^{p+q}, \Phi_{p,q})$ serão denotados por $\Gamma(p,q)$ e o grupo especial $\Gamma^+(p,q) = Cl^0_{p,q} \cap \Gamma(p,q)$. Mencionamos na observação 4.3 a dificuldade de que $N(v) = -\Phi(v) \cdot 1$ mas, $-\Phi(v)$ não é necessariamente positiva. Este problema é superado se considerarmos $x \in \Gamma(p,q)$ com $N(v) = \pm 1$.

**Definição 4.8.** Definimos o *grupo Pin*, o qual denotaremos por $Pin(p,q)$, como sendo o grupo

$$Pin(p,q) = \{x \in \Gamma(p,q) | \quad N(x) = \pm 1\}$$

e o *grupo Spin*, o qual denotaremos por $Spin(p,q)$, como sendo o grupo $Pin(p,q) \cap \Gamma^+(p,q)$.

**Observação 4.4.** É fácil ver que o grupo $Spin(p,q)$ é também dado por

$$Spin(p,q) = \{x \in Cl^0_{p,q} | \quad xv\bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{para todo} v \in \mathbb{R}^n, N(x) = 1\}.$$

Além disso, se $N(x) \neq 0$, então

$$Pin(p,q) = \{x \in Cl_{p,q} | \quad xvt(x)/N(x) \in \mathbb{R}^n \quad \text{para todo} \quad v \in \mathbb{R}^n, N(x) \pm 1\}.$$

Quando $\Phi(x) = -\|x\|^2$, temos que $N(x) = \|x\|^2$, e $Pin(n) = \{x \in Cl_n | \ xvt(x) \in \mathbb{R}^n \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n, N(x) = 1\}$

Como generalização do teorema 4.1, temos o seguinte teorema, cuja demonstração será omitida pelo fato de ser análoga a prova do teorema anterior:

**Teorema 4.2.** *A restrição de $\rho$ ao grupo pinor $Pin(p,q)$, é um homomorfismo sobrejetivo, $\rho : Pin(p,q) \longrightarrow O(p,q)$, onde o núcleo é $\{1,-1\}$, e a restrição de $\rho$ ao grupo spinor $Spin(p,q)$, é um homomorfismo sobrejetivo,$\rho : Spin(p,q) \longrightarrow SO(p,q)$, cujo núcleo $\{1,-1\}$.*

Consideremos agora $\mathbb{R}^n$ equipado com a forma quadrática de Minkowsk $\Phi_{p,q}$ (com $p+q=n$), denotemos o conjunto de todos os elementos $v \in \mathbb{R}^n$ com $N(v) = 1$ por $S^{n-1}_{p,q}$. Temos o seguinte corolário do teorema acima que é um generalização do corolário 4.1 :

**Corolário 4.2.** O grupo $Pin(p,q)$ é gerado por $S^{n-1}_{p,q}$ e todo elemento do grupo $Spin(p,q)$ pode ser escrito como um produto de um número par de elementos de $S^{n-1}_{p,q}$.

**Exemplo 4.5.** Se $V = \mathbb{R}$ e $\Phi(x) = -x^2$ temos conforme o exemplo 2.1, que $Cl(\mathbb{R}, \Phi(x)) = \mathbb{C}$. Assim, como $\phi$ é injetiva, podemos fazer a identificação de $\mathbb{R}$ com $\mathbb{R}i$, consequentemente $\phi(bi) = -bi$. Portanto

$$\Gamma(0,1) = \{a + bi \in \mathbb{C}^*|\ (a - bi)v\frac{a - bi}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}i,\ \text{para todo } v \in \mathbb{R}i, a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{a + bi \in \mathbb{C}^*|\ b = 0 \ ou\ a = 0,\ a, b \in \mathbb{R}\} = Cl^0(\mathbb{R}, \Phi) \cup Cl^0(\mathbb{R}, \Phi)i.$$

Além disso,

$$Pin(0,1) = \{a + bi \in \Gamma(0,1)|\ a^2 + b^2 = 1\} = \{1, -1, i, -i\} \simeq \mathbb{Z}_4$$

e

$$Spin(0,1) = \{a + bi \in Pin(0,1)|\ \alpha(a + bi) = a + bi\} \simeq \{1, -1\}.$$

**Exemplo 4.6.** Quando $V = \mathbb{R}$ e $\Phi(x) = x^2$ temos que $Cl(\mathbb{R}, \Phi) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Assim, pela injetividade de $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, definida por $\phi(a) = (0, a)$, podemos identificar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}\xi$, onde $\xi = (0, 1)$. Dessa forma, $\phi(0, a) = -(0, a)$ e portanto

$$\Gamma(1,0) = \{(a,b) \in (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})^*|\ (a, -b)v\xi(-\frac{a}{b^2 - a^2}, \frac{b}{b^2 - a^2}) \in \mathbb{R}\xi,\ v\xi \in \mathbb{R}\xi, a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(a,b) \in (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})^*|\ a = 0 \text{ ou } b = 0\ a, b \in \mathbb{R}\} = Cl^0(\mathbb{R}, \Phi) \cup Cl^0(\mathbb{R}, \Phi)\xi.$$

Além disso, como $N(a,b) = (a,b)(a,-b) = (a^2 - b^2) \cdot 1$, temos que os grupos $Pin$ e $Spin$ são :

$$Pin(1,0) = \{(a,b) \in \Gamma(1,0)|\ a^2 - b^2 = \pm 1\} = \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

e

$$Spin(1,0) = \{(a,b) \in Pin(1,0)|\ (a,-b) = (a,b)\} = \{(-1,0), (1,0)\} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

**Exemplo 4.7.** Se $V = \mathbb{R}^2$ e $\Phi(a,b) = -a^2 - b^2$, temos que $Cl(\mathbb{R}^2, \Phi) \simeq \mathbb{H}$, conforme o exemplo 2.5. Devido a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{H}$, podemos identificar $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j$. Assim, para todo $xi + yj \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ temos

$$\Gamma(0,2) = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}^*|\ (a - bi - cj + dk)v\frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j\}$$

$$= \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}^* |\ ab = -cd \text{ e } ac = bd\},$$

donde,

$$Pin(0,2) = \{a + bi + cj + dk \in \Gamma(0,2) |\ N(a + bi + cj + dk) = \pm 1\}$$

$$= \{a + bi + cj + dk \in \Gamma(0,2) |\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

$$\simeq \{a + dk |\ a^2 + d^2 = 1\} \cup \{bi + cj |\ b^2 + c^2 = 1\}$$

e

$$Spin(0,2) \simeq \{a + dk |\ a^2 + d^2 = 1\}.$$

**Exemplo 4.8.** Seja $V = \mathbb{R}^2$ com a forma quadrática $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$. Conforme o exemplo 2.6, temos que $Cl(\mathbb{R}^2, \Phi) \simeq M_2(\mathbb{R})$. Como a aplicação de Clifford $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ é injetiva, podemos identificar $\mathbb{R}^2$ com o subespaço gerado pelas matrizes $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Dai,sendo $A = aI + be_1 + ce_2 + de_1e_2$, temos $\alpha(A) = aI - be_1 - ce_2 + de_1e_2$. Consequentemente,

$$\Gamma(0,2) = \{A \in (M_2(\mathbb{R}))^* |\ \alpha(A)\phi(x,y)A^{-1} \in \mathbb{R}^2\} = \{A \in (M_2(\mathbb{R}))^* |\ ab = -cd \text{ e } ac = -bd\},$$

donde,

$$Pin(0,2) = \{be_1 + ce_2; b^2 + c^2 = \pm 1\} \cup \{aI + de_1e_2 |\ a^2 - d^2 = \pm 1\}$$

e

$$Spin(0,2) = \mathbb{R}^*.$$

## 4.4 A Representação Spin

**Definição 4.9.** Seja $(V, < \ , \ >)$ um espaço euclideano de dimensão $2n$, isto é, $V$ é um espaço real e $< \ , \ >: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno sobre $V$. Uma *estrutura complexa* em $V$ é uma aplicação linear $J$ que satisfaz

$$J^2 = -I \quad \text{e} \quad < Jx, Jy > = < x, y > \quad x, y \in V.$$

Segue da definição acima que

$$J^* = -J,$$

onde $J^*$ é a adjunta de $J$.

Agora, seja $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$ a complexificação de $V$ e defina um produto interno em $V_{\mathbb{C}}$ por

$$< \lambda \otimes x, \mu \otimes y >= \lambda\mu < x, y >, \quad \lambda\mu \in \mathbb{C}, x, y \in V.$$

Seja $\omega : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ a aplicação $\mathbb{C}$-linear dada por

$$\omega(\lambda \otimes x) = i\lambda \otimes Jx, \quad \lambda \in \mathbb{C}, x \in V.$$

Então temos

$$\omega^2(\lambda \otimes x) = (-\lambda) \otimes (-x) = \lambda \otimes x.$$

Consequentemente,

$$\omega^2 = I$$

ou seja, $\omega$ é uma involução. Além disso,

$$\langle \omega\lambda \otimes x \rangle, \lambda \otimes x) = \langle i\lambda \otimes Jx, \lambda \otimes x \rangle = i\lambda^2 \langle Jx, x \rangle = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, x \in W.$$

ou seja, $\omega$ é antisimétrico, isto é, $\omega^* = -\omega$. Como $\omega$ é uma involução, $V_{\mathbb{C}}$ é decomposto em soma direta dos seguintes subespaços:

$$W_1 = \{x \in V_{\mathbb{C}} / \quad \omega x = x\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{x \in V_{\mathbb{C}} / \quad \omega x = -x\}$$

Pela proposição C.3, temos o isomorfismo de álgebras álgebras complexas $Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_W) \cong End(\bigwedge W_1)$. Além disso, o isomorfismo $Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_{\mathbb{C}}) \cong End(\bigwedge W_1)$ é obtido da seguinte forma:

Seja $\varphi : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow End(\bigwedge W_1)$ uma aplicação linear dada por

$$\varphi(x)u = \mu(x_1)u + i(x_2)u \quad x \in V_{\mathbb{C}}, com \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in W_1, x_2 \in W_2,$$

onde $\mu$ e $i$ são os operadores de multiplicação e substituição na álgebra $\bigwedge W_1$ respectivamente. Pelo corolário C.1, temos

$$(\varphi(x))^2 = \mu(x_1) \circ \mu(x_1) + \mu(x_1) \circ i(x_2) + i(x_2) \circ \mu(x_1) + i(x_2) \circ i(x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle I = (x, x) \cdot 1$$

Assim, $\varphi$ estende-se para o homomorfismo,

$$\rho_{V_{\mathbb{C}}} : Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_{\mathbb{C}}) \longrightarrow End(\bigwedge W_1)$$

Para mostrar que $\rho_{V_{\mathbb{C}}}$ é um isomorfismo, notemos que pelo lema C.1, $\rho_{V_{\mathbb{C}}}$ é sobrejetiva. Além disso,

$$\dim End(\bigwedge W_1) = (2^n)^2 = 2^{2n} = \dim Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_{\mathbb{C}})$$

Consequentemente $\rho_{V_{\mathbb{C}}}$ é irredutível pois é sobrejetiva.

**Definição 4.10.** Seja $i : V \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ a aplicação inclusão e $i_{\mathbb{C}} : Cl(V, \Phi_V) \longrightarrow Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_{\mathbb{C}})$ o homomorfismo induzido pelo funtor $Cl$. A representação $\rho_V : Cl(V, \Phi) \longrightarrow End(\bigwedge W_1)$ dada por

$$\rho_V(a) := \rho_{V_{\mathbb{C}}}(1 \otimes a), \quad a \in Cl(V, \Phi_V)$$

é chamada de *representação Spin* de $Cl(V, \Phi)$, a qual denotaremos por $\rho_{Spin}$.

**Definição 4.11.** Uma representação de uma álgebra real em um espaço vetorial complexo $V$ é chamada irredutível se os únicos subespaços complexos estáveis sobre ela são $W = V$ e $W = 0$.

**Proposição 4.7.** A representação spin $\rho_{Spin}$ é irredutível.

**Prova:** Seja $W$ um subespaço estável de $\bigwedge W_1$. Seja $b \in Cl(V_{\mathbb{C}}, \Phi_{\mathbb{C}})$, onde

$$b = \lambda \otimes a \quad \lambda \in \mathbb{C}, a \in Cl(V, \Phi).$$

Então, para $w \in W$ temos

$$\rho_{V_{\mathbb{C}}}(b)w = \rho_{V_{\mathbb{C}}}(\lambda \otimes a)w = \lambda \rho_{V_{\mathbb{C}}}(1 \otimes a)w = \lambda \rho_{Spin}(a)w.$$

Como $W$ é um subespaço complexo de $\bigwedge W_1$, segue que $\rho_{V_{\mathbb{C}}}(b)w \in W$ e assim $W$ é estável sobre $\rho_{V_{\mathbb{C}}}$. Porém, $\rho_{V_{\mathbb{C}}}$ é irredutível e assim temos que $W = \bigwedge W_1$ ou $W = \{0\}$.

■

### 4.4.1 O Produto Interno Hermitiano em $\bigwedge W_1$

Observemos inicialmente que a conjugação complexa em $V_{\mathbb{C}}$ é dada por $\lambda \otimes x \longrightarrow \bar{\lambda} \otimes x$. Vamos introduzir o produto interno Hermitiano definido em $V_{\mathbb{C}}$ por

$$\langle z_1, z_2 \rangle_H := \langle z_1, \bar{z_2} \rangle \quad z_1, z_2 \in V_{\mathbb{C}}.$$

Então podemos induzir *um produto interno Hermitiano* em $\bigwedge V_{\mathbb{C}}$ dado por

$$\langle z_1 \wedge \cdots \wedge z_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle_H = \langle z_1 \wedge \cdots \wedge z_p, \bar{w_1} \wedge \cdots \wedge \bar{w_p} \rangle \quad z_i, w_i \in V_{\mathbb{C}}.$$

Logo, $\bigwedge W_1$ herda o produto interno hermitiano.

**Proposição 4.8.** Seja $x \in V$. Então o operador $\rho_{Spin}(x)$ é auto-adjunto Hermitiano.

**Prova:** Seja $i_H(z)$ o operador substituição em $\bigwedge W_1$ correspondente ao produto interno Hermitiano. Vamos mostrar que

$$i_H(z) = i(\bar{z}) \ \in V_{\mathbb{C}}.$$

De fato, sejam $z, z_2, ..., z_p \in W_1$ e $w_1, w_2, ..., w_p \in W_1$. Então

$$\langle i_H(z)(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p), z_2 \wedge \cdots \wedge z_p \rangle_H = \langle w_1 \wedge \cdots \wedge w_p, z \wedge z_2 \wedge \cdots \wedge z_p \rangle_H$$

$$= \langle w_1 \wedge \cdots \wedge w_p, \bar{z} \wedge \bar{z}_2 \wedge \cdots \wedge \bar{z}_p \rangle = \langle i(\bar{z})(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p), \bar{z}_2 \wedge \cdots \wedge \bar{z}_p \rangle$$

$$\langle i(\bar{z})(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p), z_2 \wedge \cdots \wedge z_p \rangle_H.$$

Seja $x \in V$ e fixe

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + \omega x) = \frac{1}{2}(1 \otimes x + i \otimes Jx)$$

e

$$x_2 = \frac{1}{2}(x - \omega x) = \frac{1}{2}(1 \otimes x - i \otimes Jx).$$

Estas relações mostram que $x_2 = \bar{x}_1$. Agora consideremos o operador linear $\rho_{Spin}(x)$ de $\bigwedge W_1$. Então, como $i(x_2) = i(\bar{x}_1) = i_H(x_1)$,

$$\langle \rho_V(x)u, v \rangle_H = \langle x_1 \wedge u, v \rangle_H + \langle i(x_2)u, v \rangle_H = \langle u, i_H(x_1), v \rangle_H + \langle i_H(x_1)u, v \rangle_H$$

$$= \langle u, i(x_2)v \rangle_H + \langle u, x_1 \wedge v \rangle_H = \langle u, \rho_{\mathbb{V}}(x)v \rangle_H$$

Assim, a proposição está provada.

■

**Corolário 4.3.** Se $x \in V$, então

$$\langle \rho_{Spin}(x)u, \rho_{Spin}(x)v \rangle_H = (x, x)\langle u, v \rangle_H \quad u, v \in \bigwedge W_1.$$

**Prova:** De fato, pela proposição acima temos,

$$\langle \rho_{Spin}(x)u, \rho_{Spin}(x)v \rangle_H = \langle \rho_{Spin}(x)^2 u, v \rangle_H = (x, x)\langle u, v \rangle_H.$$

■

### 4.4.2 As Representações Semi-Spin

Denotaremos por $\rho^0_{Spin}$ a restrição da representação Spin $\rho_{Spin}$ a subálgebra $Cl^0(V,\Phi)$ em $\bigwedge W_1$.

Agora escrevamos

$$(\bigwedge W_1)^+ = \sum_{p-\text{par}} \bigwedge^p W_1 \quad e \quad (\bigwedge W_1)^- = \sum_{p-\text{ ímpar}} \bigwedge^p W_1.$$

Então os espaços $(\bigwedge W_1)^+$ e $(\bigwedge W_1)^-$ são estáveis sob os operadores $\rho_{Spin}(a)$, com $a \in Cl^0(V,\Phi)$. Assim podemos induzir as representações

$$\rho^+_{Spin} : Cl^0(V,\Phi) \longrightarrow End(\bigwedge W_1)^+$$

e

$$\rho^-_{Spin} : Cl^0(V,\Phi) \longrightarrow End(\bigwedge W_1)^-.$$

Essas representações são chamadas de *Representações Semi-Spin*.

**Proposição 4.9.** Os homomorfismos $\rho^+_{Spin}$ e $\rho^-_{Spin}$ são isomorfismos. Particularmente, as representações semi-spin são irredutíveis.

**Prova:** Observemos primeiro que as aplicações $\rho^+_{Spin}$ e $\rho^-_{Spin}$ são injetiva. Como $\dim_{\mathbb{C}}(\bigwedge W_1)^+ = 2^{n-1}$, temos $\dim_{\mathbb{C}} End(\bigwedge W_1)^+ = 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 2^{2n-2}$ e assim $\dim_{\mathbb{R}} End(\bigwedge W_1)^+ = 2 \cdot 2^{2n-2} = 2^{2n-1}$. Por outro lado, $\dim_{\mathbb{R}} Cl^0(V,\Phi) = 2^{2n-1}$. Assim $\rho^+_{Spin}$ é um isomorfismo. Analogamente provamos que $\rho^-_{Spin}$ é um isomorfismo. ■

### 4.4.3 Os Teoremas de Wedderburn

#### Aplicações Lineares Invariantes

Sejam $V$ e $W$ espaços $\mathbb{K}$-vetoriais de dimensão finita e seja $\rho$ uma representação da álgebra $End(V)$ em $W$. Assim, $\rho$ é um homomorfismo de álgebras $\rho : End(V) \longrightarrow End(W)$.Uma aplicação linear $\chi : V \longrightarrow W$ é chamada *$\rho$-invariante*, se ela satisfaz

$$\chi \circ \varphi = \rho(\varphi) \circ \chi \quad \varphi \in End(V) \tag{4.4}$$

As aplicações lineares $\rho$-invariantes formam um subespaço de $L(V;W)$ denotado por $L_\rho(V;W)$. Um operador linear $\psi : W \longrightarrow W$ é *$\rho$-invariante* se ele satisfaz

$$\rho(\varphi) \circ \psi = \psi \circ \rho(\varphi) \quad \varphi \in End(V). \tag{4.5}$$

Esses operadores formam um subespaço de $End(W)$ denotado por $End_\rho(W)$.

**O isomorfismo $\Theta_\rho$**

Consideremos a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} \Theta_\rho: & L_\rho(V;W)\otimes V & \longrightarrow & W \\ & \chi\otimes x & \longmapsto & \chi(x) \end{array}$$

Com $\chi \in L_\rho(V;W),\ x\in V$. Vamos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd} L_\rho(V;W)\otimes V \arrow[r, "\Theta_\rho"] \arrow[d, "I\otimes\varphi"'] & W \arrow[d, "\rho(\varphi)"] \\ L_\rho(V;W)\otimes V \arrow[r, "\Theta_\rho"] & W \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

é comutativo. De fato, sejam $\varphi\in End(V)$ e $\chi\in L_\rho(V;W)$. Então temos, devido a 4.4 ,

$$\Theta_\rho[(I\otimes\varphi)(\chi\otimes x)] = \rho(\varphi)(\chi x) = \rho(\varphi)\Theta_\rho(\chi\otimes x).$$

Assim,

$$\Theta_\rho\circ(I\otimes\varphi) = \rho(\varphi)\circ\Theta_\rho \quad \varphi\in End(V). \tag{4.7}$$

Verificando portanto a comutatividade.

Seja $V$ e $V^*$ um par de espaços duais com as respectivas bases $\{e_i\}$, $\{e_i^*\}$ e fixemos

$$\varphi_i^j = T(e_j^*\otimes e_i),$$

onde $T: V^*\otimes V \longrightarrow End(V)$ é o isomorfismo definido em C.1. Agora, vamos definir as aplicações lineares $T^j: W\longrightarrow L(V;W)$ por

$$T^j(y)x = \sum_{i=1}^n \langle e_j^*, x\rangle \rho(\varphi_i^j)y \qquad x\in V, y\in W. \tag{4.8}$$

A prova do seguinte lema será omitida, mas pode ser encontrada em Greub ([4],pag 275).

**Lema 4.2.** As aplicações $T^j$ satisfazem as seguintes propriedades:

(i) $T^j(y)\in L_\rho(V;W), \quad y\in W;$

(ii) $T^j(\chi x) = \langle e_j^*, x\rangle\chi, \quad \chi\in L_\rho(V;W);$

(iii) $\sum_{j=1}^n T^j(y)e_j = y, \quad y\in W.$

**Teorema 4.3** (Wedderburn)**.** *A aplicação* $\Theta_\rho : L_\rho(V;W) \otimes V \longrightarrow W$ *é um isomorfismo linear.*

**Prova:** Vamos inicialmente construir uma aplicação inversa

$$\Psi : W \longrightarrow L_\rho(V;W) \otimes V.$$

Consideremos um par de bases duais $\{e_i^*\}$,$\{e_i\}$ $\quad (i = 1, .., n)$ de $V^*$ e $V$ respectivamente e fixemos

$$\varphi_i^j = T(e_j^* \otimes e_j),$$

onde $T : V^* \otimes V \longrightarrow End(V)$ é o isomorfismo definido em C.1 . Observemos que $T$ satisfaz

$$\varphi \circ T(x^* \otimes x) = T(x^* \otimes \varphi(x)) \qquad \varphi \in End(V). \tag{4.9}$$

Agora, seja

$$\Psi : W \longrightarrow L_\rho(V;W) \otimes V$$

uma aplicação linear dada por

$$\Psi(y) = \sum_{j=1}^{n} T^j(y) \otimes e_j.$$

Então, para cada $\chi \in L_\rho(V;W)$ e $x \in V$

$$\Psi\Theta_\rho(\chi \otimes x) = \Psi(\chi x) = \sum_{j=1}^{n} T^j(\chi x) \otimes e_j = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j^*, x\rangle \chi \otimes e_j = \chi \otimes x$$

Ou seja,

$$\Psi \circ \Theta_\rho = I.$$

Por outro lado, para $y \in W$,

$$\Theta_\rho \circ \Psi(y) = \Theta_\rho(\sum_{j=1}^{n} T^j(y) \otimes e_j) = \sum_{j=1}^{n} T^j(y)(e_j) = y$$

Logo, $\Theta_\rho \circ \Psi = I$. Portanto, $\Theta_\rho$ é um isomorfismo. ∎

**Corolário 4.4.**

$$\dim W = \dim L_\rho(V;W) \cdot \dim V.$$

Consequentemente, $\dim V$ divide $\dim W$.

**O isomorfismo $\theta_\rho$**

Observemos inicialmente que a aplicação de composição

$$End(W) \times L(V;W) \longrightarrow L(V;W)$$

restringe-se para uma aplicação bilinear

$$End_\rho(W) \times L_\rho(V;W) \longrightarrow L_\rho(V;W).$$

Para simplificar a notação denotaremos $L_\rho(V;W)$. Então a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Theta_\rho : End_\rho(W) \otimes V & \longrightarrow & End(U) \\ \chi & \longmapsto & \psi \circ \chi \end{array}$$

satisfaz

$$\theta_\rho(\psi_1 \circ \psi_2) = \theta_\rho(\psi_1) \circ \theta_\rho(\psi_2)$$

e assim $\theta_\rho$ é um homomorfismo de álgebras.

**Teorema 4.4** (Wedderburn)**.** *$\theta_\rho$ é um isomorfismo.*

**Prova:** Veja [4],pag 277. ∎

**Teorema 4.5.** *Seja $A$ uma álgebra associativa com unidade $1_A$ e seja $\rho$ uma representação da álgebra $A \otimes End(V)$ num espaço vetorial $W$. Então existem uma representação $\rho_U$ de $A$ no espaço vetorial $U$ e um isomorfismo $\Theta : U \otimes V \longrightarrow W$ tais que o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \arrow[r, "\rho_U(a)\otimes\varphi"] \arrow[d] & U \otimes V \arrow[d] \\ W \arrow[r, "\rho(a\otimes\varphi)"] & W \end{tikzcd} \tag{4.10}$$

*$a \in A, \varphi \in End(V)$ é comutativo. Assim $\rho$ é equivalente a $\rho_U \otimes I$, onde $I$ denota a representação padrão de $End(V)$ em $V$.*

**Prova:** Sejam $\sigma_1$ e $\sigma_2$ de $A$ e $End(V)$ em $W$ fixando

$$\sigma_1(a) = \rho(a \otimes I) \qquad a \in A$$

e

$$\sigma_2(\varphi) = \rho(1_A \otimes \varphi) \qquad \varphi \in End(V).$$

Seja $End_{\sigma_2}(W)$ o subespaço de $W$ que é invariante sobre $\sigma_2$. Vamos mostrar que

$$\sigma_1(a) \in End_{\sigma_1}(W) \qquad a \in A.$$

De fato, seja $\varphi \in End(V)$. Então

$$\sigma_1(a) \circ \sigma_2(\varphi) = \rho(a \otimes I) \circ \rho(1_A \otimes \varphi) = \rho(a \otimes \varphi) = \rho[(1_A \otimes \varphi) \circ (a \otimes I)] =$$

$$= \rho(1_A \otimes \varphi) \circ \rho(a \otimes I) = \sigma_2(\varphi) \otimes \sigma(a).$$

Agora denotamos $U = L_\rho(V; W)$. Então,pelo teorema 4.3, existe um isomorfismo

$$\Theta : U \times V \longrightarrow W$$

tal que

$$\Theta \circ (I \otimes \varphi) = \sigma_2(\varphi) \circ \Theta \qquad \varphi \in End(V). \tag{4.11}$$

Pelo teorema 4.4 existe um isomorfismo de álgebras

$$\Omega : End(U) \longrightarrow End_{\sigma_2}(W).$$

Ele é definido por

$$\Omega(\gamma) = \Theta \circ (\gamma \otimes I) \circ \Theta^{-1} \qquad \gamma \in End(U). \tag{4.12}$$

Assim a representação $\rho_U$ de $A$ em $U$ é dada por

$$\rho_U(a) = \Omega^{-1} \circ \sigma_1(a) \qquad a \in A. \tag{4.13}$$

Segue das relações 4.12 e 4.13 que

$$\rho(a) = \Omega\rho_U(a) = \Theta \circ (\rho_U(a) \otimes I) \circ \Theta^{-1}.$$

Assim,

$$\Theta \circ (\rho_U(a) \otimes I) = \sigma_1(a) \circ \Theta \qquad a \in A. \tag{4.14}$$

Das relações 4.11 e 4.14 temos

$$\Theta \circ (\rho_U(a) \otimes \varphi) = \Theta \circ (\rho_U(a) \otimes I) \circ (I \otimes \varphi)\sigma_1 \circ \Theta \circ (I \otimes \varphi)$$

$$= \sigma_1(a)\sigma_2(\varphi) \circ \Theta = \rho(a \otimes \varphi) \circ \Theta.$$

Assim o diagrama 4.10 comuta e conclui-se a demonstração.

■

## 4.5 As representações de $Cl_{0,k}$

Nesta seção estudaremos as representações das álgebras de Clifford $Cl_{0,k}$ associadas ao espaço de Minkowski $\mathbb{R}^k$,com a forma quadrática $\Phi(x) = -(x_1^2 + ... + x_k^2)$, as quais denotaremos simplesmente por $Cl_k$.

### 4.5.1 O Número de Radon-Hurwitz

Seja $\rho$ uma representação de $Cl_k$ no espaço $\mathbb{R}^n$. Vamos inicialmente mostrar que $k \leq n-1$. De fato, pela proposição 4.1 podemos assumir que $\rho$ é ortogonal e negativa. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ uma base $\Phi$-ortogonal de $\mathbb{R}^k$, tal que

$$e_i^2 = -1 \;\text{ e }\; e_i e_j = -e_j e_i \;\text{ em }\; Cl_k,$$

e seja $\rho(e_i) = \sigma_i$, $(i = 1, .., k)$. Então temos as relações

$$\sigma_i \circ \sigma_j + \sigma_j \circ \sigma_i = -2\delta_{ij} \cdot I,$$

onde $I$ é a aplicação identidade. Em particular, $\sigma_i^2 = -I \quad (i = 1, ..., k)$. Além disso, segue da demonstração da proposição 4.1, temos que $\sigma_i^* = -\sigma_i$ para $i = 1, ..., k$. Agora, fixemos um vetor unitário $a \in \mathbb{R}^n$ e seja $\sigma_i(a) = a_i \quad (i = 1, .., k)$. Então

$$\langle a, a_i \rangle = \langle a, \sigma_i(a) \rangle = 0 \qquad (i = 1, .., k)$$

e

$$\langle a_i, a_j \rangle = \langle \sigma_i(a), \sigma_j(a) \rangle = \langle \sigma_j \sigma_i(a), \sigma_j^2(a) \rangle.$$

Daí,

$$2\langle a_i, a_j \rangle = -\langle (\sigma_j \sigma_i + \sigma_i \sigma_j(a)), a \rangle = 2\delta_{ij} \langle a, a \rangle = 2\delta_{ij}.$$

Consequentemente,

$$\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (i = 1, ..., k).$$

Assim, os vetores $a, a_1, ..., a_k$forma um conjunto de $k+1$ elementos linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$. Isto implica que $k + 1 \leq n$.

Assim para cada $n \leq 1$ existe um maior $k \geq 0$ tal que $Cl_k$ é representável em $\mathbb{R}^n$. Tal $k$ é chamado de *número de Radon-Hurwitz* de $\mathbb{R}^n$ e será denotado por $K(n)$. Segue do anterior que

$$K(n) \leq n - 1. \tag{4.15}$$

**Proposição 4.10.** O número de Radon-Hurwitz satisfaz a equação funcional

$$K(16n) = K(n) + 8, \quad n \geq 1.$$

**Prova:** Pelo teorema de Cartan-Bott(3.1) e a tabela de classificação, temos o isomorfismo

$$\Psi : Cl_{k+8} \cong Cl_k \otimes M_{16}(\mathbb{R}).$$

Assim, se $\rho$ é uma representação de $Cl_k$ em $\mathbb{R}^n$, então

$$\rho_1 = (\rho \otimes I) \circ \Psi$$

é uma representação de $Cl_{k+8}$ em $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^{16} \cong \mathbb{R}^{16n}$. Daí temos,

$$K(16n) \geq K(n) + 8.$$

Reciprocamente, seja $\tau$ uma representação de $Cl_{k+8}$ em $\mathbb{R}^{16n}$. Então $\tau \circ \Psi^{-1}$ é uma representação de $Cl_k \otimes Cl_8$ em $\mathbb{R}^{16n}$. Pelo teorema 4.5 aplicado para $A = Cl_k$ e $V = \mathbb{R}^{16}$ existe uma representação de $Cl_k$ em um espaço vetorial $U$, onde

$$U \otimes \mathbb{R}^{16} \cong \mathbb{R}^{16n}.$$

Segue desta relação que $\dim U = n$. Portanto,

$$K(n) \geq K(16n) - 8.$$

■

Nosso objetivo é calcular o número de Radon-Hurwitz em termos da fatoração de $n$. Para isto precisaremos de alguns resultados.

**Lema 4.3.** Seja $q$ ímpar e $0 \leq b \leq 3$. Então

$$K(2^b \cdot q) \leq 7.$$

**Prova:** Suponhamos $Cl_k$ é representável em $\mathbb{R}^n$ e $k \geq 8$. Escrevamos $k = l + 8$, $l \geq 0$. Então, $Cl_k \simeq Cl_l \otimes Cl_8 \simeq Cl_l \otimes End(\mathbb{R}^{16})$ é representável em $\mathbb{R}^n$.
Pelo teorema 4.5, temos que $U \otimes \mathbb{R}^{16} \simeq \mathbb{R}^n$, ou seja, 16 divide $n$, e assim, $n$ não pode ser escrito da forma $2^b \cdot q$. Portanto, $K(2^b \cdot q) \leq 7$.

■

**Lema 4.4.** Se $\rho$ é uma representação de $\mathbb{H}$ em espaço $\mathbb{R}$-vetorial $V$ de dimensão $n$. Então $n$ é múltiplo de 4.

**Prova:** Escrevamos

$$\rho(x)(v) = x \cdot v, \quad x \in \mathbb{H}, v \in V.$$

Diremos que uma família de vetores $v_1, .., v_k \in V$ gera $V$ sobre $\mathbb{H}$, se todo $v \in V$ pode ser escrito da forma

$$v = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot v_i \quad x_i \in \mathbb{H}.$$

Seja $m$ o menor número tal que $V$ é gerado pelos $m$ vetores e seja $v_1, ..., v_m$ tal família. Não é difícil ver que a seguinte relação

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot v_i = 0$$

implica que $x_i = 0 \quad (i = 1, .., m)$. Agora, escolhamos uma base $\{e, e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{H}$. Então segue que os $4m$ vetores

$$v_i, e_1 v_i, e_2 v_i, e_3 v_i \quad (i = 1, ..., m),$$

forma uma base de $V$ sobre $\mathbb{R}$. Portanto, $n = 4m$.

$\blacksquare$

**Lema 4.5.** Seja $q$ ímpar e $0 \leq b \leq 3$. Então

$$K(2^b \cdot q) = 2^b - 1.$$

**Prova:** Precisamos mostrar que

(i) $K(q) = 0$;

(ii) $K(2q) = 1$;

(iii) $K(4q) = 3$;

(iv) $K(8q) = 7$.

(i) Pelo lema 4.3, $K(q) \leq 7$. Assim, devemos mostrar que se $Cl_k$ é representável em $\mathbb{R}^q$ e $0 \leq k \leq 7$, então $k = 0$. Pela tabela de classificação das álgebras de Clifford, todas as $Cl_k$ $(1 \leq k \leq 7)$ contém $\mathbb{C}$ como subálgebra. Assim, a representação de $Cl_k$ $(1 \leq k \leq 7)$

em $\mathbb{R}^q$ determina uma representação de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{R}^q$. Logo $\mathbb{R}^q$ seria um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, o que é impossível, pois $q$ é ímpar. Portanto $k = 0$.

(ii) $K(2q) = 1$: Provemos mostrar primeiro que

$$K(2q) \leq 1. \tag{4.16}$$

O lema 4.3 implica que $K(2q) \leq 7$. Observemos que todas as álgebras de Clifford $Cl_k$ com $2 \leq k \leq 7$ contém $\mathbb{H}$ como subálgebra e assim uma representação de $Cl_k$ em $\mathbb{R}^{2q}$ induz uma representação de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{R}^{2q}$. Isto é impossível, pois $2q$ não é divisível por 4 (veja 4.4). Assim, $k = 1$ e portanto 4.16 está provado.
Por outro lado, $Cl_1 \simeq \mathbb{C}$ é representável em $\mathbb{R}^{2q}$ e assim

$$K(2q) \geq 1.$$

Daí, temos $K(2q) = 1$.

(iii) $K(4q) = 3$: Vamos mostrar primeiro que

$$K(4q) \leq 3. \tag{4.17}$$

Pelo lema 4.3, $K(4q) \leq 7$. Assim temos que mostrar que para $4 \leq k \leq 7$ a álgebra $Cl_k$ não pode ser representada em $\mathbb{R}^{4q}$. Pela a tabela de Classificação das álgebras de Clifford as tais álgebras são da forma

$$C_k = B_k \otimes M_2(\mathbb{R}),$$

onde $B_k$ contém $\mathbb{H}$ como subálgebra. De fato,

$$B_4 = \mathbb{H}, \quad B_5 = \mathbb{H} \otimes \mathbb{C},$$

$$B_6 = \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, \quad B_7 = \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}.$$

Agora, seja $\rho$ uma representação de $Cl_k$ em $\mathbb{R}^{4q}$. Então o teorema 4.5 (aplicado para $A = B_k$ e $V = \mathbb{R}^2$) mostra que a representação $\rho_U : B_k \longrightarrow End(U)$ onde

$$\mathbb{R}^{4q} \simeq U \otimes \mathbb{R}^2.$$

Como $\mathbb{H} \subset B_k$, $\rho_U$ determina uma representação de $\mathbb{H}$ em $U$. Assim, $\dim U$ é divisível por 4 (veja 4.4) e consequentemente $\dim \mathbb{R}^{4q}$ é divisível por 8.

Isto é impossível pois, $q$ é ímpar e assim 4.17 é satisfeitas.

Por outro lado,

$$K(4q) \geq 3. \tag{4.18}$$

De fato, escrevamos

$$Cl_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

Então, a representação $\rho$ de $Cl_3$ em $\mathbb{R}^4(\simeq \mathbb{H})$ dada por

$$\rho(p \oplus q)x = p \cdot x \quad x \in \mathbb{H}.$$

Assim,

$$\underbrace{\rho \oplus \cdots \oplus \rho}_{q}$$

é uma representação de $Cl_3$ em $\mathbb{R}^{4q}$ e assim 4.18 é satisfeita.

(iv) $K(8q) = 7$: Pelo lema 4.3,

$$K(8q) \leq 7.$$

Para mostrar que

$$K(8q) \geq 7,$$

construímos uma representação de $Cl_{0,7}$ em $\mathbb{R}^{8q}$. Escrevamos,

$$Cl_{0,7} = M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R}),$$

e definamos

$$\rho(\alpha \oplus \beta) = \alpha \quad \alpha, \beta \in M_8(\mathbb{R}),$$

Então $\rho$ é uma representação de $Cl_{0,7}$ em $\mathbb{R}^8$ e assim

$$\underbrace{\rho \oplus \cdots \oplus \rho}_{q}$$

é uma representação de $Cl_{0,7}$ em $\mathbb{R}^{8q}$. Assim, $K(8q) \geq 7$.

■

Agora estamos em condições de provar nosso resultado

**Teorema 4.6.** *Seja $n \geq 1$. Escrevamos*

$$n = 16^a \cdot 2^b \cdot q, \quad a \geq 0,\ 0 \leq b \leq 3, \quad q \text{ ímpar.}$$

*Então o número de Radon-Hurwitz do $\mathbb{R}^n$ é dado por*

$$K(n) = 8a + 2^b - 1, \quad n \geq 1.$$

*Em particular se $n$ é ímpar, então $K(n) = 0$.*

**Prova:** Segue do lema 4.5 e pela proposição 4.10.

■

**Observação 4.5.** Os números de Radon-Hurwitz são utilizados para caracterizar as esferas paralelizáveis, isto é, as esferas com campos que tem campos vetoriais linearmente independentes.

Outra aplicação dos números de Radon-Hurwitz é na classificação das álgebras reais com divisão normadas, que são $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e $\mathbb{Q}$. (Veja [10])

# Apêndice A

# Espaços Quadráticos

**Definição A.1.** Seja $V$ um $K$-espaço vetorial e $f : V \times V \longrightarrow K$ uma forma bilinear. Dizemos que $f$ é não degenerada se para cada $v \in V$,não nulo, existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $f(v, v_1) \neq 0$ e $f(v_2, v) \neq 0$.

**Exemplo A.1.** Todo produto num espaço vetorial real é não-degenerado.

**Definição A.2.** Sejam $V$ um $K$-espaço vetorial e $f : V \times V \longrightarrow K$ uma forma bilinear. Dizemos que $f$ é simétrica se $f(u, v) = f(v, u)$ para quaisquer $u, v \in V$.

Sendo $f$ bilinear simétrica, dizemos que dois vetores $u, v \in V$ são ortogonais com respeito a $f$ se $f(u, v) = 0$.

**Exemplo A.2.** Todo produto interno definido num espaço vetorial real é uma forma bilinear simétrica.

**Definição A.3.** Seja $V$ um $K$-espaço vetorial de dimensão finita, onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Uma forma quadrática em $V$ é uma aplicação $\Phi : V \longrightarrow K$ tal que

(i) $\Phi(\lambda v) = \lambda^2 \Phi(v), \quad \lambda \in K, \quad v \in V$

(ii) A forma associada

$$f(u, v) = \frac{1}{2}\Phi(u) + \Phi(v) - \Phi(u - v), \quad u, v \in V$$

é bilinear.

**Definição A.4.** Um Espaço Quadrático é um par $(V, \Phi)$, onde $V$ é um espaço vetorial e $\Phi$ é uma forma quadrática em $V$.

**Exemplo A.3.** Todo espaço vetorial $V$ sobre um corpo $K$ torna-se um espaço quadrático com respeito e forma quadrática nula $\Phi \equiv 0$.

**Exemplo A.4.** Tipicamente, podemos obter espaços quadráticos a partir de espaços com produto interno. Seja $(V, <, >)$ um espaço com produto interno, defina $\Phi(v) =< v, v >$, então $(V, \Phi)$ é um espaço quadrático. Particularmente, temos que se $<, >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é o produto interno euclidiano usual em $\mathbb{R}^n$, então $(\mathbb{R}^n, |.|^2)$ e $(\mathbb{R}^n, -|.|^2)$ são espaço quadráticos reais com a formas bilineares associadas $<, >$ e $- <, >$ respectivamente.

**Exemplo A.5.** Seja $<, >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ o produto interno euclidiano usual em $\mathbb{R}^n$, então $(\mathbb{R}^n, |.|^2)$ e $(\mathbb{R}^n, -|.|^2)$ são espaço quadráticos reais com a formas bilineares associadas $<, >$ e $- <, >$ respectivamente.Mais geralmente, sejam $p, q$ inteiros não-negativos com $p+q > 0$ e defina a forma quadrática em $\mathbb{R}^{p+q}$ por

$$\Phi_{p,q}(u) = u_1^2 + ... + u_p^2 - (u_{p+1}^2 + ... + u_{p+q}^2), \quad u = (u_1, ..., u_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

O par $(p, q)$ é chamado de *assinatura* da forma quadrática $\Phi_{p,q}$. Esta forma quadrática é chamada de *forma quadrática de Minkowski* e o espaço quadrático denotado por, $(\mathbb{R}^{p+q}, \Phi_{p,q})$ é chamado de *espaço de Minkowski.*

**Observação A.1.** Os casos em que $q = 0$ temos $(\mathbb{R}^{p,0}, \Phi_{p,0}) = (\mathbb{R}^p, -|.|)$ e quando $p = 0$ temos, $(\mathbb{R}^q, \Phi_{0,q}) = (\mathbb{R}^q, |.|)$. Por convenção, $\mathbb{R}^{0,0} = 0$.

**Exemplo A.6.** No caso complexo, $(\mathbb{C}^n, \Phi_n)$ torna-se um espaço quadrático complexo, com a forma quadrática

$$\Phi_n(z) = z_1^2 + ... + z_n^2, \quad z = (z_1, ...z_n)$$

Notemos que a forma bilinear associada é $B_n(z, w) = z_1 w_1 + ... + z_n w_n$.

Seja $(V, \Phi)$ um espaço quadrático e $e_j$ uma base de $V$ e $v = \sum_j v_j e_j$. Então

$$\Phi(v) = \sum_{j,k} f(e_j, e_k) v_j v_k$$

e se $e_j$ for uma base $f$-ortogonal, isto é, $f(e_j, e_k) = 0$ quando $j \neq k$, então a expressão para $\Phi(v)$ reduzi-se para a forma diagonal

$$\Phi(v) = \sum_j \Phi(e_j) v_j^2, \quad v = \sum_j v_j.$$

**Definição A.5.** Um espaço quadrático $(V, \Phi)$ é não-degenerado se sua forma quadrática $\Phi$ é não-degenerada.

Dados dois espaços quadráticos $(V, \Phi_V)$ e $(W, \Phi_W)$, obtemos um outro espaço quadrático $(V \oplus W, \Phi_V \oplus \Phi_W)$, onde a forma quadrática $\Phi_V \oplus \Phi_W : V \oplus W \longrightarrow \mathbb{K}$ é definida por $\Phi_V \oplus \Phi_W(v + w) = \Phi_V(v) + \Phi_W(w)$, pata todo $v + w \in V \oplus W$.

# Apêndice B

# Categorias e Funtores

**Definição B.1.** Uma *categoria* é uma classe $\mathcal{C}$ de objetos(denotados por $A$,$B$,$C$,...) juntamente com:

( i ) Uma classe de conjuntos disjuntos denotados por $hom(A, B)$, um para cada par de objetos em $\mathcal{C}$;(um elemento $f$ de $hom(A, B)$ é chamado um *morfismo* de $A$ em $B$ e é denotado por $f : A \longrightarrow B$);

(ii ) para cada terna $(A, B, C)$ de objetos de $\mathcal{C}$ uma função

$$hom(B, C) \times hom(A, B) \longrightarrow hom(A, C));$$

(para morfismos $f : A \longrightarrow B$,$g : B \longrightarrow C$, esta função é escrita $(g, f) \longmapsto g \circ f$ e o morfismo $(g, f) \longmapsto g \circ f$ é chamado a composição de $f$ e $g$ ); todos sujeitos aos dois axiomas:

Associatividade: Se $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ e $h : C \longrightarrow D$ são morfismos de $\mathcal{C}$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Identidade: Para cada objeto de $\mathcal{C}$ existe um morfismo $1_B : B \longrightarrow B$ tal que para todo $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$,

$$1_B \circ f = f \quad e \quad g \circ 1_B = g.$$

**Exemplo B.1.** Seja $S$ a classe de todos os conjuntos. Para $A$,$B$, $Hom(A, B)$ é o conjunto de todas as funções $f : A \longrightarrow B$. Então $S$ é facilmente visto como uma categoria

**Exemplo B.2.** A classe $G$ cujos objetos são grupos e os morfismos são homomorfismos de grupos é uma categoria. A composição definida é composição usual de homomorfismos.

**Exemplo B.3.** A Classe $QVec$ cujos objetos são os espaço quadráticos e os morfismos são isometrias dados por aplicações lineares $f : V \longrightarrow W$ tais que $\Phi_W(f(x)) = \Phi_V(x)$ para todo $x \in V$ é uma categoria. A composição definida é a composição usual de transformações lineares.

**Exemplo B.4.** A classe $AA$ cujos objetos são álgebras associativas e os morfismo são homomorfismos de álgebras formam uma categoria.

**Funtores**

Como nós frequentemente observamos, o estudo de qualquer objeto matemático requer consideração das aplicaçõe entre tais objetos. Em nosso caso os objetos matemáticos em questão são as categorias. Um funtor é uma aplicação de uma categoria em outra que preserva a estrutura apropriada.

**Definição B.2.** Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um *funtor covariante* $T$ de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$(denotado por $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$) é um par de funções (ambos denotados por $T$), uma função objeto que associa a cada objeto de $C$ de $\mathcal{C}$ um objeto $T(C)$ de $\mathcal{D}$ e uma função morfismo que associa a cada morfismo $f : C \longrightarrow C'$ de $\mathcal{C}$ um morfismo $T(f) : T(C) \longrightarrow T(C')$ de $\mathcal{D}$, tal que

(i) $T(1_C) = 1_{T(C)}$ para todo morfismo identidade $1_C$ de $\mathcal{C}$;

(ii) $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ para dois quaisquer morfismos $f, g \in \mathcal{C}$ cuja a composição $g \circ f$ está definida.

**Exemplo B.5.** O funtor identidade $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ que associa ???? a cada objeto e a cada morfismo da categoria $\mathcal{C}$ ele mesmo.

**Exemplo B.6.** Seja $R$ um anel e $A$ um $R$-módulo fixado. Para cada $R$-módulo $C$, seja $T(C) = Hom_R(A, C)$. Para cada homomorfismo de $R$-módulos $f : C \longrightarrow C'$, seja $T(f)$ a aplicação usual induzida $\bar{f} : Hom_R(A, C) \longrightarrow Hom_R(A, C')$. Então $T$ é um funtor covariante da categoria dos $R$-módulos para a categoria dos grupos abelianos.

**Definição B.3.** Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um *funtor contravariante* $S$ de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$(denotado por $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$) é um par de funções (ambos denotados por $T$), uma função objeto que associa a cada objeto de $C$ de $\mathcal{C}$ um objeto $S(C)$ de $\mathcal{D}$ e uma função morfismo que associa a cada morfismo $f : C \longrightarrow C'$ de $\mathcal{C}$ um morfismo $S(f) : S(C) \longrightarrow S(C')$ de $\mathcal{D}$, tal que

( i ) $S(1_C) = 1_{S(C)}$ para todo morfismo identidade $1_C$ de $\mathcal{C}$;

(ii ) $S(g \circ f) = S(f) \circ S(g)$ para dois quaisquer morfismos $f, g \in \mathcal{C}$ cuja a composição $g \circ f$ está definida.

# Apêndice C

# Um pouco de Álgebra Linear

## C.1 Espaços Duais

**Definição C.1.** Sejam $V^*$ e $V$ dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\langle\ ,\ \rangle$ uma forma bilinear não-degenerada definida em $V^* \times V$. Então $V^*$ e $V$ são chamados de *duais* com respeito a forma bilinear $\langle\ ,\ \rangle$. O escalar $\langle x^*, x\rangle$ é chamado o *produto escalar* de $x^*$ e $x$, e a forma bilinear $\langle\ ,\ \rangle$ é chamada de *produto escalar* entre $V^*$ e $V$.

**Exemplo C.1.** Seja $V = V^* = \mathbb{K}$ e defina a aplicação $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$\langle \lambda, \mu\rangle = \lambda\mu \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

É claro que $\langle\ ,\ \rangle$ é não degenerada, e portanto $\mathbb{K}$ pode ser visto como um espaço auto-dual.

**Exemplo C.2.** Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $V^* = L(V)$ o espaço dos funcionais lineares em $V$. Defina a aplicação bilinear $\langle\ ,\ \rangle$ por

$$\langle f, x\rangle = f(x), \quad f \in L(V), x \in V.$$

Notemos que $< f, x >= 0$, para todo $x \in V$, se e somente se $f = 0$.

Por outro lado, consideremos $a \in V$ um vetor não-nulo e seja $V_1$ o subespaço de $V$ gerado por $a$. Então o funcional linear $g$ é definido em $V_1$ por

$$g(x) = \lambda \quad \text{onde} \quad x = \lambda a,$$

pode ser estendido para o funcional linear $f$ em $V$. Assim,

$$< f, a >= f(a) = g(a) = 1 \neq 0.$$

Consequentemente, $\langle\ ,\ \rangle$ e não-degenerada.

## C.2 Aplicações Duais

**Definição C.2.** Sejam $V$, $V^*$ e $W$, $W^*$ dois pares de espaços duais e sejam $\varphi : V \longrightarrow W$ e $\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$ duas aplicações lineares. As aplicações $\varphi$ e $\varphi^*$ são ditas *duais*, se

$$\langle y^*, \varphi x\rangle = \langle \varphi^* y^*, x\rangle \quad y^* \in W^*, x \in V.$$

Para cada aplicação linear $\varphi : V \longrightarrow W$ existe no máximo uma aplicação dual. De fato, se $\varphi_1^*$ e $\varphi_2^*$ são aplicações duais de $\varphi$ temos que

$$\langle y^*, \varphi x\rangle = \langle \varphi_1^* y^*, x\rangle \quad \text{e} \quad \langle y^*, \varphi x\rangle = \langle \varphi_2^* y^*, x\rangle$$

Consequentemente,

$$\langle \varphi_1^* y^* - \varphi_2^* y^*, \quad x\rangle = 0 \quad x \in V, y^* \in W^*.$$

Isto implica que $\varphi_1^* y^* = \varphi_2^* y^*$. Portanto, $\varphi_1^* = \varphi_2^*$.

**Exemplo C.3.** Sejam $V$,$V^*$ um par de espaços duais. Sejam também, $V_1$ um subespaço de $V$ e $V_1^\perp := \{x^* \in V^* / < x^*, x >= 0, \text{ para todo } x \in V_1\}$.

Seja $\pi$ a projeção canônica de $V^*$ em $V^*/V_1^\perp$,

$$\pi : V^* \longrightarrow V^*/V_1^\perp$$

Então a injeção canônica $I : V_1 \longrightarrow V$ é a dual de $\pi$. De fato, se $x \in V_1$ e $y^* \in V^*$, temos

$$\langle y^*, Ix\rangle = \langle y^*, x\rangle = \langle \bar{y}^*, x\rangle = \langle \pi y^*, x\rangle.$$

Assim,

$$\pi = I^*.$$

## C.3 A Álgebra de Composição

Seja $V^*$ e $V$ um par de espaços duais com respeito a forma bilinear $\langle\ ,\ \rangle$. Vamos definir uma multiplicação no espaço $V^* \otimes V$ da seguinte forma

$$(x^* \otimes x) \circ (y^* \otimes y) = \langle x^*, y\rangle (y^* \otimes x).$$

É fácil verificar que a multiplicação torna $V^* \otimes V$ uma álgebra associativa chamada **álgebra de composição**.

Agora, consideremos a aplicação linear $T : V^* \otimes V \longrightarrow End(V)$ dada por

$$T(a^* \otimes b) = \langle a^*, x\rangle b \tag{C.1}$$

Como

$$T[(a_1^* \otimes b_1) \circ (a_2^* \otimes b_2)] = T(a_1^* \otimes b_1) \circ T(a_2^* \otimes b_2),$$

$T$ é um homomorfismo de álgebras. Agora, vamos mostrar que $T$ é injetiva. De fato,seja $z \in V^* \otimes V$, tal que $T(z) = 0$ e consideremos $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de $V$. Então, $z$ é um soma finita

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes e_i, \quad x_i^* \in V^*.$$

Logo, para todo $x \in V$,

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_i^*, x\rangle e_i = 0$$

Portanto,

$$\langle x_i^*, x\rangle = 0 \quad x \in V.$$

Isto implica que $x_i^* = 0$, $i = 1, ..., n$ e assim, $z = 0$. Consequentemente, $T$ é injetiva.

## C.4 Os Operadores de Substituição e Multiplicação em $\bigwedge V$

Seja $V$ um espaço vetorial e $\bigwedge V$ a álgebra exterior sobre $V$. Fixemos $a \in \bigwedge V$ e consideremos o operador

$$\begin{array}{rcl} \mu(a) : \bigwedge V & \longrightarrow & \bigwedge V \\ u & \longmapsto & a \wedge u \end{array}$$

Este operador é conhecido como operador de multiplicação na álgebra exterior $\bigwedge V$. Como a álgebra $\bigwedge V$ é associativa, temos a relação

$$\mu(a \wedge b) = \mu(a) \circ \mu(b) \quad a, b \in \bigwedge V. \tag{C.2}$$

Além disso, para $v, w \in V$, temos

$$\mu(v)\mu(w) + \mu(w)\mu(v) = 0 \tag{C.3}$$

Agora consideremos a aplicação dual

$$I(a) : \bigwedge V^* \longrightarrow \bigwedge V^*.$$

Ela é determinada pela equação

$$\langle I(a)u^*, v\rangle = \langle u^*, a \wedge v\rangle \quad v \bigwedge V.$$

Em particular,

$$I(\lambda)u^* = \lambda u^* \lambda \in \mathbb{K}.$$

Agora suponhamos que $a$ é um elemento homogêneo de grau $p$. Então $I(a)$ restringi-se para aplicações lineares

$$\wedge^p V^* \longrightarrow \wedge^{r-p} V^*, \quad r \geq p$$

e reduze-se a aplicação nula se $r \leq p$. Para $u^* \in \wedge^p V^*$ temos

$$I(a)u^* = \langle u^*, a\rangle$$

Dualizando C.2 obtemos

$$I(a \wedge b) = I(b) \circ I(a) \quad a, b \in \bigwedge V. \tag{C.4}$$

Em particular

$$I(a \wedge b) = (-1)^{pq} I(b \wedge a) \quad a \in \wedge^p V, b \in \wedge^q V. \tag{C.5}$$

## O Operador I(h)

Nesta seção vamos considerar o operador $I(h)$ no caso especial em que $h \in V^*$. A fórmula C.5 implica que

$$I(h) \circ I(k) + I(k) \circ I(h) = 0 \quad h, k \in V^*. \tag{C.6}$$

Em particular

$$I(h)^2 = 0.$$

**Proposição C.1.** O operador $I(h)$ é uma anti-derivação na álgebra $\bigwedge V^*$, isto é,

$$I(h)(u^* \wedge v^*) = I(h)u^* \wedge v^* + (-1)^p u^* \wedge I(h)v^* \quad u^* \in \wedge^p V^*, v^* \in \bigwedge V^*.$$

**Prova:** Consideremos a aplicação linear $\varphi_h : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\varphi_h x^* = \langle x^*, h \rangle, \quad x^* \in V^*.$$

Segue da seção ([4] seção 5.11-pág 118) que $\varphi_h$ estende-se para antiderivação $\Omega_h$ de grau $-1$ em $\bigwedge V^*$. Vamos mostrar que $\Omega(h) = I(h)$,

$$\langle \Omega_h u^*, v \rangle = \langle u^*, h \wedge v \rangle \quad u^* \in \bigwedge V^*, v \in \bigwedge V. \tag{C.7}$$

Suponhamos que $u^*$ e $v$ são elementos decomponíveis, isto é, $u^* = x_1^* \wedge \cdots \wedge x_p^*$ e $v = x_1 \wedge \cdots \wedge x_q$. Se $p \neq q+1$ ambos os lados da igualdade C.7 são zero e assim somente o caso $p = q+1$ pode ser considerado. Logo,

$$\langle \Omega_h u^*, v \rangle = \langle \Omega_h(x_1^* \wedge \cdots \wedge x_p^*), x_1 \wedge \cdots \wedge x_{q-1} \rangle = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle x_i^*, h \rangle \langle x_1^* \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i^*} \wedge \cdots \wedge$$

$$x_p^*, x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p-1} \rangle = \langle x_1^* \wedge \cdots \wedge x_p^*, h \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p-1} \rangle = \langle u^*, h \wedge v \rangle.$$

■

**Corolário C.1.**

$$I(h) \circ \mu(h^*) + \mu(h^*) \circ I(h) = \langle h^*, h \rangle I \quad h \in V, h^* \in V^*. \tag{C.8}$$

**Prova:** Apliquemos a proposição anterior para o caso $u^* = h^*$. ■

**Corolário C.2.**

$$I(h)(x_1^* \wedge \cdots \wedge x_p^*) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle x_i^*, h \rangle x_1^* \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i^*} \wedge \cdots \wedge x_p^*$$

As relações C.3 ,C.6 e C.8 são conhecidas como *relações de comutação.*

## C.5 A Soma Direta de Espaços Duais

Sejam $V_1$ e $V_2$ espaços duais de dimensão $n$ e considere a soma direta $V = V_1 \oplus V_2$. Então podemos definir uma forma bilinear não-degenerada em $V$ por

$$(x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2) = \frac{1}{2}[\langle x_1, y_2 \rangle + \langle y_1, x_2 \rangle] \quad x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2.$$

A seguir apresentaremos o lema cuja prova pode ser encontrada em ([4], pag.247).

**Lema C.1.** Seja $V^*$, $V$ um par de espaços duais reais de dimensão finita. Então a álgebra $End(\bigwedge V)$ é gerada pelos operadores $\mu(x)$ e $i(x^*)$, $x \in V, x^* \in V^*$.

**Proposição C.2.** Existe um isomorfismo de álgebras $Cl(V, \Phi) \cong End(\bigwedge V_1)$.

**Prova:** Recordemos inicialmente os operadores de substituição e multiplicação em $\bigwedge V_1$. Identificando $V_1$ com $V_2^*$ temos as seguintes relações

$$\mu(x_1)^2 = 0 \quad x_1 \in V_1$$

$$i(x_2)^2 = 0 \quad x_2 \in V_2$$

e pelo corolário C.1, temos

$$i(x_2)\mu(x_1) + \mu(x_2)i(x_1) = \langle x_1, x_2 \rangle I \quad x_1 \in V_1, x_2 \in V_2.$$

Agora defina a aplicação linear $\varphi : V \longrightarrow End(\bigwedge V_1)$ definida por

$$\varphi(x) = \mu(x_1) + i(x_2) \quad x \in V,$$

Onde $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$. Então a seguinte relação é satisfeita para todo $x \in V$

$$\varphi(x)^2 = \mu(x_1) \circ \mu(x_1) + \mu(x_1) \circ i(x_2) + i(x_2) \circ \mu(x_1) + i(x_2) \circ i(x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle \cdot I = (x, x) \cdot 1$$

Assim $\varphi$ estende-se para o homomorfismo

$$\tilde{\varphi} : Cl(V, \Phi) \longrightarrow End(\bigwedge V_1).$$

Como

$$\dim End(\bigwedge V_1) = (2^n)^2 = 2^{2n} = \dim Cl(V, \Phi),$$

é suficiente mostrar que $\tilde{\varphi}$ é sobrejetiva, a qual segue do lema C.1.

■

**Proposição C.3.** Seja $V$ um espaço vetorial real de dimensão $2n$ com uma forma bilinear não-degenerada. Suponha que existe uma involução $\omega$ em $V$ tal que $\omega^* = -\omega$. Então a álgebra de Clifford $Cl(V, \Phi)$ é isomorfa a álgebra dos operadores lineares de $\bigwedge V_1$, onde $V_1 = \ker(\omega - I)$.

**Prova:** Consideremos os subespaços $V_1 = \{x \in V | \ \omega x = x\}$ e $V_2 = \{x \in V | \ \omega x = -x\}$. Consequentemente $V = V_1 \oplus V_2$. Para $x_1 \in V_1, y_1 \in V_1$, temos

$$(x_1, y_1) = (\omega x_1, \omega y_1) = -(\omega^2 x_1, y_1) = -(x_1, y_1)$$

Consequentemente $(x_1, y_1) = 0$. Similarmente

$$(x_2, y_2) = 0 \quad x_2, y_2 \in V_2.$$

Assim a restrição da forma bilinear para $V_1 \times V_1$ e $V_2 \times V_2$ é nula. Por outro lado, a restrição para $V_1 \times V_2$ é não-degenerada. De fato, fixemos $x_1 \in V_1$ e suponhamos que $(x_1, y_2) = 0$ para todo $y_2 \in V_2$. Então temos para $y \in V$

$$(x_1, y) = (x_1, y_1) + (x_1, y_2) = 0$$

Donde $x_1 = 0$.Assim o produto escalar entre $V_1$ e $V_2$ é definido por

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 2(x_1, x_2) \quad x_1 \in V_1, x_2 \in V_2.$$

Ele satisfaz a relação

$$(x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2) = \frac{1}{2}[\langle x_1, y_2 \rangle + \langle y_1, x_2 \rangle].$$

Logo pela proposição C.2 temos que $Cl(V, \Phi) \cong End(\bigwedge V_1)$.

$\blacksquare$

# Referências Bibliográficas


[1] Atiyah, M. F., Bott R. e Shapiro, *Clifford modules* Topology, 3, Suppl. 1:3-38, 1964.

[2] Bourbaki, N. *Éléments d'histoire Des Mathématiques.* Springer-Verlag: Berlin, 2007. 376p.

[3] Greub, Werner. *Multilinear Algebra.* Birkhäuser, 1997.315 p.

[4] Greub, Werner. *Linear Algebra.* Birkhäuser, 1967.434 p.

[5] Garling, D. J. H. *Clifford Algebras: An Introduction.* Cambridge University Press: New York, 2011. 200p.

[6] Gilbert, J.E. e Murray, Margareth,A.M. *Clifford álgebras and Dirac operators in harmonic analisys.* 2a Ed.Cambridge University Press: New York, 1991. 346p.

[7] Lawson, H.B. e Michelsohn,M.L *Spin Geometry.* Princeton. University Press, 1989.427 p.

[8] Lounesto, P. *Clifford Algebras and Spinors.* 2a Ed. University Press: Cambridge, 2001. 338p.

[9] Portoeus, I.R *Clifford Algebras and Classical Groups.*Cambridge University Press: New York, 1995. 295p.

[10] Thomas, M. *Clifford Algebras, Division Algebras and Vector Fields on Spheres.*[2011]. Disponível em ¡ https:// www.math.arizona.edu/ htm/talks/diffimod.pdf ¿ Acessado em 2 de agosto de 2013, ás 18:25 min.