

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Equações elípticas envolvendo o operador $1/2$ -Laplaciano e crescimento exponencial

Rossane Gomes Nascimento

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2015

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Equações elípticas envolvendo o operador $1/2$ -Laplaciano e crescimento exponencial

por

Rossane Gomes Nascimento

sob a orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

João Pessoa – PB
Julho de 2015

Equações elípticas envolvendo o operador $1/2$ -Laplaciano e crescimento exponencial

por

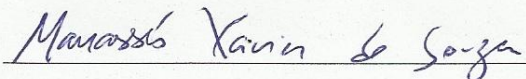
Rossane Gomes Nascimento ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 30 de Julho de 2015.

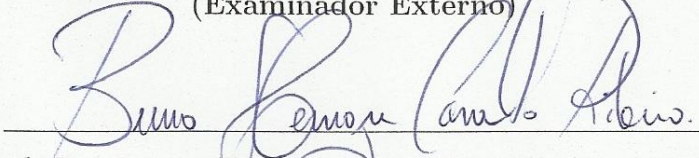
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza – UFPB
(Orientador)



Prof. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva – UFRPE
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do CNPQ durante a elaboração desta dissertação.

N244e Nascimento, Rossane Gomes.

Equações elípticas envolvendo o operador $1/2$ -Laplaciano e crescimento exponencial / Rossane Gomes Nascimento.- João Pessoa, 2015.

75f.

Orientador: Manassés Xavier de Souza

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Espaço de Sobolev fracionário.
3. Desigualdade de Trudinger-Moser. 4. Teorema do Passo da Montanha.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Aos meus pais
Antonia e Manuel

Agradecimentos

À Deus, pelo dom da fé, que me faz persistir. Obrigada por me capacitar, fortalecer e dar coragem para superar cada obstáculo.

À meus pais Antonia G. Nascimento e Manuel M. do Nascimento, por todo amor incondicional, pela dedicação e ensinamentos. Pelos princípios e valores que me ensinaram e por toda compreensão.

Aos meus irmãos e demais familiares, por todos os momentos vivenciados e pelo apoio nas dificuldades. Em particular a minha irmã Rosilene G. Nascimento e seu esposo Helder, por me acolherem em sua casa durante este curso. Obrigada pela paciência e por sempre se colocarem a disposição quando precisei.

Ao professor Manassés X. de Souza, pela excelente orientação; agradeço pela enorme paciência, disponibilidade e motivação que teve ao me orientar.

À banca examinadora, a professora Tarciana Maria S. da Siva e o professor Bruno Henrique C. Ribeiro, agradeço por aceitarem o convite para participar da defesa deste trabalho.

À professora Luciana R. de Freitas, por acreditar no meu potencial e pelas palavras de incentivo.

Aos professores Aldo T. Lourêdo e Everaldo S. de Medeiros, pela contribuição a minha formação acadêmica. À professora Flávia J. Barbosa e ao Professor Uberlândio B. Severo pelos incentivos e orientações.

À Marcius Petrúcio e Yane Lísley, pela a disposição em me ajudar quando precisei. Aos colegas de estudo Diego Felix, Mauri Pereira, Franciélia Limeira e Caio Ilan, pelos momentos de estudos e de amizade que compartilhamos. Obrigada pela enorme ajuda!

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência e multiplicidade de soluções fracas para uma classe de problemas elípticos que envolve o operador $1/2$ –Laplaciano e uma não-linearidade que pode ter crescimento exponencial subcrítico ou crítico no sentido de Trudinger-Moser. Para isso, como ferramentas, exploramos uma adequada desigualdade do tipo Trudinger-Moser para o espaço de Sobolev fracionário $H^{1/2}(\mathbb{R})$ e o Teorema do Passo da Montanha.

Palavras-chave: Espaço de Sobolev fracionário, Desigualdade de Trudinger-Moser, Teorema do passo da Montanha.

Abstract

In this work, we study the existence and multiplicity of weak solutions to a class of elliptic problems involving the $1/2$ -Laplacian operator and a nonlinearity that can have subcritical or critical exponential growth in the Trudinger-Moser sense. For this, as tools, we explore a suitable Trudinger-Moser type inequality for the fractional Sobolev space $H^{1/2}(\mathbb{R})$ and the Mountain Pass Theorem.

Keywords: Fractional Sobolev space, Trudinger-Moser inequality, Mountain Pass Theorem.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados Preliminares	3
1.1 Algumas propriedades do subconjunto X	4
1.2 Uma Desigualdade do tipo Trundiger-Moser	9
1.3 Um Princípio de Concentração e Compacidade	11
2 Existência e Multiplicidade de Soluções: Caso Subcrítico	17
2.1 Formulação variacional do problema (P)	18
2.2 Geometria do funcional	26
2.3 A condição de Palais-Smale	29
2.4 Prova do Teorema 2.1	32
2.5 Uma aplicação	33
3 Existência de Solução: Caso Crítico	37
3.1 A condição de Palais-Smale	38
3.2 Prova do Teorema 3.1	45
3.3 O Nível Minimax	45
3.4 Uma aplicação	49
A Resultados Auxiliares	53
B Resultados Gerais	60
B.1 Resultados de Medida e Integração	60
B.2 Resultados de Análise Funcional	62
B.3 Resultados da Teoria dos Pontos Críticos	63
Referências Bibliográficas	65

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- E^* denota o dual topológico de um espaço de Banach F ;
- $E \hookrightarrow F$ denota que E está continuamente imerso em F ;
- $C, C_1, C_2, \dots$ denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $|\cdot|$ denota o módulo em $\mathbb{R}$;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$ denota convergências fraca e forte, respectivamente, em um espaço normado;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}$, onde $1 \leq p < \infty$ e $\Omega = (0, 1)$ ou pode ser $\mathbb{R}$;
- $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$ denota a norma do espaço $L^p(\Omega)$;
- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω ;
- $\|u\|_\infty = \inf \{ C > 0 : |u(x)| \leq C, \text{ quase sempre } \Omega \}$;
- $C^k(\mathbb{R})$ denota o espaço das funções k vezes diferenciáveis em $\mathbb{R}$;
- $C_0^\infty(\mathbb{R})$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $\mathbb{R}$;
- $\text{supp}(u)$ denota o suporte da função u ;

Introdução

Recentemente, em decorrência do vasto número de aplicações, existe um grande interesse de estudo com relação a problemas de equações não lineares envolvendo o operador não local Laplaciano fracionário, $(-\Delta)^s$, $0 < s < 1$, o qual é definido para toda função mensurável u e todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{C_s}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{1+2s}} dy,$$

onde

$$C_s = \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(\xi)}{|\xi|^{1+2s}} d\xi \right]^{-1}.$$

A título de interesse, sugerimos [5], [10] e [23], por exemplo. Também, alguns trabalhos de Física como [6] e [22].

O operador Laplaciano fracionário aparece naturalmente em diferentes contextos, desde o aspecto que envolve aplicações da Matemática pura, bem como situações concretas. Conforme [10], dentre tais aplicações, podemos citar problemas de mercado financeiro, transição de fase, difusões anômalas, luxação de cristal, filmes finos, membranas semipermeáveis, propagação de chama, leis de conservação, superfícies mínimas, ciências dos materiais, mecânica quântica, ondas de água e tantas outras lá listadas. Nosso interesse é estudar a existência e multiplicidade de soluções de um problema envolvendo operador Laplaciano fracionário no caso $s = 1/2$.

Com base no artigo de Iannizzotto e Squassina [12], estudamos a existência e multiplicidade de soluções fracas no espaço de Sobolev fracionário $H^{1/2}(\mathbb{R})$, para o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2} u = f(u), & \text{em } (0, 1) \\ u = 0, & \text{em } \mathbb{R} \setminus (0, 1), \end{cases} \quad (P)$$

com não linearidade $f(u)$ podendo ter crescimento exponencial subcrítico ou crítico no sentido Trundiger-Moser (ver definições (2.1) e (3.1)). Trata-se de um problema não local, impulsionado pelo operador não local $1/2$ -Laplaciano $(-\Delta)^{1/2}$.

Diferente da definição do problema de Dirichlet padrão que envolve o operador local Laplaciano, onde se tem a condição da função u se anular na fronteira de uma região que possui uma certa regularidade, neste caso, o fato de estarmos tratando de um operador não local motiva, na definição do problema (P) , a condição da função u se anular no complementar do intervalo $(0, 1)$.

Para este estudo, utilizamos métodos minimax em combinação com uma adequada Desigualdade de Trundiger-Moser (ver Proposição 1.7) para o espaço de Sobolev fracionário $H^{1/2}(\mathbb{R})$.

No caso em que a não linearidade $f(u)$ tem crescimento exponencial subcrítico, utilizando a versão clássica do Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema B.22), estudamos a existência de uma solução fraca não trivial para o problema. Posteriormente, adicionando a hipótese de $f(u)$ ser ímpar e aplicando uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema B.23), foi possível obter a multiplicidade de solução para o problema.

A versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha utilizada no caso subcrítico, pede como hipótese que o funcional considerado satisfaça a condição de Palais-Smale (ver Definição B.20). Entretanto, para o caso em que $f(u)$ tem crescimento exponencial crítico, foi apenas verificada a condição de Palais-Smale para níveis em um certo intervalo (ver Definição B.21). Assim, recorreremos a uma versão local do Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema B.24) que garante a existência de uma solução não trivial para o problema.

Visando uma melhor compreensão, organizamos este texto do seguinte modo:

No *Capítulo 1*, apresentamos um subespaço adequado de $H^{1/2}(\mathbb{R})$ no qual buscamos as possíveis soluções para o problema (P) e estudamos algumas de suas propriedades. Dentre estas propriedades, vimos uma versão da Desigualdade de Trundiger-Moser e um princípio de concentração e compacidade.

Já no *Capítulo 2*, tratamos da formulação variacional do problema e do estudo da existência e multiplicidade de soluções no caso em que o termo não linear $f(u)$ tem crescimento exponencial subcrítico. Por último, trabalhamos uma aplicação.

No *Capítulo 3*, provamos a existência de uma solução não trivial quando $f(u)$ tem crescimento exponencial crítico e apresentamos uma aplicação.

Também, introduzimos dois apêndices. O *Apêndice A*, onde enunciamos e provamos alguns resultados auxiliares e o *Apêndice B* onde apresentamos alguns resultados básicos de Teoria da Medida, Análise Funcional e Teoria dos Pontos críticos que usamos ao longo do trabalho.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste trabalho estamos interessados em provar a existência e multiplicidade de soluções para o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u = f(u), & \text{em } (0, 1) \\ u = 0, & \text{em } \mathbb{R} \setminus (0, 1), \end{cases} \quad (P)$$

onde a não linearidade $f(u)$ pode ter crescimento exponencial subcrítico ou crítico motivado pela Desigualdade de Trundiger-Moser (para detalhes, confira as Definições 2.1 e 3.1 e a Proposição 1.7). O termo $(-\Delta)^{1/2}$ simboliza o operador 1/2-Laplaciano, definido para toda função mensurável u e todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$(-\Delta)^{1/2}u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^2} dy. \quad (1.1)$$

O espaço de funções onde esperamos encontrar soluções para o problema (P) , trata-se do espaço de Sobolev fracionário $H^{1/2}(\mathbb{R})$, o qual definiremos mais a frente; como estas soluções devem ser nulas fora de intervalo $(0, 1)$ é natural que consideremos como espaço ambiente o subconjunto $X \subset H^{1/2}(\mathbb{R})$ dado por

$$X = \{u \in H^{1/2}(\mathbb{R}) : u = 0 \text{ em } \mathbb{R} \setminus (0, 1)\}.$$

Especificamente, neste capítulo, nosso objetivo é estudar algumas propriedades do espaço X , explorando como principal ferramenta a Desigualdade de Trundiger-Moser.

1.1 Algumas propriedades do subconjunto X

Iniciamos esta seção definindo, conforme [9], o espaço de Sobolev fracionário

$$H^{1/2}(\mathbb{R}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^2} dx dy < \infty \right\}$$

e introduzimos a seminorma de Gagliardo

$$[u]_{H^{1/2}(\mathbb{R})} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \right]^{1/2}$$

e a norma

$$\|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} = \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + [u]_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

Temos que $H^{1/2}(\mathbb{R})$ dotado da norma em (1.2) é um espaço de Hilbert. (Para os detalhes da construção do espaço de Sobolev fracionário $H^{1/2}(\mathbb{R})$ sugerimos para o leitor o Capítulo 7 em [1]).

A seguir, faremos algumas considerações sobre o espaço X .

Note que a única função constante em X é a função nula. Pois, se u é constante em X , então $u = 0$ em $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$, e por ser constante, u se anula em toda a reta. Além disso, X é um subespaço vetorial de $H^{1/2}(\mathbb{R})$.

O nosso próximo objetivo é provar que X é um espaço de Hilbert, para isto, dotaremos X com o produto interno dado pelo seguinte Lema:

Lema 1.1. A aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\langle u, v \rangle_X = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^2} dx dy, \quad (1.3)$$

define um produto interno em X , e conseqüentemente, $\|u\|_X = \sqrt{\langle u, u \rangle_X}$, define uma norma em X .

Demonstração. De fato, vejamos que as propriedades de produto interno são satisfeitas.

(i) $\langle u, u \rangle_X = 0$ se, e só se, $u = 0$.

Note que, se $u = 0$, então $\langle u, u \rangle_X = 0$. Agora suponha que $\langle u, u \rangle_X = 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^2} dx dy = 0$$

daí, pelo Corolário B.4

$$\frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^2} = 0, \text{ quase sempre em } \mathbb{R},$$

implicando que $u(x) = u(y)$ quase sempre em $\mathbb{R}$. Logo, u é constante quase sempre em $\mathbb{R}$; mas, como $u \in X$, então $u = 0$.

(ii) $\langle \alpha u, v \rangle_X = \alpha \langle u, v \rangle_X$, sempre que $u, v \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sejam $u, v \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \langle \alpha u, v \rangle_X &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\alpha u(x) - \alpha u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^2} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\alpha(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^2} dx dy \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^2} dx dy = \alpha \langle u, v \rangle_X. \end{aligned}$$

Assim, temos que a condição de homogeneidade é satisfeita.

(iii) $\langle u + v, z \rangle_X = \langle u, z \rangle_X + \langle v, z \rangle_X$, sempre que $u, v, z \in X$.

Dados $u, v, z \in X$, temos

$$\begin{aligned} \langle u + v, z \rangle_X &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{((u + v)(x) - (u + v)(y))(z(x) - z(y))}{|x - y|^2} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))(z(x) - z(y)) + (v(x) - v(y))(z(x) - z(y))}{|x - y|^2} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))(z(x) - z(y))}{|x - y|^2} dx dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(v(x) - v(y))(z(x) - z(y))}{|x - y|^2} dx dy = \langle u, z \rangle_X + \langle v, z \rangle_X. \end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova do Lema. □

A próxima proposição é uma versão da Desigualdade de Poincaré para o espaço X . Para estudá-la, definimos

$$\lambda_1 = \inf \{ \|u\|_X^2 : u \in X \text{ e } \|u\|_{L^2(0,1)} = 1 \}.$$

Proposição 1.2. λ_1 é atingido e é positivo. Consequentemente

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \lambda_1^{-1/2} \|u\|_X, \text{ para todo } u \in X. \quad (1.4)$$

Demonstração. Com efeito, considere

$$S = \{u \in X : \|u\|_{L^2(0,1)} = 1\}.$$

Vejamos que

$$\inf_{u \in S} \|u\|_X^2 = \lambda_1 > 0. \quad (1.5)$$

Note que $\lambda_1 \geq 0$. Inicialmente, provaremos que λ_1 é atingido. Seja $(u_n) \subset S$ uma sequência minimizante para (1.5), isto é,

$$\|u_n\|_X^2 \rightarrow \lambda_1.$$

Assim, $(\|u_n\|_X)$ é limitada; em particular, $\sup_{n \in \mathbb{N}} [u_n]_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2 < \infty$ e como $(u_n) \subset S$, também é limitada em $L^2(0, 1)$. Então pelo Teorema B.15, (u_n) é pré-compacata em $L^2(0, 1)$, logo, a menos de subsequência, $u_n \rightarrow u$ em $L^2(0, 1)$. Estendendo u , como

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1), \end{cases}$$

obtemos que $u_n \rightarrow \bar{u}$ quase sempre em $\mathbb{R}$. Pelo Lema de Fatou (Ver Lema B.3), segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\bar{u}(x) - \bar{u}(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \leq \lambda_1, \quad (1.6)$$

o que mostra que $\|\bar{u}\|_X^2 \leq \lambda_1$, daí, $\bar{u} \in X$. Por outro lado, como $u_n \rightarrow \bar{u}$ em $L^2(0, 1)$, então $\|u_n\|_{L^2(0,1)} \rightarrow \|\bar{u}\|_{L^2(0,1)}$, mas $\|u_n\|_{L^2(0,1)} = 1$, logo pela unicidade do limite, $\|\bar{u}\|_{L^2(0,1)} = 1$. Assim, $\bar{u} \in S$ e $\lambda_1 \leq \|\bar{u}\|_X^2$. Consequentemente $\|\bar{u}\|_X^2 = \lambda_1 > 0$.

Agora, observe que se $u = 0$, a igualdade em (1.4) ocorre. Então, suponha que $u \in X \setminus \{0\}$. Pondo $v = u / \|u\|_{L^2(0,1)}$, então $v \in S$ e

$$0 < \lambda_1 \leq \|v\|_X^2 = \frac{\|u\|_X^2}{\|u\|_{L^2(0,1)}^2},$$

daí,

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \lambda_1^{-1/2} \|u\|_X.$$

Com isso concluímos a prova da proposição. □

Lema 1.3. No espaço X , as normas $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$ e $\|\cdot\|_X$ são equivalentes.

Demonstração. Seja $u \in X$. Observe que

$$\|u\|_X^2 \leq \|u\|_X^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2.$$

Por outro lado, pela Proposição 1.2,

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2 &= \|u\|_X^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
 &= \|u\|_X^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus (0,1)} |u|^2 dx + \int_0^1 |u|^2 dx \\
 &= \|u\|_X^2 + \|u\|_{L^2(0,1)}^2 \\
 &\leq \|u\|_X^2 + \lambda_1^{-1} \|u\|_X^2.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u\|_X \leq \|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq (\lambda_1^{-1} + 1)^{1/2} \|u\|_X, \text{ para todo } u \in X. \quad (1.7)$$

Portanto, temos a equivalência das normas. $\square$

Proposição 1.4. O espaço X , dotado da norma $\|\cdot\|_X$, é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Já vimos que $\|\cdot\|_X$ é induzida por um produto interno; resta-nos mostrar que X é completo quando munido desta norma. Para isso, considere $(u_n) \subset X$ uma sequência de Cauchy. Logo (u_n) é de Cauchy com relação a norma $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$ no espaço de Hilbert $H^{1/2}(\mathbb{R})$, logo $u_n \rightarrow u$ em $H^{1/2}(\mathbb{R})$.

Vejam que $u \in X$ e $u_n \rightarrow u$ em X . De fato, como $u_n \rightarrow u$ em $H^{1/2}(\mathbb{R})$, então $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\mathbb{R})$, assim, a menos de subsequência, $u_n(x) \rightarrow u(x)$, quase sempre em $\mathbb{R}$, o que implica $u = 0$ em $\mathbb{R} \setminus (0,1)$. Pelo Lema de Fatou (ver Lema B.3), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \leq \liminf_{n \in \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x - y|^2} dx dy < \infty,$$

ou seja, $u \in X$. Usando (1.7),

$$\|u_n - u\|_X \leq \|u_n - u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Isto é, $u_n \rightarrow u$ em X . Portanto, o espaço X , dotado da norma $\|\cdot\|_X$, é um espaço de Hilbert. $\square$

Proposição 1.5. O espaço X está imerso continuamente em $L^q(0,1)$ para todo $q \geq 1$.

Demonstração. Uma vez que $X \subset H^{1/2}(0,1)$ e $H^{1/2}(0,1)$ está imerso continuamente em $L^q(0,1)$ para todo $q \geq 1$ (ver Teorema B.14), então pela equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$ e $\|\cdot\|_X$ em X , temos

$$\|u\|_{L^q(0,1)} \leq C \|u\|_X, \text{ para todo } q \geq 1.$$

Ou seja, X está imerso continuamente em $L^q(0,1)$ para todo $q \geq 1$. $\square$

Proposição 1.6. O espaço X está imerso compactamente em $L^q(0, 1)$ para todo $q \geq 1$.

Demonstração. Vamos mostrar que se (u_n) é uma sequência limitada em X , então, a menos de subsequência, $u_n \rightarrow u$ em $L^q(0, 1)$ para todo $q \geq 1$.

De fato, se (u_n) é limitada em X , o $\sup_{n \in \mathbb{N}} [u_n]_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2 < \infty$. Por outro lado, pela Proposição 1.5, $X \hookrightarrow L^2(0, 1)$ continuamente, existem constante $C, C_1 > 0$, tais que

$$\|u_n\|_{L^2(0,1)} \leq C_1 \|u_n\|_X \leq C, \quad (1.8)$$

ou seja, (u_n) é limitada em $L^2(0, 1)$. Logo, pelo Teorema B.15, temos que (u_n) é pré-compacta em $L^q(0, 1)$, para todo $q \in [1, 2]$, isto é, a menos de subsequência,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^q(0, 1), \text{ para qualquer } q \in [1, 2]. \quad (1.9)$$

Portanto, X está imerso compactamente em $L^q(0, 1)$, no caso de $q \in [1, 2]$.

Agora, estudaremos o caso $q > 2$. Considere então $s > q$. Pela Desigualdade de Interpolação (ver Apêndice B) temos que para todo $2 \leq q \leq s$

$$\|u_n - u\|_{L^q(0,1)} \leq \|u_n - u\|_{L^2(0,1)}^\theta \|u_n - u\|_{L^s(0,1)}^{1-\theta},$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{s}$. Novamente usando a imersão contínua de X em $L^s(0, 1)$

$$\|u_n - u\|_{L^q(0,1)} \leq C_2 \|u_n - u\|_{L^2(0,1)}^\theta \|u_n - u\|_X^{1-\theta}$$

Como (u_n) é limitada em X , existe $C_3 > 0$ tal que

$$\|u_n - u\|_{L^q(0,1)} \leq C_3 \|u_n - u\|_{L^2(0,1)}^\theta \rightarrow 0,$$

Isto é, a menos de subsequência, $u_n \rightarrow u$ em $L^q(0, 1)$ para todo $2 \leq q \leq s$. Mas, como $q > 2$ foi arbitrário, a menos de subsequência,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^q(0, 1), \text{ para qualquer } q > 2. \quad (1.10)$$

Então, por (1.9) e (1.10), a menos de subsequência, $u_n \rightarrow u$ em $L^q(0, 1)$ para todo $q \geq 1$. Logo temos o resultado. $\square$

1.2 Uma Desigualdade do tipo Trundiger-Moser

Agora, enunciaremos uma Desigualdade de Trundiger-Moser para o espaço de Sobolev fracionário $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Para uma prova, ver [20] e [15], respectivamente, Teorema 1 e Teorema 1.1.

Proposição 1.7. (Desigualdade de Trundiger-Moser) Existe $0 < w \leq \pi$ com a seguinte propriedade: Para todo $0 < \alpha < w$ existe $H_\alpha > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{\alpha u^2} - 1) dx \leq H_\alpha \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

para cada $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ com $\|(-\Delta)^{1/4}u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$. Onde o operador $(-\Delta)^{1/4}$ pode ser definido (ver [9]) para toda função mensurável u e todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$(-\Delta)^{1/4}u(x) = -\frac{C}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{3/2}} dy. \quad (1.11)$$

e

$$C = \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(\xi)}{|\xi|^{3/2}} d\xi \right]^{-1}.$$

Em particular, consideraremos a seguinte versão da Desigualdade de Trundiger-Moser para o espaço X :

Proposição 1.8. Existe $0 < w \leq \pi$ com a seguinte propriedade: Para todo $0 < \alpha < 2\pi w$ existe $K_\alpha > 0$ tal que

$$\int_0^1 e^{\alpha u^2} dx \leq K_\alpha,$$

para todo $u \in X$ com $\|u\|_X \leq 1$.

Demonstração. Seja $u \in X$ com $\|u\|_X \leq 1$, e defina $v = (2\pi)^{1/2}u$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(v(x) - v(y))^2}{|x - y|^2} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{((2\pi)^{1/2}u(x) - (2\pi)^{1/2}u(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^2} dx dy < \infty. \end{aligned}$$

Ou seja, $v \in H^{1/2}(\mathbb{R})$. Pela Proposição B.13 (ver Apêndice B)

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{1/4}v\|_{L^2(\mathbb{R})} &= (2\pi)^{-1/2} [v]_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\ &= (2\pi)^{-1/2} [(2\pi)^{1/2}u]_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\ &= (2\pi)^{-1/2} (2\pi)^{1/2} [u]_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\ &= \|u\|_X, \end{aligned}$$

implicando, $\|(-\Delta)^{1/4}v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$.

Considere $0 < \alpha < 2\pi w$ e definamos $\tilde{\alpha} = (2\pi)^{-1}\alpha$, assim $0 < \tilde{\alpha} < w$, logo podemos aplicar a Desigualdade de Trundiguer-Moser (ver Proposição 1.7), para v e $\tilde{\alpha}$, isto é, existe $H_{\tilde{\alpha}} > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{\tilde{\alpha}v^2} - 1)dx \leq H_{\tilde{\alpha}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (1.12)$$

Agora, observe o seguinte

$$\tilde{\alpha}v^2 = (2\pi)^{-1}\alpha((2\pi)^{1/2}u)^2 = \alpha u^2,$$

logo,

$$\int_0^1 e^{\alpha u^2} dx = \int_0^1 (e^{\tilde{\alpha}v^2} - 1)dx + 1,$$

em particular, como $v \in X$, $\int_{\mathbb{R} \setminus (0,1)} (e^{\tilde{\alpha}v^2} - 1)dx = 0$, assim podemos reescrever

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{\alpha u^2} dx &= \int_0^1 (e^{\tilde{\alpha}v^2} - 1)dx + \int_{\mathbb{R} \setminus (0,1)} (e^{\tilde{\alpha}v^2} - 1)dx + 1, \\ &= \int_{\mathbb{R}} (e^{\tilde{\alpha}v^2} - 1)dx + 1. \end{aligned}$$

Por (1.12), segue-se que

$$\int_0^1 e^{\alpha u^2} dx \leq H_{\tilde{\alpha}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 1.$$

Agora, usando a Proposição 1.2 vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{\alpha u^2} dx &\leq \frac{H_{\tilde{\alpha}} \|v\|_X^2}{\lambda_1} + 1 \\ &= \frac{H_{\tilde{\alpha}} 2\pi \|u\|_X^2}{\lambda_1} + 1 \\ &\leq \frac{H_{\tilde{\alpha}} 2\pi}{\lambda_1} + 1 := K_{\alpha}. \end{aligned}$$

Isto completa a prova da proposição. □

Proposição 1.9. Seja $\alpha > 0$. Então $e^{\alpha u^2} \in L^1(0,1)$ para todo $u \in X$.

Demonstração. Considere $u \in X$ e $\epsilon > 0$. Como $C_0^\infty(0,1)$ é denso em $H^{1/2}(0,1)$ (ver Teorema B.12), usando a equivalência das normas, existe $\phi \in C_0^\infty(0,1)$ tal que

$\|u - \phi\|_X < \epsilon$. Note que

$$u^2 = [(u - \phi) + \phi]^2 = [(u - \phi)^2 + \phi^2 + 2(u - \phi)\phi] \leq [2(u - \phi)^2 + 2\phi^2],$$

daí, pela desigualdade de Young

$$e^{\alpha u^2} \leq e^{\alpha[2(u-\phi)^2+2\phi^2]} \leq \frac{1}{2} \left(e^{4\alpha(u-\phi)^2} \right) + \frac{1}{2} \left(e^{4\alpha\phi^2} \right),$$

disto segue-se

$$\int_0^1 e^{\alpha u^2} dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 e^{4\alpha \|u-\phi\|_X^2 \left(\frac{u-\phi}{\|u-\phi\|_X} \right)^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{4\alpha\phi^2} dx.$$

escolhendo $\epsilon > 0$ de modo que $4\alpha\epsilon^2 < 2\pi w$, pela Proposição 1.8 temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{\alpha u^2} dx &\leq C + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{4\alpha\phi^2} dx \\ &= C + \frac{1}{2} \int_{\text{supp}(\phi)} e^{4\alpha\phi^2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $e^{\alpha u^2} \in L^1(0, 1)$ para todo $\alpha > 0$. □

1.3 Um Princípio de Concentração e Compacidade

A próxima proposição será importante para estudarmos um princípio de concentração e compacidade para o espaço X , assim como para mostrarmos, no capítulo posterior, que o funcional $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. (Ver (2.9) e Proposição 2.3).

Proposição 1.10. Seja (u_n) uma sequência que converge fortemente em $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e existe v em $H^{1/2}(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$|u_{n_k}(x)| \leq v(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}.$$

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência fortemente convergente em $H^{1/2}(\mathbb{R})$, digamos, $u_n \rightarrow u$ em $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Logo, (u_n) é de Cauchy em $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Assim, existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) , a qual, por simplicidade, denotaremos por (u_k) satisfazendo

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2^k}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.13)$$

De fato, para $k = 1$, sendo (u_n) de Cauchy, podemos obter $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_m - u_n\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2}, \text{ para todo } m, n \geq n_1.$$

Para $k = 2$, escolha $n_2 \geq n_1$ de modo que

$$\|u_m - u_n\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2^2}, \text{ para todo } m, n \geq n_2.$$

Continuando este processo obtemos uma subsequência (u_k) de (u_n) satisfazendo (1.13).

Definamos

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |u_{k+1}(x) - u_k(x)|.$$

Pela desigualdade triangular, segue-se que

$$\|g_n\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq \sum_{k=1}^n \|u_{k+1} - u_k\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} = \sum_{k=1}^n \|u_{k+1} - u_k\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq 1.$$

Portanto, $\|g_n\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq 1$; em particular,

$$[g_n]_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq 1 \text{ e } \|g_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1. \quad (1.14)$$

Note que (g_n) é uma sequência de funções mensuráveis que converge, digamos para uma função g , quase sempre em $\mathbb{R}$. Daí, pelo Corolário B.1, g é uma função mensurável. Logo, (g_n^2) converge quase sempre em $\mathbb{R}$, para função mensurável g^2 e $(g_n^2(x))$ converge quase sempre para $g^2(x)$ em $\mathbb{R}$. Além disso, veja que (g_n) é uma sequência de funções crescente e não negativa, consequentemente, (g_n^2) também é crescente e não negativa, logo o Teorema da Convergência Monótona (ver Teorema B.2), nos garante que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g^2(x) dx. \quad (1.15)$$

Vejamos que $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$. Primeiro, note que $g \in L^2(\mathbb{R})$.

De fato, por (1.14) e (1.15) temos que

$$\int_{\mathbb{R}} g^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n^2 dx \leq 1.$$

Segundo, para $x \neq y$, denotemos

$$h_n(x, y) = \frac{(g_n(x) - g_n(y))^2}{|x - y|^2}.$$

Observe que, (h_n) é uma sequência de funções não negativa e tal que

$$h_n(x, y) \rightarrow \frac{(g(x) - g(y))^2}{|x - y|^2}, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2,$$

então, usando o Lema de Fatou (ver Lema B.3) e (1.14),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(g(x) - g(y))^2}{|x - y|^2} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{(g_n(x) - g_n(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(g_n(x) - g_n(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \leq 1. \end{aligned}$$

Portanto, $g \in L^2(\mathbb{R})$ e $[g]_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2 \leq 1$, isto é, $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$.

Agora, observe que para todo $k \in \mathbb{N}$ podemos escrever

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{i=1}^{k-1} |u_{i+1}(x) - u_i(x)| + \sum_{i=k}^{k+j-1} |u_{i+1}(x) - u_i(x)| + \sum_{i=k+j}^{\infty} |u_{i+1}(x) - u_i(x)| \\ &= g_{k-1}(x) + \sum_{i=k}^{k+j-1} |u_{i+1}(x) - u_i(x)| + \sum_{i=k+j}^{\infty} |u_{i+1}(x) - u_i(x)|, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} |u_{k+j}(x) - u_k(x)| &\leq |u_{k+j}(x) - u_{k+j-1}(x)| + \cdots + |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \\ &= \sum_{i=k}^{k+j-1} |u_{i+1}(x) - u_i(x)| \leq g(x) - g_{k-1}(x) \leq g(x). \end{aligned}$$

Como $u_k \rightarrow u$ em $H^{1/2}(\mathbb{R})$, segue-se que $u_k \rightarrow u$ em $L^2(\mathbb{R})$, logo, a menos de subsequência, $u_k(x) \rightarrow u(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}$. Fazendo $j \rightarrow \infty$ na estimativa acima, obtemos que, quase sempre em $\mathbb{R}$

$$|u(x) - u_k(x)| \leq g(x), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$|u_k(x)| = |u_k(x) - u(x) + u(x)| \leq g(x) + |u(x)| \text{ quase sempre em } \mathbb{R}.$$

Para concluirmos a prova basta escolher $v = g + |u| \in H^{1/2}(\mathbb{R})$. □

Corolário 1.11. Seja (u_n) uma sequência que converge fortemente em X . Então existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e existe v em X satisfazendo

$$|u_{n_k}(x)| \leq v(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}.$$

Demonstração. Uma vez que $X \subset H^{1/2}(\mathbb{R})$ e em X as normas $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$ e $\|\cdot\|_X$ são equivalentes, Lema 1.3, a prova segue-se imediatamente da Proposição 1.10. $\square$

A seguir, provamos um princípio de concentração e compacidade para o espaço X .

Lema 1.12. Se (v_n) é uma sequência em X com $\|v_n\|_X = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $v_n \rightharpoonup v$ em X e $0 < \|v\|_X < 1$, então para todo $0 < \alpha < 2\pi w$ e todo $1 < p < (1 - \|v\|_X^2)^{-1}$ a sequência $(e^{\alpha v_n^2})$ é limitada em $L^p(0, 1)$.

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos.

1º caso: Suponha que $\|v_n - v\|_X \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, pelo Corolário 1.11, a menos de subsequência, existe $h \in X$ tal que

$$|v_n(x)| \leq h(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}.$$

Daí,

$$e^{p\alpha v_n^2(x)} \leq e^{p\alpha h^2(x)}, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}.$$

Além disso, pela Proposição 1.9, $e^{p\alpha h^2(x)} \in L^1(0, 1)$. Assim

$$\int_0^1 e^{p\alpha v_n^2(x)} dx \leq \int_0^1 e^{p\alpha h^2(x)} dx < \infty,$$

e portanto $(e^{\alpha v_n^2})$ é limitada em $L^p(0, 1)$.

2º caso: Suponha que exista $\epsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_n - v\|_X \geq \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Primeiro, observe que pela Proposição 1.9, o resultado é válido para uma quantidade finita de termos de (v_n) .

Sejam $p_1, p_2, p_3 > 1$, tais que $p^{-1} = p_1^{-1} + p_2^{-1} + p_3^{-1} = 1$ e $p_1\alpha < 2\pi w$. Note que podemos reescrever

$$\int_0^1 e^{p\alpha v_n^2} dx = \int_0^1 e^{p\alpha(v_n^2 + 2v_n v - 2v_n v + 2v^2 - 2v^2)} dx = \int_0^1 e^{p\alpha(v_n - v)^2} e^{p\alpha 2(v_n - v)v} e^{p\alpha v^2} dx.$$

Provaremos que $e^{p\alpha(v_n - v)^2}$, $e^{p\alpha 2(v_n - v)v}$ e $e^{p\alpha v^2}$ são uniformemente limitadas, respectivamente, em $L^{p_1}(0, 1)$, $L^{p_2}(0, 1)$ e $L^{p_3}(0, 1)$. De fato, como $v_n \rightharpoonup v$ em X , temos que

$$\begin{aligned} \|v_n - v\|_X^2 &= \|v_n\|_X^2 - 2\langle v_n, v \rangle_X + \|v\|_X^2 \\ &= 1 - 2\langle v_n, v \rangle_X + \|v\|_X^2 \rightarrow 1 - 2\langle v, v \rangle_X + \|v\|_X^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|v_n - v\|_X^2 \rightarrow 1 - \|v\|_X^2 < \frac{1}{p}.$$

Daí, para todo n suficientemente grande

$$\|v_n - v\|_X^2 < \frac{1}{p}. \quad (1.16)$$

Como $p_1\alpha < 2\pi w$, segue-se da Proposição 1.8 e por (1.16)

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{p_1 p \alpha (v_n - v)^2} dx &= \int_0^1 e^{p_1 p \alpha \|v_n - v\|_X^2 \frac{(v_n - v)^2}{\|v_n - v\|_X^2}} dx \\ &< \int_0^1 e^{p_1 \alpha \left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|_X}\right)^2} dx \\ &\leq K_{p_1 \alpha}. \end{aligned}$$

Logo, $e^{p\alpha(v_n-v)^2}$ é limitada em $L^{p_1}(0, 1)$.

Agora, por (1.16), temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2\alpha p_2 p (v_n - v)v} dx &= \int_0^1 e^{2\alpha p_2 p \|v_n - v\|_X \frac{(v_n - v)v}{\|v_n - v\|_X}} dx \\ &\leq \int_0^1 e^{2\alpha p_2 p^{1/2} \frac{(v_n - v)v}{\|v_n - v\|_X}} dx. \end{aligned}$$

Como podemos reescrever

$$\int_0^1 e^{2\alpha p_2 p^{1/2} \frac{(v_n - v)v}{\|v_n - v\|_X}} dx = \int_0^1 e^{2\left[\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2} (2\alpha)^{1/2}\right] p_2 p^{1/2} \frac{(v_n - v)v}{\|v_n - v\|_X}} dx,$$

denotando $C_1 = (2\alpha)^{1/2} p_2 p^{1/2}$ e usando que $2ab \leq a^2 + b^2$, sempre que $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_0^1 e^{2\alpha p_2 p (v_n - v)v} dx \leq \int_0^1 e^{2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2} \frac{v_n - v}{\|v_n - v\|_X} (C_1 v)} dx \leq \int_0^1 e^{\frac{\alpha}{2} \left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|_X}\right)^2 + (C_1 v)^2} dx.$$

Daí e pela desigualdade de Hölder segue-se que

$$\int_0^1 e^{2\alpha p_2 p (v_n - v)v} dx \leq \left[\int_0^1 e^{\alpha \left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|_X}\right)^2} dx \right]^{1/2} \left[\int_0^1 e^{2C_1^2 v^2} dx \right]^{1/2}.$$

Como consequência da Proposição 1.8 e da Proposição 1.9, concluímos

$$\int_0^1 e^{p_2 p \alpha 2 (v_n - v)v} dx \leq K_\alpha \left[\int_0^1 e^{2C_1^2 v^2} dx \right]^{1/2} < \infty.$$

Finalmente, também pela Proposição 1.9,

$$\int_0^1 e^{p_3 p \alpha v^2} dx < \infty.$$

Logo, o resultado é válido.

□

Capítulo 2

Existência e Multiplicidade de Soluções: Caso Subcrítico

Neste capítulo tratamos, via métodos minimax, da existência e da multiplicidade de solução para o problema (P) no caso em que f possui crescimento subcrítico. Para isso, utilizaremos duas versões do Teorema do Passo da Montanha (ver Teoremas B.22 e B.23).

Antes de tudo, faz-se necessário definir o que significa f ter crescimento exponencial subcrítico do tipo Trundiger-Moser: Dizemos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem crescimento exponencial subcrítico, quando para todo $\alpha > 0$,

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = 0. \quad (2.1)$$

Sobre a não linearidade f , em todo o texto consideraremos que $f \in C(\mathbb{R})$, com $f(0) = 0$ e denotaremos

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

No caso subcrítico, assumiremos as seguintes hipóteses:

(f_1) existem $t_0 > 0$ e $M > 0$, tais que $0 < F(t) \leq M |f(t)|$, para todo $|t| \geq t_0$;

(f_2) $0 < 2F(t) \leq f(t)t$, para todo $t \neq 0$;

(f_3) $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2} < \frac{\lambda_1}{4\pi}$, onde λ_1 foi definido na Proposição 1.2;

(f_4) f satisfaz (2.1).

Aqui, temos como principal finalidade provar o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Se valem (f_1) a (f_4) , então (P) tem uma solução fraca não trivial $u \in X$. Se além disso f é ímpar, então (P) tem infinitas soluções fracas em X .*

2.1 Formulação variacional do problema (P)

Nesta seção estudaremos a formulação variacional para o problema (P) . Inicialmente apresentamos a noção de solução fraca para o problema (P) . Dizemos que $u \in X$ é uma solução fraca para (P) quando

$$\frac{1}{2\pi} \langle u, v \rangle_X - \int_0^1 f(u)v dx = 0, \text{ para todo } v \in X. \quad (2.2)$$

Podemos entender a motivação para definição de solução fraca em (2.2), pelo seguinte fato:

Considere uma função $u \in C^\infty(\mathbb{R})$, com $u = 0$ em $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$ e tal que u seja suficientemente regular. Mostraremos que, se u satisfaz (P) pontualmente, então ela deve verificar

$$\frac{1}{2\pi} \langle u, v \rangle_X - \int_0^1 f(u)v dx = 0, \quad (2.3)$$

para toda função $v \in C^\infty(\mathbb{R})$, onde $v = 0$ em $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$ e v suficientemente regular.

De fato, suponhamos que u satisfaça (P) pontualmente. Então

$$(-\Delta)^{1/2}u = f(u).$$

Multiplicando ambos os membros desta desigualdade por v e integrando sobre $(0, 1)$, obtemos

$$\int_0^1 (-\Delta)^{1/2}u v dx - \int_0^1 f(u)v dx = 0.$$

Agora, observe que para obtermos (2.3), basta mostrarmos que

$$\int_0^1 (-\Delta)^{1/2}u v dx = \frac{1}{2\pi} \langle u, v \rangle_X. \quad (2.4)$$

Primeiro, recordemos que

$$(-\Delta)^{1/2}u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^2} dy, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\int_0^1 (-\Delta)^{1/2}u(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x) \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^2} dy \right) dx.$$

Desde que $v(x) = 0$ para todo x em $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$ e $v(x)$ é constante em relação a integral em y , segue-se que

$$\int_0^1 (-\Delta)^{1/2} u(x) v(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-v(x)(u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))}{|y|^2} dy dx.$$

Daí,

$$\int_0^1 (-\Delta)^{1/2} u(x) v(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v(x)(u(x) - u(x+y))}{|y|^2} dy dx \quad (2.5)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v(x)(u(x) - u(x-y))}{|y|^2} dy dx. \quad (2.6)$$

Agora, fazendo a seguinte mudança de variáveis em (2.5)

$$\begin{cases} x + y = \xi \\ x = \theta \end{cases},$$

note que

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \theta)} \right| = 1.$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis, obtemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v(x)(u(x) - u(x+y))}{|y|^2} dy dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v(\theta)(u(\theta) - u(\xi))}{|\xi - \theta|^2} d\theta d\xi. \quad (2.7)$$

Por outro lado, em (2.6), façamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x - y = \theta \\ x = \xi \end{cases},$$

daí,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \theta)} \right| = 1.$$

Novamente pelo Teorema de Mudança de Variáveis, segue-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v(x)(u(x) - u(x-y))}{|y|^2} dy dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v(\xi)(u(\xi) - u(\theta))}{|\xi - \theta|^2} d\theta d\xi. \quad (2.8)$$

Combinando (2.7) e (2.8), obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-\Delta)^{1/2} u(x) v(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v(\theta)(u(\theta) - u(\xi)) + v(\xi)(u(\xi) - u(\theta))}{|\xi - \theta|^2} d\theta d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(\xi) - u(\theta))(v(\xi) - v(\theta))}{|\xi - \theta|^2} d\theta d\xi. \end{aligned}$$

Substituindo ξ por x e θ por y , concluimos

$$\int_0^1 (-\Delta)^{1/2} u(x) v(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^2} dx dy,$$

isto é, a igualdade (2.4) é válida, o que implica (2.3).

Mostraremos que os pontos críticos do funcional $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$J(u) = \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 F(u) dx \quad (2.9)$$

correspondem a soluções fracas do problema (P).

Proposição 2.2. O funcional $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definido.

Demonstração. Denotaremos as duas parcelas do funcional J , por

$$J_1(u) = \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} \text{ e } J_2(u) = \int_0^1 F(u) dx.$$

Com efeito, J_1 está bem definido, pois corresponde a norma do espaço X . Já para mostrar que J_2 está bem definido, considere $u \in X$. Pelo Lema A.1 para alguma constante $C > 0$ temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |F(u)| dx &= \int_0^1 \left| \int_0^u f(t) dt \right| dx \leq \int_0^1 \left[\int_0^u |f(t)| dt \right] dx \\ &\leq C \int_0^1 \left[\int_0^u e^{\alpha t^2} dt \right] dx \leq C \int_0^1 e^{\alpha u^2} \left[\int_0^u dt \right] dx \\ &\leq C \int_0^1 e^{\alpha u^2} |u| dx. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder e a Proposição 1.2, segue-se que

$$\int_0^1 |F(u)| dx \leq C \left[\int_0^1 e^{2\alpha u^2} dx \right]^{1/2} \|u\|_2 \leq C \lambda_1^{-1/2} \|u\|_X \left[\int_0^1 e^{2\alpha u^2} dx \right]^{1/2}.$$

Mas, a Proposição 1.9 garante que $e^{2\alpha u^2} \in L^1(0, 1)$, logo $\int_0^1 |F(u)| dx < \infty$. Portanto, o funcional J está bem definido. $\square$

Proposição 2.3. O funcional $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e a derivada de Frechét de J é dada por

$$\langle J'(u), v \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle u, v \rangle_X - \int_0^1 f(u) v dx.$$

Demonstração. Vejamos, separadamente, que $J_1, J_2 \in C^1(X, \mathbb{R})$ e suas derivadas de Frechét são, respectivamente, iguais à

$$\langle J'_1(u), v \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle u, v \rangle_X \text{ e } \langle J'_2(u), v \rangle = \int_0^1 f(u) v dx.$$

Afirmção 2.1. $J_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ é Frechét diferenciável e sua derivada é dada por

$$\langle J'_1(u), v \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle u, v \rangle_X.$$

Fixemos $u \in X$. Consideremos $v \in X$, com $\|v\|_X \rightarrow 0$, e denotemos

$$A(J_1, u, v) = \frac{|J_1(u+v) - J_1(u) - \frac{1}{2\pi} \langle u, v \rangle_X|}{\|v\|_X}.$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} A(J_1, u, v) &= \lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{|\frac{1}{4\pi} \|u+v\|_X^2 - \frac{1}{4\pi} \|u\|_X^2 - \frac{1}{2\pi} \langle u, v \rangle_X|}{\|v\|_X} \\ &= \lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{|\frac{1}{4\pi} \langle u+v, u+v \rangle_X - \frac{1}{4\pi} \langle u, u \rangle_X - \frac{1}{2\pi} \langle u, v \rangle_X|}{\|v\|_X} \\ &= \lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{\|v\|_X^2}{\|v\|_X} = \lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \|v\|_X = 0. \end{aligned}$$

Como o produto interno é uma forma bilinear limitada, o funcional $J'_1(u) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e limitado, neste caso, linear na segunda variável.

Portanto, J_1 é Frechét diferenciável em X , com $\langle J'_1(u), v \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle u, v \rangle_X$.

Afirmção 2.2. O funcional $J_1 \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Considere uma sequência (u_n) em X tal que $u_n \rightarrow u$ em X . Dado $v \in X$ com $\|v\|_X = 1$, note que

$$\begin{aligned} 0 \leq |\langle J'_1(u_n) - J'_1(u), v \rangle| &= |\langle J'_1(u_n), v \rangle - \langle J'_1(u), v \rangle| \\ &= \frac{1}{2\pi} |\langle u_n, v \rangle_X - \langle u, v \rangle_X| \\ &= \frac{1}{2\pi} |\langle u_n - u, v \rangle_X| \\ &\leq \|u_n - u\|_X \|v\|_X \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\| J_1'(u_n) - J_1'(u) \right\|_{X^*} = \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|_X=1}} \left| \langle J_1'(u_n) - J_1'(u), v \rangle \right| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

O que implica a continuidade do funcional $J_1' : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Afirmção 2.3. $J_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ é Frechét diferenciável e sua derivada é dada por

$$\langle J_2'(u), v \rangle = \int_0^1 f(u) v dx.$$

Seja $u \in X$ fixado. Para cada $v \in X$ denotemos

$$r(v) = J_2(u + v) - J_2(v) - \int_0^1 f(u) v dx. \quad (2.10)$$

Afirmamos que

$$\lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|_X} = 0,$$

ou de modo equivalente, que

$$\lim_{\|v_n\|_X \rightarrow 0} \frac{r(v_n)}{\|v_n\|_X} = 0.$$

Com efeito, defina $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, por $h(t) = F(u + tv_n)$. Note que h é derivável e pela regra da cadeia

$$h'(t) = f(u + tv_n) v_n.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue-se que

$$F(u + v_n) - F(u) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt.$$

Assim,

$$F(u + v_n) - F(u) = \int_0^1 f(u + tv_n) v_n dt.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |r(v_n)| &= \left| J_2(u + v_n) - J_2(u) - \int_0^1 f(u) v_n dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 (F(u + v_n) - F(u)) dx - \int_0^1 f(u) v_n dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(u + tv_n) v_n dt dx - \int_0^1 f(u) v_n dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 \int_0^1 [f(u + tv_n) - f(u)] v_n dt dx \right|, \end{aligned}$$

implicando que

$$|r(v_n)| = \left| \int_0^1 \int_0^1 [f(u + tv_n) - f(u)] v_n dt dx \right|. \quad (2.11)$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $g_n : (0, 1) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$g_n(x, t) = [f(u(x) + tv_n(x)) - f(u(x))] v_n(x),$$

e que por praticidade, a denotaremos por

$$g_n = [f(u + tv_n) - f(u)] v_n.$$

Vejamos que $g_n \in L^1((0, 1) \times [0, 1])$. De fato, pela Desigualdade de Young

$$|g_n| = |f(u + tv_n) - f(u)| |v_n| \leq \frac{|f(u + tv_n) - f(u)|^2}{2} + \frac{|v_n|^2}{2},$$

mas,

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^2 \leq (|f(u + tv_n)| + |f(u)|)^2$$

e como $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, para todo a, b não negativos, temos que

$$(|f(u + tv_n)| + |f(u)|)^2 \leq 2 [|f(u + tv_n)|^2 + |f(u)|^2],$$

logo,

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^2 \leq 2 (|f(u + tv_n)|^2 + |f(u)|^2).$$

Além disso, pelo Lema A.1, podemos encontrar constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|f(u + tv_n)| \leq C_1 e^{\alpha(|u| + t|v_n|)^2} \text{ e } |f(u)| \leq C_2 e^{\alpha u^2}.$$

e desde que, para todo $t \in [0, 1]$

$$(|u| + t|v_n|)^2 \leq (|u| + |v_n|)^2,$$

então,

$$|f(u + tv_n)| \leq C_1 e^{\alpha(|u| + |v_n|)^2} \text{ e } |f(u)| \leq C_2 e^{\alpha u^2}.$$

Assim,

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^2 \leq 2 \left[C_1' e^{2\alpha(|u| + |v_n|)^2} + C_2' e^{2\alpha u^2} \right] \quad (2.12)$$

e consequentemente,

$$|g_n| \leq C'_1 e^{2\alpha(|u|+|v_n|)^2} + C'_2 e^{2\alpha u^2} + \frac{|v_n|^2}{2}.$$

Uma vez que, a Proposição 1.9 garante que $e^{2\alpha(|u|+|v_n|)^2}$ e $e^{2\alpha u^2}$ pertencem a $L^1(0, 1)$, e como $v_n \in L^2(0, 1)$, então

$$\int_{(0,1) \times [0,1]} |g_n(x, t)| \, dt dx < \infty,$$

ou seja para cada $n \in \mathbb{N}$, g_n é integrável. Assim podemos usar o Teorema de Fubini (ver Teorema B.6) em (2.11), para obter

$$|r(v_n)| = \left| \int_0^1 \int_0^1 [f(u + tv_n) - f(u)] v_n \, dx dt \right|.$$

Daí, aplicando a Desigualdade de Hölder obtemos

$$|r(v_n)| \leq \int_0^1 \|f(u + tv_n) - f(u)\|_2 \|v_n\|_2 \, dt.$$

Uma vez que $X \hookrightarrow L^2(0, 1)$ continuamente, existe $C > 0$ tal que

$$|r(v_n)| \leq C \|v_n\|_X \int_0^1 \|f(u + tv_n) - f(u)\|_2 \, dt. \quad (2.13)$$

Por outro lado, como (v_n) converge fortemente em X , pelo Corolário 1.11, a menos de subsequência, existe $w \in X$, verificando

$$|v_n(x)| \leq w(x), \text{ quase sempre em } (0, 1),$$

dessa estimativa e por (2.12), obtemos

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^2 \leq 2 \left[C'_1 e^{2\alpha(|u|+|w|)^2} + C'_2 e^{2\alpha u^2} \right],$$

quase sempre em $(0, 1)$. Denotemos $l := 2 \left[C'_1 e^{2\alpha(|u|+|w|)^2} + C'_2 e^{2\alpha u^2} \right]$. Pela Proposição 1.9, $l \in L^1(0, 1)$. Assim, provamos a existência de uma função $l \in L^1(0, 1)$, satisfazendo

$$|f(u(x) + tv_n(x)) - f(u(x))|^2 \leq l(x), \text{ quase sempre em } (0, 1). \quad (2.14)$$

Novamente, como $X \hookrightarrow L^2(0, 1)$ continuamente e o fato de $\|v_n\|_X \rightarrow 0$, nos fornece

que para alguma constante $C > 0$

$$\|u + tv_n - u\|_2 \leq \|v_n\|_2 \leq C \|v_n\|_X \rightarrow 0,$$

ou seja, $u + tv_n \rightarrow u$ em $L^2(0, 1)$. Então, a menos de subsequência, $u(x) + tv_n(x) \rightarrow u(x)$ quase sempre em $(0, 1)$. Daí, usando a continuidade de f , segue-se que

$$f(u(x) + tv_n(x)) \rightarrow f(u(x)), \text{ quase sempre em } (0, 1),$$

resultando que,

$$|f(u(x) + tv_n(x)) - f(u(x))|^2 \rightarrow 0, \text{ quase sempre em } (0, 1). \quad (2.15)$$

Desde que valem (2.14) e (2.15), pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.5), concluímos que

$$\|f(u + tv_n) - f(u)\|_2 \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Agora, por (2.13)

$$\frac{r(v_n)}{\|v_n\|_X} \leq C \int_0^1 \|f(u + tv_n) - f(u)\|_2 dt,$$

daí, tomando o limite quando $\|v_n\|_X \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{\|v_n\|_X \rightarrow 0} \frac{r(v_n)}{\|v_n\|_X} = 0.$$

Resta mostrar que $J'_2(u) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo. A linearidade de $J'_2(u)$ resulta por propriedades de integrais. Vejamos sua limitação. Pela a Desigualdade de Hölder, temos

$$\left| \langle J'_2(u), v \rangle \right| = \left| \int_0^1 f(u) v dx \right| \leq \|f(u)\|_2 \|v\|_2,$$

Usando o Lema A.1 e o fato de $X \hookrightarrow L^2(0, 1)$ continuamente, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \langle J'_2(u), v \rangle \right| = C \left(\int_0^1 e^{2\alpha u^2} dx \right)^{1/2} \|v\|_X.$$

A Proposição 1.9 garante que $e^{2\alpha u^2} \in L^1(0, 1)$, então obtemos uma constante C , que

depende de u , tal que

$$\left| \langle J'_2(u), v \rangle \right| \leq C \|v\|_X, \text{ para todo } v \in X;$$

ou seja, $J'_2(u)$ é limitado.

Portanto, J_2 é Frechét diferenciável e sua derivada é dada por $\langle J'_2(u), v \rangle = \int_0^1 f(u) v dx$.

Afirmção 2.4. O funcional $J_2 \in C^1(X, \mathbb{R})$.

De fato, seja $(u_n) \subset X$ tal que $u_n \rightarrow u$ em X . Logo,

$$\begin{aligned} \left\| J'_2(u_n) - J'_2(u) \right\|_{X^*} &= \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|_X=1}} \left| \langle J'_2(u_n) - J'_2(u), v \rangle \right| \\ &= \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|_X=1}} \left| \int_0^1 (f(u_n) - f(u)) v dx \right| \\ &\leq \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|_X=1}} \int_0^1 |f(u_n) - f(u)| |v| dx; \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade Hölder e a imersão contínua $X \hookrightarrow L^2(0, 1)$, para alguma constante $C > 0$, temos

$$\left\| J'_2(u_n) - J'_2(u) \right\|_{X^*} \leq \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|_X=1}} \|f(u_n) - f(u)\|_2 \|v\|_2 \leq C \|f(u_n) - f(u)\|_2.$$

Como $u_n \rightarrow u$ em X , por um argumento análogo ao que usamos para provar (2.16), concluímos que

$$\|f(u_n) - f(u)\|_2 \rightarrow 0,$$

o que mostra a continuidade de J'_2 .

Finalmente, unindo todas estas afirmações obtemos a diferenciabilidade do funcional J . □

Portanto, os pontos críticos do funcional J , correspondem as soluções fracas para o problema (P) .

2.2 Geometria do funcional

Nosso próximo objetivo é mostrar que o funcional J satisfaz a geometria do Passo da Montanha, apresentadas nos Teoremas B.22 e B.23, a fim de garantir a existência e a multiplicidade de soluções para o problema (P) .

Lema 2.4. Sob as hipóteses (f_3) e (f_4) , existem $\rho, a > 0$ tais que $J(u) \geq a$ para todo $u \in X$ com $\|u\|_X = \rho$.

Demonstração. Fixe $q > 2$ e $0 < \alpha < 2\pi w$, então o Lema A.4 nos garante que existem $0 < \mu < \lambda_1$ e $C > 0$ satisfazendo

$$F(t) \leq \frac{\mu}{4\pi} t^2 + C e^{\alpha t^2} |t|^q, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Logo, para cada $u \in X$, com $\|u\|_X \leq 1$,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 F(u) dx \\ &\geq \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 \left[\frac{\mu u^2}{4\pi} + C e^{\alpha u^2} |u|^q \right] dx \\ &= \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - \frac{\mu}{4\pi} \|u\|_2^2 - C \int_0^1 e^{\alpha u^2} |u|^q dx. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.2, temos

$$J(u) \geq \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - \frac{\mu}{4\pi\lambda_1} \|u\|_X^2 - C \int_0^1 e^{\alpha u^2} |u|^q dx. \quad (2.17)$$

Além disso, como $0 < \alpha < 2\pi w$, podemos fixar $r > 1$ de modo que ainda se tenha, $r\alpha < 2\pi w$. Aplicando a Desigualdade de Hölder em (2.17), com r e r' conjugados temos

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1} \right) - C \left(\int_0^1 e^{\alpha r u^2} dx \right)^{1/r} \left(\int_0^1 |u|^{q r'} dx \right)^{1/r'} \\ &= \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1} \right) - C \left(\int_0^1 e^{\alpha r u^2} dx \right)^{1/r} \|u\|_{r'q}^q. \end{aligned}$$

Mas, como $\|u\|_X \leq 1$, usando a Proposição 1.8 e o fato de que, pela Proposição 1.5, X está imerso continuamente em $L^{r'q}(0, 1)$, podemos encontrar $C > 0$ tal que

$$J(u) \geq \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1} \right) - C \|u\|_X^q.$$

Desde que $q > 2$ e $1 - \frac{\mu}{\lambda_1} > 0$, podemos escolher $\rho > 0$, suficientemente pequeno, com $\|u\|_X = \rho$, tal que

$$J(u) \geq \frac{\rho^2}{4\pi} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1} - C \rho^{q-2} \right) > 0.$$

Portanto, para todo $u \in X$ com $\|u\|_X = \rho$, temos que $J(u) \geq a$, onde denotamos $a = \frac{\rho^2}{4\pi} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1} - C \rho^{q-2} \right)$. Assim concluímos a prova do Lema. $\square$

Lema 2.5. Suponha que (f_1) e (f_2) sejam válidas. Se $Y \subset X$ é um subespaço vetorial com $\dim(Y) < \infty$, então $\sup_{u \in Y} J(u) < \infty$ e

$$\lim_{\substack{\|u\|_X \rightarrow \infty \\ u \in Y}} J(u) = -\infty. \quad (2.18)$$

Demonstração. Seja $u \in Y$. Pelo Lema A.5, sabemos que existem constantes $C > 0$ e $K > 0$ tais que

$$F(t) \geq K |t|^\mu - C, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

logo,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 F(u) dx \\ &\leq \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 [K |u|^\mu - C] dx \\ &\leq \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - K \|u\|_\mu^\mu + C. \end{aligned}$$

Como a dimensão de Y é finita, e em um espaço de dimensão finita todas as normas são equivalentes, podemos encontrar $C_1 > 0$ de modo que $\|u\|_X \leq C_1 \|u\|_\mu$, assim existe $M > 0$ tal que

$$J(u) \leq \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - M \|u\|_\mu^\mu + C. \quad (2.19)$$

Desde que $\mu > 2$, usando (2.19), obtemos que

$$\lim_{\substack{\|u\|_X \rightarrow \infty \\ u \in Y}} J(u) = -\infty. \quad (2.20)$$

Isso prova (2.18).

Nosso próximo objetivo é provar que $\sup_{u \in Y} J(u) < \infty$. Por (2.20), para todo $A > 0$, existe $R > 0$ com a seguinte propriedade

$$J(u) < -A, \quad \text{sempre que } u \in Y \text{ e } \|u\|_X > R. \quad (2.21)$$

Novamente, usando que $\dim(Y) < \infty$, então a bola fechada $\bar{B}_R(0)$ em Y é compacta. Logo, J atinge máximo nesta bola. Denotando $m = \max_{u \in \bar{B}_R(0)} J(u)$, temos

$$J(u) \leq m, \quad \text{sempre que } u \in Y \text{ e } \|u\|_X \leq R. \quad (2.22)$$

Combinando (2.21) e (2.22), segue-se o resultado. $\square$

2.3 A condição de Palais-Smale

Lema 2.6. Sob as hipóteses (f_1) a (f_4) , J satisfaz a condição de Palais-Smale.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em X tal que $(\varphi(u_n))$ é limitada e $\varphi'(u_n) \rightarrow 0$ em X^* . Então, a menos de subsequência, podemos supor que $\varphi(u_n) \rightarrow c$, $c \in \mathbb{R}$. Assim,

$$J(u_n) \leq c + 1 \text{ e } \|J'(u_n)\|_{X^*} \leq 1,$$

para todo n suficientemente grande. Mostraremos que (u_n) tem uma subsequência fortemente convergente em X .

Seja $0 < \epsilon < 1/2$. Pelo Lema A.2, existe $t_\epsilon > 0$ tal que

$$F(t) \leq \epsilon f(t)t, \text{ para todo } |t| \geq t_\epsilon,$$

e sendo F contínua, então F restrita ao compacto $[-t_\epsilon, t_\epsilon]$ é limitada, ou seja,

$$|F(t)| \leq C, \text{ para algum } C > 0.$$

Unindo as duas estimativas acima para F , temos que

$$F(t) \leq \epsilon f(t)t + C, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

Assim,

$$\begin{aligned} c + 1 &\geq \frac{\|u_n\|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 F(u_n) dx \\ &\geq \frac{\|u_n\|_X^2}{4\pi} - \epsilon \int_0^1 f(u_n) u_n - C. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $\epsilon \|u_n\|_X^2 / 2\pi$, obtemos

$$\begin{aligned} c + 1 &\geq \frac{\|u_n\|_X^2}{4\pi} + \left(\frac{\epsilon \|u_n\|_X^2}{2\pi} - \frac{\epsilon \|u_n\|_X^2}{2\pi} \right) - \epsilon \int_0^1 f(u_n) u_n - C \\ &= \left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} + \epsilon \left(\frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} - \int_0^1 f(u_n) u_n \right) - C \\ &= \left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} + \epsilon \langle J'(u_n), u_n \rangle - C \\ &= \left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} - \epsilon \langle J'(u_n), -u_n \rangle - C \end{aligned}$$

Como $\langle J'(u_n), -u_n \rangle \leq |\langle J'(u_n), -u_n \rangle| \leq \|J'(u_n)\|_{X^*} \| -u_n \|_X$, segue-se que

$$\begin{aligned} c + 1 &\geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} - \epsilon \|J'(u_n)\|_{X^*} \| -u_n \|_X - C \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} - \epsilon \|u_n\|_X - C. \end{aligned}$$

Isso implica na limitação de (u_n) em X , pois do contrário, isto é, se $\|u_n\|_X \rightarrow +\infty$, então teríamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c + 1}{\|u_n\|_X^2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) \frac{1}{2\pi} - \frac{\epsilon}{\|u_n\|_X} - \frac{C_1}{\|u_n\|_X^2} \right),$$

em outras palavras, $\left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) \frac{1}{2\pi} \leq 0$, o que é um absurdo, pois escolhemos $0 < \epsilon < 1/2$. Portanto, existe uma constante $M > 0$, tal que $\|u_n\|_X \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X está imerso compactamente em $L^q(0, 1)$ para todo $q \geq 1$ (ver Proposição 1.6), segue-se que, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } X, \\ u_n \rightarrow u \text{ em } L^q(0, 1) \text{ para todo } q \geq 1 \text{ e} \\ u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ quase sempre em } (0, 1). \end{cases}$$

Em particular, escolhendo $0 < \alpha < \frac{\pi w}{M^2}$, o Lema A.1, garante que para alguma constante $C > 0$,

$$\int_0^1 f^2(u_n) dx \leq C \int_0^1 e^{2\alpha u_n^2} dx = C \int_0^1 e^{2\alpha u_n^2 \frac{\|u_n\|_X^2}{\|u_n\|_X^2}} dx \leq C \int_0^1 e^{2\alpha M^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_X} \right)^2} dx.$$

Por outro lado, pela escolha do α , temos que $0 < 2\alpha M^2 < 2\pi w$, então da Proposição 1.8 obtemos uma constante $K > 0$, verificando

$$\int_0^1 f^2(u_n) dx \leq K. \quad (2.24)$$

Isto mostra que $(f(u_n))$ é limitada em $L^2(0, 1)$, e desde que $L^2(0, 1)$ é reflexivo, a menos de subsequência, $f(u_n) \rightharpoonup f(u)$ em $L^2(0, 1)$ (ver Definição B.10), isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(u_n) v dx = \int_0^1 f(u) v dx, \text{ para toda } v \in X. \quad (2.25)$$

Como $J'(u_n) \rightarrow 0$ em X^* , dado $v \in X$,

$$0 \leq |\langle J'(u_n), v \rangle| \leq \|J'(u_n)\|_{X^*} \|v\|_X \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Assim,

$$\langle J'(u_n), v \rangle \rightarrow 0, \text{ para todo } v \in X. \quad (2.26)$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em X e (2.25) vale, temos

$$\langle J'(u), v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \langle u_n, v \rangle_X - \int_0^1 f(u_n) v dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle J'(u_n), v \rangle.$$

Assim, usando (2.26), obtemos

$$\langle J'(u), v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in X. \quad (2.27)$$

Denotando

$$B_n = \left| \int_0^1 f(u_n) u_n dx - \int_0^1 f(u) u dx \right|,$$

note que

$$B_n = \left| \left(\int_0^1 f(u_n) u_n dx - \int_0^1 f(u_n) u dx \right) + \left(\int_0^1 f(u_n) u dx - \int_0^1 f(u) u dx \right) \right|.$$

Então, pela Desigualdade de Hölder, segue-se

$$\left| \int_0^1 f(u_n) u_n dx - \int_0^1 f(u) u dx \right| \leq \|f(u_n)\|_2 \|u_n - u\|_2 + \left| \int_0^1 (f(u_n) - f(u)) u dx \right|. \quad (2.28)$$

Usando que $u_n \rightarrow u$ em $L^2(0, 1)$, $(f(u_n))$ é limitada em $L^2(0, 1)$ e (2.25), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(u_n) u_n dx = \int_0^1 f(u) u dx. \quad (2.29)$$

Agora, desde que (u_n) é uma sequência limitada em X e $J'(u_n) \rightarrow 0$ em X^* , então,

$$0 \leq |\langle J'(u_n), u_n \rangle| \leq \|J'(u_n)\|_{X^*} \|u_n\|_X \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Logo,

$$\langle J'(u_n), u_n \rangle \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

Por (2.29) e (2.30)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 f(u_n) u_n dx + \langle J'(u_n), u_n \rangle \right] = \int_0^1 f(u) u dx,$$

mas, por (2.27)

$$\int_0^1 f(u)u dx = \frac{\|u\|_X^2}{2\pi} - \langle J'(u), v \rangle = \frac{\|u\|_X^2}{2\pi},$$

consequentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X = \|u\|_X$. Além disso, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em X , e sendo X espaço de Hilbert, concluímos $u_n \rightarrow u$ em X . $\square$

2.4 Prova do Teorema 2.1

A existência de uma solução não trivial, $u \in X$, segue-se pelo Teorema do Passo da Montanha (Teorema B.22), uma vez que, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, $J(0) = 0$ e J satisfaz a condição de Palais-Smale (ver Lema 2.6). Além disso, J satisfaz a geometria (i) e (ii) do Teorema B.22. O item (i) segue-se pelo Lema 2.4. Por outro lado, dado um subespaço $Y \subset X$ com $\dim Y < \infty$, pelo Lema 2.5

$$\lim_{\substack{\|u\|_X \rightarrow \infty \\ u \in Y}} J(u) = -\infty.$$

Em particular fixado uma função não nula $u_0 \in X$ e considerando Y o subespaço gerado por u_0 , o qual denotamos $Y = [u_0]$, podemos escolher $e = tu_0$ com $t > 0$ suficientemente grande e $R > 0$ tal que

$$J(e) < 0 \text{ e } \|e\|_X > R > \rho$$

onde $\rho > 0$ foi dado em (i). Portanto, o item (ii) do Teorema B.22 é válido.

Agora, para a multiplicidade de solução, considere Y um subespaço de dimensão finita em X ; assim Y é fechado em X . Como X é um espaço de Hilbert, então podemos escrever $X = Y \oplus Y^\perp$. Também, pelo Lema 2.4, existem constantes $\rho, \alpha > 0$, tais que $J|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$, logo, $J|_{\partial B_\rho \cap Y^\perp} \geq \alpha$. Já pelo Lema 2.5, ver (2.21), para cada subespaço Y de dimensão finita, podemos encontrar $R(Y) > 0$, tal que

$$J(u) < 0, \text{ sempre que } u \in Y \text{ e } \|u\|_X > R(Y).$$

Ou seja, as condições (i) e (ii) do Teorema B.23 são satisfeitas. Por outro lado, pelo Lema A.6, se f é ímpar, o funcional J é par; assim, estamos sob as hipóteses do Teorema B.23, que garante que J tem um sequência ilimitada de valores críticos, consequentemente, o problema (P) tem uma infinidade de soluções.

2.5 Uma aplicação

Como uma consequência do Teorema 2.1 temos a garantia de uma infinidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u = f(u), & \text{em } (0, 1) \\ u = 0, & \text{em } \mathbb{R} \setminus (0, 1), \end{cases}$$

em que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$f(t) = \begin{cases} \mu t, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \mu t^{q-1} e^{t^q-1}, & \text{se } t > 1, \end{cases}$$

se $t \geq 0$ e por $f(t) = -f(-t)$ se $t < 0$. Além disso, estamos considerando $1 < q < 2$ e $0 < \mu < \lambda_1/2\pi$ fixados.

Com efeito, observe que, por definição, f é uma função contínua e ímpar; os únicos pontos da função onde poderia haver descontinuidade seriam em $t = 0$ e em $t = 1$, o que não ocorre. Além disso, notemos que a primitiva de f é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\mu}{2}t^2, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{q} (e^{t^q-1} - 1), & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

e $F(t) = F(-t)$, quando $t < 0$.

De fato, se $0 \leq t \leq 1$, então

$$F(t) = \int_0^t \mu s ds = \frac{\mu}{2}t^2.$$

Se $t > 1$, temos

$$F(t) = \int_0^1 \mu s ds + \int_1^t \mu t^{q-1} e^{t^q-1} ds.$$

Colocando $u = s^q - 1$, então $du/q = s^{q-1} ds$. Daí, segue-se

$$F(t) = \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{q} (e^{t^q-1} - 1).$$

Finalmente, se $t < 0$, então $f(-t) = -f(t)$, logo pela Lema A.6, segue-se que $F(t) = F(-t)$.

Nosso próximo objetivo é mostra que f satisfaz as hipóteses (f_1))-(f_4).

Hipótese (f_1)

Primeiro, vejamos que

$$F(t) > 0, \text{ para todo } t \neq 0. \quad (2.31)$$

De fato, se $0 < t \leq 1$, então $F(t) = \mu t^2/2 > 0$; Agora, se $t > 1$,

$$F(t) = \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{q} (e^{t^q-1} - 1) > 0,$$

uma vez que $(e^{t^q-1} - 1) > 0$. Finalmente, como $F(-t) = F(t)$ se $t < 0$, então obtemos o resultado.

Agora, desde que $1 < q < 2$, segue-se que para todo $t > 1$,

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{q} (e^{t^q-1} - 1) \\ &= \frac{\mu(q-2)}{2q} + \frac{\mu e^{t^q-1}}{q} \\ &< \frac{\mu e^{t^q-1}}{q} \\ &< \frac{\mu}{q} t^{q-1} e^{t^q-1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$F(t) < \frac{1}{q} f(t), \text{ para todo } t > 1. \quad (2.32)$$

Por outro lado, se $t < -1$ então por (2.32)

$$F(t) = F(-t) < \frac{1}{q} f(-t) = \frac{1}{q} (-f(t)), \text{ para todo } t < -1. \quad (2.33)$$

Combinando (2.31), (2.32) e (2.33), obtemos

$$0 < F(t) < \frac{1}{q} |f(t)|, \text{ para todo } |t| > 1.$$

Assim, basta tomar qualquer $t_0 > 1$ e $M = 1/q$.

Hipótese (f_2)

Por (2.31), já temos que $2F(t) > 0$, para todo $t \neq 0$. Basta provar que $2F(t) \leq t f(t)$, para todo $t \neq 0$.

Com efeito, se $0 < t \leq 1$,

$$\frac{2F(t)}{f(t)t} = \frac{2\mu t^2/2}{\mu t^2} = 1.$$

Por outro lado, se $t > 1$, então,

$$\begin{aligned}\frac{2F(t)}{f(t)t} &= \frac{2(\mu/2 + \mu/q(e^{t^q-1} - 1))}{\mu t^q e^{t^q-1}} \\ &= \frac{1}{t^q e^{t^q-1}} + \frac{2(e^{t^q-1} - 1)}{q t^q e^{t^q-1}} \\ &= \frac{1}{t^q e^{t^q-1}} + \frac{2}{q t^q} - \frac{2}{q t^q e^{t^q-1}}.\end{aligned}$$

Defina

$$g(t) = \frac{1}{t^q e^{t^q-1}} + \frac{2}{q t^q} - \frac{2}{q t^q e^{t^q-1}} \text{ e } h(t) = e^{t^q-1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}g'(t) &= -\frac{(q t^{q-1} h(t) + t^q h'(t))}{t^{2q} h^2(t)} - \frac{q^2 t^{q-1}}{q^2 t^{2q}} - \frac{[-(q^2 t^{q-1} h(t) + q t^q h'(t))]}{q^2 t^{2q} h^2(t)} \\ &= -\frac{(q t^{q-1} h(t) + t^q h'(t))}{t^{2q} h^2(t)} - \frac{t^{q-1}}{t^{2q}} + \frac{(q^2 t^{q-1} h(t) + q t^q h'(t))}{q^2 t^{2q} h^2(t)}.\end{aligned}$$

Observe que,

$$h'(t) = q t^{q-1} e^{t^q-1} = q t^{q-1} h(t),$$

então

$$\begin{aligned}g'(t) &= -\frac{(q t^{q-1} h(t) + t^q q t^{q-1} h(t))}{t^{2q} h^2(t)} - \frac{t^{q-1}}{t^{2q}} + \frac{(q^2 t^{q-1} h(t) + q t^q q t^{q-1} h(t))}{q^2 t^{2q} h^2(t)} \\ &= -\frac{(q t^{q-1} h(t) + q t^{2q-1} h(t))}{t^{2q} h^2(t)} - \frac{t^{q-1}}{t^{2q}} + \frac{(q^2 t^{q-1} h(t) + q^2 t^{2q-1} h(t))}{q^2 t^{2q} h^2(t)}.\end{aligned}$$

Simplificando a última expressão, obtemos

$$\begin{aligned}g'(t) &= -\frac{(q t^{q-1} + q t^{2q-1})}{t^{2q} h(t)} - \frac{t^{q-1}}{t^{2q}} + \frac{(t^{q-1} + t^{2q-1})}{t^{2q} h(t)} \\ &= (1 - q) \frac{(t^{q-1} + t^{2q-1})}{t^{2q} h(t)} - \frac{t^{q-1}}{t^{2q}}.\end{aligned}$$

Desde que, $t > 1$, $h(t) > 0$ e $q > 1$, então $g'(t) < 0$, implicando a função $g(t) = 2F(t)/tf(t)$ é decrescente para $t > 1$. E como $2F(t)/tf(t) = 1$ para $0 < t \leq 1$, então

$$2F(t) \leq tf(t), \text{ para todo } t > 0.$$

Por outro lado, se $t < 0$, então pelo caso anterior,

$$2F(t) = 2F(-t) \leq f(-t)(-t) = -f(t)(-t) = f(t)t.$$

Portanto, a hipótese (f_2) é válida.

Hipótese (f_3)

Como $0 < \mu < \lambda_1/2\pi$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2} = \frac{\mu t^2/2}{t^2} = \frac{\mu}{2} < \frac{\lambda_1}{4\pi},$$

$$\text{logo, } \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2} < \frac{\lambda_1}{4\pi}.$$

Hipótese (f_4)

Como $f(-t) = -f(t)$, quando $t < 0$, basta considerar o caso em que $t \rightarrow +\infty$. Assim, dado $\alpha > 0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|\mu t^{q-1} e^{t^q-1}|}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{e} \frac{t^{q-1}}{e^{\alpha t^2} e^{-t^q}}$$

implicando

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{e} \frac{t^{q-1}}{e^{(\alpha t^2 - t^q)}}.$$

Usando a Regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{e} \frac{(q-1)t^{q-2}}{e^{(\alpha t^2 - t^q)}(2\alpha t - qt^{q-1})} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{e} \frac{(q-1)}{t^{2-q} e^{t^q(\alpha t^{2-q} - 1)} t(2\alpha - qt^{q-2})},$$

daí,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{e} \frac{(q-1)}{t^{(3-q)} e^{t^q(\alpha t^{(2-q)} - 1)} (2\alpha - qt^{q-2})} = 0.$$

Portanto, temos uma função contínua, ímpar satisfazendo as hipóteses (f_1) a (f_4) , logo, pelo Teorema 2.1 o problema (P) admite infinitas soluções.

Capítulo 3

Existência de Solução: Caso Crítico

Nosso objetivo neste capítulo é estudar a existência de solução fraca não trivial para o problema (P) no caso em que f tem crescimento exponencial crítico. Seguiremos uma ideia análoga à utilizada no capítulo anterior. Como a versão simétrica do Teorema do Passo Montanha (Teorema B.23), usada para provar o Teorema 2.1, pede como hipótese que o funcional considerado satisfaça a condição de Palais-Smale, aqui não estudaremos a multiplicidade de soluções para o problema, pois, neste caso, a condição de Palais-Smale só será verificada para níveis em um certo intervalo.

Ao longo deste capítulo utilizaremos a seguinte definição: Dizemos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem crescimento exponencial crítico, se existe $0 < \alpha_0 < 2\pi w$ tal que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \begin{cases} \infty, & \text{se } 0 < \alpha < \alpha_0 \\ 0, & \text{se } \alpha > \alpha_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde w foi dado na Proposição 1.7.

Aqui, a não linearidade f satisfaz as seguintes hipóteses:

(f'_1) existem $t_0 > 0$ e $M > 0$ tais que $0 < F(t) \leq M |f(t)|$, para todo $|t| \geq t_0$;

(f'_2) $0 < 2F(t) \leq f(t)t$, para todo $t \neq 0$;

(f'_3) $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2} < \frac{\lambda_1}{4\pi}$;

(f'_4) f satisfaz (3.1).

(f'_5) existe $\psi \in X$ tal que $\|\psi\| = 1$ e

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left(\frac{t^2}{4\pi} - \int_0^1 F(t\psi) \right) < \frac{w}{2\alpha_0}. \quad (3.2)$$

Mais a frente, veremos que a hipótese (f'_5) pode ser substituída por outra mais geral. Apresentaremos uma hipótese suficiente para existência de uma função $\psi \in X$, satisfazendo (3.2).

Como principal resultado deste capítulo, temos:

Teorema 3.1. *Se valem (f'_1) e (f'_5) , então (P) tem uma solução fraca não trivial $u \in X$.*

3.1 A condição de Palais-Smale

Como já mencionamos, provaremos que a condição de Palais-Smale é satisfeita apenas para níveis em um certo intervalo.

É importante ressaltar que no caso exponencial crítico, o Lema A.1 é válido somente para $\alpha > \alpha_0$, isto é, para todo $\alpha > \alpha_0$ existe $C > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t^2}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Lema 3.2. *Se f satisfaz (f'_1) e (f'_5) , então o funcional*

$$J(u) = \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 F(u)dx$$

(ver (2.9)), satisfaz a condição de Palais-Smale em qualquer nível $c < \frac{w}{2\alpha_0}$.

Demonstração. Seja $c < w/2\alpha_0$ e suponha (u_n) uma sequência em X , tal que

$$J(u_n) \rightarrow c \text{ e } J'(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } X^*.$$

Por analogia a prova do Lema 2.6, segue-se que (u_n) é limitada em X e, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } X, \\ u_n \rightarrow u \text{ em } L^q(0,1), \text{ para todo } q \geq 1 \text{ e} \\ u_n(x) \rightarrow u(x), \text{ quase sempre em } (0,1). \end{cases}$$

Além disso, $(\|J'(u_n)\|_{X^*})$, $(J(u_n))$ são sequências limitadas em $\mathbb{R}$, daí,

$$\left| \int_0^1 f(u_n)u_n dx \right| = \left| \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} - J'(u_n)u_n \right| \leq \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} + \|J'(u_n)\|_{X^*} \|u_n\|_X \leq C_1$$

e

$$\left| \int_0^1 F(u_n)dx \right| = \left| \frac{\|u_n\|_X^2}{4\pi} - J(u_n) \right| \leq \frac{\|u_n\|_X^2}{4\pi} + |J(u_n)| \leq C_2.$$

Mas, pela hipótese (f'_2) ,

$$\int_0^1 f(u_n)u_n dx, \int_0^1 F(u_n)dx > 0.$$

Logo, podemos encontrar uma constante $C > 0$ verificando

$$\max \left\{ \|u_n\|_X^2, \int_0^1 f(u_n)u_n dx, \int_0^1 F(u_n)dx \right\} \leq C. \quad (3.4)$$

Pelo Lema A.1 e pela Proposição 1.9 também temos que

$$\int_0^1 |f(u)| dx \leq C_2 \int_0^1 e^{\alpha u^2} dx < \infty$$

e

$$\int_0^1 |f(u_n)| dx \leq C_3 \int_0^1 e^{\alpha u_n^2} dx < \infty,$$

ou seja, $f(u_n), f(u)$ estão em $L^1(0, 1)$. Então como $u_n \rightarrow u$ em $L^1(0, 1)$ e $\int_0^1 f(u_n)u_n dx \leq C$, pelo Lema B.11, concluímos que $f(u_n)$ converge para $f(u)$ em $L^1(0, 1)$. Assim, a menos de subsequência, existe $h \in L^1(0, 1)$, satisfazendo

$$\begin{cases} f(u_n(x)) \rightarrow f(u(x)), \text{ quase sempre em } (0, 1) \text{ e} \\ |f(u_n(x))| \leq h(x), \text{ quase sempre em } (0, 1). \end{cases}$$

Daí, usando a Hipótese (f'_1) e o fato de F ser contínua, existe $V \in L^1(0, 1)$, tal que

$$\begin{cases} F(u_n(x)) \leq M|f(u_n(x))| \leq V(x), \text{ quase sempre em } (0, 1) \text{ e} \\ F(u_n(x)) \rightarrow F(u(x)), \text{ quase sempre em } (0, 1). \end{cases}$$

Portanto, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.5) garante que

$$\int_0^1 F(u_n)dx \rightarrow \int_0^1 F(u)dx. \quad (3.5)$$

Assim,

$$\frac{\|u_n\|_X^2}{4\pi} \rightarrow c + \int_0^1 F(u)dx. \quad (3.6)$$

Como $J'(u_n) \rightarrow 0$ em X^* e (u_n) é limitada em X , então por (3.6) e por (2.30) temos

$$\int_0^1 f(u_n)u_n dx = \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} + \langle J'(u_n), u_n \rangle \rightarrow 2 \left(c + \int_0^1 F(u)dx \right). \quad (3.7)$$

Mas, por (f'_2)

$$\int_0^1 f(u_n)u_n dx - 2 \int_0^1 F(u_n) dx \geq 0.$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ na expressão acima, obtemos

$$2 \left(c + \int_0^1 F(u) dx \right) - 2 \int_0^1 F(u) dx \geq 0,$$

o que implica $c \geq 0$. Assim, qualquer sequência satisfazendo a condição de Palais-Smale se aproxima de um nível não negativo.

Agora, vejamos que $\langle J'(u), v \rangle = 0$, para toda $v \in X$. Primeiro, considere $v \in C_0^\infty(0, 1)$. Note que

$$\left| \int_0^1 f(u_n)v dx - \int_0^1 f(u)v dx \right| \leq \|f(u_n) - f(u)\|_1 \|v\|_\infty \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty \quad (3.8)$$

e como $J'(u_n) \rightarrow 0$ em X^* ,

$$0 \leq |\langle J'(u_n), v \rangle| \leq \|J'(u_n)\|_{X^*} \|v\|_X \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Assim,

$$\langle J'(u_n), v \rangle \rightarrow 0, \text{ para todo } v \in C_0^\infty(0, 1). \quad (3.9)$$

Combinando (3.8), (3.9) e o fato de $u_n \rightharpoonup u$ em X , temos

$$\langle J'(u), v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \langle u_n, v \rangle_X - \int_0^1 f(u_n)v dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle J'(u_n), v \rangle = 0.$$

Logo, $\langle J'(u), v \rangle = 0$, para toda $v \in C_0^\infty(0, 1)$. Mas como $C_0^\infty(0, 1)$ é denso em $H^{1/2}(0, 1)$, para cada $v \in X$, existe uma sequência (v_n) em $C_0^\infty(0, 1)$ tal que $v_n \rightarrow v$ em X , então

$$\langle J'(u), v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle J'(u), v_n \rangle = 0$$

ou seja,

$$\langle J'(u), v \rangle = 0, \text{ para todo } v \in X. \quad (3.10)$$

Usando a hipótese (f'_2) e (3.10), segue-se

$$J(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{\|u\|_X^2}{2\pi} - 2 \int_0^1 F(u) dx \right] \geq \frac{1}{2} \left[\frac{\|u\|_X^2}{2\pi} - \int_0^1 f(u)u dx \right] = \frac{1}{2} \langle J'(u), u \rangle = 0.$$

Resumindo, temos $c \geq 0$ e $J(u) \geq 0$.

Para concluir precisamos analisar três casos.

(a) Caso: $c = 0$.

Como $J(u) \geq 0$ e $u_n \rightharpoonup u$ em X , segue-se por (3.6) e pela Proposição B.16 que

$$\frac{\|u\|_X^2}{4\pi} \geq \int_0^1 F(u)dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_X^2}{4\pi} \geq \frac{\|u\|_X^2}{4\pi}.$$

Assim, $\|u_n\|_X \rightarrow \|u\|_X$. Como X é um espaço de Hilbert, então $u_n \rightarrow u$ em X .

(b) Caso: $c > 0$ e $u = 0$.

Mostraremos que esse caso não ocorre.

Afirmamos que $(f(u_n))$ é limitada em $L^q(0, 1)$ para algum $q > 1$.

De fato, desde que $c < w/2\alpha_0$, tome $\epsilon > 0$ tal que $4\pi(\epsilon + c)\alpha_0 < 2\pi w$. Assim, podemos encontrar $q > 1$ e $\alpha_0 < \alpha < 2\pi w$ suficientemente próximos de 1 e de α_0 , respectivamente, de modo que $4\pi(\epsilon + c)q\alpha < 2\pi w$. Como $u = 0$, por (3.6) temos que $\|u_n\|_X^2/4\pi \rightarrow c$, então para $\epsilon > 0$, dado acima, e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que

$$\|u_n\|_X^2 < 4\pi(\epsilon + c),$$

assim, por (3.3) e pela Proposição 1.8

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(u_n)|^q dx &\leq C \int_0^1 e^{q\alpha u_n^2} dx \\ &= C \int_0^1 e^{q\alpha \|u_n\|_X^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_X}\right)^2} dx \\ &< C \int_0^1 e^{4\pi(\epsilon+c)q\alpha \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_X}\right)^2} dx \\ &\leq K, \end{aligned}$$

para alguma constante $K > 0$. Portanto, $(f(u_n))$ é limitada em $L^q(0, 1)$ e como por (3.1), $u_n \rightarrow 0$ em $L^{q'}(0, 1)$, onde $q' = q/(q - 1)$, então

$$0 \leq \int_0^1 f(u_n)u_n dx \leq \|f(u_n)\|_q \|u_n\|_{q'} \leq K^{1/q} \|u_n\|_{q'}$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(u_n)u_n dx = 0.$$

Desde que $J'(u_n) \rightarrow 0$ em X^* e (u_n) é limitada em X , por (2.30), segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\langle J'(u_n), u_n \rangle + \int_0^1 f(u_n)u_n dx \right] = 0.$$

(Como $u_n \rightharpoonup 0$ em X , $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X = 0$ e X é um espaço de Hilbert, concluímos que $u_n \rightarrow 0$ em X). Então pela continuidade de J e por (3.5), obtemos que $c = \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = 0$, o que é um absurdo! pois, por hipótese $c > 0$. Portanto, este caso não ocorre.

(c) Caso: $c > 0$ e $u \neq 0$.

Nesta situação, basta provar que $J(u) = c$, pois desta maneira teremos por (3.6) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_X^2}{4\pi} = J(u) + \int_0^1 F(u)dx = \frac{\|u\|_X^2}{4\pi}.$$

(Novamente, como $u_n \rightharpoonup u$ em X , $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X = \|u\|_X$ e X é espaço de Hilbert, concluímos que $u_n \rightarrow u$ em X).

Inicialmente, usando o Teorema (B.16) e (3.5), observe que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 F(u)dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\|u_n\|_X^2}{4\pi} \right) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 F(u_n)dx \right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\|u_n\|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 F(u_n)dx \right] \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = c. \end{aligned}$$

Isto é, $J(u) \leq c$. Vamos supor por contradição que ocorra $J(u) < c$. Então por (3.6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X^2 = 4\pi \left(c + \int_0^1 F(u)dx \right) > 4\pi \left(J(u) + \int_0^1 F(u)dx \right) = \|u\|_X^2. \quad (3.11)$$

Definamos

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_X} \text{ e } v = \left(4\pi c + 4\pi \int_0^1 F(u)dx \right)^{-1/2} u.$$

Assim $\|v_n\|_X = 1$ e pela estimativa (3.11)

$$\|v\|_X = \frac{\|u\|_X}{(4\pi c + 4\pi \int_0^1 F(u)dx)^{1/2}} < \frac{\|u\|_X}{\|u\|_X} = 1.$$

Como $u \neq 0$, segue-se que $0 < \|v\|_X < 1$.

Lembrando que $u_n \rightharpoonup u$ em X , por (3.6) temos que para todo $h \in X^*$,

$$h(v_n) = h\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_X}\right) \rightarrow h\left(\frac{u}{\left(4\pi c + 4\pi \int_0^1 F(u)dx\right)^{1/2}}\right) = h(v),$$

e portanto, $v_n \rightharpoonup v$ em X .

3. Existência de Solução: Caso Crítico

Uma vez que $c < w/2\alpha_0$, podemos encontrar $q > 1$, próximo de 1, e $\alpha_0 < \alpha < 2\pi w$, próximo de α_0 , tais que

$$2\alpha_0 < 2\alpha q < \frac{w}{c}$$

e como $J(u) \geq 0$, obtemos que

$$2\alpha q < \frac{w}{c - J(u)}. \quad (3.12)$$

Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q\alpha \|u_n\|_X^2 = 4\pi q\alpha \left(c + \int_0^1 F(u)dx \right) < 2\pi w \left(\frac{c + \int_0^1 F(u)dx}{c - J(u)} \right). \quad (3.13)$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{c + \int_0^1 F(u)dx}{c - J(u)} = \frac{1}{1 - \|v\|_X^2}. \quad (3.14)$$

Com efeito, note que

$$\frac{1}{1 - \|v\|_X^2} = \frac{1}{1 - \frac{\|u\|_X^2}{4\pi(c + \int_0^1 F(u)dx)}} = \frac{4\pi \left(c + \int_0^1 F(u)dx \right)}{4\pi \left(c + \int_0^1 F(u)dx \right) - \|u\|_X^2},$$

mas

$$c + \int_0^1 F(u)dx = c - J(u) + \frac{\|u\|_X^2}{4\pi},$$

logo,

$$\frac{1}{1 - \|v\|_X^2} = \frac{4\pi \left(c + \int_0^1 F(u)dx \right)}{4\pi \left(c - J(u) + \frac{\|u\|_X^2}{4\pi} \right) - \|u\|_X^2} = \frac{c + \int_0^1 F(u)dx}{c - J(u)}.$$

O que prova (3.14).

Segue-se por (3.13) que

$$b := \lim_{n \rightarrow \infty} q\alpha \|u_n\|_X^2 < \frac{2\pi w}{(1 - \|v\|_X^2)}.$$

Então, escolha $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno tal que,

$$q\alpha \|u_n\|_X^2 < \epsilon + b < \frac{2\pi w}{(1 - \|v\|_X^2)},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Consequentemente, podemos encontrar $1 <$

$p < \frac{1}{1-\|v\|_X^2}$ e $0 < \gamma < 2\pi w$ verificando

$$q\alpha \|u_n\|_X^2 < \gamma p < \frac{2\pi w}{(1 - \|v\|_X^2)}.$$

Além disso, veja que

$$\int_0^1 |f(u_n)|^q dx \leq C \int_0^1 e^{q\alpha u_n^2} dx = C \int_0^1 e^{q\alpha \|u_n\|_X^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_X}\right)^2} dx \leq C \int_0^1 e^{p\gamma v_n^2} dx.$$

Mas, pelo que já foi provado, (v_n) é uma sequência em X com $\|v_n\|_X = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $v_n \rightharpoonup v$ em X e $0 < \|v\|_X < 1$. Desde que, $0 < \gamma < 2\pi w$ e $1 < p < (1 - \|v\|_X^2)^{-1}$, estamos sob as hipóteses do Lema 1.12, então a sequência $(e^{\gamma v_n^2})$ é limitada em $L^p(0, 1)$. Assim, existe $K > 0$ tal que

$$\int_0^1 |f(u_n)|^q dx \leq K.$$

Isto é, $(f(u_n))$ é limitada em $L^q(0, 1)$, para algum $q > 1$. Sendo $L^q(0, 1)$ espaço de Banach reflexivo, a menos de subsequência, temos que $f(u_n) \rightharpoonup f(u)$ em $L^q(0, 1)$ e como $u_n \rightarrow u$ em $L^{q'}(0, 1)$, pela estimativa

$$\left| \int_0^1 f(u_n) u_n dx - \int_0^1 f(u) u dx \right| \leq \|f(u_n)\|_q \|u_n - u\|_{q'} + \left| \int_0^1 (f(u_n) - f(u)) u dx \right|$$

(ver (2.28)), obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(u_n) u_n dx = \int_0^1 f(u) u dx. \quad (3.15)$$

Desde que, $J'(u_n) \rightarrow 0$ em X^* e (u_n) é limitada em X , então por (2.30), $\langle J'(u_n), u_n \rangle \rightarrow 0$. Daí e por (3.15), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\langle J'(u_n), u_n \rangle + \int_0^1 f(u_n) u_n dx \right] = \int_0^1 f(u) u dx,$$

consequentemente, por (3.10)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_X^2}{2\pi} = \int_0^1 f(u) u dx = \frac{\|u\|_X^2}{2\pi} - \langle J'(u), u \rangle = \frac{\|u\|_X^2}{2\pi}.$$

Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X^2 = \|u\|_X^2$, o que por (3.11) é uma contradição. Portanto, $J(u) = c$. □

3.2 Prova do Teorema 3.1

De fato, temos que $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $J(0) = 0$. Também, temos que as conclusões dos Lemas 2.4 e 2.5 se verificam, basta ter cuidado, na prova do Lema 2.4, com escolha do α , o qual deve satisfazer $\alpha_0 < \alpha < 2\pi w$. Fixe $t > 0$ tal que $J(t\psi) < J(0)$ e $\|t\psi\|_X > \rho$. Denote por Γ o conjunto

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = t\psi\}.$$

Definindo

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0, 1]} J((\gamma(s))),$$

pela hipótese (f'_5) obtemos que $c < w/2\alpha_0$ e pelo Lema 3.2 segue-se que J satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c . Consequentemente, pelo Teorema do Passo da Montanha $(PS)_c$ (ver Teorema B.24), c é um valor crítico para J , e portanto (P) tem uma solução não trivial $u \in X$.

3.3 O Nível Minimax

Uma vez que a condição de Palais-Smale foi verificada apenas nos níveis abaixo da constante $w/2\alpha_0$, a hipótese (f'_5) foi necessária na prova do Teorema 3.1, para garantir que $c < w/2\alpha_0$ e assim concluir pelo Teorema do Passo da Montanha $(PS)_c$, a existência de uma solução não trivial para o Problema (P) . No entanto, vamos apresentar uma hipótese mais geral que substitui (f'_5) , pois como mostraremos ela é suficiente para que exista uma função $\psi \in X$, não necessariamente com norma igual a um, mas que verifica

$$\max_{t \geq 0} J(t\psi) < \frac{w}{2\alpha_0}.$$

Assim, suponha:

(H) existem constantes $p > 2$ e C_p tais que, para todo $s \geq 0$,

$$f(s) \geq C_p s^{p-1},$$

com

$$C_p > \left[\frac{(p-2)\alpha_0}{pw} \right]^{(p-2)/2} \frac{S_p^p}{(2\pi)^{p/2}},$$

onde

$$S_p = \inf_{\substack{u \in X \\ \|u\|_p = 1}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \right)^{1/2}.$$

3. Existência de Solução: Caso Crítico

Observe que S_p é positivo, pois estando $X \hookrightarrow L^p(0, 1)$ continuamente, para alguma constante $C > 0$,

$$\|u\|_p \leq C \|u\|_X, \text{ para todo } u \in X,$$

do que obtemos

$$0 < \frac{1}{C} \leq \inf_{\substack{u \in X \\ \|u\|_p=1}} \|u\|_X = S_p.$$

Ainda, com relação a S_p , é válido o seguinte Lema:

Lema 3.3. S_p é atingido por uma função não negativa $u_p \in X$.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência minimizante de funções não negativa para S_p em X (se necessário, podemos substituir u_n por $|u_n|$, desde que $\|u_n(x) - u_n(y)\| \leq |u_n(x) - u_n(y)|$). Assim,

$$\|u_n\|_p = 1 \text{ e } S_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \right)^{1/2}.$$

Então (u_n) é limitada em X . Como X é espaço de Hilbert e X está imerso compactamente em $L^p(0, 1)$, a menos de subsequência, temos

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_p \text{ em } X, \\ u_n \rightarrow u_p \text{ em } L^p(0, 1) \text{ e} \\ u_n(x) \rightarrow u_p(x) \text{ quase sempre em } (0, 1). \end{cases}$$

Consequentemente, temos

$$\begin{cases} \|u_p\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_X = S_p, \\ \|u_p\|_p = 1 \text{ e} \\ u_p(x) \geq 0 \text{ quase sempre em } (0, 1). \end{cases}$$

Por outro lado, pela definição de ínfimo $S_p \leq \|u_p\|_X$. Logo, $S_p = \|u_p\|_X$. Ou seja, S_p é atingido em $u_p \in X$. $\square$

Lema 3.4. Suponha que a hipótese (H) seja válida. Então

$$\max_{t \geq 0} J(tu_p) < \frac{w}{2\alpha_0}.$$

Demonstração. Seja $\eta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\eta(t) = \frac{t^2}{4\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u_p(x) - u_p(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \right) - \int_0^1 F(tu_p) dx.$$

Pela hipótese (H)

$$\int_0^1 F(tu_p)dx = \int_0^1 \left[\int_0^{tu_p} f(s)ds \right] dx \geq C_p \int_0^1 \left[\int_0^{tu_p} s^{p-1}ds \right] dx,$$

assim

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(tu_p)dx &\geq C_p \int_0^1 \frac{t^p}{p} u_p^p dx \\ &= \frac{C_p t^p}{p} \|u_p\|_p^p \\ &= \frac{C_p t^p}{p}. \end{aligned}$$

Daí e pelo Lema 3.3

$$\eta(t) \leq \frac{S_p^2}{4\pi} t^2 - \frac{C_p}{p} t^p \leq \max_{t \geq 0} \left(\frac{S_p^2}{4\pi} t^2 - \frac{C_p}{p} t^p \right).$$

Denote por

$$g(t) = \frac{S_p^2}{4\pi} t^2 - \frac{C_p}{p} t^p,$$

calculemos $\max_{t \geq 0} g(t)$. Observe que,

$$g'(t) = \frac{S_p^2}{2\pi} t - C_p t^{p-1}.$$

Logo, $g'(t) = 0$ se, e só se,

$$t = 0 \text{ ou } t = \left(\frac{S_p^2}{2\pi C_p} \right)^{1/(p-2)}.$$

Por outro lado,

$$g''(t) = \frac{S_p^2}{2\pi} - (p-1)C_p t^{p-2}.$$

Então, para $t = (S_p^2/2\pi C_p)^{1/(p-2)}$, note que

$$g'' \left[\left(\frac{S_p^2}{2\pi C_p} \right)^{1/(p-2)} \right] = \frac{S_p^2}{2\pi} - (p-1)C_p \left[\left(\frac{S_p^2}{2\pi C_p} \right)^{1/(p-2)} \right]^{p-2} = \frac{S_p^2}{2\pi} (2-p) < 0,$$

3. Existência de Solução: Caso Crítico

pois $p > 2$. Logo, g assume máximo global em $t = (S_p^2/2\pi C_p)^{1/(p-2)}$. Assim,

$$\begin{aligned} g \left[\left(\frac{S_p^2}{2\pi C_p} \right)^{1/(p-2)} \right] &= \frac{S_p^2}{4\pi} \left[\left(\frac{S_p^2}{2\pi C_p} \right)^{1/(p-2)} \right]^2 - \frac{C_p}{p} \left[\left(\frac{S_p^2}{2\pi C_p} \right)^{1/(p-2)} \right]^p \\ &= \frac{S_p^{2p/(p-2)}}{[4\pi(2\pi C_p)^{2/(p-2)}]} - \frac{C_p S_p^{2p/(p-2)}}{[p(2\pi C_p)^{p/(p-2)}]} \\ &= \frac{[p(2\pi C_p)^{p/(p-2)}] S_p^{2p/(p-2)} - [4\pi(2\pi C_p)^{2/(p-2)}] C_p S_p^{2p/(p-2)}}{[4\pi(2\pi C_p)^{2/(p-2)}] [p(2\pi C_p)^{p/(p-2)}]}, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} g \left[\left(\frac{S_p^2}{2\pi C_p} \right)^{1/(p-2)} \right] &= \frac{C_p^{p/(p-2)} S_p^{2p/(p-2)} [p(2\pi)^{p/(p-2)} - 2(2\pi)^{p/(p-2)}]}{C_p^{2+p/(p-2)} p [4\pi(2\pi)^{2+p/(p-2)}]} \\ &= \frac{(p-2) S_p^{2p/(p-2)} (2\pi)^{p/(p-2)}}{2p C_p^{2/(p-2)} (2\pi)^{2p/(p-2)}} \\ &= \frac{p-2}{2p} \left(\frac{S_p^{2p}}{(2\pi)^p C_p^2} \right)^{1/(p-2)}. \end{aligned}$$

isto é,

$$\max_{t \geq 0} g(t) = \frac{(p-2)}{2p} \left(\frac{S_p^{2p}}{(2\pi)^p C_p^2} \right)^{1/(p-2)}.$$

Pela hipótese (H),

$$C_p > \left[\frac{(p-2)\alpha_0}{pw} \right]^{(p-2)/2} \frac{S_p^p}{(2\pi)^{p/2}},$$

logo,

$$\frac{1}{C_p^{2/p-2}} < \frac{pw(2\pi)^{p/p-2}}{(p-2)\alpha_0 S_p^{2p/p-2}},$$

assim

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} g(t) &= \frac{(p-2)}{2p} \left(\frac{S_p^{2p}}{(2\pi)^p C_p^2} \right)^{1/(p-2)} = \frac{(p-2)}{2p} \frac{S_p^{2p/(p-2)}}{(2\pi)^{p/(p-2)}} \frac{1}{C_p^{2/p-2}} \\ &< \frac{(p-2)}{2p} \frac{S_p^{2p/(p-2)}}{(2\pi)^{p/(p-2)}} \frac{pw(2\pi)^{p/p-2}}{(p-2)\alpha_0 S_p^{2p/p-2}} \\ &= \frac{w}{2\alpha_0}; \end{aligned}$$

daí, obtemos que

$$\eta(t) < \frac{w}{2\alpha_0},$$

o que implica

$$\max_{t \geq 0} J(tu_p) = \max_{t \geq 0} \eta(t) < \frac{w}{2\alpha_0}.$$

Isso completa a prova do Lema. □

3.4 Uma aplicação

Nesta seção, faremos uma aplicação do Teorema 3.1. Para tanto, considere $p > 2$, $0 < \mu < \lambda_1/2\pi$, $\alpha_0 = 1$, e uma constante C_p tal que

$$C_p > \left[\frac{(p-2)}{pw} \right]^{(p-2)/2} \frac{S_p^p}{(2\pi)^{p/2}}.$$

Defina $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \begin{cases} \mu t + C_p t^{p-1}, & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ \mu t e^{t^2-1} + C_p t^{p-1}, & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

e $f(t) = -f(-t)$, se $t < 0$. Mostraremos que f verifica as hipóteses (f'_1) a (f'_4) e também, a hipótese (H). Então pelo Teorema 3.1, o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2} u = f(u), & \text{em } (0, 1) \\ u = 0, & \text{em } \mathbb{R} \setminus (0, 1), \end{cases}$$

admite uma solução não trivial.

Inicialmente, note que a função f , como definida, é contínua. Além disso, vejamos que a primitiva de f é dada por

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\mu t^2}{2} + \frac{C_p}{p} t^p, & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{\mu}{2} e^{t^2-1} + \frac{C_p}{p} t^p, & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

e $F(t) = F(-t)$, para $t < 0$.

De fato, se $0 \leq t \leq 1$, então

$$F(t) = \int_0^t [\mu s + C_p s^{p-1}] ds = \frac{\mu}{2} t^2 + \frac{C_p}{p} t^p.$$

Se $t > 1$, então

$$F(t) = \int_0^1 [\mu s + C_p s^{p-1}] ds + \int_1^t [\mu s e^{s^2-1} + C_p s^{p-1}] ds.$$

Note que

$$\int_0^1 [\mu s + C_p s^{p-1}] ds = \frac{\mu}{2} + \frac{C_p}{p}. \quad (3.16)$$

Agora, colocando $u = s^2 - 1$, então $du/2 = sds$, segue-se que

$$\int \mu s e^{s^2-1} ds = \frac{\mu}{2} \int e^u du = \frac{\mu}{2} e^u + C,$$

o que implica

$$\int_1^t \mu s e^{s^2-1} ds = \frac{\mu}{2} e^{t^2-1} - \frac{\mu}{2}. \quad (3.17)$$

Por outro lado,

$$\int_1^t C_p s^{p-1} ds = \frac{C_p}{p} t^p - \frac{C_p}{p}. \quad (3.18)$$

Por (3.17) e (3.18), segue-se que

$$\int_1^t [\mu s e^{s^2-1} + C_p s^{p-1}] ds = \frac{\mu}{2} e^{t^2-1} - \frac{\mu}{2} + \frac{C_p}{p} t^p - \frac{C_p}{p}. \quad (3.19)$$

Somando (3.16) e (3.19), obtemos

$$F(t) = \frac{\mu}{2} e^{t^2-1} + \frac{C_p}{p} t^p, \text{ para todo } t > 1.$$

Se $t < 0$, então $f(-t) = -f(t)$, logo pelo Lema A.6, obtemos $F(t) = F(-t)$.

Nosso próximo objetivo é mostrar que f satisfaz as hipóteses (f'_1) - (f'_4) .

Hipótese (f'_1)

Considere $t \geq 1$. Note que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{f(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\mu}{2} e^{t^2-1} + \frac{C_p}{p} t^p}{\mu t e^{t^2-1} + C_p t^{p-1}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\mu}{2} + \frac{C_p}{p} \frac{t^p}{e^{t^2-1}}}{\mu t + C_p \frac{t^{p-1}}{e^{t^2-1}}} \right) = 0,$$

pois o crescimento exponencial supera o crescimento polinomial. Assim, dado $M > 0$, existe $t_0 = t(M) > 0$, tal que

$$F(t) \leq M f(t), \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Por outro lado, se $t \leq -1$, então pelo primeiro caso

$$F(t) = F(-t) \leq M f(-t) = M(-f(t)).$$

Além disso, note que $F(t) > 0$, para todo $t \neq 0$, portanto, $0 < F(t) \leq M |f(t)|$, para todo $|t| \geq t_0$, ou seja, (f'_2) é válida.

Hipótese (f'_2)

Vejamos que $0 < 2F(t) \leq tf(t)$, para todo $t \neq 0$. De fato, se $0 < t \leq 1$,

$$2F(t) = 2 \left(\frac{\mu t^2}{2} + \frac{C_p}{p} t^p \right) = \mu t^2 + \frac{2C_p}{p} t^p.$$

Como $p > 2$, então,

$$2F(t) \leq \mu t^2 + C_p t^p = f(t)t.$$

Por outro lado, se $t > 1$, então,

$$2F(t) = 2 \left(\frac{\mu}{2} e^{t^2-1} + \frac{C_p}{p} t^p \right) = \mu e^{t^2-1} + \frac{2C_p}{p} t^p.$$

Desde que $t > 1$ e $p > 2$, segue-se que

$$2F(t) < \mu t^2 e^{t^2-1} + C_p t^p = f(t)t.$$

Se $t < 0$, então, pelo caso anterior,

$$2F(t) = 2F(-t) \leq f(-t)(-t) = -f(t)(-t) = f(t)t.$$

Além disso, como $F(t) > 0$, para todo $t \neq 0$, então a hipótese (f'_2) é satisfeita.

Hipótese (f'_3)

Uma vez que, $0 < \mu < \lambda_1/(2\pi)$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\mu}{2} t^2 + \frac{C_p}{p} t^p}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\mu}{2} + \frac{C_p}{p} t^{p-2} \right) = \frac{\mu}{2} < \frac{\lambda_1}{4\pi},$$

$$\text{logo, } \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2} < \frac{\lambda_1}{4\pi}.$$

Hipótese (f'_4)

Provaremos que para $\alpha_0 = 1$,

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \begin{cases} \infty, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ 0, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

De fato, desde que $f(-t) = -f(t)$, quando $t < 0$, basta considerar o caso em que $t \rightarrow +\infty$. Assim, para $0 < \alpha < 1$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|\mu t e^{t^2-1} + C_p t^{p-1}|}{e^{\alpha t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu t e^{t^2(1-\alpha)-1} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_p t^{p-1}}{e^{\alpha t^2}}. \end{aligned}$$

Usando, novamente, que o crescimento exponencial supera o polinomial, temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_p t^{p-1}}{e^{\alpha t^2}} = 0, \quad (3.20)$$

logo,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu t e^{t^2(1-\alpha)-1} = +\infty.$$

Agora, para $\alpha > 1$, note que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|\mu t e^{t^2-1} + C_p t^{p-1}|}{e^{\alpha t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu t}{e^{t^2(\alpha-1)+1}} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_p t^{p-1}}{e^{\alpha t^2}} = 0. \end{aligned}$$

Mas, pela regra de L'Hospital, temos

$$\frac{\mu t}{e^{t^2(\alpha-1)+1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{2(\alpha-1)t e^{t^2(\alpha-1)+1}} = 0.$$

Daí e por (3.20), obtemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = 0.$$

Assim, f tem crescimento exponencial crítico. Com isso, concluimos a prova das hipóteses (f'_1) - (f'_4) .

Finalmente, vejamos que f satisfaz a hipótese (H). Note que, se $0 \leq t \leq 1$, então

$$f(t) = \mu t + C_p t^{p-1} \geq C_p t^{p-1}$$

e também, se $t > 1$

$$f(t) = \mu t e^{t^2-1} + C_p t^{p-1} \geq C_p t^{p-1}.$$

Ou seja, $f(t) \geq C_p t^{p-1}$ para todo $t \geq 0$, e portanto (H) é válida.

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Para tornar a leitura mais simples, apresentamos neste apêndice a prova de alguns resultados utilizados nos capítulos anteriores.

Lema A.1. Suponha que (f_4) é satisfeita. Então para todo $\alpha > 0$ existe $C > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t^2}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Temos pela hipótese (f_4) que para todo $\alpha > 0$,

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $R_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(t)| < \epsilon e^{\alpha t^2}, \text{ sempre que } |t| > R_\epsilon.$$

Por outro lado, desde que f é contínua, considerando sua restrição ao compacto $[-R_\epsilon, R_\epsilon]$, temos que existe $C_1 > 0$, tal que

$$|f(t)| \leq C_1, \text{ para todo } t \in [-R_\epsilon, R_\epsilon].$$

Como $e^{\alpha t^2} \geq 1$, então $C_1 \leq C_1 e^{\alpha t^2}$, o que implica

$$|f(t)| \leq C_1 e^{\alpha t^2}, \text{ para todo } t \in [-R_\epsilon, R_\epsilon].$$

Para completar a prova escolha $C = \max\{\epsilon, C_2\}$. □

Lema A.2. Sob as hipóteses (f_1) e (f_2) , temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $t_\epsilon > 0$ tal que

$$F(t) \leq \epsilon f(t)t, \text{ para todo } |t| \geq t_\epsilon.$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. A hipótese (f_1) , nos diz que existem $t_0 > 0$ e $M > 0$ satisfazendo

$$F(t) \leq M |f(t)|, \text{ para todo } |t| \geq t_0.$$

Então, temos dois casos:

1º Caso: $t \geq t_0$.

Pela hipótese (f_2) , $f(t)t > 0$ implica $f(t) > 0$, logo

$$F(t) \leq Mf(t)$$

e assim

$$F(t) \leq \frac{M}{t} f(t)t, \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Escolhendo $t'_\epsilon = \max\{t_0, M/\epsilon\}$, obtemos

$$F(t) \leq \epsilon f(t)t, \text{ para todo } t \geq t'_\epsilon.$$

2º Caso: Seja $t \leq -t_0$.

Por (f_2) , temos que $f(t)t > 0$, logo $f(t) < 0$, e usando (f_1) , segue-se que

$$F(t) \leq M(-f(t)), \text{ para todo } t \leq -t_0,$$

daí

$$F(t) \leq \left(-\frac{M}{t}\right) f(t)t, \text{ para todo } t \leq -t_0.$$

Neste caso, escolhendo $t''_\epsilon = \max\{-t_0, -M/\epsilon\}$, segue-se que

$$F(t) \leq \epsilon f(t)t, \text{ para todo } t \leq -t''_\epsilon.$$

Finalmente, considere $t_\epsilon = \max\{t'_\epsilon, -t''_\epsilon\}$, assim teremos

$$F(t) \leq \epsilon f(t)t, \text{ para todo } |t| \geq t_\epsilon.$$

Assim, concluímos a prova do lema. □

Lema A.3. Sob as hipóteses (f_1) e (f_2) , existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(t) \leq tf(t), \text{ para todo } |t| \geq r.$$

Demonstração. É imediato. Basta considerar $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ no Lema A.2 e assim

$$F(t) \leq \epsilon f(t)t < \frac{1}{2}f(t)t, \text{ para todo } |t| \geq t_\epsilon.$$

Daí, obtemos o resultado. □

Lema A.4. Suponha que as hipóteses (f_3) e (f_4) são válidas. Dado $q > 2$, para todo $\alpha > 0$, existe $0 < \mu < \lambda_1$ e $C > 0$ tais que

$$F(t) \leq \frac{t^2\mu}{4\pi} + C|t|^q e^{\alpha t^2}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Seja $b = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2}$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{F(t)}{t^2} - b \right| < \epsilon, \text{ para todo } |t| < \delta.$$

Logo,

$$F(t) < (\epsilon + b)t^2, \text{ para todo } |t| < \delta$$

e pela condição (f_3) temos que $b < \frac{\lambda_1}{4\pi}$, então podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\epsilon + b < \frac{\lambda_1}{4\pi},$$

isso implica

$$F(t) < \frac{\lambda_1}{4\pi}t^2, \text{ para todo } |t| < \delta.$$

Consequentemente, podemos encontrar $0 < \mu < \lambda_1$ com

$$F(t) \leq \frac{\mu}{4\pi}t^2, \text{ para todo } |t| < \delta. \tag{A.1}$$

Agora, estimaremos F quando $|t| \geq \delta$. Mostraremos que

$$F(t) \leq C|t|^q e^{\alpha t^2}, \text{ para todo } |t| \geq \delta.$$

Usando o Lema A.1, existe $C_1 > 0$ tal que, para todo $\alpha > 0$

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds \leq C_1 \int_0^t e^{\alpha s^2} ds, \text{ para todo } |t| \geq \delta.$$

Daí, segue-se que

$$F(t) \leq C_1 \int_0^t e^{\alpha s^2} ds \leq C_1 e^{\alpha t^2} \int_0^t ds \leq C_1 |t| e^{\alpha t^2}, \text{ para todo } |t| \geq \delta.$$

Isto é,

$$F(t) \leq C_1 |t| e^{\alpha t^2}, \text{ para todo } |t| \geq \delta. \quad (\text{A.2})$$

Se $\delta \geq 1$, por (A.2) e usando o fato de $q > 2$, obtemos

$$F(t) \leq C_1 |t|^q e^{\alpha t^2}, \text{ para todo } |t| \geq \delta.$$

Suponha que δ seja suficientemente menor que 1 e seja $R_0 > 0$ suficientemente maior que 1. Novamente por (A.2) e usando que $q > 2$, temos

$$F(t) \leq C_1 |t|^q e^{\alpha t^2}, \text{ para todo } |t| > R_0.$$

Agora, basta estimar F nos intervalos $[\delta, R_0]$ e $[-R_0, -\delta]$. Note que sendo F contínua, então $F(t)/e^{\alpha t^2} |t|^q$ é contínua, logo limitada no compacto $[\delta, R_0]$, assim, existe $C_2 > 0$ tal que

$$F(t) \leq C_2 e^{\alpha t^2} |t|^q, \text{ para todo } t \in [\delta, R_0].$$

Analogamente, podemos obter uma constante $C_3 > 0$ com

$$F(t) \leq C_3 e^{\alpha t^2} |t|^q, \text{ para todo } t \in [-R_0, -\delta].$$

Finalmente, considerando $C = \max\{C_1, C_2, C_3\}$ e usando (A.1), obtemos que

$$F(t) \leq \frac{\mu}{4\pi} t^2 + C |t|^q e^{\alpha t^2}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Isso completa a prova do lema. □

Lema A.5. Suponha que (f_1) e (f_2) se verificam. Então existem constantes $K, C > 0$ e $\mu > 2$ satisfazendo

$$F(t) \geq K |t|^\mu - C, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. De fato, pelo Lema A.3, existem $\mu > 2$ e $r > 0$, tais que

$$0 < \mu F(t) \leq t f(t), \text{ para todo } |t| \geq r.$$

Primeiro analisemos o caso em que $t \geq r$. Note que

$$\frac{\mu}{t} \leq \frac{f(t)}{F(t)}, \text{ para todo } t \geq r$$

então

$$\int_r^t \frac{\mu}{s} ds \leq \int_r^t \frac{f(s)}{F(s)} ds = \int_r^t \frac{dF(s)}{ds} \frac{1}{F(s)} ds,$$

o que implica

$$\int_r^t \frac{\mu}{s} ds \leq \int_r^t \frac{dF(s)}{F(s)}.$$

Consequentemente

$$\mu (\ln t - \ln r) \leq \ln F(t) - \ln F(r),$$

logo,

$$\ln \left(\frac{t}{r} \right)^\mu \leq \ln \frac{F(t)}{F(r)}.$$

Desde que a função exponencial é crescente, obtemos que

$$\frac{t^\mu}{r^\mu} \leq \frac{F(t)}{F(r)},$$

daí

$$F(t) \geq \left(\frac{F(r)}{r^\mu} \right) t^\mu.$$

Pondo $K_1 = F(r)/r^\mu$, temos

$$F(t) \geq K_1 t^\mu \text{ para todo } t \geq r. \quad (\text{A.3})$$

Agora, consideremos a situação em que $t < -r$. Novamente pelo Lema A.3,

$$\frac{\mu}{t} \geq \frac{f(t)}{F(t)}, \quad \text{para todo } t \leq -r.$$

Integrando no intervalo $[t, -r]$, similarmente ao caso anterior, obtemos

$$\mu (\ln |-r| - \ln |t|) \geq \ln F(-r) - \ln F(t),$$

isto é,

$$\mu (\ln r - \ln(-t)) \geq \ln F(-r) - \ln F(t),$$

logo,

$$\ln \left(\frac{r}{(-t)} \right)^\mu \geq \ln \frac{F(-r)}{F(t)}.$$

Consequentemente,

$$\left(\frac{r}{(-t)} \right)^\mu \geq \frac{F(-r)}{F(t)}$$

isso implica

$$F(t) \geq \frac{F(-r)}{r^\mu} (-t)^\mu.$$

Tomando $K_2 = F(-r)/r^\mu$, temos

$$F(t) \geq K_2(-t)^\mu, \text{ para todo } t \leq -r. \quad (\text{A.4})$$

Seja $K = \min\{K_1, K_2\}$, então por (A.3) e (A.4) segue-se

$$F(t) \geq K |t|^\mu, \text{ para todo } |t| \geq r. \quad (\text{A.5})$$

Agora, desde que F é contínua e $[-r, r]$ é compacto, então para alguma constante $A > 0$, temos que

$$-A \leq F(t) \leq A, \text{ para todo } t \in [-r, r].$$

Seja $C > 0$ de modo que

$$C \geq A + K |r|^\mu,$$

daí,

$$F(t) \geq -A \geq K |r|^\mu - C \geq K |t|^\mu - C, \text{ para todo } t \in [-r, r]. \quad (\text{A.6})$$

Por outro lado, por (A.5)

$$F(t) \geq K |t|^\mu \geq K |t|^\mu - C, \text{ para todo } |t| \geq r. \quad (\text{A.7})$$

Portanto, combinando (A.6) e (A.7) temos que $F(t) \geq K |t|^\mu - C$, para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Lema A.6. Se a não linearidade f for ímpar, então o funcional J é par.

Demonstração. De fato, note que sendo f é contínua, então sua restrição ao intervalo $[-a, a]$ é integrável, e como f ímpar, $\int_{-a}^a f(t)dt=0$. Assim,

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt,$$

o que implica

$$\int_0^a f(t)dt = - \int_{-a}^0 f(t)dt = \int_0^{-a} f(t)dt.$$

Daí, para todo $u \in X$ temos que

$$\begin{aligned}
 J(-u) &= \frac{\| -u \|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 F(-u) dx \\
 &= \frac{\| u \|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 \left[\int_0^{-u} f(t) dt \right] dx \\
 &= \frac{\| u \|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 \left[\int_0^u f(t) dt \right] dx \\
 &= \frac{\| u \|_X^2}{4\pi} - \int_0^1 F(u) dx = J(u).
 \end{aligned}$$

Ou seja, o funcional J é par. □

Apêndice B

Resultados Gerais

Enunciamos aqui, alguns resultados e definições necessários ao entendimento deste trabalho.

B.1 Resultados de Medida e Integração

No que segue, considere $(\Omega, \mathbb{X}, \mu)$ um espaço de medida. Vamos denotar o espaço de todas as funções $\mathbb{X}$ –mensuráveis de Ω em $\bar{\mathbb{R}}$ por $M(\Omega, \mathbb{X})$ e o espaço de todas funções $\mathbb{X}$ –mensuráveis não negativas de Ω em $\bar{\mathbb{R}}$ por $M^+(\Omega, \mathbb{X})$. Dado $1 \leq p \leq \infty$, diremos que q é o expoente conjugado de p quando $1/p + 1/q = 1$.

Corolário B.1. ([2], Corolário 2.10). Se (f_n) é uma sequência em $M(\Omega, \mathbb{X})$ que converge quase sempre para f em Ω , então f pertence a $M(\Omega, \mathbb{X})$.

Teorema B.2. ([2], Teorema 4.6 (Convergência Monótona)). Se (f_n) é uma sequência crescente de funções em $M^+(\Omega, \mathbb{X})$ que converge quase sempre para uma função f , então

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Lema B.3. ([2], Lema 4.8 (Fatou)). Se (f_n) é uma sequência funções em $M^+(\Omega, \mathbb{X})$, então

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Corolário B.4. ([2], Corolário 4.10). Suponha que $f \in M^+(\Omega, \mathbb{X})$. Então $f(x) = 0$ quase sempre em Ω se, e somente se,

$$\int_{\Omega} f dx = 0.$$

Teorema B.5. ([4], Teorema 4.2 (Convergência Dominada de Lebesgue)). Seja (u_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo

(a) $u_n(x) \rightarrow u(x)$ quase sempre em Ω ;

(b) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n(x)| \leq g(x) \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Então, $u \in L^1(\Omega)$ e $\|u_n - u\|_1 \rightarrow 0$.

Teorema B.6. ([4], Teorema 4.5 (Fubini)). Suponha que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(x, y) dy dx.$$

Lema B.7. ([4], Desigualdade de Young). Sejam $1 < p < \infty$ e q expoentes conjugados. Então,

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \text{ com } a \geq 0, b \geq 0.$$

Teorema B.8. ([4], Desigualdade de Hölder generalizada). Suponha que $f_1, f_2, \dots, f_k$ são funções tais que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), i = 1, 2, \dots, k \text{ com } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então,

$$f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega) \text{ e } \|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \dots \|f_k\|_{p_k}.$$

Em particular, se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q$, então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se verifica a Desigualdade de Interpolação

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_q^{1-\theta}, \quad (\text{B.1})$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Teorema B.9. ([4], Teorema 4.9). Seja (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tais que $\|u_n - u\|_p \rightarrow 0$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que

(a) $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ quase sempre em $L^p(\Omega)$;

(b) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ quase sempre em $L^p(\Omega)$.

Definição B.10. ([16], Definição 1.1.1). Sejam $1 < p < \infty$ e $q = p/(p-1)$. Uma sequência $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ converge fracamente para $u \in L^p(\Omega)$, escrevemos

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ em } L^p(\Omega),$$

quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n v dx = \int_{\Omega} u v dx, \text{ para toda } v \in L^q(\Omega).$$

Lema B.11. ([8], **Lema 2.1**). Seja (u_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ convergindo para u em $L^1(\Omega)$. Suponha que $f(u_n(x))$ e $f(u(x))$ estão também em $L^1(\Omega)$. Se

$$\int_{\Omega} |f(u_n(x))u_n(x)dx| \leq C$$

então, $f(u_n)$ converge para $f(u)$ em $L^1(\Omega)$.

Teorema B.12. ([11], **Teorema 6**). $C_0^\infty(0, 1)$ é denso em $H^{1/2}(0, 1)$.

Proposição B.13. ([9], **Proposição 3.6**). Para todo $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ tem-se

$$\|(-\Delta)^{1/4}u\|_{L^2(\mathbb{R})} = (2\pi)^{-1/2} [u]_{H^{1/2}(\mathbb{R})}.$$

Teorema B.14. ([9], **Teorema 6.10**). Dado $u \in H^{1/2}(0, 1)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q(0,1)} \leq C \|u\|_{H^{1/2}(0,1)}, \text{ para todo } q \in [1, \infty).$$

Isto é, $H^{1/2}(0, 1)$ está imerso continuamente em $L^q(0, 1)$, para todo $q \in [1, \infty)$.

Teorema B.15. ([9], **Teorema 7.1**). Seja T subconjunto limitado de $L^2(0, 1)$ e suponha que

$$\sup_{u \in T} \int_{(0,1) \times (0,1)} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy < \infty.$$

Então, T é pré-compacto em $L^q(0, 1)$ para todo $q \in [1, 2]$.

B.2 Resultados de Análise Funcional

Proposição B.16. ([4], **Proposição 3.5**). Seja X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em X . Se $x_n \rightharpoonup x$ em X , então $\|x_n\|_X$ é limitada e

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_X.$$

Teorema B.17. ([19], **Teorema 16.5**). Se X é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada em X possui uma subsequência fracamente convergente.

Proposição B.18. ([4], **Proposição 3.30**). Seja X é um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja (x_n) uma sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$ em X e

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_X \leq \|x\|_X.$$

Então, $x_n \rightarrow x$ em X . Em outras palavras, se $x_n \rightharpoonup x$ em X e $\|x_n\|_X \rightarrow \|x\|_X$ em X , então $x_n \rightarrow x$ em X .

Teorema B.19. ([19], Teorema 18.7). *Se Y é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert X , então*

$$X = Y \oplus Y^\perp.$$

B.3 Resultados da Teoria dos Pontos Críticos

Definição B.20. ([13], Definição 2.2). Sejam E um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale, a qual denotamos por (PS), se toda sequência (u_n) em E tal que

$$|I(u_n)| \leq C \text{ e } I'(u_n) \rightarrow 0,$$

possui uma subsequência fortemente convergente em E .

Definição B.21. ([24], Definição 1.6). Seja E um espaço de Banach, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que I satisfaz a condição $(PS)_c$, se toda sequência (u_n) em E , tal que

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ e } I'(u_n) \rightarrow 0,$$

possui uma subsequência fortemente convergente em E .

Teorema B.22. ([21], Teorema 2.2 (Passo da Montanha Clássico)). *Sejam E um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS). Suponha que $I(0) = 0$ e*

- (i) *existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ e*
- (ii) *existe $e \in E \setminus B_\rho$, tal que $I(e) \leq 0$.*

Então, I possui um valor crítico $c \geq \alpha$. Além disso, c pode ser caracterizado como

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \tag{B.2}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Teorema B.23. ([21], Teorema 9.12 (Passo da Montanha Simétrico)). *Sejam E um espaço de Banach de dimensão infinita e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ par, satisfazendo (PS) e $I(0) = 0$. Se $E = V \oplus W$, onde V tem dimensão finita, e*

- (i) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$ e
- (ii) para cada subespaço $V \subset E$ com $\dim V < \infty$, existe um $R = R(V)$ tal que $I \leq 0$ sobre $V \setminus B_{R(V)}$,

então J possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

Teorema B.24. ([17], Teorema 4.10 (Passo da Montanha $(PS)_c$)) *Sejam E um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e*

- (i) *existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ e*
- (ii) *existe $e \in E \setminus B_\rho$, tal que $I(e) \leq 0$.*

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Se I satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico de I e $c > \alpha$.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, Robert A. *Sobolev spaces*. New York: Academic Press, 1975.
- [2] BARTLE, Robert G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [3] BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. *Fundamentos da Análise Funcional*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [4] BREZIS, Haim. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2010.
- [5] CAFFARELLI, Luis; SILVESTRE, Luis. *An extension problem related to the fractional Laplacian*. Comm. Partial Differential Equations, 32 (2007), 1245-1260.
- [6] CHENG, Ming. *Bound state for the fractional Schrödinger equation with unbounded potential*. J. Math. Phys., 53 (2012), 043507.
- [7] COSTA, David G. *An invitation to variational methods in differential equations*. Boston: Birkhäuser, 2007.
- [8] DE FIGUEIREDO, Djairo Guedes; MIYAGAKI, Olímpio Hiroshi; RUF, Bernhard. *Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range*. Calc. Var. Partial Differential Equations 3 (1995), 139-153.
- [9] DI NEZZA, Eleonora; PALATUCCI, Giampiero; VALDINOCI, Enrico. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev Spaces*. Bull. Sci. Math. 136 (2012), 521-573.
- [10] DIPIERRO, Serena. PALATUCCI, Giampiero. VALDINOCI, Enrico. *Existence and symmetry results for a Schrödinger type problem involving the fractional Laplacian*. Matematiche (Catania) 68 (2013), 201-216.
- [11] FISCELLA, Alessio; SERVADEI, Raffaella; VALDINOCI, Enrico. *Density properties for fractional Sobolev Spaces*. Annal. Acad. Scient. Fenn. Math. 40 (2015), 235-253.

- [12] IANNIZZOTTO, Antonio; SQUASSINA, Marco. *1/2-Laplacian problems with exponential nonlinearity*. J. of Math. Anal. and Appl. 414 (2014), 372-385.
- [13] JABRI, Youssef. *The Mountain Pass Theorem*. New York: Cambridge, 2003.
- [14] KAVIAN, Otared. *Introduction à la Théorie des Points Critiques*. Paris: Springer-Verlag, 1993.
- [15] KOSONO, Hideo; SATO, Tokushi; WADADE, Hidemitsu. *Upper bound of the best constant of the Trudinger-Moser inequality and its application to the Gagliardo-Nirenberg inequality*. Indiana University Mathematics Journal 1401 (2004), 41-47.
- [16] LAWRENCE, C. Evans. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
- [17] MAWHIN, Jean; WILLEM, Michel. *Point Theory and Hamiltonian Systems*. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [18] MEDEIROS, Luis Adauto da Justa ; MIRANDA, Manuel Antolino Milla. *Espaços de Sobolev*. UFRJ. IM, 2000.
- [19] OLIVEIRA, César R. *Introdução à Análise Funcional*. 2 ed. Rio de Janeiro: Impa, 2008.
- [20] OZAWA, Tohru. *On critical cases of Sobolev's inequalities*. J. of Funct. Anal. 127 (1995), 259-269.
- [21] RABINOWITZ, Paul H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., vol. 65, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [22] SECCHI, Simone. *Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$* . J. Math. Phys. 54 (2013), 031501.
- [23] SERVADEI, Raffaella. VALDINOCI, Enrico. *Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators*. J. Math. Anal. Appl. 389 (2012), 887-898.
- [24] WILLEM, Michel. *Minimax Theorems*. Boston: Birkhäuser, 1996.