

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Álgebras Simétrica e de Rees do Módulo de Diferenciais de Kähler

Franciélia Limeira de Sousa

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2015

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Álgebras Simétrica e de Rees do Módulo de Diferenciais de Kähler

por

Franciélia Limeira de Sousa

sob a orientação do

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

João Pessoa – PB
Julho de 2015

S725a Sousa, Franciélia Limeira de.
 Álgebras simétrica e de Rees do módulo de diferenciais de
 Kähler / Franciélia Limeira de Sousa.- João Pessoa, 2015.
 71f.
 Orientador: Cleto Brasileiro Miranda Neto
 Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
 1. Matemática. 2. Álgebra simétrica. 3. Álgebra de Rees.
 4. Módulos diferenciais de Kähler.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Álgebras Simétrica e de Rees do Módulo de Diferenciais de Kähler

por

Franciélia Limeira de Sousa ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

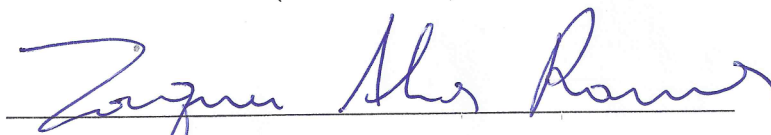
Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 16 de julho de 2015.

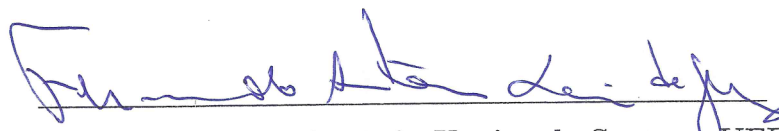
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos – UFS
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES- Cordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa do Nível Superior durante a elaboração desta dissertação.

À minha família.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, minha Fonte de perseverança.

Aos meus pais, Gilvaneres Limeira de Sousa e Francisco Ferreira de Sousa, por sempre me apoiarem em todos os meus projetos e por todos os ensinamentos que levo para vida. Aos meus irmãos Gilvânia, Fabrício e Daniel, e a toda minha família.

Aos meus colegas de turma Diego Félix, Mauri Pereira, Rossane Gomes e Caio Ilan Rodrigues pela ajuda nas disciplinas, as muitas horas de estudos compartilhadas e pela amizade.

A Tonires Sales de Melo, a quem recorri por diversas vezes quando tinha problemas com o Latex. Todo apoio, incentivo e principalmente sua amizade foram muito importantes durante esse período.

Aos meus amigos da graduação Ivan Bezerra, Daniel Acácio, Ronivon Alves, Eduardo Tomás e João Batista, e aos professores Tonires, Gilberto Fernandes e Francisco José de Andrade, que tanto me incentivaram e torceram por essa realização.

As amigas Ana Cristina Ferreira e Kathiuscia Fernandes, por toda a força, companheirismo e também pelos muitos momentos engraçados que vivemos. Tudo isso constituiu um fator muito importante para que eu conseguisse levar adiante a construção desse trabalho.

Ao professor Cleto Brasileiro, por ser meu orientador e por toda ajuda, conselhos e confiança.

Aos professores Fernando Xavier e Zaqueu Ramos, por participarem da banca.

Aos meus professores do mestrado que tanto contribuíram para meu crescimento: Elisandra Moraes, Fernando Xavier, Lizandro Challapa, Alberto Masayoshi e Cleto Brasileiro.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que contribuíram de alguma forma para a conclusão do trabalho.

Resumo

Nesta dissertação, inicialmente apresentamos noções gerais sobre a álgebra simétrica e a álgebra de Rees no contexto amplo de módulos, e consideramos particularmente a situação especial na qual o dado módulo possui apresentação linear. Na sequência, o principal objetivo é o estudo de tais álgebras de *blowup* no caso em que o módulo é o celebrado módulo de diferenciais de Kähler, tendo como foco a investigação de uma interessante versão da persistente *Conjectura de Berger* para a álgebra simétrica, bem como o estudo de propriedades fundamentais como: integridade, Cohen-Macaulicidade e normalidade; tais propriedades são também investigadas de forma especial no caso da álgebra de Rees (do módulo de diferenciais), evidenciando inclusive a conexão com as chamadas *condições de Fitting*.

Palavras-chave: Álgebra Simétrica, Álgebra de Rees, módulo de diferenciais de Kähler.

Abstract

In this dissertation, we initially present an overview about the symmetric and the Rees algebras in the wide context of modules, and we consider particularly the special situation in which the given module possesses a linear presentation. In the sequel, the main goal is the study of such *blowup* algebras in the case where the module is the celebrated *module of Kähler differentials*, the focus being given on the investigation of an interesting version of the long-standing *Berger's Conjecture* for the symmetric algebra, as well as on the study of fundamental properties such as: integrality, Cohen-Macaulayness and normality; these properties are also investigated in a special way in the case of the Rees algebra (of the differential module), highlighting the connection to the so-called *Fitting conditions*.

Keywords: Symmetric Algebra, Rees Algebra, Module of Kähler Differentials.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	4
1.1 Conceitos Básicos	4
1.1.1 Geradores e apresentação de módulos	4
1.1.2 Módulo projetivo e dimensão projetiva	6
1.1.3 Ideais de Fitting, módulos livre de torção e reflexivos	7
1.2 Sistema de Parâmetros, Sequências Regulares e Módulos Cohen-Macaulay	10
1.3 Álgebras Tensorial e Simétrica de um Módulo	16
1.4 Álgebra de Rees de um Módulo	19
2 Derivações e Diferenciais de Kähler	23
2.1 Derivações	23
2.2 O Módulo de Diferenciais de Kähler	24
2.2.1 Sequências exatas fundamentais e critério jacobiano	27
3 Álgebra Simétrica e o Dual Jacobiano	32
4 Álgebra Simétrica do Módulo de Diferenciais de Kähler	39
5 Álgebra de Rees do Módulo de Diferenciais de Kähler	51
A Resultados Auxiliares	59
Referências Bibliográficas	63

Notações

Todos os anéis considerados neste trabalho, a menos de menção explícita em contrário, são comutativos e com identidade. Usamos $(a_1, \dots, a_n)$ para denotar o ideal gerado por elementos $a_1, \dots, a_n$ de um anel A . Quando um anel possui apenas um ideal maximal $\mathfrak{m}$, dizemos que este anel é *local* e o denotamos por $(A, \mathfrak{m})$.

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho. Usamos as letras maiúsculas A e M para denotar um anel e um módulo sobre este anel, respectivamente.

$A \setminus B$	conjunto diferença entre A e B
$A_{\mathfrak{p}}$	anel de frações de A com respeito ao sistema multiplicativo $S = A \setminus \mathfrak{p}$
$\text{Ker}(-)$	núcleo de um homomorfismo
$\text{Im}(-)$	imagem de um homomorfismo
$\text{Coker}(-)$	conúcleo de um homomorfismo
$\text{Min}(A)$	o conjunto dos ideais primos minimais de A
$\text{Ass}(M)$	conjunto dos ideais primos associados de M
$(0 :_A m)$	ideal anulador do elemento $m \in M$
$\text{Ann}(M)$	ideal anulador de M
$I : J$	ideal condutor de J em I , com I, J ideais
$\text{Supp}(M)$	conjunto dos ideais primos de A que contêm $\text{Ann}(M)$ se M é f.g.
$\mathcal{Z}(M)$	conjunto dos elementos de A que são divisores de zero de M
$\mu(M)$	número minimal de geradores de M , quando fizer sentido
$\dim(\)$	dimensão de Krull; dimensão de espaço vetorial
$\text{gr.tr}_F(K)$	grau de transcendência de K sobre F
$\text{char}(k)$	característica do corpo k
$\text{ht}(\)$	altura de um ideal
$V(I)$	conjunto dos ideais primos de A que contêm I
$I_t(\varphi)$	ideal gerado pelos subdeterminantes de ordem t de uma matriz φ
$\text{pd}(M)$	dimensão projetiva do módulo M
$\square$	denota o final de uma demonstração

Introdução

A noção de *álgebra de Rees*, originalmente definida e largamente explorada no contexto de ideais, tem sido generalizada para módulos por diversos autores, uma vez que tal generalização (certamente não-trivial) propicia um significativo conjunto de problemas se comparado ao contexto tradicional de ideais. Existe uma variedade de definições possíveis para a álgebra de Rees de um módulo; a definição que mais se identifica a do caso clássico é quando o módulo possui posto (genérico, constante), de forma que vê-se a álgebra de Rees como o quociente da álgebra simétrica pelo seu ideal de torção.

Neste trabalho, baseado principalmente no artigo *Tangent Algebras* de Simis, Ulrich e Vasconcelos ([21]), estudamos a álgebra de Rees e seu predecessor, a álgebra simétrica, do módulo de diferenciais de Kähler, $\Omega_{A|k}$, onde A é um anel reduzido e essencialmente de tipo finito sobre um corpo perfeito k . Nestas condições $\Omega_{A|k}$ possui posto. Classicamente, as propriedades de $\Omega_{A|k}$ estão fortemente entrelaçadas ao lugar das singularidades de A .

A dissertação está dividida em cinco capítulos. Passamos a descrevê-la quanto ao conteúdo de cada capítulo.

Os dois primeiros capítulos reúnem pré-requisitos. O *Capítulo 1* contém as principais noções de Álgebra Comutativa que utilizamos, incluindo as definições das álgebras simétrica e de Rees de um módulo, bem como resultados gerais sobre essas álgebras. Algumas demonstrações foram omitidas para que ao final, não tivéssemos um trabalho demasiadamente extenso. No entanto, foram indicadas referências cuidadosamente, onde o leitor pode encontrá-las em detalhes.

O *Capítulo 2* é dedicado ao módulo de diferenciais de Kähler. Inicialmente definimos derivações, apresentamos algumas de suas propriedades estruturais e relacionamos o módulo de derivações com o módulo $\Omega_{A|k}$. Em seguida, abordamos as sequências exatas fundamentais e uma versão do critério jacobiano. Tais conceitos são de grande importância para nosso estudo da álgebra simétrica e de Rees de $\Omega_{A|k}$.

O *Capítulo 3* é dedicado ao tratamento da álgebra simétrica de um módulo com apresentação linear, via o formalismo do *dual jacobiano* definido por Simis, Ulrich e Vasconcelos no artigo *Jacobian Dual Fibrations* ([20]). Tal técnica permite o estudo

de um anel d -dimensional por meio de um módulo finitamente gerado por d elementos sobre outro anel. No Teorema 3.4, obtemos uma recíproca para a tão conhecida relação entre as propriedades de Cohen-Macaulicidade e integridade da álgebra simétrica, com as condições de Fitting $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_1$.

O *Capítulo 4* se concentra no estudo da álgebra simétrica do módulo $\Omega_{A|k}$. Em geral, dado um anel Noetheriano R e $D \subset R$ ideal tal que $\text{Sym}_A(D/D^2)$ é livre de torção sobre $A = R/D$, assumindo que D é genericamente interseção completa e A reduzido, temos $\text{Sym}_A(D/D^2)$ anel reduzido. A recíproca em geral não é verdade. O principal teorema desse capítulo (Teorema 4.3) obtém a recíproca para $\mathbb{S}_{A|k}$, por meio de uma condição nas equações que definem o anel A . Os demais resultados do capítulo podem ser vistos como uma versão, para a álgebra simétrica, da conjectura de Berger ([3]), na qual temos $\mathbb{S}_{A|k}$ reduzido se, e somente se, $\Omega_{A|k}$ é A -livre de torção.

Finalmente, no *Capítulo 5* estudamos o comportamento da álgebra de Rees $\mathbb{R}_{A|k}$. O primeiro resultado lida com o caso em que A é localmente uma interseção completa. Sob esta condição, o módulo $\Omega_{A|k}$ tem dimensão projetiva finita e no máximo igual a 1. O Teorema 5.1 mostra que a Cohen-Macaulicidade é uma propriedade restritiva para $\mathbb{R}_{A|k}$. A parte final do capítulo trata da normalidade de $\mathbb{R}_{A|k}$, onde a condição $\mathcal{F}_2$ desempenha um papel fundamental e também aborda o fecho reflexivo de $\mathbb{R}_{A|k}$. Um critério básico geral para igualdade $\mathcal{R}_A(M) = \mathcal{B}_A(M)$ é apresentado na Proposição 5.2, assumindo a normalidade de $\mathcal{R}_A(M)$ e a condição (S_2) de Serre. É conhecido que para um módulo M , a condição $\mathcal{F}_2$ vale se $\text{Sym}_A(M) = \mathcal{B}_A(M)$. Aqui, vemos quando a recíproca vale em geral e particularmente para $\mathbb{R}_{A|k}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados de Álgebra Comutativa, mais especificamente sobre a teoria de módulos (finitamente gerados), necessários para o desenvolvimento deste trabalho. As principais referências utilizadas nessa seção foram [12], [4] e [13].

1.1 Conceitos Básicos

1.1.1 Geradores e apresentação de módulos

Sejam A um anel e M um módulo sobre A ou, abreviadamente, um A -módulo. Podemos especificar um A -módulo por meio de seus geradores e relações. Dizemos que M é finitamente gerado (sobre A), se existe um subconjunto finito $\{m_1, \dots, m_n\} \in M$, chamado de *conjunto de geradores de M* , tal que $M = \sum_{i=1}^n Am_i$. Ou seja, para cada $m \in M$ existem $a_1, \dots, a_n \in A$, tais que $m = a_1m_1 + \dots + a_nm_n$. Além disso, dizemos que esse conjunto é minimal quando m_j não pertence ao A -módulo gerado por $\{m_1, \dots, m_{j-1}, m_{j+1}, \dots, m_n\}$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Proposição 1.1. Um A -módulo M é finitamente gerado se, e somente se, $M \simeq A^n/N$ para algum $n \geq 1$ e A -submódulo $N \subset A^n$.

Demonstração. Suponhamos M finitamente gerado, isto é, $M = \sum_{i=1}^n Am_i$. Note que $\{e_1, \dots, e_n\}$, onde $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, é um conjunto de geradores de A^n . Definimos, de maneira natural, uma aplicação φ de A^n sobre M , tal que o i -ésimo elemento e_i é levado por φ no i -ésimo gerador m_i de M . Assim, $\varphi(\sum a_i e_i) = \sum a_i m_i$. Claramente φ é A -linear e sobrejetora. Tomemos $N = \text{Ker}(\varphi)$. Pelo bem conhecido Teorema dos Isomorfismos, temos $A^n/N \simeq M$.

Reciprocamente, suponhamos que existe um isomorfismo $f : A^n/N \rightarrow M$. Agora

consideramos a aplicação A -linear e sobrejetora $g = f \circ \pi$, onde $\pi : A^n \rightarrow A^n/N$ é a projeção canônica. Logo, para cada $m \in M$ existem $a_1, \dots, a_n \in A$, tais que $m = g(\sum a_i e_i)$ e por A -linearidade, $m = \sum a_i g(e_i)$. Portanto, $\{g(e_1), \dots, g(e_n)\}$ é um conjunto finito de geradores de M . $\square$

Um conjunto $\{m_1, \dots, m_n\}$ finito é dito linearmente independente sobre A , se ao escrevermos uma combinação linear nula, $0 = \sum_{i=1}^n a_i m_i \in M$, implicar que $a_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Assim como para espaços vetoriais, se $\{m_1, \dots, m_n\}$ é um conjunto de geradores de M e linearmente independente sobre A , dizemos que esse conjunto é uma *base* para M . Neste caso, M é denominado um *A -módulo livre* ou *A -livre*. A proposição anterior nos dá o seguinte corolário:

Corolário 1.2. Um A -módulo M é livre se, e somente se, $A^n \simeq M$ para algum $n \geq 1$, o qual chamamos *posto* de M (sobre A).

Exemplo 1.1. Alguns exemplos de módulos livres:

- (i) O A -módulo A^n é, evidentemente, livre. Uma base é $\{e_1, \dots, e_n\}$, a qual definimos anteriormente, chamada de base canônica de A^n . Em particular, quando $A = K$ é um corpo e V um K -espaço vetorial com $\dim_K(V) = r < \infty$, então $V \simeq K^r$ e desse modo, V é K -módulo livre de posto r .
- (ii) Um ideal $I \subseteq A$ não-nulo é A -livre se, e somente se, $I = (x)$ com $x \notin \mathcal{Z}(A)$. De fato, se I é A -livre existem, pela proposição anterior, $r \geq 1$ e um isomorfismo $\varphi : A^r \rightarrow I$. Agora, suponhamos, por absurdo, que $r = 2$. Sejam $\{x_1, x_2\}$ uma base de I e $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de A^2 , com $\varphi(e_1) = x_1$ e $\varphi(e_2) = x_2$. Note que $\varphi(x_2 e_1 - x_1 e_2) = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$. Daí, como φ é injetiva, temos $x_2 e_1 - x_1 e_2 = 0$. Uma vez que e_1 e e_2 são linearmente independentes sobre A , segue-se que $x_1 = x_2 = 0$, mas $I \neq 0$. Logo, $I = (x)$. Suponhamos que $x \in \mathcal{Z}(A)$. Então, existe $b \in A \setminus \{0\}$ tal que $bx = 0$. Desse modo, $\varphi(b) = bx = 0 \Rightarrow b = 0$, contradição.

Reciprocamente, suponha $I = (x)$ com $x \notin \mathcal{Z}(A)$ e considere $\varphi : A \rightarrow I$, tal que $\varphi(a) = ax$, $\forall a \in A$. Se $a_1, a_2 \in A$ são tais que $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$, então $a_1 x = a_2 x \Rightarrow (a_1 - a_2)x = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$. Logo, φ é injetiva e claramente também é sobrejetiva. Assim, $I \simeq A$ e portanto, I é A -livre.

Sejam A um anel Noetheriano e M um A -módulo finitamente gerado. Considere um conjunto de geradores $\{m_1, \dots, m_n\}$ de M e defina a aplicação $\varphi : A^n \rightarrow M$ A -linear, de modo que $\varphi(a_1, \dots, a_n) = a_1 m_1 + \dots + a_n m_n$. Essa aplicação fornece a

sequência exata natural,

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

O módulo $\text{Ker}(\varphi)$ é denominado o *módulo de relações dos geradores* $m_1, \dots, m_n$ e o denotamos por $\text{Syz}(M)$. Explicitamente, $\text{Syz}(M) = \{(b_1, \dots, b_n) \in A^n \mid \sum_{i=1}^n b_i m_i = 0\}$ e cada $(b_1, \dots, b_n) \in \text{Syz}(M)$ é chamado de *sizigia* de M .

Sendo A um anel Noetheriano, o A -módulo $\text{Syz}(M)$ é finitamente gerado, digamos por m elementos. Como antes, podemos considerar a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \text{Syz}(\text{Syz}(M)) = \text{Syz}_2(M) \longrightarrow A^m \longrightarrow \text{Syz}(M) \longrightarrow 0$$

e por composição obtemos a sequência exata

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

chamada de *apresentação livre* de M . A aplicação $A^m \longrightarrow A^n$ pode ser descrita em relação a bases de A^n e A^m por uma matriz $n \times m$, com entradas em A , a qual chamamos de *matriz de apresentação* de M .

O processo acima pode ser continuado, induzindo uma sequência exata longa de módulos livres,

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{n_i}} A^{n_i} \longrightarrow \dots A^{n_1} \xrightarrow{\varphi_{n_1}} A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

chamada de *resolução livre* de M . Eventualmente, esta sequência pode ser infinita e truncada em qualquer etapa, fornecendo-nos

$$0 \longrightarrow \text{Syz}_n(M) = \text{Ker}(\varphi_{n_{i-1}}) \longrightarrow A^{n_{i-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

a qual deixa de ser uma resolução livre, a menos que $\text{Syz}_n(M)$ seja um módulo livre. Supondo que A é um anel local, tomando $n = \mu(M)$ e $n_i = \mu(\text{Syz}_i(M))$, tal resolução livre é minimal, para cada $n \geq 1$. O número mínimo de geradores $n_i = \mu(\text{Syz}_i(M))$ é chamado o *i-ésimo número de Betti* de M , denotado por $\beta_i(M)$.

1.1.2 Módulo projetivo e dimensão projetiva

Definição 1.1. Um módulo P é *projetivo* se para todo homomorfismo sobrejetor $\alpha : M \twoheadrightarrow N$ e toda aplicação $\beta : P \longrightarrow N$ existe uma aplicação $\gamma : P \longrightarrow M$, tal que $\beta = \alpha \circ \gamma$.

Todo módulo livre é projetivo. Quando o anel é local, temos:

Proposição 1.3. Se M é um A -módulo projetivo e A é local, então M é um A -módulo livre.

Demonstração. Ver [25], Teorema 10.83.4. □

Qualquer A -módulo pode ser escrito como o quociente de um módulo projetivo. Dado um A -módulo M , consideremos uma sobrejeção $P_0 \rightarrow M$, onde P_0 é projetivo. De maneira semelhante ao processo usado para obter uma apresentação livre de um módulo, chegamos a uma sequência exata longa

$$P : \cdots P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

chamada de *resolução projetiva* de M .

Definição 1.2. Seja M um A -módulo para o qual existe uma resolução projetiva P , com $P_n = 0$ para $n > d$, mas tal que $P_d \neq 0$, para qualquer escolha de resolução projetiva P . Então, dizemos que M tem *dimensão projetiva* d e escrevemos $\text{pd}(M) = d$. Se não existe tal número d , escrevemos $\text{pd}(M) = \infty$.

Proposição 1.4. Seja $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0$ uma sequência exata de módulos. Então,

- (1) Se dois quaisquer dos módulos N, M, K têm dimensão projetiva finita, o terceiro também o tem.
- (2) $\text{pd}(M) < \text{pd}(N) \Rightarrow \text{pd}(K) = \text{pd}(N) + 1$
 $\text{pd}(M) > \text{pd}(N) \Rightarrow \text{pd}(K) = \text{pd}(M)$
 $\text{pd}(M) = \text{pd}(N) \Rightarrow \text{pd}(K) \leq \text{pd}(M) + 1$

Demonstração. Ver [17], Proposição 3.10 □

1.1.3 Ideais de Fitting, módulos livre de torção e reflexivos

Agora, apresentamos os conceitos de torção e posto de um módulo, importantes em várias situações que estudaremos nos próximos capítulos.

Definição 1.3. Sejam A um anel Noetheriano, M um A -módulo e $Q = S^{-1}A$ o anel total de frações de A , onde S é o conjunto multiplicativo formado pelos elementos regulares (não-divisores de zero) de A . A *torção* de M com respeito a A é definida como o núcleo da aplicação $M \rightarrow M \otimes_A Q (\simeq S^{-1}M)$, denotada por $\mathcal{T}_A(M)$. De maneira explícita, temos

$$\mathcal{T}_A(M) = \{m \in M \mid \exists s \in S \text{ tal que } sm = 0\}.$$

Um A -módulo é dito *livre de torção* se $\mathcal{T}_A(M) = 0$. Quando $\mathcal{T}_A(M) = M$, dizemos que M é de *torção*. Notemos que um A -módulo M é de torção se, e somente se, $M \otimes Q = 0$. Observemos também, que submódulos de módulos livres são livres de torção, assim como submódulos de módulos livres de torção são ainda livres de torção.

O dual de M é o módulo $\text{Hom}_A(M, A)$, usualmente denotado por M^* ; o módulo bidual de M , $\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, A), A)$ é então denotado por M^{**} . A aplicação bilinear $M \times M^* \rightarrow A$, dada por $(x, \phi) \mapsto \phi(x)$, induz um homomorfismo natural $h : M \rightarrow M^{**}$. Dizemos que M é *torsionless* se h é injetiva e que M é *reflexivo* se h é um isomorfismo. Apresentaremos na última seção desse capítulo, alguns resultados bastante úteis sobre módulos livres de torção e reflexivos. Não o fazemos agora devido a necessidade de algumas definições que ainda iremos apresentar.

Estabelecemos anteriormente que se $A^r \simeq M$, então M é A -livre e tem posto r . Mas a noção de *posto* pode ser estendida para módulos não necessariamente livres.

Definição 1.4. Sejam A um anel Noetheriano, M um A -módulo finitamente gerado e Q o anel total de frações de A . Dizemos que M tem *posto* igual a r se $M \otimes_A Q \simeq Q^r$. Isto é, se $M \otimes_A Q$ é um Q -módulo livre de posto finito e igual a r .

Para denotar o posto de M , quando este existir, usaremos a notação $\text{rk}(M)$ utilizada na maioria dos livros-texto (a tradução de posto em inglês é rank). Vejamos algumas formas de obter o posto de um módulo sobre um anel Noetheriano.

Proposição 1.5. Sejam A um anel Noetheriano e M um A -módulo finito com uma apresentação livre $A^m \xrightarrow{\varphi} A^n \rightarrow M \rightarrow 0$. São equivalentes:

- (1) M tem posto e $\text{rk}(M) = r$
- (2) M tem um submódulo N com $\text{rk}(N) = r$, tal que M/N é um módulo de torção.
- (3) Para todo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$ o $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo $M_{\mathfrak{p}}$ é livre com posto r .
- (4) $\text{rk}(\varphi) = \text{rk}(A^n) - \text{rk}(M)$

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Por hipótese, $M \otimes Q \simeq Q^r$, onde Q é o anel total de frações de A . Como $M \otimes Q \simeq S^{-1}M$, segue-se que $S^{-1}M$ é um Q -módulo livre. Seja $\{x_1/u_1, \dots, x_r/u_r\}$ uma base de $S^{-1}M$ sobre Q e consideremos o conjunto $\{y_1, \dots, y_r\} \subset M$, obtido da multiplicação de $u = u_1 \dots u_r$ por cada elemento x_i/u_i . Agora, tomamos $N = \sum_{i=1}^r y_i M$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Considere a sequência exata fundamental $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$. Se o A -módulo M/N é de torção, temos $M/N \otimes Q = 0$. Logo, $N \otimes Q \simeq M \otimes Q \simeq Q^r$. Note que se $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$, então $Q_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}$ e desse modo,

$$A_{\mathfrak{p}}^r \simeq Q_{\mathfrak{p}}^r \simeq (M \otimes_A Q)_{\mathfrak{p}} \simeq M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} Q_{\mathfrak{p}} \simeq M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}} \simeq M_{\mathfrak{p}}.$$

Portanto, $M_{\mathfrak{p}}$ é um $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo livre de posto r .

(3) $\Rightarrow$ (4) Como já temos a equivalência (1) $\Rightarrow$ (3), podemos substituir (4) pela condição $(\text{Im}(\varphi))_{\mathfrak{p}}$ é livre com $\text{rk}((\text{Im}(\varphi))_{\mathfrak{p}}) = n - r$, para todo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$. Consideremos a sequência exata curta $0 \rightarrow (\text{Im}(\varphi))_{\mathfrak{p}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}^n \rightarrow M_{\mathfrak{p}} \rightarrow 0$. Se $M_{\mathfrak{p}}$ for livre de posto r , temos $A_{\mathfrak{p}}^n/(\text{Im}(\varphi))_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}^r \Leftrightarrow (\text{Im}(\varphi))_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}^{n-r}$. $\square$

A partir de uma matriz φ de apresentação podemos obter informações sobre importantes invariantes do módulo, por meio dos ideais $I_t(\varphi)$. O *ideal de Fitting* $I_t(\varphi) \subset A$ é o ideal gerado pelos subdeterminantes de ordem t da matriz φ . Dado um homomorfismo $\varphi : F \rightarrow G$ de A -módulos livres finitamente gerados, escrevemos $I_t(\varphi) = I_t(U)$, onde U é a matriz associada à φ com respeito a bases de F e G . O ideal $I_t(\varphi)$ é um invariante do submódulo $\text{Im}(\varphi) \subset G$ e invariante segundo operações elementares de linha ou coluna, além de depender somente de φ .

A relevância dos ideais $I_t(\varphi)$ está em um conjunto de condições que desempenham um importante papel no estudo da álgebra simétrica:

Definição 1.5. Seja M um A -módulo finitamente gerado, com $\text{rk}(M) = r$ e uma matriz de apresentação φ . Para um inteiro k , dizemos que M (ou φ) satisfaz a condição $\mathcal{F}_k$ se

$$\text{ht}(I_t(\varphi)) \geq \text{rank}(\varphi) - t + 1 + k, \quad 1 \leq t \leq \text{rank}(\varphi).$$

Ou, equivalentemente, se

$$\mu(M_{\mathfrak{p}}) \leq \dim(A_{\mathfrak{p}}) + r - k, \quad \text{para todo } \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \text{ tal que } M_{\mathfrak{p}} \text{ é não-livre.}$$

Em geral, a Cohen-Macaulicidade da álgebra simétrica implica na condição $\mathcal{F}_0$ e quando essa álgebra é um domínio, então o módulo satisfaz $\mathcal{F}_1$. Essas propriedades também são úteis para estimar a dimensão de Krull da álgebra simétrica.

Além disso, os ideais $I_t(\varphi)$ controlam o número mínimo de geradores locais do módulo M , para o qual temos as igualdades: $\mu(M_{\mathfrak{p}}) = \dim_K M \otimes K$ (isto decorre do Lema de Nakayama) e $\mu(M_{\mathfrak{p}}) = \text{rk}(M/\mathfrak{p}M)$, onde $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ e $K = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. A demonstração da seguinte proposição pode ser encontrada em [5], Proposição (16.3).

Proposição 1.6. Sejam A um anel, $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ e M um A -módulo com uma apresentação livre finita $A^m \xrightarrow{\varphi} A^n \rightarrow M \rightarrow 0$. São equivalentes:

- (1) $I_t(\varphi) \not\subset \mathfrak{p}$
- (2) $(\text{Im } \varphi)_{\mathfrak{p}}$ contém um somando direto livre de A^n com $\text{rk} \geq t$
- (3) $\mu(M_{\mathfrak{p}}) \leq n - t$

A igualdade em (3) ocorre para o maior inteiro t tal que $I_t(\varphi) \not\subset \mathfrak{p}$.

Outras noções importantes para a compreensão desse trabalho serão descritas na próxima seção.

1.2 Sistema de Parâmetros, Sequências Regulares e Módulos Cohen-Macaulay

Para qualquer ideal $I \subset A$, a dimensão de Krull de A/I é calculada considerando-se cadeias de ideais primos $I \subset \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots$. Assim, por definição, temos

$$\dim(A/I) = \sup_{\mathfrak{p} \supset I} \{\dim(A/\mathfrak{p})\} = \sup_{\mathfrak{p} \in \text{Supp}(A/I)} \{\dim(A/\mathfrak{p})\} = \sup_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(A/I)} \{\dim(A/\mathfrak{p})\}.$$

Com base nisso, definimos a dimensão de um módulo M , $\dim(M)$, como sendo

$$\sup_{\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)} \{\dim(A/\mathfrak{p})\} \text{ e neste caso, temos } \dim(M) = \dim(A/\text{Ann}(M)).$$

Definição 1.6. Sejam $(A, \mathfrak{m})$ anel local e M um A -módulo finitamente gerado. Uma sequência $x_1, \dots, x_s$ de elementos de A é um *sistema de parâmetros* de M , se s é o menor inteiro que satisfaz a condição: $\text{Supp}(M/(x_1, \dots, x_s)M) = \{\mathfrak{m}\}$

O inteiro s é um invariante de M e o denotamos por $s(M)$. De acordo com a definição, sempre existe um sistema de parâmetros, pois um conjunto de geradores de $\mathfrak{m}$ satisfaz a condição exigida. É bem conhecido ser válida a igualdade $\dim(M) = s(M)$. O seguinte resultado nos será útil adiante:

Proposição 1.7. Sejam M um módulo e $x_1, x_2, \dots, x_k$ uma sequência de elementos em $\mathfrak{m}$. Então, tem-se a desigualdade:

$$\dim(M) \leq \dim(M/(x_1, x_2, \dots, x_k)M) + k.$$

Além disso, as seguintes condições são equivalentes:

- (1) Dá-se a igualdade acima.
- (2) Para cada $i = 1, \dots, k$, tem-se $x_i \notin p^{(i-1)}$ para todo primo $p^{(i-1)}$ tal que $\dim(R/p^{(i-1)}) = \dim(M/(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})M)$.
- (3) $x_1, x_2, \dots, x_k$ é parte de um sistema de parâmetros de M .

Demonstração. Ver [17], Proposição 1.13. □

Seja M um A -módulo. Dizemos que x é um elemento M -regular, se $xz = 0$, com $z \in M$, implicar em $z = 0$. Em outras palavras, x é *não-divisor de zero* de M .

Definição 1.7. Uma sequência $x = x_1, \dots, x_n$ formada por elementos de A é chamada *M -sequência regular* ou *M -sequência*, se satisfaz as seguintes condições:

- (1) $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$
- (2) x_i é um elemento $\frac{M}{(x_1, \dots, x_{i-1})M}$ -regular, $i = 1, \dots, n$.

Note que após uma permutação, os elementos de uma M -sequência podem não mais constituir uma M -sequência.

Quando apenas (2) é satisfeita, dizemos que x é uma *M -sequência fraca*. No caso em que A é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$, se $x \subset \mathfrak{m}$, então a condição (1) é automaticamente satisfeita devido ao lema de Nakayama. Um exemplo clássico de sequência regular é a sequência $X = X_1, \dots, X_n$ de indeterminadas no anel de polinômios $A[X_1, \dots, X_n]$.

Em geral, pode-se esperar que uma M -sequência regular a elementos em I seja infinita. Caracterizamos uma M -sequência regular $x = x_1, \dots, x_n \subseteq I$ como *máxima* ou *maximal* em I , se para todo $y \in I$ a sequência $x_1, \dots, x_n, y$ não é uma M -sequência regular, ou, equivalentemente, se $I \in \mathcal{Z}\left(\frac{M}{xM}\right)$. Notemos que se $x = x_1, \dots, x_n$ é uma M -sequência, então $(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \dots (x_1, \dots, x_n)$ é uma cadeia ascendente estrita, devido a condição (2). Portanto, quando A é um anel Noetheriano, toda M -sequência pode ser estendida a uma sequência máxima em I .

Vamos mostrar que para um ideal I que satisfaz $IM \neq M$, quaisquer duas M -sequências máximas a elementos em I têm o mesmo comprimento. Suponha que um ideal I está contido em um ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$. Então, existe um elemento $z \in M$, diferente de zero, tal que $\mathfrak{p} = \text{Ann}(z)$. Consideremos a aplicação de A em M tal que $1 \mapsto z$. Essa aplicação induz um homomorfismo injetivo $\varphi' : \frac{A}{\mathfrak{p}} \rightarrow M$, que por sua vez, induz um homomorfismo não-nulo $\varphi : \frac{A}{I} \rightarrow M$. Usando esse raciocínio provamos o seguinte lema:

Lema 1.8. Sejam A um anel, M e N A -módulos e $I = \text{Ann}(N)$ ideal de A .

- (1) Se I contém um elemento M -regular, então $\text{Hom}_A(N, M) = 0$.
- (2) Suponha A Noetheriano e M, N finitamente gerados sobre A . O ideal I contém um elemento M -regular se $\text{Hom}_A(N, M) = 0$.

Demonstração. Seja $a \in I = \text{Ann}(N)$ tal que a é M -regular. Suponhamos que exista $f \in \text{Hom}_A(N, M)$ tal que $f \neq 0$. Então, existe $n \in N$ tal que $f(n) \neq 0$. Notemos que

$af(n) = f(an) = f(0) = 0$, devido a A -linearidade de f e o fato de $a \in I$. Mas isto contraria a hipótese de que a é um elemento M -regular, provando assim a parte (1).

Vamos supor que $I \subseteq \mathcal{Z}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \mathfrak{p}$. Pelo Lema da esquiva (este resultado é conhecido como “prime avoidance” e o leitor pode encontrá-lo em [1], Proposição 1.11(i)), existe $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ tal que $I \subset \mathfrak{p} = (0 :_A m)$, para algum $m \neq 0 \in M$. Consideremos o homomorfismo injetivo:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \frac{A}{\mathfrak{p}} &\longrightarrow M \\ a(\text{mod}(\mathfrak{p})) &\longmapsto am \end{aligned}$$

Como N é um A -módulo finitamente gerado, para todo $n \in N$ existem $a_1, \dots, a_r \in A$ e $n_1, \dots, n_r \in N$, tais que $n = \sum_{i=1}^r a_i n_i$. Isto induz o seguinte homomorfismo sobrejetivo:

$$\begin{aligned} \psi : \quad N &\longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{p}} \\ n = \sum_{i=1}^r a_i n_i &\longmapsto a_1(\text{mod}(\mathfrak{p})) \end{aligned}$$

Portanto, uma vez que $\frac{A}{\mathfrak{p}} \neq 0$, temos $\phi = \varphi \circ \psi \in \text{Hom}_A(N, M)$ e $\phi \neq 0$. □

Lema 1.9. Sejam A um anel, M e N A -módulos e $x = x_1, \dots, x_n$ uma M -sequência fraca em $\text{Ann}(N)$. Então,

$$\text{Hom}_A \left(N, \frac{M}{xM} \right) \simeq \text{Ext}_A^n(N, M).$$

Demonstração. Provaremos por indução em n . Para $n = 0$, segue-se da construção do funtor Ext que $\text{Hom}_A(N, M) \simeq \text{Ext}_A^0(N, M)$. Para $n \geq 1$, se $x' = x_1, \dots, x_{n-1}$ é uma M -sequência fraca em $\text{Ann}(N)$, pela hipótese de indução, temos

$$\text{Hom} \left(N, \frac{M}{x'M} \right) \simeq \text{Ext}_A^{n-1}(N, M).$$

Como $x_n \notin \mathcal{Z} \left(\frac{M}{x'M} \right)$ e $x_n \in \text{Ann}(N)$, decorre da proposição anterior que $\text{Hom}_A \left(N, \frac{M}{x'M} \right) = 0$, donde $\text{Ext}_A^{n-1}(N, M) = 0$. Daí, considerando a sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x_1} M \longrightarrow \frac{M}{x_1 M} \longrightarrow 0,$$

obtemos por meio da sequência exata longa do funtor Ext , uma segunda sequência

exata

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_A^{n-1} \left(N, \frac{M}{x_1 M} \right) \xrightarrow{\psi} \text{Ext}_A^n(N, M) \xrightarrow{\varphi} \text{Ext}_A^n(N, M),$$

onde ψ é a multiplicação por x_1 herdada de M e φ é induzida pela multiplicação por x_1 em N . Como $x_1 \in \text{Ann}(N)$, temos $\varphi \equiv 0$. Logo, $\text{Ext}_A^{n-1} \left(N, \frac{M}{x_1 M} \right) \simeq \text{Ext}_A^n(N, M)$ via ψ . Finalmente, aplicando a hipótese de indução ao A -módulo $\frac{M}{x_1 M}$ e à $\left(\frac{M}{x_1 M} \right)$ -sequência $x_2, \dots, x_n$ obtemos que $\text{Hom}_A(N, \frac{M}{x_1 M}) \simeq \text{Ext}_A^{n-1} \left(N, \frac{M}{x_1 M} \right)$.

Portanto, $\text{Ext}_A^n(N, M) \simeq \text{Hom}_A \left(N, \frac{M}{x_1 M} \right)$. $\square$

Consideremos A um anel Noetheriano, M um A -módulo finito e $I \subseteq A$ ideal tal que $M \neq IM$ e $x = x_1, \dots, x_n$ uma M -sequência maximal em I . Como I contém um elemento $\frac{M}{(x_1, \dots, x_{i-1})M}$ -regular, para $i = 1, \dots, n$, segue-se dos Lemas 1.8 e 1.9 que

$$\text{Ext}_A^{i-1} \left(\frac{A}{I}, M \right) \simeq \text{Hom} \left(\frac{A}{I}, \frac{M}{(x_1, \dots, x_{i-1})M} \right) = 0.$$

Assim,

$$\text{Ext}_A^j \left(\frac{A}{I}, M \right) = 0 \quad \forall j \leq n-1.$$

Por outro lado, visto que $IM \neq M$ e $x \in \mathcal{Z}(\frac{M}{xM})$ (pois é uma M -sequência maximal em I), segue-se novamente dos Lemas 1.8 e 1.9 que

$$\text{Ext}_A^n \left(\frac{A}{I}, M \right) \simeq \text{Hom} \left(\frac{A}{I}, \frac{M}{xM} \right) \neq 0.$$

Isto prova o seguinte teorema:

Teorema 1.10 (Rees). *Sejam A um anel Noetheriano, M um A -módulo finito e I um ideal tal que $IM \neq M$. Toda M -sequência maximal em I tem o mesmo comprimento n dado por*

$$n = \min \left\{ i : \text{Ext}_A^i \left(\frac{A}{I}, M \right) \neq 0 \right\}.$$

Esse teorema permite-nos definir a noção de grade de um ideal em relação a um módulo.

Definição 1.8. Sejam A um anel Noetheriano, M um A -módulo finito e I um ideal, tal que $IM \neq M$. O comprimento comum de uma M -sequência maximal em I é chamado de *grade de I em M* e denotado por $\text{grade}(I, M)$.

Quando $M = A$, escrevemos $\text{grade}(I, M) = \text{grade}(I)$. Na situação especial em que A é um anel local, com ideal maximal $\mathfrak{m}$, temos:

Definição 1.9. Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e M uma A -módulo finitamente gerado sobre A . Definimos a *profundidade* de M como sendo igual a $\text{grade}(\mathfrak{m}, M)$ e a denotamos por $\text{depth}(M)$.

Agora apresentamos a interessante classe de anéis Cohen-Macaulay que dispõe de uma rica teoria, além de constituir uma importante fonte de exemplos em Geometria Algébrica e na Teoria de Invariantes. Inicialmente definimos para o caso local.

Definição 1.10. Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e M um A -módulo finito. Dizemos que M é um *módulo Cohen-Macaulay* se $M \neq 0$ e $\text{depth}(M) = \dim(M)$ ou se $M = 0$.

Definição 1.11. Sejam A um anel Noetheriano e M um A -módulo finito. Dizemos que M é Cohen-Macaulay se $M_{\mathfrak{p}}$ é um módulo Cohen-Macaulay sobre $A_{\mathfrak{p}}$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A .

Segue-se dessa definição geral que toda localização de um módulo Cohen-Macaulay é Cohen-Macaulay. Um anel A é um *anel Cohen-Macaulay* se o for como A -módulo.

Teorema 1.11. Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e M um A -módulo Cohen-Macaulay não-nulo. Então,

- (1) $\dim(A/\mathfrak{p}) = \text{depth}(M)$, para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$;
- (2) $\text{grade}(I, M) = \dim(M) - \dim(M/IM)$, para todo ideal $I \subset A$;
- (3) $x = x_1, \dots, x_n$ é uma M -sequência se, e somente se, $\dim(M/xM) = \dim(M) - n$;
- (4) Seja $I \subset A$ um ideal e suponha A Cohen-Macaulay. Então, $\text{grade}(I) = \text{ht}(I)$ e $\text{ht}(I) + \dim(A/I) = \dim(A)$.

Demonstração. Ver [4], Teorema 2.12 e Corolário 2.14. □

Proposição 1.12. Sejam A um anel Noetheriano e M um A -módulo finito. Suponha que $x = x_1, \dots, x_n$ é uma M -sequência. Se M é um módulo Cohen-Macaulay, então M/xM é Cohen-Macaulay (sobre A ou $A/(x)$). A recíproca é válida quando A é local.

Demonstração. Pela definição de módulo Cohen-Macaulay, podemos assumir que A é local. Temos $\dim(M/xM) = \dim(M) - n$, pelo item (3) do Teorema 1.11. Por outro lado, segue-se do Teorema de Ress que $\text{depth}(M/xM) = \text{depth}(M) - n = \dim(M) - n$. Portanto, M/xM é Cohen-Macaulay. □

Proposição 1.13. Seja A um anel Cohen-Macaulay. Então, $A[X_1, \dots, X_n]$ é Cohen-Macaulay.

Demonstração. Uma vez que as variáveis podem ser adicionadas continuamente, podemos assumir $n = 1$, $X = X_1$. É claro que X é uma $A[X]$ -sequência regular e $A \simeq A[X]/(X)$. Portanto, o resultado segue da Proposição 1.12. $\square$

O próximo resultado mostra que a teoria da dimensão em si é mais simples em anéis Cohen-Macaulay do que em anéis Noetherianos em geral. Dizemos que A é um *anel catenário* se a seguinte condição é satisfeita: para quaisquer ideais $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p}'$ de A com $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, toda cadeia saturada de ideais primos iniciando em $\mathfrak{p}$ e terminando em $\mathfrak{p}'$ tem comprimento igual a $\text{ht}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p})$; Um anel A é dito *universalmente catenário* se todos os anéis polinomiais $A[X_1, \dots, X_n]$ são catenários ou, equivalentemente, se, e somente se, toda A -álgebra finitamente gerada é catenária.

Teorema 1.14. *Um anel A Cohen-Macaulay é universalmente catenário.*

Demonstração. Pela proposição anterior, podemos provar apenas que A é catenário. Seja $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ ideais primos de A . Sabemos que a localização $A_{\mathfrak{p}'}$ é Cohen-Macaulay, logo

$$\text{ht}(\mathfrak{p}') = \dim(A_{\mathfrak{p}'}) = \text{ht}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}'}) + \dim(A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}'}) = \text{ht}(\mathfrak{p}) + \text{ht}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}).$$

Como isto vale para todo ideal $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, o comprimento de toda cadeia saturada ligando $\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{p}'$ tem comprimento $\text{ht}(\mathfrak{p}') - \text{ht}(\mathfrak{p}) = \text{ht}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p})$.

Portanto, A é catenário. $\square$

Destacamos mais algumas noções importantes:

Definição 1.12. Um anel local Noetheriano $(A, \mathfrak{m})$ é *regular* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

- (1) $\dim(A) = \mu(\mathfrak{m})$.
- (2) $\mathfrak{m}$ é gerado por uma A -sequência, chamada *sistema regular de parâmetros*.

Observação 1.1. Um anel regular local A tem propriedades fortes, tais como:

- (1) A é um domínio;
- (2) A é Cohen-Macaulay;
- (3) A é normal (mais que isso: A é fatorial);
- (4) Um quociente A/I é regular se, e só se, I é gerado por um subsistema de parâmetros regulares de A .

As provas de tais fatos podem ser encontradas em [17], Capítulo 3.

Definição 1.13. Seja A um anel com dimensão finita. Dizemos que A é *equidimensional* se $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A)$, para todo primo minimal $\mathfrak{p}$ de A .

Definição 1.14. Um anel local Noetheriano A é um anel *interseção completa* se $A \simeq B/I$, onde B é um anel regular local e $I \subset B$ é um ideal gerado por uma B -sequência.

Observação 1.2. De maneira geral, um anel A é *localmente interseção completa* se toda localização deste anel é uma interseção completa; Todo anel interseção completa é Cohen-Macaulay devido á Proposição 1.12. Logo, todo anel localmente interseção completa é Cohen-Macaulay; Por fim, todo anel Cohen-Macaulay é equidimensional.

Definição 1.15. Um anel Noetheriano local $(A, \mathfrak{m})$ é uma *singularidade isolada* se para qualquer $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, o anel $A_{\mathfrak{p}}$ é regular.

1.3 Álgebras Tensorial e Simétrica de um Módulo

Inicialmente, relembremos a noção de anéis e módulos graduados. Dizemos que um anel A é um anel *graduado* se existir uma família $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subgrupos aditivos $A_n \subseteq A$, satisfazendo:

(1) $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$, ou seja, cada $a \in A$ se escreve, de modo único, como soma finita:

$$a = a_0 + a_1 + \dots + a_d, \quad a_i \in A_i, \quad \forall i.$$

(2) $A_i A_j \subseteq A_{i+j}, \forall i, j \in \mathbb{N}$.

Dado $n \geq 0$, dizemos que A_n é a *componente homogênea* (de A) *de grau n* . Um elemento $a \in A$ é dito homogêneo se $a \in A_n$, para algum n e neste caso, n é chamado de *grau de a* . Se $1 \in A_0$, então A_0 é subanel de A e cada A_n é um A_0 -módulo. Em particular, quando A_0 é um corpo cada A_n é um A_0 -espaço vetorial.

Definição 1.16. Seja A um anel $\mathbb{N}$ -graduado. Se A é gerado por elementos de grau 1 sobre A_0 , dizemos que A é dito *graduado standard*.

Observação 1.3. Algumas observações:

- (i) O elemento 0 pertence a A_n para todo $n \in \mathbb{N}$, pois todo A_n é subgrupo aditivo de A . Logo, o elemento 0 tem todos os graus.
- (ii) Suponha que $a \in A$ se escreve de modo único como $a = a_0 + \dots + a_d$; $a_i \in A_i$, $a_d \neq 0$. O número d é denominado o *grau total de a* .

(3) O anel $A[X_1, \dots, X_n]$ pode ser tomado com a graduação standard.

Um ideal I gerado por elementos homogêneos é chamado *ideal homogêneo ou graduado*. Equivalentemente, $I \subseteq A$ é homogêneo se, e somente se, $I = \bigoplus_{n \geq 0} I_n$, onde $I_n = I \cap A_n$. Além disso, $A/I = \bigoplus_{n \geq 0} A_n/I_n$ é novamente um anel graduado.

Observação 1.4. Se $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ é Noetheriano e $I \subseteq A$ é ideal homogêneo, então: $I = (a_1, \dots, a_m)$, com $a_i \in A_{d_i}$, $i = 1, \dots, m$.

Exemplo 1.2. $I = (x^2 - y, y) \subset k[x, y]$ é homogêneo. De fato, notemos que $I = (x^2, y)$ pois, $x^2 = (x^2 - y) + y$.

Seja A um anel graduado. Um A -módulo *graduado* é um A -módulo M com uma decomposição $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$, tal que $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Cada A -módulo M_i é denominado a i -ésima componente homogênea (ou graduada) de M , enquanto um elemento $x \in M_n$ é chamado homogêneo (de grau n).

Definição 1.17. A álgebra tensorial de um A -módulo M é definida por

$$T_A(M) = \sum_{n \geq 0} T^n,$$

$$\text{onde } T^n = \underbrace{M \otimes M \otimes \dots \otimes M}_n.$$

Por convenção, $T^0 = A$ e $T^1 = M$. Para quaisquer $x \in T^n$ e $y \in T^m$, temos $x \otimes y \in T^{n+m}$. Isso torna $T_A(M)$ um anel $\mathbb{N}$ -graduado que pode não ser comutativo.

Definição 1.18. Sejam um anel A , M um A -módulo e $\mathcal{I} = (x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in M) \subseteq T_A(M)$ ideal bilateral. Definimos a *Álgebra Simétrica* de M como o anel quociente

$$\text{Sym}_A(M) = \frac{T_A(M)}{\mathcal{I}}.$$

Esse anel possui elemento 1 e é o maior quociente comutativo de $T_A(M)$. Como $\mathcal{I}$ é um ideal homogêneo, $\text{Sym}_A(M)$ é um anel $\mathbb{N}$ -graduado, com graduação

$$\text{Sym}_n(M) = \frac{T^n(M)}{\mathcal{I} \cap T^n(M)}, \text{ e } \text{Sym}_0 = A.$$

Quando A_0 é um corpo, o A_0 -espaço vetorial $\text{Sym}_n(M)$ é denominado a n -ésima *potência simétrica* de M .

Dado um anel A e um A -módulo M , a álgebra $\text{Sym}_A(M)$ em conjunto com um homomorfismo $\pi : M \longrightarrow \text{Sym}_A(M)$ de A -módulos satisfazem a seguinte propriedade

universal: para uma A -álgebra B e qualquer homomorfismo $\varphi : M \longrightarrow B$ de A -módulos existe um único homomorfismo $\phi : \text{Sym}_A(M) \longrightarrow B$ de A -álgebras, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \phi & \\ \text{Sym}_A(M) & & \end{array}$$

é comutativo. Além disso, se existem uma A -álgebra C e $\lambda : M \longrightarrow C$ um homomorfismo de A -módulos satisfazendo a propriedade universal da álgebra simétrica, então existe um único isomorfismo $\psi : \text{Sym}_A(M) \longrightarrow C$ tal que $\psi(m) = \lambda(m)$, $\forall m \in M$.

Exemplo 1.3. Seja M um A -módulo livre de posto finito e igual a n . Então a álgebra simétrica de M é o anel polinomial $A[X_1, \dots, X_n]$. De fato, sejam $\{m_1, \dots, m_n\}$ uma base de M e o homomorfismo $\pi : M \longrightarrow A[X_1, \dots, X_n]$ definido por $m_i \mapsto X_i$. Considere uma A -álgebra B e $\varphi : M \longrightarrow B$, um homomorfismo de A -módulos. Defina $\phi : A[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow B$ tal que $f(X_1, \dots, X_n) \mapsto f(\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_n))$ e note que ϕ é um homomorfismo de A -álgebras. Além disso, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \phi & \\ A[X_1, \dots, X_n] & & \end{array}$$

Segue-se da propriedade universal da álgebra simétrica que $\text{Sym}_A(M) = A[X_1, \dots, X_n]$.

Podemos dizer que a maioria dos módulos considerados neste trabalho são finitamente gerados sobre um anel Noetheriano. Esses módulos admitem uma apresentação linear, como vimos anteriormente, e são definidos por sua matriz de apresentação. Nessa situação, temos a seguinte caracterização para a álgebra simétrica:

Proposição 1.15. Sejam A um anel Noetheriano, M um A -módulo finitamente gerado e $\{m_1, \dots, m_n\}$ um conjunto de geradores de M . Então,

$$\text{Sym}_A(M) \simeq \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{J}$$

onde J é o ideal gerado pelas formas lineares $f_j = a_{1j}T_1 + \dots + a_{nj}T_n$, $j = 1, \dots, m$.

Demonstração. Devido à propriedade universal da álgebra simétrica, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} A^m & \xrightarrow{\varphi} & A^n & \xrightarrow{\phi} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A[T_1, \dots, T_n] & \longrightarrow & \text{Sym}_A(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Então, temos $\text{Sym}_A(M) \simeq A[T_1, \dots, T_n]/N$, onde N é o ideal gerado pelos elementos $\sum_{i=1}^n c_i T_i$ tais que $\sum_{i=1}^n c_i m_i = 0$. Logo, $(c_1, \dots, c_n) \in \text{Ker}(\phi) = \text{Im}(\varphi)$. Assim, $(c_1, \dots, c_n)^T = \varphi(d_1, \dots, d_n)^T$. Desse modo, para cada $i = 1, \dots, n$, temos $c_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} d_j$ e isto implica em $\sum_{i=1}^n c_i T_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_{ij} d_j) T_i = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n a_{ij} T_i) d_j$. Portanto, $N \subseteq (\sum_{i=1}^n a_{ij} T_i)$. Como os vetores-coluna da matriz φ são geradores de $\text{Syz}(M) = \text{Im}(\varphi)$, obtemos a outra inclusão. $\square$

A seguir, apresentamos algumas propriedades que a álgebra simétrica satisfaz.

Proposição 1.16. Sejam A um anel e M um A -módulo. Se I é um ideal A e S é um conjunto multiplicativo de A , temos

$$(1) \text{Sym}_A(M) \otimes A/I \simeq \text{Sym}_{A/I}(M/IM).$$

$$(2) \text{Sym}_A(M) \otimes A_S \simeq \text{Sym}_{A_S}(M_S).$$

Demonstração. A prova de (1) segue da seguinte propriedade do produto tensorial: para quaisquer A -módulo M e $I \subset A$ ideal, temos $M \otimes_A \frac{A}{I} \simeq \frac{M}{IM}$. Analogamente, (2) segue do isomorfismo $M \otimes_A A_S \simeq M_S$. $\square$

Observação 1.5. A Proposição 1.16 nos dá a seguinte informação: se M é um módulo finitamente gerado sobre um anel local A , com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo residual K , então

$$\dim(\text{Sym}_A(M)/\mathfrak{m}\text{Sym}_A(M)) = \mu(M).$$

De fato, pondo $n = \mu(M)$, segue-se do Lema de Nakayama que $n = \dim_K(M/\mathfrak{m}M)$. Logo, $M/\mathfrak{m}M \simeq K^n$. Ou seja, $M/\mathfrak{m}M$ é um K -módulo livre. Então, $\text{Sym}_K(M/\mathfrak{m}M) = K[T_1, \dots, T_n]$. Assim, $\dim(\text{Sym}_K(M/\mathfrak{m}M)) = n$. Portanto, a igualdade decorre da proposição anterior.

Por meio da álgebra simétrica obtém-se várias álgebras interessantes, das quais destacamos a *Álgebra de Rees de um módulo*. A próxima seção apresenta uma definição e alguns dos principais resultados gerais para tal álgebra.

1.4 Álgebra de Rees de um Módulo

Existem várias definições possíveis para a álgebra de Rees de um módulo. No entanto, todas coincidem quando trabalhamos com um módulo livre de torção e com *posto*.

Aqui, adotamos a seguinte definição para a álgebra de Rees de um módulo:

Definição 1.19. Sejam A um anel Noetheriano e M um A -módulo finitamente gerado com posto r . A *álgebra de Rees* $\mathcal{R}_A(M)$ de M é definida pelo quociente da álgebra simétrica de M por sua A -torção. Isto é,

$$\mathcal{R}_A(M) = \frac{\text{Sym}_A(M)}{\mathcal{T}_A(M)}$$

Quando o módulo M tem posto r e é um submódulo de um módulo livre $M \subseteq A^r$ (note que M é livre de torção por ser um submódulo de um módulo livre), podemos induzir uma aplicação $\text{Sym}_A(M) \xrightarrow{\rho} \text{Sym}_A(A^r) \simeq A[T_1, \dots, T_r]$. Assim, definimos a *álgebra de Rees de M* como a imagem da álgebra simétrica de M na álgebra simétrica de A^r , isto é,

$$\mathcal{R}_A(M) = \text{Im}(\rho) \subseteq \text{Sym}_A(A^r) \simeq A[T_1, \dots, T_r].$$

As duas definições coincidem para um módulo finitamente gerado, livre de torção e com posto, uma vez que, nestas condições, o núcleo da aplicação ρ é igual a torção da álgebra simétrica de M . Assim,

$$\mathcal{R}_A(M) = \frac{\text{Sym}_A(M)}{\mathcal{T}_A(M)} \simeq \text{Im}(\rho) = \mathcal{R}_A(M).$$

Notemos que $\mathcal{R}_A(M)$ é um anel graduado com $\mathcal{R}_A(M)_0 = A$ e $\mathcal{R}_A(M)_1 = M$. Além disso, $\mathcal{R}_A(M)$ é livre de torção, pois é um subanel do anel de polinômios que é livre (com base infinita) sobre A .

Um ideal $I \subseteq A$ é dito ser de *tipo linear* se $\text{Sym}(I) = \mathcal{R}(I)$. Em analogia, se A é um domínio e M é um A -módulo finitamente gerado sobre A , dizemos que M é de *tipo linear* se $\text{Sym}_A(M)$ é livre de torção e assim, um domínio.

Lema 1.17. Seja A um anel Noetheriano, $N = A^n$ um A -módulo livre finitamente gerado e M um A -submódulo de N .

- (1) Existe uma correspondência biunívoca entre os primos associados de $\mathcal{R}_A(M)$ e os primos associados de A , dados por contração.
- (2) Para todo $\mathfrak{p} \in \text{Min}(A)$, $\mathfrak{p}\text{Sym}_A(N) \cap \mathcal{R}_A(M)$ é um primo minimal em $\mathcal{R}_A(M)$ e todos os primos minimais de $\mathcal{R}_A(M)$ são obtidos dessa forma. Além disso, $\mathcal{R}_{A/\mathfrak{p}}(M + \mathfrak{p}N/\mathfrak{p}N) \simeq \mathcal{R}_A(M)/(\mathfrak{p}\text{Sym}_A(N)) \cap \mathcal{R}_A(M)$.

Demonstração. Nestas condições, $\mathcal{R}_A(M)$ é uma subálgebra do anel de polinômios $\text{Sym}_A(N) \simeq A[T_1, \dots, T_n]$. Assim, $A \subseteq \mathcal{R}_A(M) \subseteq A[T_1, \dots, T_n]$. Logo, todo primo associado de A é contração de um primo associado de $\mathcal{R}_A(M)$, bem como todo primo associado de $\mathcal{R}_A(M)$ é contração de um primo associado de $A[T_1, \dots, T_n]$, os quais

são extensões dos primos associados de A . Portanto, temos uma bijeção e isto prova (1). Segundo a sobrejeção natural $\text{Sym}_A(N) \longrightarrow \text{Sym}_{A/\mathfrak{p}}(N/\mathfrak{p}N)$, a álgebra $\mathcal{R}_A(M)$ é aplicada sobre $\mathcal{R}_{A/\mathfrak{p}}(M + \mathfrak{p}N/\mathfrak{p}N)$, e o núcleo dessa restrição é $\mathfrak{p}\text{Sym}_A(N) \cap \mathcal{R}_A(M)$. Isto prova (2). $\square$

Um dos invariantes mais importante de uma álgebra é sua dimensão de Krull. A proposição a seguir determina a dimensão da álgebra de Rees de um módulo finitamente gerado e com posto.

Proposição 1.18 ([16], Proposição 4.1). Seja A um anel Noetheriano com dimensão d e M um A -módulo finitamente gerado com posto igual a r . Então,

$$\dim \mathcal{R}_A(M) = d + r = d + \text{alt } \mathcal{R}_A(M)_+.$$

Demonstração. Inicialmente, mostremos que $\dim(\mathcal{R}_A(M)) \geq \dim(A) + r$. Considere o ideal $\mathcal{R}_A(M)_+ = \bigotimes_{j \geq 1} \mathcal{R}_A(M)_j$. Como $\mathcal{R}_A(M)/\mathcal{R}_A(M)_+ \simeq A$, temos $\dim(\mathcal{R}_A(M)) \geq \dim(A) + \text{ht}(\mathcal{R}_A(M)_+)$. Então, basta mostrarmos que $\text{ht}(\mathcal{R}_A(M)_+) = r$. Para isso, seja $\mathfrak{p} \supseteq \mathcal{R}_A(M)_+$ um ideal primo de $\mathcal{R}_A(M)$, tal que $\text{ht}(\mathfrak{p}) = \text{ht}(\mathcal{R}_A(M)_+)$. Logo, $\mathfrak{p} = (\mathcal{B}, \mathcal{R}_A(M)_+)$ onde $\mathcal{B} = \mathfrak{p} \cap A$ é um primo minimal de A . Desse modo, temos

$$\mathcal{R}_A(M)_{\mathfrak{p}} = (\mathcal{R}_{A_{\mathcal{B}}}(M_{\mathcal{B}}))_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathcal{B}}[T_1, \dots, T_r]_{(\mathcal{B}_{\mathcal{B}}(T_1, \dots, T_r))},$$

pois M_Q é um A_Q -módulo livre de posto finito igual a r , para todo $Q \in \text{Ass}(A)$. Portanto,

$$\text{ht}(\mathcal{R}_A(M)_+) = \text{ht}(\mathfrak{p}) = \text{ht}(\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}) = \dim(\mathcal{R}_A(M)_{\mathfrak{p}}) = \dim(A_{\mathcal{B}}) + r = r.$$

Para provarmos que $\dim(\mathcal{R}_A(M)) \leq \dim(A) + r$, tomemos $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{R}_A(M)$ um primo minimal, tal que $\dim(\mathcal{R}_A(M)) = \dim(\mathcal{R}_A(M)/\mathfrak{p})$ e consideremos o ideal obtido por contração, $\mathcal{B} = \mathfrak{p} \cap A$. Aplicando o Teorema da desigualdade da dimensão (Proposição A.1) à extensão de domínios $A/\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}_A(M)/\mathfrak{p}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{R}_A(M)) &= \dim(\mathcal{R}_A(M)/\mathfrak{p}) = \text{ht}(\bar{Q}) \leq \dim(A/\mathcal{B}) + \text{gr.tr}_{A/\mathcal{B}} \mathcal{R}_A(M)/\mathfrak{p} \\ &= \dim(A/\mathcal{B}) = \text{gr.tr}_{\text{Frac}(A/\mathcal{B})} \text{Frac}(\mathcal{R}_A(M)/\mathfrak{p}) \\ &\leq \dim(A/\mathcal{B}) + \dim((\mathcal{R}_A(M)/\mathfrak{p}) \otimes_A \text{Frac}(A/\mathcal{B})) \\ &\leq \dim(A/\mathcal{B}) + \dim(\mathcal{R}_A(M)) \otimes_A A_{\mathcal{B}}/\mathcal{B}_{\mathcal{B}} \tag{1} \\ &\leq \dim(A/\mathcal{B}) + \dim(\text{Sym}_{A_{\mathcal{B}}}(M_{\mathcal{B}})) = \dim(A_{\mathcal{B}}) + \dim(A_{\mathcal{B}}[T_1, \dots, T_r]) \tag{2} \\ &= \dim(A/\mathcal{B}) + \dim(A_{\mathcal{B}}) + r = \dim(A/\mathcal{B}) + \text{ht}(\mathcal{B}) + r \leq \dim(A) + r \end{aligned}$$

Na passagem de (1) para (2), usamos que $\mathcal{B} \subset \mathfrak{q}$ para algum $\mathfrak{q} \in \text{Ass}(A)$, pois $\mathcal{R}_A(M)$

é A -livre de torção e assim, $M_{\mathcal{B}} = (M_{\mathfrak{q}})_{\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}}$ é $A_{\mathcal{B}}$ -livre. $\square$

Nosso principal objetivo é estudar as álgebras simétrica e de Rees do módulo de diferenciais de Kähler. No próximo capítulo apresentamos a definição e resultados básicos acerca desse módulo.

Capítulo 2

Derivações e Diferenciais de Kähler

Este capítulo é inteiramente dedicado ao módulo de diferenciais de Kähler $\Omega_{A|k}$. Iniciamos definindo derivações, em seguida, os principais resultados sobre $\Omega_{A|k}$ que serão bastante úteis nos próximos capítulos. Como referência tomamos [12] e [14].

2.1 Derivações

Definição 2.1. Sejam A um anel e M um A -módulo. Uma *derivação* de A em M é uma aplicação $D : A \rightarrow M$ satisfazendo:

- (1) $D(a + b) = D(a) + D(b)$
- (2) $D(ab) = bD(a) + aD(b)$;

para quaisquer $a, b \in A$.

O conjunto de todas as derivações de A em M é denotado por $\text{Der}(A, M)$. Este conjunto torna-se um A -módulo de uma forma natural, com as seguintes operações: $(D_1 + D_2)(a) = D_1(a) + D_2(a)$ e $(aD)(b) = aD(b)$. Quando A é uma k -álgebra via um homomorfismo de anéis, $f : k \rightarrow A$, dizemos que D é uma k -derivação ou derivação sobre k , se $D \circ f = 0$. O conjunto de todas as k -derivações de A em M , denotado por $\text{Der}_k(A, M)$, é um submódulo de $\text{Der}(A, M)$. Como $1 \cdot 1 = 1$ para qualquer $D \in \text{Der}(A, M)$, temos $D(1) = D(1) + D(1)$, logo, $D(1) = 0$. Então, considerando A como uma $\mathbb{Z}$ -álgebra, temos $\text{Der}(A, M) = \text{Der}_{\mathbb{Z}}(A, M)$.

Exemplo 2.1. Sejam A um anel, $B = A[X_1, \dots, X_n]$ e M um B -módulo. Fixando arbitrariamente $m_1, \dots, m_n \in M$, vemos que $D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial X_i} \cdot m_i$ é uma derivação, devido à aditividade das derivadas parciais e da regra de Leibniz habitual. Quando $M = B$ e $m_i = X_i, 1 \leq i \leq n$, D é chamada de *derivação de Euler*.

2.2 O Módulo de Diferenciais de Kähler

Sejam k um anel, A uma k -álgebra e o anel $B = A \otimes_k A$, o qual munido do produto $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$, torna-se uma k -álgebra. Considere os seguintes homomorfismos de k -álgebras:

$$\mu : B \rightarrow A \text{ e } \lambda_1, \lambda_2 : A \rightarrow B$$

definidos por $\mu(a \otimes a') = aa'$, $\lambda_1(a) = a \otimes 1$ e $\lambda_2(a) = 1 \otimes a$. Dados $a \in A$ e $x \otimes y \in B$, definimos a multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} a(x \otimes y) &= \lambda_1(a)(x \otimes y) = ax \otimes y \\ a(x \otimes y) &= \lambda_2(a)(x \otimes y) = x \otimes ay \end{aligned}$$

Então, os homomorfismos λ_1 e λ_2 induzem duas estruturas de A -módulos em B e assim, B é uma A -álgebra via λ_1 (ou via λ_2).

Denotemos por $\mathbb{D}$ o módulo $\text{Ker}(\mu) \subset B$. Notemos que o ideal gerado pelos elementos da forma $a \otimes 1 - 1 \otimes a$, com $a \in A$, está contido em $\mathbb{D}$ (temos $\mu(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = \mu(a \otimes 1) - \mu(1 \otimes a) = a - a = 0, \forall a \in A$). De fato, tomando $c = \sum_i a_i \otimes b_i \in \mathbb{D}$ vemos que $0 = \mu(c) = ab$. Logo, $ab \otimes 1 = 0$ e assim, podemos escrever $c = c - 0 = a \otimes b - ab \otimes 1 = (-a \otimes 1)(b \otimes 1 - 1 \otimes b)$. Portanto, $c \in \langle a \otimes 1 - 1 \otimes a \mid a \in A \rangle$. Daí, $\mathbb{D} = \langle a \otimes 1 - 1 \otimes a \mid a \in A \rangle$.

Definição 2.2. O módulo de diferenciais de Kähler de A sobre k , denotado por $\Omega_{A|k}$, é definido como:

$$\Omega_{A|k} = \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}^2}.$$

Esta definição faz sentido, pois se $a \in A$ e $w = \overline{x \otimes 1 - 1 \otimes x} \in \Omega_{A|k}$, temos $a \cdot w = \overline{ax \otimes 1 - a \otimes x}$. Assim, $\Omega_{A|k}$ possui estrutura de A -módulo via λ_1 (ou via λ_2 , equivalentemente).

Proposição 2.1. $A \oplus \Omega_{A|k} \cong \frac{B}{\mathbb{D}^2}$

Demonstração. As inclusões $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{D} \subset B$ induzem uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}^2} \longrightarrow \frac{B}{\mathbb{D}^2} \longrightarrow \frac{B}{\mathbb{D}} \longrightarrow 0,$$

ou seja,

$$0 \longrightarrow \Omega_{A|k} \xrightarrow{i} \frac{B}{\mathbb{D}^2} \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$$

onde $\frac{B}{\mathbb{D}} \cong A$, pois $\mathbb{D}$ é o núcleo do homomorfismo sobrejetor $\mu : A \rightarrow B$. A primeira aplicação é a inclusão e a segunda é o homomorfismo φ dado por $\overline{a \otimes b} \mapsto ab$ (a barra indica a classe de restos módulo $\mathbb{D}^2$) que está bem definido, pois $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{D}$. Consideremos

a aplicação $\bar{\varphi}_1 : A \rightarrow B$ que associa a cada $a \in A$ o elemento $\overline{a \otimes 1} \in B$. Notemos que vale $\varphi \circ \bar{\varphi}_1(a) = \varphi(\overline{a \otimes 1}) = a$, $\forall a \in A \Rightarrow \varphi \circ \bar{\varphi}_1 = I_A$. Logo, a sequência exata cinde e assim, temos $A \oplus \Omega_{A|k} \cong \frac{B}{\mathbb{D}^2}$ $\square$

Seja $\pi : B \rightarrow B/\mathbb{D}^2$ a projeção canônica e tomemos a aplicação $d^* = \lambda_1 - \lambda_2$. Então, $d = \pi \circ d^* : A \rightarrow \Omega_{A|k}$ é uma derivação. De fato, tomando $x, y \in A$, notemos que $d(x + y) = \overline{(x + y) \otimes 1 - 1 \otimes (x + y)} = d(x) + d(y)$. Agora, verifiquemos a regra de Leibniz: $d(xy) = \overline{xy \otimes 1 - 1 \otimes xy}$. Uma vez que $(x \otimes 1 - 1 \otimes x)(y \otimes 1 - 1 \otimes y) \in \mathbb{D}^2$, isto é equivalente a dizer que $\overline{xy \otimes 1 - x \otimes y - y \otimes x + 1 \otimes xy} = \bar{0}$ em $\mathbb{D}^2$. Assim, $-\overline{1 \otimes xy} = \overline{xy \otimes 1 - x \otimes y - y \otimes x}$. Logo, $d(xy) = \overline{xy \otimes 1 - x \otimes y + xy \otimes 1 - y \otimes x}$. Ou seja, $d(xy) = x(\overline{y \otimes 1 - 1 \otimes y}) + y(\overline{x \otimes 1 - 1 \otimes x})$. Daí, temos $d(xy) = xd(y) + yd(x)$. Para cada $x \in A$, dizemos que dx é a *diferencial de x*.

O par $(\Omega_{A|k}, d)$ possui a seguinte propriedade universal: Se $D \in \text{Der}_k(A, M)$, existe um único homomorfismo $\psi \in \text{Hom}_A(\Omega_{A|k}, M)$ tal que $D = \psi \circ d$. De fato, na k -álgebra $B = A \otimes_k A$ temos:

$$\begin{aligned} x \otimes y &= xy \otimes 1 + x(1 \otimes y - y \otimes 1) \\ &= \lambda_1 \circ \mu(x \otimes y) - xd^*(y). \end{aligned}$$

Então, se $\sum_i x_i \otimes y_i \in \mathbb{D}$, temos $\mu(\sum_i x_i \otimes y_i) = 0$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \sum_i x_i \otimes y_i &= \lambda_1 \circ \mu(\sum_i x_i \otimes y_i) - \sum_i x_i d^*(y_i) \\ &= -\sum_i x_i d^*(y_i). \end{aligned}$$

Como $d^*(x) \pmod{\mathbb{D}^2} = d(y)$, qualquer elemento de $\Omega_{A|k} = \mathbb{D}/\mathbb{D}^2$ tem a forma $\sum_i x_i d(y_i)$, com $x_i, y_i \in A$. Ou seja, o conjunto $\{d(y) \mid y \in A\}$ gera $\Omega_{A|k}$ como um A -módulo. Isto assegura a unicidade de ψ : se tomarmos ψ e $\lambda \in \text{Hom}(\Omega_{A|k}, M)$ satisfazendo $\psi(dy) = \lambda(dy) \forall y \in A$, como ψ e λ são A -lineares e as diferenciais geram $\Omega_{A|k}$, obtemos que $\psi = \lambda$. Agora vamos estabelecer a existência de uma aplicação em $\text{Hom}(\Omega_{A|k}, M)$ que satisfaz tal propriedade. Denotemos por $A * M$, a k -álgebra $A \oplus M$ munida do produto $(x_1, m_1) * (x_2, m_2) = (x_1 x_2, x_1 m_2 + x_2 m_1)$. Seja $D \in \text{Der}_k(A, M)$ qualquer e consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \quad B &\longrightarrow A * M \\ (x \otimes y) &\longmapsto (xy, -xD(y)) \end{aligned}$$

Notemos que φ é um homomorfismo de k -álgebras, visto que

$$\begin{aligned}
 \varphi((x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2)) &= \varphi(x_1 x_2 \otimes y_1 y_2) \\
 &= (x_1 x_2 y_1 y_2, -x_1 x_2 D(y_1 y_2)) \\
 &= (x_1 y_1 x_2 y_2, -x_1 x_2 y_1 D(y_2) - x_1 x_2 y_2 D(y_1)) \\
 &= (x_1 y_1, -x_1 D(y_1)) * (x_2 y_2, -x_2 D(y_2)) \\
 &= \varphi(x_1 \otimes y_1) * \varphi(x_2 \otimes y_2).
 \end{aligned}$$

Seja $\alpha = \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathbb{D}$. Então, $\varphi(\alpha) = (0, -\sum_i x_i D(y_i))$. Assim, temos uma implicação induzida definida em $\mathbb{D}$ sobre M , $\phi : \mathbb{D} \rightarrow M$ dada por $\phi(\alpha) = -\sum_i x_i D(y_i)$. Agora, restringindo esta aplicação a $\mathbb{D}^2$ obtemos a aplicação nula, pois tomando um gerador $\beta = (x \otimes 1 - 1 \otimes x)(y \otimes 1 - 1 \otimes y) \in \mathbb{D}^2$, temos

$$\begin{aligned}
 \phi(\beta) &= (xy \otimes 1 - x \otimes y - y \otimes x + 1 \otimes xy) \\
 &= -xyD(1) + xD(y) + yD(x) - 1D(xy) \\
 &= D(xy) - D(xy) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Tendo isto, podemos definir a aplicação $\psi : \Omega_{A|k} \rightarrow M$ dada por $\psi(\sum_i \overline{x_i \otimes y_i}) = -\sum_i x_i D(y_i)$. É fácil verificar que ψ é um homomorfismo, além disso, se $x \in A$, então $(\psi \circ d)(x) = \psi(dx) = \psi(\overline{x \otimes 1 - 1 \otimes x}) = -xD(1) + D(x) = D(x)$, $\forall x \in A$. Enfim, $D = \psi \circ d$.

Como consequência deste fato, temos o isomorfismo

$$\text{Der}_k(A, M) \simeq \text{Hom}(\Omega_{A|k}, M).$$

A aplicação $d : A \rightarrow \Omega_{A|k}$ é chamada de *derivação universal* e denotada por $d_{A|k}$ se necessário especificar o anel k .

Exemplo 2.2. Se A é gerado como k -álgebra por um subconjunto $U \subset A$, então $\Omega_{A|k}$ é gerado como um A -módulo por $\{dx \mid x \in U\}$. De fato, se $a \in A$ então existem $x_1, \dots, x_n \in U$ e um polinômio $f(X) \in k[X_1, \dots, X_n]$ tal que $a = f(x_1, \dots, x_n)$. Da definição de derivação, temos

$$da = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) dx_i, \quad \text{onde } f_i = \partial f / \partial X_i.$$

Em particular, se $A = k[X_1, \dots, X_n]$, então $\Omega_{A|k} = AdX_1 + \dots + AdX_n$, e $dX_1, \dots, dX_n$ são linearmente independentes sobre A . Isto segue imediatamente do fato de que existem $D_i \in \text{Der}_k(A)$ tais que $D_i X_j = \delta_{ij}$.

Apresentamos agora a propriedade de localização do módulo de diferenciais de Kähler.

Proposição 2.2. Se $S \subset A$ é um conjunto multiplicativo qualquer, então

$$(\Omega_{A|k})_S \simeq \Omega_{A_S|k}.$$

Demonstração. A sequência exata de $A \otimes_k A$ -módulos

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}_{A|k} \longrightarrow A \otimes_k A \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

induz uma sequência exata de módulos sobre o anel $(A \otimes_k A)_{S \otimes_k S}$

$$0 \longrightarrow (\mathbb{D}_{A|k})_{S \otimes_k S} \longrightarrow (A \otimes_k A)_{S \otimes_k S} \longrightarrow (A)_{S \otimes_k S} \longrightarrow 0.$$

Mas, $(A \otimes_k A)_{S \otimes_k S} \simeq A_S \otimes_k A_S$ (via $\frac{a \otimes b}{r \otimes t} \mapsto \frac{a}{r} \otimes \frac{b}{t}$). Por outro lado, $A_{S \otimes_k S} \simeq A_S$ como $(A \otimes_k A)_{S \otimes_k S}$ -módulos. Usando a sequência exata de $(A_S \otimes_k A_S)$ -módulos,

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}_{A_S|k} \longrightarrow A_S \otimes_k A_S \longrightarrow A_S \longrightarrow 0,$$

temos $(\mathbb{D}_{A|k})_{S \otimes_k S} \simeq \mathbb{D}_{A_S|k}$. Então, pela definição, $(\Omega_{A|k})_S \simeq \Omega_{A_S|k}$. $\square$

Os próximos teoremas asseguram a existência de duas sequências exatas bastante úteis no estudo dos módulos diferenciais.

2.2.1 Sequências exatas fundamentais e critério jacobiano

Teorema 2.3 (Primeira Sequência Fundamental). *Dadas k -álgebras A e B sobre um anel k e um k -homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$, a sequência de B -módulos*

$$\Omega_{A|k} \otimes_A B \xrightarrow{\alpha} \Omega_{B|k} \xrightarrow{\beta} \Omega_{B|A} \longrightarrow 0$$

é exata, onde $\alpha : \Omega_{A|k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B|k}$ dada por $\alpha(d_{A|k} \otimes b) = b \cdot d_{B|k}(\varphi(a))$ é induzida por φ e β definida como $\beta(d_{B|k}(b)) = d_{A|k}(b)$.

Demonstração. Precisamos mostrar que $\text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$. Observemos que, pelo fato de $d_{B|A}$ ser uma A -derivação, temos $d_{B|A} \circ \varphi \equiv 0$. Desse modo, $(\beta \circ \alpha)(d_{A|k}(a) \otimes b) = \beta(b \cdot d_{B|k}(\varphi(a))) = b \cdot d_{B|A}(\varphi(a)) = b \cdot (d_{B|A} \circ \varphi)(a) = 0 \Rightarrow \beta \circ \alpha \equiv 0$. Daí, $\text{Im}(\alpha) \subseteq \text{Ker}(\beta)$.

Para obtermos a inclusão contrária é suficiente provarmos que para um B -módulo T qualquer, a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{B|A}, T) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}_B(\Omega_{B|k}, T) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}_B(\Omega_{A|k} \otimes_A B, T)$$

é exata, onde as aplicações α^* e β^* definidas como $\alpha^*(f) = f \circ \alpha$ e $\beta^*(g) = g \circ \beta$ pertencem, respectivamente, a $\text{Hom}_B(\Omega_{A|k} \otimes_A B, T)$ e $\text{Hom}_B(\Omega_{B|A}, T)$. De fato, supondo que isto aconteça, fixemos $T = \Omega_{B|k}/\text{Im}(\alpha)$ e consideremos a projeção $\pi : \Omega_{B|k} \rightarrow T$. Se $\xi \in \Omega_{A|k} \otimes_A B$, então $(\pi \circ \alpha)(\xi) = \alpha(\xi) \pmod{\text{Im}(\alpha)} = 0$ em T . Ou seja, $\pi \in \ker(\alpha^*) = \text{Im}(\beta^*)$. Logo, podemos escrever $\pi = \beta^*(g) = g \circ \beta$ para algum $g \in \text{Hom}_B(\Omega_{B|A}, T)$, e isto significa que $\ker(\beta) \subseteq \ker(\pi)$. Uma vez que $\ker(\pi) = \text{Im}(\alpha)$, obtemos $\ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha)$.

Assim, teremos concluído a demonstração se mostrarmos a exatidão da sequência

$$0 \rightarrow \text{Der}_A(B, T) \xrightarrow{\iota} \text{Der}_k(B, T) \xrightarrow{\phi} \text{Der}_k(A, T),$$

obtida por meio dos isomorfismos: $\text{Hom}_B(\Omega_{B|A}, T) \simeq \text{Der}_A(B, T)$, $\text{Hom}_B(\Omega_{B|k}, T) \simeq \text{Der}_k(B, T)$ e $\text{Hom}_B(\Omega_{A|k} \otimes_A B, T) \simeq \text{Hom}_A(\Omega_{A|k}, \text{Hom}_B(B, T)) \simeq \text{Hom}_A(\Omega_{A|k}, T) \simeq \text{Der}_k(A, T)$. A aplicação ι é a inclusão natural e $\phi(D) = D \circ \varphi$, para $D \in \text{Der}_k(B, T)$. Seja $\rho : k \rightarrow A$ o homomorfismo que torna A uma k -álgebra. Por definição, $D \in \text{Der}_k(B, T) \Leftrightarrow D \in \text{Der}_A(B, T)$ e $D \circ \varphi \circ \rho \equiv 0$. Como $\text{Ker}(\phi) = \{D \in \text{Der}_k(B, T) \mid D \circ \varphi \equiv 0\}$ e $\text{Im}(\iota) = \text{Der}_A(B, T)$, segue-se que $\ker(\phi) = \text{Im}(\iota)$ e isto conclui a demonstração. $\square$

Consideremos o caso particular $B = A/I$, onde $I \subset A$ é um ideal e $\varphi = \pi$ é o homomorfismo canônico. Pelo teorema anterior,

$$\Omega_{A|k} \otimes_A B \xrightarrow{\alpha} \Omega_{B|k} \xrightarrow{\beta} \Omega_{B|A} \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de B -módulos. Observemos que $d_{B|A} \circ \pi \equiv 0$, donde $\Omega_{B|A} = 0$. Consequentemente, β é a aplicação nula e α é uma sobrejeção. Se tomarmos a aplicação $I \rightarrow \Omega_{A|k} \otimes_a B$ dada por $x \mapsto d_{A|k}(x) \otimes \bar{1}$ (a barra denota congruência módulo I), esta induz uma aplicação B -linear $\delta : I/I^2 \rightarrow \Omega_{A|k} \otimes_a B$, definida do seguinte modo: $\delta(x \pmod{I^2}) = d_{A|k}(x) \otimes \bar{1}$, $x \in I$.

Teorema 2.4 (Segunda Sequência Exata Fundamental). *Denote $B = A/I$. A sequência*

$$\frac{I}{I^2} \xrightarrow{\delta} \Omega_{A|k} \otimes_a B \xrightarrow{\alpha} \Omega_{B|A} \rightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Dado $x \in I$, temos $(\alpha \circ \pi)(x \pmod{I^2}) = \alpha(d_{A|k}(x) \otimes \bar{1}) = d_{B|k}(\pi(x)) = 0$. Logo, $\text{Im}(\delta) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$. Assim como na prova do Teorema 2.1, vamos mostrar a

exatidão da sequência induzida

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{B|k}, T) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}_B(\Omega_{A|k} \otimes_A B, T) \xrightarrow{\delta^*} \text{Hom}_B\left(\frac{I}{I^2}, T\right)$$

para qualquer B -módulo T . Podemos reescrevê-la como

$$0 \longrightarrow \text{Der}_k(B, T) \xrightarrow{\phi} \text{Der}_k(A, T) \xrightarrow{\eta} \text{Hom}_A(I, T),$$

onde $\phi(D) = D \circ \pi$ e o homomorfismo η é a restrição a I . A inclusão $\text{Im}(\phi) \subseteq \text{Ker}(\eta)$ é direta. Agora, sejam $d \in \text{Ker}(\eta)$ e $D \in \text{Der}_k(B, T)$ dada por $D(\bar{a}) = d_{B|A}(a)$. Notemos que esta derivação está bem-definida, visto que $\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow a - b \in I$. Desse modo, $d_{B|A}(a - b) = 0 \Rightarrow d_{B|A}(a) = d_{B|A}(b) \Rightarrow D(\bar{a}) = D(\bar{b})$. Além disso, $d_{B|A}(a) = D(\bar{a}) = (D \circ \pi)(a)$, ou seja, $d_{B|A}(a) = \phi(D)$. Portanto, $\text{Ker}(\eta) \subseteq \text{Im}(\phi)$. $\square$

Exemplo 2.3. Sejam k um anel Noetheriano, $A = k[X_1, \dots, X_n]$ anel de polinômios, $I = (f_1, \dots, f_m)$ e $B = A/I = k[x_1, \dots, x_n]$, onde $x_i = X_i(\text{mod } I)$. Já vimos que, neste caso, $\Omega_{A|k} \simeq A^n$ e assim, $\Omega_{A|k} \otimes_A B \simeq A^n \otimes_A B \simeq B^n$. Logo, a Segunda Sequência Fundamental se escreve como

$$\frac{I}{I^2} \xrightarrow{\delta} B^n \xrightarrow{\alpha} \Omega_{B|A} \longrightarrow 0,$$

onde $\delta(f(\text{mod } I^2)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, $f \in I$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i}(\text{mod } I)$. Consideremos o homomorfismo $\phi : B^m \longrightarrow I/I^2$, dado por $\phi(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m) = \sum_{i=1}^m g_i f_i(\text{mod } I^2)$. Esta aplicação está bem-definida, uma vez que tomando $h_1, \dots, h_m$ polinômios tais que $h_i - g_i \in I$, $1 \leq i \leq m$, então $(h_i f_i - g_i f_i) \in I^2$ e isto implica em $(\sum_{i=1}^m h_i f_i - \sum_{i=1}^m g_i f_i) \in I_2$, resultando $\phi(\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m) = \phi(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m)$. Agora, consideremos $\varphi = \delta \circ \phi$. Então,

$$\varphi(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m) = \delta\left(\sum_{i=1}^m g_i f_i(\text{mod } I^2)\right) = \left(\frac{\partial(\sum_i g_i f_i)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(\sum_i g_i f_i)}{\partial x_n}\right),$$

para cada $(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m) \in B^m$. Como $f_i = 0$ em B , segue-se que $\frac{\partial(\sum_i g_i f_i)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m g_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Ou seja,

$$\varphi(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m) = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m) \cdot \bar{\Theta},$$

onde $\bar{\Theta}$ é matriz jacobiana usual Θ tomada módulo o ideal I .

Enfim, a sequência exata

$$B^m \xrightarrow{\varphi} B^n \longrightarrow \Omega_{B|k} \longrightarrow 0,$$

nos permite escrever $\Omega_{B|k} = \text{Coker}(\varphi)$. Ou seja, $\Omega_{B|k}$ é o conúcleo da matriz $\bar{\Theta}$. Logo, $\Omega_{B|k} \simeq B^n/L$, onde L é o submódulo de B^n gerado por $df_i = \sum_j^n (\partial f_i / \partial X_j) dX_j$, $1 \leq i \leq m$.

Proposição 2.5. Se B é uma k -álgebra finitamente gerada (ou localização de tal k -álgebra), então $\Omega_{B|k}$ é um B -módulo finitamente gerado.

Demonstração. No exemplo 2.2, verificamos a validade da primeira parte. Sejam $R = A/I$, com $A = k[X_1, \dots, X_n]$ e $I \subset A$ ideal. Suponhamos $B = R_S$, onde $S \subset R$ é um conjunto multiplicativo. Pelo exemplo anterior, $\Omega_{R|k}$ pode ser visto como um quociente de R^n . Consequentemente, $(\Omega_{R|k})_S$ pode ser visualizado como um quociente de $R_S^n = B^n$. Assim, pela Proposição 1.1, $(\Omega_{R|k})_S$ é finitamente gerado. O resultado segue da Proposição 2.2. $\square$

Por fim, vamos apresentar uma versão do critério jacobiano. Antes, necessitamos de resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [14], assim como todos os resultados e definições apresentados nessa seção.

Proposição 2.6. Seja $(A, \mathfrak{m})$ uma anel local contendo um corpo k isomorfo ao corpo residual $A/\mathfrak{m}$. Então, a aplicação $\delta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{A|k} \otimes_A k$ (da Segunda Sequência Fundamental) é um isomorfismo de k -espaços vetoriais.

Proposição 2.7. Seja $(B, \mathfrak{m})$ um domínio local Noetheriano com corpo residual $k = B/\mathfrak{m}$ e corpo de frações K . Suponhamos que M é um B -módulo finitamente gerado e que $\dim_k(M \otimes_B k) = \dim_K(M \otimes_B K) = r$. Então, M é B -livre de posto r .

Para o próximo resultado recordemos algumas noções da Teoria dos Corpos, que também serão úteis no terceiro Capítulo. Uma extensão de corpos $K|k$ é dita *separavelmente gerada sobre k* , se K possuir uma base de transcendência $\{x_\lambda\}$ tal que a extensão de corpos $K|k(\dots, x_\lambda, \dots)$ seja algébrica e separável. Dizemos que um corpo k é *perfeito* se toda extensão algébrica $L \supset k$ for separável.

Proposição 2.8. Seja $K|k$ uma extensão de corpos finitamente gerada sobre k . Então:

- (1) $\dim(\Omega_{K|k}) \geq \text{gr.tr}(K|k)$;
- (2) Ocorre igualdade em (1) se, e somente se, $K|k$ é separavelmente gerada;
- (3) k perfeito implica em $K|k$ separavelmente gerada.

Finalmente,

Teorema 2.9 (Critério Jacobiano). *Seja $(B, \mathfrak{m})$ um anel local contendo um corpo k isomorfo a $B/\mathfrak{m}$. Suponha k perfeito e que B é uma localização de uma k -álgebra finitamente gerada. Se $r = \dim(B)$, então*

$$\Omega_{B|k} \simeq B^r \Leftrightarrow (B, \mathfrak{m}) \text{ é regular.}$$

Demonstração. Suponha que $\Omega_{B|k}$ é B -livre com posto $r = \dim(B)$, isto é, $\Omega_{B|k} \simeq B^r$. Então, $\Omega_{B|k} \otimes_B k \simeq B^r \otimes_B (B/\mathfrak{m}) \simeq k^r$. Pela Proposição 2.6, temos $\Omega_{B|k} \otimes_B k \simeq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Logo, $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim_k(\Omega_{B|k} \otimes_B k) = \dim_k(k^r) = r = \dim(B)$. Portanto, $(B, \mathfrak{m})$ é regular.

Reciprocamente, supondo B regular com dimensão r , temos $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = r$. Consequentemente, a Proposição 2.6 implica em $\dim(\Omega_{B|k} \otimes_B k) = r$. Além disso, por hipótese, B é um domínio e podemos considerar seu corpo de frações K . Pondo $S = R \setminus (0)$, temos $\Omega_{B|k} \otimes K = \Omega_{B|k} \otimes B_S \simeq (\Omega_{B|k})_S \simeq \Omega_{B_S|k} = \Omega_{K|k}$. Como k é perfeito, a extensão $K|k$ é separavelmente gerada (Proposição 2.8, (3)) e assim, $\dim_k(\Omega_{B|k} \otimes K) = \text{gr.tr}(K|k)$ (Proposição 2.6, (1)). Por um lado $\dim(\Omega_{B|k} \otimes K) = \dim_k(\Omega_{K|k})$, e por outro, $\text{gr.tr}(K|k) = \dim(B)$. Logo, $\dim(\Omega_{B|k} \otimes K) = r$. Agora, aplicando a Proposição 2.5, temos $\Omega_{B|k}$ finitamente gerado. Assim, todas as hipóteses da Proposição 2.7 são satisfeitas, de modo que $\Omega_{B|k} \simeq B^r$. $\square$

Capítulo 3

Álgebra Simétrica e o Dual Jacobiano

No primeiro capítulo, apresentamos na seção 1.3 a definição da álgebra simétrica de um módulo, sua propriedade fundamental e alguns exemplos. Deixamos um estudo mais geral dessa álgebra para este capítulo, por meio de alguns resultados e do conceito de *Dual Jacobiano* apresentados por Simis, Ulrich e Vasconcelos, no artigo intitulado *Jacobian Dual Fibrations* ([20]).

Ao longo deste capítulo consideraremos módulos com apresentação linear, isto é, módulos cujas matrizes de apresentação possuem apenas entradas lineares. A álgebra simétrica de tais módulos possui propriedades únicas e pode ser vista por um outro ângulo, por meio do dual jacobiano.

Dado um A -módulo M com uma apresentação

$$A^m \xrightarrow{\varphi} A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad \varphi = (a_{ij}),$$

a álgebra simétrica de M é o anel quociente $A[T_1, \dots, T_n]/J$ (ver 1.15), onde J é o ideal gerado pelas formas lineares

$$f_j = a_{1j}T_1 + \dots + a_{nj}T_n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Assim, o ideal de definição de sua álgebra simétrica pode ser escrito, de maneira única, por um produto de matrizes

$$J = [f_1, \dots, f_m] = T \cdot \varphi, \quad T = [T_1, \dots, T_n].$$

Podemos reescrever as equações em J e obter uma dualidade para $\text{Sym}(M)$ ([28], Capítulo 1). Seja $X = [X_1, \dots, X_d]$ um ideal contendo as entradas de φ . Então,

podemos escrever

$$J = X \cdot B(\varphi),$$

onde $B = B(\varphi)$ é uma matriz $d \times m$, cujas entradas são formas lineares nas T_i variáveis e que depende da escolha do conjunto de geradores $\{X_1, \dots, X_d\}$. Quando as entradas da matriz φ são formas lineares nas variáveis X_i 's, com coeficientes em algum subanel k , então B é bem-definida. De fato, quando φ é a matriz jacobiana de J com respeito a T , $B(\varphi)$ é a transposta da matriz jacobiana de J com respeito a X . Podemos associar a matriz B a um homomorfismo $B : k[T]^m \longrightarrow k[T]^d$, por abuso de terminologia. Esse homomorfismo define um $k[T]$ -módulo $F = \text{coker}(B)$ e o denominamos *dual jacobiano* de M . O termo “dualidade” refere-se ao fato de que na construção, tomamos a transposta da matriz jacobiana.

Vamos assumir que $A = k[X] = k[X_1, \dots, X_d]$ é um anel polinomial e M é um A -módulo finito com uma apresentação linear

$$A^m \xrightarrow{\varphi} A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

onde as entradas de φ são lineares. Existe uma matriz B cujas entradas são formas lineares em $k[T]$ e que satisfaz a condição $T \cdot \varphi = X \cdot B$. Considere o conúcleo F de B , cuja apresentação linear é

$$k[T]^m \xrightarrow{B} k[T]^d \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Neste caso, existe um isomorfismo entre as respectivas álgebras simétricas dos módulos M e F , a saber, $\text{Sym}_A(M) \simeq k[X, T]/\mathcal{J}(\varphi) \simeq \text{Sym}_{k[T]}(F)$, onde $\mathcal{J}(\varphi)$ é gerado pelas entradas da matriz produto $T \cdot \varphi = X \cdot B$ ([16]).

Esta dualidade permite a alternância entre as representações, de modo que uma questão sobre um anel d -dimensional, transforma-se na mesma questão para um módulo gerado por d elementos, sobre outro anel. Além disso, quando $\text{Sym}_A(M)$ é um domínio, vale $d + \text{rk}(M) = n + \text{rk}(F)$. De fato, se $\text{Sym}_A(M)$ é A -livre de torção, então M satisfaz $\mathcal{F}_0$ e a igualdade segue de resultados obtidos em [8] que discutiremos adiante. Podemos obter mais informações sobre a matriz B se considerarmos algumas condições:

Proposição 3.1. Seja M um módulo sobre $k[X_1, \dots, X_d]$, com uma matriz de apresentação φ , de tamanho $n \times d$, cujas linhas são sizigias das variáveis $X_1, \dots, X_d$. Então, B é uma matriz antissimétrica.

Demonstração. Como $X \cdot B = T \cdot \varphi$ e as linhas de φ são sizigias das variáveis $X_1, \dots, X_d$, temos

$$X \cdot B \cdot X^t = T \cdot \varphi \cdot X^t = 0.$$

Ou seja, pondo $B = (b_{ij})_{(d \times d)}$ e $\varphi = (a_{ij})_{(n \times d)}$, temos

$$X_1 \cdot \sum_{i=1}^d X_i b_{i1} + X_2 \cdot \sum_{i=1}^d X_i b_{i2} + \dots + X_d \cdot \sum_{i=1}^d X_i b_{id} = 0$$

Colocando as variáveis em evidência, começando por X_1 , obtemos

$$X_1 \cdot (X_1 b_{11} + X_2 b_{21} + \dots + X_d b_{d1} + X_2 b_{12} + \dots + X_d b_{1d}) + \dots + X_d \cdot (X_d b_{dd}) = 0.$$

Mas, isto ocorre se, e só se, cada coeficiente for nulo. Então, para X_1 , temos

$$\begin{aligned} X_1 b_{11} + X_2 b_{21} + \dots + X_d b_{d1} + X_2 b_{12} + \dots + X_d b_{1d} &= 0 \\ \Rightarrow X_1 b_{11} + X_2(b_{21} + b_{12}) + \dots + X_d(b_{d1} + b_{1d}) &= 0 \end{aligned}$$

Novamente, isto só acontece se cada um dos coeficientes for nulo. Deste modo, temos $b_{11} = 0, b_{1j} = -b_{j1}$, para $j = 1, \dots, d$. De modo análogo para as demais variáveis X_i . Assim, $b_{ii} = 0, \forall i = 1, \dots, d$ e $b_{ij} = -b_{ji}$ para $j \neq i$, com $i, j = 1, \dots, d$. Portanto, B é uma matriz antissimétrica. $\square$

Consideremos o seguinte lema:

Lema 3.2. Sejam A um anel comutativo, $X = X_1, \dots, X_d$ elementos de A e $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d)$ um bordo de grau 1 do complexo de Koszul em X . Então, existe uma matriz antissimétrica C , de tamanho $d \times d$ e com entradas lineares em A , tal que

$$\mathbf{a} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{C}.$$

Demonstração. O conjunto das matrizes antissimétricas é um espaço vetorial. Assim, a combinação linear de matrizes antissimétricas é ainda uma matriz antissimétrica. Por essa razão, é suficiente considerar o caso em que $\mathbf{a}$ é uma relação trivial de $\mathbf{X}$. Então, podemos assumir que $(a_1, \dots, a_d) = (X_2, -X_1, 0, \dots, 0)$. Agora, tomemos

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & & \\ & & & \text{O} \end{pmatrix}$$

$\square$

Proposição 3.3. Sejam A um anel Noetheriano local, $X = X_1, \dots, X_d$ uma sequência

A -regular e M um A -módulo com uma apresentação linear

$$A^d \xrightarrow{\varphi} A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

tal que $\varphi \cdot X^t = 0$ e $S = A[T] = A[T_1, \dots, T_n]$. Então, existe uma matriz antissimétrica B de tamanho $d \times d$, com entradas lineares nas variáveis T , de modo que

$$T \cdot \varphi = X \cdot B.$$

Demonstração. Seja φ_i a i -ésima linha de φ . Como $\varphi_i \cdot X^t = 0$ e X é uma sequência regular, temos φ_i pertencente ao módulo dos bordos de grau 1 do complexo de Koszul em X . Então, pelo lema anterior, existe uma matriz antissimétrica C_i com entradas em A tal que $\varphi_i = X \cdot C_i$. Agora, basta tomar $B = \sum_{i=1}^n c_i T_i$ $\square$

Nosso interesse em estudar a álgebra simétrica de um módulo, traduz-se em explorar condições sob as quais obtemos a Cohen-Macaulicidade de tal álgebra. No capítulo anterior, comentamos que a Cohen-Macaulicidade da álgebra simétrica implica na condição $\mathcal{F}_0$ e quando essa álgebra é um domínio, vale $\mathcal{F}_1$. Agora, iremos ver uma situação em que a recíproca acontece.

Suponhamos que $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local regular com $\dim(A) = d \geq 3$ e M é um A -módulo com uma resolução livre minimal da forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} A^d \xrightarrow{\varphi} A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

$$\psi = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_d \end{bmatrix}$$

com os X_i 's formando uma sequência A -regular. Estas hipóteses equivalem a dizer que o segundo número de Betti, $\beta_2(M)$, é igual a 1, $\text{pd}(M_{\mathfrak{q}}) \leq 1$ para todo ideal primo $\mathfrak{q}$ de A tal que $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$ e, uma vez que $\text{rk}(M) = n - d + 1$, temos $\mu(M) = \dim(A) + \text{rk}(M) - 1$ (Proposição 1.5, item (4)). Pondo $Q = A[T] = A[T_1, \dots, T_n]$ e $X = [X_1, \dots, X_d]$, pela Proposição 3.3, existe uma matriz B antissimétrica de tamanho $d \times d$ com entradas lineares em Q , tal que $T \cdot \varphi = X \cdot B$.

Teorema 3.4. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ e um A -módulo M definidos como acima. Suponha que $d = \dim(A)$ é um número ímpar.*

- (1) *Se M satisfaz a condição $\mathcal{F}_0$, então $\text{Sym}(M)$ é um anel Cohen-Macaulay de tipo 2.*

(2) Se M satisfaz $\mathcal{F}_1$, então M é de tipo linear.

Para a demonstração desse teorema precisamos de um resultado obtido por Simis e Vasconcelos em [18] que fornece uma estimativa para $\dim(\text{Sym}(M))$, o qual vamos apresentar aqui como lema. Antes disso, consideremos a definição do *número de Foster*:

Definição 3.1. Sejam A um anel e M um A -módulo. O número de Forster de M é

$$b(M) = \sup_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \{\dim(A/\mathfrak{p}) + \mu(M_{\mathfrak{p}})\}.$$

Huneke e Rossi mostraram em [8] que $\dim(\text{Sym}(M)) = b(M)$ e $b_0(M) = \dim(A) + \text{rk}(M)$ é um limite inferior para $b(M)$. Consideremos $A^m \xrightarrow{\varphi} A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$, uma apresentação de M , e a condição (*):

$$\text{ht}(I_t(\varphi)) \geq \text{rk}(\varphi) - t + 1, \quad 1 \leq t \leq \text{rk}(\varphi).$$

Notemos que (*) significa que M satisfaz a condição $\mathcal{F}_0$. Seja $m_0 = \text{rk}(\varphi)$, de modo que $\text{rk}(M) = n - m_0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que A é local com $\dim(A) = d$. Consideremos agora, a cadeia descendente de conjuntos afins fechados

$$V(I_{m_0}(\varphi)) \supseteq \dots \supseteq V(I_1(\varphi))$$

e um ideal primo $\mathfrak{p}$ de A . Se $I_{m_0}(\varphi) \not\subseteq \mathfrak{p}$, temos $\text{rk}(M/\mathfrak{p}M) = \mu(M_{\mathfrak{p}}) = n - m_0$ (Proposição 1.6, item(3)). Daí, $\dim(A/\mathfrak{p}) + \text{rk}(M/\mathfrak{p}M) \leq \dim(A) + \text{rk}(M) = b_0(M)$.

Por outro lado, se $\mathfrak{p} \in V(I_t(\varphi)) \setminus V(I_{t-1}(\varphi))$ temos, pela mesma razão anterior, $\text{rk}(M/\mathfrak{p}M) = n - t + 1$. Se (*) não é violada em t , então $\text{ht}(\mathfrak{p}) \geq m_0 - t + 1$ e assim, $\dim(A/\mathfrak{p}) + \text{rk}(M/\mathfrak{p}M) \leq \dim(A) - \text{ht}(\mathfrak{p}) + \text{rk}(M/\mathfrak{p}M) \leq \dim(A) - m_0 + t - 1 + n - t + 1 = \dim(A) + \text{rk}(M) = b_0(M)$. Isto prova o seguinte resultado:

Lema 3.5. Sejam A um domínio catenário equidimensional (Definição 1.13) e M um A -módulo finito que satisfaz a condição (*). Então,

$$\dim(\text{Sym}_A(M)) = b_0(M)$$

.

Agora, podemos provar o teorema.

Demonstração. (**Teorema 3.4**) Segue da definição de B que $\text{Sym}(M) = Q/(X \cdot B)$. Note que A é Cohen-Macaulay, portanto, catenário (prova do Teorema 1.14) e equidimensional (isto é válido devido ao Teorema 1.11, item (4)). Logo, supondo que M satisfaz $\mathcal{F}_0$, temos $\dim(\text{Sym}(M)) = d + \text{rk}(M) = n + 1$, pelo lema anterior. Já a Proposição

1.13 nos garante a Cohen-Macaulicidade de Q e novamente usando o Teorema 1.11 (item (4)), obtemos que $\text{ht}(X \cdot B) = \dim(Q) - \dim(\text{Sym}(M)) = d + n - (n + 1) = d - 1$. Como B é uma matriz antissimétrica $d \times d$ com entradas homogêneas, segue-se da Proposição A.2, a existência de um ideal I perfeito (isto é, $\text{grade}(I) = \text{pd}(A/I)$) e quase interseção completa (é tal que $\mu(I) = \text{ht}(I) + 1$), o qual é vinculado ao ideal $(X \cdot B)$ via *linkage* ([10], definição 2.1 e prova da proposição 5.9). Então, $(X \cdot B)$ é um ideal perfeito e isso prova (a), uma vez que um ideal $J \subset A$ é dito perfeito se, e somente se, A/J é Cohen-Macaulay.

Agora, suponhamos que M satisfaz $\mathcal{F}_1$. Como $\text{pd}(M_{\mathfrak{q}}) \leq 1$ para todo $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m} \in \text{Spec}(A)$, segue-se do Teorema A.3 que $M_{\mathfrak{q}}$ é de tipo linear. Então, qualquer elemento de A -torção de $\text{Sym}(A)$ é aniquilado por uma potência de $\mathfrak{m}$. Por outro lado, nossa hipótese implica na validade da parte (a). Ou seja, $\text{Sym}(A)$ é Cohen-Macaulay. Logo, $\text{ht}(\mathfrak{m}\text{Sym}(A)) = \dim(\text{Sym}(A)) - \dim(\text{Sym}(A)/\mathfrak{m}\text{Sym}(A)) = n + 1 - \mu(M) = 1$. Daí, $\mathfrak{m}\text{Sym}(A)$ contém um elemento não divisor de zero de $\text{Sym}(A)$. Portanto, $\text{Sym}(A)$ é livre-de-torção e por definição, temos M de tipo linear. $\square$

Teorema 3.6. *Sejam M um A -módulo definido como no teorema 3.4 e $F = \text{coker } B$ sobre o anel $Q = A[T]$. Escreva G e H para os ideais maximais irrelevantes de $\text{Sym}_A(M)$ e $\text{Sym}_Q(F)$, respectivamente. Se M satisfaz $\mathcal{F}_0$, então $\text{rk}_Q(F) = 1$ e $(\text{Sym}_Q(F))_H$ é uma deformação de $\text{Sym}_M(F)_G$.*

Demonstração. Por definição, um anel Noetheriano local S é uma deformação de um anel Noetheriano local R , se $R \simeq S/(y)$ com (y) uma S -sequência regular. Pelo teorema anterior, $\text{Sym}_A(M)$ é Cohen-Macaulay com dimensão igual a $n + 1$. Uma vez que $(\text{Sym}_A(M), G)$ e $(\text{Sym}_Q(F), H)$ são anéis locais-graduados, temos $\dim(\text{Sym}_A(M)) = \dim((\text{Sym}_A(M))_G)$ e $\dim(\text{Sym}_Q(F)) = \dim((\text{Sym}_Q(F))_H)$. Seja $W = [W_1 \cdots W_d]$, onde cada W_i é uma nova variável sobre Q e $\text{Sym}_Q(F) \simeq \frac{Q[W]}{(W \cdot B)}$. Dessa representação, vemos que a álgebra $(\text{Sym}_Q(F))_H$ módulo a sequência $w_1 - x_1, \dots, w_d - x_d$ é especializada para $(\text{Sym}_M(F))_G$. Ou seja,

$$\frac{(\text{Sym}_Q(F))_H}{(w_i - x_i, 1 \leq i \leq d)} \simeq \text{Sym}_M(F)_G.$$

Então, o que temos de fazer é provar que $w_1 - x_1, \dots, w_d - x_d$ é uma $(\text{Sym}_Q(F))_H$ -sequência regular. Façamos $I := (w_i - x_i, 1 \leq i \leq d) \subset (\text{Sym}_Q(F))_H$. Resulta do isomorfismo acima que

$$\dim(\text{Sym}_Q(F)) = \dim((\text{Sym}_Q(F))_H) = \dim(\text{Sym}_A(M)) + \text{ht}(I) \leq n + d + 1,$$

e a desigualdade decorre do *Teorema do Ideal Primo de Krull* (TIP) (A.4). Como

$Q[W]$ é Cohen-Macaulay, sabemos que $\text{ht}(W \cdot B) = \dim(Q[W]) - \dim(\text{Sym}_Q(F)) = 2d+n - \dim(\text{Sym}_Q(F))$. Daí, obtemos $\text{ht}(W \cdot B) \geq 2d+n - (n+1+d) = d-1$. De forma análoga ao teorema anterior, segue da Proposição A.2 que o ideal $(W \cdot B)$ é perfeito com altura igual a $d-1$, implicando na Cohen-Macaulicidade de $\text{Sym}_Q(F)$. Uma vez que tal propriedade mantém-se por localização, o anel $(\text{Sym}_Q(F))_H$ é Cohen-Macaulay. Logo, pelo Teorema 1.11 (item (4)), temos

$$\dim((\text{Sym}_Q(F))_H) = \dim(Q[W]) - \text{ht}(W \cdot B) = \dim(\text{Sym}_A(M)) + d.$$

Agora, notemos que $\dim((\text{Sym}_Q(F))_H/I) = n+1$. De fato, visto que $(\text{Sym}_Q(F))_H$ é Cohen-Macaulay e $\text{ht}(I) \leq d$ (TIP), temos

$$\dim(I) = \dim((\text{Sym}_Q(F))_H) - \text{ht}(I) \geq d+n+1-d = n+1.$$

Suponhamos que vale a desigualdade estrita. Então, pela Proposição 1.7, segue-se que

$$d+n+1 \leq \dim(I) + d < n+d+1,$$

mas isto é um absurdo. Disto, segue-se, novamente da proposição 1.7, que $w_1 - x_1, \dots, w_d - x_d$ é parte de um sistema de parâmetros do anel $(\text{Sym}_Q(F))_H$. Uma vez que para um módulo Cohen-Macaulay, $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é uma M -sequência regular se, e somente se, $\dim(M/\mathbf{x}M) = \dim(M) - r$ (Teorema 1.11, item(3)), segue-se que $w_1 - x_1, \dots, w_d - x_d$ é uma sequência regular em $(\text{Sym}_Q(F))_H$.

Agora, a segunda parte do teorema. Decorre da Proposição 1.5 (item(4)) que $\text{rk}_Q(F) = d - \text{rank}(B)$. Como B é uma matriz antissimétrica, seu posto é um número par. Assim, pode ser no máximo igual a $d-1$. Daí, $\text{rk}_Q(F) \geq 1$. Por outro lado, $\dim(\text{Sym}_Q(F)) \geq b_0(F) = \dim(Q) + \text{rk}(F)$. Assim, $\text{rk}_Q(F) \leq \dim(\text{Sym}_Q(F)) - \dim(Q) = n+1+d-d-n = 1$. $\square$

Exemplo 3.1. Sejam x_1, x_2, x_3 uma sequência regular em um anel regular local $(A, \mathfrak{m})$ com dimensão igual a 3. Considere a matriz 3×4

$$\Lambda = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ x_2 & \star & & \\ x_3 & & & \end{pmatrix}$$

com entradas em $\mathfrak{m}$, tal que $\text{ht } I_3(\Lambda) \geq 2$. Seja M o ideal gerado pelos menores de ordem 3 da matriz Λ obtidos mantendo-se fixo a primeira coluna. Assim, $\mu(M) = 3$, $\text{rk}(M) = 1$ e o ideal $I_1(\varphi) = I_3(\Lambda)$, onde φ é matriz de apresentação de M . Então, M satisfaz a condição $\mathcal{F}_0$ e assim, satisfaz as hipóteses dos Teoremas 3.4 e 3.6.

Capítulo 4

Álgebra Simétrica do Módulo de Diferenciais de Kähler

Neste capítulo estudamos a álgebra simétrica de um módulo específico: *o módulo de diferenciais de Kähler* ($\Omega_{A/k}$) sobre um anel A reduzido, essencialmente de tipo finito sobre um corpo perfeito k (uma álgebra é dita essencialmente de tipo finito sobre um corpo k , quando é a localização de uma álgebra finitamente gerada sobre k). Veremos condições sob as quais relacionamos fortemente as propriedades de ser reduzido e livre de torção, bem como ser reduzido e regular.

Recordamos, inicialmente, as *condições de Serre*: um A -módulo M satisfaz a condição (S_k) de Serre se $\text{depth}(M) \geq \min(k, \dim(M_{\mathfrak{p}}))$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A , e o anel A satisfaz a condição (R_k) de Serre, se $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ e $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq k$, então $A_{\mathfrak{p}}$ é regular. Todo anel reduzido satisfaz a condição (R_0) e (S_1) de Serre, isto é, todo primo associado é minimal e a localização nestes primos é regular.

Como estamos supondo A reduzido, temos $\text{Ass}(A) = \text{Min}(A)$ e $A_{\mathfrak{p}}$ regular para todo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$. Pelo critério jacobiano (2.9), $\Omega_{A_{\mathfrak{p}}/k}$ é $A_{\mathfrak{p}}$ -livre. Como $(\Omega_{A/k})_{\mathfrak{p}} \simeq \Omega_{A_{\mathfrak{p}}/k} \ \forall \ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, segue-se que o A -módulo $\Omega_{A/k}$ é genericamente livre (dizemos que um A -módulo M é genericamente livre se $M_{\mathfrak{p}}$ é $A_{\mathfrak{p}}$ -livre para todo ideal primo associado $\mathfrak{p}$ de A).

Denotaremos a álgebra simétrica e a álgebra de Rees de $\Omega_{A/k}$ por $\mathbb{S}_{A/k} := \text{Sym}_A(\Omega_{A/k})$ e $\mathbb{R}_{A/k} := \mathcal{R}_A(\Omega_{A/k})$, respectivamente. Quando A é um anel regular, $\mathbb{S}_{A/k}$ e $\mathbb{R}_{A/k}$ coincidem, mas caso contrário, podem apresentar diversas diferenças e suas respectivas propriedades exercem diferentes impactos sobre o anel de base A . Os resultados desse capítulo, exceto os Lemas 4.1 e 4.2, encontram-se originalmente no artigo de Simis, Ulrich e Vasconcelos, *Tangent Algebras* ([21]).

Antes de apresentarmos um dos mais importantes teoremas deste trabalho, precisamos de dois lemas os quais veremos a seguir.

Lema 4.1. Seja B uma A -álgebra. Se $B_{\mathfrak{p}}$ é reduzido para todo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$, então $B/\mathcal{T}_A(B)$ é reduzido.

Demonstração. De fato, pela Definição 1.3,

$$\mathcal{T}_A(B) = \text{Ker}(\phi : B \longrightarrow S^{-1}B), \text{ onde } S = A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)} \mathfrak{p}.$$

Pelo Teorema dos Isomorfismos, $B/\mathcal{T}_A(B) \simeq \text{Im}(\phi)$. Assim, assumindo que o anel não necessariamente contém 1, basta mostrarmos que o anel $S^{-1}B$ é reduzido, uma vez que subanel e localização de um anel reduzido também é reduzido.

Seja $\frac{b}{1} \in S^{-1}B$ um elemento nilpotente (de modo geral, tomamos $\frac{b}{s}$, mas sendo nilpotente, temos $\frac{b}{s} = \frac{b}{1}$). Por hipótese, $\frac{b}{1}$ é nulo em $B_{\mathfrak{p}}$. Logo, para todo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$, existe $s_{\mathfrak{p}} \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $s_{\mathfrak{p}}b = 0$. Isso mostra que $0 :_A b \not\subset \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$. Assim, $0 :_A b \not\subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)} \mathfrak{p}$. Ou seja, existe $s \in 0 :_A b$ tal que $s \notin \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$. Logo, $s \in S$ e $sb = 0$, o que implica em $\frac{b}{1} = 0$.

Portanto, $B/\mathcal{T}_A(B)$ é reduzido. $\square$

Consequentemente, temos

Lema 4.2. Se B é uma A -álgebra livre de torção e $B_{\mathfrak{p}}$ é reduzido para todo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$, então B é reduzido.

Teorema 4.3. *Seja A um anel reduzido, essencialmente de tipo finito sobre um corpo perfeito k . Assuma que para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ não-minimal existe uma representação $A_{\mathfrak{p}} \simeq R/I$, onde $(R, \mathfrak{n})$ é um anel regular local, essencialmente de tipo finito sobre k e $I \subset R$ é um ideal satisfazendo*

$$\mu \left(\frac{I + \mathfrak{n}^3}{\mathfrak{n}^3} \right) \leq \dim(R) - 1.$$

Então, $\mathbb{S}_{A|k}$ é reduzida (se e) somente se é A -módulo livre de torção (isto é, $\Omega_{A|k}$ é de tipo linear).

Demonstração. Como argumentamos no início desse capítulo, o A -módulo $\Omega_{A|k}$ é genericamente livre. Logo, $\text{Sym}_{A_{\mathfrak{p}}}((\Omega_{A|k})_{\mathfrak{p}})$ é um anel de polinômios sobre A e assim, reduzido. De modo geral, para M e N módulos sobre A vale que $(M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}} \simeq (M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}})$. Por definição, $\text{Sym}(M) = \frac{T_A(M)}{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = (x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in M) \subseteq T_A(M)$. Daí, temos o seguinte

$$\text{Sym}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \frac{(T_A(M))_{\mathfrak{p}}}{(\mathcal{I})_{\mathfrak{p}}} = \left(\frac{T_A(M)}{\mathcal{I}} \right)_{\mathfrak{p}} = (\text{Sym}_A(M))_{\mathfrak{p}}.$$

Assim, $(\text{Sym}_A(\Omega_{A|k}))_{\mathfrak{p}} \simeq \text{Sym}_{A_{\mathfrak{p}}}((\Omega_{A|k})_{\mathfrak{p}})$. Então, segue-se que o anel $(\text{Sym}_A(\Omega_{A|k}))_{\mathfrak{p}}$ é reduzido para todo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$. Portanto, pelo Lema 4.2, obtemos a prova da parte $(\Rightarrow)$ do teorema.

Reciprocamente, seja $\mathcal{T} \subset \mathbb{S}_{A|k}$ o submódulo de A -torção de $\mathbb{S}_{A|k}$ e suponhamos que $\mathcal{T} \neq 0$. Por hipótese, $\mathbb{S}_{A|k}$ é reduzido, consequentemente $(\mathbb{S}_{A|k})_{\mathfrak{p}}$ é reduzido para todo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$ e pelo Lema 4.1, temos $\mathbb{S}_{A|k}/\mathcal{T}$ reduzido. Isto é válido se, e só se, $\mathcal{T}$ é um ideal radical. Como todo ideal radical se escreve como uma interseção de ideais primos, temos $\mathcal{T} = P_1 \cap \dots \cap P_s$, com algum $P_i \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})$.

Observemos que, se $\mathfrak{p} \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})$ é tal que $\mathfrak{p} \cap A \in \text{Ass}(A)$, então $\mathcal{T} \subset \mathfrak{p}$. De fato, basta vermos que se $b \in \mathcal{T}$, existe $s \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)} A \setminus \mathfrak{p}$, tal que $sb = 0 \in \mathfrak{p}$. Ou seja, $f(s)b = 0$, onde $f : A \rightarrow \mathbb{S}_{A|k}$ é o homomorfismo que induz a estrutura de k -álgebra de $\mathbb{S}_{A|k}$. Suponha que $f(s) \in \mathfrak{p}$, então $s \in \mathfrak{p} \cap A \in \text{Ass}(A)$, absurdo.

Suponhamos que para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})$, o ideal $\mathfrak{p} \cap A$ é um primo associado no anel A . Nossa observação diz que $\mathcal{T} \subset \mathfrak{p}$, $\forall \mathfrak{p} \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})$. Assim, $\mathcal{T} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})} \mathfrak{p} = \{0\}$, pois $\mathbb{S}_{A|k}$ é reduzido. Então, da nossa hipótese, segue-se que existe algum primo mínimo $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{S}_{A|k}$, tal que $\mathfrak{p} \cap A \notin \text{Ass}(A)$. Tome P um ideal primo de A , mínimo entre essas contrações (a partir de agora, ao longo dessa demonstração, adotamos a notação P para os ideais primos de A e $\mathfrak{p}$ para os de $\mathbb{S}_{A|k}$, a fim de evitar confusão na argumentação seguinte). Isto é, $P = \mathfrak{p} \cap A \notin \text{Ass}(A)$ e se existir outro ideal $P' = \mathfrak{p}' \cap A \notin \text{Ass}(A)$ tal que $P' \subseteq P$, então $P' = P$.

Uma vez que a localização em P não altera a hipótese e a tese do teorema, consideremos $A = A_P$, $\Omega_{A|k} = (\Omega_{A|k})_P$, $\mathbb{S}_{A|k} = (\mathbb{S}_{A|k})_P$ e $P_P = \mathfrak{m}$. Notemos que, se $\mathfrak{p} \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})$ e $\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k} \not\subset \mathfrak{p}$, então $\mathfrak{p} \cap A \in \text{Min}(A)$ e consequentemente, $\mathcal{T} \subset \mathfrak{p}$. Daí, $\mathcal{T} \cap \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k} \subset \mathfrak{p} \forall \mathfrak{p} \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})$, pois do contrário, existiria $\mathfrak{p}_i \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})$ e $s \in \mathcal{T} \cap \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}$ tal que $s \notin \mathfrak{p}_i$. Ou seja, teríamos $\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k} \not\subset \mathfrak{p}_i$ e assim, $\mathcal{T} \subset \mathfrak{p}_i$, o que seria absurdo, pois $s \in \mathcal{T} \subset \mathfrak{p}_i$, mas $s \notin \mathfrak{p}_i$. Logo, da hipótese $\mathbb{S}_{A|k}$ reduzido, deduzimos que

$$\{0\} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})} \mathfrak{p}.$$

Além disso,

$$\mathcal{T} \cap \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})} \mathfrak{p}.$$

Assim, temos uma relação crucial

$$\mathcal{T} \cap \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k} = 0. \quad (3.1)$$

Agora, pelas condições iniciais do teorema, $\Omega_{A|k}$ é A -livre com posto $n := \mu(\Omega_{A|k})$ (ver

comentário no início desse Capítulo). Então, $\Omega_{A|k} \simeq A^n$ (Corolário 1.2) e assim, obtemos que $\Omega_{A|k}/\mathfrak{m}\Omega_{A|k} \simeq \Omega_{A|k} \otimes_A A/\mathfrak{m} \simeq A^n \otimes_A A/\mathfrak{m} \simeq (A/\mathfrak{m})^n$. Ou seja, $\Omega_{A|k}/\mathfrak{m}\Omega_{A|k}$ é um $A/\mathfrak{m}$ -módulo livre e disto podemos afirmar que sua álgebra simétrica é um anel de polinômios sobre $K := A/\mathfrak{m}$, com n variáveis (ver exemplo 1.3). Pela Proposição 1.16, temos o isomorfismo $\mathbb{S}_{A|k}/\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k} \simeq \text{Sym}_K(\Omega_{A|k}/\mathfrak{m}\Omega_{A|k})$. Logo, $\mathbb{S}_{A|k}/\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}$ é um anel polinomial sobre K com n variáveis. Considere as sobrejeções

$$\phi : \mathbb{S}_{A|k} \longrightarrow \frac{\mathbb{S}_{A|k}}{\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}} \simeq K[T_1, \dots, T_n]$$

∪

$$\phi|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \longrightarrow \text{Im}(\phi|_{\mathcal{T}}) \subseteq K[T_1, \dots, T_n].$$

Pelo o Teorema dos Isomorfismos, $\mathcal{T}/\mathcal{T} \cap \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k} \simeq \text{Im}(\phi|_{\mathcal{T}})$. Logo, segue-se da igualdade (3.1) que $\mathcal{T}$ é aplicado isomorficamente sobre sua imagem no anel polinomial $\mathbb{S}_{A|k}/\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}$.

Como vimos na seção 1.3, o anel polinomial $\mathbb{S}_{A|k}/\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}$ pode ser tomado com a graduação standard. Sejam $h(t) := \dim_K((\mathcal{T})_t)$ e $r := \min\{t \geq 0 \mid (\mathcal{T})_t \neq 0\}$, onde $(\mathcal{T})_t$ é a componente homogênea de grau t de $\mathcal{T}$ e r o grau inicial de $\mathcal{T}$. Seja $f \in (\mathcal{T})_r$ e $t \geq r$, consideremos a aplicação multiplicação por f ,

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{t,f} := (K[T_1, \dots, T_n])_{t-r} & \xrightarrow{\cdot f} & (\mathcal{T})_t \\ \underline{T}^{t-r} & \longmapsto & f \cdot \underline{T}^{t-r} \end{array}$$

definida sobre uma base do K -espaço vetorial $(K[T_1, \dots, T_n])_{t-r}$, formada por monômios de grau $t - r$. Essa aplicação faz sentido, pois um múltiplo de um elemento de torção claramente também é de torção e, é injetiva. Daí, $h(t) \geq \dim_K(\text{Im}(\varphi_{t,f})) \geq \dim_K((K[T_1, \dots, T_n])_{t-r})$. Como é conhecido, a dimensão do último K -espaço é um número binomial de modo que, para todo $t \geq r$, temos a estimativa:

$$h(t) \geq \binom{t-r+n-1}{n-1}.$$

Agora, tomemos a representação $A \simeq R/I$, dada por hipótese. Escrevamos $m := \mu(I + \mathfrak{n}^3/\mathfrak{n}^3)$ e consideremos o anel local $(\bar{A}, \bar{\mathfrak{m}}) := (A/\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. De modo similar ao Exemplo 2.3, obtemos uma apresentação A -livre de $\Omega_{A|k}$

$$A^m \xrightarrow{\Theta} A^n \longrightarrow \Omega_{A|k} \longrightarrow 0,$$

onde Θ é a transposta da matriz jacobiana. Tensorizando essa sequência exata por $\overline{A}$ sobre A , obtemos

$$(\overline{A})^m \longrightarrow (\overline{A})^n \longrightarrow (\overline{A}) \otimes_A \Omega_{A/k} \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor potência simétrica $S_A(\bullet)_\bullet$, tomando os termos de grau fixo, temos, para cada $t \geq 1$, uma sequência exata

$$(\overline{A})^m \otimes_A S_A(\overline{A})_{t-1}^n \longrightarrow S_A(\overline{A})_t^n \longrightarrow \overline{A} \otimes_A S_A(\Omega_{A/k})_t \longrightarrow 0.$$

Daí,

$$S_A((\overline{A})^m)_{t-1} \longrightarrow S_A((\overline{A})^n)_t \longrightarrow S_A(\Omega_{A/k})_t \longrightarrow 0.$$

Agora, tomamos $\phi : S_A(\Omega_{A/k})_t \longrightarrow \mathfrak{m}S_A(\Omega_{A/k})_t$ tal que para cada monomial g pertencente à base do K -espaço $S_A(\Omega_{A/k})_t$, sua imagem por ϕ é dada por $\phi(g) = \sum_{i=1}^d a_i g$, onde $\{a_1, \dots, a_d\}$ é um conjunto minimal de geradores de $\mathfrak{m}$. Tal aplicação nos permite obter a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow (\mathcal{T})_t \hookrightarrow S_A(\Omega_{A/k})_t \xrightarrow{\phi} \mathfrak{m}S_A(\Omega_{A/k})_t \longrightarrow 0.$$

Da igualdade (3.1), segue-se que esta sequência cinde, ou seja, $(\mathcal{T})_t$ é um somando direto de $S_A(\Omega_{A/k})_t$. Notemos que $(\mathcal{T})_t \simeq (K)^{\oplus h(t)}$ e de modo análogo, temos $(K)^{\oplus h(t)}$ somando direto de $(\overline{A}) \otimes_A S_A(\Omega_{A/k})_t$. Este somando cinde e tem complemento direto. Isto é, $(\overline{\mathfrak{m}})^{\oplus h(t)}$ é somando direto da imagem de $(\overline{A})^m \otimes_{\overline{A}} S_A((\overline{A})^n)_{t-1}$ em $S_A((\overline{A})^n)_t$ e isto implica em $\dim_K((\overline{A})^m \otimes_{\overline{A}} S_A((\overline{A})^n)_{t-1}) \geq \dim((\overline{A})^{\oplus h(t)})$. Logo,

$$m \cdot \binom{t-1+n-1}{n-1} \geq \mu_K(\overline{\mathfrak{m}}) h(t) \geq \mu(\overline{\mathfrak{m}}) \binom{t-r+n-1}{n-1} \Rightarrow m \geq \mu_K(\overline{\mathfrak{m}}),$$

para $t \geq 1$. Pela hipótese de existência da representação $A_{\mathfrak{p}} \simeq R/I$, podemos supor que $I \subset \mathfrak{n}^2$ e vemos que $\dim(R) = \mu_R(\mathfrak{n}) = \mu_{\frac{R}{I}}(\mathfrak{n}/I)$. Por outro lado, $\mu_{\frac{R}{I}}(\mathfrak{n}/I) = \mu_A(\mathfrak{m}) = \mu_K(\overline{\mathfrak{m}})$. Portanto, $\dim(R) = \mu_K(\overline{\mathfrak{m}})$, mas isto contradiz a hipótese que $m \leq \dim(R) - 1$. $\square$

Esse resultado tem uma curiosa consequência geométrica: Se A é um domínio local com uma singularidade isolada que é essencialmente de tipo finita sobre um corpo perfeito k , e a álgebra simétrica de A é reduzida, mas não um domínio, então o ideal de definição de A tem de conter “muitas”quádricas.

Exemplo 4.1. Sejam $A = k[X]/I_2(X)$, onde (X) é a r -matriz cataléctica

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_{r+1} & X_{r+2} & X_{r+3} & X_{r+4} \end{pmatrix}$$

com $1 \leq r \leq 4$. Quando $r = 4$ obtemos a matriz genérica de tamanho 2×4 e para $r = 1$, a usual matriz genérica 2×4 de Hankel. Além disso, A é Cohen-Macaulay em todos os casos, sendo uma especialização da situação genérica. Se $1 \leq r \leq 2$, a álgebra $\mathbb{S}_{A|k}$ não é Cohen-Macaulay e também não é livre de torção. Quando $3 \leq r \leq 4$, por meio de um cálculo computacional, temos $\mathbb{S}_{A|k}$ Cohen-Macaulay e livre de torção, pois $\text{grade}(I_t(X)) \geq r + 4 \geq 7 = 2\text{ht}(I_2(X)) + 1 = \text{rk}(X) + 1$, ou seja, satisfaz $(\mathcal{F})_1$ e o resultado segue de [19], Proposição (3.3).

Quando a dimensão do anel A é igual 1, o Teorema 4.3 pode ser mais preciso e apresenta-se como um análogo da conhecida e resistente *conjectura de Berger*: Se A é um domínio completo, de dimensão 1, finitamente gerado como álgebra sobre um corpo algebricamente fechado, cujo módulo de diferenciais universalmente finito é livre-de-torção, então A é regular.

Façamos antes algumas observações bastante úteis para demonstração dos próximos resultados: Se $(A, \mathfrak{m})$ é local e equidimensional (Definição 1.13), então $\Omega_{A|k}$ tem posto, dado por

$$\text{rank } \Omega_{A|k} = \dim(A) + \text{gr.tr}_k(A/\mathfrak{m}). \quad (3.2)$$

Para um anel não necessariamente local, temos em [22], a igualdade

$$\mu((\Omega_{A|k})_{\mathfrak{p}}) = \text{edim}(A_{\mathfrak{p}}) + \text{gr.tr}_k(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}), \quad (3.3)$$

onde $\text{edim}(A_{\mathfrak{p}}) = \mu(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$. Estas igualdades nos permitem expressar a condição $\mathcal{F}_k$ em termos da dimensão de imersão local. A saber, $\Omega_{A|k}$ satisfaz a condição $\mathcal{F}_k$ se, e somente se, $\text{edim}(A_{\mathfrak{p}}) \leq 2\dim(A_{\mathfrak{p}}) - k$, para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ não-minimal.

Teorema 4.4. *Sejam k um corpo algebricamente fechado e $A = k[[x_1, \dots, x_n]]$ um domínio de dimensão 1. Então, $\mathbb{S}_{A|k}$ é reduzido (se e) somente se A é regular.*

Demonstração. O anel A é local com ideal maximal $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\text{edim}(A) = n$. Supondo A regular, temos $\Omega_{A|k}$ A -livre, como já comentamos. Então, $\mathbb{S}_{A|k}$ é um anel polinomial sobre o anel reduzido A e isto implica em $\mathbb{S}_{A|k}$ reduzido.

Agora, suponhamos que $\mathbb{S}_{A|k}$ é reduzido. Vamos provar o teorema por contradição, assumindo que $n \geq 2$. Pelo Teorema Principal de Zariski, o fecho inteiro de A é o anel de séries de potências $k[[t]]$ em uma variável. Denotando por $v(-)$ a *valoração t -ádica*,

podemos arranjar de tal forma que temos

$$v(x_1) < v(x_2) < v(x_3) \leq \cdots \leq v(x_n)$$

e $v(x_2)/v(x_1)$ um número não-inteiro, devido a minimalidade de n (a condição para $v(x_j)$, para $j \geq 3$, pode ser vazia se $n = 2$). Escrevamos $A = k[[X_1, \dots, X_n]]/I = (f_1, \dots, f_m)$, com $f_i \in (X_1, \dots, X_n)^2$, $T_j = dX_j$ e $t_j = dx_j$, onde d denota a derivação universal. De modo análogo ao caso $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$, obtemos que $\Omega_{A|k}$ é o conúcleo da matriz $(\Theta(\text{mod } I))^T$. Então, pela Proposição 1.15, temos

$$\mathbb{S}_{A|k} \simeq A[t_1, \dots, t_n] = \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} T_j \mid 1 \leq i \leq m \right)},$$

onde $\partial f_i / \partial x_j = \partial f_i / \partial X_j \pmod{I}$. Claramente estes elementos estão contidos no ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A .

Denotemos apenas por $\mathcal{T}$ a torção de $\mathbb{S}_{A|k}$. A hipótese que $\mathbb{S}_{A|k}$ é reduzido acarreta em $\mathcal{T} \cap \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k} = 0$, assim como em (3.1). Em particular, $\text{Supp}(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}) \cap V(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}) \subset V(\mathcal{T} + \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k})$ como subconjunto de $\text{Spec}(\mathbb{S}_{A|k})$. Lembre-se que, por definição, $\mathbb{R}_{A|k} = \mathbb{S}_{A|k}/\mathcal{T}$. Utilizando algumas propriedades de anéis quocientes, chegamos ao isomorfismo $\mathbb{S}_{A|k}/(\mathcal{T} + \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}) \simeq \mathbb{R}_{A|k}/\mathfrak{m}\mathbb{R}_{A|k}$. Pela Proposição A.11, temos $\dim(\mathbb{R}_{A|k}/\mathfrak{m}\mathbb{R}_{A|k}) = \ell(M) = \text{rk}(\Omega_{A|k})$. Por outro lado, k algebricamente fechado implica em $k \simeq A/\mathfrak{m}$, consequentemente, $\text{gr.tr}_k(A/\mathfrak{m}) = 0$. Usando (3.2), obtemos

$$\dim \left(\frac{\mathbb{S}_{A|k}}{(\mathcal{T} + \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k})} \right) = \dim \left(\frac{\mathbb{R}_{A|k}}{\mathfrak{m}\mathbb{R}_{A|k}} \right) = 1.$$

Consideremos o ideal $(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}, t_3, \dots, t_n) \subset \mathbb{S}_{A|k}$ e o isomorfismo $\mathbb{S}_{A|k}/(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}, t_3, \dots, t_n) \simeq A[T_1, T_2]/\mathfrak{m}A[T_1, T_2]$, o qual nos permite concluir que $\text{ht}((\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}, t_3, \dots, t_n)) = 3 - 1 = 2$. Logo, $(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}, t_3, \dots, t_n)$ não pertence ao $\text{Supp}(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k})$, pois do contrário, da seguinte sobrejeção $\mathbb{S}_{A|k}/(\mathcal{T} + \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}) \twoheadrightarrow \mathbb{S}_{A|k}/(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}, t_3, \dots, t_n)$, teríamos

$$1 = \dim(\mathbb{S}_{A|k}/(\mathcal{T} + \mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k})) \geq \dim(\mathbb{S}_{A|k}/(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}, t_3, \dots, t_n)) = 2,$$

mas isto é absurdo. Assim, $(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k})_{(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}, t_3, \dots, t_n)} = 0$. Tomemos a apresentação

$$\frac{\mathbb{S}_{A|k}}{(t_3, \dots, t_n)} = \frac{A[T_1, T_2]}{\mathcal{J}}, \quad \text{onde } \mathcal{J} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} T_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} T_2 \mid 1 \leq i \leq m \right),$$

e consideremos a sobrejeção

$$\frac{\mathbb{S}_{A|k}}{(t_3, \dots, t_n)} \twoheadrightarrow \frac{\mathbb{S}_{A|k}}{(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}, t_3, \dots, t_n)}.$$

Então,

$$0 < \text{ht}(\mathcal{J}) \leq \dim(A[T_1, T_2]) - \dim\left(\frac{\mathbb{S}_{A|k}}{(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}, t_3, \dots, t_n)}\right) = 3 - 2 = 1.$$

Logo, $\text{ht}(\mathcal{J}) = 1 = \text{ht}(\mathfrak{m}A[T_1, T_2])$. Agora, localizando em $\mathfrak{m}A[T_1, T_2]$, temos ainda, $\text{ht}(\mathcal{J}A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]}) = 1 = \text{ht}(\mathfrak{m}A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]})$. Por definição, existe um primo minimal de $R = A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]}/\mathcal{J}A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]}$, cuja altura é igual a 1. Isto implica na igualdade $\text{Min}(A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]}/\mathcal{J}A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]}) = \{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]}\}$. Segue-se que o ideal $\mathcal{J}$ é radical, uma vez que $\mathbb{S}_{A|k}$ é reduzido. Ou seja, $\mathcal{J}$ é a interseção dos ideais primos $\mathfrak{q} \in \text{Min}(A[T_1, T_2]/\mathcal{J})$. Como a localização de um primo minimal também é um primo minimal e comuta com interseção, temos $\mathcal{J}A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]}$ ideal radical. Logo,

$$\mathfrak{m}A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]} = \mathcal{J}A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]}.$$

É regra geral o seguinte fato: Sejam I, J e $\mathfrak{p}$ ideais de um anel B , com $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$ e $I \subset J$. Então, $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}} \Leftrightarrow I : J \not\subset \mathfrak{p}$. Em nosso caso, temos $\mathcal{J}A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]} : \mathfrak{m}A[T_1, T_2]_{\mathfrak{m}A[T_1, T_2]} \not\subset \mathfrak{m}A[T_1, T_2]$. Assim, existe um polinômio $g(T_1, T_2)$ pertencente a $A[T_1, T_2] \setminus \mathfrak{m}A[T_1, T_2]$ que satisfaz

$$g(T_1, T_2) \cdot \mathfrak{m} \subset \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} T_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} T_2 \mid 1 \leq i \leq m \right).$$

Comparando os coeficientes, já que $g \notin \mathfrak{m}A[T_1, T_2]$, cada x_j pertence ao ideal gerado pelas derivadas parciais $\partial f_i/\partial x_1, \partial f_i/\partial x_2$, $1 \leq i \leq m$, para todo $j = 1, \dots, n$. A outra inclusão é clara. Logo,

$$\mathfrak{m} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \mid 1 \leq i \leq m \right).$$

Como $v(x_1)$ é o menor elemento positivo no semigrupo de valores de A , existe um i tal que $v(x_1) = v(\partial f_i/\partial x_1)$ ou $v(\partial f_i/\partial x_2)$. Escrevendo $f := f_i$ e assumindo que vale o primeiro caso, ponhamos $f = aX_1^2 + h$, com $a \in k$ e $h \in (X_1^3) + (X_1, \dots, X_n)(X_2, \dots, X_n)$. Notemos que h tem grau no mínimo igual a 2. Logo, $v(h(x_1, \dots, x_n)) > 2v(x_1) \Rightarrow v(\partial h/\partial x_1) > v(x_1)$. Portanto, $v(\partial f/\partial x_1) = v(x_1)$ implica em $a \neq 0$, caso contrário, teríamos $v(x_1) = v(\partial f/\partial x_1) = v(\partial h/\partial x_1) > v(x_1)$, absurdo. Enquanto $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ (notemos que f é o polinômio nulo em A) implica em $a = 0$, pois, novamente supondo

o contrário, teríamos $h \in (X_1^2)$, o que não ocorre. Portanto, temos uma contradição.

Assim, deve valer $v(x_1) = v(\partial f / \partial x_2)$. Escrevamos,

$$f = \sum_{i=2}^{\infty} a_i X_1^i + b X_1 X_2 + l,$$

onde $a_i, b \in k$ e $p \in (X_1 X_2) X_2 + (X_1, \dots, X_n)(X_3, \dots, X_n)$. Notemos que $v(p(x_1, \dots, x_n)) > v(x_1) + v(x_2)$, assim, $v(\partial p / \partial x_2) > v(x_1)$. Portanto, de modo análogo ao caso anterior, a hipótese que $v(\partial f / \partial x_2) = v(x_1)$ implica em $b \neq 0$ e, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ acarreta em

$$v(x_1) + v(x_2) = v(b x_1 x_2) = v\left(\sum_{i=2}^{\infty} a_i x_1^i\right) = q v(x_1)$$

para algum inteiro q . Mas, isto contradiz nossa suposição que $v(x_2)/v(x_1)$ não é um inteiro. $\square$

A prova do Teorema anterior fornece um resultado bastante forte, a saber:

Teorema 4.5. *Sejam k um corpo algebricamente fechado, $A = k[[x_1, \dots, x_n]]$ um anel de dimensão 1 e assumamos que $\mathbb{S}_{A|k}$ é reduzido. Então, $A/\mathfrak{p}$ é regular para todo ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ de A . Se, além disso, $\text{char}(k) = 0$ e A é quase-homogêneo (isto é, o completamento de uma k -álgebra positivamente graduada), então A é regular.*

Demonstração. Usaremos a mesma notação da proposição anterior. Suponhamos, por contradição, a existência de um ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ tal que $A/\mathfrak{p}$ não é regular. Escolhamos um conjunto minimal de geradores $x_1, \dots, x_n$ de $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$, de modo que

$$v(x_1 + \mathfrak{p}) < v(x_2 + \mathfrak{p}) < v(x_3 + \mathfrak{p}) \leq \dots \leq v(x_n + \mathfrak{p})$$

e a razão entre os dois primeiros valores não é um inteiro (neste caso, v é a valoração t -ádica no fecho inteiro $k[[t]]$ de $A/\mathfrak{p}$). A prova segue de modo análogo à demonstração do teorema anterior, apenas substituindo $\mathbb{S}_{A|k}/(t_3, \dots, t_n)$ por $\mathbb{S}_{A|k}/(\mathfrak{p}, t_3, \dots, t_n)$.

Agora, assumiremos que A é um anel quase-homogêneo e $\text{char}(k) = 0$, (logo k é perfeito). Consideremos a aplicação de Euler $\Omega_{A|k} \rightarrow \mathfrak{m}$, cujo núcleo τ é a torção de $\Omega_{A|k}$. Como o anel $\mathbb{S}_{A|k}$ é reduzido, temos (3.1), donde $\tau \cap \mathfrak{m}\Omega_{A|k} = 0$. Tomemos a aplicação $\eta : \mathfrak{m} \rightarrow \Omega_{A|k}$ tal que $\eta(f) = df$, onde d é a derivação universal. Temos $\text{Im}(\eta) = \mathfrak{m}\Omega_{A|k}$ e $\Omega_{A|k} = \tau + \text{Im}(\eta)$. Assim, $\Omega_{A|k} = \tau \oplus \mathfrak{m}\Omega_{A|k}$. Daí, $\mu(\Omega_{A|k}) = \mu(\tau) + \mu(\mathfrak{m}\Omega_{A|k})$. Por outro lado, o fato de termos k algebricamente fechado implica em $\text{gr.tr}_k(A/\mathfrak{m}) = 0$. Então, de (3.3) temos a igualdade $\mu(\Omega_{A|k}) = \mu(\mathfrak{m})$. Logo, $\tau = 0$. Portanto, A é regular, pois a conjectura de Berger é verdadeira no caso em que o anel é quase-homogêneo ([15], 4.4). $\square$

Proposição 4.6. Sejam $(R, \mathfrak{n})$ um anel regular local, essencialmente de tipo finito sobre um corpo perfeito k , e $I \subset \mathfrak{n}^2$ um ideal tal que $A = R/I$ é reduzido. Escreva g para altura de I e $\mathfrak{m}$ para o ideal maximal de A . Se $\mathbb{S}_{A|k}$ é equidimensional e $(\mathbb{S}_{A|k})_{\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}}$ é regular, então $\mu(I + \mathfrak{n}^3/\mathfrak{n}^3) \geq 2g$.

Demonstração. Como já argumentamos, R sendo um anel regular, temos $\Omega_{R|k}$ um R -módulo livre. Como no Exemplo 1.3, $\mathbb{S}_{R|k}$ é um anel polinomial sobre R . De forma mais específica, seja $d : R \rightarrow \Omega_{R|k}$ a derivação universal. Então, $\mathbb{S}_{R|k} \simeq R[T]$ onde $T = T_1, \dots, T_n$ são variáveis que podem ser tomadas como diferenciais de elementos de R . Seja $K := R/\mathfrak{n}$, tal que o corpo residual de $R(T) = R[T]_{\mathfrak{n}R[T]}$ é $K(T)$, e escreva $r := \text{gr.tr}_k(A/\mathfrak{m}) = \text{gr.tr}_k(K)$. Existe uma apresentação

$$(\mathbb{S}_{A|k})_{\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}} \simeq \frac{R(T)}{\mathcal{J}}.$$

Sabemos que um anel regular local é um domínio Cohen-Macaulay. Portanto, pelo Teorema 1.11 (item (4)), segue-se que $\dim(R/I) = \dim(R) - \text{ht}(I) = \dim(R) - g$. Por outro lado, de (3.3) temos $n = \mu(\Omega_{R|k}) = \dim(R) + r \Rightarrow \dim(R) = n - r$. Daí, $\dim(A) = n - r - g$. Seja $\mathfrak{p}$ um primo minimal de A tal que $\dim(A) = \dim(A/\mathfrak{p})$. Definimos a $\mathfrak{p}$ -torção de $\mathbb{S}_{A|k}$ como sendo o ideal primo $\mathcal{T}(\mathfrak{p}) = \text{Ker}(\mathbb{S}_{A|k} \rightarrow \text{Sym}_{A/\mathfrak{p}}(\Omega_{A|k}/\mathfrak{p}\Omega_{A|k}))$. Segue-se da Proposição A.6, que $\dim(\mathbb{S}_{A|k}/\mathcal{T}(\mathfrak{p})) = \dim(A/\mathfrak{p}) + \mu(\Omega_{A/\mathfrak{p}|k})$. Além disso, $(\Omega_{A|k})$ é genericamente livre (pois, A é uma álgebra reduzida essencialmente de tipo finito sobre um corpo perfeito k). Assim, $\dim(\mathbb{S}_{A|k}/\mathcal{T}(\mathfrak{p})) = \dim(A/\mathfrak{p}) + \text{rk}(\Omega_{A/\mathfrak{p}|k})$. Agora, sejam $P \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})$ e o ideal primo $\mathfrak{p} = P \cap A$. Temos $\mathcal{T}(\mathfrak{p}) \subset P$, logo, $\mathcal{T}(\mathfrak{p}) = P \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})$ e a hipótese que $\mathbb{S}_{A|k}$ é equidimensional implica em

$$\dim(\mathbb{S}_{A|k}) = \dim(A/\mathfrak{p}) + \text{rk}(\Omega_{A/\mathfrak{p}|k}).$$

Usando (3.2), temos

$$\dim(\mathbb{S}_{A|k}) = \dim(A/\mathfrak{p}) + \text{gr.tr}_k(A/\mathfrak{p}) = 2 \dim(A/\mathfrak{p}) + r = 2(n - r - g) + r = 2n - 2g - r.$$

Vejam que $\dim(R(T)) = \text{ht}(\mathfrak{n}R[T]) = \text{ht}(\mathfrak{n}) = \mu(\mathfrak{n}) = n - r$, onde a penúltima igualdade é válida por R ser um anel regular local. Como $\mathbb{S}_{A|k}$ é equidimensional, temos $\text{ht}(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}) = \dim(\mathbb{S}_{A|k}) - \dim(\mathbb{S}_{A|k}/\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k})$. Por outro lado, é válido que $\dim(\mathbb{S}_{A|k}/\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}) = \mu(\Omega_{A|k}) = \mu(\mathfrak{m}) + r = \mu(\Omega_{R|k}) = n$ (usando (3.3) e o fato que

$\mu(\mathfrak{m}) = \mu(\mathfrak{n})$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{ht}(\mathcal{J}) &= \dim(R(T)) - \text{ht}(\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}) \\ &= \dim(R(T)) - (\dim(\mathbb{S}_{A|k}) - \dim(\mathbb{S}_{A|k}/\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k})) \\ &= n - r - ((2n - 2g - r) - n) = 2g. \end{aligned}$$

Façamos $S = (\mathbb{S}_{A|k})_{\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}}$, $\mathcal{N} = \mathfrak{n}R(T)$ e $\mathfrak{m}' = \mathcal{N}/\mathcal{J}$ o ideal maximal de $R(T)/\mathcal{J}$. Por hipótese, S é regular e consequentemente, vale que

$$\dim(S) = \mu(\mathfrak{m}') = \dim_{K(T)} \left(\frac{\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{J}}}{\frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{J}}{\mathcal{J}}} \right) = \dim_{K(T)} \left(\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}^2 + \mathcal{J}} \right).$$

Consideremos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{J} + \mathcal{N}^2}{\mathcal{N}^2} \longrightarrow \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}^2} \longrightarrow \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}^2 + \mathcal{J}} \longrightarrow 0.$$

Temos,

$$\dim_{K(T)} \left(\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}^2} \right) = \dim_{K(T)} \left(\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}^2 + \mathcal{J}} \right) + \dim_{K(T)} \left(\frac{\mathcal{J} + \mathcal{N}^2}{\mathcal{N}^2} \right).$$

Lembrando que R regular implica em $R(T)$ regular, ou seja, $\dim(R(T)) = \dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$, obtemos que

$$\dim_{K(T)} \left(\frac{\mathcal{J} + \mathcal{N}^2}{\mathcal{N}^2} \right) = \dim(R(T)) - \dim(S) = \dim(R(T)) - (\dim(R(T)) - 2g) = 2g.$$

Agora, sejam $f_1, \dots, f_m$ geradores do ideal $I + \mathfrak{n}^3/\mathfrak{n}^3$. Nesse caso, temos

$$\mathcal{J} + \mathcal{N}^2/\mathcal{N}^2 = (df_i | 1 \leq i \leq m) + \mathcal{N}^2/\mathcal{N}^2.$$

Portanto, $m \geq 2g$. □

Corolário 4.7. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel regular local, essencialmente de tipo finito sobre um corpo perfeito k , e $I \subset \mathfrak{n}^2$ um ideal tal que $A = R/I$ é equidimensional e contém uma singularidade isolada. Se $\mathbb{S}_{A|k}$ é uma álgebra reduzida e $(\mathbb{S}_{A|k})_{\mathfrak{m}\mathbb{S}_{A|k}}$ é regular, então

$$\mu(I + \mathfrak{n}^3/\mathfrak{n}^3) \geq \min\{\dim(R), 2 \text{ ht}(I)\}.$$

Demonstração. Suponha $\mu(I + \mathfrak{n}^3/\mathfrak{n}^3) \leq \dim(R) - 1$, então $\mathbb{S}_{A|k}$ é um A -módulo livre de torção, devido ao Teorema 4.3. Seja $\mathfrak{p}$ um primo minimal de A . Visto que A é equidimensional e contém uma singularidade isolada, temos $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 0$ e $A_{\mathfrak{p}}$ é anel

regular para todo primo $\mathfrak{p}$ minimal de A . Por meio de (3.3),

$$\begin{aligned}\mu((\Omega_{A|k})_{\mathfrak{p}}) &= \dim(A_{\mathfrak{p}}) + \text{gr.tr}_k(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \\ &= \text{gr.tr}_k(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \\ &= \dim(A) + \text{gr.tr}_k(A/\mathfrak{m}).\end{aligned}$$

Observe que no final chegamos exatamente a (3.2). Logo, $\text{rk}(\Omega_{A|k}) = \mu((\Omega_{A|k})_{\mathfrak{p}}) \forall \mathfrak{p} \in \text{Min}(A)$. Sejam $P \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k})$, $\mathfrak{p} = P \cap A$, e tomemos $\mathcal{T}(\mathfrak{p})$, como na prova da proposição anterior. Temos $\mathcal{T}(\mathfrak{p}) \subset P$ o que implica em $\mathcal{T}(\mathfrak{p}) = P$. Pela Proposição A.6, $\dim(\mathbb{S}_{A|k}/\mathcal{T}(\mathfrak{p})) = \dim(A/\mathfrak{p}) + \mu(\Omega_{A_{\mathfrak{p}}|k})$. Pela arbitrariedade de P e a equidimensionalidade de A , segue-se que

$$\dim\left(\frac{\mathbb{S}_{A|k}}{P}\right) = \dim(A) + \mu(\Omega_{A_{\mathfrak{p}}|k}), \quad \text{para todo } P \in \text{Min}(\mathbb{S}_{A|k}), \text{ com } \mathfrak{p} = P \cap A.$$

Por outro lado, como $\mathbb{S}_{A|k}$ é um A -módulo livre de torção, temos $\Omega_{A|k}$ de tipo linear. Consequentemente, $\Omega_{A|k}$ satisfaz $\mathcal{F}_1$ e com maior razão, $\mathcal{F}_0$. Então, $\dim(\mathbb{S}_{A|k}) = \dim(A) + \text{rk}(\Omega_{A|k})$ (Lema 3.5) e desse modo, $\mathbb{S}_{A|k}$ é um anel equidimensional. Portanto, pela Proposição 4.6, temos $\mu(I + \mathfrak{n}^3/\mathfrak{n}^3) \geq 2 \text{ ht}(I)$. $\square$

Capítulo 5

Álgebra de Rees do Módulo de Diferenciais de Kähler

Neste capítulo abordamos a álgebra $\mathbb{R}_{A|k}$, investigando situações nas quais temos Cohen-Macaulicidade e normalidade dessa álgebra. Em algumas demonstrações, tomamos como base alguns resultados, presentes em [23], sobre a álgebra de Rees de um módulo .

Frequentemente, álgebras simétricas de módulos revelam-se como anéis de coordenadas de certas correspondências em geometria algébrica. Em várias projeções dessas variedades, a álgebra de Rees surge de maneira natural. Em particular, se $\Omega_{A|k}$ é o módulo de diferenciais de uma k -variedade projetiva, com k algebricamente fechado, então $k \otimes_A \mathbb{R}_{A|k}$ é o anel de coordenadas homogêneas da variedade tangencial ([16]).

Considerando um contexto mais geral, sejam A um anel local Cohen-Macaulay e M um A -módulo finito, com dimensão projetiva no máximo igual a 1 e matriz de apresentação φ . Se M satisfaz a condição $\mathcal{F}_1$, então $\text{ht}(I_t(\varphi)) \geq \text{rk}(\varphi) - t + 2$. Como A é Cohen-Macaulay, temos $\text{ht}(I_t(\varphi)) = \text{grade}(I_t(\varphi))$. Pela Proposição A.3, a álgebra simétrica, $\text{Sym}_A(M)$, é Cohen-Macaulay e A -livre de torção. Em particular, $\mathcal{R}_A(M)$ é Cohen-Macaulay. No entanto, a Cohen-Macaulicidade de $\mathcal{R}_A(M)$ não implica em M satisfazer $\mathcal{F}_1$.

O teorema a seguir mostra um caso em que a recíproca é válida: quando M é o módulo de diferenciais de Kähler sobre um anel localmente interseção completa (toda localização desse anel é uma interseção completa, ver Definição 1.14), sobre um corpo de característica zero. Isto mostra que Cohen-Macaulicidade é uma propriedade bastante restritiva para $\mathbb{R}_{A|k}$.

Teorema 5.1. *Sejam k um corpo de característica zero e A uma k -álgebra, essencialmente de tipo finito que é localmente uma interseção completa. Assuma as seguintes condições:*

(1) $\text{edim } A_{\mathfrak{p}} \leq 2 \dim A_{\mathfrak{p}}$, para todo primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$;

(2) $\mathbb{R}_{A|k}$ é Cohen-Macaulay.

Então, $\text{edim } A_{\mathfrak{p}} \leq 2 \dim A_{\mathfrak{p}} - 1$, para todo primo não-minimal $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$.

Demonstração. Como A é localmente uma interseção completa, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A , o anel $A_{\mathfrak{p}}$ é uma interseção completa, consequentemente Cohen-Macaulay. Por sua vez, todo anel Cohen-Macaulay é equidimensional (Observação 1.2). Assim, são válidas (3.1) e (3.2), tornando válido o comentário de que o teorema estabelece, de fato, a recíproca para a questão apresentada. Vamos provar por contradição. Seja $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ minimal tal que $\text{edim } A_{\mathfrak{p}} \geq 2 \dim A_{\mathfrak{p}} \geq 2$. Localizando neste primo, podemos assumir que A é local. Da condição (1), segue-se que $\text{edim } A = 2 \dim A$.

Para facilitar nossos argumentos, precisamos reduzir ao caso em que o corpo residual $K := A/\mathfrak{m}$ é algébrico sobre k . Para isso, seja r o grau de transcendência de K sobre k e suponhamos que $r \geq 1$. Escreva $A = k[x_1, \dots, x_m]$ e escolha r combinações k -lineares $y_1, \dots, y_r$ de $x_1, \dots, x_m$ tais que suas classes residuais formam uma base de transcendência de K sobre k . Então, $L := k(y_1, \dots, y_r)$ é um subcorpo de A . Além disso, $\Omega_{A|L} = \Omega_{A|k}/(Ady_1 + \dots + Ady_r)$, onde $d : A \rightarrow \Omega_{A|k}$ é a derivação universal. Por outro lado, $\text{rk}(\Omega_{A|k}) > r$, de acordo com (3.2). A escolha geral dos $y_1, \dots, y_r$ e a Cohen-Macaulicidade de $\mathbb{R}_{A|k}$ produzem, por meio da Proposição A.7, um isomorfismo $\mathbb{R}_{A|L} \simeq \mathbb{R}_{A|k}/(dy_1, \dots, dy_r)$, uma vez que um anel Cohen-Macaulay satisfaz todas as condições (S_n) . Além disso, por esse isomorfismo, $\mathbb{R}_{A|L}$ também é Cohen-Macaulay. Assim, substituindo k por L , podemos assumir dessa forma, que K é algébrico sobre k .

Vamos fazer indução em $d := \dim(A)$. Suponha, inicialmente, $d = 1$. Pela Proposição A.8, a Cohen-Macaulicidade de $\mathbb{R}_{A|k}$ implica em $\Omega_{A|k}/\mathcal{T}_A(\Omega_{A|k})$ A -módulo livre. Uma vez que todo corpo com característica zero é perfeito, para cada primo minimal $\mathfrak{q}$ de A , o corpo $A_{\mathfrak{q}}$ é separável sobre k . Podemos aplicar o Teorema A.9, e assim obter que A é regular. Mas isto contradiz a igualdade $\text{edim}(A) = 2$.

Logo, podemos supor que $d \geq 2$. Como A é uma interseção completa, podemos escrever $A = R/I$, onde $(R, \mathfrak{n})$ é um anel regular local, essencialmente de tipo finito sobre um corpo k , e $I \subset \mathfrak{n}^2$ é um ideal de R . Sejam $n := \dim(R) = \text{edim}(A) = 2d$ e $\delta : R \rightarrow \Omega_{R|k}$ a derivação universal. O R -módulo $\Omega_{R|k}$ é livre com posto igual a n , devido a regularidade de R . Daí, como a extensão $k \subset K$ é algébrica e separável, existem n elementos $X_1, \dots, X_n$ em $\mathfrak{n}$ tais que $\delta X_1, \dots, \delta X_n$ formam uma base de $\Omega_{R|k}$. Para um dado elemento $f \in R$, $\delta f = \sum_{i=1}^n a_i \delta X_i$. Podemos definir as “derivadas parciais” $\frac{\partial f}{\partial X_i} := a_i$ e escrever $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ para suas imagens em A , isto é, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \pmod{I}$. Por hipótese, I é gerado por uma sequência regular $f_1, \dots, f_d$ ($\mu(I) = \text{grade}(I) =$

$\dim(R) - \dim(A) = d$, pois R é Cohen-Macaulay e podemos aplicar o Teorema 1.11). Considere, ainda, as matrizes de tamanho $n \times d$, a seguir:

$$\Theta = \left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i} \right) \quad \text{e} \quad \theta = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right).$$

Agora, θ é a matriz de apresentação do A -módulo $\Omega_{A|k}$, cuja dimensão projetiva é no máximo igual a 1 (Proposição A.10). Da nossa hipótese de indução, segue-se que $\Omega_{A|k}$ satisfaz a condição $\mathcal{F}_1$ localmente em codimensão $d - 1 \geq 1$. Pela Proposição A.11, o *analytic spread* $\ell(\Omega_{A|k})$ é no máximo $\dim(A) + \text{rk}(\Omega_{A|k}) - 1$. Usando (3.2), obtemos que esse último número é igual a $2d - 1 = n - 1$. Note que pela Proposição A.10, $\text{pd}(\Omega_{A|k}) \leq 1$. Como $\mathbb{R}_{A|k}$ é Cohen-Macaulay, podemos aplicar as Proposições A.11 e A.5, para concluir que depois de uma k -linear mudança de bases, temos

$$I_1(\theta) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial f_d}{\partial x_n} \right).$$

Assim,

$$I_1(\Theta) \subset \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_n}, \dots, \frac{\partial f_d}{\partial X_n}, I \right).$$

Sejam $J := I_1(\Theta)$ e $J_0 := \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_n}, \dots, \frac{\partial f_d}{\partial X_n} \right)$. Note que $J + I = J_0 + I$. Além disso, pelo (TIP), $\text{ht}(J_0) \leq d$.

A ideia agora é mostrar que

$$I \subset \overline{\mathfrak{n}J},$$

onde $\overline{}$ denota o fecho inteiro. Assim, seja f um elemento de $\mathfrak{n}$. Obtemos a inclusão acima mostrando que

$$f \in \overline{\mathfrak{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)}.$$

No entanto, não vamos fazê-lo, apenas tomar como referência [24], Teorema 7.1.5 (Proposição A.12), embora as condições sejam ligeiramente um pouco diferentes.

Uma vez que a inclusão $I \subset \overline{\mathfrak{n}J}$ é válida, as propriedades de fecho inteiro nos permitem concluir que

$$J + I = J_0 + I \subset J_0 + \overline{\mathfrak{n}J} \subset \overline{J_0 + \mathfrak{n}(J + I)}.$$

O critério valorativo para dependência inteira (A.13) nos dá $J + I \subset \overline{J_0}$. Portanto, $\text{ht}(J + I) = \text{ht}(J_0) \leq d$. Então, $\dim(R/(J + I)) = \dim(R) - \text{ht}(J + I)$ implica em $\dim(R/(J + I)) \geq 2$. Note que $I_1(\theta) = J_0 + I$, assim, $R/(J + I) \simeq A/I_1(\theta)$. Pelo (TIP), $\text{ht}(I_1(\theta)) \leq d$. Por outro lado, a condição (i) equivale a dizer que $\Omega_{A|k}$ satisfaz $\mathcal{F}_0$. Ou seja, temos $\text{ht}(I_1(\theta)) \geq \text{rk}(\theta) = n - d = d$. Logo, $\dim(A/I_1(\theta)) \leq d - \text{ht}(I_1(\theta)) = 0 \Rightarrow$

$\dim(A/I_1(\theta)) = 0$. Mas isto é uma contradição. □

Agora, voltamo-nos ao estudo da normalidade de $\mathbb{R}_{A|k}$. Sejam A um domínio normal e M um A -módulo finito com $\text{rk}(M) = r$. Escrevemos M^i para a i -ésima componente graduada $\mathcal{R}_A(M)_i$ de $\mathcal{R}_A(M)$ e a denominamos por *i -ésima potência de M* . Notemos que M^i também é a i -ésima potência simétrica de M módulo sua A -torção, isto é, $M^i = \text{Sym}_i(M)/\mathcal{T}_A(\text{Sym}_i(M))$. Pelo fato de M possuir posto, M^1 pode ser imerso em $F := A^r$, induzindo uma imersão de $\mathcal{R}_A(M)$ no anel polinomial $\text{Sym}(F) = A[T] = A[T_1, \dots, T_r]$, como uma A -subálgebra graduada. Seja $\overline{\mathcal{R}_A(M)}$ o fecho inteiro de $\mathcal{R}_A(M)$ em $A[T]$, a qual é novamente uma A -subálgebra graduada. Denotemos por $\overline{M^i} \subset A[T]_i$, a i -ésima componente graduada de $\overline{\mathcal{R}_A(M)}$ e a chamamos de *i -ésima potência normalizada de M* . Dizemos que o A -módulo M é *integralmente fechado*, se $M^1 = \overline{M^1}$. Quando $M^i = \overline{M^i}$, para todo $i \geq 0$, dizemos que M é *normal* ou, equivalentemente, que $\mathcal{R}_A(M)$ é normal. As seguintes inclusões são verificadas:

$$M^i \subset \overline{M^i} \subset (M^i)^{**} \subset \text{Sym}_i(A^r). \quad (3.4)$$

Recordemos, inicialmente, algumas definições. Seja M um módulo finito sobre um anel Noetheriano A :

- (i) O anel A satisfaz a condição (S_n) de Serre, se $\text{depth}(A_{\mathfrak{p}}) \geq \min(n, \text{ht}(\mathfrak{p}))$, $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$; Em outras palavras, A satisfaz (S_n) se, e somente se, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A , $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ contém uma sequência regular de comprimento pelo menos $\min\{n, \text{ht}(\mathfrak{p})\}$;
- (ii) M é dito ser *q -torsionfree*, se toda A -sequência de comprimento no máximo q é, também, uma M -sequência. Além disso, se M é *q -torsionfree*, equivalentemente, temos $\text{depth}(M_{\mathfrak{p}}) \geq \min(q, \text{depth}(A_{\mathfrak{p}}))$, para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$;
- (iii) Representamos por $\mathcal{B}_A(M) = \bigoplus_{i \geq 0} (M^i)^{**}$, o bidual graduado de $\mathcal{R}_A(M)$, onde $(M^i)^{**}$ é o A -módulo bidual da i -ésima componente graduada de $\mathcal{R}_A(M)$. Essa álgebra é chamada de *fecho reflexivo* de $\mathcal{R}_A(M)$;
- (iv) Se A é local com corpo residual K , então a *fibra especial* de $\mathcal{R}_A(M)$ é o anel $\mathcal{F}(M) = K \otimes_A \mathcal{R}_A(M)$. A dimensão de Krull de $\mathcal{F}(M)$ é chamada de *analytic spread* de M e denotada por $\ell(M)$ (notemos que $\ell(M) = \dim(\mathcal{R}_A(M)/\mathfrak{m}\mathcal{R}_A(M))$);
- (v) Supondo que M possui posto igual a r , dizemos que satisfaz a condição (L_t) , se $\ell(M_{\mathfrak{p}}) \leq \dim(A_{\mathfrak{p}}) + r - t$, para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ com $\dim(A_{\mathfrak{p}}) \geq t$.

Proposição 5.2. Sejam A um domínio normal, universalmente catenário, e M um A -módulo finito. São equivalentes:

- (1) $\mathcal{R}_A(M)$ é normal e M satisfaz (L_2) ;
- (2) $\mathcal{R}_A(M)$ satisfaz a condição (S_2) de Serre e M satisfaz (L_2) ;
- (3) $\mathcal{R}_A(M) = \mathcal{B}_A(M)$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ com $\text{ht}(\mathfrak{p}) \geq 2$. Recordemos que um anel A é dito normal, se $A_{\mathfrak{p}}$ é um domínio integralmente fechado, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A . Como $(\mathcal{R}_A(M))_{\mathfrak{p}}$ é um domínio integralmente fechado com dimensão pelo menos igual a 2, existe $x \in \mathfrak{p}$ regular em $(\mathcal{R}_A(M))_{\mathfrak{p}}$. De fato, caso existisse para cada $x \in \mathfrak{p}$ um elemento $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $sx = 0$, teríamos $\mathfrak{p} \subset Q \in \text{Ass}(\mathcal{R}_A(M))$ e isto implicaria em $\mathfrak{m} = Q_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}((\mathcal{R}_A(M))_{\mathfrak{p}}) = \{0\}$, o que seria absurdo, pois $\text{ht}(\mathfrak{p}) \geq 2$. Pela Proposição A.14, $\mathfrak{m}$ não é um primo associado de $x(\mathcal{R}_A(M))_{\mathfrak{p}}$. Então, existe um elemento $y \in \mathfrak{p}$ tal que x, y é uma sequência regular em $(\mathcal{R}_A(M))_{\mathfrak{p}}$. Assim, $\text{depth}(\mathcal{R}_A(M))_{\mathfrak{p}} \geq 2$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Ora, a igualdade é válida se M^i é reflexivo, para todo $i \geq 0$. Pela Proposição A.15, é suficiente mostrarmos que todas as potências de M satisfaz a condição (S_2) de Serre. Para isso, seja $\mathfrak{p} \subset A$ um ideal primo tal que $\text{ht}(\mathfrak{p}) \geq 2$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Temos $\text{ht}(\mathfrak{m}(\mathcal{R}_A(M))_{\mathfrak{p}}) = \dim((\mathcal{R}_A(M))_{\mathfrak{p}}) - \ell(M_{\mathfrak{p}}) = \dim((A)_{\mathfrak{p}}) + \text{rk}(M_{\mathfrak{p}}) - \ell(M_{\mathfrak{p}}) \geq 2$, onde a primeira igualdade é válida pelo fato de que A é universalmente catenário, a segunda segue da Proposição 1.18 e a desigualdade pelo fato de M satisfazer (L_2) . Daí, $\dim((\mathcal{R}_A(M))_{\mathfrak{p}}) \geq 2$. Como $\mathcal{R}_A(M)$ satisfaz (S_2) , o ideal $\mathfrak{m}$ contém uma $(\mathcal{R}_A(M))_{\mathfrak{p}}$ -sequência com dois elementos, os quais também formam uma sequência regular em cada potência $(M^i)_{\mathfrak{p}}$. Portanto, $\text{depth}((M^i)_{\mathfrak{p}}) \geq 2$, para cada $i \geq 1$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Pelas inclusões em (3.4), temos $M^i = \overline{M^i}$ e isto implica em $\mathcal{R}_A(M)$ normal.

Para provarmos que M satisfaz (L_2) , consideremos $\mathfrak{p} \subset A$ um ideal primo com $\text{ht}(\mathfrak{p}) \geq 2$. Podemos assumir que A é local, com ideal maximal $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ e $\dim(A) \geq 2$. Como $\ell(M) = \dim(\mathcal{R}_A(M)) - \text{ht}(\mathfrak{m}\mathcal{R}_A(M))$, basta mostrarmos que $\text{ht}(\mathfrak{m}\mathcal{R}_A(M)) \geq 2$. Para isso, vamos mostrar que $\text{grade}(\mathfrak{m}\mathcal{R}_A(M)) \geq 2$ e assim, teremos o desejado, uma vez que $\text{grade}(I) \leq \text{ht}(I)$, para todo $I \subset A$.

Sabemos que a localização preserva normalidade e já mostramos que, se A é um anel normal, então satisfaz a condição (S_2) . Neste caso, temos $\text{depth}(A) \geq \min(2, \dim(A)) = 2$. Logo, $\mathfrak{m}$ contém uma sequência regular x_1, x_2 , de comprimento dois. Por hipótese, M^i é reflexivo pra todo $i \geq 0$. Aplicando a Proposição A.15, $\text{depth}(A) \geq 2$ implica em M^i 2-torsionfree, para todo $i \geq 0$. Assim, x_1, x_2 é uma sequência regular em cada um dos módulos M^i . Portanto, x_1 e x_2 formam uma sequência regular no anel $\mathcal{R}_A(M)$ e estão contidos em $\mathfrak{m}\mathcal{R}_A(M)$. $\square$

Podemos melhorar o resultado acima, supondo $\text{pd}(M) = 1$. Para isso, iremos utilizar uma propriedade básica de módulos integralmente fechados. Seja M um submódulo integralmente fechado de um módulo livre A^r , sobre um domínio normal A . Os primos associados de A^r/M são particularmente restritos quando M é um módulo com dimensão projetiva finita. Este fenômeno foi estudado por Hong em [7], utilizando uma condição conhecida como $\mathfrak{m}$ -fullness (vamos manter o termo em inglês). Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local, com corpo residual $A/\mathfrak{m}$ infinito, e $M \subset A^r$ um submódulo de um módulo livre. Dizemos que M é $\mathfrak{m}$ -full, se existe um elemento $x \in \mathfrak{m}$ tal que

$$\mathfrak{m}M :_{A^r} x = M.$$

O critério valorativo para dependência inteira (A.13) mostra que um módulo $M \subset A^r$ integralmente fechado é $\mathfrak{m}$ -full se $A/\mathfrak{m}$ é infinito.

Iremos usar o corolário 4.7 e o teorema 4.8 de [7], os quais apresentamos a seguir, respectivamente, mas sem prova.

Proposição 5.3. Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e M um submódulo de A^r tal que $\mathfrak{m}M :_{A^r} x = M$, para algum $x \in \mathfrak{m}$. Então,

$$\frac{M}{xM} \simeq \frac{(M :_{A^r} \mathfrak{m})}{M} \oplus \frac{(M + xA^r)}{xA^r} \simeq \frac{(M :_{A^r} \mathfrak{m})}{M} \oplus \frac{M}{x(M :_{A^r} \mathfrak{m})}.$$

Teorema 5.4. Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e M um submódulo de A^r tal que $\mathfrak{m}M :_{A^r} x = M$, para algum elemento regular $x \in \mathfrak{m}$. Suponha que $\text{pd}(M) < \infty$ e $\mathfrak{m} \in \text{Ass}(A^r/M)$. Então, A é regular.

Semelhante a propriedade de Cohen-Macaulicidade, em geral a normalidade de $\mathcal{R}_A(M)$ não implica em M satisfazer $(\mathcal{F}_2)$ ou (L_2) . Por exemplo, tome M o ideal maximal homogêneo de um anel polinomial sobre um corpo com duas variáveis.

No entanto, a implicação é válida para um A -módulo M , cujo local não-livre (conjunto dos ideais primos $\mathfrak{p}$, tais que $M_{\mathfrak{p}}$ é não-livre como $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo) está contido no local singular do anel A (conjunto dos ideais primos $\mathfrak{p}$ de A , tais que o anel local $A_{\mathfrak{p}}$ é singular). Isto é o que estabelece o próximo teorema.

Teorema 5.5. Sejam A um domínio normal Cohen-Macaulay e M um A -módulo finito com $\text{rk}(M) = r$, tal que:

- (i) M tem resolução projetiva $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$;
- (ii) $M_{\mathfrak{p}}$ é $A_{\mathfrak{p}}$ -livre, para todo primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tal que $A_{\mathfrak{p}}$ é regular.

As seguintes condições são equivalentes:

- (1) $\mathcal{R}_A(M)$ é normal;
- (2) $\overline{M}^i = M^i$, no intervalo $1 \leq i \leq \text{rk}(P_0) - r$;
- (3) M satisfaz a condição $\mathcal{F}_2$;
- (4) $\mathcal{R}_A(M) = \mathcal{B}_A(M)$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Segue-se da própria definição de normalidade de $\mathcal{R}_A(M)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Suponhamos, por contradição, que M não satisfaz $\mathcal{F}_2$. Localizando em $\mathfrak{p}$, podemos assumir que A é um anel local de dimensão $d \geq 2$, M é um A -módulo não-livre com $\mu(M) \geq \dim(A) + r - 1$ e satisfaz $\mathcal{F}_2$ localmente no espectro perfurado de A , ou seja, satisfaz $\mathcal{F}_2$ localmente no conjunto complementar de $\mathfrak{m}$ em $\text{Spec}(A)$. Também podemos assumir que o corpo residual de A é infinito. Consideremos uma resolução livre minimal

$$0 \longrightarrow A^s \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Por hipótese, $n \geq d + r - 1$, logo $s \geq d - 1$. Como $\mathcal{F}_0$ vale no espectro perfurado, segue-se que o complexo de Weyman é uma resolução livre da potência simétrica $\mathcal{S}_{d-1}(M)$ (decorre de A.17). Este complexo tem comprimento $d - 1$, pois $s \geq d - 1$. Além disso, M satisfaz $\mathcal{F}_1$ no espectro perfurado e por hipótese, A é Cohen-Macaulay e M tem dimensão projetiva no máximo igual a 1. Então, pela Proposição A.16, temos $\mathcal{S}_{d-1}(M)$ livre-de-torção. Assim, $M^{d-1} \simeq \mathcal{S}_{d-1}(M)$ tem dimensão projetiva igual a $d - 1$. Daí, utilizando proposição 1.4 na sequência exata

$$0 \longrightarrow M^{d-1} \longrightarrow \mathcal{S}_{d-1}(A^r) \longrightarrow \frac{\mathcal{S}_{d-1}(A^r)}{M^{d-1}} \longrightarrow 0,$$

temos $\text{pd}(\mathcal{S}_{d-1}(A^r)/M^{d-1}) = \text{pd}(M^{d-1}) + 1 = d$. Já pela Proposição A.16, isto resulta em $\text{depth}(\mathcal{S}_{d-1}(A^r)/M^{d-1}) = 0$ e por sua vez, esta igualdade é válida se, e somente se, $\mathfrak{m} \in \text{Ass}(\mathcal{S}_{d-1}(A^r)/M^{d-1})$. Temos $d - 1 \leq s \leq \text{rk}(P_0) - r$, aplicando nossa hipótese principal, concluímos que M^{d-1} é integralmente fechado. Pelo o comentário que antecede esse teorema, temos M^{d-1} um módulo $\mathfrak{m}$ -full. Portanto, A é regular pelo Teorema 5.4. Mas isto contradiz (ii), pois M não é livre.

(3) $\Rightarrow$ (4): Temos $\text{Sym}(M) \cong \mathcal{R}_A(M)$ e $\mathcal{R}_A(M)$ Cohen-Macaulay, pois M satisfaz $\mathcal{F}_1$ (A.3). Anéis Cohen-Macaulay satisfazem a condição (S_m) de Serre para todo $m \geq 1$, em particular $\mathcal{R}_A(M)$ satisfaz (S_2) . Procedendo-se de maneira análoga à demonstração da segunda parte da implicação (2) $\Rightarrow$ (3) da Proposição 5.2, obtemos que M satisfaz (L_2) e a igualdade desejada segue-se dessa mesma Proposição.

(4) $\Rightarrow$ (1): Segue da Proposição 5.2.

□

O teorema acima se aplica naturalmente ao módulo $M = \Omega_{A|k}$, via a intervenção do critério Jacobiano e a hipótese adicional que A é localmente uma interseção completa. Temos então, o seguinte corolário:

Corolário 5.6. Sejam R um anel regular, essencialmente de tipo finito sobre um corpo perfeito, e $I \subset R$ um ideal com $\text{ht}(I) = g$, o qual é localmente uma interseção completa. Assuma que $A = R/I$ é um domínio normal. São equivalentes:

- (1) $\mathbb{R}_{A|k}$ é normal;
- (2) $\overline{\Omega_{A|k}^i} = \Omega_{A|k}^i$, no intervalo $1 \leq i \leq g$;
- (3) $\text{edim}(A_{\mathfrak{p}}) \leq 2 \dim(A_{\mathfrak{p}}) - 2$, para todo primo não-regular $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$;
- (4) $\mathbb{R}_{A|k} = \mathbb{B}_{A/k}$

Demonstração. Temos A Cohen-Macaulay (Observação 1.2) e $\text{pd}(\Omega_{A|k}) \leq 1$, pela Proposição A.10. Assim, A satisfaz as hipóteses do Teorema 5.5. Uma vez que R é essencialmente de tipo finito sobre um corpo perfeito k , temos $\Omega_{A|k} \otimes_R A \simeq A^n$, para algum $n > 0 \in \mathbb{N}$. Segue-se da primeira sequência exata fundamental (Teorema 2.3), que a sequência

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \Omega_{A|k} \otimes_R A \simeq A^n \longrightarrow \Omega_{A|k} \longrightarrow 0$$

é exata. Assim, a condição (i) do Teorema 5.5 é satisfeita. Por outro lado, como sequência do critério Jacobiano, se $A_{\mathfrak{p}}$ é regular, então $(\Omega_{A|k})_{\mathfrak{p}}$ é $A_{\mathfrak{p}}$ -livre, satisfazendo assim, a condição (ii).

Agora, sob essas hipóteses, podemos utilizar a igualdade (3.3)

$$\mu((\Omega_{A|k})_{\mathfrak{p}}) = \text{edim}(A_{\mathfrak{p}}) + \text{gr.tr}_k(A_{\mathfrak{p}}/PA_{\mathfrak{p}}).$$

Daí, $\Omega_{A|k}$ satisfaz $\mathcal{F}_2$ se, e somente se,

$$\text{edim}(A_{\mathfrak{p}}) \leq 2 \dim(A_{\mathfrak{p}}) - 2, \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \text{ não-regular}.$$

Portanto, todas as implicações seguem do Teorema 5.5.

□

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Em algumas demonstrações, usamos resultados cujas provas são extensas e laboriosas, não sendo possível fazê-las nesse trabalho de dissertação. Por essa razão, apenas referenciamos esses resultados às suas respectivas fontes. No entanto, compreendemos que para o entendimento da argumentação lógica realizada nas demonstrações onde os fizemos uso é necessário que o leitor tenha conhecimento, pelo menos, do teor dos mesmos. Essa seção tem a finalidade de enunciá-los, seguindo a sequência em que foram utilizados na dissertação.

Proposição A.1 (Teorema da desigualdade da dimensão). Sejam A um anel Noetheriano e B uma extensão de A . Assuma que A e B são domínios. Sejam $\mathfrak{q}$ um ideal primo de B e $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. Então,

$$\text{ht}(\mathfrak{q}) + \text{gr.tr}_{\text{Frac}(A/\mathfrak{p})}\text{Frac}(B/\mathfrak{q}) \leq \text{ht}(\mathfrak{p}) + \text{gr.tr}_A B,$$

Onde $\text{gr.tr}_A B = \text{gr.tr}_{\text{Frac}(A)}\text{Frac}(B)$

Proposição A.2 ([10], Proposição 5.8). Sejam k um corpo, X uma matriz genérica antissimétrica de tamanho $2n + 1 \times 2n + 1$, Y uma matriz genérica $2n + 1 \times 1$ sobre k , $P = k[X, Y]_{<X, Y>}$ e $I \subset P$ o ideal gerado pelas entradas da matriz produto XY . Então, I é um ideal primo perfeito (um ideal $I \subset A$ é dito *ideal perfeito* se $\text{grade}(I) = \text{pd}(A/I)$) e quase interseção completa (isto é, $\mu(I) = \text{ht}(I) + 1$) de grade $2n$ em P .

Teorema A.3 ([9], Teorema 1.1). *Sejam A um domínio Noetheriano universalmente catenário, que satisfaz a condição (S_m) de Serre, e M um A -módulo com uma resolução livre finita,*

$$0 \longrightarrow A^m \xrightarrow{\varphi} A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad \varphi = (a_{ij}).$$

Então, são equivalentes:

- (1) $\text{Sym}_A(M)$ é um domínio (logo, $\text{Sym}_A(M) = \mathcal{R}_A(M)$);

(2) $\text{grade}(I_t(\varphi)) \geq m + 2 - t$ para $1 \leq t \leq m$;

(3) $(M_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) \leq n - m + \text{grade}(\mathfrak{p}) - 1$, para todo primo $\mathfrak{p} \subset A$ não-nulo.

Se qualquer (e portanto, todas) uma das condições acima vale, então $\text{Sym}_A(M)$ é uma interseção completa em $A[T_1, \dots, T_n]$. Em particular, se A é Cohen-Macaulay (respectivamente Gorenstein), então $\text{Sym}_A(M)$ é Cohen-Macaulay (respectivamente Gorenstein).

Proposição A.4 (Teorema do Ideal Primo de Krull -TIP). Sejam A um anel Noetheriano e I um ideal de A gerado por $a_1, \dots, a_r \in A$. Se $\mathfrak{p}$ é um primo minimal de I , então $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq r$. Logo, $\text{ht}(I) \leq r$.

Além disso, se $a_1, \dots, a_r$ é uma sequência regular, então $\text{ht}(\mathfrak{p}) = r$ para todo $\mathfrak{p}$ primo minimal de I .

Proposição A.5 ([23], Teorema 4.7(a)). Sejam A um anel local Gorenstein, com corpo residual infinito, e M um A -módulo finitamente gerado com dimensão projetiva igual a 1. Ponha $e = \text{rk}(M)$ e seja $s \geq e$ um inteiro. Assuma que M satisfaz a condição G_{s-e+1} e que é localmente livre de torção em codimensão 1. Seja, ainda, φ a matriz de M com respeito a sequência de geradores $a_1, \dots, a_n$, onde $n \geq s$.

As seguintes condições são equivalentes :

- (1) $\mathcal{R}_A(M)$ é Cohen-Macaulay e $\ell(M) \leq s$;
- (2) $r(M) \leq \ell(M) - e \leq s - e$;
- (3) $r(M_{\mathfrak{p}}) \leq s - e$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ com $\dim(R_{\mathfrak{p}}) = \ell(M_{\mathfrak{p}}) - e + 1 = s - e + 1$ e $\ell(M) \leq s$;
- (4) Após operações elementares de linhas, $I_{n-s}(\varphi)$ é gerado pelos menores maximais das últimas $n - s$ linhas de φ ;
- (5) Após uma mudança na sequência de geradores, tem-se uma igualdade de ideais de Fitting $F_s(M) = F_0(M/U)$, para $U + \sum_{i=1}^s Aa_i$.

Proposição A.6 ([18], Lema 1.2). Seja B um domínio Noetheriano, finitamente gerado sobre um subanel A . Suponha que exista um ideal primo $\mathfrak{q}$ de B , tal que $B = A + Q$, $A \cap \mathfrak{q} = 0$. Então,

$$\dim(B) = \dim(A) + \text{ht}(Q) = \dim(A) + \text{gr.tr}_A(B).$$

Segue-se que, se B é um anel graduado Noetheriano e A denota sua componente de grau 0, então:

$$\dim(B/P) = \dim(A/\mathfrak{p}) + \text{gr.tr}_{k(\mathfrak{p})}k(P)$$

e

$$\dim(B_{\mathbf{p}}) = \dim(A_{\mathbf{p}}) + \text{gr.tr}_A(B),$$

para qualquer ideal P de B , $\mathbf{p} = P \cap A$.

Proposição A.7 ([6], Lema 6.6(f)). Sejam A um anel local Cohen-Macaulay com corpo residual infinito, M um A -módulo finitamente gerado com $\text{rk}(M) \geq 2$, U uma redução de M e x um elemento genérico de U . Escreva $\overline{M} = M/xA$ e Q para o núcleo do epimorfismo natural de $\mathcal{R}(M)/(x)$ sobre $\mathcal{R}(\overline{M})$. Se $\mathcal{R}_A(M)$ ou $\mathcal{R}(\overline{M})$ satisfaz (S_2) , então $Q = 0$.

Proposição A.8 ([23], Corolário 4.3). Sejam A um anel Cohen-Macaulay e M um A -módulo finitamente gerado, livre de torção e com posto. Se $\mathcal{R}_A(M)$ é Cohen-Macaulay, então M é localmente livre em codimensão um.

Teorema A.9 ([11], Teorema). *Sejam k um corpo e A um anel reduzido local da forma $A_{\mathbf{p}}$, onde A é uma k -álgebra finitamente gerada. Assuma que para cada primo minimal $\mathfrak{q}$ de A , o corpo $A_{\mathfrak{q}}$ é separável sobre k . Seja $\Omega_{A/k}$ o módulo das k -diferenciais de A , com submódulo de torção $\mathcal{T}(\Omega_{A/k})$, e seja J o menor ideal de Fitting não-nulo de $\Omega_{A/k}$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) J é principal, gerado por um elemento regular em R (i.e. J é invertível).
- (2) A é uma interseção completa e $\Omega_{A/k}/\mathcal{T}(\Omega_{A/k})$ é livre.

Além disso, se k tem característica zero, então $\Omega_{A/k}/\mathcal{T}(\Omega_{A/k})$ é livre se, e somente se, A é regular.

Proposição A.10 ([26], Corolário). Sejam k um corpo e A um domínio afim sobre k , com corpo quociente K separável sobre k . Então, A é localmente uma interseção completa se, e somente se, $\text{pd}(\Omega_{A/k}) \leq 1$.

Proposição A.11 ([23], Proposição 2.3). Sejam A um anel Noetheriano local de dimensão $d > 0$ e M um A -módulo finitamente gerado com posto e . Então,

$$e \leq \ell(M) \leq d + e - 1.$$

Proposição A.12 ([24], Teorema 7.1.5). Sejam k um corpo de característica zero, $X_1, \dots, X_n$ variáveis sobre k , $A = k[[X_1, \dots, X_n]]$ o anel de séries de potências e $f \in A$ tal que seu coeficiente constante é nulo. Com $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ definido formalmente,

$$f \in \overline{\left(X_1 \frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, X_n \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)}$$

Teorema A.13 (Critério de valoração para dependência inteira). *[[24], Teorema 6.8.3] Sejam A um anel, I um ideal em A e $r \in A$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (1) $r \in \bar{I}$,
- (2) para todo $\mathfrak{p} \in \text{Min}(A)$ e para todo anel de valoração V entre $R/\mathfrak{p}$ e seu corpo de frações $k(\mathfrak{p})$, $r \in IV$.

Proposição A.14. [24], Proposição 4.1.1] Sejam A um anel Noetheriano integralmente fechado no seu anel total de frações. O Conjunto dos primos associados de um ideal principal arbitrário gerado por um elemento regular x , é exatamente o conjunto minimal dos ideais primos sobre (x) .

Além disso, tais ideais primos associados são localmente principais.

Proposição A.15 ([25], Lema 15.16.14). Sejam A um domínio normal Noetheriano com corpo de frações K e M um A -módulo finito. São equivalentes:

- (1) M é reflexivo;
- (2) M é livre de torção e tem a propriedade (S_2) ;
- (3) M é livre de torção e $M = \bigcap_{\text{ht}(\mathfrak{p})=1} M_{\mathfrak{p}}$ onde a interseção acontece em $M \otimes_A K$.

Teorema A.16 (Auslander-Buschsbaum). *([5], Teorema 1.3.3). Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R -módulo finito. Se $\text{pd}(M) < \infty$, então*

$$\text{pd}(M) + \text{depth}(M) = \text{depth}(A).$$

Teorema A.17 ([29], Teorema 1.b). *Seja $F : 0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \cdots F_1 \xrightarrow{f_1} F_0$ uma resolução livre finita, $M = \text{coker } f_1$. Então $S_i F$ é exata se, e somente se:*

- (1) Para todo j par, $\text{depth}(I(f_j)) \geq ji$;
- (2) Para todo j ímpar,
 $\text{depth}(I_{r_{j-i+1}}(f_j)) \geq ji$, $\text{depth}(I_{r_j - i + 2}(f_j)) \geq ji - 1$, $\text{depth}(I_{r_j}(f_j)) \geq (j - 1)i + 1$.

Se $S_i F$ é exata, então é uma resolução livre finita de $S_i(M)$.

Referências Bibliográficas

- [1] Atiyah, M.F.; Macdonalds, L. G. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, (1969).
- [2] Avramov, L. *Complete intersection and symmetric algebras*, J. Algebra 73 (1981), 248-263.
- [3] Berger, D. *Differentialmoduln eindimensionaler lokaler Ringe*, Math. Z. 81 (1963), 326-354.
- [4] Bruns, W.; Herzog, J. *Cohen- Macaulay Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [5] Bruns, W.; Vetter, U. *Determinantal Rings*, Lectures Notes in Mathematics 1327, Springer-Verlag, Heidelberg, 1988.
- [6] Corso, A.; Polini, C.; Ulrich, B. *Core of projective dimension one modules*, Manuscripta Math. 111 (2003), 427-433.
- [7] Hong, J.; Noh, S.; Vasconcelos, W. V. *Integrally closed modules and their divisors*, Comm. Algebra 33 (2005), 4719-4733.
- [8] Huneke, C.; Rossi, M. *The dimension and components of symmetric algebras*, J. Algebra 98(1986), 200-210.
- [9] Huneke, C. *On the Symmetric Algebra of a Module*, J. Algebra 69(1981), 113-119.
- [10] Huneke, C.; Ulrich, B. *Divisor class group and deformations*, Amer. J. Math. 107 (1985), 1265-1303.
- [11] Lipman, J. *On the Jacobian ideal of the module of differentials*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 422-426.
- [12] Matsumura, H. *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

- [13] Miranda-Neto, C. B. *Notas de Aulas de Álgebra Comutativa*, Paraíba, 2014.
- [14] Miranda-Neto, C. B. *Derivações e a Conjectura de Zariski-Lipman*, Pernambuco, Dissertação[Mestrado em Matemática]- Universidade Federal de Pernambuco, 2002.
- [15] Scheja, G.; Storch, U. *Über differentielle Abhängigkeit bei Idealen analytischer Algebren*, Math. Z. 114(1970), 101-112.
- [16] Simis, A. *Remarkable graded algebras in algebraic geometry*, XII ELAM, IMCA. Lima, Peru, 1999.
- [17] Simis, A.; Andrade, J. F. *Tópicos de Álgebra Comutativa*, IMPA, Minas Gerais, 1981.
- [18] Simis, A.; Vasconcelos, W. V. *Krull dimension and integrality of symmetric algebras*, Manuscripta Math. 61 (1988), 63-78.
- [19] Simis, A.; Vasconcelos, W. V. *On the dimension and integrality of symmetric algebras*, Math. Z. 177 (1981), 341-358.
- [20] Simis, A.; Ulrich, B.; Vasconcelos, W. V. *Jacobian Dual Fibrations*, American J. Math. 115 (1993), 47-75.
- [21] Simis, A.; Ulrich, B.; Vasconcelos, W. V. *Tangent Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. (2) 364 (2012), 571-594.
- [22] Simis, A.; Ulrich, B.; Vasconcelos, W. V. *Tangent star cones*, J. Reine Angew. Math. 483 (1997), 23-59.
- [23] Simis, A.; Ulrich, B.; Vasconcelos, W. V. *Rees Algebra of Modules*, Proc. London Math. Soc. 87 (2003), 610-646.
- [24] Swanson, I.; Huneke, C. *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [25] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, 2015.
- [26] Vasconcelos, W. V. *A note on normality and the module of differentials*, Math. Z. 105 (1968), 291-293.
- [27] Vasconcelos, W. V. *Arithmetic of Blowup Algebras*, London Mathematical Society, Lectures Notes Series 195, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

- [28] Vasconcelos, W. V. *Integral closure. Rees Algebras, Multiplicities, Algorithms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005.
- [29] Weyman, J. *Resolutions of the exterior and symmetric powers of a module*, J. Algebra 58 (1979), 333-341.