

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Erick Rodrigues Silva

**Simetrias de Paridade e de Reversão Temporal no Efeito Hanbury
Brown-Twiss.**

João Pessoa

25 de Novembro de 2015

S586s Silva, Erick Rodrigues.
Simetrias de paridade e de reversão temporal no Efeito
Hanbury Broen-Twiss / Erick Rodrigues Silva.- João Pessoa,
2015.
86f. : il.
Orientador: Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Experimento Hanbury Brown-Twiss. 3. Efeito
Hanbury Brown-Twiss. 4. Teorema flutuação-dissipação.
5. Teorema de Wiener-Khintchine. 6. Simetria PT.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Erick Rodrigues Silva

Simetrias de Paridade e de Reversão Temporal no Efeito Hanbury
Brown-Twiss.

Dissertação de mestrado apresentada ao departamento de física da Universidade Federal da Paraíba para obtenção do título de mestre em física.

Área de concentração: Matéria Condensada.

Orientador: Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos.

João Pessoa

25 de Novembro de 2015



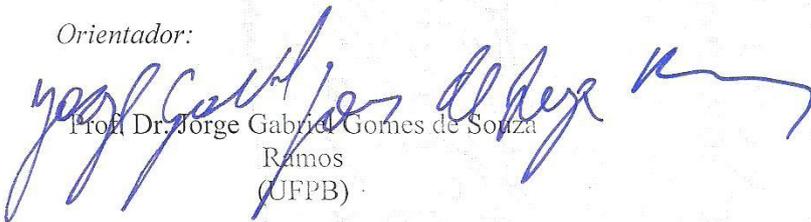
Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Mestrado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 03 de agosto de 2015, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA **Erick Rodrigues Silva** na defesa de sua dissertação intitulada "*Simetrias de paridade e de reversão temporal no efeito Hanbury Brown-Twiss*".

João Pessoa, 03 de agosto de 2015

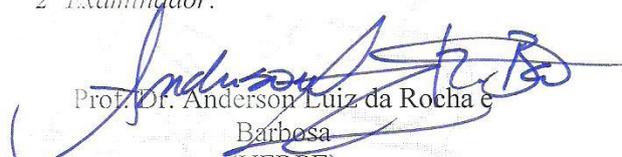
Orientador:


Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza
Ramos
(UFPB)

1º Examinador:


Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
(UFPB)

2º Examinador:


Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e
Barbosa
(UFRPE)

Agradecimentos

A meu pai, Rubens, de quem herdei o raciocínio lógico que me proporcionou ser um físico. Eu o amo.

A minha mãe, Rosemary, a pessoa mais sincera e de caráter que eu conheço. Não acredito haver literatura que expresse com exatidão como a vejo. Eu a amo.

As minhas irmãs, Lorena, Raíssa, Larissa, Amanda e Helen, por me mostrarem o incompreensível e inabalável amor fraterno. Em especial, Larissa, por ser testemunha de todos os momentos de minha vida. Eu as amo.

A minha namorada, Daiana, a grande responsável por me manter são e saudável na produção desta dissertação quando pus minha saúde e sanidade em segundo plano. Sonhamos e cremos em uma vida juntos. Eu a amo.

A meu orientador, Jorge Gabriel, pela sua maneira extremamente particular de tentar me elevar ao sucesso. Considero-o o melhor físico que pude presenciar em atividade.

A todos meus amigos, representados aqui por Thais e Rodolfo. Sofremos os mesmos desvarios e rimos os mesmos gracejos. Sinto-me honrado em ser seu amigo.

A toda minha família, representada por Mayco, meu irmão, meu melhor amigo.

A todos os funcionários e professores da UFPB.

Ao mistério que ainda há acerca de questões mais fundamentais o qual a física não se projeta, tal como o amor, a ética e o existencialismo.

Ao CNPq, pelo apoio à pesquisa.

Wir müssen wissen.
Wir werden wissen.

David Hilbert

Resumo

Sendo o experimento Hanbury Brown-Twiss bem estabelecido na literatura da ótica quântica, dedicamos esta dissertação a embutir no mesmo experimento a questão da simetria por paridade e reversão temporal. Para tanto, abrimos mão do formalismo da matriz de espalhamento que permitiu-nos utilizar técnicas como a concatenação de matrizes de espalhamento de secções diferentes em termos de apenas uma matriz e o problema do espalhamento em um sistema simétrico por paridade e reversão temporal. Dessa forma, pudemos derivar a matriz de espalhamento para o experimento Hanbury Brown-Twiss com simetria de paridade e reversão temporal (HBT-PT). De posse dessa matriz, propusemos um modelo teórico que propicia a medição experimental a simetria desse sistema, o qual chamamos de formalismo das funções de correlação.

Para estabelecermos o formalismo supracitado, estudamos o formalismo de Büttiker, onde verifica-se como a correlação entre 2 partículas incidentes em um sistema relaciona-se com o ruído devido ao transporte dessas partículas e que tipo de ruído estamos tratando, dado o regime em que o sistema está operando. Em seguida, encontramos os estados de entrada em termos dos estados de saída de 2 partículas incidindo em um sistema multiterminal, onde utilizamos a sua matriz de espalhamento para estabelecer a relação entre os estados. Com isso, derivamos todas as possíveis correlações (e, por conseguinte, o ruído) de 2 partículas incidentes nesse sistema. Assim, analisamos os casos extremos de uma barreira acoplada ao experimento HBT-PT, a fim de estabelecer o regime em que o experimento está simetricamente ajustado e demonstramos o Efeito Hanbury Brown-Twiss por paridade e reversão temporal.

Palavras Chave: Experimento Hanbury Brown-Twiss, Efeito Hanbury Brown-Twiss, Büttiker, ruído de disparo, ruído térmico, teorema flutuação-dissipação, função de correlação, teorema de Wiener-Khintchine, concatenação de matriz, matriz de espalhamento, simetria PT.

Abstract

The Hanbury Brown-Twiss experiment is very well established in quantum optics literature, so we devoted this dissertation in order to embed the parity and temporal reversal symmetry in the former experiment. Therefore, we developed the scattering matrix formalism which allow us use some techniques such as the scattering matrices' concatenation of different sections in terms of one matrix and the scattering problem of a parity and temporal reverse symmetric system. In this manner, we could derive the scattering matrix of a parity and temporal reverse symmetric Hanbury Brown-Twiss experiment(HBT-PT). With the possession of this matrix, we proposed a theoretical model which provides how to measure the symmetry of this system, which we called correlation functions formalism.

In order to stablish the former formalism, we studied Büttiker formalism, which we verified how the correlation between 2 incident particles in a system relates to the noise due transport of this particles and what kind of noise we are treating in a given regime which the system is operating. Then, we found the input states in terms of the output states of two particles inciding in a multiterminal system, which we used it's scattering matrix to stablish the relation between the states. Thereat, we derived all the possibles correlations(therefore, the noise) of two incident particles in the former system. Thereby, we analysed the extreme cases of a barrier coupled to the HBT-PT experiment for the purpose of stablish which regime the experiment is symmetric adjusted, so, demonstrating the Hanbury Brown-Twiss Effect with parity and temporal reverse symmetries.

Key Words: Hanbury Brown-Twiss experiment, Hanbury Brown-Twiss Effect, Büttiker, shot noise, thermal noise, fluctuation-dissipation theorem, correlation function, Wiener-Khintchine theorem, matrix concatenation, scattering matrix, PT symmetry, parity, temporal reversal.

Conteúdo

Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	11
1 Introdução	12
1.1 O Transporte Quântico	12
1.2 Introdução a Matriz de Espalhamento.	15
1.3 Ponto Quântico de Contato	17
1.4 Experimento Hanbury Brown-Twiss	18
2 O Formalismo de espalhamento.	21
2.1 Matriz de espalhamento S	21
2.2 Espalhamento pela equação de Lippmann-Schwinger.	23
2.3 Concatenação de matrizes S	26
2.4 Trajetórias de Feynman.	27
3 Simetria PT para o problema de espalhamento.	31
3.1 Teorema Flutuação-Dissipação.	34
3.2 Emitância.	36
3.3 Simetria PT em um sistema de 4 terminais.	40
4 Condutância e ruído no formalismo de Büttiker.	45
4.1 Condutância I: fórmula de Landauer.	45
4.2 Condutância II: o formalismo de Büttiker	48
4.3 Ruído I: flutuação térmica e a quantização da carga.	53
4.4 Ruído II: densidade espectral.	57
5 Equações das Correlações para um sistema multiterminal.	65
5.1 Estados de <i>input</i> e <i>output</i>	65
5.2 As Funções de Correlação.	71
5.3 Correlações de um sistema PT-bidimensional.	74
6 Conclusão	78
A Os comutadores do operador de campo.	81
B Normalização dos estados de Fock para o sistema multiterminal.	83
C Matriz de espalhamento do experimento HBT PT.	84
Bibliografia	85

Lista de Figuras

1.1	Ponto quântico ligado a terminais com guias	13
1.2	Modelo de um nanofio.. . . .	13
1.3	Ponto Quântico ligado a dois reservatórios por 2 guias.	14
1.4	Condutor e correntes.	14
1.5	Experimento utilizando o MOSFET e produzindo o Ponto Quântico de Contato. por: Henk van Houten and Carlo Beenakker [7]	17
1.6	Condutância vs. Voltagem. por: Henk van Houten and Carlo Beenakker [8]	17
1.7	Interferômetro de Hanbury Brown - Twiss: dois feixes coerentes são enviados de 1 e 2 para o espelho semitransparente E e refletem(transmitem) para os detectores 3 e 4. . .	18
1.8	Interferômetro de Michelson: um feixe coerente é enviado para o aparato, reflete em M_1 e M_2 até que seja transmitido no terminal do detector O . Enciclopédia Britânica. .	18
2.1	Ponto quântico ligado a dois guias ideias.	22
2.2	Transporte <i>quasi-coerente</i> por duas secções de espalhamento coerentes.	26
2.3	Circuito clássico com dois resistores.	28
2.4	Circuito Equivalente.	28
2.5	Exemplos de trajetórias da partícula em sua transmissão.	29
2.6	Possíveis trajetórias da partícula nos guias de cada terminal.	29
3.1	Estrutura representando um estado ligado com lentes de probabilidade de transmissão $\Gamma \rightarrow 0$. [28]	32
3.2	Sistema para o caso da ausência do gás.	34
3.3	Sistema respondendo à presença do gás.	34
3.4	Sistema bidimensional com simetria PT.	41
4.1	Elétron atravessa o condutor sem sofrer espalhamento.	46
4.2	Os elétrons preencheram todos os estados possíveis formados pelo potencial, permitindo ao elétron seguinte atravessar.	46
4.3	Condutor e contatos.	47
4.4	Condutor ligado a contatos por intermédio de guias.	48
4.5	Representação de um circuito RL.	54
4.6	Experimento de Edison: no primeiro caso, temos a folha ligada a um terminal positivo, gerando fluxo de carga, no segundo, quando a folha está no terminal negativo, não há corrente.	54
4.7	Termoeletron emitido pela placa.	55
4.8	Plotagem de $\frac{d}{d\omega} \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega}$, onde fizemos $a = 1000$	56
6.1	Resultados das correlações $\langle n_1 n_3 \rangle$, $\langle n_1 n_4 \rangle$, $\langle n_2 n_3 \rangle$ e $\langle n_2 n_4 \rangle$. Todas estas são equivalentes dada a simetria do sistema e os ajustes dos parâmetros de bombeamento/absorção. . .	79

Lista de Tabelas

- 1.1 Probabilidades do experimento Hanbury Brown-Twiss 19
- 6.1 Generalização da estatística do experimento Hanbury Brown-Twiss com simetria PT. . . 78

Capítulo 1

Introdução

O universo microscópico consiste na busca de detalhes do comportamento ínfimo da matéria desde os gregos, não havendo nenhuma conclusão significativa até a virada do século XIX, mesmo com o anunciado “fim da física” por Lord Kelvin. Felizmente, no início do século XX, a nuvem que assolava o entendimento da natureza em uma escala muito pequena evanesceu-se com o advento de uma das teorias mais poderosas produzidas pelas mais perspicazes mentes: a Mecânica Quântica.

No seu processo natural de desenvolvimento, uma pergunta que eventualmente surgiria seria: é possível concatenar a mecânica quântica à mecânica clássica? Em termos técnicos, é possível manter a coerência da informação da partícula à medida que aumentamos a escala dos nossos instrumentos de medição? Embora trabalharemos nesta pergunta mais adiante, a resposta é sim, o que motiva o início do estudo da Física de Sistemas Mesoscópicos.

Este capítulo mostrará, de forma superficial, as experiências que possibilitam o transporte eletrônico a nível quântico e o formalismo que é usualmente utilizado para descrever tal processo, o formalismo da Matriz de Espalhamento. Estabelecido como se dá o transporte, iremos introduzir o experimento Hanbury Brown-Twiss e indicar o efeito de mesmo nome.

Também apresentaremos alguns resultados usuais da literatura que serão necessários nesta dissertação, contudo, demonstrações mais sólidas e outros resultados serão pormenorizados nos capítulos seguintes.

1.1 O Transporte Quântico

Basicamente, a física mesoscópica consiste em fazer medições de uma partícula transportada por uma cavidade ligada à reservatórios por intermédio de guias com vários canais de propagação, ou fios quânticos (figura 1.1).

Ao analisarmos um fio comum, devido às suas dimensões, não é possível identificar seus estados quantizados, assim; dada uma diferença de potencial de escala clássica, acabamos por fazer uma corrente com muitos elétrons, uma vez que há muitos estados disponíveis para ocupação. Entretanto, quando trabalhamos com fios de escala nanométrica, o número de elétrons no transporte diminui consideravelmente, devido ao baixo número de estados de ocupação e, assim, prevalece a mecânica quântica. No fio quântico, ou guia, de comprimento infinito, estuda-se os estados possíveis para a ocupação de uma partícula no plano XY do fio (figura 1.2) [1]. Mais adiante, veremos brevemente como se dá o confinamento do elétron no plano bidimensional.

O comportamento quantitativo da partícula no fio é dado pela equação de Schrödinger em duas dimensões

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y) + V(y)\psi(x,y) = E\psi(x,y). \quad (1.1)$$

Obedecendo a figura 1.2, consideraremos que a partícula possui estados propagantes no eixo x e está aprisionada no fio pela direção transversal aos estados propagantes. Então devemos denotar que o potencial V não possui dependência com o eixo x , pois, para que este eixo possua estados propagantes, a partícula não pode ter nenhum tipo de interação, assim, fazemos do potencial V o meio de confinamento da partícula no fio quântico, dado esse que nos auxiliará na nossa concepção

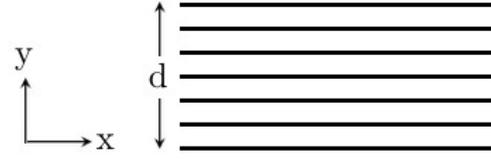
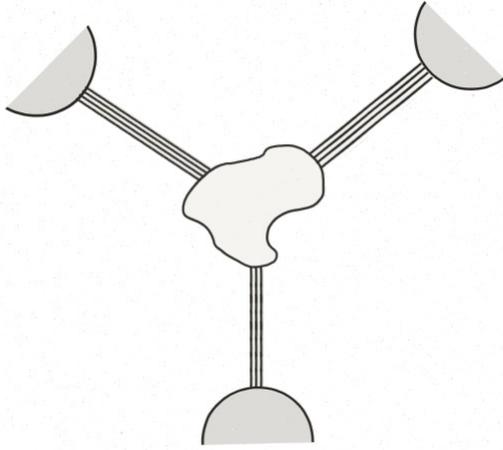


Figura 1.2: Modelo de um nanofio..

Figura 1.1: Ponto quântico ligado a terminais com guias

mais adiante. Com V possuindo somente dependência com y , podemos tratar os eixos separadamente fazendo

$$\psi(x, y) = \psi_x(x)\psi_y(y). \quad (1.2)$$

Substituindo na equação (1.1) todas as suposições acima admitidas e com alguma manipulação algébrica, temos

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi_x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi_y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + V - E.$$

De onde extraímos as relações

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi_x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} = \epsilon, \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi_y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + V - E = \epsilon. \end{array} \right.$$

onde ϵ são as auto-energias do sistema. Como já citado, no eixo x a partícula tem caráter livre (ou propagante), assim, sua solução para o ponto quântico na origem será

$$\psi_x(x) = be^{ik_x x} + ae^{-ik_x x}, \quad (1.3)$$

onde k_x define o momento da partícula no eixo x por $p = \hbar k_x$.

No eixo y , a partícula está confinada na região compreendida entre $y = 0$ e $y = d$, para tanto, podemos tomar o potencial como nulo nas regiões $0 < y < d$ e infinito fora dessa região, para garantir seu confinamento. Percebemos que trata-se de um poço de potencial infinito, assim

$$\psi_y(y) = \sqrt{\frac{2}{d}} \text{sen}(k_y y), \quad (1.4)$$

e k_y também define o momento da partícula no eixo y . Assim, concluímos que

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sum_{n=1}^N \text{sen}\left(\frac{\hbar \pi n}{d} y\right) (b_n e^{ik_x x} + a_n e^{-ik_x x}).$$

O resultado acima deflagra os estados possíveis para um fio quântico e os possíveis modos de propagação da partícula. Contudo, sempre trabalharemos com mais de um fio quântico no sistema. Então, se considerarmos g fios acoplados ao ponto quântico, cada estado será dado por

$$\psi_g(x, y) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sum_{n=1}^{N_g} \text{sen}\left(\frac{\hbar \pi n}{d} y\right) (b_n^{(g)} e^{ik_x x} + a_n^{(g)} e^{-ik_x x}), \quad (1.5)$$



Figura 1.3: Ponto Quântico ligado a dois reservatórios por 2 guias.

onde g é a quantidade de terminais utilizados, N_g o número de canais propagantes no referido terminal. Por ora, o termo “terminal” deve ser entendido como um conjunto que contém o guia. As soluções acima são as contribuições de cada fio para o estado geral do sistema que será definido mais adiante. É importante que interpretemos o nosso resultado: para cada energia acessível no eixo y , cujo estado é estacionário, teremos um canal propagante no eixo x , dessa forma, os estados possíveis nas ordenadas regerão o número de estados para a propagação da partícula, objeto esse que chamaremos de canais. O número de canais disponíveis são chamados de “canais abertos”. Como já sabemos, as amplitudes de probabilidade, $a_n^{(g)}$ e $b_n^{(g)}$, auxilia-nos a definir a probabilidade de transmissão e reflexão da função de onda ao interagir com a cavidade, isto indica-nos que é possível, à partir da equação de Schrödinger, obter o número de canais abertos e as suas probabilidades de transmissão. O nosso problema, *a grosso modo*, possui características similares a um problema básico de mecânica quântica, entretanto, a extensão da sua aplicação é diferente.

No caso padrão(ou, como nos referiremos também, *standard*) [2], ligamos dois fios considerados balísticos(com probabilidade nula de reflexão) a um condutor e dois reservatórios(figura 1.3), o conjunto fio-reservatório é o que caracteriza o conjunto que chamamos de terminal. O reservatório é o meio que alimenta o sistema para a incidência de partículas no ponto quântico por intermédio do fio, ademais, mostraremos no capítulo 4 que os reservatórios atuam de maneira mais fundamental no sistema. As partículas que são utilizadas pelos reservatórios para alimentar o sistema podem ser férmions ou bósons. Para um reservatório de bósons, podemos considerar um corpo negro acoplado aos fios; que será utilizado no capítulo 3, nesse caso, as partículas utilizadas serão fótons. A distribuição que rege a distribuição dos fótons nos estados dentro da cavidade é chamada de distribuição de Bose-Einstein. Para férmions, consideremos um gás de elétrons(que trataremos ainda neste capítulo), denominamos de distribuição de Fermi-Dirac. Podemos representar as duas distribuições pela equação

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu_\alpha}{k_b T_\alpha}} + \epsilon 1},$$

onde E é a energia disponível para a ocupação do elétron no reservatório, μ_α é o potencial químico do reservatório $\alpha = 1, 2$ e T_α sua temperatura onde e é o fator que determina a natureza da partícula utilizada nos reservatórios, com $\epsilon = 1$ contemplando o caso de férmions e $\epsilon = -1$, para bósons. Esse fator ϵ estará presente no desenvolvimento do formalismo para o estudo no caso multiterminal que desenvolveremos no capítulo final.

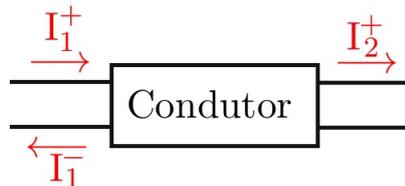


Figura 1.4: Condutor e correntes.

Por ora, tomaremos nossas partículas como elétrons nos reservatórios, isto é, $\epsilon = 1$

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu_\alpha}{k_b T_\alpha}} + 1}. \quad (1.6)$$

Para facilitar o tratamento teórico e experimental, tomamos reservatórios à temperaturas muito baixas ($T \rightarrow 0$). Temos, pois

$$f_0(E) = \theta(E - \mu_\alpha), \quad (1.7)$$

onde θ é a função de Heaviside, ou degrau, definida como

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases}.$$

Fazendo $\mu_1 > \mu_2$, formar-se-á um fluxo de corrente I_1^+ (figura 1.4) no terminal 1 definido por

$$I_1^+ = \frac{2e}{h} N(\mu_1 - \mu_2), \quad (1.8)$$

onde e é o valor da carga elétrica e N é o número de canais abertos. O fator 2 deve-se à degenerescência de spin. À princípio, o fator foi colocado à mão para que a expressão definida acima tenha dimensão de corrente, no capítulo 4 iremos demonstrar essa expressão por 2 formalismos diferentes.

Pela mecânica quântica, sabemos que ao interagir com o ponto quântico, a corrente sofre alteração e reparte-se entre corrente transmitida (I_2^+) e refletida (I_1^-), assim, temos

$$I_1^+ = I_1^- + I_2^+. \quad (1.9)$$

Tomando os coeficientes de probabilidade de transmissão (T) e de reflexão ($1 - T$), obtemos as relações

$$\begin{cases} I_2^+ &= \frac{2e}{h} N(\mu_1 - \mu_2) T, \\ I_1^- &= \frac{2e}{h} N(\mu_1 - \mu_2) (1 - T). \end{cases}$$

Na verdade, o que nos interessa é a corrente que “passará” pelo condutor (I_2^+), ela será responsável pela transmissão da informação, assim, calculamos a condutância por

$$\begin{aligned} G &= \frac{I_2^+}{V}, \\ G &= \frac{I_2^+}{\mu_1 - \mu_2}, \\ G &= \frac{e}{h} NT. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Esta equação é conhecida como fórmula de Landauer para a condutância. Existe um cuidado no resultado acima, pois estamos tratando de um ponto quântico que pouco emaranha os estados da partícula, dado que o ponto quântico balístico para o caso de dois guias ignora a possível transmissão do elétron no canal n ao canal m , e isso é um ponto revés do formalismo de Landauer, uma vez que as flutuações são partes fundamentais e inevitáveis em qualquer sistema quântico, contudo, no capítulo 4, apresentaremos o formalismo de Büttiker que resolve tal revés.

1.2 Introdução a Matriz de Espalhamento.

Considerando um sistema com \mathcal{N} terminais acoplados (equação 1.5) em um ponto quântico, temos a função de onda desse sistema [3]

$$\Psi(x, y) = \sum_{g=1}^{\mathcal{N}} \psi_g(x, y). \quad (1.11)$$

Da quântica elementar, sabemos que o output e o input do sistema são definidos pelas amplitudes da solução dos estados assintóticos da função de onda $\Psi(x, y)$. Pela conservação de carga, estas amplitudes devem relacionar-se de tal sorte que

$$b_i^{(g)} = \sum_{j=1}^{N_1} s_{ij}^{(1)} a_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{N_2} s_{ij}^{(2)} a_j^{(2)} + \dots + \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{N}}} s_{ij}^{(\mathcal{N})} a_j^{(\mathcal{N})} \quad , \quad (1.12)$$

$$b_i^{(g)} = \sum_{g'=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{N_{g'}} s_{ij}^{(g')} a_j^{(g')} \quad , \quad (1.13)$$

isto é, o output relaciona-se com todas os possíveis inputs do sistema, o contrário também é possível, contudo, respeitaremos o que é disseminado na literatura. Podemos escrever a expressão acima na forma matricial

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{A} \quad , \quad (1.14)$$

onde $\mathbf{B} = (b_1^{(1)} \dots b_{N_1}^{(1)} b_1^{(2)} \dots b_{N_2}^{(2)} \dots b_g^{(g)} \dots b_{N_g}^{(g)})^T$ e $\mathbf{A} = (a_1^{(1)} \dots a_{N_1}^{(1)} a_1^{(2)} \dots a_{N_2}^{(2)} \dots a_g^{(g)} \dots a_{N_g}^{(g)})^T$. Dessa forma, temos a matriz de espalhamento S dada por

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,N_g} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,N_g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N_g,1} & s_{N_g,2} & \cdots & s_{N_g,N_g} \end{bmatrix}_{\sum_{g=1}^{\mathcal{N}} N_g \times \sum_{g=1}^{\mathcal{N}} N_g} \quad . \quad (1.15)$$

Omitimos o sobrescrito das entradas da matriz S , contudo, não devemos confundir a ordem da matriz, como a notação sugere. O caso acima trata do caso mais geral possível do caso multiterminal e multicanal do ponto de vista da teoria da matriz de espalhamento, onde as amplitudes relacionam-se linearmente.

Com a construção acima, podemos tomar considerações práticas para que facilitem o tratamento do problema. Por exemplo, retomando o caso *standard* teremos $\mathbf{B} = (b_1^{(1)} \dots b_{N_1}^{(1)} b_1^{(2)} \dots b_{N_2}^{(2)})^T$ e $\mathbf{A} = (a_1^{(1)} \dots a_{N_1}^{(1)} a_1^{(2)} \dots a_{N_2}^{(2)})^T$, ou de forma mais compacta, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{B}^{(2)})^T$ e $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)})^T$ e o problema reduz-se a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(1)} \\ \mathbf{B}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} \end{bmatrix} \quad , \quad (1.16)$$

com r, r', t e t' são os blocos da matriz S que fazem a conexão input-output. Dessa forma, podemos ter um *insight* do caso geral para a condutância definida por

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Tr}(tt^\dagger) \quad . \quad (1.17)$$

Esta é a fórmula de Landauer-Büttiker. É intuitivo concluir o uso do bloco t na definição da condutância, uma vez que o transporte é definido pela transmissão do terminal 1 para o terminal 2. Provaremos analiticamente esta expressão nos capítulos seguintes. É importante ressaltar as propriedades necessárias à matriz de espalhamento para que algumas leis de conservação sejam preservadas. Uma delas é a conservação do fluxo de carga, definida por uma matriz de espalhamento unitária ($SS^\dagger = I$), para o caso em que aplicamos um campo magnético no sistema e desprezamos o efeito do acoplamento spin-órbita. Por outro lado, se eliminamos o campo magnético e consideramos a invariância por rotação de spin, temos uma matriz simétrica ($S = S^T$). Por fim, temos o caso em que eliminamos o campo e desconsideramos o acoplamento de spin, chamamos de caso simplético, onde a matriz de espalhamento é auto-dual, na linguagem do cálculo de quatérnions[6].

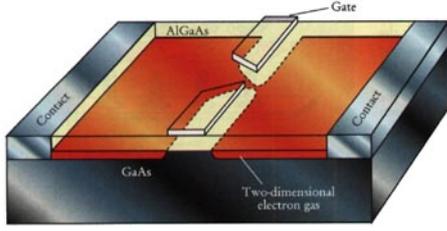


Figura 1.5: Experimento utilizando o MOSFET e produzindo o Ponto Quântico de Contato. por: Henk van Houten and Carlo Beenakker [7]

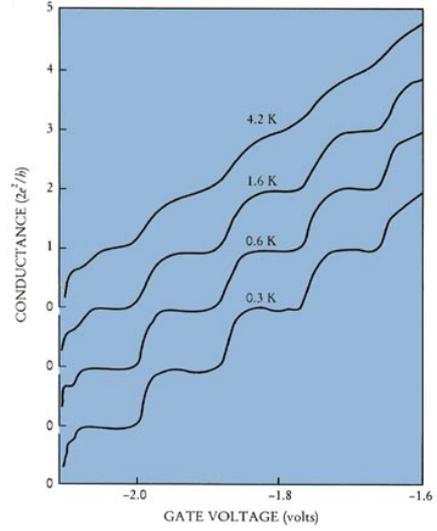


Figura 1.6: Condutância vs. Voltagem. por: Henk van Houten and Carlo Beenakker [8]

Podemos, ainda, tratar o caso multiterminal em (1.15) considerando que cada terminal possui somente 1 canal aberto. Assim, teremos $\mathbf{B} = (b_1^{(1)} b_2^{(2)} \dots b_g^{(g)})^T$ e $\mathbf{A} = (a_1^{(1)} a_2^{(2)} \dots a_g^{(g)})^T$ e o problema fica

$$\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_g^{(g)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,g} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \dots & s_{2,g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{g,1} & s_{g,2} & \dots & s_{g,g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_g^{(g)} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

O caso acima é o sistema que proporcionou-nos a trabalhar com o caso multiterminal e será utilizado para montarmos nosso formalismo. Será explorado nesta dissertação em maiores detalhes no capítulo final, por ora, continuaremos a desenvolver os conceitos com aplicações.

1.3 Ponto Quântico de Contato

Como primeiro exemplo das discussões acima, trabalharemos com um MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor) de AlGaAs e GaAl, o resultado do acoplamento dessas duas estruturas formam um gás bidimensional. Colocamos na interface um bloqueio (Gates) com apenas uma constrição menor que o meio caminho livre do elétron (figura 1.5). Tal constrição é chamada de Ponto Quântico de Contato [7]. É aplicado então uma certa voltagem nos gates e, dessa forma, criam-se canais para a propagação do elétron. Por tanto, temos

$$T(E_f) = \sum_n \theta(E_f - \epsilon_n). \quad (1.19)$$

onde ϵ_n são os modos de energia e E_f a energia de Fermi dos elétrons. Como o sistema é balístico e padrão, podemos aplicar (1.19) na fórmula de Landauer para encontrar a condutância do sistema, assim temos

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_n \theta(E_f - \epsilon_n). \quad (1.20)$$

Uma forma mais clara de percebermos os canais gerados pela função degrau θ , é

$$G = \frac{2e^2}{h} M, \quad (1.21)$$

onde M são os modos disponíveis para a propagação, assim, observamos que a condução é quantizada em frações de $\frac{2e^2}{h}$ à temperaturas muito baixas, como mostra a figura (1.6) [8].

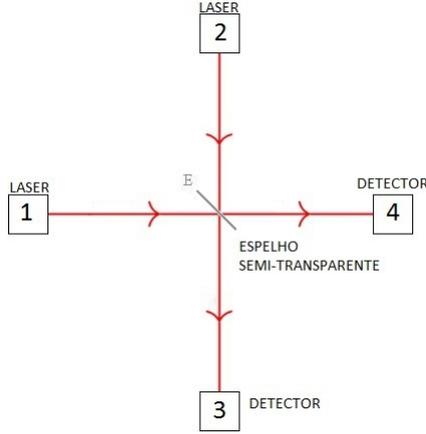


Figura 1.7: Interferômetro de Hanbury Brown - Twiss: dois feixes coerentes são enviados de 1 e 2 para o espelho semitransparente E e refletem(transmitem) para os detectores 3 e 4.

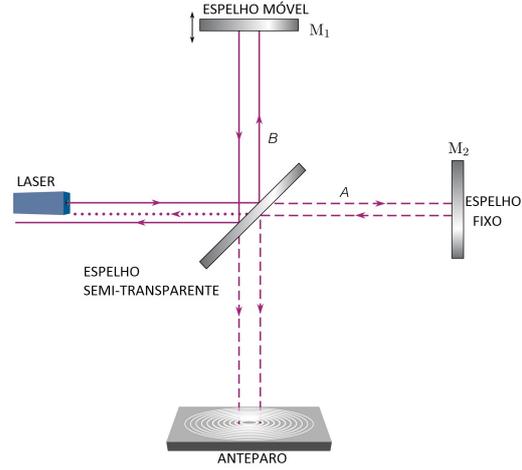


Figura 1.8: Interferômetro de Michelson: um feixe coerente é enviado para o aparato, reflete em M_1 e M_2 até que seja transmitido no terminal do detector O . Enciclopédia Britânica.

1.4 Experimento Hanbury Brown-Twiss

Em 1956, R. Hanbury Brown e Q. Twiss desenvolveram um interferômetro que difere em aspectos fundamentais do interferômetro de Michelson. O feito sucede o avanço experimental do alto controle da fotoemissão, dessa forma, a diferença de fase de dois fótons enviados para um espelho semitransparente anula-se, permitindo que possa medir a correlação das intensidades devido somente à diferença de fase causada pela interação com o espelho (figura 1.7)[69]¹. Por outro lado, o aparato de Michelson envia um feixe de luz coerente para refletir no aparato e ser projetado no anteparo O , preservando a fase relativa entre os feixes, já que seu interesse era o estudo dessa diferença para diferentes posições do espelho móvel, eliminando, pois, a correlação (figura 1.8) [9]. Com tal feito, R. Hanbury Brown e Q. Twiss puderam medir o diâmetro angular da estrela Sirius com uma precisão mais elevada que os dados existentes à época [10].

Dadas as condições, podemos projetar o experimento de Hanbury Brown-Twiss(HBT) no formalismo da matriz de espalhamento [11]. Primeiramente observando que o aparato possui 4 terminais e não deve ter blocos de reflexão para não retornar aos terminais de fotoemissão (1 e 2), assim, pela equação (1.14), temos

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 0 & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & 0 & 0 \\ s_{14} & s_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Devemos observar que apesar de haver termos não-nulos que indicam *input* em 3 e 4, estes só foram postos para que a conservação de carga não fosse quebrada, de toda sorte, a simetria do problema também exige a presença de tais amplitudes. Dessa forma, podemos tomar o caso mais simples onde $s_{13}^* = s_{24}^* = s_{31} = s_{24} = r$ e $s_{14}^* = s_{23}^* = s_{32} = s_{14} = t$. Então, teremos

$$\begin{pmatrix} b_3^\dagger \\ b_4^\dagger \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^* & t^* \\ 0 & 0 & t^* & r^* \\ r & t & 0 & 0 \\ t & r & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

¹Na referência [69], o autor utiliza o mesmo procedimento considerando a emissão e recepção de fótons entre átomos, contudo, encontrando a mesma relação de correlação.

Tabela 1.1: Probabilidades do experimento Hanbury Brown-Twiss

	Clássico	Férmions	Bósons
P(3,3)	$2 r ^2 t ^2$	$2 r ^2 t ^2(1 - I ^2)$	$2 r ^2 t ^2(1 + I ^2)$
P(4,4)	$2 r ^2 t ^2$	$2 r ^2 t ^2(1 - I ^2)$	$2 r ^2 t ^2(1 + I ^2)$
P(3,4)	$ r ^4 + t ^4$	$ r ^4 + t ^4 + 2 I ^2 r ^2 t ^2$	$ r ^4 + t ^4 - 2 I ^2 r ^2 t ^2$

Utilizando a unitariedade, temos os vínculos

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 \quad , \quad (1.24)$$

$$\text{Re}(rt^*) = 0 \quad . \quad (1.25)$$

O resultado (1.24) já era esperado, pois se $|r|^2$ e $|t|^2$ são as probabilidades de reflexão e transmissão respectivamente, temos que somando suas contribuições, devemos ter 100% de certeza que detectaremos a partícula emitida. Mais adiante, o vínculo (1.25) será usado para analisar as correlações do experimento nos capítulos posteriores.

É interessante apontar que o experimento HBT possui um caráter mais fundamental que aparenta ter. Quando calculamos as correlações desse sistema[66], temos os seguintes resultados para férmions

$$P(3, 3) = P(4, 4) = 2|r|^2|t|^2(1 - |I|^2), \quad (1.26)$$

$$P(3, 4) = |r|^4 + |t|^4 + 2|I|^2|r|^2|t|^2 \quad (1.27)$$

onde I , por ora, deve ser visto como um fator que mede a interferência entre os estados de saída dos dois elétrons utilizados no aparato e P a probabilidade de obter tais estados. Como se vê nas equações acima, quando a interferência dos estados dos dois elétrons é total, a probabilidade do *output* para os dois elétrons no mesmo terminal é nula e para o *output* com um em cada terminal de saída é 100%, quanto utilizamos o vínculo (1.24) em (1.27) para $I = 1$. Isso recupera o princípio de exclusão de Pauli, que proíbe férmions de compartilhar o mesmo estado quântico do sistema. Quando emitimos duas partículas com nenhuma interferência entre seus estados, retomamos à estatística da emissão clássica de elétrons. Na Tabela 1.1 podemos ver todos os resultados possíveis, tanto para férmions quanto para bósons, assim, podemos ver que a inserção do fator de interferência I altera o resultado clássico de tal forma a causar um ruído no resultado até, invariavelmente, obter-se a discretização da carga (que, mais adiante, veremos que trata-se do ruído de disparo, *shot noise*), encontrado nas probabilidades nulas de se obter mais de 1 elétron em somente um terminal de saída. E é essa a razão da condutância (1.10) não divergir quando o número de canais é muito grande: com um número muito grande de estados disponíveis para a ocupação, as partículas pouco se correlacionarão, trazendo os resultados determinísticos já estabelecidos. O estudo experimental do fator de interferência pode ser visto nas referências [4, 5]. Assim, identificamos uma grande influência das correlações entre as partículas nos *outputs* do experimento HBT, a essa influência denominamos Efeito Hanbury Brown-Twiss. É possível encontrar o efeito Hanbury Brown-Twiss em outros contextos, como o decaimento de antipróton em pares de píons correlacionados[70]. Outro ponto fundamental no experimento HBT é o uso de 2 partículas no nosso sistema. Diferentemente como tratamos o caso de 1 partícula incidindo no sistema e, com isso, encontramos todos os estados possíveis de ocupação. Contudo, com 2 partículas, os estados que determinam o sistema modificam-se. Primeiramente, devemos tomar que as partículas são indistinguíveis, resultando na inserção de mais um índice na função de onda geral do sistema. Para N elétrons² de um sistema inserido no espaço, o estado total será dado pelo determinante de Slater

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \dots & \psi_1(x_N) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \dots & \psi_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(x_1) & \psi_N(x_2) & \dots & \psi_N(x_N) \end{vmatrix}, \quad (1.28)$$

²Atentamos para elétrons devido ao vínculo de bósons ser menos restrita. Ademais, como discutiremos no capítulo 4, o fato de haver condensação de estados bosônicos torna o problema de difícil tratamento.

onde ψ são as autofunções do sistema em questão. Para o nosso problema, as autofunções são dadas por (1.5). Com o estado acima, verificamos que só o fato de considerarmos a indistinguibilidade das partículas já gera o ruído causado por I . O estado total posto na forma de determinante também já nos dá uma idéia de uma correlação entre os elétrons, ainda que em posições diferentes. Se fossem independentes, o estado seria dado apenas pelo produto dos N auto-estados possíveis. É precisamente dessa correlação, e dos fatos acima apontados, que vamos nos valer para montar o formalismo que pretendemos desenvolver nesta dissertação.

Como foi dito anteriormente, este capítulo busca motivar nosso estudo, com a preocupação de introduzir a idéia básica para o leitor dos termos gerais e tentando motivá-lo a chegar no problema final. Os outros capítulos buscam aprofundar-se na física e nas ferramentas utilizadas para o desenvolvimento final.

No capítulo 2, assumiremos o formalismo de transporte utilizado nesta dissertação da matriz de espalhamento, demonstraremos como chegar naturalmente na forma padrão do problema de espalhamento e descreveremos técnicas de sua obtenção e alguns fenômenos resultantes do formalismo.

Em seguida, no capítulo 3, estudaremos o sistema de transporte unidimensional com simetria PT. Introduziremos a idéia de flutuação utilizando como base o movimento Browniano a fim e mostraremos como montar um sistema bidimensional com simetria PT, uma vez que é esse sistema que motivou o desenvolvimento de nosso formalismo.

A fim de ganharmos fluência no tratamento do ruído, no capítulo 4 apresentaremos o formalismo desenvolvido por M. Büttiker, onde o mesmo determina a condutância (1.17) e uma equação geral para o ruído gerado no transporte. Concomitantemente ao formalismo de Büttiker, introduziremos as idéias de condutância e ruído que precediam o formalismo.

Por fim, no capítulo 5, discutiremos uma idéia alternativa ao formalismo de Büttiker para determinar o ruído de um sistema multiterminal. Encontraremos expressões de correlações para o caso (1.18); uma vez que, demonstraremos no capítulo 4 que as correlações equivalem ao ruído espectral, e aplicaremos em um sistema de quatro terminais com simetria PT (construído à partir das técnicas e idéias dos capítulos 2 e 3); sistema esse que motivou-nos a encontrar funções de correlações para sistemas multiterminais, gerando resultados novos para a literatura, rementendo-nos à generalização da Tabela 1.1 para o caso de haver simetria por reversão temporal e paridade, que serão discutidos na conclusão.

Nesta dissertação, buscamos ser o máximo detalhistas no desenvolvimento de todas as passagens, incluindo nos apêndices, contudo, sem uma excessiva formalidade matemática. Acreditamos que as funções de correlações encontradas, além de fornecer o estudo do sistema PT de 4 terminais, possa proporcionar uma análise detalhada de outros sistemas multiterminais cuja matriz de espalhamento é conhecida.

Capítulo 2

O Formalismo de espalhamento.

Ao longo da história da física quântica, o estudo do espalhamento é a mais importante técnica experimental; este possibilitou a constatação das mais diversas teorias fundamentais até hoje em dia. Dessa forma, há uma necessidade de desenvolver a teoria do espalhamento.

Até o início do século XX, o espalhamento era mais utilizado na propagação de ondas eletromagnéticas, daí o advento do rádio e comunicações à longa distância. Uma outra marcante aplicação foi o experimento de Rutherford de emissão de raios catódicos em uma fina camada de ouro quando testara o modelo de Thomson. Ao certificar-se da discrepância entre a previsão teórica e os resultados, isto lhe permitiu propor o modelo orbital que previa com boa precisão a direção dos raios espalhados. À partir de então, nos anos 30, a física nuclear projetou-se sobre tal teoria a fim de mapear as propriedades do núcleo atômico, incidindo partículas extremamente energéticas em átomos pesados para, assim, investigar seu interior por intermédio do espectro resultante. Contudo, lidar com espalhamento atômico é uma tarefa extremamente laboriosa. A primeira dificuldade que se encontra é manter um núcleo (mesmo aquele com número atômico grande) estável para que se possa trabalhar sobre o mesmo, outrossim a escala de energia extremamente alta para partículas viajando próximo da velocidade da luz e incidir no núcleo. Para a teoria, também há entraves quando tomamos o núcleo como um sistema quântico complexo, isto é, vários corpúsculos (nucleons) encerram-se para formá-lo. Se uma partícula energética incide em um nucleon, devemos considerar a interação deste com os demais (eletromagnética) ou por um potencial complexo (interação com os nêutrons), decaimentos, emissão, absorção etc. Obviamente este é um problema intratável. Dada a impossibilidade do tratamento do problema, surge a necessidade de uma manipulação estatística dos resultados. Depois da metade do século, H. Feshbach, C. Porter e V. Weisskopf tratam do problema por intermédio do chamado modelo ótico[12] que funciona muito bem para um *range* extenso de energias. Felizmente, o modelo ótico não é apenas aplicável no caso nuclear, esse também foi aplicado para o caso de reações químicas, trazendo o problema de escalas nucleares para as moleculares, algo que; considerando as devidas proporções, torna a questão mais simples.

Com essa isometria, podemos considerar um núcleo atômico como uma cavidade com paredes, ou ponto quântico, acoplado a terminais propagadores que realizarão o transporte de partículas de reservatórios de elétrons, ou fontes de radiações de corpo-negro de fótons[13], para a cavidade por intermédio de guia, ou canais (figura 2.1). Essa analogia foi devido a Ericson e Mayer-Kuckuk[14] onde eles exploram o espalhamento de guias de ondas pelo condutor, atravessando-o por um caminho complexo; característica de um núcleo ressonante, considerações essas que desenvolveremos agora.

2.1 Matriz de espalhamento S

Vamos considerar um sistema quântico com n partículas não-interagentes que contempla momentos e spins (helicidade, para partículas sem massa) de cada partícula. Esse sistema será descrito pelo estado Ψ_α de tal modo que

$$\int d\alpha \Psi_\alpha \Psi_{\alpha'} = \delta(\alpha - \alpha'). \quad (2.1)$$

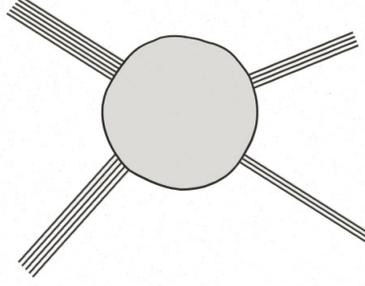


Figura 2.1: Ponto quântico ligado a dois guias ideais.

Aqui fizemos uma economia de notação colocando todas as possíveis graus de liberdade que compõem o estado no índice α , e $\delta(\alpha - \alpha')$ é o produto de todos os eventuais deltas de Dirac e Kronecker que ortogonalizam Ψ_α . Como são possíveis estados do sistema, temos

$$H\Psi_\alpha = E_\alpha\Psi_\alpha, \quad (2.2)$$

sendo E_α as possíveis auto-energias do problema que soma a energia de cada partícula do sistema.

Para o problema de espalhamento, analisaremos o mesmo problema nos tempos $t \rightarrow \pm\infty$, onde consideraremos o estado Ψ_α^- antes de interagir com um eventual potencial presente no sistema em um passado remoto $t \rightarrow -\infty$ (*input*), e Ψ_α^+ como o estado que já não sente mais a interação de outrora, estando, pois, em um futuro remoto $t \rightarrow +\infty$ (*output*).

Embora esses conceitos sejam bastante convidativos a prosseguirmos em utilizá-los, podemos futuramente cometer um erro ao calcular a probabilidade de seção de choque, pois o que na realidade estamos medindo são partículas livres cujo auto-estado é ϕ_α , e isso refletirá na hamiltoniana de tal modo que H será separada em

$$H = H_0 + V, \quad (2.3)$$

com H_0 sendo sua parte cinética e a interação representada por V . E assim, temos para ϕ_α

$$H_0\phi_\alpha = E_\alpha\phi_\alpha. \quad (2.4)$$

Como já era esperado, ϕ_α possui o mesmo espectro que Ψ_α^\pm e a massa em H_0 é a que de fato corresponde à realidade física que é medida, não sendo necessariamente igual à H , pois o potencial V claramente interfere nesta medição. Tão logo, após realizada a medida, para sabermos o estado do sistema quando interage com o potencial, definiremos agora o *input* e o *output* como sendo

$$\Psi_\alpha^\pm = \mathcal{U}(\pm\infty)\phi_\alpha \quad (2.5)$$

para $\mathcal{U}(t)$ sendo o operador de translação temporal que depende de V . Para um potencial que depende do tempo, teremos a série de Dyson[15]

$$\mathcal{U}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{T}[V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n)], \quad (2.6)$$

onde \mathcal{T} é o operador de ordenação temporal. Agora, os estados *input* e *output* estão normalizados de acordo com uma partícula livre, assim, podemos seguramente definir a matriz de espalhamento:

As entradas da matriz de espalhamento S conectam estados assintóticos de um sistema aberto.

Então, se construímos um estado em $t \rightarrow -\infty$ tal que seu conteúdo quântico seja α , teremos o *input* Ψ_α^- . Posteriormente, em $t \rightarrow +\infty$, o seu conteúdo modificará-se para β , e teremos o *output* Ψ_β^+ , assim, pela definição acima, temos que

$$S_{\beta\alpha} = \langle \Psi_\beta^+ | \Psi_\alpha^- \rangle, \quad (2.7)$$

$$S_{\beta\alpha} = \langle \phi_\beta^+ | \mathcal{U}^\dagger(+\infty)\mathcal{U}(-\infty) | \phi_\alpha^- \rangle, \quad (2.8)$$

onde, podemos inserir o chamado operador \hat{S}

$$\hat{S} = \mathcal{U}^\dagger(+\infty)\mathcal{U}(-\infty). \quad (2.9)$$

Este é útil para demonstrar a invariância de Lorentz da matriz de espalhamento e construir uma teoria de perturbação dependente do tempo para a matriz S , contudo, isto não será explorado nesta dissertação.

Nesta secção, obtivemos a matriz de espalhamento na forma bastante genérica, sem; contudo, especificar a obtenção do operador de translação temporal que foi obtido no contexto da Teoria Quântica de Campos[16]. Na linguagem da física mesoscópica, estamos considerando os eventuais espalhamentos inelásticos no ponto quântico, causados por uma rede de fônons, ou interação coulombiana entre a partícula espalhada e a estrutura interna do ponto, e isso reflete na hamiltoniana tomando-se a dependência temporal. Concluimos rapidamente que o problema é inviável de tratar neste formalismo. Diferentemente de como fizemos no capítulo 1, na próxima secção demonstraremos a forma *standard* da matriz de espalhamento, tomando a interação local da partícula com o ponto quântico.

2.2 Espalhamento pela equação de Lippmann-Schwinger.

No problema padrão, consideramos dois terminais acoplados a um ponto quântico e resolvemos a equação de Schrödinger tomando as soluções à esquerda e direita do centro espalhador separadamente: $\psi_s^{(\pm)}(x)$, onde $s = \pm 1$ representa a direção de propagação da onda e o superscrito denota a onda emergente (+), ou incidente (-). Notemos que estamos fazendo absolutamente o mesmo tratamento da secção anterior, contudo, abordando o problema tomando soluções estacionárias. Esse tratamento permite que expressemos o ponto quântico como um potencial local $V(x')$, assim, a solução geral do problema é dada por[6]

$$\psi_s^{(\pm)}(x) = \phi_s(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(\pm)}(x, x')V(x')\psi_s^{(\pm)}(x')dx', \quad (2.10)$$

onde $\phi_s(x)$ é solução homogênea do problema, o segundo termo é a solução particular de

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi^{(\pm)}(x) &= E\psi^{(\pm)}(x), \\ \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar k^2}{2m} \right) \psi^{(\pm)}(x) &= V(x)\psi^{(\pm)}(x). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nesse último passo, utilizamos o fato que a solução que estamos procurando está infinitamente distante do ponto e isso reflete na energia contemplando o espectro de uma partícula livre. De posse da equação diferencial não-homogênea, esta terá uma função de Green $\mathbf{G}(x, x')$ que satisfaz as mesmas condições de contorno da equação acima de tal modo que

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar k^2}{2m} \right) \mathbf{G}^{(\pm)}(x, x') = \delta(x - x'), \quad (2.12)$$

onde $\delta(x - x')$ é a delta de Dirac. Podemos demonstrar essa assertiva atuando o operador $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar k^2}{2m}$ em (2.10), então, utilizamos o fato que $\phi_s(x)$ é a solução homogênea e na integral, substituímos (2.12) e utilizamos a propriedade de filtragem da delta e obtemos (2.11). Podemos simplificar (2.11) e (2.12) fazendo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \psi^{(\pm)}(x) = U(x)\psi^{(\pm)}(x) \quad , \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \mathbf{g}^{(\pm)}(x, x') = \delta(x - x') \quad , \quad (2.14)$$

pois, fizemos a substituição

$$U = \frac{2m}{\hbar^2} V \quad , \quad (2.15)$$

$$\mathbf{g}^{(\pm)} = \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{G}^{(\pm)}. \quad (2.16)$$

A solução fica semelhante à anterior

$$\psi_s^{(\pm)}(x) = \phi_s(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(\pm)}(x, x') U(x') \psi_s^{(\pm)}(x') dx'. \quad (2.17)$$

A equação acima é chamada de equação de Lippmann-Schwinger e podemos interpretá-lo como a solução perturbada de $\psi_s^{(\pm)}$ frente à existência de um potencial local $V(x')$ e a função de Green encarrega-se de informar-nos como a solução em x modificará-se dada a flutuação em x' [17]. Dada as considerações discutidas acima, estamos procurando pela forma assintótica de $\psi_s^{(\pm)}$. Assim, começamos com solução homogênea assumindo a forma de uma onda plana

$$\phi_s(x) = \frac{e^{iskx}}{\sqrt{2\pi \frac{\hbar^2 k}{m}}}. \quad (2.18)$$

É razoável sugerirmos essa solução, uma vez que em um ponto muito distante, a onda espalhada comporte-se como uma onda plana. A função de Green não perturbada é definida por[18]

$$g^{(\pm)}(x, x') = \pm \frac{1}{2ik} e^{\pm ik|x-x'|}. \quad (2.19)$$

Assim, teremos a equação de Lippmann-Schwinger dada por

$$\psi_s^{(\pm)}(x) = \frac{e^{iskx}}{\sqrt{2\pi \frac{\hbar^2 k}{m}}} + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ik|x-x'|} U(x') \psi_s^{(\pm)}(x') dx'. \quad (2.20)$$

Vamos avaliar uma solução emergente para a esquerda cuja direção de propagação é $s = 1$, primeiramente para o lado esquerdo tomamos $x \rightarrow -\infty$, vem

$$\begin{aligned} \psi_+^{(+)}(x) &= \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi \frac{\hbar^2 k}{m}}} + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} U(x') \psi_+^{(+)}(x') dx', \\ \psi_+^{(+)}(x) &= \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi \frac{\hbar^2 k}{m}}} + 2\pi i \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi \frac{\hbar^2 k}{m}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-ikx'}}{\sqrt{2\pi \frac{\hbar^2 k}{m}}} \right)^* V(x') \psi_+^{(+)}(x') dx', \\ \psi_+^{(+)}(x) &= \phi_+(x) - 2\pi i \langle \phi_- | V | \psi_+^{(+)} \rangle \phi_-(x). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Analogamente para $x \rightarrow +\infty$, vem

$$\psi_+^{(+)}(x) = \left(1 - 2\pi i \langle \phi_+ | V | \psi_+^{(+)} \rangle \right) \phi_+(x). \quad (2.22)$$

Vamos nomear, convenientemente, os termos como

$$r = -2\pi i \langle \phi_- | V | \psi_+^{(+)} \rangle, \quad (2.23)$$

$$t = 1 - 2\pi i \langle \phi_+ | V | \psi_+^{(+)} \rangle. \quad (2.24)$$

É importante apontar que as amplitudes acima são resultantes da flutuação causada pelo potencial local V , se não houvesse tal potencial, podemos ver que a solução seria dada somente por frente de ondas propagando-se para a direita, como era esperado.

Teremos analogamente para as soluções $\psi_-^{(+)}$ as soluções nos assintóticos

$$r' = -2\pi i \langle \phi_+ | V | \psi_-^{(+)} \rangle, \quad (2.25)$$

$$t' = 1 - 2\pi i \langle \phi_- | V | \psi_-^{(+)} \rangle. \quad (2.26)$$

A seguir, veremos a razão de tal taxaço para as amplitudes acima. Podemos montar uma solução geral para o problema fazendo a combinação linear de todas as soluções obtidas

$$\Psi(x) = a^{(1)} \psi_+^{(+)} + a^{(2)} \psi_-^{(+)}. \quad (2.27)$$

É seguro fazer isso, pois a equação de Schrödinger é uma equação diferencial linear, então qualquer combinação linear de suas soluções é também solução. Assim, utilizando os resultados acima, teremos a solução

$$\Psi(x) = \begin{cases} a^{(1)}\phi_+ + b^{(1)}\phi_-, & \text{para } x \rightarrow -\infty \\ a^{(2)}\phi_- + b^{(2)}\phi_+, & \text{para } x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (2.28)$$

onde, as constantes $b^{(1)}$ e $b^{(2)}$ obedecem a relação linear

$$\begin{pmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

que é o que denominamos de forma *standard* do problema de espalhamento: o próprio tratamento introduzido nesta secção nos remete naturalmente à forma como trataremos daqui por diante nesta dissertação quando nos referirmos à forma *standard* ou padrão.

Agora, é fortuito que demonstremos a propriedade mais importante das matrizes de espalhamento de sistemas que não possuem simetrias adicionais. Tomando a definição de corrente $J_{L,R}$, temos

$$J_{L,R} \propto \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2.30)$$

onde o subíndice L e R atendem para $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$, respectivamente. Encontrando, primeiramente, J_L , temos

$$J_L \propto (a^{(1)}\phi_+ + b^{(1)}\phi_-) (-a^{*(1)}\phi_- + b^{*(1)}\phi_+) - (a^{*(1)}\phi_- + b^{*(1)}\phi_+) (a^{(1)}\phi_+ - b^{(1)}\phi_-), \quad (2.31)$$

$$J_L \propto |b^{(1)}|^2 - |a^{(1)}|^2$$

Analogamente para J_R , vem

$$J_R \propto |a^{(2)}|^2 - |b^{(2)}|^2. \quad (2.32)$$

A corrente definida por (2.30) satisfaz a equação da continuidade com a densidade dada por $|\Psi|^2$, assim, a probabilidade deve preservar-se ao longo do espaço (pois, $\Psi = \langle x | \alpha \rangle$, com $|\alpha\rangle$ sendo o estado da partícula, então estamos fazendo o tratamento no espaço das posições.), isso acarreta na conservação da corrente, assim, temos $J_L = J_R$. Então

$$|b^{(1)}|^2 + |b^{(2)}|^2 = |a^{(1)}|^2 + |a^{(2)}|^2, \quad (2.33)$$

$$\begin{pmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Se substituimos (2.29) na expressão acima, observamos que a igualdade só é satisfeita se

$$SS^\dagger = I, \quad (2.34)$$

que é a chamada condição de unitariedade. Esse vínculo está presente para o caso mais geral de matrizes de espalhamento e garante a conservação da carga elétrica. Para fótons, este vínculo só é garantido quando o sistema possui um mecanismo de bombeamento e absorção bem equilibrado, como será visto no último capítulo, uma vez que fótons não possuem carga elétrica.

Se analisarmos o sistema à partir de suas simetrias, temos que o caso acima sendo o mais geral possível, então, esse está livre de qualquer simetria, onde alcançamos isso aplicando um campo magnético no sistema e consideramos o efeito do acoplamento spin-órbita. Por outro lado, temos o caso em que eliminamos o campo e consideramos o acoplamento de spin-órbita, chamamos de caso simplético. Se eliminamos o campo magnético e consideramos a invariância por rotação de spin, temos uma matriz simétrica ($S = S^T$), resultado esse que obteremos no nosso tratamento final.

Ademais, a forma matricial de S carrega consigo muitas informações: quando obtida, obedece seguramente as condições de contorno do sistema, dado que a condição linear advém de uma função de Green que satisfaz as condições de contorno do sistema, por definição. Podemos calcular imediatamente a condutância pela fórmula de Landauer-Büttiker (vide capítulo 1) e outros cumulantes que caracterizam o ponto através da estatística de contagem de Levitov-Lesovik [19][20]. Existem outras utilizações para a matriz de espalhamento, contudo, para nosso propósito, será necessário o desenvolvimento da próxima secção.

2.3 Concatenação de matrizes S .

Em algumas situações, o condutor possui algumas dezenas acima do comprimento de relaxação de fase, por exemplo. Existe um formalismo de transporte não-coerente que resolve o problema, contudo, de arcabouço teórico mais elaborado. Nesta secção, estabelecemos uma técnica de fácil tratamento aplicando o formalismo da matriz de espalhamento no transporte *quasi-coerente*: consideremos um condutor um pouco acima da escala mesoscópica ligado à quatro terminais. Como foi dito anteriormente, o condutor não realiza um transporte coerente, para que possamos utilizar as técnicas já desenvolvidas. Devemos separar o condutor em duas secções coerentes de matriz de espalhamento $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$ (figura 2.2). Isso garante que tenhamos uma função de onda para a equação de Schrödinger na forma de guias de ondas e, por conseguinte, tenhamos uma matriz de espalhamento para cada secção. Aqui, utilizaremos a mesma notação de b para saída e a para entrada. Observamos que a estrutura acima poderia representar uma ponte Hall, assim, o transporte deveria ocorrer do guia 1 e 2, posto que 3 e 4 são guias de prova[21]. Podemos naturalmente tentar a equação de Schrödinger para o sistema e encontrar suas soluções, porém, além do número de soluções ser demasiadamente grande, o problema se alastra por dois centros espalhadores. Dessa forma, é melhor que apliquemos o formalismo da matriz de espalhamento e tentemos concatenar as matrizes $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$ de forma que tenhamos, no final, reduzido o problema de forma semelhante ao problema de um centro espalhador.

Vamos escrever a matriz de espalhamento para cada lado do sistema como segue

$$\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{(1)} & t'^{(1)} \\ t^{(1)} & r'^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_5 \\ b_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{(2)} & t'^{(2)} \\ t^{(2)} & r'^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_5 \\ a_{24} \end{pmatrix}.$$

Aqui comprimimos todos os modos dos terminais 1 e 3 (2 e 4) em uma só amplitude, tornando, então, as entradas de $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$ blocos de matrizes, o que quer dizer que devemos ter cuidado para realizar manipulações algébricas. Para concatenar as matrizes $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$, devemos eliminar algebricamente as amplitudes intermediárias a_5 e b_5 . Escrevemos explicitamente ambas amplitudes de cada matriz acima, temos. Aqui comprimimos todos os modos dos terminais 1 e 3 (2 e 4) em uma só amplitude, tornando, então, as entradas de $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$ blocos de matrizes, o que quer dizer que devemos ter cuidado para realizar manipulações algébricas. Para concatenar as matrizes $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$, devemos eliminar algebricamente as amplitudes intermediárias a_5 e b_5 . Escrevemos explicitamente ambas amplitudes de cada matriz acima, temos.

$$b_5 = t^{(1)}a_{13} + r'^{(1)}a_5, \quad (2.35)$$

$$a_5 = r^{(2)}b_5 + t'^{(2)}a_{24}. \quad (2.36)$$

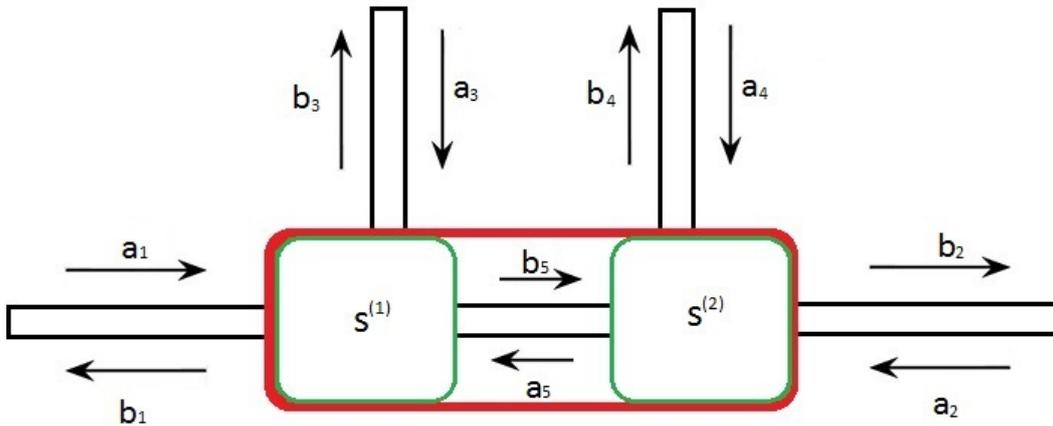


Figura 2.2: Transporte *quasi-coerente* por duas secções de espalhamento coerentes.

Substituindo (2.36) em (2.35), vem

$$\begin{aligned} b_5 &= t^{(1)}a_{13} + r'^{(1)}(r^{(2)}b_5 + t'^{(2)}a_{24}), \\ (I - r'^{(1)}r^{(2)})b_5 &= t^{(1)}a_{13} + r'^{(1)}t'^{(2)}a_{24}. \end{aligned}$$

Aqui, devemos lembrar que os elementos das matrizes de espalhamento são também matrizes, tão logo, devemos respeitar os lados que vamos operar as parcelas acima, então, multiplicando pela esquerda $(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}$

$$b_5 = (I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t^{(1)}a_{13} + (I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}r'^{(1)}t'^{(2)}a_{24}. \quad (2.37)$$

Aplicando em (2.36), temos

$$a_5 = r^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t^{(1)}a_{13} + [t'^{(2)} + r^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t'^{(2)}]a_{24}. \quad (2.38)$$

Se aplicarmos (2.37) e (2.38) nas expressões de b_{13} e b_{24} , organizamos ambas de forma que tenha a relação matricial

$$\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{24} \end{pmatrix}.$$

Vamos demonstrar para b_{24} e encontrar t e r' . Escrevendo explicitamente b_{24} , vem

$$b_{24} = t^{(2)}b_5 + r'^{(2)}a_{24}.$$

Substituímos (2.37), temos

$$\begin{aligned} b_{24} &= t^{(2)} [(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t^{(1)}a_{13} + (I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}r'^{(1)}t'^{(2)}a_{24}] + r'^{(2)}a_{24}, \\ b_{24} &= t^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t^{(1)}a_{13} + [r'^{(2)} + t^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}r'^{(1)}t'^{(2)}]a_{24}, \\ b_{24} &= ta_{13} + r'a_{24}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$t = t^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t^{(1)}, \quad r' = r'^{(2)} + t^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}r'^{(1)}t'^{(2)}. \quad (2.39)$$

Da mesma forma, é possível demonstrar que

$$t' = t'^{(1)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t'^{(2)}, \quad r = r^{(1)} + t'^{(1)}r'^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t^{(1)}. \quad (2.40)$$

É interessante notar que o resultado acima é válido para qualquer número de terminais: apesar de estarmos utilizando apenas quatro, o tratamento pode ser estendido imediatamente para um número maior, apenas inserindo nas amplitudes como fizemos com 1 e 3, por exemplo, além de cada terminal possuir um número qualquer de canais. A técnica de concatenação de matrizes é análogo ao caso da associação de resistores de um sistema elétrico clássico (figura 2.3 e 2.4.) substituindo todos por um resistor equivalente, contudo, a seguir veremos que a associação no regime coerente permite que a fase da trajetória influencie na condutância do sistema. Outrossim, o que torna o caráter de nosso cálculo mais geral é o fato deste não se aplicar a somente condutores, como foi a nossa premissa quando definimos o problema de espalhamento para um sistema físico qualquer. Nosso resultado além de válido para o regime coerente, também informa as possíveis trajetórias do componente dentro do condutor, que é o tema da nossa próxima seção.

2.4 Trajetórias de Feynman.

A matriz de espalhamento geral da seção anterior nos traz informações relevantes não só a respeito do transporte da partícula, como também a trajetória que a mesma percorre na região intermediária nos canais como vemos a seguir.

Podemos redefinir a matriz $(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}$ como uma série geométrica, assim, analisando somente as amplitudes que realizam a condução longitudinal, escrevemos t utilizando (2.39)

$$\begin{aligned} t &= t^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t^{(1)} \\ t &= t^{(2)}(I + [r'^{(1)}r^{(2)}] + [r'^{(1)}r^{(2)}][r'^{(1)}r^{(2)}] + [r'^{(1)}r^{(2)}][r'^{(1)}r^{(2)}][r'^{(1)}r^{(2)}] + \dots)t^{(1)} \\ t &= t^{(2)}t^{(1)} + t^{(2)}[r'^{(1)}r^{(2)}]t^{(1)} + t^{(2)}[r'^{(1)}r^{(2)}][r'^{(1)}r^{(2)}]t^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

Observamos que (2.41) nos apresenta todas as trajetórias possíveis ao passar pela região intermediária dos terminais e existir transmissão: no primeiro termo, a partícula passa pelos dois centros espalhadores sem reflexões, no segundo, a partícula adentra a região intermediária, é refletida pelo segundo centro, é refletida pelo primeiro e é transmitida pelo segundo (figura 2.5) e assim por diante. Além disso, esse formalismo especifica todos os canais que a partícula ocupa no guia intermediário. Se consideramos o elemento da matriz t que indique a passagem da partícula do canal n dos guias da esquerda para o canal m pertencente aos guias da direita, temos, por exemplo, para o segundo termo de (2.41) que indica que a partícula sofreu reflexão dos dois centros antes de ser transmitida

$$(t^{(2)}[r^{(1)}r^{(2)}]t^{(1)})_{mn} = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} t_{mm_1}^{(2)} r_{m_1 m_2}^{(1)} r_{m_2 m_3}^{(2)} t_{m_3 n}^{(1)} \quad (2.42)$$

A relação acima pode ser melhor entendida se considerarmos o termo $t_{m_1 m_2}^{(2)} r_{m_2 m_3}^{(1)} r_{m_3 n}^{(2)}$, como é visto na figura 2.6. O problema acima é altamente similar ao caso do problema em mecânica quântica de uma partícula indo de um ponto “a” para o ponto “b” no espaço de configuração. Por isso, a esses caminhos denominamos trajetórias de Feynman[15]. Portanto, podemos expressar t_{mn} em uma representação mais adequada para a transmissão de uma partícula no canal n para o canal m que é por meio das amplitudes de cada trajetória

$$t_{mn} = \sum_P A_P, \quad (2.43)$$

onde A_P é a amplitude de cada caminho P possível para a partícula. A analogia é imediata: a entrada t_{mn} é o propagador, então, o módulo ao quadrado é a probabilidade de transmissão T_{mn} dado por

$$T_{mn} = \sum_P A_P A_P^* + \sum_P \sum_{P'} A_P A_{P'}^*. \quad (2.44)$$

Aqui, há uma sutileza se considerarmos o dispositivo incoerente, isto é, se o comprimento do dispositivo for maior que seu comprimento de relaxação de fase. Definimos a amplitude de cada trajetória por[22]

$$A_P = k e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (2.45)$$

onde S é a ação clássica e k a constante que torna o propagador normalizado. Tomando um condutor com dimensões maiores que a escala mesoscópica, então, a ação é consideravelmente grande, tão logo, S/\hbar é um ângulo grandiosíssimo, isso faz com que as amplitudes das possíveis trajetórias oscilem de tal forma que cancelarão a sua contribuição no termo de interferência[23]. Assim, para um dispositivo incoerente, podemos anular o segundo termo do somatório e facilmente obter a probabilidade de cada trajetória T_{mn} . Podemos ver o efeito da interferência no exemplo de dois guias, cada um com um canal. Então, temos

$$\begin{cases} T_1 = |t_1|^2 = |t'_1|^2, & R_1 = |r_1|^2 = |r'_1|^2, \\ T_2 = |t_2|^2 = |t'_2|^2, & R_2 = |r_2|^2 = |r'_2|^2. \end{cases}$$

Calculando seu coeficiente de transmissão longitudinal, temos

$$t = \frac{t_1 t_2}{1 - r'_1 r_2}. \quad (2.46)$$

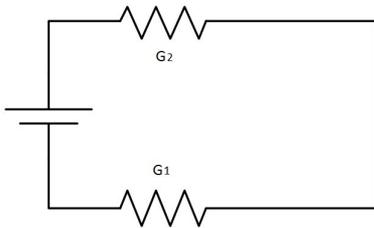


Figura 2.3: Circuito clássico com dois resistores.

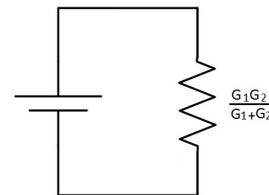


Figura 2.4: Circuito Equivalente.

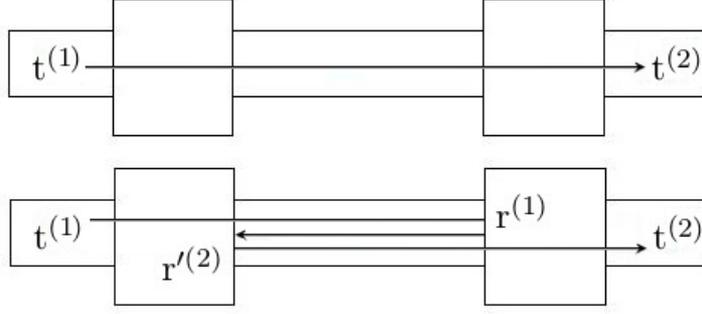


Figura 2.5: Exemplos de trajetórias da partícula em sua transmissão.

Aqui, os coeficientes não são mais matrizes. Encontrando a probabilidade de transmissão, temos

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{t_1^* t_2^*}{1 - r_1^* r_2^*} \frac{t_1 t_2}{1 - r_1' r_2'} \quad , \\
 T &= \frac{T_1 T_2}{1 - r_1^* r_2^* - r_1' r_2' + R_1 R_2} \quad , \\
 T &= \frac{T_1 T_2}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \theta + R_1 R_2} \quad .
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

No último passo, fizemos $r_{1,2} = \sqrt{R_{1,2}} e^{i\varphi_{1,2}}$, onde φ é a fase da amplitude do caminho e $\theta = \varphi_1 + \varphi_2$. Como esperado, a transmissão de um condutor coerente depende da fase do caminho tomado, fazendo, pois, que influencie diretamente na condutância.

Para um condutor incoerente é mais fácil se consideramos a discussão logo acima, basta tomar o quadrado dos coeficientes da matriz (pois estamos considerando somente 1 modo) de cada secção e substituir diretamente em T , onde teremos

$$T = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2} . \tag{2.48}$$

Vamos explicar nossos resultados: se tivermos um condutor cuja dimensões sejam pequenas o suficiente para serem considerados coerentes, efeitos quânticos irão influenciar de tal sorte que irão diminuir a condutância, isto é, a interferência devido a interação na cavidade diminui a probabilidade do portador de ser transmitido. Esse efeito já é conhecido na literatura, chamado de Localização de Anderson[24]. Para um dispositivo com dimensões não-mesoscópicas, temos uma condutância que não modifica-se frente a fenômenos puramente quânticos, como podemos ver na equivalência entre a equação (2.48) e a figura 2.4. É importante, também, ressaltar que a sequência das matrizes a serem acopladas é relevante no transporte, como podemos ver nas equações (2.39) e (2.40), tal como o grau de interferência entre as trajetórias das partículas; dada a discussão acima, diferente no que ocorre em um condutor clássico, onde nenhum dos fatos acima interfere na medição do circuito da figura 2.4.

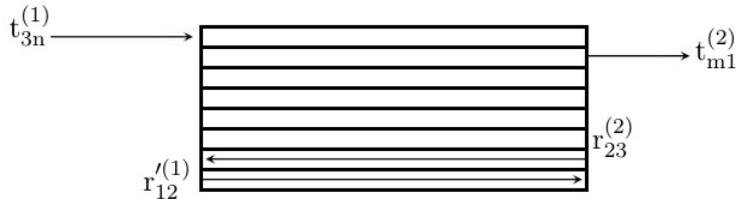


Figura 2.6: Possíveis trajetórias da partícula nos guias de cada terminal.

Neste capítulo, estudamos as minúcias da matriz de espalhamento e algumas das informações que esta apresenta que facilita o tratamento do problema em sistemas mesoscópicos. Tomamos resultados imediatos para as técnicas que estão presentes no contexto da Teoria Quântica de Campos e Eletrodinâmica Quântica[25] e apresentamos a técnica de concatenação de matrizes que será utilizada no resultado final da dissertação quando acoplaremos 4 terminais, tratados como centro espalhadores, em uma cavidade quântica balística. O sistema será montado escalonadamente, sendo este capítulo o primeiro degrau. O segundo degrau é investigar se este sistema é invariante por uma mudança de paridade e reversão temporal. Por isso, desenvolveremos estes conceitos para o formalismo de matrizes de espalhamento no capítulo seguinte.

Capítulo 3

Simetria PT para o problema de espalhamento.

Na primeira metade do século XX, os axiomas fundamentais da primeira quantização, introduzidos por P. Dirac[26], compuseram as bases elementares da mecânica quântica das próximas décadas. Um dos axiomas, em particular, é a hermiticidade do operador hamiltoniano

$$H = H^\dagger. \quad (3.1)$$

Esse axioma possui um caráter de adaptação mais matemática que física propriamente: com um hamiltoniano hermitiano, obter-se-á um espectro de energia real e permitirá a comparação com os dados medidos. Contudo, na década de 90, C. M. Bender e S. Boettcher estenderam o conceito de hermiticidade para uma hamiltoniana invariante por um deslocamento no espaço-tempo, isto é, possuir simetria de paridade e de reversão temporal(ou simplesmente PT)[27], como podemos ver, por exemplo, no hamiltoniano do oscilador quântico

$$H = p^2 + x^2, \quad (3.2)$$

que tem espectro de energia $E = 2n + 1$, pois fizemos $\hbar = 1$, $m = 1/2$, $k = 2$ e obtemos $\omega = 2$. Se adicionarmos o termo ix no hamiltoniano, isto é $H' = H + ix$, não teríamos o axioma da hermiticidade de Dirac cumprida, contudo, o hamiltoniano ainda seria invariante por simetria PT , como podemos observar

$$\mathcal{P}\mathcal{T}H'(\mathcal{P}\mathcal{T})^{-1} = p^2 + (-x)^2 + (-i)(-x) = H', \quad (3.3)$$

além disso, podemos encontrar facilmente o espectro de H' aplicando nas auto-funções do oscilador quântico, isto é

$$H'\psi = (p^2 + x^2 + ix)\psi = \left[p^2 + \left(x + \frac{i}{2} \right)^2 + 1/4 \right] \psi = (2n + \frac{5}{4})\psi. \quad (3.4)$$

Como observamos, apesar do hamiltoniano não ser hermitiano, ele possui um espectro real, positivo, discreto e real, indicando que é possível que as simetrias sejam categorias mais fundamentais que o axioma de hermiticidade de Dirac.

Tão logo, podemos estender esse fato no formalismo de espalhamento construindo um sistema invariante por simetria de reversão temporal[28] para uma secção de matriz de espalhamento S tal que

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

onde as entradas de S representam números, pois estamos analisando o caso de 1 canal na esquerda e na direita. Se aplicamos a reversão temporal na função de onda que descreve o problema acima, vem que $\mathcal{T}\psi_{\text{in,out}} = \psi_{\text{out,in}}^*$, como estamos no caso padrão, temos $b = Sa$, se tomamos o seu complexo conjugado, a matriz S do problema, com o tempo invertido, será dada por

$$\mathcal{T}S = [S^*]^{-1}. \quad (3.6)$$

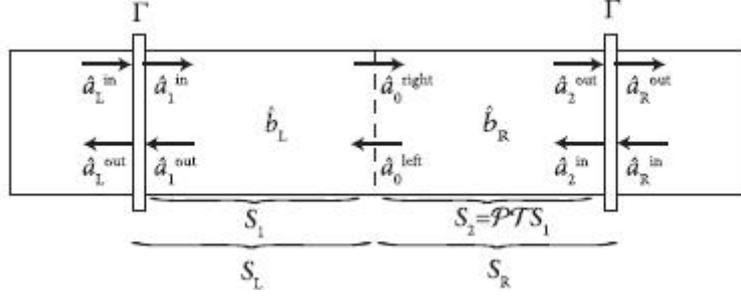


Figura 3.1: Estrutura representando um estado ligado com lentes de probabilidade de transmissão $\Gamma \rightarrow 0$. [28]

Para a paridade, teremos $\mathcal{P}\psi_{\text{in,out}}(x) = \psi_{\text{in,out}}(-x)$, isso indica que as amplitudes de saída(entrada) da direita trocam com as da esquerda, contudo, sem trocar o sentido de incidência(amplitudes de saída/entrada continuarão a ser de saída/entrada), isso determina que os elementos da matriz de espalhamento trocarão de posição de tal sorte que

$$\mathcal{P}S = \sigma_x S \sigma_x, \quad (3.7)$$

onde, σ_x é a matriz de Pauli em x . Agora, iremos aplicar tais considerações no sistema invariante-PT mais simples possível, e analisar as conseqüências.

Tomando uma cavidade ligada à dois terminais com um canal cada, dividiremos a cavidade em duas secções de matrizes S_1 e S_2 com o vínculo que S_2 deve possuir simetria de paridade e reversão temporal com S_1 , como observamos na figura 3.1. Dessa forma, aplicando (3.6) e (3.7), temos para S_2

$$S_2 = \sigma_x S_1^{*-1} \sigma_x. \quad (3.8)$$

Utilizamos a definição $S_1^* S_1^{*-1} = I$ para encontrar S_1^{*-1} , teremos

$$\begin{pmatrix} r_1^* & t_1^* \\ t_1^* & r_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o par de equações para a e d

$$\begin{cases} r_1^* a + t_1^* d = 1, \\ t_1^* a + r_1^* d = 0. \end{cases}$$

Encontramos, assim, que $a = \frac{1}{(r_1 - t_1^* r_1'^{-1} t_1)^*}$ e $d = (r_1'^{-1} t_1)^* \frac{1}{(t_1^* r_1'^{-1} t_1 - r_1)^*}$. Usando o mesmo procedimento para b e c , temos a matriz

$$S_1^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(r_1 - t_1^* r_1'^{-1} t_1)^*} & (r_1'^{-1} t_1)^* \frac{1}{(t_1^* r_1'^{-1} t_1 - r_1)^*} \\ (r_1'^{-1} t_1)^* \frac{1}{(t_1^* r_1'^{-1} t_1 - r_1)^*} & \frac{1}{(r_1 - t_1^* r_1'^{-1} t_1)^*} \end{pmatrix}.$$

Aplicando no vínculo (3.8), teremos a matriz

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(r_1 - t_1^* r_1'^{-1} t_1)^*} & (r_1'^{-1} t_1)^* \frac{1}{(t_1^* r_1'^{-1} t_1 - r_1)^*} \\ (r_1'^{-1} t_1)^* \frac{1}{(t_1^* r_1'^{-1} t_1 - r_1)^*} & \frac{1}{(r_1 - t_1^* r_1'^{-1} t_1)^*} \end{pmatrix}.$$

Poderíamos simplesmente encontrar a matriz de espalhamento S do sistema apenas concatenando S_1 e S_2 através da técnica desenvolvida no final do capítulo anterior. Contudo, não teríamos como explorar fisicamente esse sistema, pois não temos meios de controlar os parâmetros que caracterizam as entradas da matriz S . Uma forma de contornar esse problema é fechando este sistema, assim, criaremos estados estacionários característicos deste, a seguir, fazemos incidir uma partícula na cavidade ao passo que ajustemos um parâmetro a ser escolhido da cavidade para descobrirmos os seus pontos de ressonância, por conseguinte, suas propriedades[29].

Para tanto, estudaremos os estados ligados deste sistema tomando-o como cavidade ressonante acoplando barreiras na direita e na esquerda com probabilidade de transmissão $\Gamma \rightarrow 0$, onde trataremos este como uma secção com matriz S_Γ definindo o problema de espalhamento do espelho tal que

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_L^{\text{out}} \\ \hat{a}_1^{\text{in}} \end{pmatrix} = S_\Gamma \begin{pmatrix} \hat{a}_L^{\text{in}} \\ \hat{a}_1^{\text{out}} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

como é retratado na figura 3.1. Dessa forma, teremos meios de analisar o seu comportamento por intermédio do parâmetro Γ : as barreiras serão nosso meio de medida das propriedades do sistema montado acima, daí a importância de haver determinado de antemão o parâmetro de probabilidade de transmissão Γ . Assim, estabelecemos a matriz S_Γ de tal sorte que esta respeite o vínculo da unitariedade. Uma possível representação seria

$$S_\Gamma = - \begin{pmatrix} \sqrt{1-\Gamma} & i\sqrt{\Gamma} \\ i\sqrt{\Gamma} & \sqrt{1-\Gamma} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Utilizando S_1 definida pela forma (3.5) e S_Γ por (3.10), temos para o lado esquerdo

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_L^{\text{out}} \\ \hat{a}_1^{\text{in}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sqrt{1-\Gamma} & i\sqrt{\Gamma} \\ i\sqrt{\Gamma} & \sqrt{1-\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_L^{\text{in}} \\ \hat{a}_1^{\text{out}} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1^{\text{out}} \\ \hat{a}_0^{\text{right}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & t'_1 \\ t_1 & r'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^{\text{in}} \\ \hat{a}_0^{\text{left}} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

A nossa intenção é acoplar as matrizes S_1 e S_Γ e obter uma matriz equivalente para o lado esquerdo da cavidade, a qual chamaremos de S_L . Assim, aplicaremos a técnica da concatenação extraindo das matrizes acima as equações

$$\begin{cases} \hat{a}_1^{\text{in}} = -i\sqrt{\Gamma}\hat{a}_L^{\text{in}} - \sqrt{1-\Gamma}\hat{a}_1^{\text{out}}, \\ \hat{a}_1^{\text{out}} = r_1\hat{a}_1^{\text{in}} + t'_1\hat{a}_0^{\text{left}}. \end{cases}$$

Resolvendo para \hat{a}_1^{in} e \hat{a}_1^{out} , temos

$$\begin{cases} \hat{a}_1^{\text{in}} = -\frac{i\sqrt{\Gamma}}{1+r_1\sqrt{1-\Gamma}}\hat{a}_L^{\text{in}} - \frac{t'_1\sqrt{1-\Gamma}}{1+r_1\sqrt{1-\Gamma}}\hat{a}_0^{\text{left}}, \\ \hat{a}_1^{\text{out}} = -\frac{r_1i\sqrt{\Gamma}}{1+r_1\sqrt{1-\Gamma}}\hat{a}_L^{\text{in}} + \frac{t'_1}{1+r_1\sqrt{1-\Gamma}}\hat{a}_0^{\text{left}}. \end{cases}$$

Agora, explicitando as equações restantes, temos

$$\begin{cases} \hat{a}_L^{\text{out}} = -\sqrt{1-\Gamma}\hat{a}_L^{\text{in}} - i\sqrt{\Gamma}\hat{a}_1^{\text{out}}, \\ \hat{a}_0^{\text{right}} = t_1\hat{a}_1^{\text{in}} + r'_1\hat{a}_0^{\text{left}}. \end{cases}$$

Substituindo \hat{a}_1^{in} e \hat{a}_1^{out} , obtemos

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_L^{\text{out}} \\ \hat{a}_0^{\text{right}} \end{pmatrix} = S_L \begin{pmatrix} \hat{a}_L^{\text{in}} \\ \hat{a}_0^{\text{left}} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

onde

$$S_L = - \begin{pmatrix} \frac{r_1 + \sqrt{1-\Gamma}}{1+r_1\sqrt{1-\Gamma}} & \frac{it'_1\sqrt{\Gamma}}{1+r_1\sqrt{1-\Gamma}} \\ \frac{it_1\sqrt{\Gamma}}{1+r_1\sqrt{1-\Gamma}} & \frac{t_1t'_1\sqrt{1-\Gamma}}{1+r_1\sqrt{1-\Gamma}} - r'_1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Podemos inferir o mesmo resultado para o lado direito da estrutura tomando

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0^{\text{left}} \\ \hat{a}_R^{\text{out}} \end{pmatrix} = S_R \begin{pmatrix} \hat{a}_0^{\text{right}} \\ \hat{a}_R^{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Para encontrar S_R , basta utilizarmos o fato que a estrutura possui simetria PT, assim

$$\begin{aligned} S_R &= \mathcal{P}TS_L, \\ S_R &= \sigma_x S_L^{*-1} \sigma_x. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Quando encontrarmos S_R , procedemos da mesma maneira a fim de eliminar \hat{a}_0^{right} e \hat{a}_0^{left} e encontramos a matriz de espalhamento total do sistema S , contudo, não a apresentaremos pois na próxima secção tomaremos simplificações em S_1 e S_2 que torna a expressão de S simples.

Com o parâmetro determinado, iremos estudar como o sistema responde à incidência de uma partícula devido ao reservatório, dado um valor de Γ . Por essa razão, devemos encontrar a emitância da cavidade construída. Contudo, para que possamos nos valer do uso das barreiras e extrair a emitância da cavidade ressonante, devemos iniciar uma breve digressão do teorema flutuação-dissipação.

3.1 Teorema Flutuação-Dissipação.

Em qualquer sorte de experimento, a fim de analisar uma dada teoria, é necessário que construamos um sistema que já possua as premissas bem estabelecidas para, em seguida, testar as previsões de tal teoria. E tal assertiva é que norteia nossa intenção de encontrar a emitância da cavidade, como já foi acentuado previamente. Para tanto, mergulharemos o sistema em um banho térmico. Esse banho térmico emitirá radiações na cavidade de todas as frequências, eventualmente, um fóton irá propagar-se nos canais com a frequência de ressonância da cavidade e teremos uma diferença, por exemplo, no tempo de *delay* da emissão realizada pela cavidade[30]. Em outras palavras, analisaremos a resposta da cavidade ao banho térmico, e isso nos remete naturalmente ao uso do teorema *flutuação-dissipação*.

Um exemplo simples e direto para analisar o teorema é considerarmos um pequeno espelho suspenso por um fio ideal em uma sala com gás rarefeito(baixa densidade) e um raio de luz incidindo no centro do espelho. Tomamos esse espelho extremamente sensível à força externa, movendo-se à qualquer variação do momento direcionado a este, e podemos detectar tal movimento à partir de um ultramicroscópio. Se a teoria atomística não fosse um fato, a luz refletiria no espelho e voltaria pelo mesmo caminho(figura 3.2). Contudo, observa-se que a luz refletida emerge do espelho para outros pontos da sala de forma irregular(figura 3.3). Poderíamos fazer um esforço e supor que a luz transferiu momento para o espelho causando assim o seu movimento, contudo, a luz refletida iria oscilar em pontos próximos ao ponto da origem do raio emitido, o que não é observado. Assim, é imediato concluir que o movimento irregular do espelho é oriundo da transferência de momento do gás. É válido apontar que essa é uma excelente deixa para implementarmos a teoria atomística, que foi exatamente o que fez Einstein no seu seminal artigo a respeito do movimento de partículas suspensas em uma solução diluída[31], ou simplesmente movimento browniano, que é exatamente o movimento que o espelho do nosso exemplo acima obedece. Contudo, o ponto principal do nosso exemplo é que existe dois efeitos interessantes que descrevem o comportamento do nosso sistema. O primeiro, como já mostrado, é o gás causar um movimento randômico no espelho, o segundo é que o movimento do espelho inserido no gás sofre uma resistência devido ao arrasto causado pelo último. Assim, deve haver uma certa correspondência entre a flutuação do movimento do espelho e a força de arrasto que tenta impedir o mesmo, uma vez que ambos são causados pelo mesmo agente, o gás. A essa correspondência entre os efeitos denominamos de teorema flutuação-dissipação[32], que foi primeiramente percebida por H. Nyquist ao observar que a agitação térmica dos portadores de carga gerava uma força eletromotriz em um circuito elétrico¹[33],

¹Mais adiante, veremos que essa é a causa do chamado ruído térmico que será trabalhado nesta dissertação.

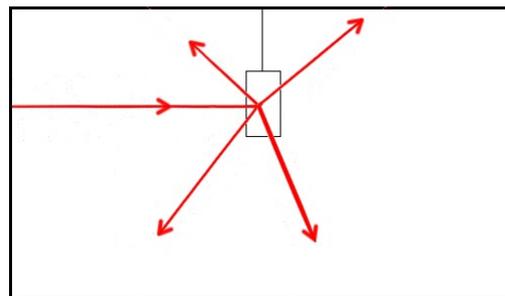
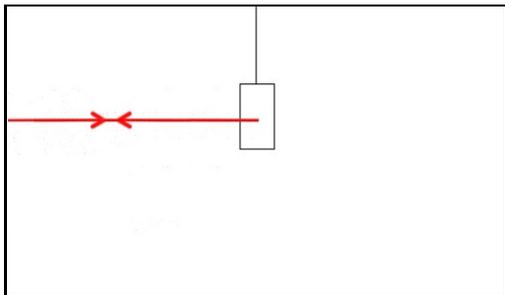


Figura 3.2: Sistema para o caso da ausência do gás.

Figura 3.3: Sistema respondendo à presença do gás.

e posteriormente demonstrado por Herbert Callen e Theodore A. Welton em 1951[34].

É fortuito mostrarmos como o teorema flutuação-dissipação gera o movimento browniano, para tanto utilizaremos o mesmo caso adotado por Einstein: uma pequena esfera suspensa em uma solução diluída. Aqui, utilizaremos a derivação de Langevin[38], onde este considera a força de arrasto devido à viscosidade η do fluido na pequena esfera de raio a e massa M dada pela lei de Stokes(dissipação) e uma força F_a que mantém a agitação molecular(flutuação), pois; sem esta, a pequena esfera iria inevitavelmente ao repouso. Assim, para a esfera, temos a equação diferencial

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -6\pi\eta a \frac{dx}{dt} + F_a, \quad (3.17)$$

multiplicando-a por x e com um pouco de álgebra, temos

$$\frac{M}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} - M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -3\pi\eta a \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + x F_a. \quad (3.18)$$

tomamos a média da expressão acima e utilizamos o fato que a força F_a atua em todos os lados da pequena esfera, em média, ela não gera movimento, assim, o virial desta é nulo ($\langle x F_a \rangle = 0$), o teorema da equipartição no segundo termo e a substituição $k_b = R/N_a$, onde k_b é a constante de Boltzman, R é a constante dos gases ideais e N_a o número de Avogadro, temos

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} - \left\langle M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle &= -3\pi\eta a \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} \quad , \\ \frac{M}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} - \frac{1}{2} k_b T &= -3\pi\eta a \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} \quad , \\ \frac{M}{6\pi\eta a} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} &= \frac{RT}{6\pi\eta a N_a} - \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} \quad . \end{aligned}$$

Resolvendo para $d \langle x^2 \rangle / dt$, temos

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{RT}{6\pi\eta a N_a} + C \exp \left(-\frac{6\pi\eta a}{M} t \right),$$

para tempos suficientemente longos, temos

$$\begin{aligned} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} &\rightarrow \frac{RT}{6\pi\eta a N_a} \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{RT}{6\pi\eta a N_a} t. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Toda a nossa discussão acima é ilustrada na simples equação (3.19), pois, partimos do teorema flutuação-dissipação para o caso de uma partícula suspensa em um fluido e obtivemos naturalmente que a flutuação da sua posição é influenciado pelo arrasto causado pela viscosidade do líquido. Como regalo, ao utilizarmos uma esfera pequena, mostramos como Einstein impulsionou a teoria atomística de forma quantitativa, e proporcionou meios de medidas para demonstrar a veracidade de sua teoria, como foi demonstrado posteriormente pelos experimentos de Jean Perrin[35].

Agora que já temos uma boa idéia a respeito do que se trata o teorema flutuação-dissipação, tentaremos adaptar o primeiro exemplo para o caso de uma cavidade. Já que estamos tratando da forma *standard*, fica implícito que há reservatórios ligados aos canais e alimentando o sistema com portadores. Esses reservatórios podem ser vistos como banhos térmicos, dessa forma, o sistema está sujeito à radiação de toda frequência, como foi dito no começo da secção. De forma totalmente análoga ao caso do espelho em movimento browniano, descrevemos o problema do espalhamento por uma cavidade caótica ligada a um guia pela equação de Langevin em sua versão quântica[36, 37] e obtemos como resultado

$$\hat{b} = S\hat{a} + C\hat{c} + D\hat{d}^\dagger \quad (3.20)$$

onde C e D são matrizes que acoplam o ruído ao problema do espalhamento (3.13) e \hat{c} e \hat{d}^\dagger são os operadores de ruído que atuam dentro da cavidade, no contexto do problema do espelho, são estes operadores que fazem a luz ser refletida em uma direção diferente da incidida por causa da flutuação causada pelo gás, neste problema, devido ao banho térmico. Como já é sabido, \hat{a} , \hat{c} e \hat{d} , deve obedecer a relação de comutação

$$\left[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger \right]_{\pm} = \delta_{mn}, [\hat{a}_m, \hat{a}_n]_{\pm} = 0. \quad (3.21)$$

onde os índices m e n denotam o canal em questão, por ora, não precisaremos nos preocupar com isso, pois estamos analisando o caso de 1 canal. E \pm denotam se o parêntese trata-se de um comutador(-), ou anticomutador(+), embora estejamos tratando do caso de radiação, vamos considerar, por enquanto, o caso da cavidade emitir fótons. O operador \hat{b} também deve satisfazer as relações (3.21), contudo, observamos que este não o satisfaz, para tanto, derivaremos o vínculo necessário para que a relação de comutação de \hat{b} tenha a forma (3.21) aplicando-o na primeira relação, vem

$$\begin{aligned} \left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger \right]_{\pm} &= \hat{b}\hat{b}^\dagger \pm \hat{b}^\dagger\hat{b} \\ &= (S\hat{a} + C\hat{c} + D\hat{d}^\dagger)(S^*\hat{a}^\dagger + C^*\hat{c}^\dagger + D^*\hat{d}) \pm (S^*\hat{a}^\dagger + C^*\hat{c}^\dagger + D^*\hat{d})(S\hat{a} + C\hat{c} + D\hat{d}^\dagger) \quad , \\ &= |S|^2(\hat{a}\hat{a}^\dagger \pm \hat{a}^\dagger\hat{a}) + |C|^2(\hat{c}\hat{c}^\dagger \pm \hat{c}^\dagger\hat{c}) + |D|^2(\hat{d}^\dagger\hat{d} \pm \hat{d}\hat{d}^\dagger) \quad , \\ \left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger \right]_{\pm} &= |S|^2 + |C|^2 \pm |D|^2, \end{aligned}$$

na terceira passagem, utilizamos a segunda relação de comutadores de forma que se anularam todos os termos cruzados. Assim, para que a primeira relação de (3.21) seja satisfeita, é necessário que

$$|S|^2 + |C|^2 \pm |D|^2 = 1.$$

com um tratamento totalmente análogo, podemos generalizar a expressão para o caso do comutador de sinal negativo acima por

$$SS^\dagger + CC^\dagger - DD^\dagger = I. \quad (3.22)$$

Essa relação só é válida para o caso multicanais de fótons pois estes não precisam conservar carga, por isso que o uso do anticomutador só é válido para o caso de um canal, pois, só teremos 2 férmions propagando-se no canal, pelo princípio da exclusão, o que não acarretaria em um erro na conservação da carga devido ao ruído da cavidade, fato que não poderíamos assegurar no caso multicanal, fato esse que utilizaremos mais adiante na derivação das funções das correlações.

Agora que sabemos descrever a cavidade inserida em um banho térmico à partir do teorema flutuação-dissipação, estamos aptos a calcular a emitância da cavidade com simetria PT.

3.2 Emitância.

Munido do formalismo desenvolvido acima, vamos inserir a cavidade da figura 3.1 em um banho térmico. Consideraremos ainda que o lado esquerdo é um meio absorvedor; descrito pela entrada da matriz t_1 (por essa razão, podemos chamá-lo de parâmetro de bombeamento), assim, por simetria, o lado direito é amplificador. Assim, de acordo com a equação (3.20), temos para o lado esquerdo

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_L^{\text{out}} \\ \hat{a}_0^{\text{right}} \end{pmatrix} = S_L \begin{pmatrix} \hat{a}_L^{\text{in}} \\ \hat{a}_0^{\text{left}} \end{pmatrix} + Q_L \hat{b}_L, \quad (3.23)$$

onde \hat{b}_L representa a flutuação quântica do lado esquerdo do sistema e Q_L a matriz que acopla a flutuação devido à cavidade no problema do espalhamento. Pelo teorema flutuação-dissipação temos que S_L e Q_L devem obedecer o vínculo

$$Q_L Q_L^\dagger = 1 - S_L S_L^\dagger. \quad (3.24)$$

Para o lado direito, temos analogamente

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0^{\text{left}} \\ \hat{a}_R^{\text{out}} \end{pmatrix} = S_R \begin{pmatrix} \hat{a}_0^{\text{right}} \\ \hat{a}_R^{\text{in}} \end{pmatrix} + Q_R \hat{b}_R^\dagger, \quad (3.25)$$

e o vínculo

$$Q_R Q_R^\dagger = S_R S_R^\dagger - 1. \quad (3.26)$$

Para trabalharmos com o caso mais simples possível, consideraremos o caso de um ressonador com dinâmica interna puramente balística ($r_1 = r'_1 = 0$), assim as matrizes S_L e S_R de (3.14) e (3.16) serão dadas por

$$S_L = - \begin{pmatrix} \sqrt{1-\Gamma} & t_1 \sqrt{\Gamma} \\ it_1 \sqrt{\Gamma} & t_1^2 \sqrt{1-\Gamma} \end{pmatrix}, S_R = - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-\Gamma}}{t_1^{*2}} & \frac{i\sqrt{\Gamma}}{t_1^*} \\ \frac{i\sqrt{\Gamma}}{t_1^*} & \sqrt{1-\Gamma} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Não sabemos qual é a representação de Q_L e Q_R , vamos expressar de forma conveniente como uma matriz 2×2 .

$$Q_L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Q_R = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Se utilizássemos os vínculos (3.24) e (3.26) para tentar encontrar as soluções das entradas das matrizes Q_L e Q_R , teríamos um sistema de equações com solução possível e indeterminada. Tão logo, temos a liberdade de escolher a forma das matrizes de acoplamento de sorte que respeitem os vínculos, assim o fizemos

$$Q_L = \sqrt{1-|t_1|^2} \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma} & 0 \\ -it_1 \sqrt{1-\Gamma} & 1 \end{pmatrix}, Q_R = \sqrt{\frac{1}{|t_1|^2} - 1} \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{1-\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} & 1 \\ \frac{t_1^*}{\sqrt{\Gamma}} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Para que as equações (3.23) e (3.25) façam sentido, temos que tomar os operadores de ruído na forma

$$\hat{b}_L = \begin{pmatrix} \hat{b}_{L1} \\ \hat{b}_{L2} \end{pmatrix}, \hat{b}_R^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{b}_{R1}^\dagger \\ \hat{b}_{R2}^\dagger \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos expressar \hat{a}_0^{left} e \hat{a}_0^{right} utilizando tudo que temos acima

$$\begin{cases} \hat{a}_0^{\text{right}} = t_L \hat{a}_L^{\text{in}} + r'_L \hat{a}_0^{\text{left}} + c \hat{b}_{L1} + d \hat{b}_{L2} \text{(I)}, \\ \hat{a}_0^{\text{left}} = r_R \hat{a}_0^{\text{right}} + t'_R \hat{a}_R^{\text{in}} + a' \hat{b}_{R1}^\dagger + b' \hat{b}_{R2}^\dagger \text{(II)}. \end{cases}$$

Resolvendo para \hat{a}_0^{right} e \hat{a}_0^{left}

$$\begin{cases} \hat{a}_0^{\text{right}} = -\frac{t_L \hat{a}_L^{\text{in}} + r'_L t'_R \hat{a}_R^{\text{in}} + r'_L a' \hat{b}_{R1}^\dagger + r'_L b' \hat{b}_{R2}^\dagger + c \hat{b}_{L1} + d \hat{b}_{L2}}{r_R r'_L - 1}, \\ \hat{a}_0^{\text{left}} = -\frac{r_R t_L \hat{a}_L^{\text{in}} + t'_R \hat{a}_R^{\text{in}} + a' \hat{b}_{R1}^\dagger + b' \hat{b}_{R2}^\dagger + r_R c \hat{b}_{L1} + r_R d \hat{b}_{L2}}{r_R r'_L - 1}. \end{cases}$$

Por outro lado, temos para \hat{a}_L^{out} e \hat{a}_R^{out}

$$\begin{cases} \hat{a}_L^{\text{out}} = r_L \hat{a}_L^{\text{in}} + t'_L \hat{a}_0^{\text{left}} + a \hat{b}_{L1} + b \hat{b}_{L2} \text{(I)} \\ \hat{a}_R^{\text{out}} = t_R \hat{a}_0^{\text{right}} + r'_R \hat{a}_R^{\text{in}} + c' \hat{b}_{R1}^\dagger + d' \hat{b}_{R2}^\dagger \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo as amplitudes intermediárias, \hat{a}_0^{left} e \hat{a}_0^{right} , teremos para \hat{a}_L^{out}

$$\begin{aligned} \hat{a}_L^{\text{out}} = & \left(r_L - \frac{r_R t_L t'_L}{r_R r'_L - 1} \right) \hat{a}_L^{\text{in}} - \frac{t'_R t'_L}{r_R r'_L - 1} \hat{a}_R^{\text{in}} - \frac{a' t'_L}{r_R r'_L - 1} \hat{b}_{R1}^\dagger - \\ & - \frac{b' t'_L}{r_R r'_L - 1} \hat{b}_{R2}^\dagger + \left(a - \frac{r_R c t'_L}{r_R r'_L - 1} \right) \hat{b}_{L1} + \left(b - \frac{r_R d t'_L}{r_R r'_L - 1} \right) \hat{b}_{L2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para \hat{a}_R^{out}

$$\begin{aligned} \hat{a}_R^{\text{out}} = & -\frac{t_L t_R}{r_R r'_L - 1} \hat{a}_L^{\text{in}} + \left(r'_R - \frac{r'_L t'_R t_R}{r_R r'_L - 1} \right) \hat{a}_R^{\text{in}} + \left(c' - \frac{r'_L a' t_R}{r_R r'_L - 1} \right) \hat{b}_{R1}^\dagger + \\ & + \left(d' - \frac{r'_L b' t_R}{r_R r'_L - 1} \right) \hat{b}_{R2}^\dagger - \frac{c t_R}{r_R r'_L - 1} \hat{b}_{L1} - \frac{d t_R}{r_R r'_L - 1} \hat{b}_{L2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Podemos reescrever as expressões acima como

$$\hat{a}_L^{\text{out}} = S_{11}\hat{a}_L^{\text{in}} + S_{12}\hat{a}_R^{\text{in}} + \frac{Q_{R11}S_{12}}{S_{R12}}\hat{b}_{R1}^\dagger + \frac{Q_{R12}S_{12}}{S_{R12}}\hat{b}_{R2}^\dagger + \left(Q_{L11} + \frac{Q_{L21}S_{R11}S_{12}}{S_{R12}}\right)\hat{b}_{L1} + \left(Q_{L12} + \frac{Q_{L22}S_{R11}S_{12}}{S_{R12}}\right)\hat{b}_{L2}.$$

$$\hat{a}_R^{\text{out}} = S_{12}\hat{a}_L^{\text{in}} + S_{11}\hat{a}_R^{\text{in}} + \left(Q_{R21} + \frac{Q_{R11}S_{L22}S_{12}}{S_{L12}}\right)\hat{b}_{R1}^\dagger + \left(Q_{R22} + \frac{Q_{R12}S_{L22}S_{12}}{S_{L12}}\right)\hat{b}_{R2}^\dagger + \frac{Q_{L21}S_{12}}{S_{L21}}\hat{b}_{L1} + \frac{Q_{L22}S_{12}}{S_{L21}}\hat{b}_{L2}.$$

De forma mais compacta ainda, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_L^{\text{out}} \\ \hat{a}_R^{\text{out}} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \hat{a}_L^{\text{in}} \\ \hat{a}_R^{\text{in}} \end{pmatrix} + \mathcal{R}\hat{b}_R^\dagger + \mathcal{L}\hat{b}_L, \quad (3.31)$$

onde definimos as matrizes de acoplamento dos ruídos

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \frac{Q_{R11}S_{12}}{S_{R12}} & \frac{Q_{R12}S_{12}}{S_{R12}} \\ Q_{R21} + \frac{Q_{R11}S_{L22}S_{12}}{S_{L12}} & Q_{R22} + \frac{Q_{R12}S_{L22}S_{12}}{S_{L12}} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} Q_{L11} + \frac{Q_{L21}S_{R11}S_{12}}{S_{R12}} & Q_{L12} + \frac{Q_{L22}S_{R11}S_{12}}{S_{R12}} \\ \frac{Q_{L21}S_{12}}{S_{L21}} & \frac{Q_{L22}S_{12}}{S_{L21}} \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos calcular a emitância de ambos os lados, tomando a definição

$$I_L = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{a}_L^{\text{out}\dagger} \hat{a}_L^{\text{out}} \rangle, \quad (3.32)$$

$$I_R = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{a}_R^{\text{out}\dagger} \hat{a}_R^{\text{out}} \rangle. \quad (3.33)$$

A primeira observação que devemos fazer é que o estado utilizado para calcular a média é dado por uma composição de três estados do sistema: $|L\rangle$, $|R\rangle$ e $|f\rangle$ onde $|L\rangle$ e $|R\rangle$ fazem referência aos canais em que as partículas propagam-se até adentrar no ponto quântico, $|f\rangle$ é o estado que contempla as ressonâncias, tão logo, é onde encontram-se os ruídos do transporte e onde os operadores \hat{b} 's irão atuar. É importante ressaltar que nesta secção o operador \hat{b} é operador de ruído, como foi definido no começo da secção, não devendo ser confundido com o operador de saída. Como todos esses estados são independentes entre si, podemos tomar o estado total do sistema como $|\rangle = |L\rangle |R\rangle |f\rangle$. Como estamos tomando somente um canal em cada lado da cavidade, temos que $|L\rangle = |R\rangle = |0\rangle$. Ao adentrar na cavidade, a radiação irá interagir com a mesma, como o lado esquerdo é um meio absorvedor, então a maioria dos elétrons da cavidade estão no estado fundamental. Por outro lado, a cavidade direita é um meio amplificador, assim, a maioria dos seus elétrons estão no estado excitado. Para que o ruído seja suprimido, tomamos todos os elétrons no meio absorvedor no estado fundamental, e do meio amplificador com inversão de população.

É fácil entender que essa assunção minimiza o ruído: no lado esquerdo, um elétron, eventualmente, vai excitar-se com a radiação, contudo, vai emití-la em seguida, não contribuindo para a sua intensidade. Por outro lado, os elétrons do meio amplificador, em média, não vão se perturbar, mas, aqueles que se perturbarem, irão realizar a emissão estimulada, contudo, irão absorver parte da radiação, fazendo, pois, uma contribuição nula. Dessa forma, podemos tomar

$$\langle \hat{b}_L^\dagger \hat{b}_L \rangle = 0, \quad (3.34)$$

$$\langle \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_R \rangle = 0. \quad (3.35)$$

Em outras palavras, a radiação que a cavidade do lado esquerdo emite para ambos os lados é

$$\langle \hat{b}_{L1}^\dagger \hat{b}_{L1} \rangle = 0, \langle \hat{b}_{L2}^\dagger \hat{b}_{L2} \rangle = 0.$$

Analogamente para a cavidade do lado direito

$$\langle \hat{b}_{R1}^\dagger \hat{b}_{R1} \rangle = 0, \langle \hat{b}_{R2}^\dagger \hat{b}_{R2} \rangle = 0.$$

Com as considerações e a assunção feito acima, podemos calcular a intesidade de radiação, posto que, dentre todos os operadores que não irão anular-se, resta somente

$$I_L = \frac{1}{2\pi} \left(|\mathcal{R}_{11}|^2 \langle \hat{b}_{R1} \hat{b}_{R1}^\dagger \rangle + |\mathcal{R}_{12}|^2 \langle \hat{b}_{R2} \hat{b}_{R2}^\dagger \rangle \right).$$

$$I_R = \frac{1}{2\pi} \left(|\mathcal{R}_{21}|^2 \langle \hat{b}_{R1} \hat{b}_{R1}^\dagger \rangle + |\mathcal{R}_{22}|^2 \langle \hat{b}_{R2} \hat{b}_{R2}^\dagger \rangle \right).$$

Utilizando a relação de comutação $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ e a consideração acima, temos

$$I_L = \frac{1}{2\pi} (|\mathcal{R}_{11}|^2 + |\mathcal{R}_{12}|^2). \quad (3.36)$$

$$I_R = \frac{1}{2\pi} (|\mathcal{R}_{21}|^2 + |\mathcal{R}_{22}|^2). \quad (3.37)$$

Aplicando o valor de \mathcal{R}_{11} e \mathcal{R}_{12} definidos em (3.31), temos para I_L

$$\begin{aligned} I_L &= \frac{1}{2\pi} \left((1 - \Gamma) \Gamma \left| \frac{\left(\frac{1}{|t_1|^2} - 1 \right) |t_1|^4}{(t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*2})^2} \right|^2 + \Gamma \left| \frac{\left(\frac{1}{|t_1|^2} - 1 \right) |t_1|^4 t_1^{*2}}{(t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*2})^2} \right|^2 \right), \\ I_L &= \frac{\Gamma (|t_1|^{-2} - 1) (1 - \Gamma + |t_1|^2)}{2\pi |t_1|^{-4} |t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*2}|^2}, \\ I_L &= \frac{\Gamma (|t_1|^{-2} - 1) (1 - \Gamma + |t_1|^2)}{2\pi |(t_1/t_1^*)^2 - 1 + \Gamma|^2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para o lado direito, temos

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\left| \frac{(|t_1|^2 - 1) (t_1^* \Gamma t_1^2 - \Gamma t_1 |t_1|^2 + t_1^{*3} - t_1^* t_1^2 + t_1 |t_1|^2)^2}{t_1^2 (t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*3})^2 t_1^{*2}} \right| + (1 - \Gamma) \left| \frac{t_1^2 (|t_1|^2 - 1) \left| \frac{t_1^4}{t_1^2} \right|}{(t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*2})^2} \right| \right), \\ I_R &= \frac{1}{2\pi} \left(\Gamma \frac{(1 - |t_1|^2) (\Gamma |t_1|^3 - \Gamma |t_1|^3 + |t_1|^3 - |t_1|^3 + |t_1|^3)^2}{|t_1|^4 |t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*2}|^2} + (1 - \Gamma) \Gamma \frac{|t_1|^2 (1 - |t_1|^2) \left| \frac{t_1^4}{t_1^2} \right|}{|t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*2}|^2} \right), \\ I_R &= \frac{1}{2\pi} \left(\Gamma \frac{(1 - |t_1|^2) |t_1|^{-4} |t_1|^6}{|t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*2}|^2} + (1 - \Gamma) \Gamma \frac{(1 - |t_1|^2) |t_1|^4}{|t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*2}|^2} \right), \\ I_R &= \frac{1}{2\pi} (|t_1|^{-2} + 1 - \Gamma) \Gamma \frac{(1 - |t_1|^2) |t_1|^4}{|t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*2}|^2}, \\ I_R &= \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma (1 - |t_1|^2) (|t_1|^{-2} + 1 - \Gamma)}{|t_1|^{-4} |t_1^2(1 - \Gamma) - t_1^{*2}|^2}, \\ I_R &= \frac{\Gamma (1 - |t_1|^2) (|t_1|^{-2} + 1 - \Gamma)}{2\pi |(t_1/t_1^*)^2 - 1 + \Gamma|^2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Se fizermos a aproximação $\Gamma \ll 1$, o que equivale a fechar o sistema, temos para ambas as expressões

$$I_L = I_R = \frac{\Gamma (1 - |t_1|^2) (|t_1|^{-2} + 1)}{2\pi|(t_1/t_1^*)^2 - 1 + \Gamma|^2} \quad (3.40)$$

Tomando $E \approx E_0$, onde E_0 é a energia em que sucede uma ressonância do sistema PT, de tal forma que $\text{Im}t_1^2(E_0) = t_0^2 = 0$, então

$$I_L = I_R = \frac{\Gamma (|t_0|^{-2} - |t_0|^2)}{2\pi|(t_1/t_1^*)^2 - 1 + \Gamma|^2} \quad (3.41)$$

Para o denominador, consideramos $t_1(E - E_0) = |t_1|e^{i\theta(E)}$, assim, teremos a razão

$$\frac{t^2}{t^{*2}} = e^{4i\theta(E)} = 1 + 4i\theta(E) \quad (3.42)$$

$$\frac{t^2}{t^{*2}} = 1 + 4i\text{Im}(\ln t_1(E - E_0)) \quad (3.43)$$

$$\frac{t^2}{t^{*2}} = 1 + 4i\text{Im} \frac{1}{t_1} \frac{dt_1}{dE} \Big|_{E=E_0} (E - E_0) \quad (3.44)$$

$$\frac{t^2}{t^{*2}} = 1 + 2i\tau(E - E_0) \quad (3.45)$$

Onde fizemos $\tau = 2\text{Im} \frac{1}{t_1} \frac{dt_1}{dE} \Big|_{E=E_0}$, que é o tempo de *delay* de propagação que o fóton demora para atravessar a cavidade, assim, teremos a expressão final

$$I_L = I_R = \frac{\Gamma (|t_0|^{-2} - |t_0|^2)}{2\pi|2i\tau(E - E_0) + \Gamma|^2}. \quad (3.46)$$

É interessante notar dois fatos do resultado obtido: a equação final é definida inteiramente por quantidades mensuráveis, dessa forma, é possível medir quando o sistema está simetricamente ajustado medindo emitâncias equivalentes em ambos os lados. E, por fim, as intensidades são definidas por uma função lorentziana, que é a distribuição padrão esperada para o caso de identificarmos ressonâncias no nosso sistema [39].

Todo esse tratamento foi tomado para que medíssemos o caso mais simples de uma cavidade PT, observamos imediatamente que o tratamento seria muito mais elaborado para o caso multiterminal. Contudo, no capítulo final apresentaremos uma forma mais direta e clara de medir uma ressonância do sistema.

Para finalizar o capítulo, a próxima secção será dedicada a construção do mesmo sistema de simetria PT, agora, bidimensional.

3.3 Simetria PT em um sistema de 4 terminais.

Agora, vamos tratar do problema análogo tratado acima, contudo, para um sistema multiterminal e bidimensional. Temos a situação apresentada na figura 3.4, onde pusemos um centro espalhador S_i em cada terminal, que por sua vez, estão acoplados ao ponto quântico de matriz S . Podemos ver que a simetria PT relaciona os terminais $1 \rightarrow 3$ e $2 \rightarrow 4$. Escreveremos na forma $i \rightarrow i + 2$, com $i = 1, 2$, onde, temos

$$S_i = \begin{bmatrix} r_i & t_i \\ t_i & r_i \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

$$S_{i+2} = \mathcal{PT}S_i = \sigma_x S_i^{-1} \sigma_x. \quad (3.48)$$

Com a matriz de espalhamento do ponto quântico relacionando somente as entradas e saídas internas

$$\begin{bmatrix} b_1^{\text{in}} \\ b_2^{\text{in}} \\ b_3^{\text{in}} \\ b_4^{\text{in}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{\text{in}} \\ a_2^{\text{in}} \\ a_3^{\text{in}} \\ a_4^{\text{in}} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

podemos comprimir a relação para

$$\begin{bmatrix} b_{1,2}^{\text{in}} \\ b_{3,4}^{\text{in}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{\text{in}} & t'^{\text{in}} \\ t^{\text{in}} & r'^{\text{in}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,2}^{\text{in}} \\ a_{3,4}^{\text{in}} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Essa forma, remete-nos à situação descrita pelas trajetórias de Feynman, dada pelas expressões

$$r^{\text{in}} = r^{(1)} + t'^{(1)}r'^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t^{(1)}, \quad (3.51)$$

$$t'^{\text{in}} = t'^{(1)}(I - r^{(2)}r'^{(1)})^{-1}t'^{(2)}, \quad (3.52)$$

$$r'^{\text{in}} = r'^{(2)} + t^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}r'^{(1)}t'^{(2)}, \quad (3.53)$$

$$t^{\text{in}} = t^{(2)}(I - r'^{(1)}r^{(2)})^{-1}t^{(1)}, \quad (3.54)$$

onde $r^{(i)}$ e $t^{(i)}$ são blocos de matrizes 2×2 que podem nos auxiliar na determinação do peso da probabilidade de uma trajetória da partícula para um terminal específico, a saber

$$\begin{bmatrix} b_{1,2} \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{(1)} & t'^{(1)} \\ t^{(1)} & r'^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_5 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

$$\begin{bmatrix} a_5 \\ b_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{(2)} & t'^{(2)} \\ t^{(2)} & r'^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_5 \\ a_{3,4} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Como podemos ver, abrimos mão da mesma técnica de concatenação dada no final do capítulo anterior.

Para o nosso problema, vamos adotar que os terminais de emissão da partícula, 1 e 2, são idealmente amplificadores e/ou absorvedores descritos pelos parâmetros t_1 e t_2 , dessa forma, teremos

$$S_i = \begin{bmatrix} 0 & t_i \\ t_i & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

$$S_{i+2} = \mathcal{PT}S_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t_i^*} \\ \frac{1}{t_i^*} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

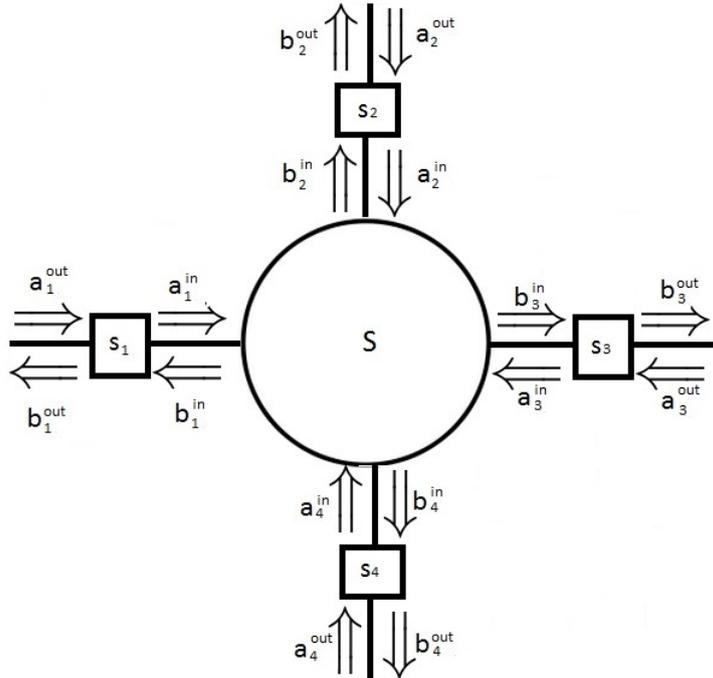


Figura 3.4: Sistema bidimensional com simetria PT.

É importante comentar que não importa se os terminais 1 e 2 sejam ambos, ou não, meios amplificadores ou absorvedores, o que realmente importa é se o terminal i for amplificador(absorvedor), por simetria PT, o terminal $i + 2$ seja absorvedor(amplificador).

Com isso, se tomamos as relações das amplitudes de cada terminal com a sua respectiva matriz de espalhamento, podemos checar que

$$\begin{bmatrix} b_i^{\text{out}} \\ a_i^{\text{in}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t_i \\ t_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i^{\text{out}} \\ b_i^{\text{in}} \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

$$\begin{bmatrix} b_{i+2}^{\text{out}} \\ a_{i+2}^{\text{in}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{1}{t_i^*}\right) \\ \left(\frac{1}{t_i^*}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i+2}^{\text{out}} \\ b_{i+2}^{\text{in}} \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Com as expressões acima, podemos determinar uma matriz geral realizando a concatenação de cada terminal no ponto quântico por intermédio de suas matrizes de espalhamento. Por ora, vamos tomar a primeira entrada da matriz (3.49), dada por

$$\begin{bmatrix} b_1^{\text{in}} \\ b_2^{\text{in}} \end{bmatrix} = r^{\text{in}} \begin{bmatrix} a_1^{\text{in}} \\ a_2^{\text{in}} \end{bmatrix} + t'^{\text{in}} \begin{bmatrix} a_3^{\text{in}} \\ a_4^{\text{in}} \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

E substituímos as amplitudes a e b de (3.59) e (3.60) em (3.61) e teremos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_1^{-1} b_1^{\text{out}} \\ t_2^{-1} b_2^{\text{out}} \end{bmatrix} &= r^{\text{in}} \begin{bmatrix} t_1 a_1^{\text{out}} \\ t_2 a_2^{\text{out}} \end{bmatrix} + t'^{\text{in}} \begin{bmatrix} \frac{a_3^{\text{out}}}{t_1^*} \\ \frac{a_4^{\text{out}}}{t_1^*} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} t_1^{-1} & 0 \\ 0 & t_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^{\text{out}} \\ b_2^{\text{out}} \end{bmatrix} &= r^{\text{in}} \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{\text{out}} \\ a_2^{\text{out}} \end{bmatrix} + t'^{\text{in}} \begin{bmatrix} \frac{1}{t_1^*} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t_2^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3^{\text{out}} \\ a_4^{\text{out}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} b_1^{\text{out}} \\ b_2^{\text{out}} \end{bmatrix} &= r^{\text{out}} \begin{bmatrix} a_1^{\text{out}} \\ a_2^{\text{out}} \end{bmatrix} + t'^{\text{out}} \begin{bmatrix} a_3^{\text{out}} \\ a_4^{\text{out}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Os elementos deflagrados acima fazem parte da matriz de espalhamento total do sistema gerada pela transformação

$$S_{\text{T}} = \begin{bmatrix} r^{\text{out}} & t'^{\text{out}} \\ t^{\text{out}} & r'^{\text{out}} \end{bmatrix} = \Upsilon \begin{bmatrix} r^{\text{in}} & t'^{\text{in}} \\ t^{\text{in}} & r'^{\text{in}} \end{bmatrix} \Upsilon, \quad (3.63)$$

onde

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t_1^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t_2^*} \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos simplificar nosso problema, uma vez que temos interesse no experimento HBT e o tratamento até agora é bastante geral.

Desejamos que as partículas saiam dos terminais 1 e 2 e sejam transmitidas para 3 e 4 ($r^{\text{in}} = 0$), sendo estes terminais somente de recepção ($r'^{\text{in}} = 0$) e, considerar o dual da situação ($t^{\text{in}} = t'^{\text{in}\dagger}$), posto a simetria de reversão temporal do problema. Com tais considerações, encontramos as seguintes

condições à partir de (3.51), (3.52), (3.53) e (3.54)

$$\begin{aligned}
t^{(1)} &= t'^{(1)\dagger}, \\
t^{(2)} &= t'^{(2)\dagger}, \\
r^{(2)} &= r'^{(1)\dagger}, \\
r^{(1)} &= -t^{(1)\dagger} r'^{(2)} (I - r'^{(1)} r'^{(1)\dagger})^{-1} t^{(1)}, \\
r'^{(2)} &= -t'^{(2)\dagger} (I - r'^{(1)} r'^{(1)\dagger})^{-1} r'^{(1)} t'^{(2)}.
\end{aligned}$$

Podemos tomar a cavidade no caso balístico, assim, o termo que “prende” a partícula na cavidade $((I - r'^{(1)} r'^{(1)\dagger})^{-1})$ é aproximado para $r'^{(1)} r'^{(1)\dagger} = 0$. Assim, as expressões ficarão na forma simplificada

$$t'^{\text{in}} = t'^{(1)} t'^{(2)}, \quad (3.64)$$

$$t^{\text{in}} = (t'^{(1)} t'^{(2)})^\dagger, \quad (3.65)$$

$$r^{(1)} = (t^{(2)} t^{(1)})^\dagger r'^{(1)} (t^{(2)} t^{(1)}), \quad (3.66)$$

$$r'^{(2)} = -t'^{(2)\dagger} r'^{(1)} t'^{(2)}. \quad (3.67)$$

Assim, tomando o produto $t'^{(1)} t'^{(2)}$ como

$$t'^{(1)} t'^{(2)} = \begin{bmatrix} r & t \\ t & r \end{bmatrix}.$$

Teremos a matriz de espalhamento da cavidade dada por

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r & t \\ 0 & 0 & t & r \\ r^* & t^* & 0 & 0 \\ t^* & r^* & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Então, as considerações que tomamos foram escolhidos de tal forma que a matriz de espalhamento central resultou no próprio espelho do experimento HBT². Por fim, basta agora que acoplemos o espelho nos terminais de bombeamento/absorção aplicando (3.68) em (3.63), temos o problema de espalhamento do sistema dado por

$$\begin{aligned}
S &= \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t_1^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t_2^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & r & t \\ 0 & 0 & t & r \\ r^* & t^* & 0 & 0 \\ t^* & r^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t_1^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t_2^*} \end{bmatrix}, \\
S &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{rt_1}{t_1^*} & \frac{tt_1}{t_2^*} \\ 0 & 0 & \frac{tt_2}{t_1^*} & \frac{rt_2}{t_2^*} \\ \frac{r^*t_1}{t_1^*} & \frac{t^*t_2}{t_2^*} & 0 & 0 \\ \frac{t_1^*}{t_2^*} & \frac{t_1^*}{t_2^*} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.69)
\end{aligned}$$

²Diferentemente do sistema apresentado no capítulo 1, trocamos os índices dos terminais $3 \leftrightarrow 4$, e ainda sim, tomamos as amplitudes que levam a partícula para os terminais 1(2) para 3(4) como r e, para o contrário, escolhemos t . O correto, contudo, seria considerar o contrário. Mas, no capítulo final, isso não trará diferença quando retomarmos esse sistema, pois faremos os fatores de bombeamento/absorção iguais, isto é, $t_1 = t_2$, não trazendo nenhum erro por conta da troca de índice.

assim, teremos o problema do espalhamento para o experimento HBT com terminais de bombeamento e absorção ajustados por paridade e reversão temporal dado por

$$\begin{bmatrix} b_1^{\text{out}} \\ b_2^{\text{out}} \\ b_3^{\text{out}} \\ b_4^{\text{out}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{rt_1}{t_1^*} & \frac{tt_1}{t_2^*} \\ 0 & 0 & \frac{tt_2}{t_1^*} & \frac{rt_2}{t_2^*} \\ \frac{r^*t_1}{t_1^*} & \frac{t^*t_2}{t_1^*} & 0 & 0 \\ \frac{t^*t_1}{t_2^*} & \frac{r^*t_2}{t_2^*} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{\text{out}} \\ a_2^{\text{out}} \\ a_3^{\text{out}} \\ a_4^{\text{out}} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Nesta secção fizemos absolutamente o mesmo tratamento e as assunções tomadas para o caso unidimensional, com a exceção das barreiras nas saídas de cada terminal que forma um sistema ressonante quando tomamos sua probabilidade de transmissão tendendo à zero, contudo, a barreira será colocada quando atacarmos diretamente o problema no capítulo final, onde desenvolveremos as funções de correlações e, então, encontraremos a matriz de espalhamento desse sistema.

O problema bidimensional é apenas mais um passo em direção ao nosso resultado final e é nesse sistema que iremos estudar todas as probabilidades dadas pelas suas amplitudes aplicadas nas equações das correlações para sistemas multiterminais, conseqüentemente, como veremos a seguir, iremos estudar o ruído causado por esse sistema no transporte eletrônico. Apesar de termos citado neste capítulo brevemente, a equação geral do ruído para o caso *standard* multicanal é demonstrada utilizando o formalismo deduzido por M. Büttiker, tópico esse que será desenvolvido no próximo capítulo.

Capítulo 4

Condutância e ruído no formalismo de Büttiker.

Neste capítulo apresentaremos o formalismo de Büttiker, onde o mesmo estende a definição da fórmula de condução de Landauer, a seguir, deduz uma expressão para a densidade espectral gerada pelo ruído de um condutor através da definição de correlação no contexto da mecânica estatística.

Introduziremos as noções gerais de condutância e ruído e veremos, em seguida, como essas grandezas são construídas no formalismo de Büttiker. Por isso dividimos as seções em duas versões para a condutância e o ruído, nesse último aprofundaremos especificamente 2 tipos: o ruído térmico e o ruído de disparo (*shot noise*). O primeiro já foi trabalhado em um problema prático no capítulo anterior, aqui refinaremos a teoria, enquanto no segundo, introduziremos a idéia geral para, em seguida, demonstrarmos a expressão de ruído de Büttiker.

O ponto central deste capítulo é compreender o efeito do ruído presente nas correntes elétricas de um condutor mesoscópico, desenvolvendo, pois, intuição a respeito da informação física que adquirimos ao lidar com o ruído, detalhes esses que não estão presente quando implementamos a média do sistema em equilíbrio. Para tanto, escolhemos o formalismo de Büttiker, pois este além de tratar do problema multicanal, demonstra todas as correlações possíveis do caso bidimensional. Ademais, neste capítulo mostraremos como a obtenção das funções de correlações nos remete ao ruído e em qual regime um dado tipo de ruído prevalecerá, e isso tudo é alcançado à partir do formalismo de Büttiker. O nosso interesse no ruído advém do fato que construiremos um formalismo com funções de correlações para estudar a simetria do sistema construído no final do capítulo anterior e, invariavelmente, precisamos saber qual ruído estamos tratando ao estabelecer certas considerações, tão logo, em qual regime estamos. Ademais, o formalismo de Büttiker por si só é uma ferramenta extremamente interessante para qualquer estudioso da física do transporte quântico. Dessa forma, o ruído reserva um papel importante da física do problema, como podemos perceber na frase de R. Landauer: “o ruído é o sinal!”. Incorporando o tom poético do autor dessa glosa, faz-se mister que iniciemos nossa discussão derivando a expressão da condutância que leva o nome do mesmo.

4.1 Condutância I: fórmula de Landauer.

Na derivação original de Landauer, ele argumenta que a distribuição eletrônica no espaço dos momentos é a mesma configuração dos elétrons no condutor, a menos de uma variação macroscópica devido a um eventual gradiente de temperatura. Juntamente com essa assunção, considerava-se também um campo incidindo uniformemente na amostra, dessa forma toda a configuração está sujeita à mesma aceleração

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{e\mathbf{E}}{\hbar}, \quad (4.1)$$

onde k é o número de onda que caracteriza o momento no espaço de configuração, e \mathbf{E} o campo elétrico aplicado no sistema, o que não difere da forma *standard*, pois ao aplicarmos uma diferença de potencial devido aos contatos acoplados ao condutor, o gradiente dessa diferença de potencial define o campo elétrico \mathbf{E} aplicado no sistema.

Ao sair do equilíbrio, a configuração interna do sistema(quer por meio da vibração da rede do material, ou ressonâncias) tenta retornar à configuração de equilíbrio, isso caracteriza a condutividade do condutor.

Classicamente, a condutância de um condutor é definida pelo seu comprimento e pela área da secção transversal em relação à direção incidente da corrente e pela condutividade, que é um fator que contempla a estrutura íntima de diferentes condutores. A estrutura íntima de um condutor é vista pela mecânica quântica como um problema de espalhamento e suas consequências serão detalhadas a seguir.

Se considerarmos um condutor livre de meios espalhadores, então, um eventual elétron transportado por esse condutor não sofreria nenhuma alteração no seu estado (figura 4.1). Por outro lado, se tomarmos um pequeno obstáculo no caminho tomado pelo elétron, então, passaria a haver um processo de amontoação em um lado deste obstáculo dado pelos elétrons que nele incidem e uma pequena parcela transmitida no outro lado através do obstáculo. Com excesso de carga em um lado do obstáculo, há uma geração de momento de dipolo definida pela distribuição desse excesso de carga gerado. Esse dipolo elétrico cresceria até um momento em que o obstáculo não interviesse mais em elétrons vindouros, isto é, a presença do obstáculo cria um certo número de estados para ocupação de elétrons, após esses estados serem totalmente preenchidos, os elétrons seguintes não seriam capturados mais pelo obstáculo (figura 4.2). Assim, o dipolo elétrico gerado por cada obstáculo do condutor constitui o campo elétrico associado à corrente total que passa pelo condutor, e a medição do espaçamento desses dipolos é o que caracteriza a condutividade do mesmo[40]. Posto isso, Landauer lançou uma nova proposta a fim de eliminar a necessidade do campo ser uniforme, pois, como comentado acima, cometeríamos um erro de cálculo relevante. Assim, Landauer trabalhou o comportamento do problema do transporte frente à variação do espaço, utilizando a equação de Boltzmann. Contudo, derivaremos a sua fórmula utilizando as referências [1, 41, 42], onde os autores assumem a visão reducionista do problema: consideraremos dois contatos descritos por dois parâmetros intensivos macroscópicos, temperatura e o potencial químico, ligados a um condutor balístico de dimensões mesoscópicas *quasi*-unidimensional (figura 4.3). Aqui, nos referiremos como caso “ideal” a ausência de reflexão do condutor para um dos contatos, onde a recíproca não é verdadeira. Isso caracteriza o caso de um condutor balístico, onde a resistência do sistema é dada somente na interface entre o condutor e o contato, chamada resistência de contato. Dessa forma, o condutor vai possuir estados $+k$ e $-k$, oriundos dos contatos da esquerda e da direita, respectivamente, pois, cada contato vai possuir um potencial eletroquímico, digamos μ_1 ou μ_2 , assim, a configuração dos contatos obedecerá à distribuição de Fermi-Dirac, tão logo, estabeleceremos a forma como μ_1 e μ_2 relacionam-se com os estados $+k$ e $-k$. Se o condutor possuísse somente 1 guia propagador de onda, teríamos uma corrente elétrica dada pela forma semi-clássica

$$I = nev, \tag{4.2}$$

onde n é a densidade de elétrons no condutor por unidade de comprimento à velocidade v definida no espaço de fase e e , o valor da carga elétrica. Tomando agora um condutor com k estados propagantes,

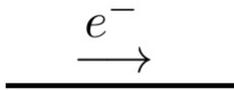


Figura 4.1: Elétron atravessa o condutor sem sofrer espalhamento.

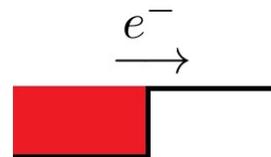


Figura 4.2: Os elétrons preencheram todos os estados possíveis formados pelo potencial, permitindo ao elétron seguinte atravessar.

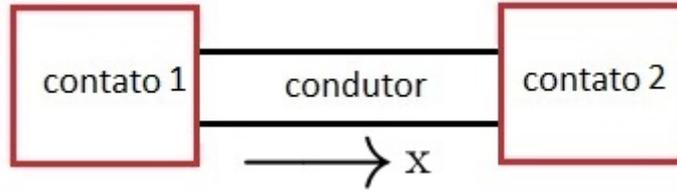


Figura 4.3: Condutor e contatos.

teríamos uma corrente ajustada pela Fermi-Dirac para cada estado k , assim, vem

$$I = ne \sum_{k=0}^{+\infty} v(k) f(k),$$

$$I = ne \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} f(k). \quad (4.3)$$

O estado referente à $k = 0$ é considerado como possuidor da energia de corte do condutor ϵ , assim, para qualquer energia abaixo desta, não existe estado propagante. A soma no espaço dos momentos pode ser entendida como uma ladrilhação do espaço contínuo dos momentos em intervalos de $2\pi/L$, pois, consideramos que cada elétron ocupe o condutor obedecendo a sua periodicidade no espaço dos momentos. Para cada ladrilho, temos uma degenerescência de 2 elétrons, pelo princípio de exclusão de Pauli, assim, podemos fazer a substituição

$$\sum_k \rightarrow 2 \frac{L}{2\pi} \int dk. \quad (4.4)$$

Assim, temos a (4.3)

$$I = n \frac{2eL}{2\pi\hbar} \int_0^{+\infty} \frac{\partial E(k)}{\partial k} f(k) dk. \quad (4.5)$$

Como sabemos, a densidade eletrônica é dada por $1/L$ e, também, substituímos a variável de integração, vem

$$I = \frac{2e}{h} \int_{\epsilon}^{+\infty} f(E) dE. \quad (4.6)$$

Para um condutor operando na energia E , existe um número M de canais abertos nesse condutor, assim, o número total de canais abertos M para uma dada energia E será

$$M(E) = \sum_N \theta(E - \epsilon_N). \quad (4.7)$$

Como podemos ver, o número de canais é dado pela função acumulação, dada pela função de Heaviside θ . Para o nível de energia de corte temos 1 canal aberto, para o nível seguinte, 2 e assim por diante. Então, a corrente total será a contribuição de todos esses estados modulados pela Fermi-Dirac

$$I = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} f(E) M(E) dE. \quad (4.8)$$

aqui, utilizamos o fato que a Heaviside é não-nula à partir da energia de corte. Essa corrente é originada à partir da criação dos estados k devido aos contatos, dessa forma, teremos que definir a corrente devido ao contato da esquerda e o da direita, respectivamente, como

$$I^+ = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(E) M(E) dE, \quad (4.9)$$

$$I^- = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(E) M(E) dE. \quad (4.10)$$

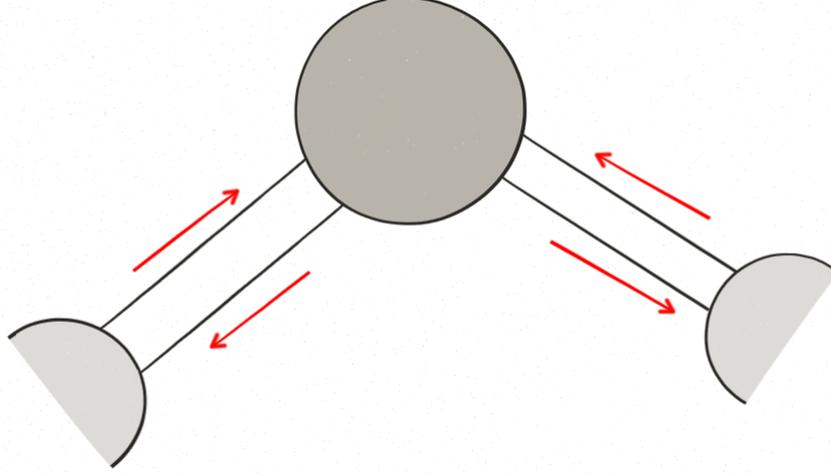


Figura 4.4: Condutor ligado a contatos por intermédio de guias.

Assim, a corrente total será dada por

$$I = I^+ - I^- = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1(E) - f_2(E)) M(E) dE. \quad (4.11)$$

Assim, quando tomamos o caso de baixas temperaturas, recuperamos a equação (1.10). Contudo, como foi apontado na introdução, a fórmula de Landauer não contempla as flutuações dos elétrons entre os canais, não expressa a condutância para o caso multiterminal, não contempla o sistema sendo banhado por uma cavidade de corpo negro; sendo pois a estatística dada pela distribuição de Bose-Einstein, tampouco, o formalismo não possibilita expressar o ruído devido ao tipo de tratamento adotado. Apesar desses defeitos, o resultado de Landauer foi rigorosamente testado no regime que esse se dispõe, sucedendo em bons resultados [43]. Agora, derivaremos o resultado mais geral aceito pela literatura, concomitantemente, desenvolveremos o formalismo.

4.2 Condutância II: o formalismo de Büttiker

Em seu formalismo, Büttiker preserva parte do sistema definido pela forma *standard* de Landauer, com a exceção que agora existem vários reservatórios acoplados ao centro espalhador [3, 13], muito embora, sua real motivação era encontrar uma expressão para o ruído térmico no caso *quasi*-unidimensional multicanal considerando o espalhamento intercanal (quando o elétron é espalhado para um canal diferente do original). A física desse problema já estava discutida por Landauer [44, 45], Büttiker, no entanto, desejava quantificá-la, por isso, sem perda de generalidade, tomaremos, a princípio, o caso *standard* [11]. Vamos considerar uma partícula que sai de um dos dois reservatórios, ligados ao condutor por intermédio de guias, com número de ocupação dado pela distribuição de Fermi e adentra em um condutor (figura 4.4). Tomaremos a condução possivelmente separável por uma função de onda transversal e outra longitudinal. A função de onda longitudinal define os modos propagantes, enquanto a transversal provê o canal onde a partícula irá propagar-se, dada por uma função de onda com ortogonalidade bem definida. Posta essa análise, podemos prever a função de onda no condutor.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n \int dE \frac{e^{-i\frac{Et}{\hbar}}}{\sqrt{hv_n(E)}} \chi_n(y) (a_n e^{ik_n x} + b_n e^{-ik_n x}), \quad (4.12)$$

onde $N(E)$ é o número de canais de uma dada energia E , v_n a velocidade no espaço de fase. Reservamos a parte transversal para o eixo y , e a longitudinal para o x , portanto, χ_n é uma função ortogonal e a_n e b_n as amplitudes das frentes de ondas de entrada e saída, respectivamente; obedecendo a notação

padrão. Antes de prosseguirmos, devemos fazer alguns comentários a respeito da expressão (4.12): a fim de implementar o caso multiterminal, Büttiker precisou estimar soluções de tal forma que pudesse mapear o caso em termos do problema de 1 canal, dessa forma, ele tomou o caso do condutor multicanal como um conjunto de vários canais singulares, por isso, a normalização deve conter a densidade de estados $\frac{\partial E}{\partial k}$, como vimos em (4.3). Essa assunção, mais tarde, vai permitir que possamos discutir a flutuação no número de ocupação.

Um outro ponto é a aparente contradição que no interior do reservatório, no equilíbrio, só sucedem processos inelásticos, enquanto no condutor, por definição, o processo é elástico. Isso é resolvido lembrando que a nossa premissa afirma que o reservatório deve ser muito maior que o condutor, dessa forma, a secção de choque devido ao condutor é pequena em comparação com as dimensões do reservatório, possibilitando que o tratemos como um provedor de flutuação local em que ocorre processos elásticos, não afetando a condição de equilíbrio do reservatório.

Outrossim, apesar da dinâmica do sistema ser descrita por um hamiltoniano, o processo todo é irreversível, pois, para o caso geral, a única simetria que devemos considerar é conservação de carga, não havendo, a princípio, nenhuma relação entre o canal que a partícula entra, com o canal que sai.

Por fim, tomamos essa solução nessa forma pois estamos analisando a solução longe do condutor, então, a função de onda será dada por frentes de ondas moduladas pelas funções ortogonais χ_n , como vimos no capítulo 2.

Agora, abriremos mão da segunda quantização e definiremos (4.12) como operador de campo no espaço de Fock, a extensão natural do espaço de Hilbert, onde tomaremos o estado como a soma direta entre todos os N canais do condutor, sobre o qual atuará $\hat{\Psi}$, composto pelos operadores de aniquilação \hat{a} e \hat{b} , dessa forma, teremos

$$\hat{\Psi}_L(\vec{r}, t) = \sum_n^{N(E)} \int dE \frac{e^{-i\frac{Et}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar v_{Ln}(E)}} \chi_{Ln}(y) (\hat{a}_{Ln} e^{ik_{Ln}x} + \hat{b}_{Ln} e^{-ik_{Ln}x}). \quad (4.13)$$

Aqui, adicionamos o subíndice L denotando o lado em que estamos trabalhando a solução. Se estamos interessados na corrente resultante, podemos utilizar a definição usual, dada uma distribuição de corrente, teremos o operador de corrente no lado esquerdo como

$$\hat{I}_L(t) = \oint \vec{J}_L \cdot d\vec{l} = \int \hat{J}_L dy. \quad (4.14)$$

Da quântica elementar, temos que a densidade de corrente

$$\begin{aligned} \hat{J}_L(t) &= \frac{\hbar e}{2im} \int dy \left(\hat{\Psi}_L^\dagger(\vec{r}, t) \frac{\partial \hat{\Psi}_L(\vec{r}, t)}{\partial x} - \hat{\Psi}_L(\vec{r}, t) \frac{\partial \hat{\Psi}_L^\dagger(\vec{r}, t)}{\partial x} \right), \\ \hat{J}_L(t) &= \frac{\hbar e}{2im} \int dy \left(\hat{\Psi}_L^\dagger(\vec{r}, t) \frac{\partial \hat{\Psi}_L(\vec{r}, t)}{\partial x} - c. c. \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Podemos ver imediatamente que

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_L(\vec{r}, t)}{\partial x} = i \sum_n^{N(E)} \int dE \frac{e^{-i\frac{Et}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar v_{Ln}(E)}} \chi_{Ln}(y) k_{Ln} (\hat{a}_{Ln} e^{ik_{Ln}x} - \hat{b}_{Ln} e^{-ik_{Ln}x}). \quad (4.16)$$

Dessa forma, substituímos diretamente em (4.15) e teremos

$$\begin{aligned}
\hat{I}_L(t) &= \frac{e}{4\pi m} \int dy \left(\sum_{n,n'}^{N(E)} \int dE dE' \frac{e^{i\frac{(E-E')t}{\hbar}} \chi_{L_n}^*(y) \chi_{L_{n'}}(y) k_{L_{n'}}}{\sqrt{v_{L_n}(E) v_{L_{n'}}(E')}} (\hat{a}_{L_n}^\dagger e^{-ik_{L_n}x} + \hat{b}_{L_n}^\dagger e^{ik_{L_n}x}) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot (\hat{a}_{L_{n'}} e^{ik_{L_{n'}}x} - \hat{b}_{L_{n'}} e^{-ik_{L_{n'}}x}) - \text{c.c.} \right), \\
\hat{I}_L(t) &= \frac{e}{4\pi m} \sum_n^{N(E)} \int \frac{dE dE'}{\sqrt{v_{L_n}(E) v_{L_n}(E')}} e^{i\frac{(E-E')t}{\hbar}} \left(k_{L_n} (\hat{a}_{L_n}^\dagger e^{-ik_{L_n}x} + \hat{b}_{L_n}^\dagger e^{ik_{L_n}x}) (\hat{a}_{L_n} e^{ik_{L_n}x} - \right. \\
&\quad \left. - \hat{b}_{L_n} e^{-ik_{L_n}x}) - \text{c.c.} \right), \\
\hat{I}_L(t) &= \frac{e}{4\pi m} \sum_n^{N(E)} \int \frac{dE dE'}{\sqrt{v_{L_n}(E) v_{L_n}(E')}} e^{i\frac{(E-E')t}{\hbar}} \left[(k_{L_n} + k'_{L_n}) (\hat{a}_{L_n}^\dagger \hat{a}_{L_n} - \hat{b}_{L_n}^\dagger \hat{b}_{L_n}) + \right. \\
&\quad \left. + (k_{L_n} - k'_{L_n}) (\dots) \right]. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Como vemos, é extremamente improvável que essa expressão nos leve a algum tipo de conclusão, contudo, podemos fazer uma simplificação bastante substancial. Devemos atentar para o fato que a corrente dos reservatórios operam na energia de Fermi, assim, quando calculamos um cumulante do sistema em questão (no presente caso, condutância e ruído), as energias E e E' são aproximadamente iguais à E_F , então, quando utilizamos o fato que $\hbar k_{L_n} = mv_{L_n}$ e que a velocidade varia com a energia na ordem da escala de Fermi, assim, podemos negligenciar a dependência energética da velocidade, fazendo pois, nossa expressão diminuir para

$$\hat{I}_L(t) = \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_n^{N(E)} \int dE dE' e^{i\frac{(E-E')t}{\hbar}} (\hat{a}_{L_n}^\dagger(E) \hat{a}_{L_n}(E') - \hat{b}_{L_n}^\dagger(E) \hat{b}_{L_n}(E')). \tag{4.18}$$

O resultado acima indica que a corrente total no terminal da esquerda é dado pela diferença da evolução temporal do número de ocupação entre os estados de entrada e saída, como intuimos na seção anterior ao derivar a fórmula de Landauer. Uma derivação alternativa da expressão acima pode ser vista na referência [46]. Se tomamos a relação linear correspondente entre \hat{a} e \hat{b} através da matriz de espalhamento, teremos

$$\hat{I}_L(t) = \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_n^{N(E)} \int dE dE' e^{i\frac{(E-E')t}{\hbar}} (\hat{a}_{L_n}^\dagger(E) \hat{a}_{L_n}(E') - \sum_{\alpha,\beta,m,k} \hat{a}_{\alpha m}^\dagger(E) s_{L\alpha,mk}^*(E) s_{L\beta,kn}(E') \hat{a}_{\beta n}(E')), \tag{4.19}$$

onde adicionamos o índice m a fim de não eliminar os termos cruzados do produto das amplitudes de saída. Podemos reescrever a expressão acima definindo

$$\hat{I}_L(t) = \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{m,n}^{N(E)} \int dE dE' e^{i\frac{(E-E')t}{\hbar}} \hat{a}_{\alpha m}^\dagger(E) A_{\alpha,\beta}^{mn}(L; E, E') \hat{a}_{\beta n}(E'), \tag{4.20}$$

com

$$A_{\alpha,\beta}^{mn}(L; E, E') = \delta_{mn} \delta_{\alpha L} \delta_{\beta L} - \sum_k s_{L\alpha,mk}^*(E) s_{L\beta,kn}(E'). \tag{4.21}$$

Agora, é fortuito que estendamos para o caso multiterminal a expressão acima, assim, a equação (4.21) será dada por

$$A_{\alpha,\beta}^{mn}(\gamma; E, E') = \delta_{mn} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} - \sum_k s_{\gamma\alpha,mk}^*(E) s_{\gamma\beta,kn}(E'). \tag{4.22}$$

A equação acima é chamada matriz-corrente, ela é responsável em caracterizar a corrente no terminal γ na existência de um estado incidente no terminal α e β , no canal m e n . Como o próprio conceito nos induz a intuir, e como veremos mais adiante, os elementos da matriz-corrente governam as flutuações,

e serão necessários para o cálculo do ruído. De posse do operador corrente, podemos aplicá-lo no estado de Fock dos contatos para o caso deste em equilíbrio térmico com os reservatórios

$$\langle \hat{a}_{\alpha m}^\dagger(E) \hat{a}_{\beta n}(E') \rangle = \delta_{mn} \delta_{\alpha\beta} \delta(E - E') f_\alpha(E). \quad (4.23)$$

É importante comentar que a assunção acima é extremamente não-trivial e carrega em si a física que possibilita o cálculo da média e, mais a frente, a flutuação do sistema. Para cada estado de Fock do contato, precisamos associar um peso para que procedamos com a média de (4.20), caso contrário, realizar esse cálculo seria impossível. Portanto, se considerarmos que os contatos estão em equilíbrio térmico com os reservatórios, as partículas transmitidas para os contatos irão obedecer a estatística já conhecida dos reservatórios onde sabemos como atuar os operadores de aniquilação e criação, conseguindo, pois, os pesos para cada auto-estado e podemos fazer a assunção (4.23).

Prosseguindo, teremos, para a expressão (4.20)

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}_L \rangle &= \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_n \int dE dE' e^{i\frac{(E-E')t}{\hbar}} (\delta(E - E') f_L - \\ &- \sum_{\alpha, \beta, m, k} s_{L\alpha, mk}^*(E) s_{L\beta, kn}(E') \delta_{mn} \delta_{\alpha\beta} \delta(E - E') f_\alpha(E)) \\ \langle \hat{I}_L \rangle &= \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_n \int dE (f_L - \sum_{\alpha, k} s_{L\alpha, nk}^*(E) s_{L\alpha, kn}(E) f_\alpha) \\ \langle \hat{I}_L \rangle &= \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_n \int dE ((1 - \sum_k s_{LL, nk}^* s_{LL, kn}) f_L - \sum_k s_{L\alpha, nk}^* s_{L\alpha, kn} f_R) \\ \langle \hat{I}_L \rangle &= \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_n \int dE (\sum_k s_{L\alpha, nk}^* s_{L\alpha, kn}) (f_L - f_R) \\ \langle \hat{I}_L \rangle &= \frac{e}{2\pi\hbar} \int dE \text{Tr}(\mathbf{t}^\dagger \mathbf{t}) (f_L - f_R), \end{aligned} \quad (4.24)$$

no limite de temperatura zero, resgatamos a fórmula de Landauer, como esperado. Citaremos, à título de completude, que esse formalismo ainda permite a generalização de teorias escalares de uma dimensão [47, 48] para dimensões maiores[49].

Para o caso multiterminal, temos a corrente dada por (4.24), apenas substituindo o subscrito L por outro que contemple o terminal de interesse. O resultado derivado acima é notável não somente pelo seu caráter genérico teórico, mas também foi submetido a uma medida direta e obteve bom êxito[50].

Como afirmamos na introdução, o formalismo de Büttiker ainda permite que estudemos o caso do não-equilíbrio que, como demonstraremos mais adiante, permite-nos conhecer mais a respeito do sistema. Primeiramente, vamos escrever explicitamente a equação (4.24) na sua forma geral, como já atentamos logo acima

$$\langle \hat{I}_\alpha \rangle = \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_n \int dE (f_\alpha - \sum_{\beta, k} s_{\alpha\beta, nk}^*(E) s_{\alpha\beta, kn}(E) f_\beta). \quad (4.26)$$

A equação acima representa a situação do sistema quando alcança o equilíbrio. Para analisar a situação fora do equilíbrio, aplicamos uma voltagem V_β no terminal β , assim, o potencial químico será afetado de tal sorte que $\mu_\beta = \mu + eV_\beta$, onde μ é o potencial químico do reservatório em equilíbrio. Essa voltagem certamente vai afetar o sistema como um todo, como podemos ver pela equação (4.26), tão logo, a configuração eletrônica de todos os reservatórios será afetada levemente. Portanto, tomamos a expansão em primeira ordem da distribuição em torno do equilíbrio

$$\begin{aligned} f_\alpha &= f(\mu) + \frac{\partial f}{\partial E} (\mu_\alpha - \mu), \\ f_\alpha &= -\frac{\partial f}{\partial E} (\mu - \mu_\alpha), \\ f_\alpha &= -\frac{\partial f}{\partial E} eV_\alpha. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Na segunda passagem, utilizamos o fato que a distribuição em torno de μ é ponto de mínimo, então, podemos tomá-la como zero fazendo os ajustes adequados. Substituindo (4.27) em (4.26), vem

$$\begin{aligned}
\langle \hat{I}_\alpha \rangle &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_n \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) (V_\alpha - V_\beta \sum_{\beta,k} s_{\alpha\beta,nk}^*(E) s_{\alpha\beta,kn}(E)), \\
\langle \hat{I}_\alpha \rangle &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_\beta V_\beta \sum_n \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) (\delta_{\alpha\beta} - \sum_k s_{\alpha\beta,nk}^*(E) s_{\alpha\beta,kn}(E)), \\
\langle \hat{I}_\alpha \rangle &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_\beta V_\beta \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) (N_\alpha \delta_{\alpha\beta} - \sum_{n,k} s_{\alpha\beta,nk}^*(E) s_{\alpha\beta,kn}(E)), \\
\langle \hat{I}_\alpha \rangle &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_\beta V_\beta \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) (N_\alpha \delta_{\alpha\beta} - \text{Tr}[\mathbf{s}_{\alpha\beta}^\dagger \mathbf{s}_{\alpha\beta}]). \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Essa forma permite-nos que reobtenhamos a lei de Ohm

$$\langle \hat{I}_\alpha \rangle = \sum_\beta G_{\alpha\beta} V_\beta, \tag{4.29}$$

onde $G_{\alpha\beta}$ é a matriz de condutância dada por

$$G_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) (N_\alpha \delta_{\alpha\beta} - \text{Tr}[\mathbf{s}_{\alpha\beta}^\dagger \mathbf{s}_{\alpha\beta}]). \tag{4.30}$$

É importante ressaltar a diferença entre as correntes (4.25) e (4.29): a primeira é a corrente após o sistema ter entrado em equilíbrio, a última avalia a corrente resultante dada uma perturbação no sistema.

A expressão (4.30) nos dá um resultado interessante quando fazemos duas considerações que são a base de qualquer teoria do transporte eletrônico.

A primeira é a conservação da corrente, dada por

$$\sum_\alpha \hat{I}(t) = 0. \tag{4.31}$$

Notamos que essa expressão possui um vínculo forte, uma vez que a corrente deve ser conservada não na média, mas, à cada instante de tempo. Para a condutância, isso implica imediatamente de (4.29) que

$$\sum_\alpha G_{\alpha\beta} = 0. \tag{4.32}$$

A importância dessa equação se dá quando consideramos a segunda condição para estabelecer uma teoria de transporte, a chamada invariância por transformação de *gauge*, ou de calibre. Em teoria de campos, uma invariância de calibre significa que independentemente da forma do campo, dada uma transformação, o observável tem que ser o mesmo. No nosso contexto, isso significa que se aplicarmos o mesmo *shift* em todos os potenciais, $V_\beta \rightarrow V_\beta + V$, a média da corrente não será alterada, de fato, tomando o *shift* em (4.29), temos que

$$\langle \hat{I}_\alpha \rangle = \sum_\beta V_\beta G_{\alpha\beta} + V \sum_\beta G_{\alpha\beta},$$

para que haja invariância por transformação de calibre, temos que

$$\sum_\beta G_{\alpha\beta} = 0. \tag{4.33}$$

Podemos nos certificar da veracidade dos vínculos acima se tomarmos o caso *standard* para (4.32), vem

$$\sum_{\alpha} G_{\alpha\beta} = G_{L\beta} + G_{R\beta},$$

$$\sum_{\alpha} G_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \left(N_L \delta_{L\beta} - \text{Tr}[\mathbf{s}_{L\beta}^{\dagger} \mathbf{s}_{L\beta}] + N_R \delta_{R\beta} - \text{Tr}[\mathbf{s}_{R\beta}^{\dagger} \mathbf{s}_{R\beta}] \right),$$

tomando $\beta = L$, temos

$$\sum_{\alpha} G_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \left(N_L - \text{Tr}[\mathbf{s}_{LL}^{\dagger} \mathbf{s}_{LL} + \mathbf{s}_{RL}^{\dagger} \mathbf{s}_{RL}] \right).$$

Quando aplicamos a condição de unitariedade no argumento do traço, obteremos uma matriz identidade de ordem $L \times L$, então, quando procedemos com o traço, teremos o número de canais na esquerda que se cancelará com o outro N_L e reobteremos o vínculo (4.32). De forma análoga, teremos para o caso de $\beta = R$. Esse tratamento é válido para demonstrar também o vínculo (4.33). Disso, podemos concluir que a unitariedade da matriz de espalhamento automaticamente garante a conservação da corrente, devido à conservação de carga, e a invariância por mudança de *gauge*, devido a invariância de Lorentz, como foi comentado no capítulo 2. Todo esse tratamento foi para demonstrarmos que

$$\sum_{\alpha} G_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} G_{\alpha\beta}, \quad (4.34)$$

esta expressão apresenta as chamadas Relações de Onsager-Casimir, já citadas aqui nesta dissertação no capítulo anterior, resultado mais que esperado quando estamos tratando de um sistema em regime de não-equilíbrio. As relações Onsager-Casimir $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$ são mais evidentes e diretas quando tomamos o caso *standard*.

É notável os resultados que obtemos apenas realizando o estudo da corrente nos regimes do equilíbrio e do não-equilíbrio, resultados esses muito bem estabelecidos pela física do transporte quântico e da mecânica estatística. O formalismo de Büttiker, de fato, é passível de chamar a atenção por revelar um grande potencial de compreender melhor as nanoestruturas.

Além do mais, como citamos anteriormente, este formalismo impulsionou o estudo quantitativo do ruído, fato esse que exploraremos a seguir. Primeiramente, devemos ter uma base elementar e introdutória dos diferentes tipos de ruído que se acometem no condutor.

4.3 Ruído I: flutuação térmica e a quantização da carga.

Nas secções anteriores, afirmamos que a importância do ruído advém do fato deste nos trazer mais informações a respeito do sistema que são perdidas quando implementamos apenas a média de um observável que descreve o sistema. Um exemplo de grande importância, já descrito nesta dissertação, é o próprio movimento Browniano: o ruído causado pelo fluido na trajetória da partícula suspensa possibilitou uma forma de medição para assentar a teoria atomística e finalizar o debate entre os atomicistas e os energicistas. Para o caso de um circuito elétrico, podemos imaginar que a temperatura naturalmente pode causar ruído na medição da carga. É imediato tomar essa suposição quando estabelecemos o circuito *RL* (figura 4.3) alimentado por uma força eletromotriz ε . Tomando a equação diferencial que determina a carga que é lançada no circuito, temos

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} = \varepsilon. \quad (4.35)$$

Percebemos imediatamente que, comparando com a equação (3.17), podemos fazer uma analogia com o caso de uma partícula massiva suspensa em um fluido viscoso, isto é, podemos intuir a relação $\langle q^2 \rangle \sim t$. Se compararmos (4.35) com o valor da flutuação (3.19), temos que o fator de proporção é dado pelo termo que acompanha a derivada primeira da equação diferencial, então, podemos tomar

$$\langle q^2 \rangle = 2 \frac{k_b T}{R} t = 2 G k_b T t. \quad (4.36)$$

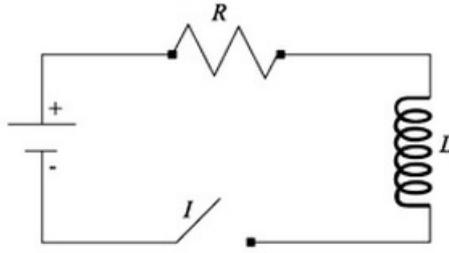


Figura 4.5: Representação de um circuito RL.

Essa é uma maneira bem simplória de modelar o movimento browniano no caso de circuito elétrico, mas essa mesma analogia foi levada à cabo por H. Nyquist [51] e J. B. Johnson [52] e a equação (4.36) é precisamente o ruído devido à agitação térmica causada no circuito. Àquela equação denominamos de ruído de Nyquist-Johnson, devido a seus descobridores, ou ruído térmico, ou ruído branco. O ruído branco é útil para que mascaremos outras formas de ruído no nosso sistema. Um exemplo contextual do ruído branco é quando não desejamos escutar sons indesejáveis, então, tapamos nossos ouvidos e passamos a emitir sons próprios para suprimir o som externo, da mesma forma, o ruído térmico no circuito elétrico impede que o sinal sofra menos flutuações de outras naturezas, e isso viabiliza a lei de Ohm no regime clássico, isto é, o sistema submetido à altas temperaturas, caso contrário, a condutância apresentaria medições descontroladas, o que precisamente sucede no regime quântico. Contudo, esse ruído não nos permite contemplar a discretização da carga, muito embora, no contexto de Nyquist e Johnson, a carga elétrica já havia sido descoberta. Mas, com um ruído que expressasse a discretização da carga, poderíamos calcular o seu valor, e é o que desenvolveremos agora.

Em 1880, Thomas Edison desejava descobrir a razão do mal-funcionamento dos filamentos das lâmpadas produzidas por sua empresa, na ocasião, ele notou que o lado do filamento mais perto do terminal positivo estava mais preto que o lado do terminal negativo, indicando que ali havia uma carência de elétrons para emitir luz. Assim, com o conhecimento científico que possuía e, principalmente, motivado a melhorar o produto de sua empresa, investigou o caso colocando papéis de alumínio dentro do bulbo da lâmpada, e conectou nesse alumínio um galvanômetro (figura 4.6). Ao ligar a lâmpada, quando ele polarizava o papel de alumínio negativamente, o galvanômetro não acusava nada. Quando polarizava positivamente, o galvanômetro acusava a passagem de uma corrente quando o filamento estivesse devidamente aquecido. Esse resultado permitiu que Edison concluísse que a carga que fluía para a folha de alumínio fosse devido à agitação térmica da corrente no filamento, esse fenômeno é conhecido como emissão termiônica, ou efeito Edison[53]. Com isso, muito pôde desenvolver com a emissão termiônica, algumas delas foi a construção de receptor de rádio e o osciloscópio [54]. Anos mais tarde, Owen W. Richardson tomou o estudo da emissão termiônica [55]. Richardson postulou que a corrente J_T gerada pelo emissão é descrita pelo processo que obedece o fator de Boltzmann

$$J_T \propto e^{-\frac{\Delta E}{k_b T}}. \quad (4.37)$$

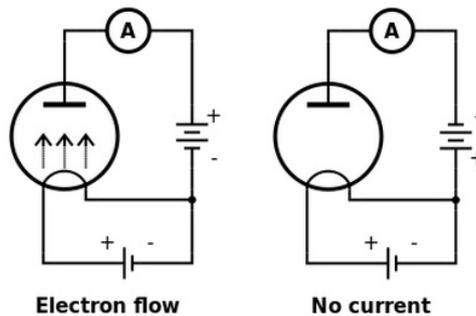


Figura 4.6: Experimento de Edison: no primeiro caso, temos a folha ligada a um terminal positivo, gerando fluxo de carga, no segundo, quando a folha está no terminal negativo, não há corrente.

O fator de Boltzmann expressa a probabilidade do evento à energia ΔE e temperatura T ocorra. Assim, como sabemos do efeito fotoelétrico, a menor energia necessária para que um elétron seja arrancado de uma placa é a função trabalho W . Utilizando argumentos básicos das propriedades do elétron no metal e normalizando a expressão acima, como feito em [56, 57], temos a equação de Richardson

$$J_T = A_R T^2 e^{-\frac{W}{k_b T}}, \quad (4.38)$$

onde

$$A_R = \frac{4\pi q m k_b^2}{h^3} \quad (4.39)$$

é a constante de Richardson, com q sendo a carga emitida. Mais tarde, em outro contexto, Walter Schottky realizou o estudo da emissão termiônica em armas de elétrons, com a vantagem que este aparelho permite um controle maior no sinal do feixe de elétrons emitidos. No caso, ele percebeu que havia um ruído na corrente produzida pelos elétrons emitidos, além do próprio ruído térmico. Esse ruído era causado pelo fato do elétron emitido afetar a distribuição eletrônica da placa emissora (figura 4.7) com o surgimento de um campo elétrico devido a uma carga-imagem à $2x$ do elétron emitido

$$E_x = \frac{e}{4\pi\epsilon_0(2x)^2}. \quad (4.40)$$

Schottky percebeu que o campo elétrico (4.40) causava uma diminuição na função trabalho W da placa para cada elétron “disparado”, acarretando assim, uma flutuação na corrente J_T . Para medir tal flutuação, Schottky aplicou uma variação ΔW na equação de Richardson

$$J_T = A_R T^2 e^{-\frac{W-\Delta W}{k_b T}} \quad (4.41)$$

onde

$$\Delta W = \sqrt{\frac{e^3 E_x}{4\pi\epsilon_0}}. \quad (4.42)$$

Com isso e mais o aparato adequado para tal medição, Schottky pôde concluir que a flutuação causada pelo elétron emitido acarretava em um aumento na corrente termoelétrica: um elétron emitido “facilitará” as condições para outro elétron ser emitido! A esse fenômeno dá-se o nome de Efeito Schottky [58], e a flutuação denominamos ruído de disparo (*shot noise*). O ponto mais importante de toda essa análise é mostrar que o ruído de disparo só é possível graças à natureza discreta da carga elétrica. Infelizmente, a história cronológica do valor da carga elétrica impediu que Schottky fosse o pioneiro na medição de tal quantidade, sendo primeiramente realizada por Millikan; com seu experimento da gota de óleo. Contudo, o experimento de Schottky proporcionou um valor mais preciso que o de Millikan, e tudo isso graças à análise do ruído do sistema.

Uma forma de derivar o ruído de disparo para o caso do emissão termiônica é considerar esta como um processo de Poisson: em um dado tempo t , haverá uma probabilidade; regida pela distribuição de Poisson; da placa emitir uma dada quantidade de carga q [59]. Como propriedade da distribuição de Poisson, temos que a flutuação da carga transmitida é dada por

$$\langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle = e \langle q \rangle, \quad (4.43)$$

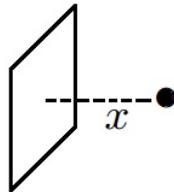


Figura 4.7: Termoelétron emitido pela placa.

onde e foi posto a fim de corrigir dimensionalmente (4.43). Como $\langle q \rangle$ representa a carga média transmitida, podemos fazer a substituição

$$\begin{aligned}\langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle &= eIt \quad , \\ \langle \delta q_t^2 \rangle &= eI_T t \quad ,\end{aligned}\tag{4.44}$$

onde I_T é a corrente termiônica. Fazendo a decomposição espectral de (4.44), temos

$$\begin{aligned}\langle \delta q_\omega^2 \rangle &= eI_T \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{i\omega t} dt \quad , \\ \langle \delta q_\omega^2 \rangle &= eI_T i \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt \quad , \\ \langle \delta q_\omega^2 \rangle &= eI_T 2\pi i \frac{d}{d\omega} \delta(\omega) \quad , \\ \langle \delta q_\omega^2 \rangle &= eI_T 2\pi i \delta'(\omega) \quad .\end{aligned}\tag{4.45}$$

aqui, tomaremos uma das possíveis representações da função delta de Dirac que é dada por $\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}ax}{x}$, obteremos o gráfico de sua derivada representado na figura (4.8). Como podemos perceber pelo seu gráfico, a derivada de delta só vai contemplar valores próximos à origem de ω , além disso, a expressão (4.54) deve contemplar as frequências significativas positivas e negativas próximas à origem, assim temos que colocar um fator 2 na expressão, assim, após normalizarmos a expressão, temos a equação de Schottky dada por

$$\langle \delta q_\omega^2 \rangle = 2eI_T.\tag{4.46}$$

Na realidade, no artigo original, Schottky encontrou a expressão (4.44) pela decomposição espectral da função de correlação entre diferentes pulsos de correntes, técnica essa que desenvolveremos na secção final deste capítulo para encontrar a equação do ruído do formalismo de Büttiker. Fizemos a decomposição de (4.44) no intuito de reobtê-la no espaço de Fourier utilizando o formalismo trabalhado neste capítulo, apesar de, novamente, deduzirmos a expressão (4.46) de forma simplória e rude, sem preocupações formais. Na próxima secção, iremos reobtê-la de forma mais convincente.

O ponto central desta secção foi apresentar a importância do ruído que auxilia na visualização do sistema físico e apresentamos com um certo detalhe o ruído térmico e o ruído de disparo. O primeiro pelo fato de ser o tipo de ruído mais comum em qualquer sistema eletrônico, ele está presente em qualquer faixa de frequência. O segundo porque deflagra a quantização da carga. A identificação de tais ruídos permite-nos que saibamos classificar com mais precisão o que sucede na medição da corrente sem, contudo, confundirmos as diferentes fontes de flutuação. Ademais, esses são ruídos que operam à frequências altas. O segundo, em especial, possui independência com a frequência e é linearmente relacionado com a corrente do circuito.

Outrossim, existem outras fontes de ruídos quando o sistema opera em baixas frequências: se considerarmos o circuito RL da figura 4.5 nesse regime, haverá flutuações dependentes do tempo na condutância devido ao movimento desordenado das impurezas, a esse ruído denominamos de ruído de

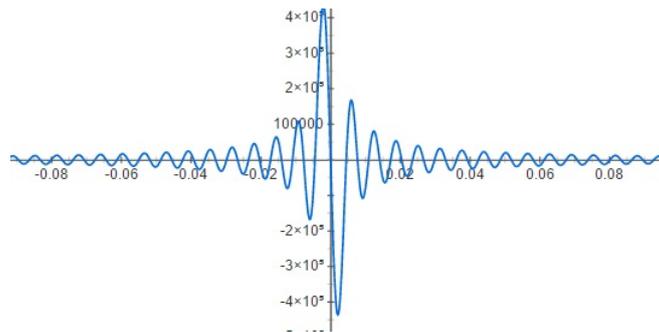


Figura 4.8: Plotagem de $\frac{d}{d\omega} \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega}$, onde fizemos $a = 1000$.

Flicker, ou ruído de $1/f$, devido à dependência com o inverso da frequência. Esse é o ruído dominante à frequência baixa aplicada a esse sistema, como também em muitos outros, como é contemplado na referência [60].

Por fim, temos um ruído extremamente importante e inevitável no estudo do transporte quântico que é aquele causado pela divisão da corrente e um ou mais caminhos, a esse caso denominamos ruído de partição. Esse ruído já era conhecido no contexto da ótica quando observava-se um feixe luz incidindo em um material que refletia uma certa porcentagem da intensidade do feixe incidente. Como sabemos da mecânica quântica básica, devido à natureza ondulatória do elétron, este também possuirá probabilidade de ser refletido ou transmitido, e isso naturalmente causará uma certa flutuação na condutância. Então, concluímos que, essencialmente, o ruído de partição é devido à natureza ondulatória das partículas. No final desta dissertação, apresentaremos o ruído de partição do sistema (1.18) apresentado na introdução. Para conhecimento de outros tipos de ruídos, indicamos as referências [61, 62]

Agora que temos uma boa noção a respeito do ruído em um sistema eletrônico, na próxima seção, nós, finalmente, iremos demonstrar a expressão que informa a decomposição espectral do ruído, uma consequência direta do formalismo de Büttiker.

4.4 Ruído II: densidade espectral.

Nesta seção, que finaliza o capítulo, apresentaremos a função de correlação. É nela que estamos interessados desde o princípio para o cálculo das correlações multiterminais. Assim, é fortuito que apresentemos a definição de função de correlação, antes de a calcularmos no formalismo de Büttiker.

Tomaremos como exemplo, novamente, o movimento Browniano de uma partícula suspensa em um fluido viscoso. Já sabemos que a posição $x(t)$ varia randomicamente com o tempo. Se definimos um intervalo de tempo, podemos calcular a média da posição nesse intervalo, dada por $\langle x \rangle$. Para o caso unidimensional, temos o problema análogo ao andar do bêbado em uma rua, assim $\langle x \rangle = 0$. Isso não afetará a generalidade de nossas considerações. A flutuação da posição também varia com o tempo, como podemos ver pela definição

$$\delta x(t) = x(t). \quad (4.47)$$

Sabemos da estatística elementar que não é interessante realizar a média dessa quantidade, pois, como vemos pelo seu lado direito, ela é nula. Por essa razão, no problema do movimento browniano calculamos a média quadrática desta

$$\langle \delta x(t)^2 \rangle = \langle x(t)^2 \rangle. \quad (4.48)$$

Contudo, quando estamos trabalhando com outro sistema clássico com observável flutuante, é natural perguntarmos se a medida da flutuação em um dado tempo t' afetará a medida da flutuação em um tempo posterior t , se sim, o quanto, em média, afeta? Para tanto, precisamos calcular a chamada função de correlação definida por [63]

$$S(t - t') = \langle \delta x(t) \delta x(t') \rangle = \langle x(t) x(t') \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t') \rangle. \quad (4.49)$$

Na realidade, o nome mais adequado para a equação (4.49) é função de autocorrelação, pois refere-se ao mesmo observável do sistema. A palavra “correlação” deve ser empregada quando estamos analisando 2 observáveis diferentes do mesmo sistema, como faremos mais adiante ao analisar a correlação entre 2 partículas incidentes em terminais diferentes acoplados ao ponto quântico, entretanto, por ora, procederemos com a terminologia padrão.

Só podemos proceder com esta média se a hipótese ergódica for aqui imposta, para tanto, o resultado da média da correlação acima deve ser a mesma calculada após um ponto do espaço de fase ter percorrido todos os estados possíveis do sistema. Em termos experimentais, essa média deve ser calculada em um tempo t_e suficientemente longo

$$S(t - t') = \lim_{t_e \rightarrow \infty} \int_{-t_e/2}^{+t_e/2} dt_x \delta x(t + t_x) \delta x(t' + t_x), \quad (4.50)$$

onde t_e é o tempo ergódico. Essa consideração é feita para que obtenhamos o resultado da média de estados microscópicos igual ao que é observado macroscopicamente, procedimento esse muito comum em mecânica estatística. É válido notar que para o caso $t - t' = 0$, reobtemos a média quadrática. Em outras palavras, se estamos interessados em obter a correlação de um observável, seu ponto inicial será a média quadrática. Outro importante fato da função de correlação é quando realizamos a segunda medida quase imediatamente após a primeira, o sinal de $\langle x(t)x(t') \rangle$ não deve mudar apreciavelmente, então, temos que $\langle x(t)x(t') \rangle > 0$. À medida que t se distancia de t' , o sinal vai oscilar de tal forma que o número de amplitudes negativas será aproximadamente igual às positivas, então, quando $|t - t'| \rightarrow \infty$, existirá tantas amplitudes positivas quanto negativas, cancelando-se umas as outras, resultando em $S(t - t') \rightarrow 0$. Este resultado informa-nos que quando realizamos duas medidas no sistema em tempos muito distantes, eles tornam-se totalmente descorrelacionados, em outras palavras, o sistema “esquece” a flutuação inicial. Esse tempo infinitamente longo também é chamado de tempo de relaxação. Como vimos nos capítulos iniciais, estamos operando abaixo desse tempo onde as funções de correlações são não-nulas. Só pudemos concluir pelo fato da função de correlação ser positiva, pois, se fosse negativa, isso significaria que observáveis com valores cada vez maiores se relacionariam com valores cada vez menores, o que não implica que à tempos longos a função de correlação se anula.

Quando estamos tratando de sistemas quânticos, obteremos os resultados por intermédio da álgebra de operadores. Logo, devemos assumir uma representação. Como no formalismo de Büttiker demonstramos o operador corrente \hat{I} como função de tempo, é natural que tomemos a representação de Heisenberg. Ademais, essa representação permite a transição microscópica para a macroscópica imediata. Outro ponto que devemos atentar é que esses operadores, em geral, não comutam, então, tomamos a função de correlação na sua representação quântica dada por

$$S(t - t') = \frac{1}{2} \langle \delta\hat{x}(t)\delta\hat{x}(t') + \delta\hat{x}(t')\delta\hat{x}(t) \rangle, \quad (4.51)$$

onde $\hat{x}(t)$ satisfaz a equação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t} = [\hat{x}(t), \hat{H}], \quad (4.52)$$

com \hat{H} sendo o operador Hamiltoniano do sistema. Contudo, como agora estamos em um regime onde as escalas são pequeníssimas, devemos ter em mente que a função de correlação cai rapidamente com o tempo, fato esse que torna nosso estudo desinteressante, outrossim, em sistemas mesoscópicos, estamos operando abaixo do tempo de relaxação, onde a correlação é não-trivial. Poderíamos resolver esse problema analisando a função de correlação em sua representação espectral, contudo, essa análise não é tão direta, uma vez que estamos lidando com dois observáveis com duas variáveis distintas, o que não traria nenhum resultado significativo sem uma interpretação extremamente elaborada. Esse outro problema é contornado através do teorema de Wiener-Khintchine[64], que derivaremos agora.

Fazendo a decomposição espectral da variável estocástica $\delta x(t)$, analogamente a como fizemos para o caso do ruído de disparo, vem

$$\delta x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta x(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.53)$$

Novamente, aqui assumimos que o sistema está em regime estacionário, isto é, já percorreu todos os seus estados possíveis. Agora definiremos uma função real positiva-definida como

$$S(\omega) = \lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{|\delta x(\omega)|^2}{t_e}. \quad (4.54)$$

Essa função chama-se densidade espectral, ela é definida de tal sorte a realizar a análise espectral de variáveis estocásticas, por essa razão, a expressão (4.45) é também chamada de ruído de potência¹, uma vez que estamos fazendo a análise espectral de ruídos, que incorpora o caso que estamos trabalhando.

¹Tradução livre de *power noise*.

Aplicando (4.53), temos

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= \lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{\delta x^*(\omega) \delta x(\omega)}{t_e}, \\
S(\omega) &= \lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{1}{t_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta x(t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta x(t_2) e^{i\omega t_2} dt_2, \\
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t_2-t_1)} \lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{1}{t_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta x(t_1) \delta x(t_2) dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Na segunda passagem, utilizamos o fato já conhecido que $\delta x(t)$ deve ser real. Se fizermos a substituição $t_2 - t_1 = t_x$ e tomarmos $t_2 = t$, a segunda integral do lado direito nada mais é que a expressão (4.50): a função de correlação definida para um sistema estacionário. Realizando outra translação em t , teremos

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t-t') e^{i\omega(t-t')} d(t-t'). \quad (4.55)$$

Aqui, demonstramos que a função de correlação é decomposta na densidade espectral, o que contorna o problema apontado logo acima e, também, o problema da escala do tempo ser muito pequena, apenas expressando a função de correlação no espaço recíproco de Fourier. Contudo, a demonstração não está completa: a expressão (4.55) não garante que a função de correlação é o recíproco da densidade espectral. Demonstraremos isso no desenvolvimento da expressão do ruído que faremos a seguir.

Já demonstramos o operador corrente no regime de baixa frequência do terminal α definido por $\hat{I}_\alpha(t)$. Contudo, como sabemos, para qualquer sistema eletrônico existem várias categorias de ruído. Um exemplo é a flutuação de uma partícula que emerge no n -ésimo canal, essa partícula irá flutuar entre os diferentes canais adjacentes de n . A única forma de analisarmos a questão da flutuação da corrente é fazendo medidas sucessivas na mesma, e isso naturalmente nos leva à pergunta feita no início desta secção e, naturalmente, nos leva à análise logo acima feita. Assim, o nosso observável será $\hat{I}_\alpha(t)$, cuja flutuação será dada por $\Delta \hat{I}_\alpha(t)$. Então, substituindo em (4.51), vem

$$S_{\alpha\beta}(t-t') = \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{I}_\alpha(t) \Delta \hat{I}_\beta(t') + \Delta \hat{I}_\beta(t') \Delta \hat{I}_\alpha(t) \rangle. \quad (4.56)$$

Como foi acentuado mais acima, para muitos problemas é mais adequado que trabalhemos com o espectro de frequências, então

$$\hat{I}_\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{I}_\alpha(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.57)$$

Notemos que diferentemente de quando demonstramos \hat{I} , estamos tratando do caso multiterminal, denotado pelo índice α , e isso também deve ser contemplado na função de correlação, como observamos em (4.56). Invertendo (4.57), temos

$$\hat{I}_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{I}_\alpha(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (4.58)$$

Aplicando a definição acima em (4.56), vem

$$S_{\alpha\beta}(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega \int d\omega' \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \Delta \hat{I}_\beta(\omega') + \Delta \hat{I}_\beta(\omega') \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \rangle e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t'}. \quad (4.59)$$

Para que o lado direito seja uma função apenas de $t-t'$, como é requerido pelo esquerdo, é necessário que imponhamos a condição

$$\frac{1}{2} \langle \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \Delta \hat{I}_\beta(\omega') + \Delta \hat{I}_\beta(\omega') \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \rangle = 2\pi S_{\alpha\beta}(\omega) \delta(\omega + \omega'). \quad (4.60)$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta}(t-t') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega \int d\omega' 2\pi S_{\alpha\beta}(\omega) \delta(\omega + \omega') e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t'}, \\
S_{\alpha\beta}(t-t') &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega S_{\alpha\beta}(\omega) e^{-i\omega(t-t')}.
\end{aligned} \quad (4.61)$$

Como prometido, finalizamos a demonstração que a função de correlação é o recíproco da densidade espectral, então, demonstrando o teorema de Wiener-Khintchine, embora, sem o devido rigor matemático.

O problema já está essencialmente resolvido: já temos a densidade espectral; que resolve o problema da correlação extremamente curta e temos a forma do observável; dado pela equação (4.20). Agora, como requerido pela densidade espectral, devemos decompor o operador corrente no espaço das frequências, então, aplicando (4.20) em (4.57), então, vem

$$\begin{aligned}
\hat{I}_\alpha(\omega) &= \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE dE' dt e^{i\frac{(E-E')t}{\hbar}} \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E) A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E') \hat{a}_{\gamma n}(E') e^{i\omega t}, \\
\hat{I}_\alpha(\omega) &= \frac{e}{2\pi} \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE dE' d\left(\frac{t}{\hbar}\right) \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E) A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E') \hat{a}_{\gamma n}(E') e^{i\frac{t}{\hbar}(E-E'+\hbar\omega)}, \\
\hat{I}_\alpha(\omega) &= e \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE dE' \delta(E - E' + \hbar\omega) \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E) A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E') \hat{a}_{\gamma n}(E'), \\
\hat{I}_\alpha(\omega) &= e \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E) A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E + \hbar\omega) \hat{a}_{\gamma n}(E + \hbar\omega). \tag{4.62}
\end{aligned}$$

É interessante notar que a própria decomposição retoma a nossa assunção de outrora que estamos operando em baixas frequências, nada mais natural que esperar que a matriz-corrente, que define o ruído, só contemple os termos próximos da frequência em questão. Com (4.62) estabelecida, vamos calcular $\langle \hat{I}_\alpha(\omega) \hat{I}_\beta(\omega') \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{I}_\alpha(\omega) \hat{I}_\beta(\omega') \rangle &= e^2 \sum_{\lambda\gamma mn} \sum_{\mu\nu pq} \int dE \int dE' A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E + \hbar\omega) A_{\mu\nu}^{pq}(\beta; E', E' + \hbar\omega') \cdot \\
&\cdot \langle \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E) \hat{a}_{\gamma n}(E + \hbar\omega) \hat{a}_{\mu p}^\dagger(E') \hat{a}_{\nu q}(E' + \hbar\omega') \rangle. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Para avaliar o braket acima, basta que tomemos $\langle \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E_1) \hat{a}_{\gamma n}(E_2) \hat{a}_{\mu p}^\dagger(E_3) \hat{a}_{\nu q}(E_4) \rangle$, abordando todas as combinações possíveis dos índices. É importante ter em mente, também, a assunção (4.23) e a discussão procedente da mesma. Como afirmamos na ocasião, é devido a ela que é possível o cálculo da flutuação do sistema que estamos realizando agora. Assim, tomando primeiramente as combinações diretas, isto é $\lambda = \gamma$, $m = n$, $E_1 = E_2$, $\mu = \nu$, $p = q$ e $E_3 = E_4$.

$$\langle \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E_1) \hat{a}_{\lambda m}(E_1) \hat{a}_{\mu p}^\dagger(E_3) \hat{a}_{\mu p}(E_3) \rangle = f_\lambda(E_1) f_\mu(E_3). \tag{4.64}$$

Pois estamos considerando o caso do equilíbrio térmico com os terminais, então, utilizamos (4.23) na última passagem. Agora, tomando as combinações cruzadas, temos

$$\langle \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E_1) \hat{a}_{\mu p}(E_3) \hat{a}_{\mu p}^\dagger(E_3) \hat{a}_{\lambda m}(E_1) \rangle = \langle \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E_1) \hat{a}_{\lambda m}(E_1) [1 \mp \hat{a}_{\mu p}^\dagger(E_3) \hat{a}_{\mu p}(E_3)] \rangle = f_\lambda(E_1) [1 \mp f_\mu(E_3)]. \tag{4.65}$$

Aqui, inserimos o \pm no intuito de abranger todas as naturezas possíveis da partícula incidente, tal que $+$ atende para a álgebra fermiônica e $-$, álgebra bosônica. No último caso, os reservatórios são substituídos por cavidades de corpo negro e a distribuição f_α é dada pela estatística de Bose-Einstein. Quando formos tratar diretamente com a equação, devemos ter em mente que o sinal acima é o reservatório de elétrons, o debaixo, bósons. Essa álgebra se dá por intermédio de comutadores e será melhor comentada no próximo capítulo. Não vamos contemplar o caso de todos os índices iguais pois isso representaria 2 partículas em canais subjacentes, e isso, frente ao número contínuo de estados possíveis do sistema, representa poucos termos do somatório (4.63) e a possibilidade de ocorrência dos mesmos no sistema é muito pequena, logo, podemos, sem receio, ignorar essa contribuição. Com as expressões acima, podemos avaliar o braket

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E_1) \hat{a}_{\gamma n}(E_2) \hat{a}_{\mu p}^\dagger(E_3) \hat{a}_{\nu q}(E_4) \rangle &= \delta_{\lambda\gamma} \delta_{mn} \delta_{\mu\nu} \delta_{pq} \delta(E_1 - E_2) \delta(E_3 - E_4) f_\lambda(E_1) f_\mu(E_3) \\
&\quad + \delta_{\lambda\nu} \delta_{mq} \delta_{\mu\gamma} \delta_{pn} \delta(E_1 - E_4) \delta(E_2 - E_3) f_\lambda(E_1) [1 \mp f_\mu(E_3)] \\
\langle \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E_1) \hat{a}_{\gamma n}(E_2) \hat{a}_{\mu p}^\dagger(E_3) \hat{a}_{\nu q}(E_4) \rangle &= \langle \hat{a}_{\lambda m}^\dagger(E_1) \hat{a}_{\gamma n}(E_2) \rangle \langle \hat{a}_{\mu p}^\dagger(E_3) \hat{a}_{\nu q}(E_4) \rangle + \\
&\quad + \delta_{\lambda\nu} \delta_{mq} \delta_{\mu\gamma} \delta_{pn} \delta(E_1 - E_4) \delta(E_2 - E_3) f_\lambda(E_1) [1 \mp f_\mu(E_3)] \tag{4.66}
\end{aligned}$$

Podemos notar que a avaliação do braket nos trouxe um termo extra que, quando aplicando em (4.63) irá gerar $\langle \hat{I}_\alpha(\omega) \rangle \langle \hat{I}_\beta(\omega') \rangle$ que, ao ser transferido para o lado esquerdo, teremos a própria definição de correlação entre as correntes $\langle \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \Delta \hat{I}_\beta(\omega') \rangle$ definida em (4.63). Podemos notar um belo resultado da expressão acima: esta estabelece uma relação entre todos os canais, mesmo aqueles que são de terminais diferentes, isso nos leva a concluir que além da flutuação devido à interferência entre as frentes de ondas propagando-se nos canais, temos também aquela causada simplesmente pela indistinguibilidade das partículas, chamada de interferência de *exchange*, e isso é um resultado essencialmente quântico, sem análogo clássico [65]. Retomaremos esse fato no capítulo final e obteremos as funções de correlações devido essencialmente à indistinguibilidade das partículas. Prosseguindo, aplicamos (4.66) na expressão (4.63), vem

$$\begin{aligned}
\langle \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \Delta \hat{I}_\beta(\omega') \rangle &= e^2 \sum_{\lambda\gamma mn} \sum_{\mu\nu pq} \int dE \int dE' A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E + \hbar\omega) A_{\mu\nu}^{pq}(\beta; E', E' + \hbar\omega') \cdot \\
&\quad \delta_{\lambda\nu} \delta_{mq} \delta_{\mu\gamma} \delta_{pn} \delta(E - E' - \hbar\omega') \delta(E' - E - \hbar\omega) f_\lambda(E) [1 \mp f_\mu(E')], \\
\langle \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \Delta \hat{I}_\beta(\omega') \rangle &= e^2 \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE \int dE' A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E + \hbar\omega) A_{\gamma\lambda}^{nm}(\beta; E', E' + \hbar\omega') \cdot \\
&\quad \cdot \delta(E - E' - \hbar\omega') \delta(E' - E - \hbar\omega) f_\lambda(E) [1 \mp f_\gamma(E')], \\
\langle \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \Delta \hat{I}_\beta(\omega') \rangle &= e^2 \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E + \hbar\omega) A_{\gamma\lambda}^{nm}(\beta; E + \hbar\omega, E + \hbar(\omega + \omega')) \cdot \\
&\quad \cdot \delta(-\hbar\omega - \hbar\omega') f_\lambda(E) [1 \mp f_\gamma(E + \hbar\omega)], \\
\langle \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \Delta \hat{I}_\beta(\omega') \rangle &= \frac{e^2}{\hbar} \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E + \hbar\omega) A_{\gamma\lambda}^{nm}(\beta; E + \hbar\omega, E + \hbar(\omega + \omega')) \cdot \\
&\quad \cdot f_\lambda(E) [1 \mp f_\gamma(E + \hbar\omega)] \delta(\omega + \omega'). \tag{4.67}
\end{aligned}$$

Contudo, precisamos ainda realizar o cálculo da quantidade com a posição dos observáveis invertida, com requerido pela equação (4.60). Para avaliar $\langle \Delta \hat{I}_\beta(\omega') \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \rangle$, basta que troquemos os índices dos terminais que estamos avaliando a correlação da expressão acima e as frequências angulares $\omega \rightarrow \omega'$, teremos

$$\begin{aligned}
\langle \Delta \hat{I}_\beta(\omega') \Delta \hat{I}_\alpha(\omega) \rangle &= \frac{e^2}{\hbar} \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE A_{\lambda\gamma}^{mn}(\beta; E, E + \hbar\omega') A_{\gamma\lambda}^{nm}(\alpha; E + \hbar\omega', E + \hbar(\omega + \omega')) \cdot \\
&\quad \cdot f_\lambda(E) [1 \mp f_\gamma(E + \hbar\omega')] \delta(\omega + \omega'). \tag{4.68}
\end{aligned}$$

Aplicando (4.67) e (4.68) em (4.60), observamos que a função delta está presente em ambos os lados, então, integramos a equação com respeito a ω' , temos, a expressão

$$\begin{aligned}
2\pi S_{\alpha\beta}(\omega) &= \frac{e^2}{2\hbar} \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E + \hbar\omega) A_{\gamma\lambda}^{nm}(\beta; E + \hbar\omega, E) f_\lambda(E) [1 \mp f_\gamma(E + \hbar\omega)] + \\
&\quad + A_{\lambda\gamma}^{nm}(\beta; E, E - \hbar\omega) A_{\gamma\lambda}^{mn}(\alpha; E - \hbar\omega, E) f_\lambda(E) [1 \mp f_\gamma(E - \hbar\omega)]. \tag{4.69}
\end{aligned}$$

Podemos fazer para o segundo termo um *shift* na energia de $\hbar\omega$, em seguida, fazer a substituição de índices $\lambda \leftrightarrow \gamma$ no segundo termo, então, podemos associar as matrizes-correntes e temos, finalmente,

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta}(\omega) &= \frac{e^2}{4\pi\hbar} \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E + \hbar\omega) A_{\gamma\lambda}^{nm}(\beta; E + \hbar\omega, E) \\
&\quad (f_\lambda(E) [1 \mp f_\gamma(E + \hbar\omega)] + f_\gamma(E + \hbar\omega) [1 \mp f_\lambda(E)]). \tag{4.70}
\end{aligned}$$

Essa é a muito prometida equação do ruído no formalismo de Büttiker.

Agora, nada mais natural que testar o resultado obtido. Vamos trabalhar com a expressão (4.70) em limites que já conhecemos. Primeiramente, para o caso de altas temperaturas $k_b T \gg \hbar\omega$, a dependência com ω pode ser ignorada, e as distribuições serão essencialmente iguais, então, teremos

$$S_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{\lambda\gamma mn} \int dE A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E) A_{\gamma\lambda}^{nm}(\beta; E, E) f [1 \mp f]. \tag{4.71}$$

Se atentamos para a distribuição f , vem que

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_b T}} \pm 1}, \\
\frac{\partial f}{\partial E} &= -\frac{e^{\frac{E-\mu}{k_b T}}}{k_b T} \frac{1}{\left(e^{\frac{E-\mu}{k_b T}} \pm 1\right)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial E} &= -\frac{1}{k_b T} \frac{1 \mp f}{f} f^2, \\
-k_b T \frac{\partial f}{\partial E} &= f(1 \mp f).
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Para as matrizes-corrente, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{mn\lambda\gamma} A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E) A_{\gamma\lambda}^{nm}(\beta; E, E) &= \sum_{mn\lambda\gamma} \left(\delta_{mn} \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\alpha\gamma} - \sum_k s_{\alpha\lambda, mk}^* s_{\alpha\gamma, kn} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\delta_{mn} \delta_{\beta\lambda} \delta_{\beta\gamma} - \sum_k s_{\beta\gamma, nk}^* s_{\beta\lambda, mk} \right), \\
\sum_{mn\lambda\gamma} A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E) A_{\gamma\lambda}^{nm}(\beta; E, E) &= 2 \sum_m \delta_{\alpha\beta} - \sum_{m,k} s_{\beta\alpha, mk} s_{\beta\alpha, km} + s_{\alpha\beta, mk} s_{\alpha\beta, km}, \\
\sum_{mn\lambda\gamma} A_{\lambda\gamma}^{mn}(\alpha; E, E) A_{\gamma\lambda}^{nm}(\beta; E, E) &= 2N_\alpha \delta_{\alpha\beta} - \text{Tr}(\mathbf{s}_{\beta\alpha} \mathbf{s}_{\beta\alpha} + \mathbf{s}_{\alpha\beta} \mathbf{s}_{\alpha\beta}),
\end{aligned} \tag{4.73}$$

onde utilizamos para o último termo direto o fato que

$$\begin{aligned}
\sum_{mn\lambda\gamma} \sum_{kk'} s_{\alpha\lambda, mk}^* s_{\alpha\gamma, kn} s_{\beta\gamma, nk'}^* s_{\beta\lambda, mk'} &= \sum_{\lambda\gamma} \sum_{k'} \left[\mathbf{s}_{\alpha\lambda}^\dagger \mathbf{s}_{\beta\lambda} \mathbf{s}_{\alpha\gamma}^\dagger \mathbf{s}_{\beta\gamma} \right]_{k'}, \\
\sum_{mn\lambda\gamma} \sum_{kk'} s_{\alpha\lambda, mk}^* s_{\alpha\gamma, kn} s_{\beta\gamma, nk'}^* s_{\beta\lambda, mk'} &= \sum_{\lambda\gamma} \text{Tr} \left[\mathbf{s}_{\alpha\lambda}^\dagger \mathbf{s}_{\beta\lambda} \mathbf{s}_{\alpha\gamma}^\dagger \mathbf{s}_{\beta\gamma} \right], \\
\sum_{mn\lambda\gamma} \sum_{kk'} s_{\alpha\lambda, mk}^* s_{\alpha\gamma, kn} s_{\beta\gamma, nk'}^* s_{\beta\lambda, mk'} &= \text{Tr} \left[\sum_{\lambda} \mathbf{s}_{\alpha\lambda}^\dagger \mathbf{s}_{\beta\lambda} \sum_{\gamma} \mathbf{s}_{\alpha\gamma}^\dagger \mathbf{s}_{\beta\gamma} \right], \\
\sum_{mn\lambda\gamma} \sum_{kk'} s_{\alpha\lambda, mk}^* s_{\alpha\gamma, kn} s_{\beta\gamma, nk'}^* s_{\beta\lambda, mk'} &= \text{Tr} [\mathbf{I}_\lambda \delta_{\alpha\beta} \mathbf{I}_\gamma \delta_{\alpha\beta}] = N_\alpha \delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Substituindo (4.72) e (4.73) em (4.71), temos

$$S_{\alpha\beta} = k_b T \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) (2N_\alpha \delta_{\alpha\beta} - \text{Tr}(\mathbf{s}_{\beta\alpha} \mathbf{s}_{\beta\alpha} + \mathbf{s}_{\alpha\beta} \mathbf{s}_{\alpha\beta})). \tag{4.75}$$

Aqui, observamos que a forma da integral é justamente a definição de condutância demonstrada em (4.30), assim, substituindo

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta} &= k_b T (G_{\alpha\beta} + G_{\beta\alpha}), \\
S_{\alpha\beta} &= 2k_b T G_{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{4.76}$$

onde utilizamos as relações de Onsager-Casimir (4.34), também demonstradas na secção 4.2. Como sabemos, a expressão (4.75) é o ruído de Nyquist-Johnson como podemos ver na expressão (4.36). Esse resultado já era esperado, uma vez que tomamos justamente o regime onde o ruído térmico predomina no sistema. Ainda sim, a expressão (4.70) já nos mostra que está bastante de acordo com o que foi estabelecido.

Agora, estudaremos a equação do ruído no regime oposto ao adotado logo acima: tomaremos o caso da temperatura nula. Para o caso do portador ser elétron, f_α será a distribuição de Fermi-Dirac², à temperatura nula, é dada pela função degrau

$$f_\alpha(E) = \theta(\mu_\alpha - E). \quad (4.77)$$

E, tomaremos $\omega = 0$ em (4.70) e veremos as conseqüências dessas considerações.

Quando procedemos com o somatório de λ e γ em (4.70), observamos que haverão termos onde $\gamma = \lambda$ de tal sorte que recaímos no caso do ruído térmico, como estamos à temperatura nula, esses termos desaparecerão da equação do ruído, como podemos constatar por (4.76), o que já era esperado dado o regime. Assim, a expressão do ruído só haverá termos tal que $\lambda \neq \gamma$ e os termos do produto das matrizes-correntes serão definidos por (4.74), então, teremos

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}(0) &= \frac{e^2}{4\pi\hbar} \sum_{\lambda,\gamma} \int dE \text{Tr} \left[\mathbf{s}_{\alpha\lambda}^\dagger \mathbf{s}_{\beta\lambda} \mathbf{s}_{\alpha\gamma}^\dagger \mathbf{s}_{\beta\gamma} \right] \cdot \\ &\quad (f_\lambda(E)[1 - f_\gamma(E)] + f_\gamma(E)[1 - f_\lambda(E)]). \\ S_{\alpha\beta}(0) &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{\lambda,\gamma} \int dE \text{Tr} \left[\mathbf{s}_{\alpha\lambda}^\dagger \mathbf{s}_{\beta\lambda} \mathbf{s}_{\alpha\gamma}^\dagger \mathbf{s}_{\beta\gamma} \right] (f_\lambda(E)[1 - f_\gamma(E)]), \end{aligned} \quad (4.78)$$

onde utilizamos a propriedade cíclica do traço e renomeando os índices $\lambda \leftrightarrow \gamma$. Aqui, para facilitar análise, iremos considerar o caso *standard*. Assim, procedemos com o somatório, teremos

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}(0) &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int dE \left\{ \text{Tr} \left[\mathbf{s}_{\alpha L}^\dagger \mathbf{s}_{\beta L} \mathbf{s}_{\alpha R}^\dagger \mathbf{s}_{\beta R} \right] (f_L(E)[1 - f_R(E)] + \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr} \left[\mathbf{s}_{\alpha R}^\dagger \mathbf{s}_{\beta R} \mathbf{s}_{\alpha L}^\dagger \mathbf{s}_{\beta L} \right] (f_R(E)[1 - f_L(E)]) \right\}, \\ S_{\alpha\beta}(0) &= \frac{e^2}{\pi\hbar} \int dE \left\{ \text{Tr} \left[\mathbf{s}_{\alpha L}^\dagger \mathbf{s}_{\beta L} \mathbf{s}_{\alpha R}^\dagger \mathbf{s}_{\beta R} \right] (f_L(E)[1 - f_R(E)]) \right\}, \end{aligned}$$

onde na última passagem utilizamos, novamente, a propriedade cíclica do traço. Como estamos à temperatura zero, como já comentamos, a distribuição será dada por (4.77), se tomarmos que $\mu_L > \mu_R$, temos que $f_L f_R = f_R$, uma vez que o degrau de f_R está atrás do degrau de f_L , assim, os termos a frente de f_R irão se anular, e isso acarretará em

$$S_{\alpha\beta}(0) = \frac{e^2}{\pi\hbar} \int dE \text{Tr} \left[\mathbf{s}_{\alpha L}^\dagger \mathbf{s}_{\beta L} \mathbf{s}_{\alpha R}^\dagger \mathbf{s}_{\beta R} \right] (f_L - f_R),$$

vamos considerar o caso $\alpha = \beta = R$, vem

$$\begin{aligned} S_{RR}(0) &= \frac{e^2}{\pi\hbar} \int dE \text{Tr} \left[\mathbf{s}_{RL}^\dagger \mathbf{s}_{RL} \mathbf{s}_{RR}^\dagger \mathbf{s}_{RR} \right] (f_L - f_R), \\ S_{RR}(0) &= \frac{e^2}{\pi\hbar} \int dE \text{Tr} \left[\mathbf{s}_{RL}^\dagger \mathbf{s}_{RL} (\mathbf{I}_L - \mathbf{s}_{RL}^\dagger \mathbf{s}_{RL}) \right] (f_L - f_R), \end{aligned}$$

onde utilizamos o vínculo da unitariedade da matriz de espalhamento do sistema. Como estabelecemos, o fluxo ocorre da esquerda para a direita, se considerarmos o sistema como um processo de Poisson, temos que a probabilidade de transmissão é muito pequena, então, podemos negligenciar o termo do parêntese e finalmente, observamos que \mathbf{s}_{RL} é o próprio bloco de transmissão, assim tomamos $\mathbf{s}_{RL} = \mathbf{t}$ e temos

$$S_{RR}(0) = \frac{e^2}{\pi\hbar} \int dE \text{Tr} \left(\mathbf{t}^\dagger \mathbf{t} \right) (f_L - f_R). \quad (4.79)$$

Se compararmos a expressão acima com (4.25), obteremos o resultado

$$S_{RR}(0) = 2e \langle \hat{I}_L \rangle, \quad (4.80)$$

²Para o caso de bósons, discutir sobre a distribuição é mais complicado, uma vez que existe a transição para a condensação de Bose-Einstein.

assim, temos que o resultado (4.80) é, precisamente, o ruído de disparo (4.46), como definimos anteriormente. Esse resultado, embora formidável, já era esperado: quando eliminamos o ruído térmico e tomamos a frequência do pulso tendendo à zero, estabelecemos que o nosso sinal se reduz a 1 elétron, então, quando tomamos nossa estrutura como um processo de Poisson (no caso, um termo-emissor), obteremos naturalmente o resultado de Schottky. Por essa razão, a expressão (4.78) representa a equação geral para o ruído de disparo de um sistema multiterminal e, como já esperado, está sempre presente para qualquer sistema.

Os resultados obtidos, apesar de forma fatídica, mostram-nos o quão poderoso é o formalismo de Büttiker: derivamos 2 ruídos comuns encontrados em contextos distintos com apenas um formalismo. Observamos que a expressão (4.70) carrega em si quase todas as quantidades necessárias para descrever o sistema: temos a forma da distribuição dos reservatórios dados pela função f , temos a informação do ponto quântico e forma como os terminais se correlacionam dado pelos elementos da matriz-corrente $A_{\lambda\gamma}^{m,n}$. Além disso, derivamos outros resultados fundamentais já estabelecidos na literatura como a fórmula de Landauer e as relações de Onsager-Casimir. Obviamente, poderíamos explorar indefinidamente outros tipos de ruídos derivados à partir desse formalismo, contudo, só estamos realmente interessados no conceito de ruído em sua forma mais completa atualmente conhecida, condição essa que, na nossa concepção, é alcançada pelo formalismo de Büttiker. Por essa razão, tentamos ocultar minimamente tanto passagens algébricas como arcabouço teórico, a fim de que nossa discussão seja autocontida.

O formalismo de Büttiker contempla uma física muito profunda e possui um caráter genérico e bastante laborioso, como pudemos perceber ao derivar 2 expressões para o ruído que derivamos rapidamente na seção anterior. Para sistemas mais complexos (sistemas bidimensionais; por exemplo) o formalismo exigirá mais considerações e os cálculos, mais cuidado. E é nesse ponto em que apostamos nas nossas expressões para o ruído. As equações que propomos não são mais genéricas que a de Büttiker, mas possuem as características de que o cálculo é realizado de forma sistemática e diretamente calculado à partir das entradas da matriz de espalhamento. Contudo, não diferindo muito do formalismo de Büttiker, as expressões do ruído aumentam significativamente a medida que aumenta-se o número de terminais, embora isso seja contornável com o desenvolvimento de um simples programa para realizar tais cálculos (como o Maple, por exemplo). O único vínculo considerado no desenvolvimento do método é a unitariedade da matriz de espalhamento. Outra vantagem das expressões que derivaremos é que a natureza da partícula é contemplada pelas equações explicitamente, desnecessitando o uso de funções de distribuições.

Após discutir tais tópicos até aqui trabalhados nesta dissertação, estamos minimamente aptos a obter as funções de correlações, desenvolvendo as discussões com uma certa eloquência, haja vista que já temos estabelecido qual regime trabalha-se na física mesoscópica, o formalismo da matriz de espalhamento caracterizando o ponto quântico onde acoplaremos os terminais que propagarão as partículas e, finalmente, as expressões para o ruído com as mesmas interpretações físicas comentadas neste capítulo. No fim, aplicaremos as funções de correlação

Capítulo 5

Equações das Correlações para um sistema multiterminal.

Como pode-se perceber em vários momentos da dissertação, tentamos contextualizar o nosso estudo direcionando o que está sendo tratado para o nosso problema de interesse: o estudo da simetria PT em sistemas bidimensionais.

No capítulo 4, o caso unidimensional foi trabalhado à partir da emitância da cavidade, dessa forma, pôde-se avaliar quando havia a quebra de simetria ajustando o parâmetro que bombeava (aniquilava) as partículas incidentes. No caso bidimensional mais simples, montamos um sistema com 4 terminais, possuidores de simetria PT cada, acoplados a um espelho. Tal como no capítulo 3, também estamos interessados no estudo desse caso, contudo, diferentemente como foi adotado no problema unidimensional, acreditamos que esse problema pode ser trabalhado à partir das funções de correlações ou, pelo teorema de Wiener-Khintchine, o ruído do sistema e, então, com o conhecimento do capítulo anterior, saberemos que tipo de ruído estamos lidando quando o formalismo for desenvolvido.

Vamos derivar essa expressão para o caso de mais terminais, utilizando procedimentos da segunda quantização, para em seguida, aplicá-lo para o caso supracitado. Primeiramente, vamos encontrar os estados de entrada e saída do problema.

5.1 Estados de *input* e *output*

Na introdução, apresentamos o experimento Hanbury Brown-Twiss (figura 1.7), onde temos a criação de duas partículas de diferentes estados em cada guia (1 e 2) que leva ao ponto quântico. Após interagir com o mesmo, calcula-se a probabilidade de ambas as partículas surgirem em um guia e em guias diferentes (3 e 4). Observamos que, no experimento, desconsidera-se a probabilidade da partícula retornar para 1 e 2, ou mesmo criá-las nos guias 3 e 4. Contudo, é possível encontrar todos os estados possíveis de 2 partículas ao incidir em qualquer ponto quântico partindo de qualquer terminal, quer em guias diferentes, quer no mesmo guia.

Assumindo o conceito de “terminal” do caso *standard*, reservatório e guias, à temperatura zero, é sabido que em um sistema multiterminal aplicado ao problema de espalhamento é dado pela equação

$$B = SA.$$

Contudo, tomaremos a relação linear onde as amplitudes de *input* são escritas em termos do *output*, então, supomos a relação

$$A = SB, \tag{5.1}$$

essa notação sugere que os índices das entradas de S sejam organizados inversamente a como foi estabelecido, isto é, $s_{i \rightarrow j}$, com a flecha denotando o espalhamento da partícula do canal i para o canal j . No problema trabalhado, cada terminal possuirá somente 1 canal, fazendo com que, no nosso contexto, guias e canais referem-se essencialmente a mesma coisa. No problema de espalhamento, isso acarretará que as amplitudes de entrada de cada terminal se relacionarão linearmente com os outros

terminais por uma amplitude de saída. Assim, só haverá uma amplitude que acompanha o coeficiente de reflexão, os demais serão todos de transmissão, então, teremos

$$a_\alpha = r_{\alpha\alpha}b_\alpha + \sum_{a \neq \alpha} t_{\alpha a}b_a. \quad (5.2)$$

Onde adotamos os mesmos índices gregos para contemplar os terminais, como no capítulo anterior, e índice latino para soma dos índices que somam todo o resto dos terminais. De forma análoga ao formalismo de Büttiker, propomos a solução da equação de Schrödinger de cada terminal dada pelo operador de campo definido no espaço de Fock

$$\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger = \int d\vec{r}_\alpha \psi_i(\vec{r}_\alpha) \hat{a}^\dagger(\vec{r}_\alpha) \quad (5.3)$$

onde \hat{a}^\dagger é o operador de criação da partícula no terminal α . Estamos expressando o operador (5.3) de tal forma que quando o aplicamos em um estado do terminal α , teremos como resultado a posição \vec{r}_α do elétron neste terminal, para o caso de bósons, será descrito pela frequência de emissão. Embora permaneceremos a utilizar \vec{r}_α , sempre devemos atentar qual variável, que dependerá da natureza da partícula em questão, constituirá o operador de campo.

Agora, definiremos a álgebra que utilizaremos para contemplar a natureza da partícula incidente. Como estamos considerando o caso padrão, já é conhecida a álgebra dos comutadores de \hat{a}^\dagger , tomando tais comutadores e estendendo para $\hat{\psi}^\dagger$, temos

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right]_\epsilon = 1, \quad (5.4)$$

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \right]_\epsilon = \left[\hat{\psi}_{\alpha j}, \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right]_\epsilon^* = I, \quad (5.5)$$

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\beta j} \right]_\epsilon = \left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\beta i} \right]_\epsilon = 0, \quad (5.6)$$

onde I é chamado de integral de *overlap*, que é definida por

$$I = \int d\vec{r}_\alpha \psi_i^*(\vec{r}_\alpha) \psi_j(\vec{r}_\alpha). \quad (5.7)$$

Essa integral contempla o grau de interferência entre os estados das partículas no mesmo terminal[15, 67]. E as demais relações de comutação são zero. Aqui, tomamos os comutadores definidos pelo valor de $\epsilon = \pm 1$, onde define os comutadores

$$[A, B]_\epsilon = AB + \epsilon BA.$$

Quando $\epsilon = 1$, estamos considerando que os operadores obedecem a estatística para férmions, para $\epsilon = -1$, é o caso para bósons. Os comutadores (5.4)-(5.6) estão todos demonstrados detalhadamente no Apêndice A.

Agora, com os operadores e a álgebra definida, iremos construir o estado de Fock de duas partículas do sistema. Assim, devemos contemplar o caso para quando o estado inicial é composto pelas duas partículas no mesmo terminal, e em terminais diferentes. Como em cada terminal existe somente 1 canal, o operador de campo (5.3) atuando no estado de vácuo $|0\rangle$ irá criar a partícula no determinado terminal. Então, temos os estados de Fock normalizados[66]

$$|\alpha\alpha\rangle = [1 - \epsilon|I|^2]^{-1/2} \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger |0\rangle, \quad (5.8)$$

$$|\alpha\beta\rangle_\pm = [2(1 \pm |I|^2)]^{-1/2} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (5.9)$$

onde a normalização é demonstrada no Apêndice B. É importante comentar que nosso modelo não leva em consideração o spin, ou helicidade, das partículas, pois estamos fixando a direção daqueles na mesma direção em todos os canais, sendo os estados acima (5.9) consequência da indistinguibilidade das partículas incidentes. Uma pergunta que pode eventualmente surgir é a construção de um estado

simétrico para férmions, por exemplo. Isso não é problema, pois, como veremos mais adiante, o próprio formalismo não vai permitir que estados incidentes fermiônicos simétricos, por exemplo, sejam compostos por estados de saída que descrevem férmions no mesmo terminal não trazendo nenhuma contradição com condições impostas pelas bases da mecânica quântica (no caso, o princípio de exclusão de Pauli). Também deixamos implícito que as partículas, por definição, foram emitidas com uma diferença de tempo, portanto, elas nunca terão a mesma função de onda, isto é, para o nosso problema, a mesma posição(frequência). Isso é percebido quando atentamos para a integral de *overlap*, pois, $I < 1$, caso contrário, os estados acima não podem ser normalizados. Esse fato vai permitir que calculemos a correlação entre os estados incidentes.

Agora, observando a relação (5.2), podemos sugerir que o operador (5.3) pode ser uma composição dos operadores dos outros terminais. Tomamos uma relação linear entre as partes de tal sorte que é dada pelas entradas da matriz de espalhamento

$$\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger = r_{\alpha\alpha}\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger + \sum_a^N t_{\alpha a}\hat{\psi}_{a i}^\dagger, \quad (5.10)$$

onde a condição do somatório é $a \neq \alpha$ e N é o número total de terminais. Vamos, primeiramente, ver o efeito disso em um estado com as partículas no mesmo terminal. Substituindo a equação (5.10) em (5.8), temos

$$\begin{aligned} |\alpha\alpha\rangle &= [1 - \epsilon|I|^2]^{-1/2} \left(r_{\alpha\alpha}\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger + \sum_{a \neq \alpha}^N t_{\alpha a}\hat{\psi}_{a i}^\dagger \right) \left(r_{\alpha\alpha}\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger + \sum_{a' \neq \alpha}^N t_{\alpha a'}\hat{\psi}_{a' j}^\dagger \right) |0\rangle, \\ &= [1 - \epsilon|I|^2]^{-1/2} \left[r_{\alpha\alpha}^2 \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger + r_{\alpha\alpha} \sum_{a \neq \alpha}^N t_{\alpha a} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger + \hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \right) + \sum_{a \neq \alpha}^N \sum_{a' \neq \alpha}^N t_{\alpha a} t_{\alpha a'} \hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{a' j}^\dagger \right] |0\rangle. \end{aligned}$$

Atentando para o 3º somatório, percebemos que há termos quadráticos em $a = a'$ que tornam o somatório redundante. Para os termos onde $a \neq a'$, podemos fixar, por exemplo, a e variar a' , em seguida, fixar a' e variar a . Isso permite que possamos renomear $a' \rightarrow a$ com a inserção de um parâmetro n que tem apenas a função de variar o índice do terminal, sem relação com o mesmo.

Essa análise serve para mostrarmos que podemos reescrever o 3º somatório na seguinte forma

$$\sum_{a \neq \alpha}^N \sum_{a' \neq \alpha}^N t_{\alpha a} t_{\alpha a'} \hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{a' j}^\dagger = \sum_{a \neq \alpha}^N \left\{ t_{\alpha a}^2 \hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger + \sum_n^{N-a} t_{\alpha a} t_{\alpha a+n} \left(\hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{a+n j}^\dagger + \hat{\psi}_{a+n i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger \right) \right\}, \quad (5.11)$$

onde introduzimos a nova variável n , avaliada de 1 até $N - a$. Observamos que não precisamos nos preocupar com os coeficientes de ordem maior acometida pelo crescimento de n (por exemplo, o coeficiente t_{15} , no caso de um sistema com 4 terminais), porque esses termos representarão estados que simplesmente não existem para o nosso problema. Outro ponto importante a ser notado é que poderíamos tomar o limite superior do somatório de n para infinito, mas isso não é adequado fisicamente, porque devemos sempre manter em mente que estamos em um regime que exige um número finito e pequeno de terminais, caso contrário, estaríamos desconsiderando o regime mesoscópico. Outra razão é que variando livremente o parâmetro n traria dificuldades computacionais como veremos na próxima secção.

Agora, retomando o problema, substituímos a equação acima no problema inicial

$$\begin{aligned}
|\alpha\alpha\rangle &= [1 - \epsilon|I|^2]^{-1/2} \left[r_{\alpha\alpha}^2 \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger + r_{\alpha\alpha} \sum_{a \neq \alpha} t_{\alpha a} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger + \hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a \neq \alpha} \left\{ t_{\alpha a}^2 \hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger + \sum_n t_{\alpha a} t_{\alpha a+n} \left(\hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{a+n j}^\dagger + \hat{\psi}_{a+n i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger \right) \right\} \right] |0\rangle, \\
&= [1 - \epsilon|I|^2]^{-1/2} \left[r_{\alpha\alpha}^2 \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger + r_{\alpha\alpha} \sum_{a \neq \alpha} t_{\alpha a} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger - \epsilon \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{a i}^\dagger \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a \neq \alpha} \left\{ t_{\alpha a}^2 \hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger + \sum_n t_{\alpha a} t_{\alpha a+n} \left(\hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{a+n j}^\dagger - \epsilon \hat{\psi}_{a j}^\dagger \hat{\psi}_{a+n i}^\dagger \right) \right\} \right] |0\rangle, \\
&= r_{\alpha\alpha}^2 |\alpha\alpha\rangle + \sqrt{2} r_{\alpha\alpha} \sum_{a \neq \alpha} t_{\alpha a} |\alpha a\rangle_{-\epsilon} + \sum_{a \neq \alpha} \left\{ t_{\alpha a}^2 |aa\rangle + \sqrt{2} \sum_n t_{\alpha a} t_{\alpha a+n} |aa+n\rangle_{-\epsilon} \right\}, \\
|\alpha\alpha\rangle &= r_{\alpha\alpha}^2 |\alpha\alpha\rangle + \sqrt{2} r_{\alpha\alpha} t_{\alpha a} |\alpha a\rangle_{-\epsilon} + t_{\alpha a}^2 |aa\rangle + \sqrt{2} t_{\alpha a} t_{\alpha a+n} |aa+n\rangle_{-\epsilon}, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Aqui, omitimos os somatórios, tendo apenas o cuidado de sempre lembrar que $a \neq \alpha$ e que n não representa um terminal, sendo apenas um parâmetro de variação. Outro ponto importante é que devemos tomar cuidado para não contemplar outros estados já existentes na expressão, por exemplo, se fizermos $\alpha = 3$, o último estado pode repetir os estados do segundo termo, cometendo um erro no peso correto atribuído aos estados.

É interessante notar o caráter genérico do cálculo: calculamos os estados que informam as amplitudes de probabilidade para N terminais ligados ao ponto quântico! E manteremos essa generalidade do nosso cálculo até o fim.

Agora, aplicando (5.10) em (5.9), temos

$$\begin{aligned}
|\alpha\beta\rangle_{\pm} &= [2(1 \pm |I|^2)]^{-1/2} \left[\left(r_{\alpha\alpha} \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger + \sum_{a \neq \alpha} t_{\alpha a} \hat{\psi}_{a i}^\dagger \right) \left(r_{\beta\beta} \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger + \sum_{b \neq \beta} t_{\beta b} \hat{\psi}_{b j}^\dagger \right) \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \left(r_{\alpha\alpha} \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger + \sum_{a \neq \alpha} t_{\alpha a} \hat{\psi}_{a j}^\dagger \right) \left(r_{\beta\beta} \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger + \sum_{b \neq \beta} t_{\beta b} \hat{\psi}_{b i}^\dagger \right) \right] |0\rangle, \\
|\alpha\beta\rangle_{\pm} &= [2(1 \pm |I|^2)]^{-1/2} \left[r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \right) + r_{\alpha\alpha} \sum_{b \neq \beta} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{b j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{b i}^\dagger \right) \right. \\
&\quad \left. r_{\beta\beta} \sum_{a \neq \alpha} t_{\alpha a} \left(\hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{a j}^\dagger \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \right) + \sum_{a \neq \alpha} \sum_{b \neq \beta} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{b j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{a j}^\dagger \hat{\psi}_{b i}^\dagger \right) \right] |0\rangle.
\end{aligned}$$

Observamos que, embora exista uma restrição para a e b nos somatórios; com α e β respectivamente, não há restrição do contrário, isto é, $a = \beta$ e $b = \alpha$. Assim, tomando o primeiro somatório, temos

$$\begin{aligned}
r_{\alpha\alpha} \sum_{b \neq \beta} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{b j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{b i}^\dagger \right) &= r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right) + r_{\alpha\alpha} \sum_{\substack{b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{b j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{b i}^\dagger \right), \\
r_{\alpha\alpha} \sum_{b \neq \beta} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{b j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{b i}^\dagger \right) &= r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger + r_{\alpha\alpha} \sum_{\substack{b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{b j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{b i}^\dagger \right),
\end{aligned}$$

Analogamente, para o 2º somatório, vem

$$r_{\beta\beta} \sum_{a \neq \alpha} t_{\alpha a} \left(\hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{a j}^\dagger \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \right) = r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger + r_{\beta\beta} \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} t_{\alpha a} \left(\hat{\psi}_{a i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{a j}^\dagger \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \right).$$

Nossa intenção aqui é fazer com que a e b tenham as mesmas condições a fim de reduzir o número de parâmetros para descrever o número de terminais, assim, façamos o mesmo para o 3º somatório,

$$\begin{aligned}
\sum_{a \neq \alpha} \sum_{b \neq \beta} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{bj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{bi}^\dagger \right) &= \sum_{a \neq \alpha} t_{\alpha a} t_{\beta \alpha} \left(\hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right) + \\
&+ \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{bj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{bi}^\dagger \right), \\
&= t_{\alpha \beta} t_{\beta \alpha} \left(\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right) + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} t_{\alpha a} t_{\beta \alpha} \left(\hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right) + \\
&+ \sum_{\substack{b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\alpha \beta} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \hat{\psi}_{bj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \hat{\psi}_{bi}^\dagger \right) + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta \\ b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{bj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{bi}^\dagger \right).
\end{aligned}$$

Agora, substituindo as 3 relações acima em $|\alpha\beta\rangle_\pm$, vem,

$$\begin{aligned}
|\alpha\beta\rangle_\pm &= [2(1 \pm |I|^2)]^{-1/2} \left[r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \right) + r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger + \right. \\
&+ r_{\alpha\alpha} \sum_{\substack{b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{bj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{bi}^\dagger \right) + r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger + r_{\beta\beta} \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} t_{\alpha a} \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \right) + \\
&+ t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha} \left(\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right) + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} t_{\alpha a} t_{\beta \alpha} \left(\hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right) + \\
&+ \left. \sum_{\substack{b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\alpha \beta} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \hat{\psi}_{bj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \hat{\psi}_{bi}^\dagger \right) + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta \\ b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{bj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{bi}^\dagger \right) \right] |0\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, observamos que o 1º termo relaciona-se com o 6º, abrindo mão das propriedades de comutação. Como agora todos os índices dos somatórios possuem as mesmas condições, podemos igualar $a = b$ (menos o último somatório que possui termos cruzados), e, pelas mesmas relações de comutação, juntamos o 3º com o 7º e o 5º com o 8º termo, assim, temos a simplificação.

$$\begin{aligned}
|\alpha\beta\rangle_\pm &= [2(1 \pm |I|^2)]^{-1/2} \left[(r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha}) \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \right) + r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger + \right. \\
&+ r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} (r_{\alpha a} t_{\beta a} \mp \epsilon t_{\alpha a} t_{\beta a}) \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{aj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{ai}^\dagger \right) + \\
&+ \left. \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} (r_{\beta\beta} t_{\alpha a} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta a}) \left(\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \hat{\psi}_{aj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \hat{\psi}_{ai}^\dagger \right) + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta \\ b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{bj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{bi}^\dagger \right) \right] |0\rangle.
\end{aligned}$$

Notamos que podemos construir os estados de *output*, a menos do último termo. Para o somatório duplo, se utilizamos o mesmo raciocínio da primeira identidade, obtemos uma equação mais geral que (5.11), tal que

$$\sum_{a,b} t_{\alpha a} t_{\beta b} \hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{bj}^\dagger = \sum_a \left[t_{\alpha a} t_{\beta a} \hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{aj}^\dagger + \sum_n \left(t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{a+nj}^\dagger + t_{\alpha a+n} t_{\beta a} \hat{\psi}_{a+ni}^\dagger \hat{\psi}_{aj}^\dagger \right) \right]. \quad (5.13)$$

Observando que fazendo $\beta = \alpha$, retomamos a equação (5.11). Ainda, n possui a mesma liberdade da

primeira equação. Agora, substituímos em cada parcela do somatório duplo

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{bj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{bi}^\dagger \right) &= \sum_a \left[t_{\alpha a} t_{\beta a} \hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{aj}^\dagger + \sum_n \left(t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{a+nj}^\dagger + t_{\alpha a+n} t_{\beta a} \hat{\psi}_{a+ni}^\dagger \hat{\psi}_{aj}^\dagger \right) \right] \\
&\pm \sum_a \left[t_{\alpha a} t_{\beta a} \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{ai}^\dagger + \sum_n \left(t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{a+ni}^\dagger + t_{\alpha a+n} t_{\beta a} \hat{\psi}_{a+nj}^\dagger \hat{\psi}_{ai}^\dagger \right) \right], \\
&= \sum_a \left[t_{\alpha a} t_{\beta a} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{aj}^\dagger + \sum_n (t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \mp \epsilon t_{\alpha a+n} t_{\beta a}) \left(\hat{\psi}_{ai}^\dagger \hat{\psi}_{a+nj}^\dagger \pm \hat{\psi}_{aj}^\dagger \hat{\psi}_{a+ni}^\dagger \right) \right].
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima no somatório duplo, temos, então

$$\begin{aligned}
|\alpha\beta\rangle_{\pm} &= [2(1 \pm |I|^2)]^{-1/2} \left[(r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha}) \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \right) + r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger + \right. \\
&\quad + r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} (r_{\alpha a} t_{\beta a} \mp \epsilon t_{\alpha a} t_{\beta a}) \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{a j}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right) + \\
&\quad + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} (r_{\beta\beta} t_{\alpha a} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta a}) \left(\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \hat{\psi}_{a i}^\dagger \right) + \sum_a \left[t_{\alpha a} t_{\beta a} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{a j}^\dagger \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_n (t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \mp \epsilon t_{\alpha a+n} t_{\beta a}) \left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{a+n j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{a j}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right) \right] \right] |0\rangle. \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Como podemos ver, conseguimos expressar as entradas em termos dos estados conhecidos a menos dos operadores que acompanham o termo $(1 \mp \epsilon)$, pois a constante de normalização difere de (5.8), para tanto, fazemos, por exemplo, para o termo

$$\begin{aligned}
\frac{(1 \mp \epsilon)}{\sqrt{2(1 \pm |I|^2)}} r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger |0\rangle &= (1 \mp \epsilon) \sqrt{\frac{1 - \epsilon|I|^2}{2(1 \pm |I|^2)}} r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} |\alpha\alpha\rangle, \\
\frac{(1 \mp \epsilon)}{\sqrt{2(1 \pm \epsilon|I|^2)}} r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger |0\rangle &= \mathcal{I}_\epsilon^\pm \sqrt{(1 \mp \epsilon)} r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} |\alpha\alpha\rangle,
\end{aligned}$$

onde introduzimos a quantidade

$$\mathcal{I}_\epsilon^\pm = \sqrt{\frac{1 - \epsilon|I|^2}{(1 \pm |I|^2)}} \tag{5.15}$$

e utilizamos a propriedade

$$\begin{aligned}
(1 \mp \epsilon)^2 &= 1 \mp 2\epsilon + 1 = 2(1 \mp \epsilon), \\
(1 \mp \epsilon) &= \sqrt{2(1 \mp \epsilon)}.
\end{aligned}$$

Com a consideração acima, substituímos diretamente as expressões (5.8) e (5.9) em (5.14) e obtemos, finalmente

$$\begin{aligned}
|\alpha\beta\rangle_{\pm} &= \mathcal{I}_\epsilon^\pm \sqrt{(1 \mp \epsilon)} \left(r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} |\alpha\alpha\rangle + r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} |\beta\beta\rangle + t_{\alpha a} t_{\beta a} |aa\rangle \right) + \\
&\quad + (r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha}) |\alpha\beta\rangle_{\pm} + (r_{\alpha\alpha} t_{\beta a} \mp \epsilon t_{\alpha a} t_{\beta\alpha}) |\alpha a\rangle_{\pm} + \\
&\quad + (r_{\beta\beta} t_{\alpha a} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta a}) |\beta a\rangle_{\pm} + (t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \mp \epsilon t_{\alpha a+n} t_{\beta a}) |aa+n\rangle_{\pm}. \tag{5.16}
\end{aligned}$$

onde, novamente, omitimos o somatórios. Assim, sempre chamamos a atenção que o índice a soma o terminais diferentes dos terminais de entrada e n o parâmetro que varia livremente para contemplar os outros terminais. Com os estados (5.11) e (5.16), temos todos os estados de *input* de Fock possíveis para o sistema bidimensional em termos dos estados *output*, apenas supondo a superposição linear entre os operadores de campo.

Notamos que, como comentamos no início do desenvolvimento, um estado simétrico fermiônico não é descrito por estados com os férmions no mesmo terminal, assegurando-nos do princípio da exclusão.

O leitor pode questionar a existência de estados de saída com os férmions no mesmo terminal para estados de entrada antissimétricos. Apenas lembramos que os estados em que as partículas estão no mesmo terminal são formados por funções de onda diferentes, fato esse garantido por I , novamente não trazendo nenhuma contradição.

Antes de prosseguirmos, é adequado que recuperemos os estados da referência [66], para assegurarmos que estamos no caminho certo. Para tanto, este considera 4 terminais ligados a um espelho ideal de tal forma que as partículas em 1 e(ou) 2 só podem ser transmitidas para os terminais 3 e(ou) 4. Experimentalmente, isso significa que os terminais 1 e 2 são terminais de emissão e 3 e 4 são de detecção. Dado isso, para o lado esquerdo temos $\alpha = 1, 2$ e qualquer entrada da matriz que contemple a transmissão da partícula para um dos terminais de emissão será nulo ($r_{\alpha\alpha} = t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha} = 0$), posto isso, temos para 2 partículas no mesmo terminal

$$|\alpha\alpha\rangle = t_{\alpha\alpha}^2 |aa\rangle + \sqrt{2}t_{\alpha\alpha}t_{\alpha\alpha+n} |aa+n\rangle_{-\epsilon}. \quad (5.17)$$

Para 2 partículas em terminais diferentes, vem

$$|\alpha\beta\rangle_{\pm} = \mathcal{I}_{\epsilon}^{\pm} \sqrt{(1 \mp \epsilon)} t_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} |aa\rangle + (t_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha+n} \mp \epsilon t_{\alpha\alpha+n} t_{\beta\alpha}) |aa+n\rangle_{\pm}. \quad (5.18)$$

Consideramos, agora, que a transmissão do terminal 1(2) \rightarrow 3(4) é dada pelo fator r e para 1(2) \rightarrow 4(3) é dada pelo fator t , assim teremos

$$|11\rangle = r^2 |33\rangle + t^2 |44\rangle + \sqrt{2}rt |34\rangle_{-\epsilon}, \quad (5.19)$$

$$|22\rangle = t^2 |33\rangle + r^2 |44\rangle + \sqrt{2}rt |34\rangle_{-\epsilon}, \quad (5.20)$$

$$|12\rangle_{+} = \mathcal{I}_{\epsilon}^{+} \sqrt{(1 - \epsilon)} (rt |33\rangle + rt |44\rangle) + (r^2 - \epsilon t^2) |34\rangle_{+}, \quad (5.21)$$

$$|12\rangle_{-} = \mathcal{I}_{\epsilon}^{+} \sqrt{(1 + \epsilon)} (rt |33\rangle + rt |44\rangle) + (r^2 + \epsilon t^2) |34\rangle_{-}, \quad (5.22)$$

quando aplicamos a natureza da partícula à partir de ϵ e observando que $\mathcal{I}_{\mp}^{\pm} = 1$, retomamos todas os estados encontrados na referência supracitada. Por ora, conseguimos mostrar que a referência que inspira nosso cálculo é um caso bem particular do nosso resultado. Outro ponto importante é que as considerações acima nos remetem imediatamente ao experimento de Hanbury Brown-Twiss (vide figura 1.7), fato esse que nos traz segurança que considerações vindouras representem o resultado correto, uma vez que esse experimento é muito bem estabelecido na literatura da ótica quântica, da mesma forma que argumentamos na confiabilidade da teoria quando construímos o formalismo de Büttiker. Contudo, é importante observar que não há relação linear que conecta os estados de entrada e saída, como pode-se ver pelas expressões gerais obtidas. Isso acontece porque os estados que estamos trabalhando são compostos por 2 partículas, sendo claro que não há relação linear entre as entradas e saídas dos estados de Fock destas, outrossim, a relação linear dada pela matriz de espalhamento foi assumida para uma das partículas incidentes, daí a importância da integral de *overlap* na expressão: ela informa o peso correto para o estado extra que surge quando se considera o caso de 2 partículas. Outrossim, a principal vantagem do resultado acima é que este nos informa imediatamente a probabilidade de se obter um determinado estado de saída quando projeta-se o estado de entrada no mesmo, independentemente da natureza da partícula. Esse fato vai nos permitir que calculemos as correlações de forma imediata, objeto de estudo da próxima secção.

5.2 As Funções de Correlação.

Nesta secção utilizaremos o resultado geral acima a fim de obter a função de correlação. Como dissemos anteriormente, está implícito que as partículas foram emitidas em tempos distintos, condição essa necessária quando se está interessado em calcular a correlação entre as partículas incidentes. Isso também foi assumido no capítulo anterior quando definimos a função de correlação $S(t - t')$.

Para calcular as correlações, construímos um estado $|input\rangle$ tal que será projetado no estado de saída desejado, e a probabilidade será dada pelo módulo ao quadrado da amplitude encontrada, assim, temos

$$|\langle\alpha\alpha|input\rangle|^2 = (\Delta n_{\alpha})^2 \quad (5.23)$$

$$|_{+}\langle\alpha\beta|input\rangle|^2 + |_{-}\langle\alpha\beta|input\rangle|^2 = \langle n_{\alpha} n_{\beta} \rangle \quad (5.24)$$

onde o lado direito de (5.23) e (5.24) representam as mesmas funções de correlação definidas no capítulo anterior no formalismo de Büttiker. Para representarmos o estado $|input\rangle$, tomaremos um aparato que lance uma partícula no terminal α com uma função de onda ψ_i e outra em β com uma função de onda ψ_j , fazemos isso através de (5.9), onde rearranjamos os estados simétricos e assimétricos de tal forma que

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger |0\rangle &= \frac{1}{2} [2(1 - |I|^2)]^{1/2} |\alpha\beta\rangle_- + \frac{1}{2} [2(1 + |I|^2)]^{1/2} |\alpha\beta\rangle_+ \\
&= \frac{1}{2} [2(1 - |I|^2)]^{1/2} \left[\mathcal{I}_\epsilon^- \sqrt{(1 + \epsilon)} (r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} |\alpha\alpha\rangle + r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} |\beta\beta\rangle + t_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} |aa\rangle) + \right. \\
&\quad + (r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} + \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha}) |\alpha\beta\rangle_- + (r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} + \epsilon t_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha}) |\alpha\alpha\rangle_- + \\
&\quad \left. (r_{\beta\beta} t_{\alpha\alpha} + \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha}) |\beta\alpha\rangle_- + (t_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha+n} + \epsilon t_{\alpha\alpha+n} t_{\beta\alpha}) |aa+n\rangle_- \right] + \\
&+ \frac{1}{2} [2(1 + |I|^2)]^{1/2} \left[\mathcal{I}_\epsilon^+ \sqrt{(1 - \epsilon)} (r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} |\alpha\alpha\rangle + r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} |\beta\beta\rangle + t_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} |aa\rangle) + \right. \\
&\quad + (r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} - \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha}) |\alpha\beta\rangle_+ + (r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} - \epsilon t_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha}) |\alpha\alpha\rangle_+ + \\
&\quad \left. (r_{\beta\beta} t_{\alpha\alpha} - \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha}) |\beta\alpha\rangle_+ + (t_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha+n} - \epsilon t_{\alpha\alpha+n} t_{\beta\alpha}) |aa+n\rangle_+ \right]. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

A expressão acima é o resultado geral para as partículas sendo criadas em terminais diferentes. Apesar desse resultado ser totalmente impróprio para conclusões, nosso interesse é calcular as funções de correlações, portanto, somente as amplitudes de cada estado vão interessar. Agora, para identificar a flutuação quadrática, projetamos o estado de entrada no respectivo estado de nosso interesse. Vamos realizar primeiro para o estado $|\alpha\alpha\rangle$. Tomando os estados ortogonais entre si, projetamos o estado acima e observamos que somente o primeiro termo de cada parêntese torna-se não-nulo, assim, vem

$$\begin{aligned}
\langle \alpha\alpha | \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger | 0 \rangle &= \frac{1}{2} [2(1 - |I|^2)]^{1/2} \mathcal{I}_\epsilon^- \sqrt{(1 + \epsilon)} r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} [2(1 + |I|^2)]^{1/2} \mathcal{I}_\epsilon^+ \sqrt{(1 - \epsilon)} r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha}, \\
\langle \alpha\alpha | \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger | 0 \rangle &= \frac{1}{2} [2(1 - \epsilon |I|^2)]^{1/2} r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} \left[\sqrt{(1 + \epsilon)} + \sqrt{(1 - \epsilon)} \right], \\
\langle \alpha\alpha | \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger | 0 \rangle &= \frac{1}{2} [(1 - \epsilon |I|^2)]^{1/2} r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} [(1 + \epsilon) + (1 - \epsilon)], \\
(\Delta n_\alpha)^2 &= |r_{\alpha\alpha}|^2 |t_{\beta\alpha}|^2 [(1 - \epsilon |I|^2)],
\end{aligned}$$

onde, no primeiro passo, utilizamos (5.15). Realizando um cálculo análogo para $|\beta\beta\rangle$ ou $|aa\rangle$, obtemos para as flutuações quadráticas

$$(\Delta n_\alpha)^2 = |r_{\alpha\alpha}|^2 |t_{\beta\alpha}|^2 (1 - \epsilon |I|^2), \tag{5.26}$$

$$(\Delta n_\beta)^2 = |r_{\beta\beta}|^2 |t_{\alpha\beta}|^2 (1 - \epsilon |I|^2), \tag{5.27}$$

$$(\Delta n_a)^2 = |t_{\alpha\alpha}|^2 |t_{\beta\alpha}|^2 (1 - \epsilon |I|^2). \tag{5.28}$$

Um ponto muito interessante do resultado acima é que se considerarmos, diferentemente da nossa premissa, que se as funções de onda interferirem totalmente, isto é; se tomamos a integral de *overlap* $I = 1$, temos que a projeção do estado (5.25) em estados que contemplam partícula no mesmo terminal é nula para o caso fermiônico, estando de acordo com o princípio de exclusão. Isso já era esperado, dada a discussão acima.

Agora, calcularemos a projeção da entrada no estado $|\alpha\beta\rangle_-$, teremos

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \alpha\beta \left| \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \right| 0 \right\rangle \right| &= \frac{1}{2} [2(1 - |I|^2)]^{1/2} (r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} + \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha}), \\
\left| \left\langle \alpha\beta \left| \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \right| 0 \right\rangle \right|^2 &= \frac{1}{2} (1 - |I|^2) (|r_{\alpha\alpha}|^2 |r_{\beta\beta}|^2 + |t_{\alpha\beta}|^2 |t_{\beta\alpha}|^2 + \\
&\quad + \epsilon (r_{\alpha\alpha}^* r_{\beta\beta}^* t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha} + r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta}^* t_{\beta\alpha}^*)). \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Projetando o *input* no estado $|\alpha\beta\rangle_+$, temos analogamente

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \alpha\beta \left| \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \right| 0 \right\rangle \right|^2 &= \frac{1}{2} (1 + |I|^2) (|r_{\alpha\alpha}|^2 |r_{\beta\beta}|^2 + |t_{\alpha\beta}|^2 |t_{\beta\alpha}|^2 - \\
&\quad - \epsilon (r_{\alpha\alpha}^* r_{\beta\beta}^* t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha} + r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta}^* t_{\beta\alpha}^*)). \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Realizando a soma de (5.30) e (5.31), temos que

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = |r_{\alpha\alpha}|^2 |r_{\beta\beta}|^2 + |t_{\alpha\beta}|^2 |t_{\beta\alpha}|^2 - \epsilon |I|^2 (r_{\alpha\alpha}^* r_{\beta\beta}^* t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha} + r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta}^* t_{\beta\alpha}^*) \quad (5.31)$$

Analogamente, para os outros estados, temos

$$\langle n_\alpha n_a \rangle = |r_{\alpha\alpha}|^2 |t_{\beta a}|^2 + |t_{\alpha a}|^2 |t_{\beta\alpha}|^2 - \epsilon |I|^2 (r_{\alpha\alpha} t_{\beta a} t_{\alpha a}^* t_{\beta\alpha}^* + r_{\alpha\alpha}^* t_{\beta a}^* t_{\alpha a} t_{\beta\alpha}). \quad (5.32)$$

$$\langle n_\beta n_a \rangle = |r_{\beta\beta}|^2 |t_{\alpha a}|^2 + |t_{\beta a}|^2 |t_{\alpha\beta}|^2 - \epsilon |I|^2 (r_{\beta\beta} t_{\alpha a} t_{\beta a}^* t_{\alpha\beta}^* + r_{\beta\beta}^* t_{\alpha a}^* t_{\beta a} t_{\alpha\beta}). \quad (5.33)$$

$$\langle n_a n_{a+n} \rangle = |t_{\alpha a}|^2 |t_{\beta a+n}|^2 + |t_{\alpha a+n}|^2 |t_{\beta a}|^2 - \epsilon |I|^2 (t_{\alpha a} t_{\beta a+n} t_{\alpha a+n}^* t_{\beta a}^* + t_{\alpha a}^* t_{\beta a+n}^* t_{\alpha a+n} t_{\beta a}), \quad (5.34)$$

onde as correlações acima são conhecidas também como ruído de partição, visto no capítulo anterior. Assim, como proposto desde o princípio, encontramos as funções de correlações para um sistema multiterminal e, como apontamos no final do capítulo anterior, demonstramos as funções de correlações para as 2 naturezas possíveis das partículas que alimentam o sistema, e isso está explícito nas funções de correlações, dispensando a necessidade de recorrer à forma da distribuição das partículas nos reservatórios. Outro ponto importante é que as funções de correlações foram construídas à partir das mesmas considerações (temperatura zero e *delay* no tempo de emissão) que nos levaram ao regime do ruído de partição no formalismo de Büttiker, assim, o estudo do ruído no capítulo anterior nos mostra que as funções de correlações acima acentuam principalmente a quantização das partículas utilizadas. Apesar de, dado um número de terminais, o número de funções de correlação podem crescer indefinidamente, contudo, as expressões encontradas possuem uma vantagem computacional pois existe uma recursividade no cálculo das funções: de posse da matriz de espalhamento do sistema, implementamos as suas entradas nas funções acima e variamos o parâmetro n e encontramos toda a estatística do sistema¹.

Agora, como fizemos na secção anterior, vamos resgatar a estatística de Hanbury Brown-Twiss. Para retomarmos o experimento, aplicamos as mesmas condições para as entradas da matriz de espalhamento da secção anterior, então, as equações acima são nulas a menos da (5.28) e (5.34). Contudo, agora, se quisermos identificar algum dado estatístico, precisamos fixar a . Assim, utilizando primeiramente (5.28), para $a = 3$, vem

$$\begin{aligned} (\Delta n_3)^2 &= |t_{13}|^2 |t_{23}|^2 (1 - \epsilon |I|^2), \\ (\Delta n_3)^2 &= |r|^2 |t|^2 (1 - \epsilon |I|^2). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Para $a = 4$, temos, analogamente

$$(\Delta n_4)^2 = |r|^2 |t|^2 (1 - \epsilon |I|^2). \quad (5.36)$$

Agora, tomando as correlações para terminais diferentes, utilizamos a equação (5.34), como consideramos anteriormente, tomamos $a = 3$ e $n = 1$, devido ao limite do somatório de n que só possui 1 termo, então, vem

$$\begin{aligned} \langle n_3 n_4 \rangle &= |t_{13}|^2 |t_{24}|^2 + |t_{14}|^2 |t_{23}|^2 - \epsilon |I|^2 (t_{13} t_{24} t_{14}^* t_{23}^* + t_{13}^* t_{24}^* t_{14} t_{23}), \\ \langle n_3 n_4 \rangle &= |r|^4 + |t|^4 - \epsilon |I|^2 (r^2 t^{*2} + r^{*2} t^2). \end{aligned}$$

É importante retomar a discussão dada na secção anterior a respeito do limite do somatório de n . Agora observamos a dificuldade computacional que surgiria aplicando o procedimento acima para n variando até infinito no computador, pois, ao implementar a matriz de espalhamento no sistema, este não reconheceria termos como t_{15} . Ademais, contornar esse problema por métodos computacionais também seria um trabalho desnecessário posto que podemos simplesmente fixar o limite do somatório na definição, tal como fizemos.

No experimento, considera-se somente 2 terminais de saída, assim, utilizamos a condição de unitariedade onde

$$\begin{aligned} r t^* + r^* t &= 0, \\ r^2 t^{*2} + r^{*2} t^2 &= -2 |r|^2 |t|^2. \end{aligned}$$

¹ Isso foi feito de fato. O mais importante é que o programa criado não exige uma capacidade computacional substancial, permitindo que calculemos a estatística do problema em segundos.

Substituindo na correlação, temos que

$$\langle n_3 n_4 \rangle = |r|^4 + |t|^4 + \epsilon 2|r|^2|t|^2|I|^2. \quad (5.37)$$

As correlações (5.35)-(5.37) são precisamente as estatísticas de Hanbury Brown-Twiss, o que mais uma vez reforça nosso formalismo.

Um fato interessante que podemos apontar é que, para o caso fermiônico, quando há interferência total entre as funções de onda, a estatística é totalmente descrita por (5.37), mais uma vez obedecendo o princípio de exclusão. Quando temos duas funções de ondas totalmente descorrelacionadas, $I = 0$, reobtemos as correlações clássicas [68], onde não há distinção entre as estatísticas de Férmions e Bósons, como já é esperado. Todas essas propriedades valem para as funções de correlação encontradas.

Assim, dado toda essa análise, estamos capacitados a trabalhar no problema que motivou-nos na busca de uma estatística multiterminal que é o problema da simetria PT em 4 terminais, sendo sua única dificuldade no presente momento é demonstrar sua matriz de espalhamento, que derivaremos na secção seguinte.

5.3 Correlações de um sistema PT-bidimensional.

Agora que sabemos a estatística de um sistema multiterminal com um canal cada, podemos iniciar o estudo de um sistema com simetria PT, para tanto, como pede nosso formalismo, precisamos da matriz de espalhamento de tal sistema. Contudo, a primeira dificuldade que surge é como implementaríamos a simetria PT em um sistema e proporcionaríamos uma forma de medir experimentalmente tal regime. Fortuitamente, respondemos essa pergunta no capítulo 3 e lá apresentamos como se mede a simetria PT de um sistema ressonante de 2 terminais e introduzimos a matriz de espalhamento de um sistema em 4 terminais na equação (3.63), assim, devemos agora demonstrar a matriz de espalhamento para um ressonador com 4 terminais. Vamos utilizar o sistema que construímos no capítulo 4 e aplicar uma barreira em cada terminal de saída a fim de construir o ressonador. Então, para contemplarmos a barreira na matriz de espalhamento devemos atentar que o novo sistema será o mesmo dado pela figura 3.4, onde, as amplitudes externas do sistema de outrora serão as amplitudes internas e as novas amplitudes externas serão dadas por

$$\begin{pmatrix} b_\alpha^{\text{out}} \\ a_\alpha^{\text{in}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sqrt{1-\Gamma} & i\sqrt{\Gamma} \\ i\sqrt{\Gamma} & \sqrt{1-\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\alpha^{\text{out}} \\ b_\alpha^{\text{in}} \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

onde mantemos o índice α fazendo referência aos terminais, no presente caso $\alpha = 1, 2, 3, 4$, e Γ a probabilidade de transmissão da barreira. Para a estrutura interna haverá o problema de espalhamento (3.63), agora com as amplitudes modificadas

$$\begin{bmatrix} b_1^{\text{in}} \\ b_2^{\text{in}} \\ b_3^{\text{in}} \\ b_4^{\text{in}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{rt_1}{t_1^*} & \frac{tt_1}{t_2^*} \\ 0 & 0 & \frac{tt_2}{t_1^*} & \frac{rt_2}{t_2^*} \\ \frac{r^*t_1}{t_1^*} & \frac{t^*t_2}{t_1^*} & 0 & 0 \\ \frac{t^*t_1}{t_2^*} & \frac{r^*t_2}{t_2^*} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{\text{in}} \\ a_2^{\text{in}} \\ a_3^{\text{in}} \\ a_4^{\text{in}} \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Para que expressemos o problema em termos das amplitudes de saída, basta que resolvamos o sistema de equações gerados por (5.38) para a_α^{in} e b_α^{in} , vem

$$b_\alpha^{\text{in}} = i \frac{\sqrt{1-\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} a_\alpha^{\text{out}} + \frac{i}{\sqrt{\Gamma}} b_\alpha^{\text{out}}, \quad (5.40)$$

$$a_\alpha^{\text{in}} = -\frac{i}{\sqrt{\Gamma}} a_\alpha^{\text{out}} - i \frac{\sqrt{1-\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} b_\alpha^{\text{out}}. \quad (5.41)$$

Quando substituirmos as expressões acima em (5.39), devemos realizar uma manipulação algébrica de tal forma que deixemos na forma padrão do problema de espalhamento $B = SA$. Para facilitar, vamos

fazer algumas considerações. A primeira é que os fatores de absorção(bombeamento) terão a mesma intensidade em cada terminal, isto é, $t_1 = t_2 = t$. A seguir, consideramos que a cavidade central é dada por um espelho que permite uma taxa equivalente de reflexão e transmissão, isto é, $-r = it = \sqrt{2}/2$, então, substituindo todas essas considerações, teremos

$$\begin{bmatrix} i(\sqrt{1-\Gamma}a_1^{\text{out}} + b_1^{\text{out}}) \\ i(\sqrt{1-\Gamma}a_2^{\text{out}} + b_2^{\text{out}}) \\ i(\sqrt{1-\Gamma}a_3^{\text{out}} + b_3^{\text{out}}) \\ i(\sqrt{1-\Gamma}a_4^{\text{out}} + b_4^{\text{out}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{t^*}(\sqrt{1-\Gamma}b_3^{\text{out}} + a_3^{\text{out}}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{t^*}(\sqrt{1-\Gamma}b_4^{\text{out}} + a_4^{\text{out}}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{t^*}(\sqrt{1-\Gamma}b_3^{\text{out}} + a_3^{\text{out}}) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{t^*}(\sqrt{1-\Gamma}b_4^{\text{out}} + a_4^{\text{out}}) \\ i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{t^*}(\sqrt{1-\Gamma}b_1^{\text{out}} + a_1^{\text{out}}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{t^*}(\sqrt{1-\Gamma}b_2^{\text{out}} + a_2^{\text{out}}) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{t^*}(\sqrt{1-\Gamma}b_1^{\text{out}} + a_1^{\text{out}}) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{t^*}(\sqrt{1-\Gamma}b_2^{\text{out}} + a_2^{\text{out}}) \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Agora, realizamos uma manipulação algébrica e evidenciamos os vetores coluna de saída e entrada, B e A , respectivamente, assim, teremos

$$\mathcal{B}B = \mathcal{A}A, \quad (5.43)$$

onde \mathcal{B} e \mathcal{A} são matrizes de ordem 4 dadas por

$$\mathcal{A} = -\sqrt{b} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{b} & i\frac{a}{b} \\ 0 & 1 & i\frac{a}{b} & \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} & -i\frac{a}{b} & 1 & 0 \\ -i\frac{a}{b} & \frac{a}{b} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & ia \\ 0 & 1 & ia & a \\ a & -ia & 1 & 0 \\ -ia & a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

onde definimos as quantidades

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\Gamma}\frac{t}{t^*}, \quad (5.46)$$

$$b = 1 - \Gamma. \quad (5.47)$$

Com as considerações acima, percebemos rapidamente que a matriz de espalhamento do problema se reduz a inverter a matriz \mathcal{B} e realizar o produto com \mathcal{A} , assim teremos a matriz S dada por

$$S = -\frac{1}{(1-\Gamma)\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1} \begin{bmatrix} a' & 0 & b' & ib' \\ 0 & a' & ib' & b' \\ b' & -ib' & a' & 0 \\ -ib' & b' & 0 & a' \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

onde fizemos

$$a' = \sqrt{1-\Gamma} \left[\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right],$$

$$b' = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{t^*}\Gamma.$$

A demonstração da matriz S é feita no Apêndice C.

Os resultados acima são as entradas da matriz de espalhamento para um sistema Hanbury Brown-Twiss com a possibilidade de estudá-lo sob o regime de paridade e reversão temporal. É interessante notar que no caso sem barreira ($\Gamma = 1$), retomamos à matriz do experimento HBT derivada no capítulo 3.

De posse da matriz de espalhamento, aplicaremos as suas entradas nas funções de correlações encontradas na secção anterior, assumindo que as partículas adentram no sistema pelo terminal 1 e

2, fazemos, pois, $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, então realizamos o mesmo tratamento para o caso do experimento HBT-PT e temos as correlações

$$(\Delta n_1)^2 = (\Delta n_2)^2 = 0, \quad (5.49)$$

$$(\Delta n_3)^2 = (\Delta n_4)^2 = \frac{1}{4} \frac{\Gamma^4}{\left| (1 - \Gamma) \left(\frac{t}{t^*} \right)^2 - 1 \right|^4} (1 - \epsilon |I|^2), \quad (5.50)$$

$$\langle n_1 n_2 \rangle = (1 - \Gamma)^2 \frac{\left| \left(\frac{t}{t^*} \right)^2 - 1 \right|^4}{\left| (1 - \Gamma) \left(\frac{t}{t^*} \right)^2 - 1 \right|^4}, \quad (5.51)$$

$$\langle n_1 n_3 \rangle = \langle n_2 n_4 \rangle = \langle n_1 n_4 \rangle = \langle n_2 n_3 \rangle = \frac{1}{2} \Gamma^2 (1 - \Gamma) \frac{\left| \left(\frac{t}{t^*} \right)^2 - 1 \right|^2}{\left| (1 - \Gamma) \left(\frac{t}{t^*} \right)^2 - 1 \right|^4}, \quad (5.52)$$

$$\langle n_3 n_4 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^4}{\left| (1 - \Gamma) \left(\frac{t}{t^*} \right)^2 - 1 \right|^4} (1 + \epsilon |I|^2). \quad (5.53)$$

As expressões acima mostram as prováveis projeções do estado de entrada. Uma objeção que o leitor pode fazer é que aplicamos as entradas da matriz de espalhamento da forma *standard* $B = SA$ nas equações das correlações do formalismo desenvolvido com a forma $A = SB$. Isso não nos traz nenhum problema, pois, apenas lembramos que para as funções de correlações só importa o módulo ao quadrado e, por definição, as entradas da matriz de espalhamento devem obedecer o vínculo da unitariedade, então, a matriz de espalhamento da forma padrão pode ser aplicada no nosso formalismo conservando todas as interpretações até aqui desenvolvidas. Outro ponto importante que notamos é que as expressões acima prosseguem a respeitar o princípio de exclusão quando tratamos do caso para férmions e as funções de onda estão interferindo totalmente, como vemos pela anulação da equação (5.50) nesse caso.

Para constatar a validade das equações acima, tomemos a probabilidade de transmissão do espelho em seus limites. Primeiramente, tomando para $\Gamma \rightarrow 1$ que equivale ao caso do experimento HBT com um espelho de transmissão e reflexão equivalentes, obtemos as correlações

$$(\Delta n_1)^2 = (\Delta n_2)^2 = \langle n_1 n_2 \rangle = \langle n_1 n_3 \rangle = \langle n_2 n_4 \rangle = \langle n_1 n_4 \rangle = 0, \quad (5.54)$$

$$(\Delta n_3)^2 = (\Delta n_4)^2 = \frac{1}{4} (1 - \epsilon |I|^2), \quad (5.55)$$

$$\langle n_3 n_4 \rangle = \frac{1}{2} (1 + \epsilon |I|^2). \quad (5.56)$$

como podemos verificar pelas equações (5.35)-(5.37) ao aplicarmos a condição de equivalência nas amplitudes de reflexão e transmissão do espelho em (1.26) e (1.27).

Agora, aplicando a condição de uma barreira intransponível, $\Gamma \rightarrow 0$, vem

$$(\Delta n_1)^2 = (\Delta n_2)^2 = (\Delta n_3)^2 = (\Delta n_4)^2 = 0, \quad (5.57)$$

$$\langle n_1 n_3 \rangle = \langle n_2 n_4 \rangle = \langle n_1 n_4 \rangle = \langle n_2 n_3 \rangle = \langle n_3 n_4 \rangle = 0, \quad (5.58)$$

$$\langle n_1 n_2 \rangle = 1. \quad (5.59)$$

O resultado acima afirma que para o sistema com probabilidade zero de penetrar uma partícula, a única projeção para o estado de entrada com partículas em 1 e 2 é o estado em que há a reflexão total das partículas emitidas, independentemente de sua natureza, o que é esperado fisicamente.

Outro ponto interessante é que se tomamos a condição $(t/t^*)^2 = 1$ (que equivale a $\text{Im}(t^2) = 0$) para um Γ qualquer, retomamos o experimento HBT dado pelas equações (5.54)-(5.56). Utilizaremos esses resultados para medir a simetria PT no experimento HBT descritos na conclusão.

Este capítulo, que encerra o desenvolvimento, mostrou-nos o formalismo das funções de correlação. Para tanto, utilizamos da extensão auto-adjunta do espaço de Hilbert para descrevermos o estado de 2 partículas no sistema multiterminal proposto no início desta dissertação. Obtivemos o resultado

teórico dos estados de entrada em termos dos estados de saída, o que permite que encontremos o ruído de disparo do sistema através das equações de correlação, apenas com o conhecimento da matriz de espalhamento.

Por fim, uma vez que obtemos a matriz de espalhamento do experimento Hanbury Brown-Twiss com os parâmetros que propiciam a simetria PT do sistema, aplicamos suas entradas nas equações de correlação e estendemos o resultado do experimento usual.

Capítulo 6

Conclusão

No capítulo que conclui esta dissertação, descreveremos a generalização do experimento de Hanbury Brown-Twiss dado na tabela 6.1.

No caso unidimensional, temos que a simetria de reversão temporal faz com que a matriz de espalhamento torne-se ortogonal, assim, suas entradas devem ser reais. Como o único parâmetro que descreve a cavidade é t_1 , basta que tomemos a condição $\text{Im}(t_1) = 0$ que estabelecemos o sistema invariante por reversão temporal, o que de fato foi feito. Para que possamos ver explicitamente a ressonância surgir nas equações das emitâncias, além da condição anterior, devemos tomar o regime opaco do sistema ($\Gamma \rightarrow 0$).

Por outro lado, no caso bidimensional, realizamos o cálculo das correlações que embutem a simetria PT no experimento HBT, sendo uma ressonância encontrada de forma análoga ao caso unidimensional, quando $\text{Im}(t^2) = 0$ e $\Gamma \rightarrow 0$, como podemos ver pelas expressões na tabela. Experimentalmente, a simetria PT será mais facilmente medida neste caso, como explicamos a seguir.

Primeiramente, deve-se montar o aparato proposto no capítulo anterior. Inicialmente, o resultado de todas as medições será dado pelas expressões da tabela 6.1. A seguir, deve-se ajustar a barreira no regime opaco de tal sorte que obter-se-á a correlação (5.59). Estabelecido o regime, basta que ajustemos o parâmetro de bombeamento a tornar a matriz de espalhamento ortogonal ($\text{Im}(t) = 0$). Quando o sistema estiver ajustado por simetria PT, as medições estarão de acordo com o experimento Hanbury Brown-Twiss sem a barreira (5.54)-(5.56), ainda que a barreira esteja no limite opaco.

Quando utilizamos as trajetórias de Feynman para analisar os possíveis resultados, observamos certas propriedades interessantes: devido a equivalência e simetria PT do sistema de bombeamento-absorção, temos o já esperado resultado $\langle n_1 n_3 \rangle = \langle n_1 n_4 \rangle = \langle n_2 n_3 \rangle = \langle n_2 n_4 \rangle$ (como podemos ver pelos diagramas da figura 6.1) independentemente do *overlap* dos estados das partículas incidentes, tão logo, o resultado é determinístico, não apresentando ruído.

Outro ponto de discussão é a questão da inexistência da variância de reflexão, uma vez que isso contradiz a intuição, dado que existem possibilidades de reflexão pelos terminais de entrada e as trajetórias de Feynman permitem as duas partículas propagarem-se por um dos terminais incidentes. Contudo, estamos implementando médias, logo, apesar de que em algumas realizações do experimento

Tabela 6.1: Generalização da estatística do experimento Hanbury Brown-Twiss com simetria PT.

	Clássico	Férmions	Bósons
$(\Delta n_1)^2 = (\Delta n_2)^2$	0	0	0
$(\Delta n_3)^2 = (\Delta n_4)^2$	$\frac{1}{4} \frac{\Gamma^4}{\left (1-\Gamma)\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right ^4}$	$\frac{1}{4} \frac{\Gamma^4(1- I ^2)}{\left (1-\Gamma)\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right ^4}$	$\frac{1}{4} \frac{\Gamma^4(1+ I ^2)}{\left (1-\Gamma)\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right ^4}$
$\langle n_1 n_2 \rangle$	$(1-\Gamma)^2 \frac{\left \left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right ^2}{\left (1-\Gamma)\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right ^4}$	=	=
$\langle n_1 n_3 \rangle = \langle n_1 n_4 \rangle = \langle n_2 n_3 \rangle = \langle n_2 n_4 \rangle$	$\frac{\Gamma}{2}(1-\Gamma) \frac{\left \left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right ^2}{\left (1-\Gamma)\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right ^4}$	=	=
$\langle n_3 n_4 \rangle$	$\frac{\Gamma^4}{2} \frac{1}{\left (1-\Gamma)\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right ^4}$	$\frac{\Gamma^4}{2} \frac{(1+ I ^2)}{\left (1-\Gamma)\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right ^4}$	$\frac{\Gamma^4}{2} \frac{(1- I ^2)}{\left (1-\Gamma)\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1 \right ^4}$

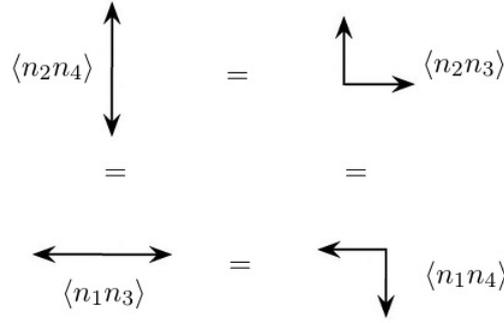


Figura 6.1: Resultados das correlações $\langle n_1 n_3 \rangle$, $\langle n_1 n_4 \rangle$, $\langle n_2 n_3 \rangle$ e $\langle n_2 n_4 \rangle$. Todas estas são equivalentes dada a simetria do sistema e os ajustes dos parâmetros de bombeamento/absorção.

realmente haver tais resultados, na média ergódica (isto é, muitas realizações), eles são nulos. Isso acontece primeiramente devido a nossa cavidade ter sido construída de forma que fosse balística e as barreiras serem determinísticas, então, os portadores terão taxa de transmissão e reflexão fixas. Por essa razão que o correlator clássico $\langle n_1 n_2 \rangle$ é o mesmo para os dois tipos de partículas.

Outrossim, recuperamos a estatística clássica de Hanbury Brown-Twiss aplicando no formalismo aqui construído das funções de correlação. Esse formalismo permite-nos encontrar as estatísticas de forma imediata e sistemática, apenas com a posse da matriz de espalhamento do sistema, sendo válido tanto para férmions, quanto bósons. E deflagra imediatamente o ruído de disparo devido ao *overlap* dos estados das partículas incidentes, pelo teorema de Wiener-Khintchine.

Diferentemente de como foi abordado no capítulo 3, para medir experimentalmente quando o sistema está simetricamente ajustado por reversão temporal e paridade através da sua emitância, as funções de correlação permitem uma forma direta de medição experimental para qualquer sistema. Para o experimento HBT-PT, podemos ver que pela tabela 6.1 que todos os correlatores possuem parâmetros ajustáveis experimentalmente, não havendo necessidade de recorrer a outro método de medida, como a medição da emitância, por exemplo.

Um resultado bastante interessante é quando sintetizamos os resultados das correlações nos limites quando o sistema está ajustado por simetria PT, como segue

$$(\Delta n_3)^2 = (\Delta n_4)^2 = \begin{cases} \frac{1 - \epsilon |I|^2}{4}, & \text{se } \text{Im}(t_0) = 0 \\ 0, & \text{se } \text{Im}(t_0) \neq 0 \end{cases}, \quad (6.1)$$

$$\langle n_3 n_4 \rangle = \begin{cases} \frac{1 + \epsilon |I|^2}{2}, & \text{se } \text{Im}(t_0) = 0 \\ 0, & \text{se } \text{Im}(t_0) \neq 0 \end{cases}, \quad (6.2)$$

$$\langle n_1 n_2 \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \text{Im}(t_0) = 0 \\ 1, & \text{se } \text{Im}(t_0) \neq 0 \end{cases}. \quad (6.3)$$

Notamos que as correlações resultantes geram uma relação binária de 1's e 0's quando ajustamos o parâmetro de *overlap*, assim, devemos investigar futuramente como realizar computação clássica com esse resultado. É plausível, ainda, comentar que temos perspectivas em aplicar o formalismo das funções de correlação e o resultado final encontrado em contextos diferentes dos abordados aqui. Como exemplo, a aplicação mais imediata em um desses contextos é da Informação Quântica, onde pretendemos realizar o estudo do emaranhamento de dois *qubits*, tal que a sua quantificação será pela técnica chamada de Concorrência.

Desenvolvemos nesta dissertação os mais diversos estudos das áreas da física, como mecânica estatística (no estudo de distribuições e correlação), eletromagnetismo (pelo uso avulso dos conceitos do transporte eletrônico e suas consequências), mecânica quântica, teoria quântica de campos (pela definição genérica de matriz de espalhamento, Trajetórias de Feynman e transformação de Gauge em sistemas eletrônicos.) etc. Todos foram importantes não somente para o resultado final desta

dissertação, como também, para resultados vindouros que possam agraciar em mais contributos para a literatura.

Apêndice A

Os comutadores do operador de campo.

Tomando o operador de campo definido em (6.8), vem

$$\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger = \int d\mathbf{r}_\alpha \psi_i(\mathbf{r}_\alpha) \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_\alpha). \quad (\text{A.1})$$

Como já é sabido, a amplitude $\hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_\alpha)$ obedece a álgebra

$$\left[\hat{a}(\mathbf{r}_\alpha), \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}'_\alpha) \right]_\epsilon = \delta(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}'_\alpha), \quad (\text{A.2})$$

onde $\epsilon = \pm 1$, nos remetendo ao tipo de comutador tratado, isso reflete na natureza da partícula, como já foi colocado. Vamos avaliar o comutador para o operador de campo tomando

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right]_\epsilon = \hat{\psi}_{\alpha i} \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger + \epsilon \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha i},$$

substituindo (A.1), temos

$$\begin{aligned} \left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right]_\epsilon &= \int d\mathbf{r}_\alpha \psi_i^*(\mathbf{r}_\alpha) \hat{a}(\mathbf{r}_\alpha) \int d\mathbf{r}'_\alpha \psi_i(\mathbf{r}'_\alpha) \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}'_\alpha) + \epsilon \int d\mathbf{r}'_\alpha \psi_i(\mathbf{r}'_\alpha) \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}'_\alpha) \int d\mathbf{r}_\alpha \psi_i^*(\mathbf{r}_\alpha) \hat{a}(\mathbf{r}_\alpha), \\ &= \int \int d\mathbf{r}_\alpha d\mathbf{r}'_\alpha \psi_i^*(\mathbf{r}_\alpha) \psi_i(\mathbf{r}'_\alpha) \left[\hat{a}(\mathbf{r}_\alpha) \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}'_\alpha) + \epsilon \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}'_\alpha) \hat{a}(\mathbf{r}_\alpha) \right], \\ &= \int \int d\mathbf{r}_\alpha d\mathbf{r}'_\alpha \psi_i^*(\mathbf{r}_\alpha) \psi_i(\mathbf{r}'_\alpha) \delta(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}'_\alpha), \\ &= \int d\mathbf{r}_\alpha \psi_i^*(\mathbf{r}_\alpha) \psi_i(\mathbf{r}_\alpha) = 1, \end{aligned}$$

que é precisamente o comutador (6.4).

Agora, vamos demonstrar a expressão (6.5). Avaliando o comutador à partir da definição, vem

$$\begin{aligned} \left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \right]_\epsilon &= \int d\mathbf{r}_\alpha \psi_i^*(\mathbf{r}_\alpha) \hat{a}(\mathbf{r}_\alpha) \int d\mathbf{r}'_\alpha \psi_j(\mathbf{r}'_\alpha) \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}'_\alpha) + \epsilon \int d\mathbf{r}'_\alpha \psi_j(\mathbf{r}'_\alpha) \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}'_\alpha) \int d\mathbf{r}_\alpha \psi_i^*(\mathbf{r}_\alpha) \hat{a}(\mathbf{r}_\alpha), \\ &= \int \int d\mathbf{r}_\alpha d\mathbf{r}'_\alpha \psi_i^*(\mathbf{r}_\alpha) \psi_j(\mathbf{r}'_\alpha) \left[\hat{a}(\mathbf{r}_\alpha) \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}'_\alpha) + \epsilon \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}'_\alpha) \hat{a}(\mathbf{r}_\alpha) \right], \\ &= \int \int d\mathbf{r}_\alpha d\mathbf{r}'_\alpha \psi_i^*(\mathbf{r}_\alpha) \psi_j(\mathbf{r}'_\alpha) \delta(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}'_\alpha) \\ &= \int d\mathbf{r}_\alpha \psi_i^*(\mathbf{r}_\alpha) \psi_j(\mathbf{r}_\alpha) = I. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para demonstrar a igualdade entre os comutadores de (6.5), basta fazermos a troca de índices $i \leftrightarrow j$, notamos que a integral em (A.3) vai resultar em

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha j}, \hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger \right]_\epsilon = I^* = \left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger \right]_\epsilon^* \quad (\text{A.4})$$

que é a própria expressão (6.5).

A igualdade (6.6) é justificada considerando que os operadores de campo atuam em terminais diferentes, assim, podendo comutar-se entre si, então temos imediatamente

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\beta i}^\dagger \right]_\epsilon = \left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \right]_\epsilon = 0. \quad (\text{A.5})$$

Esses operadores serão necessários para normalizar os estados de Fock que criamos para o sistema multiterminal com 2 partículas e calcular os estados que relacionam o *input* e o *output* do sistema, como é demonstrado no apêndice seguinte.

Apêndice B

Normalização dos estados de Fock para o sistema multiterminal.

Vamos primeiramente normalizar o estado

$$|\alpha\rangle = A\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger|0\rangle. \quad (\text{B.1})$$

Tomando a condição de normalização do estado de Fock $\langle\alpha\alpha|\alpha\rangle = 1$, utilizando a álgebra demonstrada no apêndice anterior, vem

$$\begin{aligned} |A|^2 \langle 0|\hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger|0\rangle &= 1, \\ |A|^2 \langle 0|\hat{\psi}_{\alpha j}\left(1 - \epsilon\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha i}\right)\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger|0\rangle &= 1, \\ |A|^2 \langle 0|1 - \epsilon\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha j} - \epsilon\hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger|0\rangle &= 1, \\ |A|^2 \langle 0|1 - \epsilon\left(I^* - \epsilon\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha j}\right)\left(I - \epsilon\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha i}\right)|0\rangle &= 1, \\ |A|^2\left(1 - \epsilon|I|^2\right) &= 1, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde utilizamos a condição da inexistência de auto-estados abaixo do estado de vácuo $\hat{\psi}_{\alpha i}|0\rangle = 0$.

Agora, vamos avaliar a normalização dos estados simétricos(antissimétricos), a saber

$$|\alpha\beta\rangle_\pm = B\left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger\right)|0\rangle; \quad (\text{B.3})$$

Assim, tomando novamente a normalização do estado de Fock, vem

$$\begin{aligned} \langle\alpha\beta|\alpha\beta\rangle_\pm &= 1, \\ |B|^2 \langle 0|\left(\hat{\psi}_{\beta j}\hat{\psi}_{\alpha i} \pm \hat{\psi}_{\beta i}\hat{\psi}_{\alpha j}\right)\left(\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\beta j}^\dagger \pm \hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger\right)|0\rangle &= 1, \\ |B|^2 \langle 0|\left(\hat{\psi}_{\beta j}\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\beta j}^\dagger + \hat{\psi}_{\beta i}\hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger\right) \pm \\ &\pm \left(\hat{\psi}_{\beta j}\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger + \hat{\psi}_{\beta i}\hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\beta j}^\dagger\right)|0\rangle = 1, \\ |B|^2 \langle 0|\left(\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\beta j}\hat{\psi}_{\beta j}^\dagger + \hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger\hat{\psi}_{\beta i}\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger\right) \pm \\ &\pm \left(\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger\hat{\psi}_{\beta j}\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger + \hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\beta i}\hat{\psi}_{\beta j}^\dagger\right)|0\rangle = 1, \\ |B|^2 \langle 0|\left[\left(1 - \epsilon\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha i}\right)\left(1 - \epsilon\hat{\psi}_{\beta j}^\dagger\hat{\psi}_{\beta j}\right) + \left(1 - \epsilon\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha j}\right)\left(1 - \epsilon\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger\hat{\psi}_{\beta i}\right)\right] \pm \\ &\pm \left[\left(I - \epsilon\hat{\psi}_{\alpha j}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha i}\right)\left(I^* - \epsilon\hat{\psi}_{\beta i}^\dagger\hat{\psi}_{\beta j}\right) + \left(I^* - \epsilon\hat{\psi}_{\alpha i}^\dagger\hat{\psi}_{\alpha j}\right)\left(I - \epsilon\hat{\psi}_{\beta j}^\dagger\hat{\psi}_{\beta i}\right)\right]|0\rangle = 1, \\ |B|^2\left(2 \pm 2|I|^2\right) &= 1. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Que é precisamente o fator de normalização que acompanha a expressão (6.9). É importante apontar que no terceiro passo os comutadores não comutam, diferentemente como está surgerido. Cada permutação de operadores de campo geram um $-\epsilon$, como se sucede duas permutações, temos um termo neutro.

Apêndice C

Matriz de espalhamento do experimento HBT PT.

Como colocamos na secção 5.3, encontramos 2 matrizes, \mathcal{A} e \mathcal{B} , geradas pela manipulação algébrica que elimina as amplitudes internas à barreira do sistema, a saber

$$\mathcal{A} = -\sqrt{b} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{b} & i\frac{a}{b} \\ 0 & 1 & i\frac{a}{b} & \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} & -i\frac{a}{b} & 1 & 0 \\ -i\frac{a}{b} & \frac{a}{b} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & ia \\ 0 & 1 & ia & a \\ a & -ia & 1 & 0 \\ -ia & a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

com

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1-\Gamma} \frac{t}{t^*}, \quad (\text{C.3})$$

$$b = 1 - \Gamma. \quad (\text{C.4})$$

Invertendo \mathcal{B} , temos

$$\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{2a^2 - 1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & a & ia \\ 0 & -1 & ia & a \\ a & -ia & -1 & 0 \\ -ia & a & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Assim, como vimos pela forma *standard*, temos a matriz de espalhamento $S = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$, vem

$$S = -\frac{1}{2a^2 - 1} \begin{bmatrix} \frac{2a^2-b}{\sqrt{b}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & i\frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) \\ 0 & \frac{2a^2-b}{\sqrt{b}} & i\frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & \frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) \\ \frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & -i\frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & \frac{2a^2-b}{\sqrt{b}} & 0 \\ -i\frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & \frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & 0 & \frac{2a^2-b}{\sqrt{b}} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Tomando $a' = \frac{2a^2-b}{\sqrt{b}}$ e $b' = \frac{a}{\sqrt{b}}(b-1)$, substituímos (c.3) e (C.4), temos que

$$a' = \sqrt{1-\Gamma} \left[\left(\frac{t}{t^*} \right)^2 - 1 \right], \quad (\text{C.7})$$

$$b' = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{t}{t^*} \Gamma. \quad (\text{C.8})$$

Como queríamos demonstrar.

Bibliografia

- [1] S. Datta. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [2] R. Landauer. *Phys. Rev. B* **68**, 217 (1987).
- [3] M. Büttiker. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2901 (1990).
- [4] R. C. Liu, B. Odom, Y. Yamamoto, S. Tarucha. *Nature (London)* **391** 263 (1998)
- [5] R. C. Liu, Y. Yamamoto, S. Tarucha. *Physica B* **249-251** 152 (1998)
- [6] P. A. Mello, N. Kumar. *Mesoscopic Systems Complexity and Statistical Fluctuations*. Oxford University Press, Oxford, 2003
- [7] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, C. T. Foxon, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 (1988).
- [8] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, C. T. Foxon, *Phys. Rev. B*, **43**, 12431 (1991).
- [9] R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss. *Nature (London)*, **177**, 27 (1956).
- [10] R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss. *Nature (London)*, **176**, 1046 (1956).
- [11] Y. Blanter, M. Büttiker. *Phys. Rep.*, **336** (2000).
- [12] H. Feshbach, C. E. Porter and V. F. Weisskopf. *Phys. Rev.* **96**, 448 (1954)
- [13] M. Büttiker. *Phys. Rev. B* **46**, 12485 (1992)
- [14] T. Ericson and T. Mayer-Kuckuk. *Ann. Rev. Nucl. Sc.* **16**, 183 (1966).
- [15] J. J. Sakurai, S. F. Tuan. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, (1994)
- [16] W. Greiner, J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer, (1995)
- [17] R. Courant, D. Hilbert. *Method of Mathematical Physics*. Interscience Publisher, (1966)
- [18] G. Rickayzen. *Green's Functions and Condensed Matter*. Dover Publication, (1980)
- [19] L. S. Levitov and G. B. Lesovik. *JETP Lett.* **58**, 230 (1993)
- [20] L. S. Levitov, H. W. Lee, G. B. Lesovik. *Journal of Mathematical Physics*, **37**, 10 (1996)
- [21] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper. *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 6 (1980)
- [22] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Market*. World Scientific (2009)
- [23] R. P. Feynman. A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Mcgraw-Hill Book Company (1965)

- [24] P. W. Anderson. Phys. Rev. **109**, 5 (1958)
- [25] J. M. F. Bassalo. Eletrodinâmica Quântica. Editora Livraria da Física (2006)
- [26] P. A. M. Dirac. Principle in Quantum Mechanics. Oxford University Press. (1938)
- [27] C. M. Bender, S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).
- [28] H. Schomerus. Phys. Rev. Lett. **104**, 233601, (2010)
- [29] K. W. McVoy, L. Heller, M. Bolsterli. Rev. Modern Phys. **39**, 245 (1967)
- [30] M. Bauer, P. A. Mello, K. W. McVoy. Zeit. Physik A, **293**, 151. (1979)
- [31] A. Einstein. Phys. Ann. d. Phys. **17**, 549. (1905)
- [32] R. Kubo. Rep. Prog. Phys. **29**, 255. (1966)
- [33] H. Nyquist. Phys. Rev. **32**, 110. (1928)
- [34] H. Callen, T. A. Welton. Phys. Rev. **83**, 34. (1951)
- [35] J. Perrin. Les Atomes, Paris, 1913.
- [36] C. W. Gardiner and M. J. Collett. Phys. Rev. A **31**, 6. (1985)
- [37] T. Gruner and D. Welsch. Phys. Rev. A **54**, 1661. (1996)
- [38] P. Langevin. Comptes Rendues. Acad. Sci. (Paris) **146**, 530 (1908).
- [39] E. Wigner, G. Breit. Phys. Rev. **49**, 519. (1936)
- [40] R. Landauer. IBM Journal of Research and Development. 223-231 (1957).
- [41] R. Landauer. Analogies in Optics and Micro Eletronics, Kluwer, p. 243. (1990)
- [42] Y. Imry. Directions in Condensed Matter Physics, World Scientificl, p. 10. (1986)
- [43] G. Galeczki, G. Nimtz. Infrared Phys. **31**, 85. (1991)
- [44] R. Landauer. Physica (Amsterdam) **38D**, 226 (1989)
- [45] Th. Martin, R. Landauer. Phys. Rev. B **45**, 1742 (1992)
- [46] A. Prêtre, H. Thomas, M. Büttiker. Phys. Rev. B **54**, 8130 (1996)
- [47] F. J. Wegner. Zeitschrift für Physik B **26** (1976)
- [48] A. MacKinnon, B. Kram. Phys. Rev. Lett. **47**, 1546 (1981)
- [49] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer, S. Pinhas. Phys. Rev. B **31** 6207 (1985)
- [50] K. L. Shepard, M. L. Roukes, B. P. Van der Gaag. Phys. Rev. Lett. **68** 2660 (1992)
- [51] H. Nyquist. Phys. Rev. **29**, 614 (1927)
- [52] J. B. Johnson. Phys. Rev. **32** 97 (1928)
- [53] W. H. Preece. Proceedings of the Royal Society of London **38** 229 (1885)
- [54] A. P. Malvino. Eletrônica. AMGH Editora. (2011)
- [55] O. W. Richardson. Cambridge Philosophical Society **11** 286 (1901)
- [56] S. Dushman. Phys. Rev. **21** 623 (1921)

- [57] N. S. de Andrade, A. V. Andrade-Neto, Thierry Lemaire, J. A. Cruz. *Rev. Bras. Ensino Fis.* **35** 1308 (2013)
- [58] W. Schottky. *Ann. Phys.* **57** 541 (1918).
- [59] Y. Imry. *Introduction to Mesoscopic Physics*, Oxford. (1997)
- [60] P. Dutta, P. M. Horn. *Rev. Mod. Phys.* **53** 497 (1981)
- [61] Sh. Kogan. *Electronic Noise and Fluctuations in Solids*. Cambridge University Press (2008)
- [62] C. Beenakker, C. Schönberger. *Phys. Today*. 37 (2003)
- [63] L. Landau, E. Lifshitz. *Statistical Physics*. Pergamon (1963)
- [64] N. Wiener. *Acta. Mathematica*. **55** 117. (1930), A Khintchine. *Mathematische Annalen* **109** 604. (1934)
- [65] M. Büttiker. *Phys. Rev. Lett.* **68** 843. (1992)
- [66] R. Loudon. *Phys. Rev. A*. **58** 4904. (1998)
- [67] R. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands. *The Feynman Lectures Vol. 3*. Addison-Wesley. (1965).
- [68] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley. (2001)
- [69] U. Fani. *American Journal of Phys.* **29** 539. (1961)
- [70] G. Goldhaber, W. B. Fowler, S. Goldhaber, T. F. Hoang, T. E. Kalogeropoulos, W. M. Powell. *Phys. Rev. Lett.* **3** 181. (1959)