

JOÃO PAULO MORAIS GRAÇA

DEFEITOS TOPOLÓGICOS EM TEORIAS
MODIFICADAS DA GRAVITAÇÃO: SOLUÇÕES
CLÁSSICAS E MODOS QUASINORMAIS

DEFEITOS TOPOLÓGICOS EM TEORIAS MODIFICADAS DA
GRAVITAÇÃO: SOLUÇÕES CLÁSSICAS E MODOS
QUASINORMAIS

JOÃO PAULO MORAIS GRAÇA



Universidade Federal da Paraíba

TESE SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DA PARAÍBA, SOB ORIENTAÇÃO DO PROF. DR. VALDIR B. BEZERRA, COMO
PARTE DOS REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM FÍSICA.

Fevereiro 2016

G729d Graça, João Paulo Morais.
Defeitos topológicos em teorias modificadas da gravitação:
soluções clássicas e modos quasinormais / João Paulo Morais
Graça.- João Pessoa, 2016.
153f. : il.
Orientador: Valdir B. Bezerra
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Gravitação. 3. Defeitos topológicos. 4. Teorias
modificadas. 5. Modos quasinormais.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

João Paulo Morais Graça: *Defeitos topológicos em teorias modificadas da gravitação: Soluções clássicas e modos quasinormais*, Universidade Federal da Paraíba, © Fevereiro 2016

ABSTRACT

Recent observations seemed to indicate that the rate of the expansion of the universe is accelerating. Such observation, along with the fact that only approximately 5% of its content is composed of barionic matter, suggests that it is necessary to modify general relativity, in order to explain this acceleration. In this thesis, we study some well-known proposals for such endeavour, such as $f(R)$ theories of gravity, Brans-Dicke theory and Lovelock theories. These models are studied in three subjects, namely: The relation between these theories, in particular, the correspondence between Brans-Dicke and $f(R)$ theories; classical gravitating solutions involving cosmic strings; and the quasinormal modes of black holes, in composition with topological defects (cosmic strings and monopoles). The classical solutions are studied numerically, and the astrophysical and cosmological effects due to the defect are analyzed. We found that, for a specific class of $f(R)$ theories, such as $f(R) = R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R^m$, with $m > 2$, the angular deficit generated by the defect is attenuated, and the attenuation increases as the value of m decreases. In the context of quasinormal modes, we calculate the spectrum of quasinormal modes of a black hole, with a global monopole, in $f(R)$ theories. After that, we study how this spectrum differs from the same system in general relativity. We also calculate the spectrum of a black hole, with a cloud of strings, in Lovelock gravity. After that we study how this spectrum differs from the spectrum of the same system, without the cloud of strings. Also, we compare it with the same system, with a cloud of strings, but now in general relativity.

RESUMO

Observações recentes sugerem que o universo está se expandindo aceleradamente. Este fato, juntamente com a descoberta que apenas, aproximadamente, 5% de sua composição é relativa à matéria bariônica conhecida, representam indícios de que a teoria gravitacional proposta por Einstein deva ser modificada. Nesta tese, estudamos algumas das propostas mais conhecidas de teorias modificadas da gravitação, a saber, teorias $f(R)$, Brans-Dicke e de Lovelock. Estas teorias são estudadas dentro de três contextos específicos: A relação entre essas teorias, especificamente, a correspondência entre as teorias $f(R)$ e Brans-Dicke; soluções clássicas que envolvem cordas cósmicas; e o espectro de emissão de ondas gravitacionais, a partir de buracos negros, em conjunto com defeitos topológicos (cordas cósmicas e monopolos). As soluções clássicas são estudadas numericamente, e efeitos astrofísicos e cosmológicos gerados por tais defeitos são, então, analisados. Encontramos que, para uma classe específica de teorias $f(R)$, a saber, $f(R) = R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R^m$, com $m > 2$, o déficit angular gerado pela corda é atenuado, e a atenuação ocorre com mais intensidade para menores valores da potência m . No estudo dos modos quasinormais, investigamos como o espectro dos modos em um buraco negro, com um monopolo global, em teorias $f(R)$, diferem do mesmo sistema no contexto da relatividade geral. Realizamos também estudo semelhante para um buraco negro, com uma nuvem de cordas, em teorias de Lovelock, e analisamos como a introdução da nuvem de cordas altera o espectro dos modos, em relação ao mesmo sistema sem a presença desta nuvem, assim como em relação ao mesmo sistema na relatividade geral.

*Se a vida lhe der limões,
faça uma limonada (ou uma caipirinha).*

— Ditado Popular

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao meu orientador, prof. Valdir Bezerra, por todo o apoio durante esses últimos seis anos. Pelas conversas sobre física, filosóficas, e também pela precisão cirúrgica de retirar o supérfluo de um texto, mantendo apenas o essencial. Agradeço a todos os professores do departamento de física, desta universidade federal, que contribuíram de uma forma ou de outra para minha formação.

Devo agradecer também aos professores José Helayel Neto e Jorge A. Vieira, verdadeiros mestres na arte didática. Ao professor Henrique Boschi, meu orientador de graduação, por além de estar sempre disposto a ajudar, ser uma pessoa fantástica. Também à professora Betti Hartmann, cujo ensinamento de métodos numéricos possibilitou a realização desta tese.

Aos amigos, que tornam o mundo destas geometrias fantásticas menos inabitados. Sem a convivência com eles, é possível que a gente se perca dentro de algum buraco negro, pelo caminho. É uma pena que, em algum momento, cada um tome sua própria geodésica, e a força de maré nos separe.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional dado durante os últimos trinta e cinco anos. Sei que não são todos que tiveram o mesmo carinho, e a mesma liberdade, que eu tive. Muito obrigado.

Em especial, queria agradecer a Regine Wieseler, pelo acolhimento desta família de brasileiros, na Alemanha. Continuamos a pedir desculpas pelas manchas de café.

Por fim, para Deise e Benjamim, é claro. Por todos os momentos passados juntos. Por aceitar se casar com alguém de chinelos. Pelas caminhadas por Vegesack. Se perdi a capacidade que já tive, quando criança, de teletransportar-me do sofá para o quarto, ao adormecer, agora virei eu o teletransportador. *There is no place like home.*

CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	1
i	TEORIAS DA GRAVITAÇÃO	5
2	MODELOS DE GRAVITAÇÃO	7
2.1	Fundamentos da relatividade geral	7
2.2	Conceitos de geometria diferencial	8
2.2.1	A derivada exterior	11
2.2.2	A métrica	11
2.3	Cinemática	12
2.3.1	A 2-forma de curvatura	14
2.3.2	A conexão afim	15
2.4	A equação de Einstein	15
2.4.1	Elementos de volume	16
2.4.2	A ação de Einstein-Hilbert em formas diferenciais	17
2.4.3	Adicionando novos termos	18
2.5	Teorias de Lovelock	18
2.6	Teorias $f(R)$	20
2.6.1	Equações de campo	21
2.7	Teoria de Brans-Dicke	23
3	SOLUÇÕES EXATAS E CORRESPONDÊNCIAS ENTRE TEORIAS	27
3.1	A correspondência entre teorias $f(R)$ e Brans-Dicke	27
3.2	Soluções exatas em teorias $f(R)$	29
3.3	O monopolo global em teorias $f(R)$	32
3.4	O método reconstutivo em Brans-Dicke	34
ii	DEFEITOS TOPOLÓGICOS	39
4	KINKS E CORDAS CÓSMICAS	41
4.1	Sólitons	41
4.2	Kinks	41
4.2.1	O método de Bogomol'nyi	44
4.3	Vórtices e cordas cósmicas	46
4.4	A corda Abelian na relatividade geral	49
4.4.1	O limite BPS no caso $\gamma = 0$.	55
5	A CORDA ABELIANA NA GRAVITAÇÃO DE STAROBINSKY ESTENDIDA	59
5.1	Starobinsky sem constante cosmológica	60
5.2	A corda abeliana no modelo de Starobinsky estendido	67
5.3	Starobinsky e Starobinsky estendido com constante cosmológica	70

5.3.1	A corda Abeliana em de Sitter na gravitação de Einstein	75	
5.3.2	A corda Abeliana em de Sitter no modelo de Starobinsky	76	
iii	MODOS QUASINORMAIS	81	
6	MODOS QUASINORMAIS NO MONOPOLO GLOBAL EM $f(R)$		83
6.1	Os modos quasinormais	83	
6.2	O método WKB	84	
6.3	O monopolo global	86	
6.4	Modos quasinormais escalares	89	
6.5	Modos quasinormais espinoriais	97	
7	NUVEM DE CORDAS EM TEORIAS DE EINSTEIN-GAUSS-BONNET	103	
7.1	Nuvens de cordas na relatividade geral	103	
7.2	Soluções esfericamente simétricas em dimensões superiores	105	
7.3	A nuvem de cordas em Einstein e Einstein-Gauss-Bonnet		109
7.3.1	A nuvem de corda na relatividade geral.	110	
7.3.2	A nuvem de cordas na teoria de Einstein-Gauss-Bonnet	111	
7.4	Os modos quasinormais da nuvem de cordas	113	
8	CONCLUSÕES	121	
iv	APÊNDICES	125	
A	EQUAÇÕES DE CAMPO E TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO PARA A CORDA ABELIANA	127	
B	EQUAÇÕES DE CAMPO PARA TEORIAS $f(R)$ DA GRAVITAÇÃO	131	
	BIBLIOGRAFIA	135	

LISTA DE IMAGENS

- Figure 1 Configuração de campo de um Kink para $\lambda = 2$ e $\eta = 1$. Esta configuração estende-se até o infinito em ambas as direções. 43
- Figure 2 Densidade de energia de um kink localizado na origem. Notamos que existe um pico de energia ao redor da localização do kink, e esta energia diminui rapidamente a medida que nos afastamos dele. 44
- Figure 3 Perfil dos campos escalar e de gauge para diferentes valores de α . 53
- Figure 4 Métrica induzida por uma corda cósmica para diferentes valores de γ . 54
- Figure 5 Campos de matéria e funções da métrica para a corda Abelian no modelo gravitacional de Starobinsky. Os parâmetros utilizados são $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.3$ e $\xi = 0.001$. 63
- Figure 6 Soluções numéricas da corda cósmica no modelo de Starobinsky, para $\alpha = 2.0$ e $\gamma = 1.8$. Na parte superior, da esquerda para a direita, temos $\xi = 0.01$ e $\xi = 0.1$. Na parte inferior, da esquerda para a direita, temos $\xi = 1.0$ e $\xi = 10.0$. 64
- Figure 7 Como o déficit angular gerado pela corda cósmica é influenciado pelo modelo de Starobinsky, fixando-se os parâmetros α e γ , e variando-se o parâmetro ξ de 0.001 até 1000. O eixo vertical mede o déficit angular por 2π . 65
- Figure 8 Valor crítico do parâmetro γ como função de ξ , para $\alpha = 1$. A inclusão do termo R^2 na ação diminui o valor do déficit angular. 66
- Figure 9 Perfil dos campos escalar e de gauge, para diferentes valores do parâmetro ξ . 66
- Figure 10 Energia da corda cósmica em função do parâmetro ξ , para valores fixos dos parâmetros α e γ . 67
- Figure 11 As funções métricas para $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $\xi = 0.01$ e $\chi = 100$ no modelo de Starobinsky estendido, para diferentes valores da potência m em $f(R) = R + \xi R^2 + \chi R^m$. A linha contínua representa o modelo na relatividade geral, ou seja, com $\xi = \chi = 0$. 69

- Figure 12 Déficit angular gerado pelas correções cúbicas e de ordem quatro do modelo de Starobinsky estendidos. Os seis gráficos correspondem a $\xi = 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10$ e 100 , respectivamente, começando na figura superior à esquerda, 71
- Figure 13 Os gráficos acima mostram como o valor de γ_{cr} é afetado pela correção cúbica e de quarta ordem, em relação ao termo quadrático. A começar pelo gráfico superior à esquerda, a intensidade do termo quadrático é dada por $\xi = 0.001, 0.1, 1$ e 10 . 74
- Figure 14 Perfil da função $N(x)$ no modelo de Starobinsky. O horizonte cosmológico ocorre em $N(x) = 0$. 78
- Figure 15 Perfil da função $N(x)$ no modelo de Starobinsky. O horizonte cosmológico ocorre em $N(x) = 0$. 79
- Figure 16 Potencial efetivo sentido por um campo escalar no espaço-tempo de Schwarzschild em função do parâmetro l . 91
- Figure 17 Posição do pico do potencial efetivo para o campo escalar no espaço-tempo de um buraco negro, com um monopolo global, em $f(R)$ 92
- Figure 18 Potencial efetivo para o campo escalar no espaço-tempo de um buraco negro, com um monopolo global, em $f(R)$. São considerados diferentes valores do parâmetro ψ_0 . 93
- Figure 19 As linhas tracejadas (ao meio) representam os modos quasinormais para o buraco negro com um monopolo global em $f(R)$ para $\psi_0 = 0.02$ e $\eta \rightarrow 0$. As linhas pontilhadas e tracejadas (à esquerda) representam o mesmo monopolo global, porém agora com $8\pi\eta^2 = 0.02$. As linhas contínuas (à direita) representam os modos quasinormais da métrica de Schwarzschild na gravitação de Einstein. 96
- Figure 20 Variação dos modos quasinormais para $n = 0$ e $l = 0$ do buraco negro com monopolo global em $f(R)$ à medida que ψ_0 aumenta. 96

Figure 21	A linha pontilhada representa os modos quasinormais no espaço-tempo de um buraco negro, com um monopolo global, na gravitação $f(R)$. Os parâmetros utilizados são $\psi_0 = 0.02$, $M = 1$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$. A linha contínua representa o mesmo conjunto de modos na métrica de Schwarzschild. As unidades estão em função da massa total. 101
Figure 22	Modos quasinormais para a métrica de Schwarzschild-Tangherline em D dimensões, com $l = 2$ e $n = 0$. 114
Figure 23	Modos quasinormais escalares para a solução de Boulware-Deser, com $l = 2$ e $n = 0$, para dimensões $D = 6, 7, 8$ e 9 , em termos do parâmetro α . 116
Figure 24	Modos quasinormais escalares para a solução de um buraco negro, com uma nuvem de cordas. Os parâmetros utilizados foram $l = 2$ e $n = 0$, para dimensões $D = 5$ (esquerda) e $D = 7$ (direita). 116
Figure 25	Modos quasinormais escalares para a solução de um buraco negro, com uma nuvem de cordas, na teoria de Einstein-Gauss-Bonnet. Os parâmetros utilizados foram $l = 2$ e $n = 0$, para dimensão $D = 7$ (acima) e $D = 9$ (abaixo), variando-se α . 117
Figure 26	Modos quasinormais escalares para a solução de um buraco negro, com uma nuvem de cordas, na teoria de Einstein-Gauss-Bonnet. Os parâmetros utilizados foram $l = 2$ e $n = 0$, para dimensão $D = 7$ (acima) e $D = 9$ (abaixo) variando-se η^2 . 118

LISTA DE TABELAS

Table 1	Valores de energia (por comprimento) da corda e déficit angular. 55
Table 2	Valores de energia (por comprimento) da corda e déficit angular para $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.0$ e $m = 3$. 72
Table 3	Valores de energia (por comprimento) da corda e déficit angular para $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.0$ e $m = 4$. 73

Table 4	Modos quasinormais da métrica de Schwarzschild utilizando o método de WKB de quinta ordem. 93
Table 5	Alguns valores numéricos para os modos quasinormais da métrica de Schwarzschild. 94
Table 6	Modos quasinormais para o monopolo na relatividade geral com $8\pi\eta = 0.02$. 94
Table 7	Modos quasinormais para o buraco negro com um monopolo global em $f(R)$ tomando $\eta \rightarrow 0$ e $\psi_0 = 0.02$. 95
Table 8	Modos quasinormais para o buraco negro com um monopolo global em $f(R)$ tomando $\eta \rightarrow 0.02$ e $\psi_0 = 0.02$. 95
Table 9	Modos quasinormais da métrica de Schwarzschild-Tangherline, utilizando o método de WKB de quinta ordem, para $D=4,5,6,7$ e 8 . 115

INTRODUÇÃO

"Einstein estava certo?" é o título de um livro de divulgação científica do relativista Clifford M. Will, lançado originalmente em 1986¹. Sua resposta não deixava sombra de dúvidas: Sim. A relatividade geral tivera nota primorosa em todos os testes observacionais às quais fora submetida durante os últimos cem anos. No entanto, esta tese trata de teorias modificadas da gravitação. Ou seja, são teorias que propõem a substituição da relatividade geral por outros modelos. O por que disso? Por que tentar modificar uma teoria tão bem sucedida? Ainda que os motivos sejam vários, não é fácil dar uma resposta satisfatória. O correto é dizer que a gravidade ainda nos fascina, nos intriga, talvez até nos iluda...

Se o século XX foi o século do infinitamente pequeno, do quanta, da descoberta do modelo sub-atômico das partículas elementares, é possível que o século XXI seja o século do infinitamente grande (ou, quiçá, finitamente grande), do cosmos, da gravidade. Por que o universo aparenta estar se expandindo de forma acelerada? O que é a matéria escura? A energia escura? Houve mesmo um período inflacionário do universo, quais foram suas premissas e suas consequências? Detectaremos ondas gravitacionais? Como, enfim, quantizar a gravidade?

Das telas de cinema até as salas de aula, a gravidade é um dos assuntos da moda. Na busca de uma teoria de tudo, as ideias alcançam lugares até pouco mais populares em livros de ficção-científica. Nossa realidade é feita de cordas, ou de uma espuma de matéria? A quantas dimensões, de fato, podemos ter acesso? Será nosso mundo conhecido apenas um holograma? É preciso propor, porque é preciso explicar. Essa tese é sobre propostas que tentaram responder, ainda que de forma aproximada ou parcial, a questões que aparentemente ainda estão longe de uma resposta satisfatória.

Nesta tese iremos considerar três teorias da gravitação que modificam a relatividade geral, a saber, as teorias de Brans-Dicke [BD61], $f(R)$ da gravitação [SF10] e de Lovelock [Lov71]. A teoria de Brans-Dicke é o exemplo mais popular das teorias ditas escalar-tensorial, e teve sua origem nos anos 60. Nela, a gravitação é mediada não apenas por um tensor de ordem dois, mas também por um campo escalar que tem o papel de substituir a constante gravitacional de Newton. As chamadas teorias $f(R)$ da gravitação tem uma história mais recente, ainda que sua grande generalização não nos permita indicar

¹ A edição Brasileira foi lançada em 1996 pela editora da UNB [Wil96]

um período certo para seu início. A ideia básica é substituir o escalar de curvatura da ação de Einstein-Hilbert por uma função analítica do mesmo. Esta proposta possibilitou a concordância dos dados observacionais relativos à aceleração do universo em um modelo gravitacional, bem como outros cenários, o que significa dizer que possui grande generalidade. Dentro do contexto das teorias $f(R)$ iremos estudar em maiores detalhes dois modelos específicos: De Starobinsky, dado por $f(R) = R + \alpha R^2$, e de Starobinsky estendido, a saber, $f(R) = R + \alpha R^2 + \beta R^m$, com $m > 2$. O modelo de Starobinsky tem recebido bastante atenção, recentemente, por conta de sua boa concordância com dados observacionais relativos ao suposto período inflacionário do universo. Por último, iremos apresentar também as teorias de Lovelock, e em especial o modelo de gravitação conhecido como teoria de Einstein-Gauss-Bonnet. A proposta de Lovelock caracteriza-se por suas equações de campo não conterem derivadas de ordem superior a dois, na métrica. Tais teorias são vistas como extensões naturais da gravitação de Einstein em dimensões superiores.

Estas teorias da gravitação, que de fato, são modificações da gravitação, serão então utilizadas em três situações distintas. A primeira relaciona-se com soluções exatas e dualidades entre teorias, mais especificamente a dualidade entre as teorias de Brans-Dicke e $f(R)$ da gravitação. A segunda trata de defeitos topológicos, que são configurações localizadas de energia ² que podem ter sido formados durante uma transição de fase no universo primitivo. Defeitos topológicos podem ter um papel relevante em vários cenários cosmológicos, como nas flutuações primordiais de densidade, e também são conhecidos por seus efeitos astrofísicos, como na emissão de radiação e em sua atuação como geradores de lentes gravitacionais [VSoo]. A observação e caracterização de tais defeitos, ou mesmo sua não-observação, deve impor limites aos parâmetros físicos relacionados à sua constituição, como o valor de vácuo do campo escalar que fundamenta sua origem. Como tais efeitos relacionam-se diretamente ao modelo gravitacional proposto para a interação com esses defeitos, os limites para os parâmetros físicos devem ser, então, função do modelo gravitacional escolhido, ou mais precisamente, dos parâmetros do modelo gravitacional escolhido. Como iremos ver, a utilização do modelo de Starobinsky permite uma liberdade maior para os valores de vácuo do campo escalar, quando comparados com os resultados obtidos no contexto da relatividade geral.

Finalmente, iremos tratar do espectro de emissão de ondas gravitacionais por buracos negros, em conjunto com algum defeitos topológico, em teorias $f(R)$ da gravitação e de Lovelock. Tal espectro de emissão é denotado por modos quasinormais, e possuem duas componentes: Uma oscilatória e outra de decaimento. Os modos quasinormais car-

² Defeitos topológicos podem ser infinitamente longos, porém, ao menos em uma dimensão espacial eles podem ser precisamente localizados.

regam informações sobre o objeto emissor, e também sobre o modelo gravitacional proposto. Seu estudo tem recebido bastante atenção nos últimos anos, e podemos citar dois fatores essenciais para este fato: O primeiro tem a ver com o forte investimento na construção de detectores de ondas gravitacionais, que são naturalmente descritos pelos modos quasinormais. O segundo é mais teórico, e está relacionado com as chamadas dualidades gravitação/teorias de gauge, onde, neste contexto, os modos quasinormais do modelo gravitação estão relacionados com os polos de um propagador da teoria de campo dual.

Esta tese está dividida em seis capítulos, esta introdução, a conclusão e dois apêndices. No capítulo 2 faremos uma breve revisão dos conceitos de geometria diferencial utilizados nesta tese, além de apresentar os modelos gravitacionais que serão trabalhados. O capítulo 3 trata de algumas soluções exatas destas teorias, e também da correspondência entre teorias de Brans-Dicke e teorias $f(R)$ da gravitação. Os dois capítulos seguintes abordam os defeitos topológicos. O capítulo 4 apresenta os modelos de kink, vórtices e da corda cósmica na relatividade geral. Salvo poucas exceções, tais modelos não possuem solução analítica e precisam ser estudados numericamente. O capítulo 5 trata da corda cósmica Abelianas nos modelos de gravitação de Starobinsky e de Starobinsky estendido, com a presença de uma constante cosmológica. Iremos estudar como a introdução de tais termos extras à ação de Einstein-Hilbert influenciam nos efeitos cosmológicos e astrofísicos produzidos pela corda. Os capítulos 6 e 7 referem-se ao estudo dos modos quasinormais. O capítulo 6 trata de um buraco negro com um monopolo global em teorias $f(R)$ da gravitação. Iremos apresentar um modelo realístico para o monopolo, encontrar a solução métrica gerada para o mesmo longe de seu núcleo, e calcular os modos quasinormais relativos à perturbação de dois tipos de campo teste: escalar e espinorial. O capítulo 7 trata de um buraco negro, com uma nuvem de cordas, nas teorias de Lovelock, e com maiores detalhes na teoria de Einstein-Gauss-Bonnet, que é o nome dado às teorias de Lovelock de ordem dois. Iremos ver algumas soluções exatas para tais teorias, em dimensões superiores, e calcular o espectro de modos quasinormais para um campo teste escalar. Finalmente, no capítulo oito, apresentaremos as conclusões desta tese e as perspectivas futuras acerca dos trabalhos realizados que serão aqui mencionados. Nos dois apêndices estão detalhados alguns cálculos que foram omitidos no texto principal, a saber, as equações de campo da corda Abeliana, e as equações de campo para as teorias $f(R)$ da gravitação.

Parte I

TEORIAS DA GRAVITAÇÃO

Desde a introdução da relatividade geral por Einstein, diversas novas teorias gravitacionais foram propostas. Nos próximos dois capítulos iremos ver algumas destas ideias, suas motivações e consequências.

MODELOS DE GRAVITAÇÃO

2.1 FUNDAMENTOS DA RELATIVIDADE GERAL

Sabemos hoje que a interação entre os corpos se dá através de quatro forças fundamentais. Destas, sem dúvida alguma a gravidade é aquela mais presente em nossas vidas. Que as coisas caem nos é óbvio desde a tenra idade, mas descobrir o porque as coisas caem foi um desafio para o intelecto humano durante séculos. O grande filósofo grego Aristóteles, por exemplo, acreditava que alguns objetos caem por ser a terra seu lugar natural, enquanto outros objetos sobem (como a fumaça) por não ser a terra seu lugar natural. Essa visão Aristotélica de mundo dominou o pensamento ocidental até a revolução científica ocorrida por volta dos séculos XV e XVI, no continente Europeu. Aos poucos, as ideias de Copérnico e Galileu passaram a suplantiar tais pensamentos seculares e o mundo viu nascer, com Isaac Newton, uma nova teoria para explicar o porque as coisas caem.

Doravante seria a gravidade, uma força matematicamente mensurável, a responsável tanto por explicar o porque as coisas caem como por explicar porque os planetas revolucionam ao redor do Sol, e a Lua ao redor da Terra. Durante os dois séculos seguintes foi obra de grandes físicos e matemáticos, em especial Pierre Simone de Laplace, o refinamento de métodos algébricos e numéricos para calcular, com precisão cada vez maior, o movimento dos corpos celestes. A descoberta de novos planetas, como Urano (sec. XVIII), Netuno (sec. XIX) e Plutão (sec. XX), através de mensurações da sua perturbação à órbita de planetas já conhecidos, representa talvez o ápice da teoria Newtoniana da gravitação. Que esta teoria teria de ser revista, e conceitualmente modificada por Einstein no início do século XX, não parecia em nada plausível para os físicos na virada daquele século.

Após 100 anos da formulação de uma nova teoria da gravidade por Einstein, em 1915, continuam os debates se esta teoria também deve ser modificada, e de que forma. Suas conquistas são tão impressionantes como foram as da teoria Newtoniana nos séculos passados. Ela foi capaz de explicar a precessão do periélio de Mercúrio e o desvio da luz pelo Sol, além de prever o *redshift* gravitacional [Wil93]. Por que, então, pensar em modificar a teoria de Einstein?

Há várias respostas possíveis para esta pergunta. Arthur Eddington e Hermann Weyl já cogitavam uma versão modificada para a gravitação nos anos seguintes à sua introdução por Einstein [Scho6]. Os motivos costumam ser vários, desde a mera curiosidade científica,

Uma breve história da gravitação, de Aristóteles até Einstein.

As versões modificadas da gravitação após Einstein.

passando por aspectos filosóficos inerentes a uma teoria que visa descrever o movimento dos corpos, até questões que só recentemente vieram a ser colocadas, como a renormalizabilidade da teoria e a observação da expansão acelerada do universo.

Se levarmos em conta a ação proposta por Einstein e Hilbert para a teoria da gravitação,

A ação de Einstein-Hilbert e a possibilidade de modificá-la.

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} d^4x R, \quad (2.1)$$

onde R é o escalar de Ricci, podemos perguntar por que não adicionar à esta ação outros invariantes, como R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ou $R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}$, onde os últimos dois tensores são, respectivamente, o de Ricci e Riemann? E isso só para mencionar os termos quadráticos. Em princípio, nada nos impede de inserir tais termos na teoria, e deve ser a experiência que dirá ao final o que é permitido ou proibido na natureza.

Para a glória da física do início do século XX, a experiência tem favorecido enormemente a teoria de Einstein. Até o presente momento as observações astrofísicas, tanto no limite de campo fraco como no limite de campo forte, tem imposto limites cada vez mais restritivos na possibilidade de alterarmos a teoria gravitacional vigente. Por que, então, prosseguir na busca?

As melhores respostas provêm da cosmologia e da física de altas energias, como veremos melhor nos próximos capítulos. Antes de nos aventurarmos no mundo das teorias alternativas da gravitação, no entanto, iremos introduzir alguns conceitos que serão utilizados nesta tese. A principal razão desta introdução é que os métodos que iremos apresentar, que usam as equações de Einstein-Cartan, não costumam ser apresentados nos textos tradicionais. Tais métodos são no entanto fundamentais para o estudo de algumas das teorias modificadas, em especial as teorias de Lovelock [Lov71]. São também necessários no estudo do acoplamento da força gravitacional com férmions, posto que estes últimos são construídos como representações fundamentais do grupo de Lorentz, e não possuem correspondente como representações do grupo de transformações gerais de coordenadas. Estes conceitos ficarão mais claros nas próximas seções.

2.2 CONCEITOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Nesta seção introduziremos brevemente alguns conceitos de geometria diferencial que serão utilizados nesta tese.

A Variedade semi-Riemanniana

O espaço-tempo será representado por uma **variedade semi-Riemanniana**. Em termos gerais, uma variedade semi-Riemanniana é um conjunto de pontos (ou eventos, no nosso caso) onde podemos definir, em cada região nas vizinhanças de um ponto, uma correspondência biunívoca com o \mathbb{R}^n . Em termos físicos, a definição acima incorpora o fato de

que localmente o espaço é plano, e a gravidade pode ser detectada apenas como forças de maré.

Um dos principais ingredientes da relatividade geral é que o espaço-tempo não possui um sistema de coordenadas predeterminado, e portanto, temos a liberdade de alterar nosso sistema de coordenadas, desde que usemos funções suaves e diferenciáveis. Localmente, sempre podemos encontrar um sistema de coordenadas onde a métrica corresponde à métrica de Minkowski, ainda que isto somente seja possível em todo o espaço quando o espaço for globalmente plano.

Em cada ponto da variedade podemos definir objetos como funções, vetores, tensores, formas diferenciais, etc. **Funções** representam o objeto mais simples que podemos pensar em definir. Dada uma variedade M , funções são mapas de M em \mathbb{R} . O segundo objeto mais simples que podemos definir são vetores, ou derivadas direcionais. **Vetores** são objetos intrínsecos à variedade, definidos no espaço tangente, e não precisam de nenhuma menção às coordenadas para serem definidos, porém vamos nos utilizar de coordenadas para ilustrar um simples exemplo. Dado um ponto na variedade e um sistema de coordenadas definido neste ponto, por exemplo, $x^\mu(M)$, exemplos de vetores são derivadas direcionais em relação às coordenadas utilizadas, por exemplo, $\partial_0, \partial_1, \partial_2$, onde $(0, 1, 2, \dots, N-1)$ denotam as coordenadas x^0, x^1, x^2 , etc. Este conjunto de N vetores em uma variedade N -dimensional forma uma base, a **base natural** deste sistema de coordenadas.

Dada uma base, qualquer outro vetor pode ser escrito em termos dela. Por exemplo, dada a base ∂_μ , um vetor genérico pode ser escrito como $\mathbf{v} = v^\mu \partial_\mu$. Note que o vetor em si não possui índices, o que corrobora o fato que o vetor é um objeto intrínseco à variedade, e não necessita de um sistema de coordenadas. Sendo mais correto, vetores são definidos em um espaço tangente à um determinado ponto na variedade. Definir objetos no espaço-tangente é uma forma de assegurar que nossos objetos são locais, e estão associados à um ponto da variedade. Podemos também definir campos vetoriais, e consecutivamente vetores em diferentes pontos da variedade, porém cada vetor será definido localmente.

Como o sistema de coordenadas que utilizamos é arbitrário, dados dois sistemas de coordenadas distintos, x^μ e x'^μ , um vetor pode ser escrito em qualquer um desses sistemas de coordenadas, e expandido em qualquer uma das bases naturais destes sistemas de coordenadas. Ou seja, $\mathbf{v} = v^\mu \partial_\mu = v'^\mu \partial_{\mu'}$. Muitas vezes é mais útil considerarmos as componentes do vetor como representando o próprio vetor, da forma que também podemos chamar v^μ ou v'^μ de vetor, desde que fique claro que estes últimos referem-se aos componentes do vetor em um determinado sistema de coordenadas. Nesta tese iremos utilizar ambas abordagens, sendo que o uso de uma ou outra ficará claro dentro do contexto.

Os objetos que vivem na variedade: Funções, vetores, co-vetores e tensores.

Vetores podem ser definidos como derivadas direcionais.

Vetores são objetos intrínsecos à variedade e não precisam de um sistema de coordenadas para serem definidos.

As componentes de um vetor em dois sistemas de coordenadas distintos estão relacionadas de forma que

$$v'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} v^{\nu}(x), \quad (2.2)$$

Transformação entre componentes de um vetor em dois sistemas de coordenadas.

em relação à transformação de coordenadas $x \rightarrow x' = x'(x)$. Funções escalares são aquelas que se transformam da forma

$$f'(x') = f(x), \quad (2.3)$$

ou seja, seu valor pontual é preservado perante uma transformação de coordenadas.

Podemos utilizar uma base não-coordenada.

Nos exemplos acima nós utilizamos de um sistema de coordenadas para definir uma base de vetores. Não precisamos, necessariamente, fazer isso. Podemos escolher uma base de vetores que não esteja ligado a nenhum sistema de coordenadas. Dessa forma, é mais correto escrevermos um vetor genérico como $\mathbf{v} = v^{(a)} e_{(a)}$, onde o índice (a) vai de 0 até $N - 1$. Apesar de parecer, em princípio, que estamos escrevendo o vetor da mesma forma que acima, há uma diferença conceitual. Quando utilizamos (∂_{μ}) estamos nos referindo ao fato que nos utilizamos das coordenadas x^{μ} para definir nossa base de vetores, enquanto que na segunda definição estamos nos referindo à uma base abstrata $(e_{(a)})$, que pode ou não ser uma base coordenada. Uma diferença ocorre, por exemplo, quando tomamos o comutador de vetores. No caso de uma base coordenada, obviamente $[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}] = 0$, pois as derivadas parciais usuais comutam. O mesmo não é o caso para uma base arbitrária, e em geral $[e_{(a)}, e_{(b)}] \neq 0$.

Co-vetores vivem no espaço co-tangente e são aplicações que levam vetores na reta real.

Da mesma forma que definimos vetores, podemos definir um espaço dual ao espaço tangente e definir covetores, tensores e formas diferenciais. Rigorosamente falando, **covetores** são mapas de vetores na reta real, ou seja, dado um vetor \mathbf{v} , um covetor \underline{w} é uma aplicação que leva \mathbf{v} em um número. Reciprocamente, podemos definir vetores como mapas de covetores na reta real, e expandir essa ideia para tensores, que nada mais é que uma aplicação de n vetores e m covetores na reta real. Em um sistema de coordenadas $(x^0, x^1, \dots, x^{N-1})$ a base natural para os covetores é dada por $dx^0, dx^1, \dots, dx^{N-1}$ e os covetores podem ser expandidos nela da forma $\underline{w} = w_{\mu} dx^{\mu}$. Em relação à transformação de coordenadas $x \rightarrow x' = x'(x)$, as componentes do covetor se transformam como

Transformação das componentes de um co-vetor.

$$w'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} w_{\nu}(x), \quad (2.4)$$

e, em uma base arbitrária, covetores são escritos da forma $\underline{w} = w_{(a)} dx^{(a)}$. Lembrando que covetores são mapas que levam vetores na reta real, podemos definir a aplicação de covetores em vetores da forma

$$\underline{w}(\mathbf{v}) = w_{\mu} v^{\nu} dx^{\mu}(\partial_{\nu}) = w_{\mu} v^{\mu}, \quad (2.5)$$

onde impomos a relação natural $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu$.

Tensores do tipo (n, m) são objetos que possuem n componentes que se transformam como um vetor e m componentes que se transformam como um covetor. Aqui estamos interessados em tensores do tipo $(0, p)$ e totalmente anti-simétricos em suas componentes. Tais objetos são denominados de **p-formas diferenciais**. Um escalar é naturalmente uma 0-forma diferencial, e um covetor é naturalmente uma 1-forma. Já uma 2-forma é escrita como $\underline{w} = A_{(a)(b)} dx^{(a)} \wedge dx^{(b)}$, onde a operação " \wedge " é chamada de produto externo e é útil para nos lembrar da anti-simetria do objeto. Uma propriedade fundamental é que $dx^{(a)} \wedge dx^{(b)} = -dx^{(b)} \wedge dx^{(a)}$. De forma análoga podemos escrever uma m -forma como $\underline{w} = A_{(a)(b)\dots(m)} dx^{(a)} \wedge dx^{(b)} \wedge \dots \wedge dx^{(m)}$.

Tensores, formas diferenciais e o produto externo.

2.2.1 A derivada exterior

Podemos definir um mapa de uma p -forma diferencial em uma $p + 1$ -forma diferencial através da **derivada exterior**. Como uma função é uma 0-forma diferencial, a derivada exterior de uma função é dada por

A derivada exterior é uma nova aplicação que transforma p -formas em $(p + 1)$ -formas.

$$f \rightarrow \underline{df} = (\partial_\mu f) dx^\mu, \quad (2.6)$$

onde vemos que o resultado é uma 1-forma diferencial. A derivada exterior de uma 1-forma diferencial é dada por

$$\underline{w} = w_\mu dx^\mu \rightarrow \underline{dw} = \partial_\nu w_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu, \quad (2.7)$$

e, em geral, a derivada de uma p -forma diferencial é uma $(p + 1)$ -forma diferencial, de maneira que

$$\underline{w} = w_{\mu\dots\nu} dx^\mu \wedge \dots \wedge dx^\nu \rightarrow \underline{dw} = \partial_\rho w_{\mu\dots\nu} dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge \dots \wedge dx^\nu. \quad (2.8)$$

2.2.2 A métrica

A **métrica** é um tensor do tipo $(0, 2)$ simétrico que tem um papel importante na descrição da geometria do espaço-tempo. Com a utilização da métrica, podemos introduzir o conceito de **produto interno** entre dois vetores, da forma que sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} dois vetores definidos em um espaço-tangente a algum ponto x na variedade, então, dada uma métrica \mathbf{g} , o produto escalar pode ser escrito como $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, ou, em termos de coordenadas, dados $\mathbf{v} = v^\nu \partial_\nu$ e $\mathbf{u} = u^\mu \partial_\mu$, temos

A métrica nos permite introduzir o conceito de produto interno entre vetores.

$$\mathbf{g}(u^\mu \partial_\mu, v^\nu \partial_\nu) = u^\mu v^\nu \mathbf{g}(\partial_\mu, \partial_\nu) = u^\mu v^\nu g_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a aplicação da métrica na base coordenada, $g(\partial_\mu, \partial_\nu)$. Através da métrica podemos definir um mapa 1 : 1 entre vetores e covetores, permitindo subir e descer os índices tensoriais de um determinado objeto, da forma

A métrica nos permite subir e descer índices, ou seja, é uma mapa entre vetores e co-vetores.

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu. \quad (2.10)$$

No seção seguinte iremos ver como a métrica se relaciona com os conceitos de geometria diferencial, previamente definidos.

2.3 CINEMÁTICA

O estudo da Relatividade Geral pode ser dividido entre a geração da curvatura do espaço-tempo pela matéria (e energia) e o efeito da curvatura do espaço-tempo na matéria. Nesta seção iremos estudar a curvatura do espaço-tempo, sem entrarmos na consideração de como ela é gerada.

Vamos começar definindo uma base local de 1-formas. Ou seja, em uma variedade N dimensional, escolhemos N 1-formas linearmente independentes, que serão denotadas por $\underline{e}^{(a)}$, onde (a) indica a qual das N 1-formas estamos nos referindo. Quando $N=4$, este conjunto é chamada de **tetrada**. Para N genérico, costuma-se usar o nome em alemão, **vielbein**. Ao adotarmos um sistema de coordenadas, podemos expandir estas N 1-formas na base natural deste sistema, da seguinte maneira

$$\underline{e}^{(a)} = e_\mu^{(a)} dx^\mu. \quad (2.11)$$

Utilizando as regras da derivada exterior, a primeira derivada da vielbein é dada por

$$d\underline{e}^{(a)} = \partial_\nu e_\mu^{(a)} dx^\nu \wedge dx^\mu. \quad (2.12)$$

A derivada exterior da vielbein não é invariante com respeito à transformações de Lorentz. A adição de um termo extra nos leva à primeira equação de estrutura de Cartan.

Devido à anti-simetria nos índices espaciais, as componentes da 2-forma acima são invariantes segundo transformações gerais de coordenadas. Existe uma segunda transformação, contudo, que devemos considerar. Nossa escolha da base $\underline{e}^{(a)}$ foi arbitrária, e qualquer outra base poderia também ter sido escolhida. Considerando uma transformação de Lorentz em nossa base de vielbein, $\underline{e}'^{(a)} = \Lambda^{(a)}_{(b)} \underline{e}^{(b)}$, a equação (2.12) transforma-se da forma

$$d\underline{e}'^{(a)} = d(\Lambda^{(a)}_{(b)} \underline{e}^{(b)}) = \Lambda^{(a)}_{(b)} d\underline{e}^{(b)} + d\Lambda^{(a)}_{(b)} \wedge \underline{e}^{(b)}, \quad (2.13)$$

e logo não é invariante segundo transformações locais de Lorentz. Podemos remediar este fato inserindo novos termos na equação (2.12). A derivada da *vielbein* será, então, dada por

$$d\mathbf{e}^{(a)} + \underline{\omega}^{(a)}_{(b)} \wedge \mathbf{e}^{(b)} \equiv \mathbf{T}^{(a)}, \quad (2.14)$$

onde $\underline{\omega}^{(a)}_{(b)}$ é uma 1-forma diferencial e se transforma como

$$\underline{\omega}'^{(a)}_{(b)} = \Lambda^{(a)}_{(c)} d\Lambda^{-1(c)}_{(b)} + \Lambda^{(a)}_{(c)} \underline{\omega}^{(c)}_{(d)} \Lambda^{-1(d)}_{(b)}, \quad (2.15)$$

e o objeto $\mathbf{T}^{(a)}$ é uma 2-forma e se transforma como um vetor pelo grupo de Lorentz, $\mathbf{T}^{(a)} = \Lambda^{(a)}_{(b)} \mathbf{T}^{(b)}$. Com estas transformações, a equação (2.14) é uma equação invariante de Lorentz. A 2-forma $\mathbf{T}^{(a)}$ é chamada de **2-forma de torção** e na relatividade geral ela é tomada como sendo nula. Nosso interesse não é nos mantermos, estritamente, no âmbito da relatividade geral, porém, consideraremos que a torção é nula, e no resto desta tese iremos considerar que $\mathbf{T}^{(a)} = 0$.

Nesta tese, a torção será considerada como nula.

A equação (2.14) é também conhecida como **primeira equação de estrutura de Cartan**, e a 1-forma $\underline{\omega}^{(a)}_{(b)}$ é conhecida como **conexão de spin**, tendo em vista que ela é utilizada para acoplar férmions com a gravitação. No caso de torção nula, a equação (2.14) nos dá a conexão de spin para uma determinada escolha da *vielbein*.

Com a métrica, podemos mapear cada *vielbein* em um vetor dual, de forma que $\mathbf{e}^{(a)}(\mathbf{e}_{(b)}) = \delta^{(a)}_{(b)}$, onde $\mathbf{e}_{(b)} = e_{(b)}^\mu \partial_\mu$ é o vetor correspondente à *vielbein* $\mathbf{e}^{(a)}$. Lembrando que um conjunto de N vetores linearmente independentes $\mathbf{e}_{(b)}$ pode ser visto como uma base não-coordenada, podemos escolher uma base que seja ortonormal, ou seja, uma base em que

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}) = \eta_{(a)(b)} = g_{\mu\nu} e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu. \quad (2.16)$$

Podemos também inverter (2.16), da forma que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{(a)(b)} e^{(a)}_\mu e^{(b)}_\nu. \quad (2.17)$$

Neste formalismo as componentes da *vielbein* podem ser vistas como uma espécie de raiz quadrada das componentes da métrica.

Outro papel importante das componentes da *vielbein* (e sua inversa) é trocar os índices espaço-temporais pelos índices de Lorentz. Já vimos que um vetor pode ser escrito tanto em base coordenada quanto em base não-coordenada, da forma que $\mathbf{A} = A^\mu \partial_\mu = A^{(a)} \mathbf{e}_{(a)}$. Va-

As componentes da vielbein e sua inversa podem ser utilizadas para trocar índices espaço-temporais por índices locais de Lorentz.

mos aplicar este vetor em uma forma diferencial dada por $\underline{e}^{(b)}$ ¹, da forma que

$$A^{(a)} \mathbf{e}_{(a)}(\underline{e}^{(b)}) = A^\mu \partial_\mu(\underline{e}^{(b)}). \quad (2.18)$$

O lado esquerdo da equação acima é uma delta de Kronecker, resultando em

$$A^{(b)} = A^\mu \partial_\mu(\underline{e}^{(b)}). \quad (2.19)$$

Para realizar a aplicação à direita, basta expandir a forma diferencial na base coordenada. Com isso, temos

$$A^{(b)} = A^\mu e^{(b)}{}_\nu \partial_\mu(dx^\nu) = A^\mu e^{(b)}{}_\mu. \quad (2.20)$$

De forma análoga, podemos obter que $A^\mu = e_{(b)}{}^\mu A^{(b)}$.

2.3.1 A 2-forma de curvatura

A transformação da conexão de spin é dada pela equação (2.15), e uma quantidade invariante sobre tais transformações é

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu(a)(b)} &= \partial_\mu \omega_{\nu(a)(b)} - \partial_\nu \omega_{\mu(a)(b)} \\ &+ \omega_{\mu(a)(b)} \omega_{\nu}{}^{(c)}{}_{(b)} - \omega_{\nu(a)(b)} \omega_{\mu}{}^{(c)}{}_{(b)}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

em componentes. A partir destes componentes podemos definir uma 2-forma,

$$\underline{\rho}^{(a)(b)} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{(a)(b)} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (2.22)$$

A segunda equação de estrutura de Cartan nos permite calcular a curvatura em termos da conexão de spin.

conhecida como **2-forma de curvatura**. A **segunda equação de estrutura de Cartan** nada mais é que a expressão dessa invariância escrita com formas diferenciais,

$$d\omega^{(a)(b)} + \omega^{(a)}{}_{(c)} \wedge \omega^{(c)(b)} = \underline{\rho}^{(a)(b)}. \quad (2.23)$$

A partir de (2.23) podemos determinar a 2-forma de curvatura em função da conexão de spin. Computacionalmente, esta forma de calcular as componentes da curvatura é muito mais rápida do que o método mais tradicional, baseado na métrica e na conexão. Nosso maior interesse, no entanto, é que este método baseado em formas diferenciais nos permite acoplar os férmions com o campo gravitacional, além de nos permitir discutir as teorias de Lovelock com mais facilidade.

¹ Anteriormente definimos a aplicação de um co-vetor em um vetor, porém a aplicação de um vetor em um co-vetor pode ser definida de forma análoga, e o resultado é o mesmo.

2.3.2 A conexão afim

Nesta seção abordaremos, brevemente, a relação entre a conexão de spin e a **conexão afim**. A compatibilidade métrica nos diz que a derivada covariante da métrica é nula,

$$\nabla_{\mu} g_{\nu\rho} \equiv \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} g_{\nu\sigma} = 0, \quad (2.24)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ é a conexão afim, cuja definição pode ser encontrada em livros introdutórios de relatividade geral ².

No formalismo de formas, a compatibilidade métrica está presente na derivada covariante da inversa da *vielbein*. No entanto, a *vielbein* e sua inversa possuem dois tipos de índices, $e^{(a)}_{\mu}$, um índice espaço-temporal e outro índice ligado às transformações de Lorentz. A derivada covariante deve, então, agir em ambos os índices com sua respectiva conexão, ou seja,

$$D_{\mu} e^{(a)}_{\nu} \equiv \partial_{\mu} e^{(a)}_{\nu} + \omega_{\mu}^{(a)}{}_{(b)} e^{(b)}_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} e^{(a)}_{\sigma} = 0. \quad (2.25)$$

Podemos trabalhar a equação (2.25) para escrever a conexão afim em termos da *vielbein* e dos componentes da conexão de spin, porém o cálculo é longo e o resultado não nos é necessário.

A partir da conexão afim, a cinemática de uma partícula livre é dada pela **equação de geodésica**,

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} - \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{ds} \frac{dx^{\rho}}{ds} = 0, \quad (2.26)$$

onde x^{μ} é a representação em coordenadas da curva parametrizada pelo parâmetro s .

2.4 A EQUAÇÃO DE EINSTEIN

A **equação de Einstein** é aquela que nos diz como a curvatura é gerada pela matéria na relatividade geral. Esta equação precisa ser postulada, e é exatamente este postulado que será contestado nesta tese. A maior parte das teorias modificadas da gravitação nos dá a curvatura em termos da matéria através de uma equação que é uma extensão da equação de Einstein, em geral adicionando novos termos a ela.

A equação de Einstein sem constante cosmológica é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

² A conexão afim é necessária na equação da geodésica, como veremos a seguir. Nesta tese, não iremos utilizar a equação da geodésica, da forma que não precisamos nos preocupar em calcular a conexão afim.

Caso necessário, a conexão afim pode ser calculada a partir da conexão de spin. A relação entre elas é dada pela compatibilidade métrica.

A equação da geodésica nos diz como a matéria se move no espaço-tempo.

A equação de Einstein nos diz como a matéria gera a curvatura do espaço-tempo na relatividade geral.

onde $R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$, $R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = R_{\mu\nu}{}^{(a)(b)} e_{(a)}{}^{\rho} e_{(b)}{}^{\sigma}$, $R \equiv R^{\mu}_{\mu}$ e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da fonte geradora de curvatura. Esta equação pode ser obtida a partir da variação da ação de Einstein-Hilbert em relação à métrica,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L + S_m \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} R + S_m, \quad (2.28)$$

onde S_m é a ação dos campos materiais. Como a ação e a Lagrangeana são invariantes por transformações gerais de coordenadas, o elemento de volume também precisa ser. Não é difícil mostrar que $d^4x \sqrt{-g}$ é um invariante, porém vamos reescrever este elemento de volume em termos de formas diferenciais, generalizando para D dimensões. Antes disso, precisamos fazer uma pequena digressão sobre como escrever elementos de volume utilizando formas diferenciais.

2.4.1 Elementos de volume

No espaço Euclideano em D dimensões, o elemento de volume é dado basicamente por $dx^1 dx^2 \dots dx^D$. Ao realizarmos uma transformação de coordenadas, o elemento de volume se altera para

$$dV = |A| dx^\mu dx^\nu \dots dx^\rho, \quad (2.29)$$

onde $|A|$ é o Jacobiano da matriz de transformação de coordenadas e $dx^\mu \dots dx^\rho$ engloba todas as componentes das novas coordenadas. Podemos escrever o resultado acima utilizando formas diferenciais, pois

$$dV = \omega_{12\dots D} dx^1 dx^2 \dots dx^D, \quad (2.30)$$

Podemos escrever o elemento de volume em termos de formas diferenciais.

tem como equivalente

$$d\mathbf{V} = \frac{1}{D!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D}. \quad (2.31)$$

Lembramos que o Jacobiano é o determinante da matriz Jacobiana, e existe uma forma simples de escrever o determinante de uma matriz em termos de tensores de Levi-Civita, dada por

$$\det A \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_D} \equiv \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} A^{a_1}_{b_1} A^{a_2}_{b_2} \dots A^{a_D}_{b_D}. \quad (2.32)$$

Aplicando (2.32) na *vielbein*, temos a identidade

$$e \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} \equiv \epsilon_{(a_1)(a_2) \dots (a_D)} e_{\mu_1}^{(a_1)} e_{\mu_2}^{(a_2)} \dots e_{\mu_D}^{(a_D)}, \quad (2.33)$$

onde, utilizando (2.17), temos que $e = \sqrt{-g}$. Dessa forma podemos definir o elemento de volume como

$$\begin{aligned}
 dV &\equiv \underline{e}^{(0)} \wedge \dots \wedge \underline{e}^{(D-1)} \\
 &= \frac{1}{D!} \epsilon_{(a_1)\dots(a_D)} \underline{e}^{(a_1)} \wedge \dots \wedge \underline{e}^{(a_D)} \\
 &= \frac{1}{D!} e \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} \\
 &= d^D x \sqrt{-g}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde $\underline{e}^0, \dots, \underline{e}^{D-1}$ formam uma base de 1-formas independentes. A passagem da segunda para a terceira foi feita com o uso da identidade (2.33).

2.4.2 A ação de Einstein-Hilbert em formas diferenciais

Juntando o elemento de volume escrito em termos de formas diferenciais e a 2-forma de conexão, a ação de Einstein-Hilbert pode ser generalizada para D dimensões, como segue

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{\kappa^2 (D-2)!} \int \epsilon_{(a)(b)(c_1)\dots(c_{D-2})} e^{(c_1)} \wedge \dots \wedge e^{(c_{D-2})} \wedge \rho^{(a)(b)}, \tag{2.35}$$

onde κ^2 é uma constante que vai depender da dimensão do espaço-tempo. Por enquanto, podemos considerá-la unitária. Em $D = 4$, a ação acima é dada por

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{4\kappa^2} \int \epsilon_{(a)(b)(c_1)(c_2)} R_{(c)(d)}^{(a)(b)} e^{(c_1)} \wedge e^{(c_2)} \wedge e^{(c)} \wedge e^{(d)}, \tag{2.36}$$

e, utilizando o fato que

$$e^{(a_1)} \wedge \dots \wedge e^{(a_q)} \wedge e^{(b_1)} \wedge \dots \wedge e^{(b_p)} = -e^{(a_1)\dots(a_q)(b_1)\dots(b_p)} dV, \tag{2.37}$$

temos

$$S_{\text{EH}} = -\frac{1}{4} \int \epsilon_{(c_1)(c_2)(a)(b)} \epsilon^{(c)(d)(c_1)(c_2)} R_{(c)(d)}^{(a)(b)} dV. \tag{2.38}$$

A contração dos tensores de Levi-Civita na equação (2.38) nos dá a equação de Einstein-Hilbert na forma dada por (2.28). Pode parecer que tomamos um caminho desnecessário ao definir a equação de Einstein-Hilbert utilizando formas diferenciais, porém este caminho é, na verdade, muito útil para descrever as teorias de Lovelock.

A ação de Einstein-Hilbert escrito em termos de formas diferenciais.

2.4.3 Adicionando novos termos

Baseado na ação de Einstein-Hilbert dada por (2.35), um segundo termo pode ser facilmente escrito como

$$S_{\text{GB}} = \alpha \int \epsilon_{(a)(b)(c)(d)} \rho^{(a)(b)} \wedge \rho^{(c)(d)}. \quad (2.39)$$

Este termo é claramente um invariante de Lorentz, e é denotado por termo de **Gauss-Bonnet**. Em 4 dimensões ele é uma derivada total, não contribuindo, então, para as equações de campo.

Um segundo termo que pode ser facilmente escrito é

$$S_{\Lambda} = \frac{\beta}{D!} \int \epsilon_{(c_1)(c_2)(c_3)(c_4)} e^{(c_1)} \wedge e^{(c_2)} \wedge e^{(c_3)} \wedge e^{(c_4)}. \quad (2.40)$$

Este é um termo de constante cosmológica, e encontra-se presente nos modelos mais recentes de cosmologia. Note que nessas três ações se destacam a presença de 0 (constante cosmológica), 1 (Einstein-Hilbert) e 2 termos de curvatura (Gauss-Bonnet). Estes são exatamente os termos de ordem 0, 1 e 2 de Lovelock. Como o tensor de Levi-Civita possui apenas quatro índices em quatro dimensões, não podemos inserir termos de ordem superior. No entanto, em D dimensões, o tensor de Levi-Civita possui D componentes, e isto nos permite incluir termos de ordem superior. Iremos estudar tais teorias na próxima seção.

2.5 TEORIAS DE LOVELOCK

Existem diversas formas de incluir novos termos à ação de Einstein-Hilbert. Nossa única exigência fundamental será que tais termos sejam invariantes de Lorentz. Os termos quadráticos R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ claramente obedecem este requisito.

Nesta seção estamos interessados, no entanto, em incluir termos de ordem superior que resultem em equações de campo com derivadas de, no máximo, segunda ordem na métrica. Como os tensores de Riemann, Ricci e o escalar de curvatura incluem derivadas de segunda ordem na métrica, termos quadráticos nestes objetos irão levar a derivadas de quarta ordem na métrica, após as necessárias integrações por partes. No entanto, será que existe alguma combinação entre esses objetos que nos resultem em uma teoria com, no máximo, derivadas segundas na métrica? A resposta é afirmativa, e tais teorias são conhecidas por teorias de Lovelock de ordem n, onde n indica a potência dos componentes de curvatura.

Uma teoria de Lovelock de ordem 0 não inclui nenhum termo de curvatura na ação, e na prática não é uma teoria dinâmica. Porém, o termo de Lovelock de ordem 0 é a constante cosmológica, e pode

A ação de Gauss-Bonnet em 4 dimensões.

A ação da constante cosmológica também pode ser escrita em termos de formas diferenciais.

A constante cosmológica, Einstein-Hilbert e Gauss-Bonnet são, respectivamente, os termos de ordem 0, 1 e 2 de Lovelock.

Teorias de Lovelock são teorias onde as equações de campo contêm derivadas na métrica de, no máximo, segunda ordem.

aparecer junto com termos superiores. Quando queremos nos referir a uma teoria onde aparece unicamente o termo de ordem n , dizemos tratar-se de uma teoria de Lovelock pura. A teoria de Lovelock de ordem 1 é a teoria de Einstein, e pode conter ou não o termo de constante cosmológica. A teoria de ordem 2 é também conhecida como Gauss-Bonnet, e em geral inclui também o termo de ordem 1, de Einstein. Tal teoria é, então, conhecida como teoria de **Einstein-Gauss-Bonnet**. A partir da ordem 3 não há um nome específico, e é comum ser chamada de teoria de Lovelock de ordem n , pura ou não.

A ordem possível para uma teoria de Lovelock depende da dimensão do espaço-tempo. Para que o termo exista e seja dinâmico, ele precisa ser proposto em um espaço-tempo de dimensão maior que $2n + 1$. Ou seja, um termo de Lovelock de ordem 2 só é dinâmico em cinco ou mais dimensões. Este termo, em quatro dimensões, é um termo de fronteira. Em D dimensões, o termo de Lovelock de ordem n é dado por

$$S_L = \frac{\alpha_n}{(D - 2n)!} \int \epsilon_{(a_1)(b_1)\dots(a_n)(b_n)(c_1)\dots(c_{D-2n})} e^{(c_1)} \wedge \dots \wedge e^{(c_{D-2n})} \wedge \rho^{(a_1)(b_1)} \wedge \dots \wedge \rho^{(a_n)(b_n)}. \quad (2.41)$$

Em cinco dimensões, por exemplo, o termo de Gauss-Bonnet é dado por

$$S_{GB} = \alpha \int \epsilon_{(a)(b)(c)(d)(c_1)} e^{(c_1)} \wedge \rho^{(a)(b)} \wedge \rho^{(c)(d)}. \quad (2.42)$$

É aqui que todo esse ferramental em formas diferenciais começa a fazer a diferença. Escrever os termos de Lovelock em formas diferenciais é simples, e escrevê-los em termos dos tradicionais tensores de curvatura é uma mera questão de combinatória. Seguindo o mesmo método utilizado na ação de Einstein-Hilbert, a equação (2.42) pode ser reescrita como

$$S_{GB} = -\frac{\alpha}{4} \int \epsilon_{abcdc_1} \epsilon^{(c_1efgh)} R^{ab}_{ef} R^{cd}_{gh} dV, \quad (2.43)$$

onde deixamos de incluir os parênteses em volta dos índices locais por questão de espaço. A contração dos tensores de Levi-Civita com os termos de curvatura, dadas por

$$\epsilon_{abcdc_1} \epsilon^{c_1efgh} R^{ab}_{ef} R^{cd}_{gh} = -4(R^2 + R_{abcd} R^{abcd} - 4R_{ab} R^{ab}), \quad (2.44)$$

nos permite escrever o termo de Gauss-Bonnet da seguinte forma

$$S_{GB} = -\alpha \int d^5x \sqrt{-g} (R^2 + R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}). \quad (2.45)$$

A ação de Gauss-Bonnet em 5 dimensões.

Termos de Lovelock de ordem superior são facilmente calculáveis de forma análoga, porém, suas expressões são longas e não muito convidativas para análise. Uma prova simples de que a variação destes termos resulta em equações de campo com derivadas de no máximo segunda ordem na métrica pode ser encontrado em [Zum86].

2.6 TEORIAS $f(R)$

Teorias de Lovelock são naturais apenas em dimensões maiores que 4.

As teorias de Lovelock adicionam correções à ação de Einstein-Hilbert, com o vínculo de que as equações de campo decorrentes devam possuir derivadas na métrica de, no máximo, segunda ordem. Em quatro dimensões, este vínculo seleciona a ação de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica, e apenas ela. Com isso, podemos entender as teorias de Lovelock como uma generalização natural da relatividade geral apenas para dimensões superiores. Se deixarmos este vínculo de lado e permitirmos que as equações de campo resultantes sejam de ordem superior na métrica, há várias extensões da gravitação de Einstein que podem ser propostas.

Uma extensão bem conhecida é o **modelo de Starobinsky** [Sta80], onde a ação do campo gravitacional é dada por

Ação para o modelo de Starobinsky. Exemplo de uma teoria gravitacional com derivadas superiores.

$$S_{St} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \alpha R^2), \quad (2.46)$$

ou seja, adicionamos um termo quadrático na ação. O artigo original de Starobinsky trata de um modelo cosmológico não-singular, porém a adição de um termo quadrático na ação também mostrou uma melhora na renormalizabilidade da teoria [Ste77]. Mais recentemente, dados do satélite Planck indicaram que o modelo inflacionário de gravitação de Starobinsky é um dos que melhor se adequam às observações feitas [Planck14].

O modelo de gravitação de Starobinsky pode ser visto como uma primeira correção de uma teoria polinomial no escalar de curvatura. Mais genericamente, pode ser visto como um modelo do tipo $f(R)$, onde a ação de Einstein-Hilbert é substituída por uma função genérica no escalar de curvatura, do tipo

Ação para teorias $f(R)$, onde $f(R)$ é uma função analítica no escalar de curvatura.

$$S_{f(R)} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (2.47)$$

onde, no caso de Starobinsky, $f(R) = R + \alpha R^2$.

Teorias $f(R)$ de gravitação foram muito estudadas nas últimas duas décadas, especialmente depois da descoberta que nosso universo apresenta uma expansão acelerada (para uma revisão, ver [SF10]). A gravitação de Einstein não explica este fato, a menos que se introduza uma constante cosmológica ad hoc. Uma outra fonte de explicação para tal aceleração é a existência de um tipo de energia desconhecida,

com propriedades similares ao de uma constante cosmológica. Até o presente momento, no entanto, não há um consenso para a origem da expansão acelerada do universo.

Teorias $f(R)$ ganharam interesse por incluir, naturalmente, em seu formalismo um universo acelerado [Cap02, CDTT04]. Alguns modelos $f(R)$ conseguem incorporar em um mesmo modelo tanto esta aceleração tardia do universo quanto a expansão inicial, conhecida como inflação [NO03].

Uma segunda forma de trabalharmos com teorias $f(R)$, que não resulta em derivadas superiores na métrica, é o chamado **formalismo de Palatini** [SF10]. Neste formalismo, a métrica e a conexão são objetos independentes, o que faz com que o escalar de curvatura seja função de uma derivada primeira na conexão. Variando a ação em termos da conexão, o resultado será uma equação de campo com derivada segunda na conexão. Variando a ação em relação a métrica, obteremos uma relação que nos dá a conexão em função da métrica e do tensor de energia-momento envolvido. Tais teorias em geral são mais fáceis de trabalhar do que as teorias ditas métricas, onde a conexão é pré-definida pela métrica. Ainda que as teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini contenham problemas [BSMo8], tais não são maiores ou menores do que nas teorias $f(R)$ no formalismo métrico. Neste tese, no entanto, vamos nos ater ao formalismo métrico, onde a conexão não é uma variável independente.

No formalismo de Palatini, a conexão e a métrica são objetos independentes.

2.6.1 Equações de campo

As equações de campo para teorias $f(R)$ são encontradas variando-se a ação de $f(R)$ em relação à métrica, da forma

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x (\delta\sqrt{-g}) f(R) + \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) \delta R. \quad (2.48)$$

Os detalhes desta derivação serão deixados para o apêndice (B). Aqui iremos apenas apresentar o resultado final. Igualando esta variação a zero, obtemos

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = 0 \quad (2.49)$$

no vácuo, ou

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.50)$$

Equações de campo para teorias $f(R)$.

se incluirmos matéria, onde $\kappa^2 = 8\pi G$, $f'(R) = df(R)/dR$ e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento relacionado aos campos de matéria, dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.51)$$

e ∇_μ é a derivada covariante associada com a conexão afim.

Notamos que as equações (2.50) possuem derivadas de quarta ordem na métrica, em vista que $f'(R)$ já possui derivadas de segunda ordem. Outra característica das equações (2.50) é que se reduzem às equações de Einstein quando $f(R) = R$.

Tomando o traço de (2.50), obtemos

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\Box f'(R) = \kappa T, \quad (2.52)$$

Em teorias $f(R)$ o escalar de curvatura obedece uma equação diferencial, e não algébrica. No vácuo, não há mais a imposição que $R = 0$.

a qual merecem alguns comentários importantes. O primeiro é que o escalar de curvatura agora obedece uma equação diferencial, e não mais uma equação puramente algébrica, como no caso da relatividade geral. Este é um fato importante, pois nos permitirá utilizar o escalar de curvatura como um campo dinâmico, reduzindo, assim, uma equação de quarta ordem em duas equações de segunda ordem. O segundo fato importante é que, no vácuo, não mais temos a imposição que $R = 0$. No limite assintótico, se considerarmos que o escalar de curvatura é constante, a equação (2.52) no vácuo se reduz a

$$R_c f'(R_c) - 2f(R_c) = 0, \quad (2.53)$$

que pode, obviamente, conter soluções com $R_c \neq 0$. Uma segunda forma de ver isto é reescrever (2.50) de uma forma que nos lembre as equações de Einstein, ou seja,

Teorias $f(R)$ podem ser reescritas na forma da equação de Einstein com um tensor de energia-momento efetivo.

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa}{f'(R)}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{eff}}), \quad (2.54)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} \equiv \frac{1}{\kappa} \left(\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \Box f'(R) \right). \quad (2.55)$$

Este tensor de energia-momento efetivo pode funcionar como uma constante cosmológica e explicar a aceleração observada do universo. Mas um dos grandes problemas com as teorias $f(R)$ pode ser exatamente esta liberdade. Se pensarmos nas equações de Einstein, podemos, em princípio, encontrar qualquer solução que imaginarmos. Dado

uma métrica, as equações de Einstein nos fornecem um tensor de energia-momento. A pergunta, então, se resume a saber se o tensor de energia-momento encontrado tem alguma ligação com a realidade. O análogo em teorias $f(R)$ é que, dada uma métrica, a teoria nos fornece uma forma analítica para a função $f(R)$. Isto nos remete a uma pergunta, que é a seguinte: Esta forma funcional tem alguma ligação com a realidade?

Uma segunda forma de lidar com teorias $f(R)$ é escolher a forma analítica de $f(R)$ desde o início. Isto nos tira a liberdade de impor condições na métrica que não sejam aquelas ligadas à simetria do problema a ser tratado. O modelo de Starobinsky é uma boa escolha, assim como um modelo estendido de Starobinsky, do tipo polinomial. Nesta tese iremos trabalhar com todas essas possibilidades.

2.7 TEORIA DE BRANS-DICKE

A **teoria de Brans-Dicke** [BD61] é o exemplo mais conhecido das chamadas teorias escalar-tensoriais [FM07], que recebem esse nome pelo fato da gravidade ser mediada tanto por um tensor de ordem 2, a métrica, como por um campo escalar. Na gravitação tradicional, a métrica se acopla com os campos de matéria através do acoplamento mínimo, e a matéria determina a métrica através das equações de Einstein. Na teoria de Brans-Dicke, a métrica continua a se acoplar com os campos de matéria através do acoplamento mínimo³, porém um campo escalar se acopla com os tensores de curvatura diretamente na ação, o que modifica as equações de campo para a métrica.

São várias as motivações para o modelo escalar-tensorial. Uma das mais importantes foi o aspecto filosófico acerca da natureza da própria interação gravitacional. Quando Einstein desenvolveu sua teoria, ele tentou incorporar dentro dela a ideia do filósofo Mach, de que, se o espaço absoluto não existe, a interação gravitacional entre os corpos deve ser uma função unicamente da distribuição destes corpos no espaço-tempo. Ou seja, a constante de gravitação de Newton, que representa a força de interação gravitacional entre os corpos, deve ser uma função de toda a matéria presente no universo. Deve ser, então, uma função que varia no espaço e também no tempo. A ideia que a constante gravitacional varia no tempo já havia sido apresentada antes pelo físico P. A. M. Dirac, ao perceber uma relação entre a idade do universo e tal constante [Dir38].

A ideia do espaço absoluto de Mach foi de grande motivação para Einstein, porém, suas equações apresentam soluções que a contrariam. A solução mais óbvia é o próprio espaço de Minkowski, que é uma solução onde não há presença alguma de matéria. Se não há presença alguma de matéria, segundo Mach, não faz sentido em falar de es-

A teoria de Brans-Dicke tenta incorporar o princípio de Mach na gravitação, mantendo-se o formalismo métrico. A matéria ainda obedece a equação da geodésica, porém a métrica terá uma dependência com o campo escalar.

³ Esta é a característica das teorias métricas, como a Relatividade Geral, teoria de Brans-Dicke e teorias $f(R)$ no formalismo métrico.

paço ou espaço-tempo. A exclusão do espaço de Minkowski como possível solução de suas equações foi um dos motivos que levou Einstein a incluir um termo de constante cosmológica, além de questões cosmológicas. Uma segunda solução que não obedece o princípio de Mach é a solução de Gödel [God49], um espaço-tempo em rotação com matéria distribuída homoganeamente.

Como mencionado, uma forma de tentar incorporar as ideias de Mach na gravitação é substituir a constante gravitacional por uma função, ou por um campo escalar. Uma ação para este cenário pode ser escrita da forma

*A ação de
Brans-Dicke.*

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi} \left(\phi R - \omega \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{\phi} \right) + S_m, \quad (2.56)$$

onde S_m é a ação dos campos materiais e ω é um parâmetro independente. Variando-se a ação (2.56) em relação ao termo métrico, encontramos as equações de campo para a mesma, dadas por

*Equações de campo
para a métrica na
teoria de
Brans-Dicke.*

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} &+ \frac{\omega}{\phi^2} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi) \\ &+ \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Podemos ver um pouco de semelhança com as equações para a teoria $f(R)$, e vamos explorar melhor esta semelhança no próprio capítulo. A primeira solução métrica para a teoria de Brans-Dicke foi encontrada pelo próprio Carl Brans em sua tese de doutoramento, no caso de vácuo exterior a um objeto esfericamente simétrico. Esta solução, que seria o equivalente à solução de Schwarzschild da gravitação de Einstein, mostrou-se incompatível com os dados referentes ao sistema solar, a menos para valores de ω muito grandes. De fato, recentes valores observacionais estabelecem um limite inferior para ω , de forma que $\omega > 40.000$, o que é um valor aparentemente não muito natural para um parâmetro independente. Quando $\omega \rightarrow \infty$, recuperamos a gravitação de Einstein em alguns casos [Faro4]⁴.

Apesar de aparentemente incompatíveis com os dados observacionais relativos ao sistema solar, as teorias escalar-tensoriais tem sido bastante estudadas nos últimos anos, em parte devido à sua relação com teorias superssimétricas e teorias de cordas. Isto porque as teorias de cordas (e certas teorias de supergravidade) preveem a presença de um campo escalar que se acopla não-minimamente aos termos gravitacionais. Nestes casos, os dados observacionais podem ser facilmente ignorados ao impormos um termo de massa para o campo escalar. Sendo um campo massivo, seu alcance se limita ao das partículas elementares, e ele não exerce influência alguma nos

⁴ Ao menos quando o traço do tensor energia-momento não for nulo.

limites planetários ou cosmológicos. Por esta razão teorias de Brans-Dicke em geral aparecem com um termo de potencial na ação, escrita em sua forma geral como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi} \left(\phi R - \omega \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{\phi} - V(\phi) \right) + S_m. \quad (2.58)$$

Como veremos no próximo capítulo, é justamente a presença deste potencial escalar que permite uma correspondência entre teorias $f(R)$ e teorias de Brans-Dicke.

*Ação de Brans-Dicke
com um potencial
para o campo
escalar.*

SOLUÇÕES EXATAS E CORRESPONDÊNCIAS ENTRE TEORIAS

3.1 A CORRESPONDÊNCIA ENTRE TEORIAS $f(R)$ E BRANS-DICKE

A princípio, teorias de Brans-Dicke e $f(R)$ da gravitação podem parecer totalmente distintas. A primeira é uma teoria que envolve a métrica e um campo escalar, ambos obedecendo equações diferenciais de segunda ordem. A segunda é uma teoria com derivadas de quarta ordem na métrica, sem a presença de um campo escalar. Porém, apesar da aparente diferença, veremos neste capítulo que há uma correspondência matemática entre elas ¹ [GB15]. Podemos pensar na relação entre estas duas teorias da mesma forma que equações diferenciais de ordem superior podem ser reduzidas em ordem se aumentarmos o número de equações diferenciais.

Dada uma equação diferencial de quarta ordem, podemos reduzi-la a um conjunto de duas equações diferenciais de segunda ordem, acopladas. Este é justamente o caso de Brans-Dicke. No entanto, que as teorias $f(R)$, quando reduzidas, recaiam justamente em um caso particular de Brans-Dicke não é nada óbvio, nem esperado a priori. Lembrando que as equações em $f(R)$ no vácuo são dadas por

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square]f'(R) = 0, \quad (3.1)$$

onde $f'(R)$ recebe a aplicação de uma operador que contém derivada de segunda ordem. Como queremos manter esta a ordem máxima de derivação, devemos tratar esta função como uma variável independente. Definindo $\phi(r) \equiv f'(R(r))$, obtemos

$$\phi R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square]\phi = 0. \quad (3.2)$$

Comparando esta equação com a equação de Brans-Dicke,

$$\begin{aligned} \phi(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) &= \frac{\omega}{\phi}(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi) \\ &+ (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square)\phi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

podemos igualar as duas equações de campo se tomarmos $\omega = 0$ e somarmos, na equação (3.3), o termo

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu} \phi R - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

¹ Se há uma correspondência física ou não, ainda é questão em debate

Equações diferenciais de ordem n podem ser reduzidas em n equações diferenciais de primeira ordem.

A relação entre teorias de Brans-Dicke e $f(R)$ começa com a identificação de $\phi(r)$ com $f'(R)(r)$

A correspondência entre $f(R)$ e Brans-Dicke é feita através de um potencial para o campo escalar.

Este termo pode ser incluído como um potencial na ação, dado por

$$V(\phi) = R\phi - f(R). \quad (3.5)$$

Nesta caso, a ação de Brans-Dicke com um potencial é dada por

$$S_{\text{BD}} = \int \sqrt{-g} d^4x (\phi R - V(\phi)), \quad (3.6)$$

onde deve ficar claro que a ação (3.6) é a ação de Brans-Dicke no contexto da correspondência Brans-Dicke com $f(R)$, ou seja, com $\omega = 0$ e o potencial como determinado pela equação (3.5). Um primeiro ponto que nos chama atenção é o fato de que a ação (3.6) não possui termo cinético no campo escalar. Isto não quer dizer, no entanto, que o campo escalar, em si, não seja dinâmico. A dinâmica está, na verdade, escondida dentro do acoplamento não-mínimo, o que veremos com mais detalhes a seguir.

Outro ponto importante é que uma análise superficial desta relação pode dar a entender que teorias $f(R)$ representariam uma subclasse de soluções da teoria de Brans-Dicke, em vista da restrição imposta que $\omega = 0$. Isto, no entanto, não é verdadeiro. A relação entre Brans-Dicke e $f(R)$ é possível apenas com a introdução de um termo potencial, e este termo potencial depende explicitamente da forma analítica da $f(R)$ escolhida. Ou seja, nossa teoria de Brans-Dicke necessita de um potencial cuja forma analítica é restrita pela teoria $f(R)$ correspondente.

Variando a ação (3.6) em relação a métrica e ao campo escalar temos, respectivamente,

Equação de campo para a métrica.

$$\phi G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi) - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \phi = 0 \quad (3.7)$$

e

$$R = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (3.8)$$

Ainda que a equação (3.8) possa parecer indicar que o campo escalar não possui dinâmica, isso não é verdade. Tomando o traço de (3.7), temos

$$-R\phi + 2V(\phi) + 3\square\phi = 0 \rightarrow R = \frac{3}{\phi} \square\phi + \frac{2V(\phi)}{\phi}. \quad (3.9)$$

Equação de campo para o campo escalar.

Substituindo este resultado em (3.8), obtemos

$$\square\phi = \frac{\phi}{3} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} - \frac{2}{3} V(\phi), \quad (3.10)$$

que mostra claramente que o campo escalar possui dinâmica.

Antes de nos estendermos na relação entre teorias $f(R)$ e Brans-Dicke, precisamos estudar um pouco mais detalhadamente um método de encontrar soluções exatas nestas teorias

3.2 SOLUÇÕES EXATAS EM TEORIAS $f(R)$

Para encontrar soluções exatas em teorias $f(R)$ devemos, como de costume, resolver as equações de campo. No entanto, pela não-linearidade da equação (3.1) nota-se que esta não é das tarefas mais fáceis.

Vamos começar com um caso simples, onde o escalar de curvatura é constante. Tomando o traço da equação (3.1), obtemos

$$f'(R)R - 2f = 0. \quad (3.11)$$

Substituindo esta expressão em (3.1), obtemos que

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}f'(R)Rg_{\mu\nu} = 0, \quad (3.12)$$

o que nos lembra muito a equação de Einstein, porém a constante multiplicativa do segundo termo foi alterada. Para uma métrica esfericamente simétrica do tipo Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + A(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.13)$$

onde $d\Omega^2$ representa o ângulo sólido, temos como solução do conjunto de equações (3.12) a expressão

$$A(r) = \left(1 - \frac{a}{r} + br^2\right). \quad (3.14)$$

Esta é justamente a métrica de Schwarzschild-(anti-)de Sitter! E como a métrica de Schwarzschild-de Sitter explica naturalmente a expansão acelerada do universo, aparentemente teorias $f(R)$ da gravitação poderiam dar conta deste problema sem a introdução de uma constante cosmológica ad hoc.

No entanto, a solução acima apresenta sérias nuances que devem ser consideradas. Inicialmente, vamos ver porque ela funciona. Se tomarmos uma equação tipo-Einstein, da forma

$$R_{\mu\nu} - cRg_{\mu\nu} = 0, \quad (3.15)$$

seu traço é dado por

$$R(1 - 4c) = 0, \quad (3.16)$$

Uma solução para teorias $f(R)$ com escalar de curvatura constante.

A métrica de Schwarzschild-(anti-)de Sitter é uma solução para teorias $f(R)$.

o que nos impõe duas soluções. Ou $R = 0$, o que implica um espaço assintoticamente plano, ou $c = 1/4$, que é o caso da equação (3.12), o que explica porque obtivemos uma solução com constante cosmológica. Na gravitação de Einstein, isto só é possível se introduzirmos uma constante cosmológica ou, é claro, na presença de matéria.

Para chegar até a equação (3.12), no entanto, foi preciso estabelecer que o escalar de curvatura é constante. Há algum problema nisso? Devemos recordar que em teorias $f(R)$ o escalar de curvatura é considerado um campo dinâmico, ou seja, ele obedece a equações diferenciais, e as soluções de equações diferenciais dependem de condições de contorno. Em [ESo6] foi mostrado que o escalar de curvatura não pode ser nulo nas proximidades de uma estrela para teorias do tipo $f(R) = R + \alpha/R$, porque tal resultado não é condizente com suas condições de contorno. Posteriormente, tal resultado foi generalizado para uma classe maior de teorias $f(R)$ [CSE07]. Desta forma, devemos ter muito cuidado em estabelecer que a métrica de Schwarzschild-de Sitter é uma solução válida para teorias $f(R)$ da gravitação.

A imposição de que o escalar de curvatura é uma constante pode violar as condições de contorno do problema.

Do ponto de vista da correspondência entre $f(R)$ e Brans-Dicke, a solução acima é muito natural ao lembrarmos que a correspondência exige a presença de um potencial escalar. Partindo da afirmação que o escalar de curvatura é constante, temos que o potencial $V(\phi)$ também é constante, e a ação de Brans-Dicke da correspondência é dada por

A solução de Schwarzschild-de Sitter pode também ser obtida através da correspondência $f(R)$ /Brans-Dicke

$$S_{BD} = \int \sqrt{g} d^4x (c\phi - V(c)), \quad (3.17)$$

onde c é uma constante. Esta é a ação de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica, que tem como solução particular a métrica de Schwarzschild-de Sitter.

Vamos passar agora ao caso em que o escalar de curvatura não é constante. A melhor forma de resolver o sistema de equações (3.1) na presença de matéria, é reescreve-los da forma

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - \kappa^2 T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} K(R, T), \quad (3.18)$$

onde $K(R, T)$ é uma função do escalar de curvatura e do traço da métrica. A forma analítica de $K(R, T)$ não nos interessa muito, mas tão somente o fato de que ele não depende dos índices μ e ν . Com isso, a expressão

Um outro método para encontrar soluções exatas em teorias $f(R)$.

$$C_\mu = \frac{f'(R)R_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu f'(R) - \kappa^2 T_{\mu\mu}}{g_{\mu\mu}} \quad (3.19)$$

para o índice μ fixo é válida para qualquer índice escolhido. Assim, a relação $C_\mu - C_\nu$ também nos fornece um conjunto válido de equações diferenciais que o sistema deve obedecer. Vamos utilizar este método

na próxima seção para calcular a métrica do monopolo global em teorias $f(R)$ da gravitação.

Outra forma de encontrar soluções exatas em teorias $f(R)$ é utilizar o método Lagrangeano, que consiste em reescrever a ação da teoria em termos da métrica. Este método foi utilizado em [SZ11] para o caso de soluções esfericamente simétricas. Na abordagem usada pelos autores, foi deixado em aberto a forma analítica de $f(R)$ e utilizado um multiplicador de Lagrange para o escalar de curvatura.

Admitindo que a métrica pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -B(r)e^{2\alpha(r)} dt^2 + \frac{1}{B(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.20)$$

os autores reescreveram a ação como

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int dt \int dr \left(e^{\alpha(r)r^2} \right) [R - \lambda (R(r) - R(\alpha, B))], \quad (3.21)$$

onde $R(\alpha, B)$ é o escalar de curvatura escrito em termos da métrica. Variando a ação (3.21) em relação a B e α e integrando por partes, pode-se encontrar um conjunto de equações diferenciais ordinárias para as funções B , α , $f(R)$ e R .

No caso de $\alpha(r)$ ser constante, ou seja, no caso de uma métrica do tipo Schwarzschild, a função $f(R)$ necessariamente obedece a condição

$$f'(R) = \alpha r + b. \quad (3.22)$$

De forma semelhante, a função $B(r)$ obedece a uma equação diferencial que pode ser resolvida. Aqui não estamos interessados no conjunto completo de soluções, e vamos nos restringir ao caso particular onde $b = 0$. Neste caso, a função $B(r)$ é dada por

$$B(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_1}{r^2} + C_2 r^2 \right). \quad (3.23)$$

Podemos, então, inserir α e B no escalar de curvatura e inverter a função $R(r)$, ou seja, podemos encontrar que

$$r = \sqrt{\frac{1}{6C_2 - R}}. \quad (3.24)$$

Inserindo este resultado na equação (3.22), encontramos que

$$f'(R) = \alpha \sqrt{\frac{1}{6C_2 - R}} \quad (3.25)$$

O método Lagrangeano consiste em escrever a ação em termos dos componentes de um ansatz para a métrica.

Uma solução esfericamente simétrica para teorias $f(R)$ com escalar de curvatura não constante.

e, integrando este resultado, obtemos

$$f(R) = -2\alpha\sqrt{6C_2 - R}. \quad (3.26)$$

O método de reconstrução em teorias $f(R)$. Ele pode ser utilizado para nos orientar na busca de uma teoria efetiva da gravitação.

O que encontramos no final é que a forma analítica de $f(R)$ nos foi dada pela teoria, e não imposta do início. Este é um tipo de técnica conhecida como **reconstrução**, em vista que reconstruímos a forma analítica de $f(R)$ a partir de um *ansatz* para a métrica.

Na relatividade geral, nada nos impede de aplicar uma técnica semelhante. Dada uma métrica que gostaríamos de obter, podemos calcular qual tensor de energia-momento pode gerar tal requerida métrica. No caso de teorias $f(R)$, o que calculamos é qual forma analítica de $f(R)$ pode nos gerar determinada métrica. Se a forma analítica encontrada possui alguma conexão com a realidade ou não é uma questão à parte.

Este método tem sido amplamente utilizado em modelos cosmológicos, em vista a tentar reconstruir todas as fases evolutivas do universo para uma única forma analítica de $f(R)$. Seu sucesso pode ser utilizado, por exemplo, na construção de teorias efetivas [NOSG09].

3.3 O MONOPOLO GLOBAL EM TEORIAS $f(R)$

Nesta seção iremos encontrar a métrica de um monopolo global em teorias $f(R)$ da gravitação. Para isso iremos utilizar o primeiro método entre os descritos na seção anterior, utilizando a igualdade entre os coeficientes C_μ dados pela expressão (3.19).

Monopolos são defeitos topológicos. No próximo capítulo iremos explicar no que se constituem os defeitos topológicos e trabalhar em detalhes dois tipos de defeitos, os kinks e as cordas. Nessa seção nos limitaremos a encontrar a métrica gerada por um tensor de energia-momento específico. No caso, iremos utilizar o tensor de energia-momento que tenta reproduzir um monopolo global idealizado. Tal tensor de energia-momento é dado por

$$T_\mu^\nu \approx \text{diag} \left(\frac{\eta^2}{r^2}, \frac{\eta^2}{r^2}, 0, 0 \right), \quad (3.27)$$

Estamos interessados em encontrar uma solução métrica em $f(R)$ cuja fonte é um tensor de energia-momento que pode descrever, por exemplo, um monopolo global idealizado.

onde η é um parâmetro da teoria que se relaciona com o valor esperado no vácuo de um campo escalar primordial. Novamente, neste momento não estamos interessados na origem do tensor de energia-momento acima, apenas em encontrar uma solução métrica cuja fonte pode ser modelada por um tensor deste tipo.

Devido a simetria esférica do sistema físico, o elemento de linha da geometria gerada por este objeto pode ser escrito como

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (3.28)$$

Na relatividade geral, este sistema foi resolvido em [BV89] e a solução encontrada, em termos das funções $A(r)$ e $B(r)$ é dada por

$$B = A^{-1} \approx 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r}, \quad (3.29)$$

onde M é a massa do monopolo.

Nosso objetivo é generalizar este resultado para o caso de teorias $f(R)$. Como já vimos, dado a expressão C_μ definida por (3.19), a relação $C_\mu - C_\nu = 0$ é válida para todos os índices μ e ν . Com isso, temos um conjunto de equações que devem ser satisfeitas.

Utilizando o mesmo ansatz (3.28), podemos construir duas equações diferenciais linearmente independentes [CBdMG11], dadas por

$$\frac{\beta}{r} = \frac{F''}{F'} - \frac{1}{2} \frac{F'}{F} \beta \quad (3.30)$$

e

$$-4B + 4AB - 4rB \frac{F'}{F} + 2r^2 B' \frac{F'}{F} + 2r^2 B'' - r^2 B' \beta + 2Br\beta - \frac{4AB\kappa^2 \eta^2}{F} = 0, \quad (3.31)$$

onde $\beta = B'/B + A'/A$, o símbolo $(')$ indica derivação em termos da componente radial e a função $F(R)$ é dada por $df(R)/dR$, ou seja, a derivada da função $f(R)$ em relação ao escalar de curvatura.

Até onde sabemos, estas equações não possuem solução exata, de forma que iremos utilizar uma aproximação de campo fraco. Para obter uma solução, vamos assumir que as funções $A(r)$ e $B(r)$ são dadas por $A(r) = 1 + a(r)$ e $B(r) = 1 + b(r)$, onde $|a(r)|$ e $|b(r)|$ são valores bem menores que a unidade. Vamos, também, considerar que a teoria $f(R)$ em questão é apenas uma correção da relatividade geral, da forma que temos $F(r) = 1 + \psi(r)$, com $|\psi(r)| \ll 1$.

Admitindo estas condições, as equações (3.30) e (3.31) podem ser aproximadas por [CBdMG11]

$$\frac{\beta}{r} = \psi'' \quad (3.32)$$

e

$$4a - 4r\psi' + 2r(a' + b') - 2r^2 b'' - 4(1 + a + b - \psi)\kappa^2 \eta^2 = 0. \quad (3.33)$$

Para continuar, devemos adotar uma forma analítica para a função $\psi(r)$. A forma mais simples que podemos pensar é uma dependência linear, da forma $\psi(r) = \psi_0 r^2$. Com isso, a equação (3.33) nos dá como

A métrica do monopolo global na gravitação de Einstein.

Equações em $f(R)$ para um monopolo global ideal no regime de campo fraco.

2 Esta escolha foi recentemente generalizada em [LGFN15]

resultado $a(r) = -b(r)$. Nesta escolha, a equação (3.32) se reduz à expressão

$$\frac{1}{2}r^2b'' - b - r\psi_0 - (1 - \psi_0r)\kappa^2\eta^2 = 0, \quad (3.34)$$

que tem como solução

$$b(r) = \frac{c_1}{r} + c_2r^2 - \kappa^2\eta^2 - \psi_0r(1 - \kappa^2\eta^2), \quad (3.35)$$

onde os parâmetros c_1 e c_2 são constantes de integração. O primeiro termo da expressão acima é um termo de massa na aproximação Newtoniana. O segundo termo é do tipo gerado por uma constante cosmológica, e em princípio iremos considerá-lo nulo. Admitindo que $\kappa^2\eta^2 \ll 1$, o que é válido para a maioria das teorias de grande unificação, a função métrica $B(r)$ é dada por

A métrica do monopolo global em uma classe das teorias $f(R)$, onde $f'(R) = \psi_0r$.

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0r, \quad (3.36)$$

sendo que $A(r) = B(r)^{-1}$. Se compararmos com o resultado para o monopolo global na relatividade geral, vemos que as teorias $f(R)$ adicionam em primeira ordem uma contribuição à métrica dada por ψ_0r [CBdMG11].

Agora podemos reconstruir esta teoria $f(R)$, ou seja, encontrar qual $f(R)$ está associada à métrica que obtivemos. Para isto, basta calcular o escalar de curvatura do elemento de linha, da forma $R(r)$, e invertê-lo, ou seja, encontrar $r(R)$. Após substituir esta expressão em $F(r) = 1 + \psi = 1 + \psi_0r$, basta integrar. O resultado é dado por

A reconstrução da forma analítica da função $f(R)$.

$$f(R) = R - 3\psi_0^2 \frac{R}{R_0} - 2\psi_0 \sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta^2 R} \quad (3.37)$$

$$- 3\psi_0^2 \left[\frac{\sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta^2 R} - 3\psi_0}{\sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta^2 R_0} - 3\psi_0} \right] - 3\psi_0^2 \left[\frac{\sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta^2 R} + 3\psi_0}{\sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta^2 R_0} + 3\psi_0} \right].$$

3.4 O MÉTODO RECONSTRUTIVO EM BRANS-DICKE

Na seção anterior, trabalhamos com uma solução esfericamente simétrica de uma teoria $f(R)$. Aqui vamos lembrar que Sebastiani e Zerbini [SZ11], trabalhando também com teorias esfericamente simétricas em $f(R)$ concluíram que, dado um elemento de linha do tipo Schwarzschild da forma

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + A(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.38)$$

a função $f(R)$ necessariamente obedece a equação $f'(R) = \alpha r + b$, onde a derivada ($'$) é dada em função do escalar de curvatura. No caso do monopolo global, supomos que $\alpha = \psi_0$ e $b = 0$.

O que iremos mostrar nesta seção é que este método de reconstrução também pode ser utilizado em teorias de Brans-Dicke com $\omega = 0$, onde o elemento a ser reconstruído é o potencial escalar.

Como já vimos anteriormente, existe uma correspondência entre tais teorias de Brans-Dicke e teorias $f(R)$, com o potencial escalar é dado por

$$V(\phi) = R\phi - f(R), \quad (3.39)$$

da forma que as soluções obtidas em teorias $f(R)$ tenham uma correspondência em teorias de Brans-Dicke. O que não é óbvio, a princípio, é que seja possível resolver as equações de Brans-Dicke de uma forma reconstrutiva. Aqui iremos trabalhar esta questão, no mesmo caso já estudado por Sebastiani e Zerbini para teorias $f(R)$ [SZ11].

As equações de campo na teoria de Brans-Dicke, no vácuo, com o parâmetro ω nulo podem ser escritas como

$$\phi G_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{1}{6}V(\phi)g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}g_{\mu\nu} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \phi \quad (3.40)$$

e

$$\square \phi = \frac{1}{3} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \phi - \frac{2}{3}V(\phi). \quad (3.41)$$

A expressão (3.40) refere-se a três equações independentes, enquanto que a expressão (3.41) refere-se a apenas uma equação. Em termos dos componentes da métrica e do campo escalar, elas são dadas por

$$\phi \left(\frac{1 - A - rA'}{r^2} \right) + \frac{1}{2}\phi'A' - \frac{1}{6}V + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\phi} \phi = 0 \quad (3.42)$$

$$\phi \left(\frac{1 - A - rA'}{r^2} \right) + \frac{1}{2}\phi'A' + \phi''A - \frac{1}{6}V + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\phi} \phi = 0 \quad (3.43)$$

$$-\phi \left(\frac{A''r + 2A'}{2r} \right) + \frac{\phi'A}{r} - \frac{1}{6}V + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\phi} \phi = 0 \quad (3.44)$$

$$-\frac{\phi'A'r + \phi''Ar + 2\phi'A}{r} + \frac{2}{3}V - \frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\phi} \phi = 0 \quad (3.45)$$

onde o símbolo ($'$) indica derivada em relação à coordenada radial. Comparando as equações (3.42) e (3.43), temos imediatamente que $\phi = \alpha r + \beta$. Obtemos assim, rapidamente, a mesma conclusão que Sebastiani e Zerbini obtiveram para a expressão $f'(R)$. Para facilitar nossos cálculos, vamos trabalhar com $\beta = 0$.

Equações de campo para a métrica e o campo escalar, na teoria de Brans-Dicke com $\omega = 0$, no caso de uma métrica do tipo Schwarzschild.

O que faremos agora é tratar as expressões $V(\phi)$ e $\partial V/\partial\phi$ como expressões independentes. Utilizando as equações (3.44) e (3.45), é possível encontrar suas formas funcionais, dadas por

$$V(r) = \frac{\alpha(r^2 A'' + 4rA' + 2Ar)}{r} \quad (3.46)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial\phi}(r) = \frac{5rA' + 2A - 2r^2 A''}{r^2}. \quad (3.47)$$

Substituindo as expressões (3.46) e (3.47) em (3.42), obtemos que

$$rA' + 2 - 4A + r^2 A'' = 0. \quad (3.48)$$

A equação acima pode ser facilmente resolvida e tem como resultado

$$A(r) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{C_2}{r^2} + C_1 r^2 \right), \quad (3.49)$$

exatamente a mesma expressão encontrada por Sebastiani e Zerbini [SZ11], ainda que tenhamos utilizado um método diferente. Devemos, agora, verificar a consistência de nosso sistema de equações, e encontrar as expressões para o potencial e sua derivada em termos do campo escalar. Substituindo a função $A(r)$ dada por (3.49) em (3.46) e (3.47), obtemos que

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} + 12\alpha C_1 r \quad (3.50)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial\phi}(r) = -\frac{1}{r^2} + 12C_1. \quad (3.51)$$

Por fim, substituindo $\phi = \alpha r$ nas expressões acima, temos

$$V(\phi) = \frac{\alpha^2}{\phi} + 12C_1 \phi \quad (3.52)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial\phi}(\phi) = -\frac{\alpha^2}{\phi^2} + 12C_1, \quad (3.53)$$

onde confirmamos a coerência de nosso resultado, e encontramos os mesmos resultados obtidos na literatura [SZ11].

*Uma solução
esfericamente
simétrica para a
teoria de
Brans-Dicke no
vácuo, com $\omega = 0$.*

*O potencial escalar,
pelo método
reconstrutivo, na
teoria de
Brans-Dicke com
 $\omega = 0$.*

Vamos, por fim, verificar explicitamente a correspondência entre as teorias de Brans-Dicke e $f(R)$. O escalar de curvatura da solução obtida é dada por

$$R = -\frac{1}{r^2} + 12C_1, \quad (3.54)$$

que pode ser invertida, de modo que

$$r = \frac{1}{\sqrt{12C_1 - R}}. \quad (3.55)$$

Com isso, a expressão para $f(R)$ pode ser obtida com uma mera integração, da forma

$$f(R) = \int f'(R) dR = \int \alpha r dR = -2\alpha\sqrt{12C_1 - R}. \quad (3.56)$$

A correspondência entre Brans-Dicke e teorias $f(R)$ é realizada através de um potencial dado por $V(r) = f'(R)R - f(R)$, assim como pela identificação da função $\phi(r)$ com $f'(R(r))$. Com esta identificação, e utilizando a expressão encontrada para $f(R)$, temos

$$V(r) = \alpha r(12C_1 - \frac{1}{r^2}) + 2\sqrt{12C_1 - R} = 12C_1\phi + \frac{\alpha^2}{\phi}, \quad (3.57)$$

que é exatamente o mesmo potencial que obtivemos em nossos cálculos.

Nesta seção realizamos o mesmo procedimento usualmente adotado em teorias $f(R)$, que é conhecido como reconstrução. No caso de teorias $f(R)$, o que é reconstruído é a forma funcional da função $f(R)$, enquanto que em Brans-Dicke o que é reconstruído é o potencial escalar.

Uma das vantagens em trabalhar com o campo de Brans-Dicke é que podemos estudar sua estabilidade através do potencial escalar. Podemos reescrever a equação (3.41) como

$$\square\phi + \frac{dW}{d\phi} = 0, \quad (3.58)$$

e estudar a dinâmica deste campo através do potencial W . Substituindo o resultado encontrado para $V(\phi)$ e sua derivada, temos que

$$\frac{dW}{d\phi} = 4C\phi + \frac{\alpha^2}{\phi}, \quad (3.59)$$

O potencial escalar, através da correspondência entre teorias $f(R)$ e Brans-Dicke.

Podemos estudar a estabilidade na dinâmica do campo escalar.

e, realizando a integração acima, temos

$$W = 2C\phi + \alpha^2 \ln(\phi). \quad (3.60)$$

No caso de $C \geq 0$, o potencial acima não apresenta um ponto de inflexão, e no caso de $C < 0$ ele não apresenta um mínimo bem definido. Este é um indicativo que o sistema é instável.

Parte II

DEFEITOS TOPOLÓGICOS

Defeitos topológicos são configurações localizadas de energia cuja estabilidade é mantida por sua variedade de vácuo. Acredita-se que possam ter sido formados em uma transição de fase no universo primitivo, e nos próximos dois capítulos iremos tratar de alguns exemplos clássicos, como as paredes de domínio e as cordas cósmicas.

KINKS E CORDAS CÓSMICAS

4.1 SÓLITONS

A primeira menção que temos ciência a respeito da existência de sólitons deve-se a John Scott Russell, que no ano de 1834 notou a propagação de uma onda solitária em um canal. ¹ De acordo com a teoria ondulatória clássica (linear), ondas devem dispersarem-se rapidamente, em vista que ondas com diferentes comprimentos se propagam com diferentes velocidades. A onda observada por Russell era diferente, propagando-se com velocidade constante e mantendo a mesma forma por vários quilômetros. Se na época essa observação foi recebida com ceticismo, hoje sabemos que este fenômeno pode ser modelado quando utilizamos uma proposta não-linear para a teoria ondulatória.

Nesta tese iremos utilizar a palavra sóliton dentro da ideia de teoria de campos. Um **sóliton**, para nós, é um conceito mais geral que uma onda solitária e constitui-se de uma configuração de campo onde a energia encontra-se localizada e é não dissipativa, de forma análoga às ondas observadas por Russell. ² Podemos classificar os sólitons em dois tipos: Sólitons topológicos e não-topológicos. A existência e estabilidade de sólitons topológicos deve-se à conservação de uma carga topológica que está diretamente relacionada à configuração de vácuo da teoria. Já a existência e estabilidade de um sóliton não-topológico está relacionado a não-linearidade do mesmo [Shi12, Rubo2].

Sólitons em teorias de campo são configurações localizadas de energia.

4.2 KINKS

O sóliton topológico mais simples de ser descrito em uma teoria de campo é o modelo Z_2 **Kink** em 1+1 dimensões. Nesta seção iremos utilizá-lo para demonstrar as principais características de um sóliton topológico. Começemos com a seguinte ação para um campo escalar,

$$S = \int d^2x [(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)] = \int d^2x [(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2]. \quad (4.1)$$

Esta ação é invariante segundo a transformação $\phi \rightarrow -\phi$ que, juntamente com a transformação identidade, formam o grupo Z_2 .

Uma ação em 1+1 dimensões com simetria discreta pode dar origem a kinks.

¹ Para uma leitura detalhada sobre a história da descoberta e evolução da ideia de sólitons, ver [Filoo]

² Quando há dissipação, ela ocorre tão lentamente que podemos tratá-la como uma perturbação.

Estamos interessados na configuração de mais baixa energia desta teoria, e é fácil ver que ele ocorre quando o segundo termo do lado direito de (4.1) anula-se. Dado que temos uma simetria Z_2 na teoria, tal configuração de mais baixa energia engloba duas possibilidades, a saber, $\phi = \pm\eta$. O ponto crucial é que o campo precisa estar em uma dessas configurações, e a partir do momento em que o campo encontra-se em uma delas, a simetria Z_2 é quebrada, e dizemos que houve uma **quebra espontânea da simetria**.

Se o campo assume valores de vácuo diferentes em diferentes localidades do espaço-tempo, a região de transição entre os dois vácuos será obrigatoriamente uma região com densidade de energia não nula.

Vamos considerar o caso em que o campo encontra-se em configurações diferentes em diferentes localidades do espaço-tempo, como por exemplo $\phi(x = -\infty, t) = -\eta$ e $\phi(x = +\infty, t) = +\eta$. Se imaginarmos que o campo precisa ser contínuo e suave, para que ele varie entre $-\eta$ e $+\eta$ é necessário que se anule em algum ponto, e $\phi = 0$ não é um estado de mínima energia. Com isso vemos claramente que o campo estará excitado nas proximidades deste ponto, onde ocorre a transição entre estes mínimos.

A estabilidade desta excitação pode ser entendida como a conservação de uma carga que depende apenas da configuração do campo no infinito. Definindo o tensor

$$j^\mu = \frac{1}{2\eta} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (4.2)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é um tensor totalmente antissimétrico, a quantidade

$$Q = \int j^0 dx = \frac{1}{2\eta} [\phi(x = +\infty) - \phi(x = -\infty)] \quad (4.3)$$

é uma carga não-nula quando $\phi(x = +\infty) \neq \phi(x = -\infty)$. Devido à anti-simetria de $\epsilon^{\mu\nu}$, temos que $\partial_\mu j^\mu$ se anula e é fácil mostrar que Q é uma quantidade conservada. Esta quantidade é o que chamamos de **carga topológica**, pois não utilizamos as equações de movimento para mostrar sua conservação.

Outra forma de explicar esta estabilidade é perceber que seria necessária uma quantidade infinita de energia para que a configuração de campo decaísse toda para o mesmo valor de vácuo. Esta configuração, onde o campo encontra-se em apenas um dos valores de vácuo em todo o espaço, por exemplo, com $\phi(x = \pm\infty) = \eta$ ou $\phi(x = \pm\infty) = -\eta$, é uma configuração em que o sóliton está ausente. Na impossibilidade de tal decaimento, o campo mantém-se estável na configuração que está e dizemos que ele saturou o limite de energia. Veremos isso melhor mais adiante quando estudarmos o **método de Bogomol'nyi** [Bog76].

As equações de campo deste sistema são facilmente encontradas a partir da ação (4.1), variando-a em relação ao campo. Ao fazer esta variação, encontramos

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \lambda(\phi^2 - \eta^2)\phi = 0, \quad (4.4)$$

cuja solução pode ser analiticamente obtida para o caso estático ($\partial_t \phi = 0$). Escolhendo as condições de contorno acima mencionadas para o campo ϕ , temos como solução

$$\phi(x) = \eta \tanh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \eta x \right), \quad (4.5)$$

cujos gráficos estão representados na figura (1).

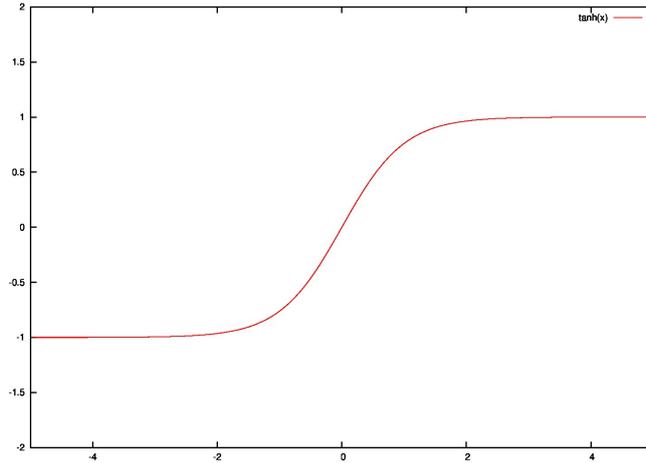


Figura 1: Configuração de campo de um Kink para $\lambda = 2$ e $\eta = 1$. Esta configuração estende-se até o infinito em ambas as direções.

A densidade de energia do campo pode ser calculada pela teorema de Noether. Para um campo escalar estático, ela é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \quad (4.6)$$

onde, substituindo (4.5), obtemos

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda \eta^4}{2} \operatorname{sech}^4 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \eta x \right). \quad (4.7)$$

O gráfico desta configuração de energia está representado na figura (2). Podemos ver que a energia do campo encontra-se localizada em torno da origem, e essa energia localizada representa o sóliton. Para encontrar a energia total do sóliton é preciso integrar a expressão acima em todo o domínio do espaço. Isto nos dá

$$E = \frac{4}{3\sqrt{2}} \eta^3 \sqrt{\lambda}. \quad (4.8)$$

Para teorias em 1+1 dimensões, a energia acima possui dimensão de massa e um sóliton pode representar uma partícula. No caso de

Configuração de campo para um Kink Z_2 .

Densidade de energia para o modelo de Kink Z_2 .

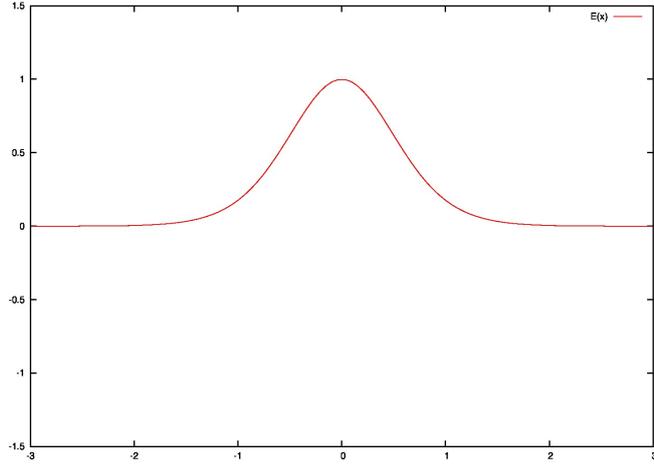


Figura 2: Densidade de energia de um kink localizado na origem. Notamos que existe um pico de energia ao redor da localização do kink, e esta energia diminui rapidamente a medida que nos afastamos dele.

$D=1+2$ e $D=1+3$ dimensões, estamos falando, respectivamente, de uma linha e de uma parede de domínio, objetos que a princípio estendem-se por todo o espaço-tempo e possuem energia total infinita³

4.2.1 O método de Bogomol'nyi

A forma mais simples de resolver a equação (4.4) para o caso estático é reduzi-la a uma equação de primeira ordem. O motivo deste método ficará claro em breve. Primeiro notemos que

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \lambda(\phi^2 - \eta^2)\phi = 0 \quad (4.9)$$

pode ser reescrito como uma derivada total

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - \eta^2)^2 \right] = 0, \quad (4.10)$$

cuja primeira integração é trivial e nos resulta na equação de primeira ordem

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - \eta^2)^2 = 0, \quad (4.11)$$

Podemos reduzir a equação de campo do Kink para uma equação de primeira ordem.

³ Uma linha recente de pesquisa trata nosso universo físico como existindo em $D=1+4$ dimensões, e por algum motivo estaríamos presos nas dimensões perpendiculares ao sóliton (ou a brana, como é melhor conhecida). Algumas partículas elementares, como por exemplo o gráviton, não estariam presos ao sóliton (brana) e poderiam vagar por todas as dimensões (bulk), inclusive aquela a qual não temos acesso.

onde a constante de integração é nula para que o campo se anule no infinito. Para encontrar a solução dada por (4.5) basta realizar uma segunda integração em (4.11).

Vamos agora generalizar esse método. Note que a equação acima tem a forma de energia cinética mais energia potencial, o que nos inspira a introduzir uma função auxiliar W , da forma

$$W = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} \phi^3 - \eta^2 \phi \right), \quad (4.12)$$

onde o potencial de (4.11) pode ser obtido por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2. \quad (4.13)$$

Com isso, a energia total do sistema pode ser escrita da forma

$$E = \int dx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right], \quad (4.14)$$

e, completando o quadrado da expressão acima, temos

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \mp \frac{d\phi}{dx} \frac{dW}{d\phi} \right]. \quad (4.15)$$

Há duas opções de sinais em (4.15), e eles estão relacionados à existência de kinks e anti-kinks. Vamos nos ater ao sinal de positivo para o primeiro membro do lado direito da equação acima (kink), porém, a mesma ideia valeria para o sinal de negativo (anti-kink). O segundo membro do lado direito é uma derivada total, de forma que equação acima se torna

$$E = -\Delta W + \int dx \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{dW}{d\phi} \right)^2, \quad (4.16)$$

onde

$$\Delta W \equiv W(x \rightarrow \infty) - W(x \rightarrow -\infty). \quad (4.17)$$

A energia é, então, minimizada caso o segundo termo da equação (4.16) se anule, ou seja, caso

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{dW}{d\phi}, \quad (4.18)$$

A energia do Kink é saturada por um termo que depende apenas do campo no infinito.

O método de Bogomol'nyi permite encontrar a configuração de campo que satura o mínimo de energia, e logo mostrar a estabilidade do sistema.

que é exatamente a equação de primeira ordem encontrada anteriormente (4.11). Quando isso acontece, dizemos que o limite de Bogomol'nyi foi saturado, e temos que $E = -\Delta W$. Este método é extremamente importante, pois mostra que a energia atinge seu mínimo para determinado perfil de campo. Em teorias mais complicadas, muitas vezes nos deparamos com uma solução que satisfaz as equações de movimento, porém, ainda é preciso mostrar que tal solução é estável. Há, em geral, duas formas de verificar a estabilidade da solução: Perturbar o sistema e verificar se tal perturbação decai com o tempo, ou mostrar que tal solução satura o limite de Bogomol'nyi. Caso consigamos fazer esta segunda demonstração, como no caso do kink, então, a solução é automaticamente estável, pois essa solução seria a solução de menor energia e não haveria um outro estado de menor energia na qual ela possa decair.

4.3 VÓRTICES E CORDAS CÓSMICAS

O modelo de Nielsen e Olesen para os vórtices e cordas cósmicas.

Em dimensões maiores que $1+1$, nos deparamos com a possibilidade de novos tipos de defeitos topológicos. O modelo mais simples que podemos imaginar é o **vórtice de Nielsen-Olesen** em $D=1+2$ dimensões. Este modelo foi introduzido por Nielsen e Olesen em 1973 [NO73] com o objetivo de representar, através de um modelo de campo, a corda de Nambu-Goto, utilizada naquela época para o estudo da interação forte entre Hádrons. Para este objetivo eles introduziram a seguinte Lagrangeana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi - v^2)^2 \quad (4.19)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de intensidade de campo eletromagnético.

Este é o modelo para um campo escalar complexo com simetria de gauge Abeliana local, e o potencial acima foi escolhido de forma a permitir uma quebra espontânea de simetria. Este modelo é também conhecido como o **modelo de Higgs**, e o campo escalar, após a quebra espontânea de simetria, é conhecido como campo de Higgs. É fácil verificar que a Lagrangeana acima é invariante sob a seguinte transformação

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Antes de voltarmos para as equações de movimento, devemos, inicialmente, estudar a configuração de vácuo deste modelo, posto que

é exatamente a configuração de vácuo que garante a estabilidade do mesmo. Um campo que obedeça a condição $|\phi(x)| = |\nu|$ irá minimizar o potencial acima, o que nos diz que qualquer solução da forma $\phi(x) = \nu e^{if(\theta(x))}$ corresponde a uma solução de vácuo da teoria, onde $f(\theta(x))$ é qualquer função que obedece a periodicidade do argumento. O ponto crucial é exatamente a absoluta liberdade da natureza em escolher qualquer configuração de vácuo para o campo escalar no infinito, desde que este campo seja regular em todo o espaço.

Vamos supor que a uma longa distância da origem o campo escalar possua uma configuração radial $\phi(x) = \nu e^{i\theta(x)}$, com $\theta(0) = \theta(2\pi)$, para o ângulo polar. Esta configuração nos diz que em qualquer ponto do espaço longe da origem o campo está em seu estado de vácuo, porém o estado de vácuo assume diferentes valores em diferentes posições, em um tipo de configuração que circula no espaço. O ponto crucial é que a medida que o campo se aproxima da origem ele irá necessariamente se anular, pois de outra forma deixaria de ser regular. No entanto, o campo nulo não representa um estado de vácuo da teoria, o que gera necessariamente uma configuração localizada de energia, o sólito. Da mesma forma que o kink, esta configuração localizada de energia mantêm-se estável devido a configuração de vácuo no infinito. Daí o fato de ser um sólito topológico.

Não é suficiente, no entanto, verificar a energia apenas para o potencial escalar da teoria. Temos que garantir que a configuração de vácuo minimiza a energia total do sistema, e para garantir a estabilidade de o sólito (que, por exemplo, ele não decaia em outros sólitos de menor energia) devemos garantir também que a configuração de vácuo satura completamente a energia. Para uma configuração de campo estática, e onde $A_0 = 0$, a energia do sistema é dada por

$$E = \int \left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ji} + \frac{1}{2} (\partial_j + ieA_j) \phi^* (\partial^j - ieA^j) \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - \nu^2)^2 \right] d^2x, \quad (4.21)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$.

Vamos primeiro estudar o termo $\partial_i \phi(x)$, pois este termo estaria presente no caso de considerarmos uma simetria $U(1)$ global, e não uma simetria local. Utilizando o *ansatz* $\phi(x) = \nu e^{in\theta(x)}$, temos

$$\partial_i \phi(x) = e^{in\theta} in\nu (\partial_i \theta) = (e^{in\theta} n\nu) \left(-\frac{i}{r} \epsilon_{ij} n_j \right), \quad (4.22)$$

onde n_i é o vetor unitário na direção i . Podemos ver que a energia irá divergir logicamente, pois a energia cresce com r e o termo acima quadrado, de energia cinética do campo escalar, cresce com r^{-2} , de forma que a teoria apenas com o campo escalar é divergente.

O campo escalar assume sua configuração de vácuo no infinito. Para manter a regularidade do campo, no entanto, ele precisa se anular na origem, e o campo nulo não é um estado de vácuo.

A energia do termo cinético do campo escalar diverge logicamente.

⁴ Há na teoria, no entanto, o campo de gauge, e o comportamento que devemos estudar é o da derivada covariante, e não da derivada parcial. Escolhendo uma configuração assintótica para o campo de gauge em seu estado de vácuo,

A configuração assintótica do campo de gauge é escolhida de forma que a energia do termo cinético não seja divergente.

$$A_i = -\frac{n}{er} \epsilon_{ij} n_j, \quad (4.23)$$

o termo divergente da parte cinética do campo escalar será compensado, e a derivada covariante será nula quando ambos os campos estiverem em seu estado de vácuo. Podemos verificar que o termo cinético para o campo de gauge irá cair mais rapidamente que r^2 no infinito, e logo, a densidade de energia total do sistema será nula no infinito. Comparando a expressão acima para o estado de vácuo do campo de gauge com (4.20), podemos ver que esta configuração nada mais é que uma transformação de gauge, e não possui dinâmica.

Com isso mostramos que a solução proposta de vácuo, realmente, minimiza a energia do sistema. O que devemos fazer, agora, é encontrar uma solução das equações de movimento que tenha a solução de vácuo como limite. Tais equações de movimento podem ser encontradas aplicando-se o princípio variacional em (4.19). Nesta tese estamos interessados em estudar tais configurações de campo em um espaço curvo, e logo nossa ação será mais geral que a dada por (4.19). No entanto, é instrutivo que estudemos brevemente o modelo de Nielsen-Olesen para o espaço plano. Em 1+3 dimensões, a métrica de Minkowski em coordenadas cilíndricas é dada por

O modelo de Nielsen Olesen representa um vórtice em 2+1 dimensões e uma corda cósmica em 3+1 dimensões.

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2, \quad (4.24)$$

e o vórtice em 1+2 dimensões pode ser obtido ao ignorarmos a coordenada z . De fato, os cálculos em 1+2 ou 1+3 dimensões são análogos e a diferença principal se dá na definição de energia. Em três dimensões espaciais, a energia definida em (4.21) é, na verdade, a energia por comprimento, e o vórtice corresponde a uma corda que se situa ao longo do eixo z . Devido à simetria do problema, as equações de campo e sua solução não podem depender de z . Neste sistema de coordenadas, o ansatz é dado por

$$\phi(r, \theta) = v e^{in\theta} f(r), \quad (4.25)$$

$$A_\mu dx^\mu(r, \theta) = \frac{n}{e} [1 - P(r)] d\theta, \quad (4.26)$$

⁴ Este fato, que não há soluções estáveis para sólitons em dimensão maior que $D=1+1$, é conhecido como **teorema de Derrick**. Este teorema, porém, é válido apenas quando há somente campos escalares presentes.

onde, por simplicidade, iremos nos restringir à configuração onde $n = 1$. Para que o *ansatz* se reduza à configuração de vácuo no infinito, as funções $f(r)$ e $P(r)$ devem ser dadas, assintoticamente, por

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & f(\infty) &= 1 \\ P(0) &= 1 & P(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

As equações de campo são encontradas inserindo a Lagrangeana (4.19) nas equações de Euler-Lagrange, e são dadas por ⁵

$$\frac{(rf')'}{r} + (\lambda v^2(1 - f^2) - \frac{P^2}{r^2})f = 0 \quad (4.28)$$

$$r\left(\frac{P'}{r}\right)' - e^2 v^2 f^2 P = 0. \quad (4.29)$$

Até o presente momento não há nenhum método analítico conhecido para resolver este sistema de equações diferenciais, da forma que precisamos resolvê-lo numericamente. Iremos postergar a solução deste problema para a seção seguinte, onde trataremos um caso mais geral.

4.4 A CORDA ABELIANA NA RELATIVIDADE GERAL

Nas últimas décadas, cordas cósmicas tem estado presente como um elemento importante nos modelos cosmológicos. Após ser proposto [Kib76] que tais objetos podem ter sido formados por uma transição de vácuo no universo primitivo, o papel das cordas na formação de estruturas em larga-escala tem sido alvo de intenso debate. Além disso, seus efeitos astrofísicos também tem sido considerados, como por exemplo sua atuação como lentes gravitacionais. Desta forma fica claro que devemos estudar tais defeitos topológicos como geradores de campos gravitacionais, e o efeito da gravitação sobre tais configurações de campo.

O primeiro estudo sobre o campo gravitacional produzido por uma única corda cósmica estática, infinitamente longa e sem espessura, foi realizado por Vilenkin [Vil81], seguido por Gott [Got85] e outros. Esses estudos, no entanto, se valem de uma aproximação para o tensor de energia-momento que representa a corda como fonte de curvatura. Vilenkin aproximou a corda por uma linha infinitamente fina, e Gott por um cilindro de raio finito e densidade de energia constante. Neste contexto ideal, o espaço-tempo encontrado por ambos é o de uma métrica plana com deficit angular.

Esta é, no entanto, uma forma apenas aproximada de se obter o campo gravitacional, ou seja, a métrica. A forma correta é resolver ao mesmo tempo as equações acopladas entre a matéria e a geometria, ou seja, resolver as equações de Einstein juntamente com as da corda. Este problema foi abordado pela primeira vez por Garfinkle em 1985

Valores assintóticos e equações de campo para $f(r)$ e $P(r)$. Tais equações devem ser resolvidas numericamente.

A corda ideal produz uma geometria plana com um pequeno deficit angular.

⁵ Detalhes deste cálculo podem ser encontrados no apêndice (A).

[Gar85]. Resolver e estudar este sistema de equações é o objetivo principal desta seção.

Já vimos que longe do núcleo da corda, tanto o campo escalar quanto o campo de gauge se aproximam de seu valor de vácuo. Logo, o espaço-tempo gerado pela corda deve ser assintoticamente plano⁶. Como trata-se de uma configuração com simetria axial, devemos buscar a solução mais geral para as equações de Einstein, no vácuo, que obedeça tal simetria. Esta é dada pela **métrica de Kasner**,

A métrica de Kasner é a solução axialmente simétrica mais geral para as equações de Einstein no vácuo.

$$ds^2 = (kr)^{2a} dt^2 - (kr)^{2c} dz^2 - dr^2 - \beta^2 (kr)^{2(b-1)} r^2 d\phi^2, \quad (4.30)$$

onde (a, b, c) devem também satisfazer a **condição de Kasner**,

$$a + b + c = a^2 + b^2 + c^2. \quad (4.31)$$

Tal condição pode ser encontrada inserindo a métrica de Kasner (4.30) nas equações de Einstein no vácuo. Devido a simetria de *boost* do problema, podemos impor que $a = c$, e as condições de Kasner nos deixam apenas duas opções. Ou o que chamaremos de ramo da corda cósmica [BLoo, CLV99]

$$a = c = 0, \quad b = 1 \quad (4.32)$$

ou o chamado ramo de Melvin

$$a = c = 2/3, \quad b = -1/3. \quad (4.33)$$

Há dois ramos para a métrica de Kasner, o da corda cósmica usual e o ramo de Melvin.

As soluções encontradas por Vilenkin, Gott e Garfinkle são do tipo corda cósmica, e apenas mais recentemente soluções para o ramo de Melvin foram encontradas e tiveram seu comportamento melhor estudado [BLoo, CLV99]. Neste trabalho iremos nos focar apenas no ramo da corda cósmica, em vista que até o momento não foi encontrada uma interpretação física para o ramo de Melvin. Por isso, a partir de agora, ao nos referirmos à solução assintoticamente plana, estaremos nos referindo ao ramo da corda cósmica.

A geometria que buscamos é assintoticamente plana, porém, possui curvatura nas proximidades da corda cósmica. Por isso devemos propor um ansatz que seja axialmente simétrico, estático, e se reduza ao regime assintoticamente plano no infinito. No caso da métrica, esse ansatz é dado por

$$ds^2 = N^2(r) dt^2 - K^2(r) dz^2 - dr^2 - L^2(r) d\phi^2. \quad (4.34)$$

⁶ Na presença de um termo de constante cosmológica, o espaço-tempo gerado pela corda será representado, assintoticamente, pelo espaço de (anti-)de Sitter.

O mesmo regime deve ser aplicado aos campos de matéria, da forma que iremos utilizar o mesmo ansatz da seção anterior, definido pelas expressões contidas em (4.26).

A ação do modelo Abeliano de corda cósmica na gravitação de Einstein é

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{NO}}, \quad (4.35)$$

onde a Lagrangeana de Nielsen-Olesen é definida em (4.19). Variando esta ação em relação ao campo escalar e ao campo de gauge, encontramos as equações para as funções $f(r)$ e $P(r)$, respectivamente,

$$\frac{(\text{LKN}f')'}{\text{NKL}} + (\lambda v^2(1-f^2) - \frac{p^2}{L^2})f = 0 \quad (4.36)$$

e

$$\frac{L}{\text{NK}} \left(\frac{\text{NKP}'}{L} \right)' - e^2 v^2 f^2 P = 0, \quad (4.37)$$

onde (\prime) indica derivada em relação à coordenada r .

O tensor de energia-momento para os campos escalar e de gauge, em conjunto, é dado por

$$\begin{aligned} -T_0^0 = \rho = \epsilon_s + \epsilon_v + \epsilon_w + u, & \quad -T_r^r = -p_r = -\epsilon_s - \epsilon_v + \epsilon_w + u \\ -T_\phi^\phi = -p_\phi = \epsilon_s - \epsilon_v - \epsilon_w + u & \quad -T_z^z = -p_z = \rho \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde

$$\epsilon_s = \frac{v^2}{2} f'^2, \quad \epsilon_v = \frac{p'^2}{2e^2 L^2} \quad (4.39)$$

$$\epsilon_w = \frac{v^2 p^2 f^2}{2L^2}, \quad u = \frac{\lambda v^4}{4} (1-f^2)^2. \quad (4.40)$$

Para este tensor de energia-momento e levando em conta a forma da métrica definida em (4.34), as equações de Einstein são

$$\frac{(\text{LKN}')'}{\text{NKL}} = -4\pi G(\rho + p_r + p_\phi + p_z) = -8\pi G(\epsilon_v - u), \quad (4.41)$$

$$\frac{(\text{NKL}')'}{\text{NKL}} = -4\pi G(\rho - p_r + p_\phi - p_z) = -8\pi G(\epsilon_v + 2\epsilon_w + u), \quad (4.42)$$

e

$$\frac{(\text{LNK}')'}{\text{NKL}} = -4\pi G(\rho - p_r - p_\phi + p_z) = -8\pi G(\epsilon_v - u). \quad (4.43)$$

A ação de Einstein-Hilbert tendo como fonte o modelo abeliano de Nielsen-Olesen.

As equações para os campos escalar e de gauge.

Equações de Einstein para a corda cósmica Abeliana.

Devido a simetria de *boost* ao longo do eixo z , as funções $K(r)$ e $N(r)$ da métrica são iguais. Com isso, temos apenas duas equações independentes para resolver.

Para facilitar a análise numérica destas equações, e também para deixar a análise mais transparente, é importante reescrever todas as funções e parâmetros da teoria como funções e parâmetros adimensionais. Um comprimento característico do problema é dado por $\sqrt{\lambda v^2}$, e logo a coordenada x dada por $x = \sqrt{\lambda v^2} r$ é a escolha mais óbvia. A partir deste comprimento característico podemos também definir a função adimensional $L(x) = \sqrt{\lambda v^2} L(r)$. Vamos também introduzir dois novos parâmetros, $\alpha = e^2/\lambda$ e $\gamma = 8\pi G v^2$. Em termos destas novas quantidades, encontramos um conjunto de quatro equações diferenciais acopladas. São elas

As quatro equações do modelo Abelian de Nielsen-Olesen para a corda cósmica na relatividade geral, em termos de funções e parâmetros adimensionais.

$$\frac{(N^2 L f')'}{N^2 L} + (1 - f^2 - \frac{P^2}{L^2} f) = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{L}{N^2} \left(\frac{N^2 P'}{L} \right)' - \alpha f^2 P = 0 \quad (4.45)$$

$$\frac{(L N N')'}{N^2 L} - \gamma \left(\frac{P'^2}{2\alpha L^2} - \frac{1}{4} (1 - f^2)^2 \right) = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{(N^2 L')'}{N^2 L} - \gamma \left(\frac{P'^2}{2\alpha L^2} + \frac{P^2 f^2}{L^2} + \frac{1}{4} (1 - f^2)^2 \right) = 0, \quad (4.47)$$

onde α e γ são dois parâmetros que temos liberdade para escolher.

Por fim, para fixar a solução das quatro equações diferenciais de segunda ordem, necessitamos de oito condições de contorno. Uma solução tipo corda necessita que as funções $f(x)$ e $P(x)$ obedeçam as condições

As condições de contorno para os campos escalar e de gauge são escolhidas de forma que tais campos sejam regulares na origem e recaiam em seus valores de vácuo no infinito. Para as funções da métrica é necessário apenas que tais funções sejam regulares na origem.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & f(\infty) &= 1 \\ P(0) &= 1 & P(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Tais condições são necessárias para a regularidade das funções $f(x)$ e $P(x)$ na origem, e também para que recaiam em seu valor de vácuo no infinito. No caso das funções da métrica, $L(x)$ e $N(x)$ devem satisfazer as seguintes condições de contorno,

$$\begin{aligned} L(0) &= 0, L'(0) = 1 \\ N(0) &= 1, N'(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

para que sejam funções regulares bem definidas.

O que precisamos agora é resolver as equações (4.44-4.47), juntamente com as condições de contorno (4.48) e (4.49). Até onde é conhecido, não existe solução analítica para este sistema (nem mesmo no caso plano) e precisamos resolvê-lo numericamente. Faremos isto utilizando o método de Newton-Raphson para diferenças finitas [AMR87, ACR79].

O caso plano ocorre quando $\gamma = 0$, em vista que este procedimento desacopla as equações de Einstein das equações dos campos de matéria. Neste caso, o perfil para as funções $f(x)$ e $P(x)$ é mostrado na figura (3) para diferentes valores do parâmetro α . Este parâmetro é proporcional à razão entre as massas do campo de gauge e do campo escalar. Quando a massa do campo de gauge é maior que a do campo escalar, o comprimento efetivo deste campo é menor, e logo o campo escalar dominará. Quando a massa do campo de gauge for menor, ocorrerá o contrário, e o campo de gauge irá dominar. Quando as duas massas forem iguais, nenhum dos campos terá domínio sobre o outro, e veremos que será esta a configuração de campo que irá saturar a energia do sistema. Este é o chamado limite BPS para o caso da corda abeliana com $n = 1$.

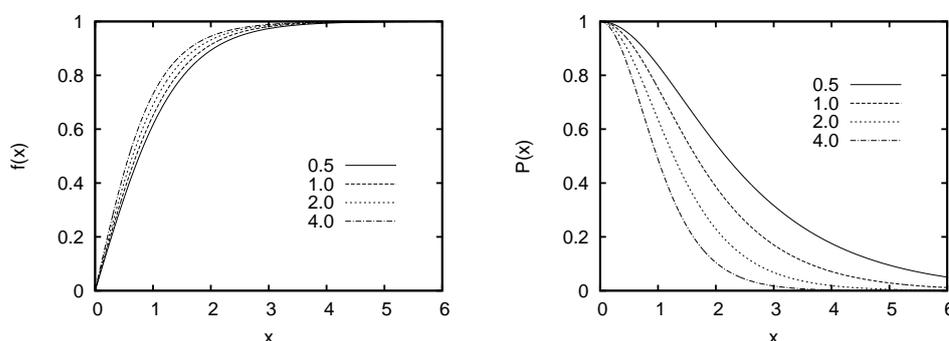


Figura 3: Perfil dos campos escalar e de gauge para diferentes valores de α .

A corda cósmica na relatividade geral ocorre quando $\gamma \neq 0$. A configuração da corda, ou seja, o perfil das funções $f(x)$ e $P(x)$ não sofre grandes alterações ao variarmos o parâmetro γ . Com isso, a geometria do espaço-tempo não afeta tanto a estrutura da corda. O contrário, no entanto, não é verdadeiro. A presença da corda cósmica afeta consideravelmente a geometria, em especial através da função $L(x)$ da métrica. O perfil das funções $L(x)$ e $N(x)$ da métrica são mostrados na figura (4), para diferentes valores do parâmetro γ .

A função $N(x)$ sofre apenas uma pequena variação com a mudança no parâmetro γ , porém a função $L(x)$ é altamente dependente deste parâmetro, e se aproxima cada vez mais de uma reta horizontal à medida que o parâmetro cresce. De fato, o comportamento da função $L(x)$ é o ingrediente mais importante deste estudo, pois, como veremos, ele é o responsável pelo déficit angular gerado pela corda cósmica, e consecutivamente pela geração de uma topologia não-trivial.

A análise da equação (4.44) longe do núcleo da corda, ou seja, quando $f(x) \rightarrow 1$ e $P(x) \rightarrow 0$, nos permite encontrar uma solução assintótica para $L(x)$, dada por

$$L(x \rightarrow \infty) = bx + c, \quad (4.50)$$

A relação entre as massas do campo escalar e do campo de gauge, proporcional ao parâmetro α , influencia profundamente o perfil das funções $f(x)$ e $P(x)$ dos campos de matéria.

O perfil das funções $L(x)$ e $N(x)$ da métrica dependem profundamente do parâmetro γ , que é proporcional ao valor esperado de vácuo assumido pelo campo escalar.

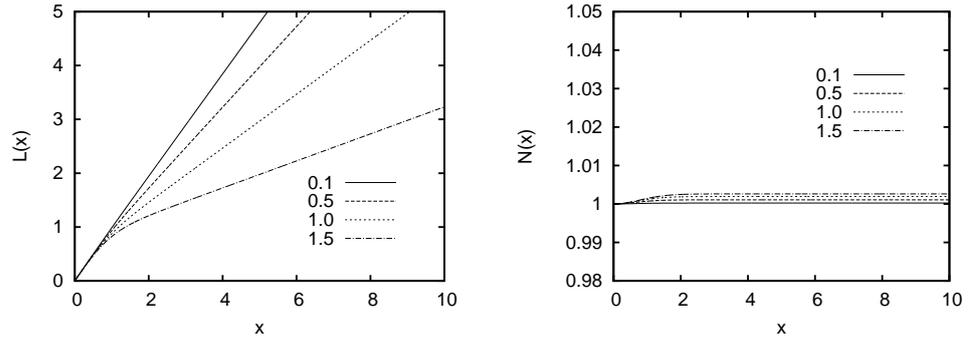


Figura 4: Métrica induzida por uma corda cósmica para diferentes valores de γ .

onde vamos assumir que $b > 0$. Como podemos observar na figura acima, maiores valores de γ correspondem a menores valores para b , até atingirmos um valor crítico para γ , denotado por γ_{cr} , onde $b = 0$. A relação entre o déficit angular e o parâmetro b é fácil de ser calculada. Fazendo a redefinição $by = bx + c$, temos que $b dy = b dx$, e a métrica (4.34) pode ser reescrita como

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dy^2 - y^2 d\tilde{\phi}^2, \quad (4.51)$$

onde $\tilde{\phi} = b\phi$. Como ϕ varia entre 0 e 2π , $\tilde{\phi}$ irá variar entre 0 e $2\pi b$, e a diferença entre estes dois ângulos é chamada de **déficit angular**,

$$\delta\phi = 2\pi(1 - b) = 2\pi(1 - L'(\infty)). \quad (4.52)$$

Quando $L'(\infty) = 0$, ou seja, quando a reta se torna horizontal, o déficit angular chega a 2π e o espaço-tempo deixa de ser regular ⁷. Por isso devemos nos limitar a valores de $b > 0$, ainda que seja útil considerar o caso em que $L'(x) = 0$ como um valor crítico. Iremos denotar por γ_{cr} o valor de γ quando $L'(x) = 0$. Este é o maior valor que γ pode atingir antes do espaço-tempo perder sua regularidade, e, na relatividade geral, é função do parâmetro α .

Para modelos aproximados é possível encontrar uma expressão analítica para o déficit angular. Para a aproximação adotada por Vilenkin, a expressão é dada por $\delta\phi = 4\pi G\mu$, onde μ é a densidade linear de energia da corda. No nosso caso, não podemos calcular uma expressão analítica para o déficit angular, porém podemos calculá-lo como função dos parâmetros de nossa teoria, α e γ . Os cálculos numéricos nos mostram que a variação do déficit angular com respeito ao parâmetro α é muito pequena, porém é considerável em relação a γ . Lembrando que $\gamma = 8\pi Gv^2$, ao aumentarmos γ , estamos,

A métrica da corda cósmica, assintoticamente, é dada pela métrica de Minkowski com um déficit angular proporcional à inclinação da função $L'(x)$.

O déficit angular gerado pela corda depende dos parâmetros α e γ , e no modelo ideal de Vilenkin é proporcional à sua densidade de energia.

⁷ Em alguns modelos podemos ter um espaço-tempo regular mesmo com $b < 0$, porém tais modelos não serão estudados nesta tese [Vil94].

Tabela 1: Valores de energia (por comprimento) da corda e déficit angular.

α	γ	Energia/ πv^2	$\delta\phi/2\pi$
0.5	0.1	1.346674	6.7343×10^{-2}
0.5	0.5	1.373885	0.343768
0.5	1.0	1.417096	0.707899
0.5	1.3	1.450194	0.947191
1.0	0.1	1.159077	5.7955×10^{-2}
1.0	0.5	1.169168	0.292343
1.0	1.0	1.184187	0.592369
1.0	1.3	1.195029	0.777341
2.0	0.1	1.000000	5.0000×10^{-2}
2.0	0.5	1.000000	0.250000
2.0	1.0	1.000000	0.500000
2.0	1.3	1.000000	0.650000
4.0	0.1	0.866575	4.3329×10^{-2}
4.0	0.5	0.860979	0.215269
4.0	1.0	0.853310	0.426773
4.0	1.3	0.848274	0.551599

na verdade, aumentando o valor esperado de vácuo onde ocorre a quebra de simetria. Como a energia da corda é proporcional a este valor, encontramos que o déficit angular é proporcional à energia da corda, exatamente como obtido por Vilenkin [Vil81].

O valor obtido para o déficit angular para alguns valores de α e γ é listado na tabela (1), juntamente com a energia (por comprimento) da corda cósmica. A energia (por comprimento) é definida como

$$E = 2\pi v^2 \int \sqrt{-g^{(3)}} T_0^0, \quad (4.53)$$

onde $\sqrt{-g^{(3)}} = NL$. Podemos notar alguns padrões. O primeiro, já mencionado, é que o déficit angular aumenta com o aumento de γ , e varia pouco com a variação de α . Já com a energia da corda ocorre o contrário, sua variação é maior com α e pouco depende de γ . Algo diferente ocorre quando $\alpha = 2.0$. Neste regime, a energia torna-se unitária e fixa com a variação de γ , enquanto o déficit angular toma valores aparentemente exatos.

4.4.1 O limite BPS no caso $\gamma = 0$.

No caso dos kinks, mencionamos o limite de Bogomol'nyi, onde o kink satura o valor da energia e por isso torna-se automaticamente

O limite BPS se dá quando a massa do campo escalar é igual à massa do campo de gauge.

estável. Nesta seção veremos que o mesmo se dá também com os vórtices (e cordas) para um determinado valor de α . Este é o chamado **limite BPS** (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield), e ocorre quando as massas dos campos escalar e de gauge tornam-se iguais.

A massa (clássica) de um campo é dada pelo termo quadrático do mesmo, na Lagrangeana, após a quebra espontânea da simetria. Os termos quadráticos do vórtice são

$$\mathcal{L}_{\text{quadrático}} = -\frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu - \lambda v^2\phi^*\phi, \quad (4.54)$$

da onde podemos obter que as massas do campo de gauge e escalar são, respectivamente $m_A^2 = e^2v^2$ e $m_H^2 = 2\lambda v^2$. A relação entre as duas massas é dada por

$$\frac{m_A^2}{m_H^2} = \frac{e^2}{2\lambda} = \frac{\alpha}{2}, \quad (4.55)$$

As massas do campo escalar e de gauge são iguais quando $\alpha = 2$. Com isso, o vórtice gerado por ambos os campos possuem o mesmo tamanho característico, e não exercem força em outros vórtices. Este é o motivo por trás da estabilidade presente no limite BPS.

e logo, quando as massas são iguais, temos que $\alpha = 2$. Resta-nos mostrar que este limite realmente satura a energia do sistema e é, automaticamente, estável. Para isso precisamos realizar um truque semelhante ao que fizemos no caso dos kinks.

A energia do vórtice no espaço plano é dada por (4.21). Fazendo a substituição $\lambda = e^2/\alpha$, e escrevendo a energia em termos de suas componentes, temos

$$E = \int \left[\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}\overline{D}_1\phi^*D^2\phi + \frac{1}{2}\overline{D}_2\phi^*D^2\phi + \frac{e^2}{4\alpha}(\phi^*\phi - v^2)^2 \right] d^2x \quad (4.56)$$

onde $B = F_{12}$, $D_1 = \partial_1 + ieA_1$ e $\overline{D}_1 = \partial_1 - ieA_1$.

Vamos agora completar o quadrado na expressão acima,

$$E = \int \left\{ \frac{1}{2} \left[B + \frac{e}{\sqrt{2\alpha}}(|\phi|^2 - v^2) \right]^2 + \frac{1}{2} |(D_1 + iD_2)\phi|^2 \right\} d^2x - \int \left[\frac{Be}{\sqrt{2\alpha}}(|\phi|^2 - v^2) + \frac{1}{2}(i\overline{D}_2\phi^*D_1\phi - i\overline{D}_1\phi^*D_2\phi) \right] d^2x. \quad (4.57)$$

O segundo termo presente na segunda linha de (4.57) pode ser melhor trabalhado, até concluirmos que ele é igual a

$$\frac{e}{2}(\partial_1A_2 - \partial_2A_1)|\phi|^2 = \frac{Be}{2}|\phi|^2, \quad (4.58)$$

e, portanto, se $\alpha = 2$, este termo se cancela com o outro termo quadrático em ϕ^2 da segunda linha da equação (4.57). O termo restante da segunda linha é dado por

$$\int \frac{1}{2}Bev^2 \propto v^2n, \quad (4.59)$$

onde n é chamado de número de enrolamentos, e dado pelo fluxo do campo magnético (pelo núcleo da corda no caso de $D=1+3$). Como a primeira linha da equação (4.57) é estritamente positiva, temos que o limite de energia é saturado se as equações

$$B + \frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2) = 0, \quad (D_1 + iD_2)\phi = 0 \quad (4.60)$$

forem satisfeitas. Este é o limite BPS, e neste regime a configuração da corda é automaticamente estável, em vista que ela satura o limite de energia. Neste caso as equações de campo são de primeira ordem, ao invés de segunda ordem.

No limite BPS, os campos obedecem às equações diferenciais de primeira ordem.

A CORDA ABELIANA NA GRAVITAÇÃO DE STAROBINSKY ESTENDIDA

O objetivo deste capítulo é estudar a corda Abelianas em modelos alternativos da gravitação, mais especificamente o modelo de Starobinsky e o modelo de Starobinsky estendido. Ambos são casos específicos de uma teoria $f(R)$, sendo o modelo de Starobinsky dado por $f(R) = R + \eta R^2$. Entre as principais características deste modelo, podemos citar o fato de atender de forma satisfatória dados referentes à inflação cosmológica obtidos pelo satélite Planck [Planck14], além de ser uma teoria cuja renormalizabilidade é mais favorável do que o modelo proposto por Einstein [Ste77]. Como essa correção à ação de Einstein-Hilbert é dada por um termo quadrático no escalar de curvatura, é de se esperar que tal termo exerça pouca influência em regiões de baixa energia, porém, deve ser considerado em regiões de curvatura intensa, como nas proximidades de objetos compactos e no universo primitivo. Neste último caso, devemos estudar a formação e comportamento de defeitos topológicos nesta teoria, e não na teoria da gravitação de Einstein.

Recentemente, modelos estendidos de Starobinsky foram propostos, da forma $f(R) = R + \eta R^2 + \beta R^n$, com $n \geq 3$, na tentativa de melhorar ainda mais sua concordância com os resultados obtidos pelo satélite Planck. Desta forma, vamos também considerar este modelo no estudo da corda Abelianas. Como veremos, o resultado obtido com tais correções decai a medida que a potência n aumenta.

Outro caso que iremos considerar é o da presença de uma constante cosmológica. Como já observamos, um dos maiores atrativos das teorias $f(R)$ é a possibilidade de modelar um comportamento análogo ao da existência de uma constante cosmológica, sem a necessidade da introdução ad hoc de tal constante. No caso de uma teoria do tipo $f(R) = R + \alpha R^n$, esta constante cosmológica simulada é dada por $\Lambda = (1/\alpha)^{1/(n-1)}$, para $n > 2$. Infelizmente, um modelo como este é difícil de ser estudado numericamente, em vista que o termo do tipo constante cosmológica é inversamente proporcional à $(n-1)$ raiz do parâmetro de correção e , logo, para uma constante cosmológica pequena, é necessário um parâmetro de correção muito grande. Nossa estratégia será, então, introduzir uma constante cosmológica ad hoc e estudar como os modelos estendidos de Starobinsky se comportam frente à esta constante cosmológica.

O modelo de Starobinsky introduz uma correção quadrática no escalar de curvatura. Tal termo deve ser importante em ambientes de curvatura forte.

O modelo estendido de Starobinsky inclui termos polinomiais de potências maior que dois. Ele pode ser utilizado para simular a presença de um termo do tipo constante cosmológica.

De forma geral, o modelo que iremos estudar neste capítulo é dado por

$$S = \int \sqrt{|g|} d^4x [\mathcal{L}_m + \frac{1}{16\pi G} f(R)] \quad (5.1)$$

onde \mathcal{L}_m representa a Lagrangeana de matéria e é a mesma do capítulo anterior,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi^* (\partial^\mu - ieA^\mu) \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - v^2)^2. \quad (5.2)$$

As seguintes seções irão tratar de diferentes formas analíticas para a função $f(R)$. Inicialmente iremos tratar do modelo de Starobinsky sem constante cosmológica [Gra16], onde veremos que o déficit angular gerado pela corda cósmica é atenuado pela correção de Starobinsky. Posteriormente iremos estudar o modelo estendido de Starobinsky, ainda sem a presença de uma constante cosmológica [GB16], onde veremos que termos de potência superior tem como resultado uma atenuação menor para o déficit angular, em relação ao termo quadrático de Starobinsky. Finalmente, iremos estudar o caso da corda cósmica em um espaço-tempo com uma constante cosmológica, tanto no modelo de Starobinsky como no modelo de Starobinsky estendido, e iremos analisar como o horizonte cosmológico é influenciado por tais correções, comparando ao mesmo sistema na relatividade geral [GB16].

5.1 STAROBINSKY SEM CONSTANTE COSMOLÓGICA

O modelo de Starobinsky sem constante cosmológica caracteriza-se por $f(R) = R + \eta R^2$. Nesta e nas demais seções iremos utilizar o mesmo ansatz para a métrica e para os campos de matéria, dados respectivamente por

O ansatz para os campos escalar e de gauge, e também para as funções da métrica, são os mesmos do capítulo anterior.

$$ds^2 = -N(r)^2 dt^2 + dr^2 + L(r)^2 d\phi^2 + N(r)^2 dz^2, \quad (5.3)$$

$$\Phi(r) = \nu f(r) e^{i\phi}, \quad (5.4)$$

e

$$A_\mu dx^\mu = \frac{1}{e} [1 - P(r)] d\phi. \quad (5.5)$$

É importante lembrar que este ansatz é escolhido de forma que os campos de matéria atinjam seu valor esperado no vácuo no infinito, e que formem uma configuração tipo corda. As equações de campo

para $f(r)$ e $P(r)$ são as mesmas do capítulo anterior, a diferença estando presente apenas nas equações para o campo gravitacional, ou seja, para as funções $N(r)$ e $L(r)$. Variando a ação (5.1) em relação à métrica, obtemos a equação

$$G_{\mu\nu}(1 + 2\eta R) + \frac{1}{2}\eta g_{\mu\nu}R^2 - 2\eta(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square)R = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (5.6)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, $\kappa^2 = 8\pi G$ e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da corda. Como o escalar de Ricci já contém duas derivadas na métrica, este é na verdade um conjunto de equações diferenciais não-lineares de quarta ordem. Não é de se estranhar que seu trato seja de grande dificuldade, o que explica a pouca quantidade de soluções exatas já obtidas para este modelo. Um truque muito utilizado neste caso é considerar o escalar de Ricci como um campo independente, o que faz com que as equações acima se comportem como um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem para as funções $N(r)$, $L(r)$ e $R(r)$. Este truque é bem conhecido para reduzir a ordem de equações diferenciais. Tirando o traço de (5.6), temos

$$-R + 6\eta\square R = \kappa^2 T, \quad (5.7)$$

e podemos utilizar esta relação em (5.6) para eliminar o termo proporcional a $\square R$. Isto nos mostra que o escalar de Ricci é uma variável dinâmica, diferentemente da gravitação de Einstein, onde ele obedece uma relação puramente algébrica com o tensor de energia-momento. Outra característica que podemos observar na equação acima é que, para R constante e no vácuo, temos $R = 0$, o que implica naturalmente um espaço assintoticamente plano. Caso queiramos um espaço de curvatura constante precisamos introduzir um termo de constante cosmológica. Como veremos mais adiante, o mesmo não é verdade para os modelos estendidos de Starobinsky.

Inserindo (5.7) em (5.6), temos

$$G_{\mu\nu}(1 + 2\eta R) + \left(\frac{\eta R^2}{2} + \frac{R}{3}\right)g_{\mu\nu} - 2\eta\nabla_\mu \nabla_\nu R = \kappa^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{3}\right). \quad (5.8)$$

O tensor de energia-momento para o campo de matéria é calculado de forma usual,

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (5.9)$$

e seus componentes são os mesmos do capítulo anterior, em vista que a única alteração se dá na arena gravitacional. Também da mesma forma que no capítulo anterior, iremos introduzir uma escala característica de tamanho, dada por $1/\sqrt{\lambda\nu^2}$, de forma a deixar todas os

Equações de campo do modelo de Starobinsky.

O escalar de curvatura do modelo de Starobinsky, no vácuo, é assintoticamente nulo. O mesmo não é verdade nos modelos estendidos de Starobinsky.

O parâmetro ξ parametriza a correção em relação à gravitação de Einstein. Esta última é reobtida no limite $\xi \rightarrow 0$

nossos parâmetros e funções adimensionais. A nova coordenada espacial é então $x = \sqrt{\lambda v^2} r$, e as funções da métrica são redefinidas por $L(x) = \sqrt{\lambda v^2} L(r)$ e $R(x) = R(r)/\lambda v^2$. Desta vez iremos trabalhar com três parâmetros adimensionais, $\alpha = e^2/\lambda$, $\gamma = \kappa^2 v^2$ e $\xi = \eta \lambda v^2$.

Temos agora um conjunto de cinco equações diferenciais não-lineares acopladas, com três parâmetros livres. O parâmetro α está relacionado à relação entre as massas do campo de gauge e do campo escalar, o parâmetro γ está relacionado à escala de quebra de simetria e, consequentemente, à tensão da corda cósmica, enquanto o parâmetro ξ está relacionado com a correção de Starobinsky em relação à teoria de Einstein. No limite $\xi \rightarrow 0$, devemos reobter os resultados da corda cósmica na gravitação de Einstein.

Com tais definições, as equações de campo para as funções da métrica e o escalar de curvatura são dadas por

$$N'' = -\frac{1}{24} \frac{1}{\alpha N L^2 (1 + 2\xi R)} [6\xi \alpha L (4RLN'^2 + R^2LN^2 - 4R'L'N^2) - \gamma N^2 (10\alpha P^2 f^2 + \alpha(1 - f^2)^2 L^2 - 2\alpha f'^2 L^2 + 6P'^2) + 4\alpha L^2 (3N'^2 + RN^2)], \quad (5.10)$$

Equações diferenciais satisfeitas pelas funções da métrica, e pelo escalar de curvatura, juntamente com as condições de contorno.

$$R'' = \frac{1}{24} \frac{1}{N^2 L^2 \alpha \xi} [6\xi \alpha LR (8N'NL' + 4N'^2 L + RLN^2) - \gamma N^2 (10\alpha f'^2 L^2 - 2\alpha P^2 f^2 + \alpha L^2 (1 - f^2)^2 + 6P'^2) + 4\alpha (6N'LN L' + 3N'^2 L^2 + RN^2 L^2)], \quad (5.11)$$

e

$$L'' = \frac{1}{24} \frac{1}{L \alpha N^2 (1 + 2\xi R)} [6\xi \alpha L (4N'^2 LR - R^2 N^2 L - 8N'NL'R) + 8R'N'LN - 4R'L'N^2) - \gamma N^2 (\alpha (2f'^2 L^2 + 14P^2 f^2 - L^2 (1 - f^2)^2) + 18P'^2) + 4\alpha L (3N'^2 L - RN^2 L - 6N'NL')], \quad (5.12)$$

onde agora o ($'$) nas equações acima indica derivada em relação à coordenada x . As equações para os campos escalar e de gauge são as mesmas do capítulo anterior, da forma que não as repetiremos. As condições de contorno para as funções da métrica são dadas por

$$L(0) = 0, L'(0) = 1, \quad (5.13)$$

$$N(0) = 1, N'(0) = 0, \quad (5.14)$$

$$R'(\infty) = 0, R(\infty) = 0, \quad (5.15)$$

onde as duas primeiras condições são as mesmas da corda na gravitação de Einstein. Como agora o escalar de curvatura obedece uma equação diferencial, também precisamos estabelecer duas condições

de contorno para ele. O fato de que $R(x) \rightarrow 0$ no infinito é uma prerrogativa da teoria, o que nos leva a derivada nula do mesmo.¹

Nosso problema agora é resolver as equações (5.10-5.12) com as condições de contorno (5.13-5.15), juntamente com as equações para os campos escalar e de gauge.

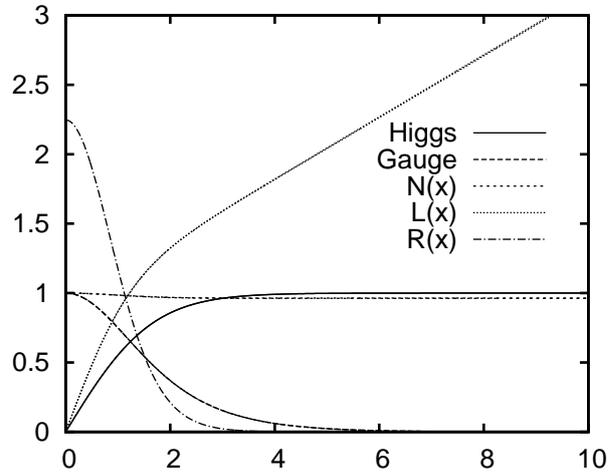


Figura 5: Campos de matéria e funções da métrica para a corda Abelian no modelo gravitacional de Starobinsky. Os parâmetros utilizados são $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.3$ e $\xi = 0.001$.

A partir da equação para o escalar de curvatura, equação (5.11), podemos notar que não podemos tomar $\xi = 0$, pois isto acarretaria em uma divisão por zero. Tal se deve ao fato já mencionado que na relatividade geral o escalar de curvatura não é dinâmico, e satisfaz uma relação algébrica com a matéria. Nada nos impede, no entanto, de tomar um valor pequeno para o parâmetro ξ e verificar se nosso resultado recai nos mesmos valores já obtidos para a corda cósmica na relatividade geral. A figura (5) mostra a configuração da corda no modelo de Starobinsky para $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.3$ e $\xi = 0.001$. Os gráficos obtidos para os campos de matéria e as funções da métrica estão impressos por cima dos gráficos obtidos no capítulo anterior para a corda na relatividade geral, sem diferença aparente. Desta forma, podemos considerar $\xi = 0.001$ como praticamente sendo um limite em que o sistema recai na relatividade geral. Nesta figura podemos notar também o gráfico para o escalar de curvatura, que começa em torno de $R = 2.25$ e cai a zero à medida que nos afastamos do núcleo da corda. Para $x \rightarrow \infty$, temos naturalmente $R \rightarrow 0$.

Nosso próximo passo é começar a aumentar gradativamente o valor de ξ para estudar como os campos de matéria e as funções da métrica se comportam quando a correção de Starobinsky começa a ficar mais

A medida que o parâmetro ξ aumenta, o termo de Starobinsky torna-se mais efetivo, e as funções $L(x)$ e $R(x)$ tem o seu perfil consideravelmente alterado.

¹ O mesmo sistema de equações foi também analisado substituindo a condição de contorno $R'(\infty) = 0$ pela condição $R'(0) = 0$, e os resultados obtidos não apresentaram diferença observável.

importante. Um exemplo disto para o caso $\alpha = 2.0, \gamma = 1.8$ é mostrado na figura (6). Nesta figura é exibida a configuração para nossas cinco funções: Os campos de matéria, as duas funções da métrica e o escalar de curvatura. Das cinco funções, as que mais apresentam alterações são a função da métrica $L(x)$ e o escalar de curvatura $R(x)$. A função da métrica $N(x)$ também apresenta uma pequena variação, porém veremos que tal não exerce grande influência na geometria do sistema neste modelo de Starobinsky sem constante cosmológica.

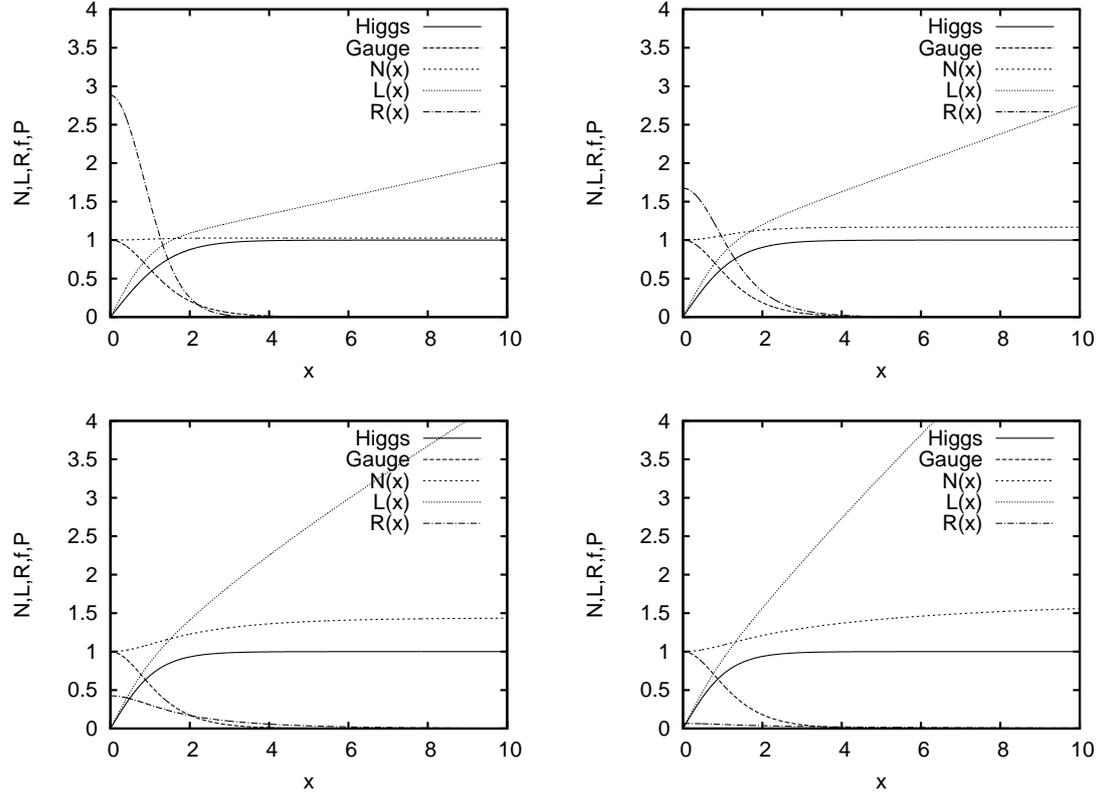


Figura 6: Soluções numéricas da corda cósmica no modelo de Starobinsky, para $\alpha = 2.0$ e $\gamma = 1.8$. Na parte superior, da esquerda para a direita, temos $\xi = 0.01$ e $\xi = 0.1$. Na parte inferior, da esquerda para a direita, temos $\xi = 1.0$ e $\xi = 10.0$.

Vale a pena recordar que a função $L(x)$ está diretamente relacionada com o déficit angular gerado pela corda. Tal déficit é dada por

$$\delta\phi = 2\pi(1 - L'(\infty)), \quad (5.16)$$

No modelo de Starobinsky, o déficit angular gerado pela corda com um determinado parâmetro γ é menor do que no caso da relatividade geral.

de forma que quanto mais horizontal for a função $L(x)$ no infinito, maior será o déficit angular. Pela figura (6) podemos notar que quando aumentamos ξ , a inclinação em relação à horizontal aumenta, e logo o déficit angular se torna menor. Ou seja, a topologia do sistema é menos afetada. A geometria também não permanece a mesma, como pode ser observado pela atenuação do escalar de curvatura.

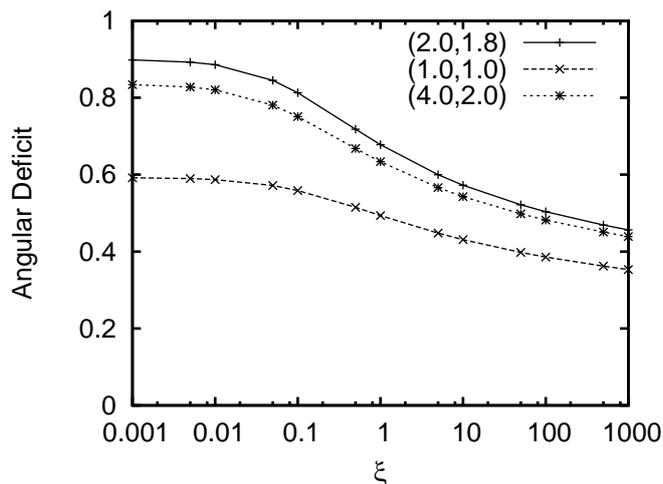


Figura 7: Como o déficit angular gerado pela corda cósmica é influenciado pelo modelo de Starobinsky, fixando-se os parâmetros α e γ , e variando-se o parâmetro ξ , de 0.001 até 1000. O eixo vertical mede o déficit angular por 2π .

O fato do déficit angular diminuir como função do parâmetro de correção de Starobinsky tem uma grande relevância física, pois permite alargar o intervalo de valores possíveis para a escala de quebra espontânea de simetria. Vamos explicar este fato melhor. Como vimos na corda cósmica na relatividade geral, o déficit angular está diretamente relacionado com o parâmetro γ , que é proporcional à escala de quebra de simetria. O déficit angular, por sua vez, é em princípio uma quantidade mensurável por processos astrofísicos e cosmológicos, pois relaciona-se, entre outros, com efeitos de lentes gravitacionais e emissão de radiação. A detecção (ou não) de efeitos relacionados às cordas cósmicas deve impor limites à possível escala de quebra. Em especial, a não detecção de déficits angulares consideráveis deve impor limites superiores à possível escala de quebra. A introdução da correção de Starobinsky no modelo gravitacional proposto por Einstein altera o nosso cenário, pois essa correção é responsável por uma atenuação no déficit angular. O modelo de Starobinsky pode, então, explicar naturalmente a não-observação destes efeitos, sem alterar a escala de quebra. Ou seja, para os mesmos limites observacionais, o modelo de Starobinsky possibilita maiores valores para a escala de quebra em relação à relatividade geral. Na figura (7) mostramos o déficit angular (em razão de 2π) em três conjuntos de dados (α, γ) , para diferentes valores do parâmetro ξ .

Uma forma simples de quantificar estes dados é trabalhar com o parâmetro γ crítico, que é o valor de γ cujo déficit angular é 2π . Ou seja, é o maior valor que o parâmetro γ pode assumir antes que o espaço-tempo deixe de ser regular. Este valor é uma função de α , no caso da gravitação de Einstein, e será uma função de α e ξ , no modelo de Starobinsky. Podemos observar tal comportamento na figura (8),

No modelo de Starobinsky, maiores valores para a escala de quebra são permitidos para um mesmo limite observacional, em relação à relatividade geral.

O valor de γ_{cr} cresce em relação ao parâmetro ξ .

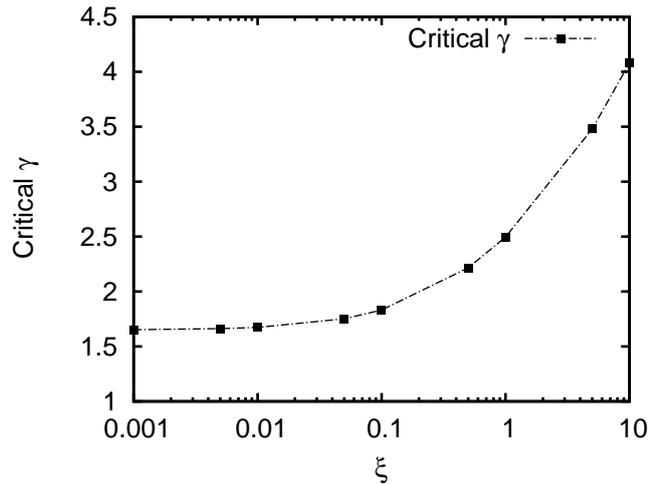


Figura 8: Valor crítico do parâmetro γ como função de ξ , para $\alpha = 1$. A inclusão do termo R^2 na ação diminui o valor do déficit angular.

onde o valor de γ crítico para $\alpha = 1.0$ é calculado para diferentes valores de ξ . No caso da gravitação de Einstein, $\gamma_{cr}(\alpha = 1.0) \approx 1.66$. No modelo de Starobinsky, γ_{cr} começa a aumentar à medida que aumentamos ξ . Como os valores permitidos para γ são os valores abaixo da linha tracejada, vemos que o intervalo de valores permitidos é maior quanto mais relevante for a correção de Starobinsky.

Devemos também estudar o efeito da correção de Starobinsky nos campos de matéria. Como já mencionado, no entanto, tal efeito não é muito considerável, em vista que a mudança na teoria gravitacional não altera as equações de campo para a corda, e mesmo a métrica não sofre grandes alterações no núcleo da corda. Na figura (9) é apresentada a configuração dos campos de gauge e Higgs para diferentes valores de ξ . Como podemos perceber, não há variação considerável.

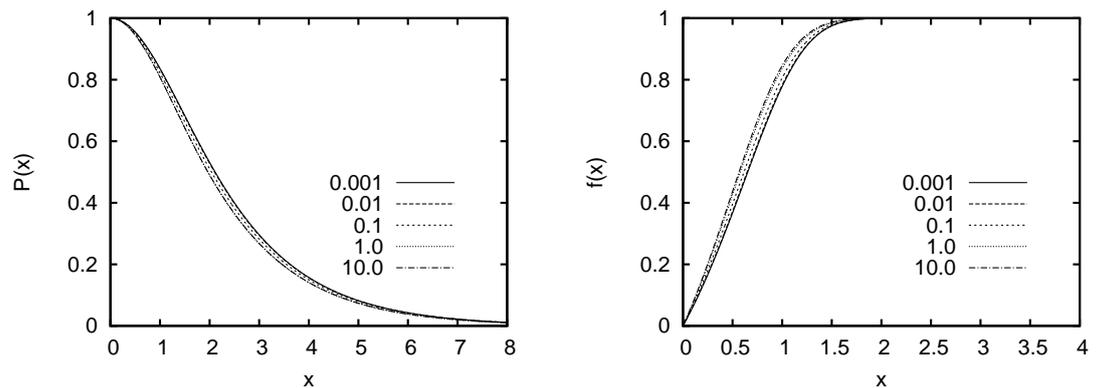


Figura 9: Perfil dos campos escalar e de gauge, para diferentes valores do parâmetro ξ .

Outra quantidade que podemos calcular é a energia da corda por unidade de comprimento. Um gráfico desta energia para 3 diferentes

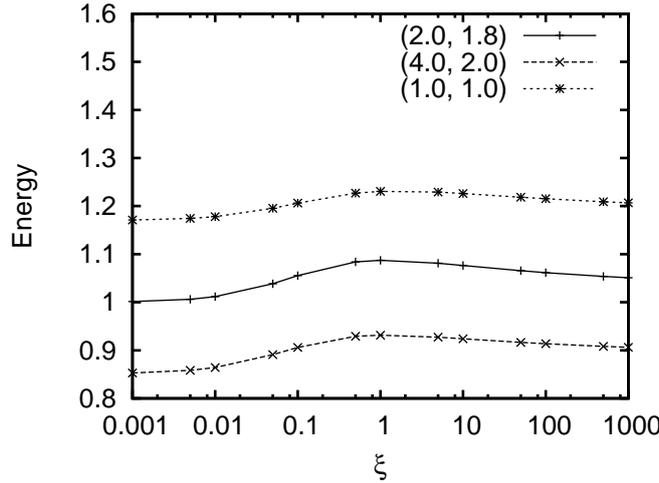


Figura 10: Energia da corda cósmica em função do parâmetro ξ , para valores fixos dos parâmetros α e γ .

configurações de parâmetros (α, γ) é apresentada na figura (10). Podemos notar que a energia cresce um pouco com o aumento da correção de Starobinsky até atingir um máximo. Após este máximo, a energia parece se aproximar de um valor assintótico.

Iremos agora estudar o que ocorre quando adicionamos correções polinomiais de ordens maiores à ação de Einstein-Hilbert, em um modelo atualmente conhecido como Starobinsky estendido.

5.2 A CORDA ABELIANA NO MODELO DE STAROBINSKY ESTENDIDO

Uma forma de estender o modelo de Starobinsky é adicionar correções de ordem superior ao termo quadrático já presente, da forma $f(R) = R + \eta R^2 + \beta R^m$ para $m > 2$. Neste trabalho iremos nos aprofundar em duas possibilidades, $m = 3$ e $m = 4$, e mencionar brevemente o caso de potências maiores. Isto se deve ao fato de que, quanto maior a ordem da potência, menor será o efeito desta extensão em nosso modelo.

Para teorias $f(R)$ de forma geral, a equação de campo, derivada da ação (5.1) é dada por

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square)f'(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (5.17)$$

onde (\prime) representa a derivada em relação ao escalar $R(r)$. Essa equação é melhor escrita em termos do tensor de Einstein, da forma

$$G_{\mu\nu}(1 + 2\eta R + m\beta R^{m-1}) + \frac{\eta g_{\mu\nu} R^2}{2} + \frac{(m-1)g_{\mu\nu} \beta R^{m-1}}{2} - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square)f'(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (5.18)$$

Equações de campo para o modelo de Starobinsky estendido.

Como da vez anterior, podemos substituir o termo D'alambertiano utilizando o traço da equação (5.18). Ele é dado por

$$-R + (m - 2)\beta R^m + 3\Box f'(R) = \kappa^2 T, \quad (5.19)$$

da forma que

$$\Box f'(R) = \frac{\kappa^2 T}{3} + \frac{R}{3} - \frac{(m - 2)\beta R^m}{3}, \quad (5.20)$$

e substituindo este resultado em (5.18), chegamos ao formato final de nossa equação para o campo gravitacional, que é dada por

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(1 + 2\eta R + m\beta R^{m-1}) + g_{\mu\nu}\left(\frac{R}{3} + \frac{\eta R^2}{2} + \frac{(m + 1)\beta R^m}{6}\right) \\ - \nabla_\mu \nabla_\nu (2\eta R + m\beta R^{m-1}) = \kappa^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{T g_{\mu\nu}}{3}\right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

e esta é a equação que precisamos resolver, juntamente com as equações para os campos de gauge e escalar.

Da mesma forma que fizemos na seção anterior, iremos reescalar as funções da métrica e os campos de matéria, assim como todos os parâmetros envolvidos na teoria, para que fiquem adimensionais. Nossos parâmetros serão, agora, dados por $\alpha = e^2/\lambda$, $\gamma = \kappa^2 v^2$, $\xi = \eta\lambda v^2$ e $\chi = \beta(\lambda v^2)^{(m-1)}$, da forma que agora temos cinco parâmetros, ao invés de quatro. A redefinição dos campos é a mesma da seção anterior.

Nossas equações finais para as funções da métrica, e do escalar de curvatura, são dadas por

$$\begin{aligned} R'' = \frac{1}{12} \frac{1}{N^2 L^2 \alpha R (2\xi R^2 + m(m-1)\chi R^m)} [6\xi\alpha LR^4 (RN^2 L + 4N'^2 L) \\ + 8N'NL') + 2\chi\alpha R^m L((m+1)R^3 N^2 L - 6m(m^2 - 3m + 2)R'^2 N^2 L \\ + 6mR^2 N'^2 L + 12mR^2 N'NL') - \gamma R^3 N^2 (10\alpha f'^2 L^2 - 2\alpha P^2 f^2 \\ + \alpha L^2 (1 - f^2)^2 + 6P'^2) + 4\alpha R^2 L(6N'NL' + 3N'^2 L + RN^2 L) \\ - 4\Lambda\alpha N^2 L^2 R^3], \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} N'' = \frac{-1}{24} \frac{1}{\alpha L^2 N (R + 2\xi R^2 + m\chi R^m)} [6\xi\alpha RL(4RLN'^2 + R^2 LN^2) \\ - 4R'L'N^2) + 2\chi\alpha R^2 L((m+1)R^{m-1} N^2 L - 6m(m-1)R'L'N^2 \\ + 6mLR^{m-2} N'^2) - \gamma RN^2 (10\alpha P^2 f^2 - 2\alpha f'^2 L^2 + \alpha L^2 (1 - f^2)^2 + 6P'^2) \\ + 4\alpha RL^2 (N^2 R + 3N'^2) - 4\Lambda\alpha N^2 L^2 R], \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$L'' = \frac{1}{24} \frac{1}{\alpha L N^2 (1 + 2\xi R + m\chi R^{m-1})} [6\xi\alpha L(4N'^2 LR - R^2 N^2) - 8N'NL'R + 8R'N'LN - 4R'L'N^2] - 2\alpha\chi RL(2(m+1)R^{m-1}N^2L - 6mR^{m-2}LN'^2 + 12mN'R^{m-2}NL' - 12m(m-1)R'N'LN R^{m-3} + 6m(m-1)R^{m-3}N^2R'L') - \gamma N^2(\alpha(2f'^2L^2 + 14P^2f^2 - L^2(1-f^2)^2) + 18P'^2) + 4\alpha L(3N'^2L - RN^2L - 6N'NL') + 4\Lambda\alpha L^2N^2]. \quad (5.24)$$

As condições de contorno para os campos da métrica são, como usualmente,

$$L(0) = 0, L'(0) = 1, \quad (5.25)$$

$$N(0) = 1, N'(0) = 0, \quad (5.26)$$

$$R'(\infty) = 0, R(\infty) = 0, \quad (5.27)$$

onde agora $R(x) \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \infty$ é uma escolha e não mais uma imposição da teoria, em vista que podemos ter também $R(x) \rightarrow \Lambda$, onde Λ é uma constante determinada pela forma analítica escolhida para a função $f(R)$. Claramente esta teoria é análoga a uma teoria com constante cosmológica, e estudaremos esta possibilidade na próxima seção.

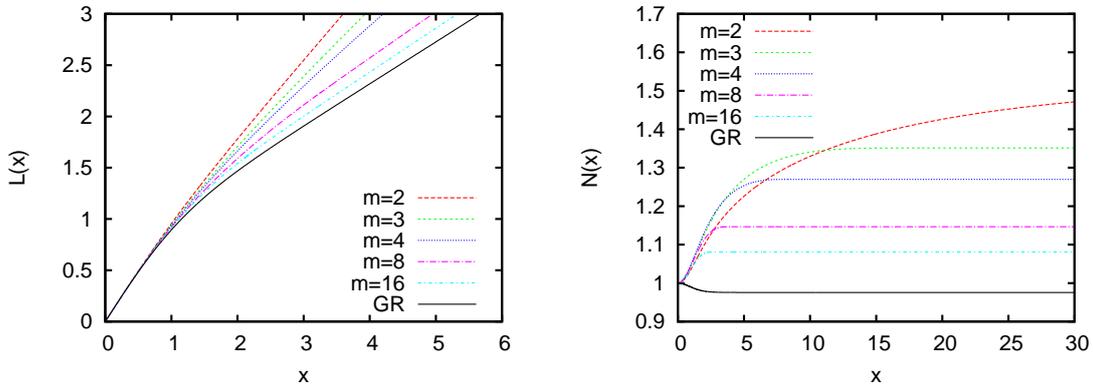


Figura 11: As funções métricas para $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $\xi = 0.01$ e $\chi = 100$ no modelo de Starobinsky estendido, para diferentes valores da potência m em $f(R) = R + \xi R^2 + \chi R^m$. A linha contínua representa o modelo na relatividade geral, ou seja, com $\xi = \chi = 0$.

Nosso objetivo neste momento é comparar como a introdução de uma correção de ordem superior ao modelo de Starobinsky afeta a energia da corda e , em especial, o déficit angular gerado pela corda. Considerando a função $f(R) = R + \xi R^2 + \chi R^m$, para determinados valores fixos de α, γ, ξ e χ , o perfil das funções da métrica é mostrado na figura (11). O resultado obtido nos mostra que quanto maior for a ordem da potência m , menor será o efeito desta correção em relação à relatividade geral. Dito de outra forma, o termo quadrático

No modelo estendido de Starobinsky, o termo quadrático possui maior efeito de correção que o termo cúbico, e o mesmo vale para potências de ordem maior.

de Starobinsky é o que exerce a maior correção, seguido do termo cúbico, e etc. Todas as correções tendem a diminuir o déficit angular gerado pela corda, e pouco influenciam a função métrica $N(x)$.

Ainda que diminuam de intensidade ao aumentarmos a ordem da potência m , as correções são acumulativas. Na figura (12) é mostrado o déficit angular calculado para diferentes valores dos parâmetros ξ e χ , para as potências $m = 3$ e $m = 4$. São exibidos seis gráficos onde o parâmetro do termo quadrático, ξ , possui os valores $\xi = 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10$ e 100 . Nota-se que a medida que ξ aumenta, o déficit angular deixa de ser afetado pelo aumento do parâmetro χ . Para $\xi = 10$, nenhum valor do polinômio de ordem quatro até $\chi = 1000$ consegue diminuir o déficit angular, e mesmo o termo cúbico com $\chi = 1000$ apenas o diminui ligeiramente. Para $\xi = 100$, nem mesmo o termo cúbico com $\chi = 1000$ consegue atenuar ainda mais o déficit angular.

O valor de γ_{cr} é maior quanto maiores forem os parâmetros ξ e χ , e será maior para os polinômios de ordem mais baixa.

O mesmo efeito pode ser visto se considerarmos o parâmetro γ_{cr} , como exibido na figura (13). Lembramos que os valores para γ abaixo da curva de γ_{cr} são os valores permitidos para o valor de vácuo do campo escalar, tomando como limite máximo o valor de γ que mantêm a regularidade do espaço-tempo. Ao aumentarmos o parâmetro de correção cúbico ou de ordem quatro, mais valores para γ são permitidos, porém quanto maior for o valor de ξ , menos tais efeitos são percebidos para as ordens superiores.

Na tabela (2) encontram-se os valores calculados para $m = 3$ com $\alpha = 1.0$ e $\gamma = 1.0$. Na tabela (3) encontram-se os valores calculados para $m = 4$ também com $\alpha = 1.0$ e $\gamma = 1.0$. Tais valores demonstram claramente como a atenuação do déficit angular é acumulativa entre os termos quadrático e de ordem superior, seja ele com $m = 3$ ou $m = 4$. Não foram realizados cálculos detalhados para $m > 4$, porém dado o comportamento exibido em (11) para as ordens superiores, é de se esperar que o padrão se repita, e potências de ordem $m > 4$ influenciem pouco na atenuação do déficit angular.

Nossos resultados para o modelo estendido de Starobinsky nos indicam que, ao menos para este caso, apenas os polinômios de ordem mais baixa afetam consideravelmente seu comportamento. Com isto, se pensarmos que qualquer função analítica para a função $f(R)$ deve poder ser escrita como uma série de potências, apenas os primeiros termos da série precisam ser considerados, e o modelo estendido de Starobinsky pode ser considerado uma aproximação boa o suficiente para qualquer teoria $f(R)$, ao menos no caso da corda Abelian.

O modelo estendido de Starobinsky é uma boa aproximação para uma teoria $f(R)$, no caso da corda cósmica.

5.3 STAROBINSKY E STAROBINSKY ESTENDIDO COM CONSTANTE COSMOLÓGICA

O modelo estendido de Starobinsky pode ser utilizado para introduzir naturalmente na teoria um termo do tipo constante cosmológ-

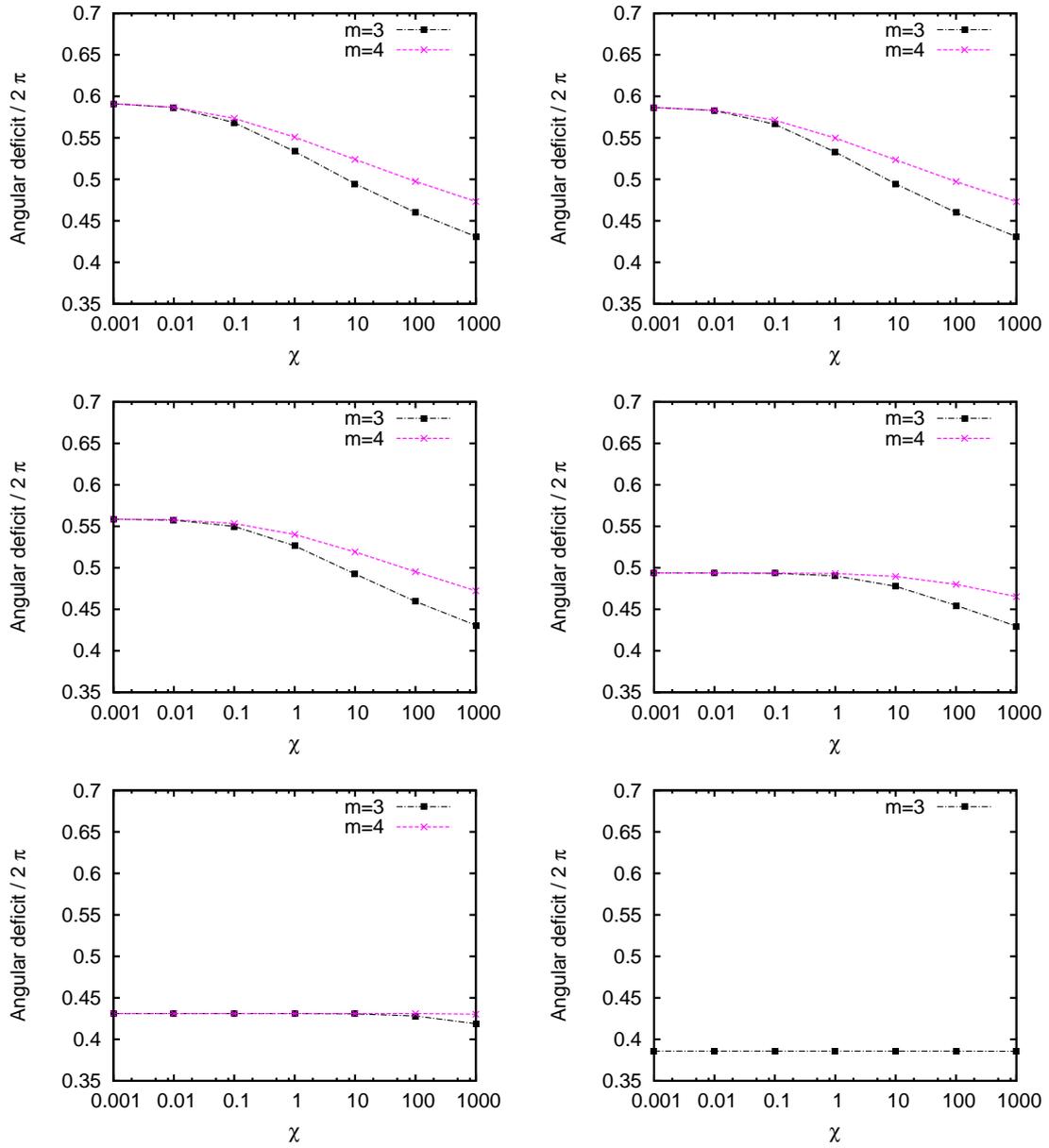


Figura 12: Déficit angular gerado pelas correções cúbicas e de ordem quatro do modelo de Starobinsky estendidos. Os seis gráficos correspondem a $\xi = 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10$ e 100 , respectivamente, começando na figura superior à esquerda,

Tabela 2: Valores de energia (por comprimento) da corda e déficit angular para $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.0$ e $m = 3$.

ξ	χ	Energia	$\delta\phi/2\pi$
0.001	0	1.1710	0.5918
0.001	0.001	1.1739	0.5911
0.001	0.01	1.1867	0.5867
0.001	0.1	1.2130	0.5683
0.001	1.0	1.2329	0.5335
0.001	10	1.2372	0.4947
0.001	100	1.2331	0.4600
0.001	1000	1.2266	0.43110
0.01	0	1.2266	0.5872
0.01	0.001	1.1800	0.5867
0.01	0.01	1.1899	0.5829
0.01	0.1	1.2136	0.5663
0.01	1	1.2329	0.5328
0.01	10	1.2372	0.4945
0.01	100	1.2331	0.4599
0.01	1000	1.2266	0.4309
0.1	0.001	1.2065	0.5586
0.1	0.01	1.2083	0.5575
0.1	0.1	1.2187	0.5500
0.1	1	1.2328	0.5265
0.1	10	1.2369	0.4926
0.1	100	1.2329	0.4594
0.1	1000	1.2266	0.4308
1	0.001	1.2307	0.4938
1	0.01	1.2307	0.4937
1	0.1	1.2310	0.4933
1	1	1.2325	0.4903
1	10	1.2345	0.4777
1	100	1.2319	0.4547
1	1000	1.2262	0.4295
10	0.1	1.2262	0.4310
10	10	1.2262	0.4306
10	100	1.2259	0.4281
10	1000	1.2237	0.4188
100	1	1.2153	0.3858
100	100	1.2153	0.3858
100	1000	1.2152	0.3856

Tabela 3: Valores de energia (por comprimento) da corda e déficit angular para $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.0$ e $m = 4$.

ξ	χ	Energia	$\delta\phi/2\pi$
0.001	0.001	1.1766	0.5910
0.001	0.01	1.1916	0.5868
0.001	0.1	1.2138	0.5735
0.001	1.0	1.2311	0.5509
0.001	10	1.2387	0.5240
0.001	100	1.2382	0.4974
0.001	1000	1.2362	0.4732
0.01	0.001	1.1816	0.5866
0.01	0.01	1.1948	0.5832
0.01	0.1	1.2142	0.5713
0.01	1	1.2311	0.5498
0.01	10	1.2372	0.5235
0.01	100	1.2392	0.4972
0.01	1000	1.2361	0.4731
0.1	0.001	1.2066	0.5587
0.1	0.01	1.2089	0.5580
0.1	0.1	1.2181	0.5534
0.1	1	1.2307	0.5402
0.1	10	1.2380	0.5191
0.1	100	1.2388	0.4953
0.1	1000	1.2360	0.4723
1	0.001	1.2307	0.4938
1	0.01	1.2307	0.4938
1	0.1	1.2308	0.4937
1	1	1.2316	0.4931
1	10	1.2304	0.4896
1	100	1.2357	0.4800
1	1000	1.2344	0.4652
10	0.1	1.2262	0.4310
10	10	1.2262	0.4310
10	100	1.2262	0.4310
10	1000	1.2263	0.4302

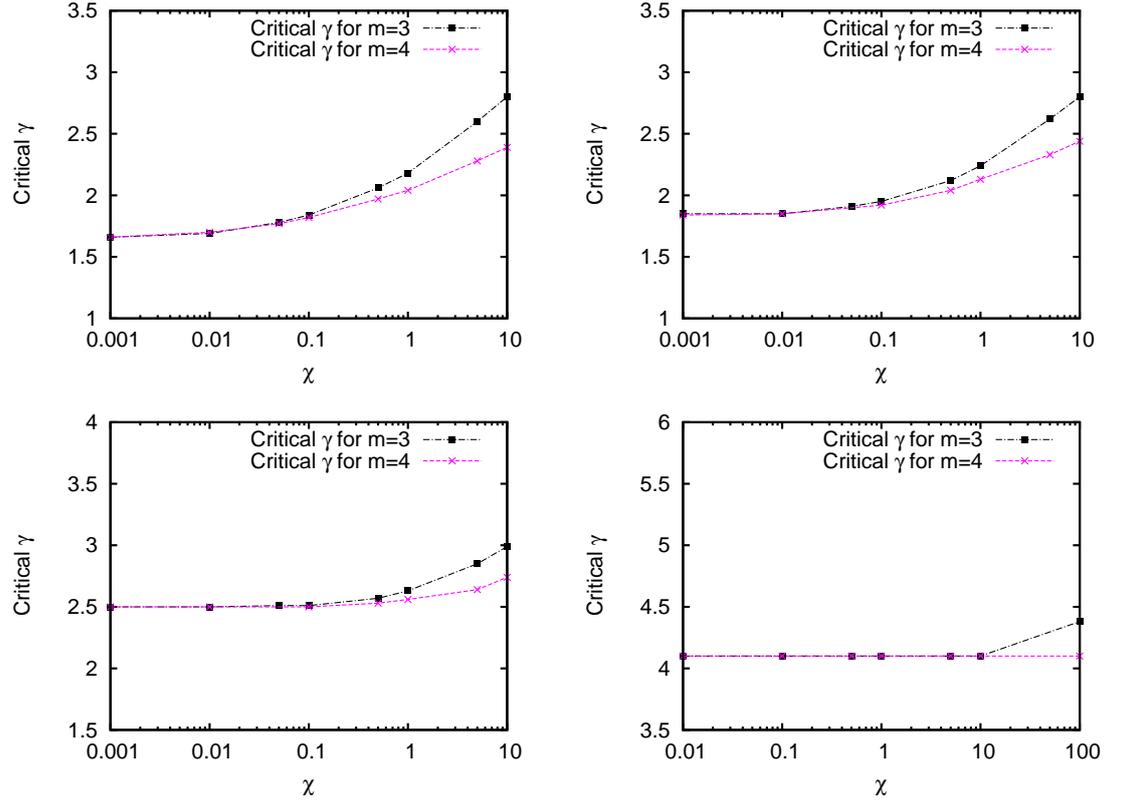


Figura 13: Os gráficos acima mostram como o valor de γ_{cr} é afetado pela correção cúbica e de quarta ordem, em relação ao termo quadrático. A começar pelo gráfico superior à esquerda, a intensidade do termo quadrático é dada por $\xi = 0.001, 0.1, 1$ e 10 .

ica. Como também já discutimos, esta constante cosmológica será muito grande se considerarmos pequenas correções à relatividade geral. O que faremos para remediar este fato é introduzir um termo de constante cosmológica já na ação de $f(R)$, de forma que o modelo estendido de Starobinsky irá apenas corrigir levemente esta constante cosmológica introduzida.

Considerando a forma analítica de $f(R)$ como $f(R) = R + \eta R^2 + \beta R^m - 2\Lambda$, para $m > 2$, o traço das equações de campo é dado por

$$-R + (m - 2)\beta R^m + 3\Box f'(R) + 4\Lambda = \kappa^2 T, \quad (5.28)$$

e, para o vácuo, e no regime assintótico onde o escalar de curvatura é uma constante, temos

$$-R + (m - 2)\beta R^m + 4\Lambda = 0. \quad (5.29)$$

O modelo estendido de Starobinsky corrige o valor da constante cosmológica.

Esta equação não possui uma solução analítica para qualquer m , de forma que vamos resolvê-la aproximadamente. Tomando $R = 4\Lambda + \epsilon$, e considerando $\epsilon \ll 4\Lambda$, temos

$$-4\Lambda - \epsilon + (m-2)\beta(4\Lambda + \epsilon)^m + 4\Lambda = 0, \quad (5.30)$$

onde, considerando apenas termos de ordem ϵ , temos

$$-\epsilon + (m-2)\beta m(m-2)(4\Lambda)^{(m-1)}\epsilon + \beta(m-2)(4\Lambda)^m = 0, \quad (5.31)$$

que possui solução

$$\epsilon = \frac{\beta(m-2)(4\Lambda)^m}{1 - m(m-2)\beta(4\Lambda)^{(m-1)}}. \quad (5.32)$$

Desta forma, a constante cosmológica pode ser pequena, em vista que o modelo estendido de Starobinsky apenas a corrige. Para termos uma ideia da ordem de grandeza que β que pode alcançar, vamos tomar o caso em que $\Lambda = 0.01$. Em nossos cálculos, nunca iremos ultrapassar este valor, que já é bem elevado. Neste caso, podemos tomar β até um valor em torno de 10^2 para $m = 3$, por exemplo.

Antes de examinarmos a corda com constante cosmológica no modelo de Starobinsky, devemos fazer uma pequena revisão da corda Abeliana com constante cosmológica na relatividade geral.

5.3.1 A corda Abeliana em de Sitter na gravitação de Einstein

O elemento mais importante do espaço de de Sitter é a presença de um horizonte cosmológico ². Ele ocorre porque, com a expansão do universo, a partir de um certo ponto do espaço-tempo a causalidade se perde. Seria necessário que a informação se propagasse com velocidade mais que a da luz para conseguir escapar deste limite. No horizonte cosmológico ocorre um efeito análogo ao horizonte de eventos gerado por um buraco negro, porém a origem deste horizonte não é a mesma.

O aparecimento deste horizonte cosmológico pode ser observado na solução das equações de campo para as equações de Einstein com constante cosmológica, no vácuo. Tal solução, para as funções da métrica $N(x)$ e $L(x)$ já introduzidas, é dada por [Lin86]

$$N(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3\Lambda}x}{2}\right)^{3/2} \quad (5.33)$$

² Se a constante cosmológica for negativa, o espaço assintótico será o espaço de anti-de Sitter. Não estudaremos este caso nesta tese.

Espaços com constante cosmológica positiva dão origem a um horizonte cosmológico, além do qual a causalidade é perdida.

Funções da métrica $N(x)$ e $L(x)$, no caso de um espaço axialmente simétrico com constante cosmológica. O horizonte cosmológico é dado pelo primeiro zero da função $N(x)$.

e

$$L(x) = \frac{2^{2/3}}{\sqrt{3\Lambda}} \left[\text{sen}(\sqrt{3\Lambda}x) \right]^{1/3} \left[\tan(\sqrt{3\Lambda}\frac{x}{2}) \right]^{2/3}. \quad (5.34)$$

Da função (5.33), podemos obter que o horizonte cosmológico ocorre quando $N(x) = 0$, ou seja, em $x = \pi/\sqrt{3\Lambda}$. Vamos denotar este horizonte cosmológico por x_0 . Para dois valores que serão utilizados no futuro, temos $x_0(\Lambda = 0.01) \approx 18.14$ e $x_0(\Lambda = 0.005) \approx 25.25$.

Quando inserimos a corda cósmica no sistema, o que ocorre é que o valor do horizonte cosmológico diminui em função do parâmetro γ . Como este parâmetro está diretamente relacionado com o valor esperado de vácuo do campo escalar, quanto maior for este valor, menor será o horizonte cosmológico. Nosso objetivo é tentar entender como essa relação é afetada no modelo estendido de Starobinsky.

5.3.2 A corda Abeliana em de Sitter no modelo de Starobinsky

No estudo da corda Abeliana com constante cosmológica, encontramos uma diferença mais acentuada entre o modelo de Starobinsky e o modelo de Starobinsky estendido, do que o encontrado na corda Abeliana sem constante cosmológica. Neste último caso, a diferença entre adicionar ou não termos extras em $f(R)$ era apenas quantitativa: Termos extras significam uma maior atenuação no déficit angular. Com a presença da constante cosmológica, tal diferença é também qualitativa.

A razão disto consiste no fato que o termo quadrático no escalar de Ricci não adiciona correções à constante cosmológica. Tomando a expressão (5.32), temos que $\epsilon = 0$ para $m = 2$, ou seja, no caso de Starobinsky puro.

Nossos resultados obtidos para o modelo de Starobinsky podem ser vistos na figura (14), onde seis gráficos são mostrados. O quarto gráfico ocorre sem a presença de matéria, com $\gamma = 0$ e $\Lambda = 0.005$. Como já dissemos, para este valor da constante cosmológica, o horizonte cosmológico é aproximadamente 25.25, o que condiz com nosso resultado. Neste gráfico podemos ver que o valor para o parâmetro de correção de Starobinsky não afeta o horizonte cosmológico, ou a função $N(x)$. Ou seja, não importa o valor do parâmetro ξ , o horizonte cosmológico será o mesmo. O mesmo não pode ser dito quando $\gamma \neq 0$. Os três primeiros gráficos mostram o comportamento de $N(x)$ para $\gamma = 1.5, 1.0$ e 0.5 , respectivamente. Nota-se que quanto maior o valor de γ , mais o horizonte cosmológico é afetado. Porém, a medida que aumentamos o parâmetro relacionado à correção do modelo de Starobinsky, o parâmetro ξ , esta correção começa a se atenuar, e o horizonte cosmológico começa a se aproximar do mesmo valor do horizonte cosmológico obtido com $\gamma = 0$, ou seja, no vácuo. Isto indica que o parâmetro de correção do modelo de Starobinsky tem o

papel de influenciar no efeito da corda cósmica, mas não influencia em nada no efeito da constante cosmológica.

Em outras palavras, o papel do termo quadrático de Starobinsky é anular o efeito gerado pela corda sobre o horizonte cosmológico. Para valores elevados do parâmetro ξ , é como se a corda não existisse e o horizonte cosmológico é completamente definido pela constante cosmológica. Para valores intermediários do parâmetro de correção do modelo de Starobinsky, ocorre o estranho fato do horizonte cosmológico apresentar-se levemente superior ao horizonte cosmológico de vácuo. Os dois últimos gráficos da figura (14) apenas reproduzem o mesmo padrão comentado, agora para $\Lambda = 0.01$, confirmando que a correção efetuada pelo modelo de Starobinsky é tão maior quanto maior for o parâmetro γ . Este resultado também é condizente com o que sabemos, em vista que quanto maior o parâmetro γ , mais o horizonte cosmológico será afastado do valor que ele tomaria no vácuo.

Já para o modelo de Starobinsky estendido, o comportamento é diferente. Na figura (15) são mostrados também seis gráficos, todos para $m = 3$. De acordo com a expressão (5.32), agora a constante cosmológica recebe uma correção. Este resultado pode ser visto no quarto gráfico da figura (15), onde a função $N(x)$ é mostrada para $\gamma = 0$ e variando-se o parâmetro χ . Ao contrário do caso de Starobinsky puro, notamos que o horizonte cosmológico diminui ao aumentarmos de χ . Este comportamento era esperado, em vista que o termo cúbico aumenta o valor da constante cosmológica. Os três primeiros gráficos mostram o comportamento da função $N(x)$ agora para $\gamma \neq 0$. Aqui encontramos um fato interessante. O horizonte cosmológico pode aumentar ou diminuir em função do parâmetro χ , sendo que aparenta aumentar para altos valores de γ e diminuir para baixos valores de γ . Os dois últimos gráficos apenas reproduzem o comportamento já apresentado, para diferentes valores da constante cosmológica.

Esse comportamento pode ser explicado da seguinte maneira: O parâmetro de correção de Starobinsky para $m > 2$ tem dois efeitos no espaço de de Sitter. O primeiro é enfraquecer a contribuição da corda cósmica, o que já está presente no modelo de Starobinsky, e o segundo é aumentar a constante cosmológica. Enquanto o primeiro efeito tende a aumentar o horizonte cosmológico, o segundo tende a diminuir o horizonte cosmológico. Quando o parâmetro de acoplamento da corda é grande (γ grande), o primeiro efeito se sobressai, aumentando o horizonte. Quando o parâmetro de acoplamento da corda é pequeno, é o segundo efeito que se sobressai, diminuindo o horizonte cosmológico.

Se considerarmos que o horizonte cosmológico pode funcionar como um limite observacional para as teorias modificadas da gravitação, o comportamento do modelo estendido de Starobinsky somente pode ser definido dada a relação entre a constante cosmológica e o valor

No modelo de Starobinsky com constante cosmológica, o papel do termo quadrático é anular o efeito da corda sobre o valor do horizonte cosmológico.

No modelo de Starobinsky estendido, o papel do termo cúbico é duplo: Atenuar o efeito da corda sobre o horizonte cosmológico, e aumentar o valor da constante cosmológica.

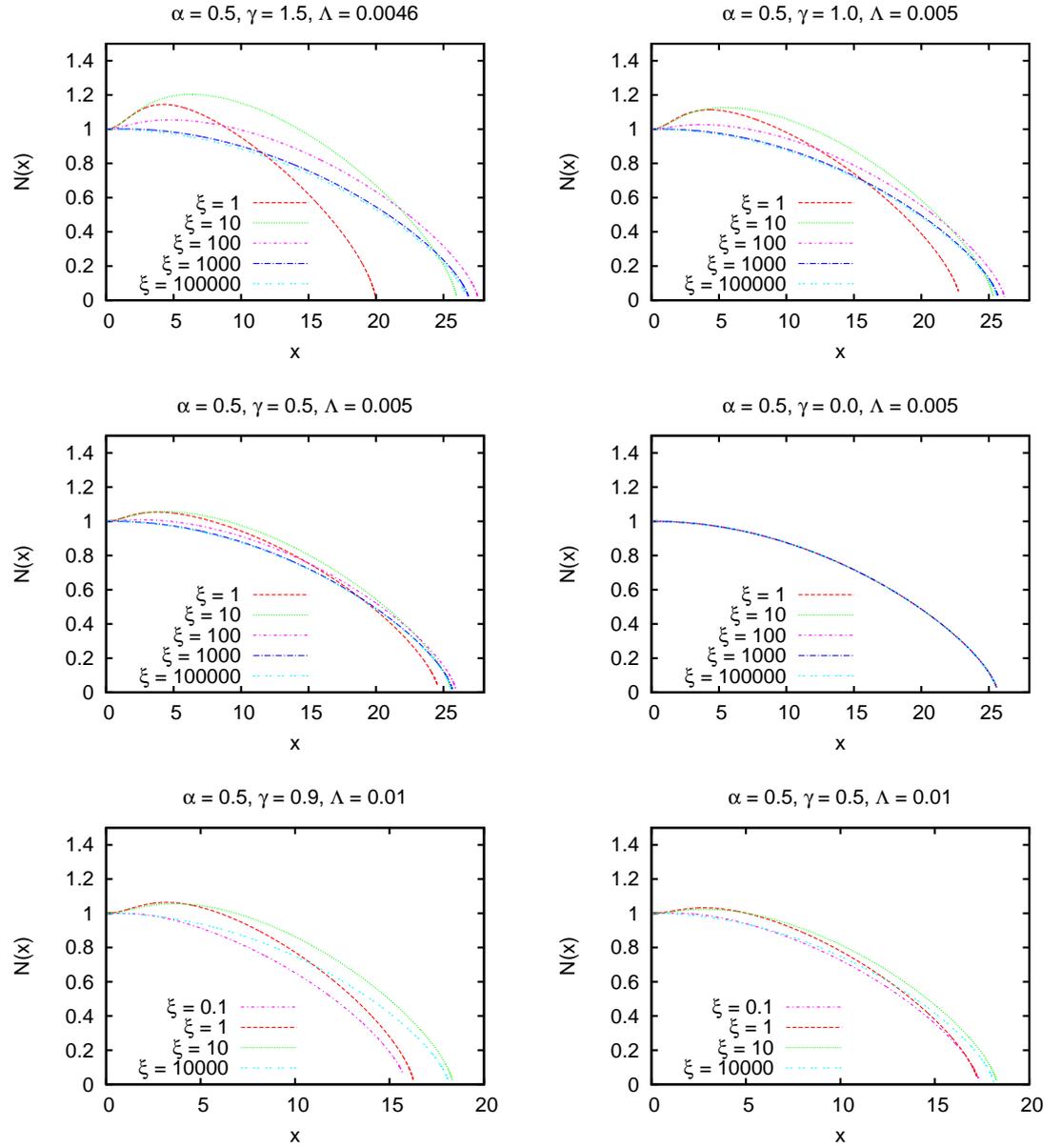


Figura 14: Perfil da função $N(x)$ no modelo de Starobinsky. O horizonte cosmológico ocorre em $N(x) = 0$.

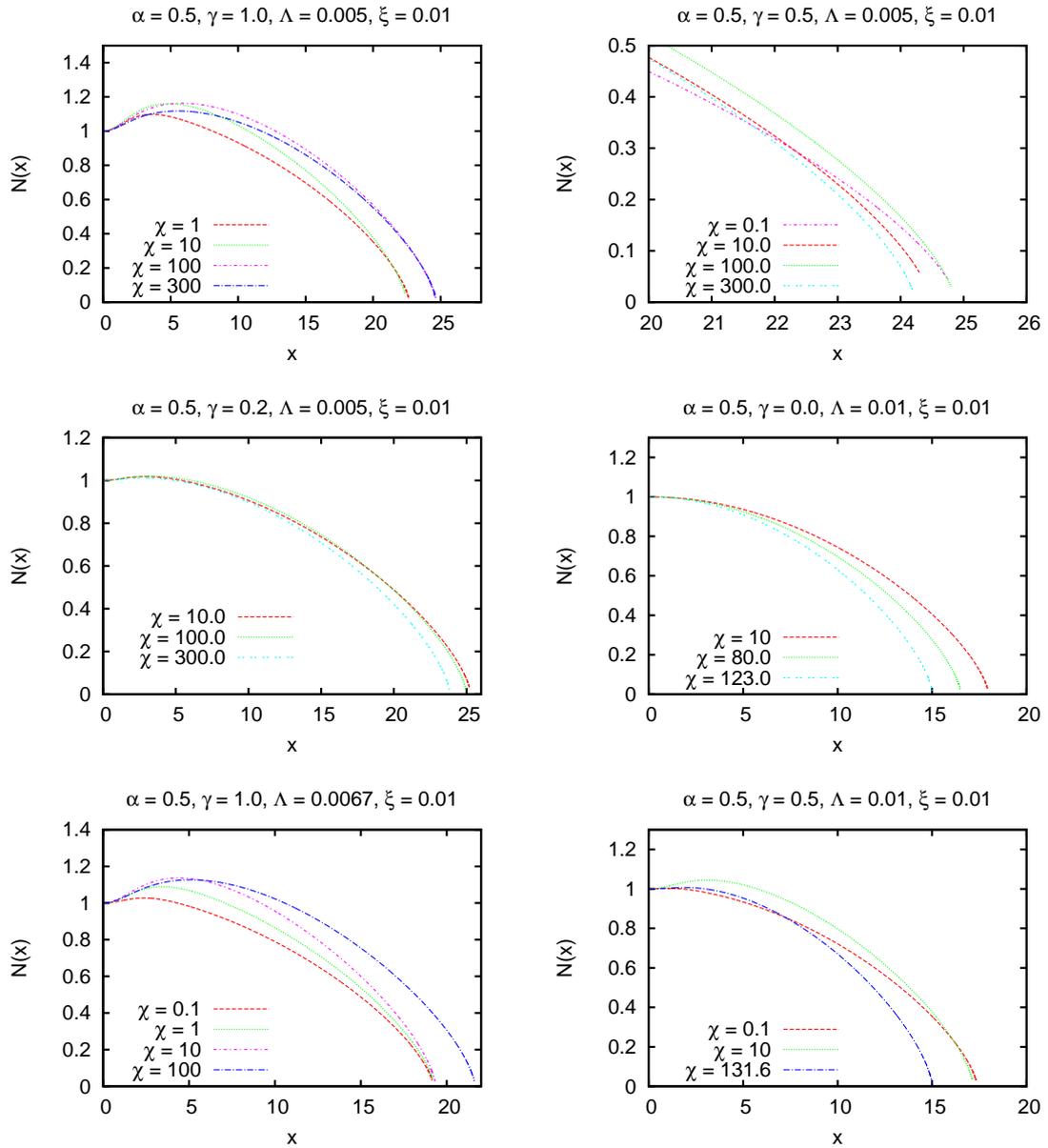


Figura 15: Perfil da função $N(x)$ no modelo de Starobinsky. O horizonte cosmológico ocorre em $N(x) = 0$.

de vácuo do campo escalar. Já para o modelo puro de Starobinsky, o comportamento é claro e o horizonte cosmológico será sempre maior que o mesmo do sistema correspondente na relatividade geral.

Parte III

MODOS QUASINORMAIS

As ondas gravitacionais emitidas por buracos negros possuem uma componente oscilatória e outra componente de decaimento. O espectro de emissão é dado por seus modos quasinormais, e tais dependem apenas dos parâmetros físicos do objeto. Aqui estudaremos o espectro de emissão em dois exemplos relacionados com teorias alternativas da gravitação, a saber, um buraco negro com a presença de um monopolo global em teorias $f(R)$, e um buraco negro com uma nuvem de corda em teorias de Einstein-Gauss-Bonnet.

MODOS QUASINORMAIS NO MONOPOLO GLOBAL EM $f(R)$

6.1 OS MODOS QUASINORMAIS

Modos normais são os modos de vibração de um determinado sistema. No caso de instrumentos musicais, são chamados de harmônicos. Tais modos são denotados por quasinormais quando a vibração é amortecida no tempo, e costumam ser representados por um número complexo, onde a parte real indica a frequência de oscilação e a parte imaginária indica a taxa de amortecimento. Modos quasinormais são encontrados em várias áreas da física, e estão presentes na emissão de ondas gravitacionais por objetos compactos, como os buracos negros [BCS09].

Buracos negros isolados são descritos por apenas uns poucos parâmetros, como massa, carga e momento angular. No entanto, objetos estelares isolados são uma abstração. Devido à forte força gravitacional, buracos negros estão constantemente influenciando e sendo influenciados pelo meio exterior, de forma que devem ser considerados como objetos perturbados. Essa perturbação deforma a simetria esférica do sistema e leva à emissão de ondas gravitacionais.

Para encontrar os modos quasinormais de um objeto estelar compacto devemos perturbar o sistema. Essa perturbação pode ser feita de várias formas, seja através da perturbação das equações de campo da gravitação ou através da perturbação de objetos testes pelo campo gravitacional. Por objetos testes devemos entender aqueles objetos que são influenciados pelo objeto compacto, porém, não o influenciam de volta. No caso de teorias alternativas à gravitação, este segundo procedimento é mais simples de ser efetuado, em vista que envolve as equações de campo do objeto teste e não do campo gravitacional, equações estas altamente não-lineares. Nesta seção iremos estudar a perturbação de campos escalares e espinoriais no espaço-tempo de um buraco negro com um monopolo global em uma teoria $f(R)$.

O estudo de modos quasinormais de buracos negros tem recebido bastante atenção da comunidade científica nos últimos anos, por vários motivos. Um deles é o crescente investimento em detectores de ondas gravitacionais que podem revelar informações cada vez mais precisas sobre o universo e seus constituintes. Um outro motivo foi o desenvolvimento da teoria de cordas e, mais recentemente, das dualidades entre teorias gravitacionais e teorias de gauge. Segundo a teoria de cordas, nosso universo não possui apenas quatro dimensões, porém,

Ondas gravitacionais emitidas por objetos compactos são caracterizados pelos modos quasinormais.

A perturbação de um buraco negro com a introdução de campos de teste é uma forma de encontrar os modos quasinormais do mesmo.

dez ou onze dimensões, compactadas ou não. Tais teorias abriram um leque de possibilidades teóricas no contexto gravitacional, com o estudo de novos tipos de objetos negros ¹ em dimensões superiores. Já em dualidades que envolvem teorias de gravitação e teorias de gauge, os modos quasinormais estão diretamente relacionados com os polos do propagador na teoria dual [AE15, Nas15]. Desta forma, ao menos em teoria, podemos encontrar resultados em física Hadrônica realizando os cálculos na teoria gravitacional dual.

Nesta tese iremos utilizar o método WKB para o cálculo dos modos quasinormais.

Há vários métodos para o cálculo dos modos quasinormais de objetos compactos, porém, somente em casos altamente idealizados tais cálculos podem ser realizados de forma exata. Para a grande maioria das situações devemos recorrer a métodos numéricos ou semi-analíticos. Nesta tese iremos utilizar um método semianalítico bastante conhecido, chamado **WKB**. Este método costuma ser utilizado em mecânica quântica para tratar partículas em barreiras de potencial cuja forma não permite soluções exatas. Como veremos, as equações de campo das partículas teste perturbadas podem ser reduzidas à equações do tipo Schrödinger, onde o método WKB pode ser aplicado. É interessante, então, antes de prosseguirmos com o cálculo dos modos quasinormais das partículas testes, que façamos uma pequena revisão do método WKB.

6.2 O MÉTODO WKB

Nesta seção iremos tecer alguns comentários sobre o método WKB. Nosso objetivo é resolver, aproximadamente, equações diferenciais do tipo

O método WKB nos permite encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais do tipo Schrödinger.

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + Q(x)\psi(x) = 0, \quad (6.1)$$

onde $Q(x)$ é uma função que varia suavemente em relação à variável x . No caso de função $Q(x)$ ser constante, a solução é óbvia e dada por $\psi(x) = Ae^{\pm i\sqrt{Q}x}$. Com isso, para funções suaves $Q(x)$, um bom ansatz é dado por $\psi(x) = A(x)e^{iu(x)}$. Inserindo este ansatz em (6.1), e ignorando termos de derivada segunda em ψ , obtemos como uma primeira aproximação

$$\psi(x) = \frac{1}{Q(x)^{1/4}} \exp \left\{ \pm i \int \sqrt{Q(x')} dx' \right\}. \quad (6.2)$$

Em mecânica quântica, em geral temos $Q(x) = [E - V(x)]2m/\hbar^2$, onde $V(x)$ é alguma barreira de potencial e E é a energia da partícula (onda) incidente. Para este tipo de equação, a solução (6.2) é uma boa aproximação desde que $|E - V(x)|$ não se torne muito pequeno. Os

¹ Objetos que possuem ao menos um horizonte de eventos.

pontos onde $V(x) = E$ são chamados pontos de contorno, e a região onde $V(x) \rightarrow E$ não pode ser a solução da função ψ aproximada por (6.2). O método WKB usual consiste em aproximar a região entre os pontos de contorno de alguma forma, encontrar a função $\psi(x)$ satisfeita entre os pontos de contorno por esta função aproximada, e então unir esta solução encontrada com a solução WKB dada por (6.2) em cada um dos pontos de contorno. Este é um bom método para o cálculo das amplitudes de transmissão e reflexão para uma onda incidente.

Para o caso que queremos estudar, que é a emissão de radiação por buracos negros, o método acima precisa ser ligeiramente modificado. Vamos explicar brevemente o motivo. No caso de reflexão de uma onda por uma barreira de potencial, a amplitude de onda refletida costuma ser bem maior que a onda transmitida. Temos, então, três tipos de ondas: Onda incidente, onda refletida e onda transmitida. No caso da emissão de radiação pela barreira de potencial, há apenas dois tipos de onda, ambas emitidas e cada uma em uma direção no espaço. Uma das ondas será emitida em direção a $x \rightarrow +\infty$, que é o infinito. A outra onda será emitida em direção a $x \rightarrow -\infty$, que é o horizonte de eventos no sistema de coordenadas da tartaruga, ou *tortoise*. Desta forma é esperado que estas duas ondas possuam amplitude comparável, e neste caso não existe onda incidente. Este conjunto de condições somente ocorre quando o máximo da função $-Q(x)$ for nula, ou seja, quando $-Q(x)_{\max} \approx 0$. Neste caso, o valor da energia estará próxima do máximo do potencial $V(x)$, e os pontos de contorno estarão próximos um do outro.

A forma de modificar o método WKB para englobar estes casos é unir ambas a solução WKB com ambos os pontos de contorno simultaneamente [SW85]. Caso ambos os pontos de contorno estejam igualmente separados, $Q(x)$ pode ser aproximado por uma parábola, da forma $Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''(x - x_0) + O(x - x_0)^3$, onde x_0 é o pico da função $|Q(x)|$, $Q_0 \equiv Q(x_0) < 0$ e $Q_0'' \equiv d^2Q/dx^2|_{x_0} > 0$. Utilizando as definições

$$\kappa \equiv \frac{1}{2}Q_0'', \quad t \equiv (4\kappa)^{1/4}e^{i\pi/4}(x - x_0), \quad (6.3)$$

$$\nu + \frac{1}{2} \equiv \frac{-iQ_0}{\sqrt{2Q_0''}}, \quad (6.4)$$

a equação (6.1) pode ser escrita como

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2\right)\psi = 0. \quad (6.5)$$

A equação (6.5) tem como solução as funções cilíndricas parabólicas $D_\nu(t)$, cuja forma assintótica pode ser encontrada em [SW85] e não iremos reproduzir. Aqui somente vamos comentar que, para a

As condições de contorno para a emissão de radiação por um buraco negro é a de ondas planas, para fora (outgoing), assintoticamente em ambas as direções.

solução de (6.5) ser compatível com a solução WKB nos pontos de contorno, e reproduzir as condições de ondas de radiação, é preciso que a condição $\Gamma(-\nu) = \infty$ seja satisfeita, ou seja, é preciso que ν seja um inteiro. Com isto, a condição para a existência de modos normais é

$$\frac{Q_0}{\sqrt{2Q_0''}} = i(n + \frac{1}{2}). \quad (6.6)$$

A condição (6.6) nos permite encontrar os modos quasinormais do buraco negro, em uma primeira aproximação. É possível realizar o cálculo acima em ordens superiores, e o método WKB como descrito foi estendido até a terceira ordem em [IW87], e posteriormente até a sexta ordem em [Kon03]. Nesta tese iremos utilizar o método WKB em quinta ordem. Nele, a fórmula para o cálculo dos modos quasinormais é dada por [Kon03]

Fórmula para o cálculo semi-analítico dos modos quasinormais das ondas emitidas por um buraco negro.

$$i \frac{Q_0}{\sqrt{2Q_0''}} - \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_4 - \Lambda_5 = n + \frac{1}{2} \quad (6.7)$$

onde Λ_i representa uma correção de i -ésima ordem. A fórmula analítica destes coeficientes depende das derivadas da função $Q(x)$, e podem ser encontrados em [IW87] e [Kon03].

6.3 O MONOPOLO GLOBAL

No capítulo (3) foi calculada a métrica gerada por um monopolo global em teorias $f(R)$, porém, não entramos em detalhes no que consiste um monopolo global. Tudo o que fizemos foi, dado uma tensor de energia-momento do tipo

Tensor de energia-momento de um monopolo global, e a geometria gerada por esta tensor em uma classe de teorias $f(R)$ da gravitação.

$$T_{\mu}^{\nu} \approx (\frac{\eta^2}{r^2}, \frac{\eta^2}{r^2}, 0, 0), \quad (6.8)$$

obter a métrica gerada por este tensor de energia-momento em teorias $f(R)$, no limite de campo fraco. No caso da função analítica $f(R)$ obedecer ao vínculo $f'(R) = 1 + \psi_0 r$, com $|\psi_0 r| \ll 1$, a solução encontrada foi

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \Delta^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.9)$$

onde

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} - 8\pi\eta^2 - \psi_0 r. \quad (6.10)$$

Nosso objetivo nesta seção é apresentar brevemente o monopolo global. Assim como os kinks, os vórtices e as cordas, o **monopolo** é

um s3liton topol3gico, o que quer dizer que sua estabilidade 3 garantida pela configura33o de v3cuo da teoria. Ele existe naturalmente em 3+1 dimens3es, e possui uma configura33o esfericamente sim3trica. O monopolo magn3tico foi introduzido independentemente por t'Hooft em [tH74] e Polyakov em [Pol74], atrav3s da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^a)(D^\mu\phi^a) - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - \eta^2)^2, \quad (6.11)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ 3 o tensor intensidade de campo do campo de gauge A_μ^a , e a derivada covariante 3 dada por $D_\mu\phi^a = \partial_\mu\phi^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c$, onde os 3ndices (a, b, c...) ser3o discutidos logo adiante. Esta Lagrangeana 3 invariante sob transforma33es locais do grupo SU(2).

Assim como no caso do v3rtice, o campo escalar assume sua configura33o de v3cuo no infinito, que 3 dada por $\phi^a\phi^a = \eta^2$. Na representa33o fundamental, o campo ϕ^a 3 representado por um tripleto, e esta rela33o 3, ent3o, dada por $(\phi^{(1)})^2 + (\phi^{(2)})^2 + (\phi^{(3)})^2 = \eta^2$, onde os 3ndices (1), (2) e (3) indicam as componentes do tripleto ϕ^a . Esta equa33o nos lembra a equa33o de uma casca esf3rica em coordenadas cartesianas, e de fato a estrutura de variedade do grupo SU(2) 3 a 2-esfera S^2 . Ou seja, qualquer ponto da 2-esfera, representada pela equa33o $(\phi^{(1)})^2 + (\phi^{(2)})^2 + (\phi^{(3)})^2 = \eta^2$ 3 uma poss3vel escolha para o valor de v3cuo. Atentamos que n3o estamos nos referindo 3s coordenadas espa3o-temporais. Os 3ndices (1), (2) e (3) s3o 3ndices internos, do grupo SU(2), e a 2-esfera 3 uma 2-esfera nos 3ndices internos. Assintoticamente o campo escalar pode assumir qualquer destes valores.

O que precisamos, agora, 3 indicar qual valor de v3cuo o campo escalar vai assumir em cada dire33o do espa3o-tempo. Como o conjunto das dire33es 3 tamb3m um espa3o S^2 , podemos fazer um mapa biun3voco entre o espa3o f3sico S^2 e o espa3o interno S^2 , da forma que

$$\phi^a(r\hat{r} \rightarrow \infty) = \phi_0^a(\hat{r}), \quad (6.12)$$

onde $\phi^a(r\hat{r} \rightarrow \infty)$ indica o campo escalar na dire33o \hat{r} , no limite assint3tico de $r \rightarrow \infty$, e $\phi_0^a(\hat{r})$ indica um dos poss3veis valores de v3cuo do campo escalar que, na 2-esfera interna, tem a dire33o de \hat{r} .

Quando o campo escalar assumir seu valor esperado de v3cuo, a simetria do grupo SU(2) ser3 quebrada, e a nova simetria obedecida pelos campos ser3 a do grupo U(1). Este modelo 3 conhecido como **modelo de Georgi-Glashow** e 3 a base do monopolo de t'Hooft-Polyakov [tH74]. Inserindo a Lagrangeana (6.11) nas equa33es de Euler-Lagrange, pode-se encontrar as equa33es a serem obedecidas pelos campos escalar e de gauge. No limite em que $\lambda \rightarrow 0$ tais equa33es

Lagrangeana do modelo de Georgi-Glashow, que d3 origem ao monopolo de t'Hooft-Polyakov. No monopolo global, o campo de gauge 3 ausente.

O valor esperado de v3cuo (VeV) do campo escalar assume, para cada dire33o no espa3o-tempo, o equivalente 3 mesma dire33o na variedade gerada por todos os poss3veis VeV.

possuem uma solução analítica ² [PS75], mas para $\lambda \neq 0$ elas precisam ser resolvidas numericamente. G. t'Hooft foi capaz de mostrar que este sistema também dá origem a um sólito, cujo campo magnético é radial. Daí a origem do termo monopolo magnético.

O monopolo global consiste no mesmo sistema acima, porém, na ausência de campos de gauge. Nesta tese o monopolo será utilizado unicamente como fonte, de forma que tudo o que precisamos calcular dele é seu tensor de energia-momento. O tensor de energia momento será calculado de forma usual, a partir da relação

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (6.13)$$

onde \mathcal{L} é dada por (6.11) e $g_{\mu\nu}$ é dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = -A(r)^2 N(r) dt^2 + \frac{1}{N(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (6.14)$$

Como se trata de um problema com simetria esférica, o elemento de linha (6.14) claramente reflete esta simetria. O ansatz para o campo escalar é escolhido como

$$\vec{\phi} = \vec{e}_r H(r) \eta, \quad (6.15)$$

onde \vec{e}_r é o vetor unitário na direção radial, nas coordenadas internas do tripleto. O cálculo do tensor de energia-momento não é trivial, em vista que é preciso escrever o campo escalar em coordenadas esféricas no espaço interno [VNWP76]. Em termos destas componentes, o tensor de energia-momento é dado por

Tensor de energia-momento do monopolo global, para um modelo realístico do mesmo. Longe do núcleo do monopolo, o tensor de energia-momento pode ser aproximado pelo de um monopolo ideal.

$$-T_0^0 = \frac{H^2 \eta^2}{r^2} + \frac{1}{2} N (H' \eta)^2 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (H^2 - 1)^2, \quad (6.16)$$

$$-T_1^1 = \frac{H^2 \eta^2}{r^2} - \frac{1}{2} N (H' \eta)^2 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (H^2 - 1)^2 \quad (6.17)$$

e

$$-T_2^2 = -T_3^3 = \frac{1}{2} N (H' \eta)^2 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (H^2 - 1). \quad (6.18)$$

Longe do núcleo do monopolo, o campo escalar se aproxima de seu valor esperado de vácuo, $H \rightarrow 1$ e a métrica se aproxima da métrica

² Este é exatamente o limite BPS para o monopolo de t'Hooft-Polyakov

de Minkowski com um pequeno déficit angular. Desta forma, o tensor de energia-momento pode ser aproximado por

$$T_{\nu}^{\mu} \approx \left(\frac{\eta^2}{r^2}, \frac{\eta^2}{r^2}, 0, 0 \right), \quad (6.19)$$

como consideramos no início desta seção. Podemos dizer que este é o tensor de energia-momento de um monopolo global idealizado.

6.4 MODOS QUASINORMAIS ESCALARES

Nesta seção iremos calcular os modos quasinormais para o campo escalar no espaço-tempo de um buraco negro com um monopolo global idealizado em teorias $f(R)$ [GVB15]. Campos escalares obedecem a equação de Klein-Gordon, que em um espaço-curvo assume a seguinte forma covariante

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\sigma} (g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \partial_{\tau}) + \mu_0^2 \right] \Psi = 0, \quad (6.20)$$

onde μ_0 é um parâmetro que quanticamente pode ser identificado como a massa da partícula escalar representada por este campo.

A métrica do monopolo global em $f(R)$ já foi calculada no capítulo (3), e é dada por

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \Delta^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.21)$$

onde

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} - 8\pi\eta^2 - \psi_0 r \quad (6.22)$$

onde $G = 1$. Tal métrica se torna mal definida quando $\Delta = 0$, o que define duas hipersuperfícies nulas, chamadas de horizontes. O horizonte interno é conhecido como horizonte de eventos, e tem sua origem na presença do buraco negro. O horizonte externo deve-se ao parâmetro ψ_0 e é de origem cosmológica, de forma análoga ao horizonte cosmológico do espaço de de Sitter.

Tomando $\Delta = 0$, podemos encontrar ambos os horizontes, a saber,

$$r_h = \frac{(1 - 8\pi\eta^2) \pm \sqrt{(1 - 8\pi\eta^2)^2 - 8M\psi_0}}{2\psi_0}. \quad (6.23)$$

Quando $\psi_0 = (1 - 8\pi\eta^2)^2/8$, a raiz quadrada da expressão acima será nula, e teremos apenas um horizonte. Neste caso, dizemos que o buraco negro é extremo. No entanto, os dois horizontes de nosso sistema possuem origem distinta, de forma que não esperamos que o

*Equação de
Klein-gordon para
um campo escalar.*

valor de r_h seja degenerado. Este é um indício que temos de considerar valores de ψ_0 em que $\psi_0 \ll 1$.

Substituindo a métrica (6.21) em (6.20), obtemos

$$\left[-\frac{r^2}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \Delta \frac{\partial}{\partial r} \right) - \mathbf{L}^2 - \mu_0^2 r^2 \right] \Psi = 0, \quad (6.24)$$

onde \mathbf{L}^2 é o operador de momento angular.

Devido à independência do Hamiltoniano com o tempo, e também à simetria esférica do problema, a solução da equação (6.24) pode ter suas variáveis separadas da forma

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t) = R(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (6.25)$$

onde $Y_l^m(\theta, \phi)$ são os tradicionais harmônicos esféricos. Substituindo a equação (6.25) em (6.24), encontramos que

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \Delta \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{r^2 \omega^2}{\Delta} - \lambda_{lm} - \mu_0^2 r^2 \right) R = 0, \quad (6.26)$$

onde $\lambda_{lm} = l(l+1)$.

Esta é a equação que devemos resolver, porém, poucas são as situações onde podemos encontrar soluções exatas para ela. Com o intuito de deixar esta equação em uma forma mais conveniente para a utilização do método WKB, vamos fazer uma transformação de coordenadas definida pela relação

$$dr_* = \frac{dr}{\Delta}. \quad (6.27)$$

A coordenada r_* mapeia a região entre os horizontes na região entre $(-\infty, +\infty)$. Ela é conhecida como coordenada da tartaruga, ou *tortoise*. Utilizando esta transformação de coordenadas, e transformando a função $R(r)$ em $\tilde{R}(r) = R(r)/r$, a equação de Klein-Gordon torna-se

$$-\frac{d^2 \tilde{R}}{dr_*^2} + V(r) = \omega^2 \tilde{R}, \quad (6.28)$$

onde

$$V(r) = \Delta \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\Delta'}{r} \right), \quad (6.29)$$

e $(')$ indica derivada em relação à coordenada radial r . A equação (6.28) é uma equação tipo Schrödinger, e logo, é apropriada para se usar o método WKB.

Antes de fazer isso, devemos dar uma olhada no potencial $V(r)$. A métrica de Schwarzschild é recuperada se tomarmos $\psi_0 = 8\pi\eta = 0$, e

A equação para a componente radial. Para deixá-la como uma equação tipo Schrödinger é preciso passar para as coordenadas da tartaruga (tortoise).

Equação para $R(r)$ no sistema de coordenadas da tartaruga.

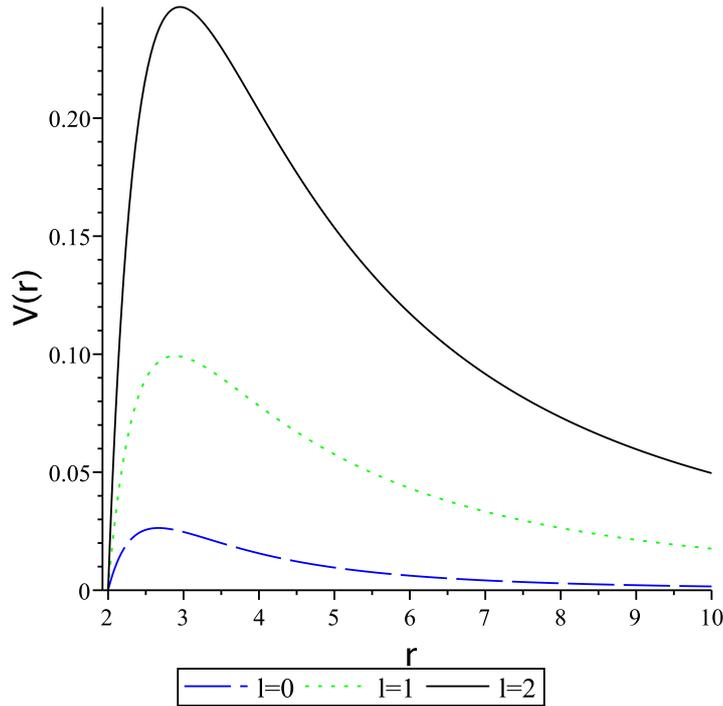


Figura 16: Potencial efetivo sentido por um campo escalar no espaço-tempo de Schwarzschild em função do parâmetro l .

sua forma é exibida na figura (16) para diferentes valores de l . Como podemos ver, o potencial efetivo é positivo definido para $r > 2$, que corresponde à região externa ao horizonte de eventos.

Quanto maior l , maior será o potencial efetivo correspondente, e o valor r_{\max} correspondente ao pico do potencial pode ser encontrado derivando a equação (6.29) e igualando a zero. Fazendo isso, obtemos

$$\frac{2M}{r^2} \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right) + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(-\frac{2l(l+1)}{r^3} - \frac{6M}{r^4} \right) = 0, \quad (6.30)$$

e, no limite $l \rightarrow \infty$, temos

$$r_{\max} \rightarrow 3M. \quad (6.31)$$

De agora em diante vamos normalizar a massa da solução para o valor unitário. O mesmo estudo pode ser feito para a métrica do monopolo global em $f(R)$, porém, agora temos, além do parâmetro l , os parâmetros ψ_0 e $8\pi\eta$. Vamos nos concentrar no parâmetro ψ_0 , pois é ele que controla como a gravitação em $f(R)$ se diferencia da gravitação de Einstein. Derivando o potencial efetivo com $\psi_0 \neq 0$, e tomando o limite em que $l \rightarrow \infty$, temos

$$\psi_0 r^2 - 2r + 6 = 0. \quad (6.32)$$

O regime $\psi_0 \approx 1$ não é bem definido.

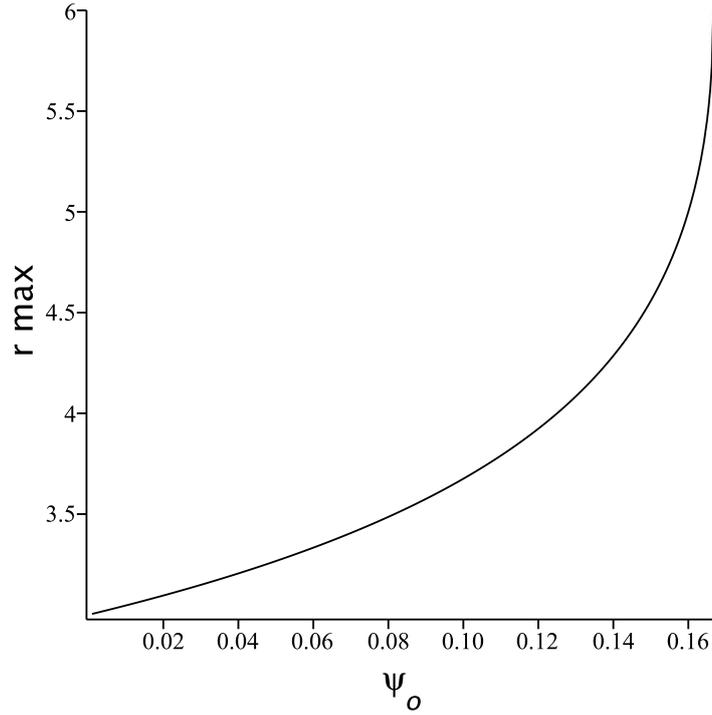


Figura 17: Posição do pico do potencial efetivo para o campo escalar no espaço-tempo de um buraco negro, com um monopolo global, em $f(R)$

O gráfico de r_{\max} em função de ψ_0 é apresentado na figura (17). Como podemos observar, o valor diverge quando $\psi_0 > 1/6$. Este é mais um indício que a métrica encontrada para o monopolo global não é bem comportada fora do limite $\psi_0 \ll 1$.

O potencial efetivo para diferentes valores do parâmetro ψ_0 é exibido na figura (18). Como podemos ver, o potencial começa a diminuir com o aumento do parâmetro ψ_0 , até o momento que deixa de ser positivo definido. Neste momento o método WKB que estamos utilizando não pode ser mais utilizado. O que está ocorrendo é que, no limite que $\psi_0 \rightarrow 1$, o horizonte de eventos e o horizonte cosmológico se encontram. Como queremos um espaço-tempo bem definido, onde os horizontes estejam distantes um do outro, iremos nos ater ao regime onde $\psi_0 \ll 1$.

Vamos iniciar calculando os modos quasinormais da métrica de Schwarzschild utilizando o método de WKB de quinta ordem. Os valores obtidos estão listados na tabela (4). O método WKB funciona melhor para $l > n$, porém, em quinta ordem ele consegue obter um resultado aceitável mesmo para valores baixos de l e n . A nível de comparação, resultados numéricos para a métrica de Schwarzschild são apresentados na tabela (5). Os valores semi-analíticos se aproximam dos valores numéricos quando $l \gg n$.

O método WKB apresenta uma boa precisão, comparando-os aos métodos numéricos, especialmente $l \ll n$.

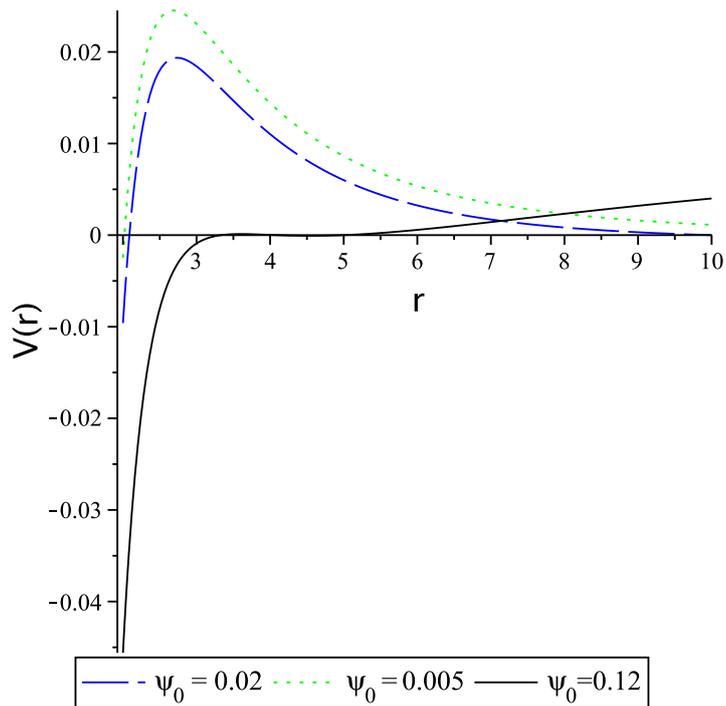


Figura 18: Potencial efetivo para o campo escalar no espaço-tempo de um buraco negro, com um monopolo global, em $f(R)$. São considerados diferentes valores do parâmetro ψ_0 .

Tabela 4: Modos quasinormais da métrica de Schwarzschild utilizando o método de WKB de quinta ordem.

l	n	$\text{Re}(\omega)$	$-\text{Im}(\omega)$
0	0	0.1053	0.1057
0	1	0.0860	0.3567
1	0	0.2931	0.0977
1	1	0.2645	0.3065
1	2	0.2291	0.5466
2	0	0.4837	0.0968
2	1	0.4639	0.2956
2	2	0.4301	0.5090
2	3	0.3920	0.7422
3	0	0.6754	0.0965
3	1	0.6607	0.2923
3	2	0.6335	0.4960
3	3	0.5981	0.7118
3	4	0.5593	0.9420

Tabela 5: Alguns valores numéricos para os modos quasinormais da métrica de Schwarzschild.

l	n	Re(ω)	-Im(ω)
0	0	0.1104	0.1048
0	1	0.0861	0.3480
1	0	0.2929	0.0977
1	1	0.2645	0.3063
2	0	0.4836	0.0968
2	1	0.4639	0.2956
2	2	0.4305	0.5086

Tabela 6: Modos quasinormais para o monopolo na relatividade geral com $8\pi\eta = 0.02$.

l	n	Re(ω)	-Im(ω)
0	0	0.1012	0.1015
0	1	0.0826	0.3426
1	0	0.2839	0.0938
1	1	0.2566	0.2941
1	2	0.2225	0.5241
2	0	0.4690	0.0929
2	1	0.4501	0.2838
2	2	0.4179	0.4884
2	3	0.3812	0.7118

Vamos agora comparar como os modos quasinormais da métrica de Schwarzschild são afetados devido à presença do monopolo global. Como $8\pi\eta^2 \ll 1$, vamos calcular os modos para $8\pi\eta^2 = 0.02$. Os valores calculados são apresentados na tabela (6). Como podemos ver, em relação à métrica de Schwarzschild os valores reais se tornam menores, enquanto os valores imaginários se tornam maiores. Como estamos interessados no módulo da parte imaginária, podemos dizer que ambos os valores diminuem. Esta é a métrica do monopolo global na relatividade geral.

O mesmo procedimento pode ser realizado para o monopolo global em $f(R)$. Inicialmente, vamos considerar o caso em que $8\pi\eta^2 \rightarrow 0$. Para valores muito pequenos do valor esperado no vácuo do campo escalar, ou seja, para $\eta \rightarrow 0$, o método WKB não tem precisão suficiente para descrever como os modos quasinormais são influenciados pela presença do monopolo, porém, nos dá indicações de como os modos quasinormais em $f(R)$ diferem dos modos na gravitação de Einstein. Tomando, por exemplo, $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$ e $\psi_0 = 0.02$, os

Tabela 7: Modos quasinormais para o buraco negro com um monopolo global em $f(R)$ tomando $\eta \rightarrow 0$ e $\psi_0 = 0.02$.

l	n	Re(ω)	-Im(ω)
0	0	0.0895	0.0974
0	1	0.0748	0.3136
1	0	0.2624	0.0865
1	1	0.2387	0.2701
1	2	0.2084	0.4793
2	0	0.4366	0.0852
2	1	0.4199	0.2601
2	2	0.3912	0.4468
2	3	0.3581	0.6500

Tabela 8: Modos quasinormais para o buraco negro com um monopolo global em $f(R)$ tomando $\eta \Rightarrow 0.02$ e $\psi_0 = 0.02$.

l	n	Re(ω)	-Im(ω)
0	0	0.0853	0.0932
0	1	0.0713	0.2994
1	0	0.2530	0.0826
1	1	0.2305	0.2577
1	2	0.2016	0.4569
2	0	0.4215	0.0814
2	1	0.4057	0.2482
2	2	0.3785	0.4262
2	3	0.3469	0.6197

valores dos modos quasinormais são mostrados na tabela (7). Como podemos ver, tanto a parte real quanto a parte imaginária, em módulo, diminuem.

Resta-nos calcular os dois efeitos em conjunto, do monopolo global em $f(R)$. Faremos isso tomando os valores $8\pi\eta^2 = 0.02$ e $\psi_0 = 0.02$. Os resultados obtidos encontram-se na tabela (8). Da mesma forma que os anteriores, tanto a parte real quanto a parte imaginária, em módulo, diminuem, em um efeito acumulativo.

Os resultados podem ser melhor apreciados na figura (19), onde são comparados os casos de Schwarzschild e do buraco negro com um monopolo global em $f(R)$, tanto com $\eta \rightarrow 0$, quanto com $8\pi\eta^2 = 0.02$. Quanto maior estes parâmetros de desvio, mais a curva se desloca para a esquerda e para baixo, mostrando que todos os valores diminuem em módulo.

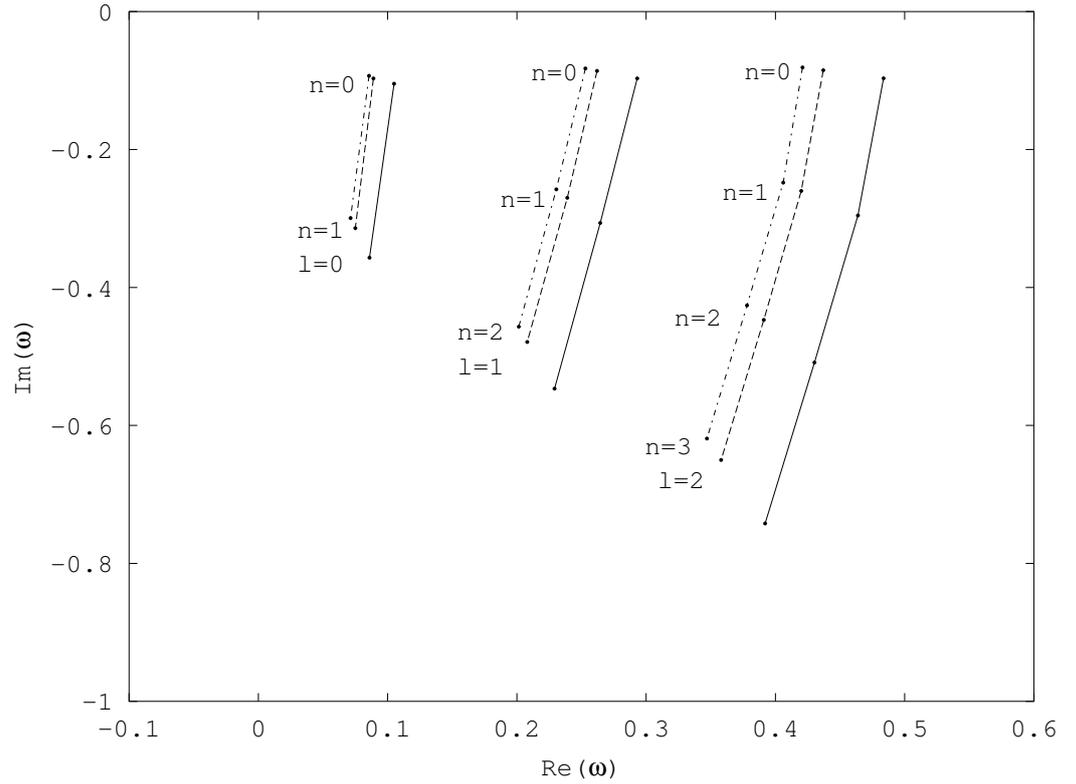


Figura 19: As linhas tracejadas (ao meio) representam os modos quasinormais para o buraco negro com um monopolo global em $f(R)$ para $\psi_0 = 0.02$ e $\eta \rightarrow 0$. As linhas pontilhadas e tracejadas (à esquerda) representam o mesmo monopolo global, porém agora com $8\pi\eta^2 = 0.02$. As linhas contínuas (à direita) representam os modos quasinormais da métrica de Schwarzschild na gravitação de Einstein.

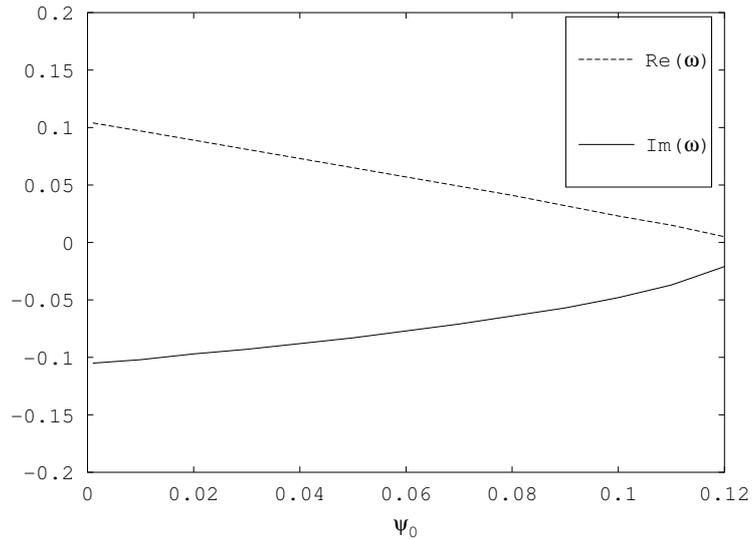


Figura 20: Variação dos modos quasinormais para $n = 0$ e $l = 0$ do buraco negro com monopolo global em $f(R)$ à medida que ψ_0 aumenta.

A figura (20) mostra como os modos quasinormais para $n = 0$ e $l = 0$ variam à medida que ψ_0 aumenta. Podemos ver que ambos os valores se aproximam de zero, o que poderia indicar uma certa instabilidade na solução. Porém para $\psi_0 \approx 0.1$ há vários problemas que precisamos considerar, como o fato de $|\psi_{0r}| \ll 1$ não descrever mais o espaço-tempo globalmente, e também com o fato da aproximação dos dois horizontes. Este gráfico, então, apenas corrobora o que já indicamos, que a solução encontrada para o monopolo global é consistente apenas para $\psi_0 \ll 1$.

Na próxima seção iremos calcular os modos quasinormais para o campo de spin $1/2$. Nosso objetivo será ver se o mesmo padrão observado para o caso do campo escalar repete-se também para o campo de Dirac.

6.5 MODOS QUASINORMAIS ESPINORIAIS

Para encontrar os modos quasinormais espinoriais, devemos estudar a equação de Dirac em um espaço-tempo curvo. O desenvolvimento desta equação não é tão simples quanto o desenvolvimento da equação de Klein-Gordon. O que ocorre é que espinores são representações do grupo de Lorentz, porém, na relatividade geral o grupo de simetria é o grupo de transformações gerais de coordenadas, e não mais o grupo de Lorentz, e não há representações espinoriais do grupo de transformações gerais de coordenadas. Ou seja, somente sabemos definir espinores no espaço plano de Minkowski.

A forma de contornar este problema é definir espinores localmente no espaço-tempo de Minkowski, levando-se em conta como esta base local no espaço-tempo de Minkowski varia no espaço-tempo curvo. Isto se dá com o uso de tetradas, suas inversas e a conexão de spin, já apresentadas no capítulo (2). Tetradas e suas inversas são utilizadas para definir a base local, e a conexão de spin nos indica como a base local varia no espaço-tempo [BW57]. A equação de Dirac no espaço-tempo de Minkowski é dada por

$$\gamma^a \partial_a \Psi - m\Psi = 0, \quad (6.33)$$

onde as matrizes γ^a são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.34)$$

e, como usual, σ^i são as matrizes de Pauli. O índice a é um índice local e varia de zero até três. Para passar do espaço-tempo plano para o espaço-tempo curvo não podemos, simplesmente, aplicar o método do acomplamento mínimo, substituindo os índices de Lorentz por

A correção dos valores dos modos quasinormais é proporcional ao parâmetro ψ_0 .

Espinores são representações do grupo de Lorentz, e não possuem equivalente no grupo de transformação geral de coordenadas.

índices do grupo de transformações gerais de coordenadas, tendo em vista que γ^μ não seria bem definido. Porém, nos valendo das tetradas, podemos reescrever a equação (6.33) como

$$\gamma^\alpha e_\alpha^\mu \partial_\mu \Psi + m\Psi = 0, \quad (6.35)$$

onde γ^α continua representando as matrizes de Dirac no espaço de Minkowski. No entanto, a equação (6.35) não é covariante, devido a presença de uma derivada parcial. Devemos transformar esta derivada parcial em uma derivada covariante, com o objetivo de deixar a equação (6.35) covariante. Fazendo isso chegamos à equação de Dirac em um espaço-tempo curvo, que é dada por

A equação de Dirac em um espaço-tempo curvo.

$$[\gamma^\alpha e_\alpha^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) + m]\Psi = 0, \quad (6.36)$$

onde $\Gamma_\mu = (1/4)\omega_\mu^{ab}\gamma_a\gamma_b$, e ω_μ^{ab} são as componentes da conexão de spin.

Lembrando que as tetradas são definidas por $e_\mu^\alpha e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}$, e suas inversas por $e_\alpha^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}$, então, dada a métrica (6.21), uma boa escolha para as tetradas é dada por

$$e_\mu^\alpha = \text{diag}(\sqrt{\Delta}, \frac{1}{\sqrt{\Delta}}, r, r\sin\theta), \quad (6.37)$$

e

$$e_\alpha^\mu = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{\Delta}}, \sqrt{\Delta}, \frac{1}{r}, \frac{1}{r\sin\theta}). \quad (6.38)$$

Os coeficientes de spin podem ser calculados a partir da primeira equação de estrutura de Cartan com torção nula, dada por

$$de^a \equiv -\omega^a_b \wedge e^b = -\omega^a_{b\mu} dx^\mu \wedge e^b_\nu dx^\nu. \quad (6.39)$$

A título didático, iremos calcular explicitamente um destes componentes. Escrevendo a equação (6.39) em termos de seus componentes, temos

Cálculo da conexão de spin através das tetradas e da primeira equação de estrutura de Cartan.

$$\frac{\partial e^a_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu = -\omega^a_{b\mu} dx^\mu \wedge e^b_\nu dx^\nu, \quad (6.40)$$

e, igualando as componentes, temos

$$\frac{\partial e^{(a)}_\mu}{\partial x^\nu} = \omega^{(a)}_{(b)\mu} e^{(b)}_\nu, \quad (6.41)$$

onde temporariamente voltamos a utilizar parênteses para indicar os índices locais. Tomando $(a) = 0$, temos

$$\frac{\partial e^{(0)}_0}{\partial x^1} = \omega^{(0)}_{(b)0} e^{(b)}_{1'} \quad (6.42)$$

onde $\mu = 0$, pois, os componentes das tetradas são diagonais, e $\nu = 1 = r$, pois, a componente $e^{(0)}_0$ somente possui dependência na coordenada radial. Também pelo fato das tetradas serem diagonais, temos obrigatoriamente que $b = 1$, de forma que

$$\frac{\partial e^{(0)}_0}{\partial x^1} = \omega^{(0)}_{(1)0} e^{(1)}_{1'} \quad (6.43)$$

ou, substituindo as componentes das tetradas,

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta'}{\sqrt{\Delta}} = \omega^{(0)}_{(1)0} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \quad (6.44)$$

de forma que

$$\omega^{(0)(1)} = -\omega^{(1)(0)} = \frac{\Delta'}{2}. \quad (6.45)$$

Da mesma maneira podemos calcular os outros coeficientes de spin e, a partir deles, calcular a matriz Γ_μ , cujas componentes são

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{1}{4} \Delta' \gamma_0 \gamma_1, \quad \Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \gamma_1 \gamma_2 \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{2} (\sin\theta \sqrt{\Delta} \gamma_1 \gamma_3 + \cos\theta \gamma_2 \gamma_3). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Substituindo estes resultados na equação (6.36), temos

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma_0}{\sqrt{\Delta}} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sqrt{\Delta} \gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{4\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) \Psi + \frac{\gamma_2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \cot\theta \right) \Psi + \\ \frac{\gamma_3}{r \sin\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + m\Psi = 0, \end{aligned} \quad (6.47)$$

onde $\Delta = 1 - \frac{2M}{r} - 8\pi\eta^2 - \psi_0 r$.

Seguindo [GJo5], vamos reescalar Ψ como $\Psi = \Delta^{-\frac{1}{4}} \Phi$. Fazendo isso, nós chegamos a uma forma mais simples para a equação de Dirac, que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma_0}{\sqrt{\Delta}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sqrt{\Delta} \gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \Phi + \frac{\gamma_2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \cot\theta \right) \Phi + \\ \frac{\gamma_3}{r \sin\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + m\Phi = 0. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Componentes da matriz Γ_μ , e a equação de Dirac no espaço de um monopolo global em $f(\mathbb{R})$.

Esta equação está diretamente relacionada à equação de Dirac para um potencial central, de forma que iremos propor o mesmo ansatz, a saber

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{iG^{(\pm)}(r)}{r} \phi_{jm}^{\pm}(\theta, \psi) \\ \frac{F^{(\pm)}(r)}{r} \phi_{jm}^{\mp}(\theta, \psi) \end{pmatrix} e^{-i\omega t}, \quad (6.49)$$

Os espinores harmônicos representam as partículas de spin positivo ($l + 1/2$), e spin negativo ($l - 1/2$).

onde os espinores harmônicos são

$$\phi_{jm}^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_l^{m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix}, \quad \left(\text{para } j = l + \frac{1}{2} \right), \quad (6.50)$$

$$\phi_{jm}^- = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+1-m}{2j+2}} Y_l^{m-1/2} \\ -\sqrt{\frac{j+1+m}{2j+2}} Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix}, \quad \left(\text{para } j = l - \frac{1}{2} \right), \quad (6.51)$$

com $Y_l^{m\pm 1/2}(\theta, \psi)$ representando os harmônicos esféricos usuais. Iremos repetir aqui o mesmo procedimento adotado no caso do campo escalar, e redefinir a coordenada radial como

$$\frac{dr}{dr_*} = \Delta, \quad (6.52)$$

no intuito de obter uma forma para a equação de Dirac que seja propícia à análise dos modos quasinormais através do método WKB. Após esta transformação, a equação de Dirac pode ser escrita de forma matricial, dada por

$$\frac{d}{dr_*} \begin{pmatrix} F^{\pm} \\ G^{\pm} \end{pmatrix} - \Delta^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \kappa_{\pm}/r & m \\ m & -\kappa_{\pm}/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\pm} \\ G^{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\pm} \\ G^{\pm} \end{pmatrix}, \quad (6.53)$$

onde κ_{\pm} são os auto-valores do operador $\hat{K}^2 = \hat{J}^2 + 1/4$. De agora em diante iremos nos concentrar unicamente no caso de massa nula. Pode-se mostrar que as equações radiais em relação às componentes mais (+) e menos (-) de (6.53) são iguais, da forma que o resultado para os casos de spin *up* e *down* são, formalmente, os mesmos [Choo3, Jino4]. Desta forma, iremos nos limitar a escrever as funções $F(r)$ e $G(r)$ sem os índices (\pm). Feitas tais considerações, não é difícil mostrar que as equações para $F(r)$ e $G(r)$ se desacoplam, e podemos escrever

$$\frac{d^2 F}{dr_*^2} + (\omega^2 - V_1(r))F = 0, \quad (6.54)$$

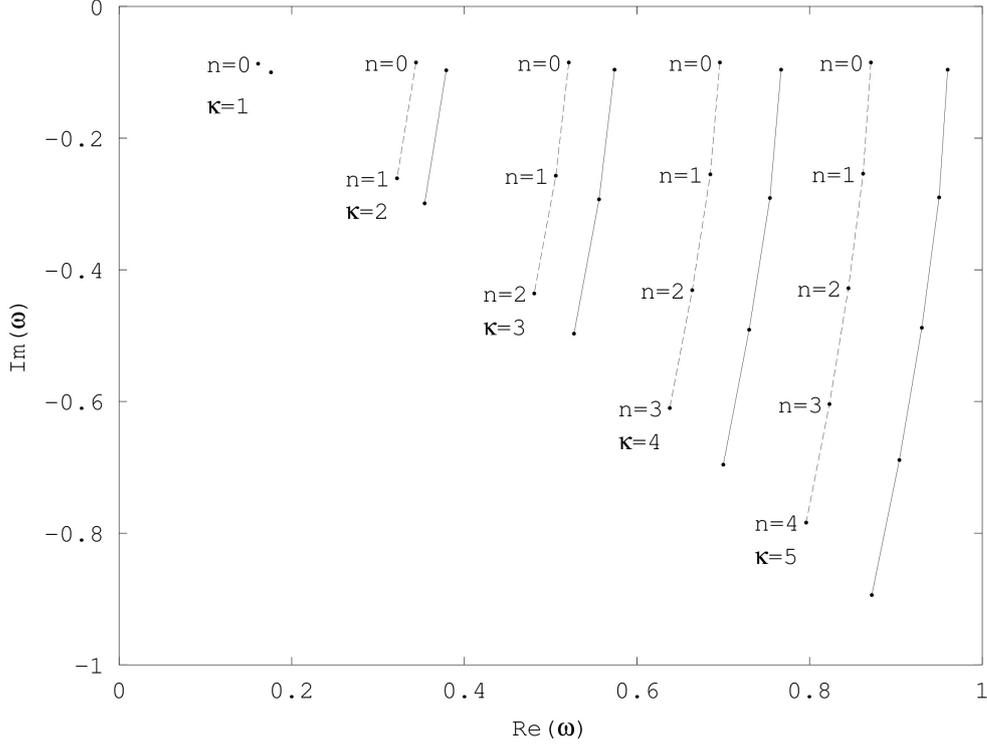


Figura 21: A linha pontilhada representa os modos quasinormais no espaço-tempo de um buraco negro, com um monopolo global, na gravitação $f(R)$. Os parâmetros utilizados são $\psi_0 = 0.02$, $M = 1$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$. A linha contínua representa o mesmo conjunto de modos na métrica de Schwarzschild. As unidades estão em função da massa total.

e

$$\frac{d^2 G}{dr_*^2} + (\omega^2 - V_2(r))G = 0, \quad (6.55)$$

onde

$$V_1(r) = \frac{\sqrt{\Delta}|\kappa|}{r^2} \left(|\kappa|\sqrt{\Delta} + \frac{r}{2} \frac{d\Delta}{dr} - \Delta \right), \quad \left(\kappa = j + \frac{1}{2}, j = 1 + \frac{1}{2} \right) \quad (6.56)$$

$$V_2(r) = \frac{\sqrt{\Delta}|\kappa|}{r^2} \left(|\kappa|\sqrt{\Delta} - \frac{r}{2} \frac{d\Delta}{dr} + \Delta \right), \quad \left(\kappa = -j - \frac{1}{2}, j = 1 - \frac{1}{2} \right). \quad (6.57)$$

Para o cálculo dos modos quasinormais espinoriais, iremos utilizar o mesmo método WKB empregado no caso do campo escalar. Em princípio, temos dois conjuntos de modos, um relacionado à função $F(r)$ e outro relacionado à função $G(r)$. Os potenciais V_1 e V_2 , no entanto, são parceiros superssimétricos advindos de um mesmo superpotencial, e possuem o mesmo espectro de modos quasinormais no

caso de espaços assintoticamente planos [Choo3]. Este resultado foi estendido para modelos onde o espaço é assintoticamente anti-de Sitter [GJ05]. Neste caso dos modos quasinormais espinoriais, optamos por realizar o cálculo do espectro para ambas as funções $F(r)$ e $G(r)$ separadamente, e o resultado encontrado foi que os valores são compatíveis para um erro da ordem de 1%. Como este erro está dentro de uma tolerância aceitável para o método WKB, podemos considerar que também nesse espaço o espectro para ambas as funções é o mesmo.

O padrão para os modos espinoriais, em relação à métrica de Schwarzschild, é o mesmo observado para o caso do campo escalar.

Alguns valores calculados para os modos quasinormais espinoriais, para $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$ são exibidos na Figura (21), onde o resultado é comparado com os valores obtidos para a métrica de Schwarzschild, calculados para os mesmos valores de κ e n . O comportamento observado segue o mesmo padrão do caso do campo escalar, da forma que não iremos analisar em maiores detalhes o caso espinorial.

NUVEM DE CORDAS EM TEORIAS DE EINSTEIN-GAUSS-BONNET

7.1 NUVENS DE CORDAS NA RELATIVIDADE GERAL

Objetos estendidos na forma de sólitons topológicos já foram apresentados nos capítulos precedentes, como as cordas cósmicas e os monopolos. Em alguns modelos recentes de física de altas energias, como as teorias de supercordas e teorias-M, tais objetos também encontram-se presentes, na forma de constituintes fundamentais da natureza. Dentre tais objetos estendidos, as cordas merecem um maior destaque. Diante deste quadro, é natural que estudemos o comportamento coletivo de tais objetos, da mesma forma que em cosmologia é natural considerar a matéria do universo como uma nuvem de poeira, e estudar seu comportamento coletivo. Para objetos estendidos em uma dimensão espacial, chamaremos este comportamento coletivo de *nuvem de cordas*, e nosso interesse será calcular a geometria gerada por ela [Let79].

Para descrevermos a dinâmica de uma corda, iremos começar recordando brevemente a descrição da dinâmica de uma partícula relativística. Para partículas massivas, a ação é dada por

$$S = -m \int d\tau, \quad (7.1)$$

onde $d\tau$ é o tempo próprio da partícula, m é a massa da partícula e estamos considerando $c = 1$. A forma mais fácil de verificar a consistência da ação acima é tomar seu limite não-relativístico. Dado $d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$, temos

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - v^2} \approx - \int dt \left(m - \frac{mv^2}{2} \right), \quad (7.2)$$

que é a ação da partícula não relativística com um termo extra, relacionado à energia interna da mesma. A quantidade $d\tau$ pode também ser vista como a linha de universo traçada pela partícula, o caminho que ela percorreu no espaço-tempo. Objetos de dimensão D traçam uma superfície $(D + 1)$ -dimensional no espaço-tempo, e um objeto estendido em uma dimensão, como a corda, irá traçar uma superfície de dimensão dois. Ao invés de uma linha de universo, uma corda

Nuvem de cordas é uma certa configuração de objetos estendidos, cuja curvatura resultante queremos estudar.

Ação relativística de uma partícula.

gera uma superfície bi-dimensional de universo. Esta superfície pode ser parametrizada pela ação de Nambu-Goto,

$$S_{\text{NG}} = p \int_{\Sigma} d^2\Sigma \sqrt{-h}, \quad (7.3)$$

Ação de uma corda relativística.

onde Σ é uma superfície bi-dimensional, h é o determinante da métrica induzida nessa superfície pela métrica do espaço-tempo, e p é uma constante relacionada à tensão da corda. Uma superfície bi-dimensional é parametrizada por dois parâmetros, λ^0 e λ^1 , de forma que a métrica induzida pelo espaço-tempo na superfície será

$$h_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^b}. \quad (7.4)$$

Uma forma alternativa de descrever a corda é através de um bivetor anti-simétrico, dado por

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^b}. \quad (7.5)$$

Antes de continuarmos, vamos mostrar uma identidade útil para este bivetor. Uma relação entre três bivetores é dada por

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu\sigma} \Sigma^{\rho\tau} \Sigma^{\alpha\nu} g_{\sigma\rho} g_{\tau\alpha} &= \epsilon^{ab} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \lambda^b} \epsilon^{cd} \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda^c} \frac{\partial x^\tau}{\partial \lambda^d} \epsilon^{ef} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda^e} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^f} g_{\sigma\rho} g_{\tau\alpha} \\ &= h_{bc} h_{de} \epsilon^{ab} \epsilon^{cd} \epsilon^{ef} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^f} \\ &= h \epsilon^{ab} \epsilon_{be} \epsilon^{cd} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^f} \\ &= h \Sigma^{\mu\nu}, -* \end{aligned} \quad (7.6)$$

onde a passagem da segunda para a terceira linha foi realizada utilizando a definição do determinante de h_{ab} . A partir deste resultado, temos que

$$h = \frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}, \quad (7.7)$$

A ação de Nambu-Goto também pode ser escrita através de bivetores.

e a ação de Nambu-Goto pode ser escrita como

$$S_{\text{NG}} = p \int d^2\Sigma \left(-\frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \right)^{1/2}. \quad (7.8)$$

O tensor de energia-momento desta fonte pode ser encontrado da forma usual, usando a relação

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S_{\text{NG}}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (7.9)$$

cujo resultado, no caso da nuvem de cordas, é

$$T_{\mu\nu} = -\rho \frac{\Sigma_{\mu}^{\alpha} \Sigma_{\alpha\nu}}{\sqrt{-h}}, \quad (7.10)$$

onde ρ é a densidade da nuvem de cordas.

Aqui estamos interessados em descrever uma nuvem de cordas esfericamente simétrica, da forma que as únicas componentes não-nulas de $\Sigma^{\mu\nu}$ são dadas por $\Sigma^{tr} = -\Sigma^{rt}$. Inserindo este resultado em (7.10), as únicas componentes não nulas do tensor de energia-momento são

$$T_t^t = T_r^r = -\rho \Sigma^{tr}. \quad (7.11)$$

Para continuar nosso cálculo, precisamos de mais uma relação, que iremos postular sem prova. Seguindo [HR10], pode-se mostrar que

$$\partial_{\mu}(\sqrt{-g}\rho\Sigma^{\mu\rho}) = 0, \quad (7.12)$$

onde g é o determinante da métrica do espaço-tempo. Inserindo a relação (7.11) em (7.12), temos

$$\partial_{\mu}(\sqrt{-g}T_t^t) = 0, \quad (7.13)$$

ou seja,

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{\alpha}{r^{D-2}}, \quad (7.14)$$

onde D é a dimensão do espaço-tempo e α é uma constante a princípio arbitrária. No caso particular, do espaço-tempo quadridimensional, temos que $T_t^t = -\alpha/r^2$. As outras componentes do tensor de energia-momento são nulas, e ele mantém profundas semelhanças com o tensor de energia-momento do monopolo global idealizado. De fato, os sistemas são muito semelhantes, em vista que ambos representam fluxo radial de energia.

7.2 SOLUÇÕES ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS EM DIMENSÕES SUPERIORES

Nesta seção estamos interessados em encontrar soluções esfericamente simétricas, do tipo Schwarzschild, para dimensões superiores. Nosso sistema de coordenadas é dado por $x^A = (t, r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-2}, \phi)$ onde d é a dimensão do espaço-tempo e deve ser maior ou igual a três. No caso do espaço-tempo quadridimensional, nosso sistema de coordenadas é dado por $x^A = (t, r, \theta, \phi)$, como de costume.

Tensor de energia-momento para uma nuvem de cordas.

O tensor de energia momento de uma configuração esfericamente simétrica para a nuvem de cordas apresenta semelhanças, em três dimensões especiais, com o mesmo tensor para o monopolo global idealizado.

O tensor métrico é, então, definido como

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (7.15)$$

onde

$$d\Omega^2 = (d\theta_1)^2 + \text{sen}(\theta_1)^2(d\theta_2)^2 + \dots + \text{sen}(\theta_1)^2 \dots \text{sen}(\theta_{d-2})^2 d\phi^2, \quad (7.16)$$

Em dimensões superiores, a solução de Schwarzschild não é a única solução estática e esfericamente simétrica para o vácuo.

onde $\theta_i \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$.

Em quatro dimensões, o teorema de Jepsen-Birkhoff nos garante que a solução de Schwarzschild é a única solução estática e esfericamente simétrica das equações de Einstein, no vácuo. No caso de dimensões superiores isto não é verdade, e é necessário um estudo perturbativo para identificar quais soluções são estáveis. Nesta tese não iremos nos preocupar com estas questões.

As equações de Einstein, no vácuo, se reduzem a

$$R_A{}^B = 0, \quad (7.17)$$

e por questões didáticas iremos calcular explicitamente o tensor de Ricci para a métrica (7.18). Faremos isso utilizando o método de Cartan, em vista que ele é ideal para lidar com métricas que contenham subvariedades. Começamos reescrevendo (7.18) na forma

$$ds^2 = -a^2(r)dt^2 + \frac{1}{a^2(r)}dr^2 + r^2 \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (7.18)$$

onde $\gamma_{\mu\nu}$ é a métrica de um espaço de dimensão $(d-2)$ com curvatura constante, e $\mu, \nu = 2, 3, \dots, d$. Futuramente iremos exigir que ele represente a métrica da 2-esfera, mas nada impede que ele represente um espaço hiperbólico, ou plano.

Um conjunto de *vielbein* ortonormais ¹ é dado por

$$\underline{\mathbf{e}}^{(t)} = a(r)dt, \quad \underline{\mathbf{e}}^{(r)} = a^{-1}(r)dr, \quad \underline{\mathbf{e}}^{(a)} = r\underline{\mathbf{e}}_0^{(a)}, \quad (7.19)$$

onde $a = 2..d - 2$, e $\underline{\mathbf{e}}_0^{(a)}$ é um conjunto de *vielbein* relativo à métrica $\gamma_{\mu\nu}$ que, em princípio, não precisamos conhecer sua forma analítica. Tomando a derivada exterior da *vielbein* $\underline{\mathbf{e}}^{(t)}$, temos

$$d\underline{\mathbf{e}}^{(t)} = a' dr \wedge dt = a' \underline{\mathbf{e}}^{(r)} \wedge \underline{\mathbf{e}}^{(t)} \quad (7.20)$$

$$= -\underline{\omega}^{(t)}{}_{(r)} \wedge \underline{\mathbf{e}}^{(r)} - \underline{\omega}^{(t)}{}_{(a)} \wedge \underline{\mathbf{e}}^{(a)}, \quad (7.21)$$

¹ Ortonormais em relação à métrica de Minkowski.

onde na primeira linha escrevemos explicitamente a derivada exterior da 1-forma, e na segunda linha reproduzimos a primeira equação de estrutura de Cartan. Comparando ambos os resultados, temos que

$$\underline{\omega}^{(t)}_{(r)} = a' \underline{e}^{(t)}, \quad \underline{\omega}^{(t)}_{(a)} = 0. \quad (7.22)$$

Realizando o mesmo cálculo para a *vielbein* $\underline{e}^{(r)}$, temos

$$d\underline{e}^{(r)} = 0 = -\underline{\omega}^{(r)}_{(t)} \wedge \underline{e}^{(t)} - \underline{\omega}^{(r)}_{(a)} \wedge \underline{e}^{(a)}, \quad (7.23)$$

e, como $\underline{\omega}^{(r)}_{(t)} \propto \underline{e}^{(t)}$, então, ou $\underline{\omega}^{(r)}_{(a)} \propto \underline{e}^{(a)}$ ou $\underline{\omega}^{(r)}_{(a)} = 0$. Por fim, a derivada exterior da *vielbein* $\underline{e}^{(a)}$ é

$$d\underline{e}^{(a)} = dr \wedge \underline{e}_0^{(a)} + r d\underline{e}_0^{(a)} = a \underline{e}^{(r)} \wedge \underline{e}_0^{(a)} + r d\underline{e}_0^{(a)} \quad (7.24)$$

$$= -\underline{\omega}^{(a)}_{(t)} \wedge \underline{e}^{(t)} - \underline{\omega}^{(a)}_{(r)} \wedge \underline{e}^{(r)} - \underline{\omega}^{(a)}_{(b)} \wedge \underline{e}^{(b)} \quad (7.25)$$

onde concluímos que

$$\underline{\omega}^{(a)}_{(r)} = a \underline{e}_0^{(a)} = \frac{a}{r} \underline{e}^{(a)}, \quad (7.26)$$

em vista que $\underline{\omega}^{(a)}_{(t)} = 0$, como calculado acima. A *vielbein* $\underline{e}_0^{(a)}$ satisfaz sua própria equação de estrutura, $d\underline{e}_0^{(a)} = -\underline{\omega}^{(a)}_{(b)} \wedge \underline{e}_0^{(b)}$.

A 2-forma de curvatura pode, então, ser calculada. Lembrando que ela é dada por $\underline{\rho}^{(a)}_{(b)} = d\underline{\omega}^{(a)}_{(b)} + \underline{\omega}^{(a)}_{(c)} \wedge \underline{\omega}^{(c)}_{(b)}$, temos, para $\underline{\rho}^{(t)}_{(r)}$,

$$\underline{\rho}^{(t)}_{(r)} = d\underline{\omega}^{(t)}_{(r)} + \underline{\omega}^{(t)}_{(a)} \wedge \underline{\omega}^{(a)}_{(r)}, \quad (7.27)$$

$$= a'' a dr \wedge dt + a'^2 dt \wedge dt, \quad (7.28)$$

onde ambos os termos da segunda linha vieram de $d\underline{\omega}^{(t)}_{(r)}$, já que o segundo termo da primeira linha é nulo. Desta forma podemos obter todas as componentes da 2-forma de curvatura $\underline{\rho}^{(t)}_{(r)}$, cujo único termo não nulo é dado por

$$\underline{\rho}^{(t)}_{(r)rt} = a'' a + a'^2, \quad (7.29)$$

onde os índices sem os parênteses representam os índices espaço-temporais. Para encontrar as componentes do tensor de Riemann, basta transformar todos os índices para índices do espaço-tempo, com a ajuda das componentes da *vielbein*,

$$e^r_{(r)} e^{(t)}_{(r)} R^t_{rrt} = a'' a + a'^2, \quad (7.30)$$

de forma que

$$R^t_{rrt} = \frac{a''a + a'^2}{a^2}. \quad (7.31)$$

Para a componente $\underline{\rho}^{(t)}_{(a)}$, temos

$$\underline{\rho}^{(t)}_{(a)} = d\omega^{(t)}_{(a)} + \omega^{(t)}_{(r)} \wedge \omega^{(r)}_{(a)} + \omega^{(t)}_{(b)} \wedge \omega^{(b)}_{(a)} \quad (7.32)$$

$$= a' \underline{e}^{(t)} \wedge \left(-\frac{a}{r}\right) \underline{e}_{(a)}, \quad (7.33)$$

$$= a' a dt \wedge (-a) \underline{e}_{0(a)\mu} dx^\mu, \quad (7.34)$$

de onde podemos obter as componentes

$$\underline{\rho}^{(t)}_{(a)t\mu} = -a' a^2 e_{0(a)\mu}. \quad (7.35)$$

É a partir de (7.35) que começamos a ver como o método de Cartan é poderoso, pois conseguimos escrever os componentes da 2-forma de conexão em termos das *vielbein* da subvariedade. Até o momento não especificamos nem qual é essa variedade, nem qual a dimensão total do espaço-tempo. A partir de (7.35) podemos calcular mais componentes do tensor de Riemann, como, por exemplo

$$e^{(t)}_{(a)t} e_{(a)}^\nu R^t_{\nu t\mu} = -a' a^2 e_{0(a)\mu} \quad (7.36)$$

$$\rightarrow e_{(a)}^\nu R^t_{\nu t\mu} = -a' a e_{(a)0\mu}. \quad (7.37)$$

$$\rightarrow R^t_{\nu t\mu} = -\frac{a' a}{r} \gamma_{\nu\mu}, \quad (7.38)$$

onde a terceira linha foi encontrada contraindo a segunda linha com $e_{0(a)\kappa}$, e $\gamma_{\mu\nu}$ é a métrica da subvariedade.

Já temos componentes suficientes do tensor de Riemann para calcular a componente (tt) do tensor de Ricci, dada por

$$R^t_t = R^{tt}_{tt} + R^{rt}_{rt} + R^{\mu t}_{\mu t} \quad (7.39)$$

$$= 0 - (a''a + a'^2) - \frac{a' a}{r} \delta^\mu_\mu \quad (7.40)$$

$$= -\frac{1}{r} (a''ar + a'^2r + (d-2)a'a), \quad (7.41)$$

onde d é a dimensão do espaço-tempo. Da mesma forma, podemos encontrar as outras componentes dos tensores de Riemann e Ricci, porém a componente R^t_t já é suficiente para obtermos um resultado. A equação (7.41) é resolvida mais facilmente fazendo a substituição $a(r) \rightarrow \sqrt{b(r)}$, de modo a obtermos a seguinte equação

$$rb'' + (d-2)b' = 0, \quad (7.42)$$

que tem como solução

$$b(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^{d-3}}. \quad (7.43)$$

Não iremos calcular explicitamente as outras componentes do tensor de Ricci, mas a equação $R_{\mu}{}^{\mu} = 0$ nos dá como resultado

$$b(r) = K - \frac{C_1}{r^{d-3}}, \quad (7.44)$$

onde K é uma constante relacionada com a curvatura da variedade parametrizada pela métrica $\gamma_{\mu\nu}$. No caso de uma $(d-2)$ esfera, $K = 1$ e a métrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{C_1}{r^{d-3}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{C_1}{r^{d-3}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (7.45)$$

é conhecida como métrica de Schwarzschild-Tangherline, e é a equivalente da métrica de Schwarzschild em dimensões superiores. A constante K também pode assumir os valores $K = 0$ e $K = -1$, que dá origem aos chamados buracos negros topológicos.

A métrica de Schwarzschild-Tangherline é a generalização da métrica de Schwarzschild para dimensões superiores.

7.3 A NUVEM DE CORDAS EM EINSTEIN E EINSTEIN-GAUSS-BONNET

Para a métrica (7.18), onde $\gamma_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ representa uma $(d-2)$ esfera, os tensores de Riemann são dados por

$$R^{tr}{}_{tr} = -a'^2 - aa'', \quad (7.46)$$

$$R^{t\mu}{}_{t\mu} = R^{r\mu}{}_{r\mu} = -\frac{aa'}{r} \quad (7.47)$$

$$R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = \frac{1-a^2}{r^2}, \quad (7.48)$$

onde os índices (μ, ν) não estão contraídos, mas indicam apenas um dos índices da variedade interna. Os tensores de Ricci são dados por

$$R^r{}_r = R^t{}_t = -\frac{1}{r}(a''ar + a'^2r + (d-2)a'a), \quad (7.49)$$

e

$$R^{\mu}{}_{\mu} = -\frac{1}{r^2}(2a'ar + (d-3)a^2 - (d-3)). \quad (7.50)$$

Finalmente, o escalar de curvatura é dado por

$$R = \frac{-1}{r^2}(4(d-2)a'ar + 2a'^2r^2 + 2a''ar^2 + (d-2)(d-3)(a^2 - 1)). \quad (7.51)$$

A partir destes tensores é possível formar os tensores de Einstein e de Gauss-Bonnet. Após isto, devemos resolver as equações de campo.

7.3.1 *A nuvem de corda na relatividade geral.*

O tensor de Einstein é dado por $G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - (1/2)\delta^\mu_\nu R$. As únicas componentes não nulas são

$$G^t_t = G^r_r = \frac{d-2}{2r^2} (2a'ar + (d-3)a^2 - (d-3)) \quad (7.52)$$

e

$$G^\mu_\mu = \frac{1}{r^2} \left((2d-6)a'ar + \frac{(d-4)(d-3)}{2}(a^2-1) + a''ar^2 + a'^2r^2 \right), \quad (7.53)$$

onde, devemos lembrar, os índices μ, ν, \dots não estão contraídos, mas representam um dos índices da variedade interna. Fazendo a substituição $a(r) \rightarrow \sqrt{b(r)}$, as equações de Einstein se tornam

$$G^t_t = G^r_r = \frac{(d-2)}{2r^2} (b'r + bd - 3b - d + 3) = 0, \quad (7.54)$$

e

$$G^\mu_\mu = \frac{1}{2r^2} ((2d-6)b'r + r^2b'' + (d-4)(d-3)(b-1)) = 0. \quad (7.55)$$

Como temos apenas uma função a ser calculada, $b(r)$, ambas as equações precisam fornecer o mesmo resultado. A solução geral de $G^t_t = 0$ é dada por

$$b(r) = 1 + \frac{C_1}{r^{d-3}}, \quad (7.56)$$

que é a já descrita métrica de Schwarzschild-Tangherline. A solução geral de $G^\mu_\mu = 0$ é dada por

$$b(r) = 1 + \frac{C_1}{r^{d-3}} + \frac{C_2}{r^{d-4}}. \quad (7.57)$$

Como as equações precisam ser compatíveis, no caso do vácuo, temos que impor que $C_2 = 0$. Vamos, agora, obter a solução da nuvem de cordas na relatividade geral. O tensor de energia-momento é dado por $T^\mu_\nu = (-\eta^2/r^{d-2}, -\eta^2/r^{d-2}, 0, \dots, 0)$, onde somente os dois primeiros termos são não-nulos. Como os termos de energia-momento relacionados à variedade interna são nulos, as equações de Einstein $G^\mu_\mu = 0$ precisam ser satisfeitas, e devem ter como solução a função dada por (7.57).

As componentes relacionadas aos índices t e r , agora, são dadas por $G^t_t = G^r_r = 8\pi G T^t_t$, e a solução geral é

$$b(r) = 1 + \frac{C_1}{r^{d-3}} - \frac{16\pi G \eta^2}{d-2} \frac{1}{r^{d-4}}, \quad (7.58)$$

A compatibilidade entre as equações de Einstein nos indicam que o ansatz escolhido foi correto.

onde vemos que as soluções são compatíveis se $C_2 = -16\pi G\eta^2/(d-2)$. Caso tais soluções não fossem compatíveis seria um indício que o ansatz (7.18) não era uma boa escolha.

7.3.2 A nuvem de cordas na teoria de Einstein-Gauss-Bonnet

O termo de Lovelock puro de ordem dois, ou termo de Gauss-Bonnet, gera as equações de campo dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^A_B &= 2R_{AC_1C_2C_3}R^{BC_1C_2C_3} - 4R_{AC_1BC_2}R^{AB} - 4R_{AC_1}R^{C_1B} \\ &+ 2RR_A^B - \frac{1}{2}\delta^A_B R^2 + 2\delta^A_B R_{C_1C_2}R^{C_1C_2} \\ &- \frac{1}{2}\delta^A_B R_{C_1C_2C_3C_4}R^{C_1C_2C_3C_4} = 0, \end{aligned} \quad (7.59)$$

onde A, B, C_1, \dots, C_4 são índices abstratos. Em termos dos componentes da métrica (7.18), e realizando a transformação $a(r) \rightarrow \sqrt{b(r)}$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\mu_\mu &= \frac{-1}{2r^4} [2(d-4)(d-3)(r^2b''b - r^2b'' + b'^2) \\ &+ (d-6)(d-5)(d-4)(d-3)(1-b)^2 \\ &+ 4(d-5)(d-4)(d-3)(b'rb - b'r)] = 0 \end{aligned} \quad (7.60)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^t_t &= GB^r_r = \frac{-1}{2r^4} [2(d-4)(d-3)(d-2)(b'rb - b'r) \\ &+ (d-5)(d-4)(d-3)(d-2)(1-b)^2] = 0. \end{aligned} \quad (7.61)$$

A equação (7.60) tem como solução geral

$$b(r) = 1 + \frac{C_1}{r^{(d-5)/2}}. \quad (7.62)$$

No caso de $d = 5$, a solução (7.62) pode ser vista como um termo topológico. Para que o ansatz (7.18) tenha sido uma boa escolha, é preciso que esta solução encontrada seja compatível com a solução de (7.61), a saber,

$$b(r) = 1 \pm \sqrt{C_1 r^{5-d} + C_2 r^{6-d}}. \quad (7.63)$$

Se $C_2 = 0$, então, a solução (7.63) será compatível com a solução (7.62), e encontramos a solução de Gauss-Bonnet no vácuo.

Da mesma forma que no caso da relatividade geral, também no caso de Gauss-Bonnet puro, a solução (7.63) deve ser obedecida para o tensor de energia-momento da nuvem de cordas. Com isso, basta

Solução da nuvem de cordas, na relatividade geral, para dimensões arbitrárias.

inserir a solução (7.63) na equação $\mathcal{G}^t_t = -\eta^2/r^{d-2}$, e verificar se existe compatibilidade. O que encontramos é que a compatibilidade existe quando

$$C_2 = -\frac{4\eta^2}{6A_1 + 2A_2 - A_1 d'} \quad (7.64)$$

onde $A_1 = (d-4)(d-3)(d-2)$ e $A_2 = (d-5)(d-4)(d-3)(d-2)$. Com isso encontramos uma solução para a nuvem de cordas em Gauss-Bonnet, em dimensões arbitrárias.

Por últimos, estamos interessados em encontrar a solução da nuvem de cordas na teoria de Einstein-Gauss-Bonnet, onde as equações de movimento são dadas por

$$\kappa^{-1}G_{AB} - \alpha\mathcal{G}_{AB} = T_{AB}, \quad (7.65)$$

onde κ e α são constantes relativas às teorias de Einstein e Gauss-Bonnet, respectivamente. No caso de vácuo, $T_{AB} = 0$, a equação $\kappa^{-1}G_0^0 - \alpha\mathcal{G}_0^0 = 0$ tem como solução

A solução de Boulware-Deser é uma solução de vácuo, para teorias de Einstein-Gauss-Bonnet.

$$b(r) = 1 + \frac{r^2}{2\tilde{\alpha}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{C_1 8\tilde{\alpha}\kappa r^{1-d}}{(d-2)}} \right), \quad (7.66)$$

onde $\tilde{\alpha} = \alpha\kappa(d-4)(d-3)$ e C_1 é uma constante de integração. Esta métrica é conhecida como métrica de Boulware-Deser [BD85]. No caso da nuvem de cordas, com $T^t_t = T^r_r = -\eta^2/r^{d-2}$ e todos os outros componentes zero, a solução é dada por

$$b(r) = 1 + \frac{r^2}{2\tilde{\alpha}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{C_1 8\tilde{\alpha}\kappa r^{1-d}}{(d-2)} + \frac{8\eta^2\tilde{\alpha}\kappa r^{2-d}}{(d-2)}} \right). \quad (7.67)$$

Para finalizar, precisamos descobrir o valor da constante de integração C_1 . Tomando o limite de (7.66) em que $\alpha \rightarrow 0$, temos

A métrica de Boulware-Deser deve ter como limite a solução de Schwarzschild-Tangherlini quando $\alpha \rightarrow 0$.

$$b(r) \rightarrow 1 + \frac{r^2}{2\tilde{\alpha}} \left[1 \pm \left(1 - \frac{C_1 4\tilde{\alpha}\kappa r^{1-d}}{(d-2)} \right) \right], \quad (7.68)$$

e para que a solução acima recaia na métrica de Schwarzschild-Tangherlini, precisamos ter que $C_1 = -M(d-2)$, onde M é a massa de um objeto esfericamente simétrico, e por simplicidade iremos considerar que $\kappa = 1$. Apenas uma das duas soluções dadas por (7.66) é válida, e nossa solução final para uma métrica esfericamente simétrica, no ambiente de uma nuvem de cordas, na gravitação de Einstein-Gauss-Bonnet, é dada por

$$b(r) = 1 + \frac{r^2}{2\tilde{\alpha}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8M\tilde{\alpha}}{r^{d-1}} + \frac{8\eta^2\tilde{\alpha}}{(d-2)r^{d-2}}} \right). \quad (7.69)$$

7.4 OS MODOS QUASINORMAIS DA NUVEM DE CORDAS

Antes de calcularmos os modos quasinormais da nuvem de cordas, vamos calcular os modos quasinormais da solução de Schwarzschild-Tangherline. No capítulo anterior mostramos o resultado para o caso $D = 4$, e agora vamos estender esse resultado para dimensões superiores.

Como usual, a equação para os modos escalares parte da equação de Klein-Gordon, onde iremos considerar o caso de massa nula. O que precisamos é, então, encontrar uma solução para

$$\square\Phi = 0, \quad (7.70)$$

onde Φ é um campo escalar. Fazendo a transformação para as coordenadas da tartaruga, $dr^* = dr/b(r)$, onde

$$b(r) = 1 - \frac{2M}{r^{D-3}}, \quad (7.71)$$

a equação (7.70) pode ser escrita como uma equação tipo Schrödinger,

$$\left(\frac{d^2}{dr^{*2}} + \omega^2 - V(r) \right) \Psi = 0, \quad (7.72)$$

onde Ψ é a componente radial de Φ , e

$$V(r) = b(r) \left(\frac{(D-2)(D-4)}{4r^2} b(r) + \frac{D-2}{2r} b'(r) + \frac{l(l+D-3)}{r^2} \right), \quad (7.73)$$

sendo l é o número quântico relacionado ao momento angular. Iremos utilizar o mesmo método do capítulo anterior, de forma que não entraremos em maiores detalhes sobre o cálculo do espectro dos modos quasinormais.

Vamos apenas fazer uma breve análise do máximo do potencial (7.73) para $l \rightarrow \infty$. No capítulo anterior, vimos que o máximo do potencial para a solução de Schwarzschild ocorre quando $r \rightarrow 3$. No caso de uma dimensão arbitrária, para $l \rightarrow \infty$, o potencial (7.73) recai em

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r^{D-3}} \right) \left(\frac{l^2}{r^2} \right), \quad (7.74)$$

e, para uma massa unitária, a equação (7.74) encontra seu máximo em $r_{\max} = (D-1)^{(D-3)}$. Os valores calculados para o espectro de modos quasinormais, nas dimensões $D = 4, 5, 6, 7$ e 8 , em função dos

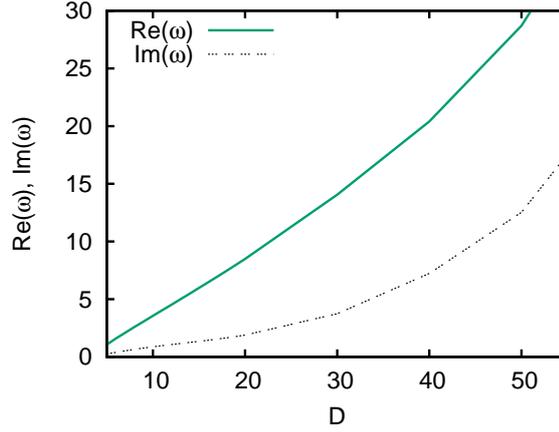


Figura 22: Modos quasinormais para a métrica de Schwarzschild-Tangherline em D dimensões, com $l = 2$ e $n = 0$.

números quânticos l e n estão listados na Tabela (9). Podemos observar que tanto os valores reais e imaginários, aumentam em módulo com o aumento da dimensão do espaço-tempo. Este comportamento está melhor retratado na Figura (22).

Vamos passar agora para a solução de Boulware-Deser, onde estudaremos o espectro de modos quasinormais em função do parâmetro $\tilde{\alpha}$ da teoria. Por conveniência, iremos a partir de agora denotar $\tilde{\alpha}$ simplesmente de α . Antes, no entanto, devemos fazer um comentário sobre a solução de Boulware-Deser. Seu horizonte de eventos é dado por

$$0 = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8\alpha}{r^{d-1}}} \right), \quad (7.75)$$

onde consideramos $M = 1$. Tomando o quadrado da relação acima, encontramos que o horizonte é dado pela equação

$$1 + \frac{r^2}{\alpha} - \frac{2r^{5-d}}{\alpha} = 0. \quad (7.76)$$

Em $D = 5$, esta relação torna-se $r^2 = 2 - \alpha$, e somente existe um horizonte quando $\alpha < 2$. Por esta razão iremos evitar trabalhar com $D = 5$. Para $D = 6, 7, 8$ e 9 , os valores obtidos para os modos quasinormais, utilizando o formalismo WKB de quinta ordem, estão mostrados na Figura (23). Como podemos observar, o decaimento é amplificado com o aumento de α , e isto ocorre com maior amplitude em seis dimensões. De fato, foi mostrado [KZo8] que em $D = 6$ a solução de Boulware-Deser não é estável, o que deve explicar tal comportamento.

Vamos analisar, agora, o comportamento dos modos quasinormais no caso de um buraco negro, com uma nuvem de cordas, na relatividade geral. Escolhendo os parâmetros $l = 2$ e $n = 0$, a figura

Em cinco dimensões, o parâmetro α possui um limite superior. Além deste limite, a solução de Boulware-Deser não é o análogo da métrica de Schwarzschild em dimensões superiores.

Tabela 9: Modos quasinormais da métrica de Schwarzschild-Tangherline, utilizando o método de WKB de quinta ordem, para $D=4,5,6,7$ e 8.

$l(D=4)$	n	$\text{Re}(\omega)$	$-\text{Im}(\omega)$
0	0	0.1053	0.1057
1	0	0.2931	0.0977
1	1	0.2645	0.3065
2	0	0.4837	0.0968
2	1	0.4639	0.2956
2	2	0.4301	0.5090
$l(D=5)$	n	$\text{Re}(\omega)$	$-\text{Im}(\omega)$
0	0	0.369	0.267
1	0	0.720	0.257
1	1	0.609	0.819
2	0	1.068	0.253
2	1	0.985	0.781
2	2	0.842	1.372
$l(D=6)$	n	$\text{Re}(\omega)$	$-\text{Im}(\omega)$
0	0	0.705	0.417
1	0	1.155	0.409
1	1	0.959	1.300
2	0	1.597	0.399
2	1	1.421	1.237
2	2	1.093	2.199
$l(D=7)$	n	$\text{Re}(\omega)$	$-\text{Im}(\omega)$
0	0	1.088	0.552
1	0	1.600	0.552
1	1	1.240	1.727
2	0	2.100	0.532
2	1	1.812	1.649
2	2	1.210	2.934
$l(D=8)$	n	$\text{Re}(\omega)$	$-\text{Im}(\omega)$
0	0	1.507	0.686
1	0	2.056	0.690
1	1	1.551	2.092
2	0	2.591	0.654
2	1	2.183	2.017
2	2	1.206	3.544

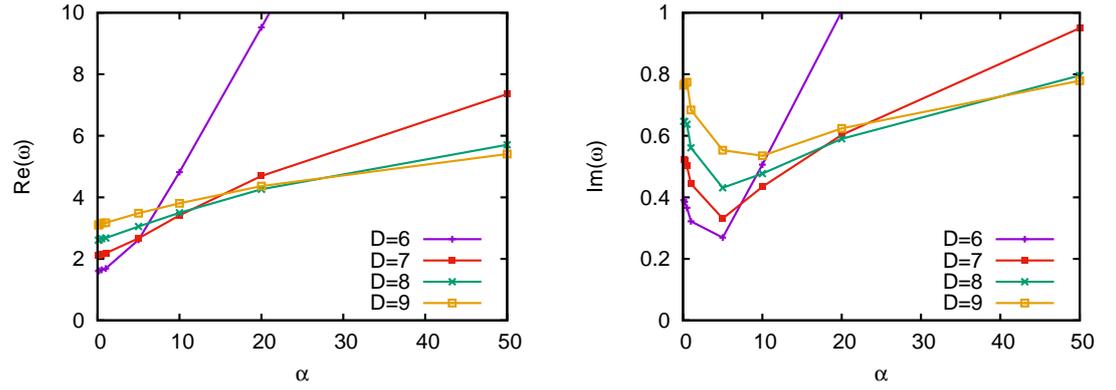


Figura 23: Modos quasinormais escalares para a solução de Boulware-Deser, com $l = 2$ e $n = 0$, para dimensões $D = 6, 7, 8$ e 9 , em termos do parâmetro α .

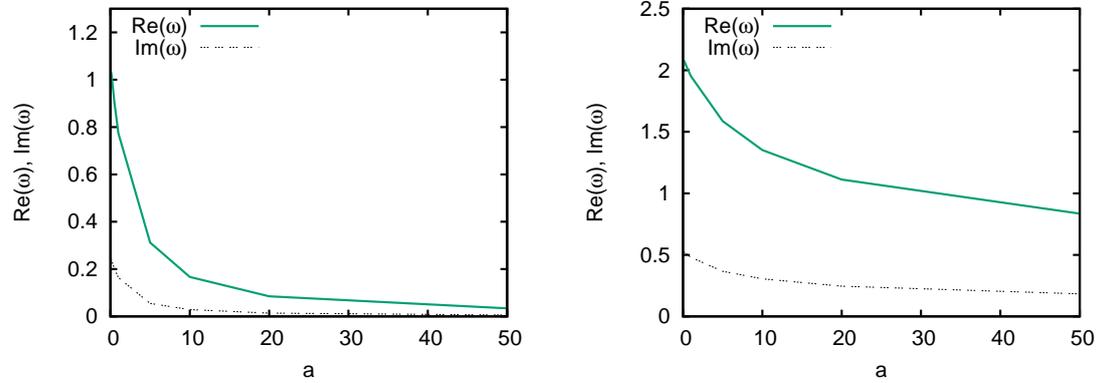


Figura 24: Modos quasinormais escalares para a solução de um buraco negro, com uma nuvem de cordas. Os parâmetros utilizados foram $l = 2$ e $n = 0$, para dimensões $D = 5$ (esquerda) e $D = 7$ (direita).

(24) exibe o comportamento dos modos em relação ao parâmetro $16\pi G\eta^2/(d-2)$, a qual denotaremos pela letra a . Foram realizados os cálculos para as dimensões $D = 5$ (esquerda) e $D = 7$ (direita). O resultado obtido para ambas dimensões é similar, a saber, que o valor absoluto tanto da parte real dos modos, quanto da parte imaginária, é menor do que seria sem a presença da nuvem de cordas. Esse fato nos mostra que o papel da nuvem de cordas é tanto diminuir a frequência de oscilação das ondas gravitacionais, quanto também de atenuar o seu decaimento.

O principal efeito da presença da nuvem de cordas, é atenuar o decaimento das ondas gravitacionais.

Resta-nos estudar o comportamento dos modos quasinormais quando ambos os termos estiverem presentes, a saber, o termo de Gauss-Bonnet e o termo relacionado à energia da nuvem de cordas, dados respectivamente por α e η^2 [MGVB16]. Inicialmente realizaremos o cálculo da seguinte forma: Mantendo fixo o parâmetro α , iremos variar o parâmetro η^2 , para um exemplo onde $l = 2$ e $n = 0$. Este cálculo foi realizado tanto para $D = 7$, quanto para $D = 9$, sendo

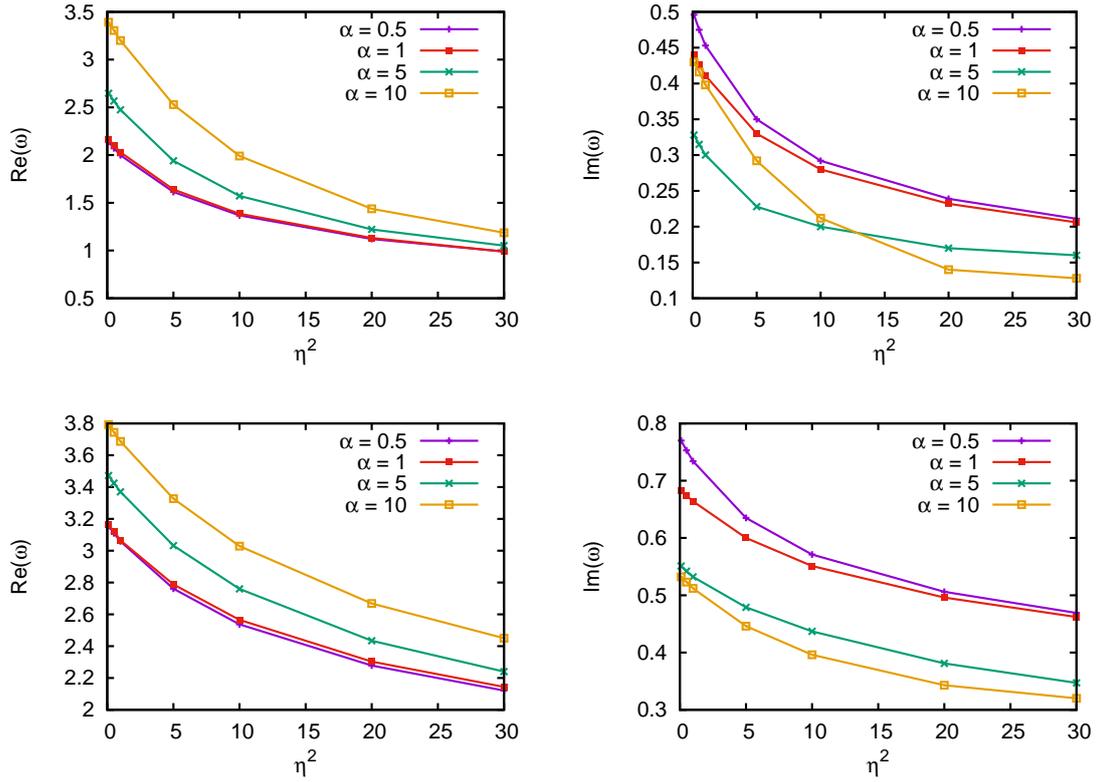


Figura 25: Modos quasinormais escalares para a solução de um buraco negro, com uma nuvem de cordas, na teoria de Einstein-Gauss-Bonnet. Os parâmetros utilizados foram $l = 2$ e $n = 0$, para dimensão $D = 7$ (acima) e $D = 9$ (abaixo), variando-se α .

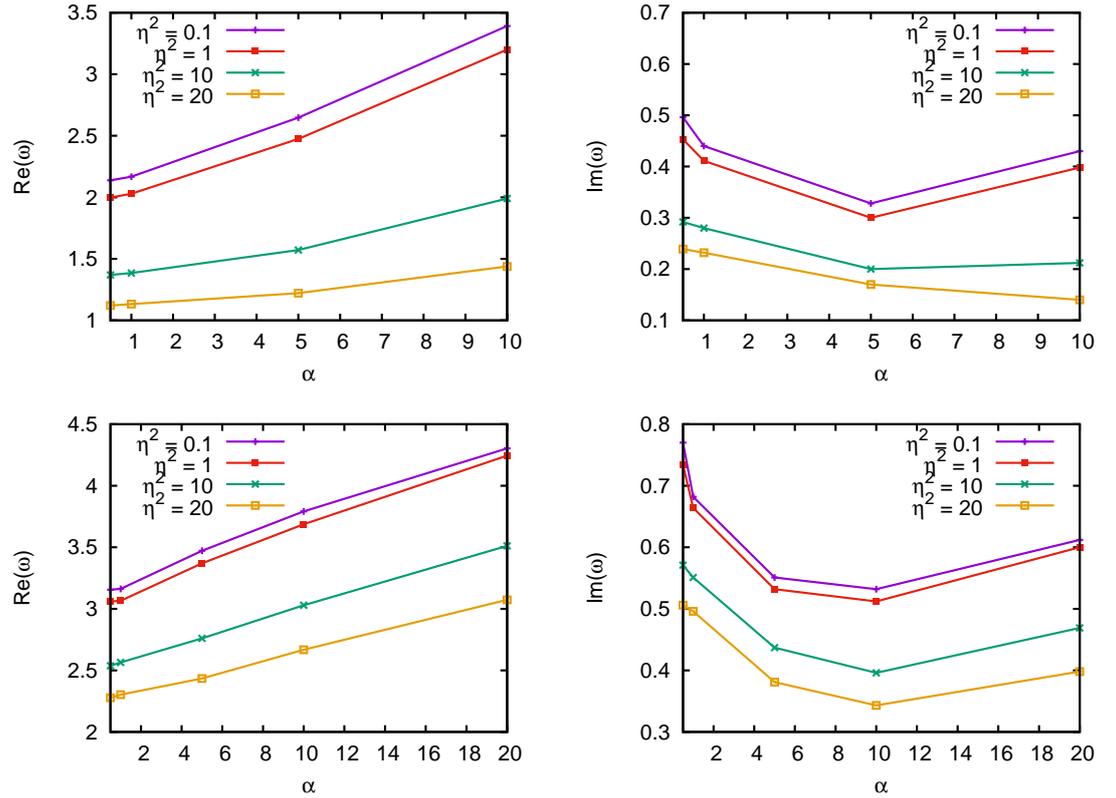


Figura 26: Modos quasinormais escalares para a solução de um buraco negro, com uma nuvem de cordas, na teoria de Einstein-Gauss-Bonnet. Os parâmetros utilizados foram $l = 2$ e $n = 0$, para dimensão $D = 7$ (acima) e $D = 9$ (abaixo) variando-se η^2 .

que α foi escolhido fixo em $\alpha = 0.5, 1, 5$ e 10 . Ou seja, o que estamos querendo estudar neste gráfico é como a solução de Boulware-Deser é modificada com a introdução de uma nuvem de cordas. Os resultados obtidos estão exibidos na figura (25). Para todas as configurações estudadas, tanto o valor da parte real, quanto o valor da parte imaginária, diminuem. Este comportamento é análogo ao do mesmo sistema na relatividade geral, como exibido na figura (25).

Uma segunda forma de estudar o mesmo problema é manter o parâmetro η^2 fixo, e variar o parâmetro α . O comportamento deste estudo está mostrado na figura (26). Como podemos observar, a atenuação do valor da parte imaginária dos modos ocorre até um determinado valor do parâmetro α , quando então passa a ocorrer uma amplificação. Este comportamento aparenta depender da dimensão do espaço-tempo, tendo em vista que ele ocorre para um valor menor de α quando $D = 7$, em relação ao mesmo sistema em $D = 9$. Este fato, no entanto, já estava presente para a métrica de Boulware-Deser, como já visto na figura (23). O efeito mais notável da presença da corda cósmica é atenuar o valor dos modos, tanto em sua parte imaginária quanto em sua parte real. A forma como a atenuação ocorre

parece não depender do valor do parâmetro η^2 , ou seja, do valor esperado de vácuo do campo escalar que origina a corda. A exceção mais visível ocorre quando $\eta^2 = 20$, especialmente para $D = 7$. Este estudo nos mostra que, se a forma como a atenuação dos modos quasinormais ocorre é dependente do parâmetro η^2 , é necessário o parâmetro η^2 assuma valores bem acima da unidade para que este efeito comece a ser observado.

CONCLUSÕES

Esta tese foi composta, em grande parte, de dois estudos: Defeitos topológicos e modos quasinormais, ambos no contexto de teorias modificadas da gravitação. As razões de modificar a relatividade geral são várias, e em especial podemos destacar as recentes observações cosmológicas, que indicam um universo se expandindo aceleradamente. Destaca-se, também, a necessidade de encontrar um regime quântico para a força gravitacional, tarefa esta que aparenta ser mais promissora com a modificação da relatividade geral. No primeiro aspecto, a saber, o da expansão acelerada do universo, teorias $f(R)$ da gravitação tem obtido um relativo sucesso, principalmente na modelagem de teorias efetivas da gravitação. No segundo aspecto, relativo à quantização da gravitação, são as teorias de cordas e da supergravidade que tem apresentado resultados promissores. Essas teorias, no entanto, necessitam que o espaço-tempo seja uma variedade de dimensão superior a quatro, e a generalização natural da relatividade geral em dimensões superiores são as teorias de Lovelock.

Por estes motivos, esta tese concentrou-se nestas duas teorias modificadas da gravitação, a saber, teorias $f(R)$ da gravitação e teorias de Lovelock. No capítulo 3 estudamos um exemplo da correspondência entre teorias $f(R)$ da gravitação e Brans-Dicke. Utilizando as equações de Brans-Dicke, reobtemos uma solução métrica que já haviam sido obtida no contexto de teorias $f(R)$ da gravitação. Argumentamos também que a solução de Schwarzschild-de Sitter obtida em teorias $f(R)$, que poderia, em princípio, explicar a expansão acelerada do universo, pode ser melhor entendida através de sua versão correspondente em teorias de Brans-Dicke.

Nos capítulos 4 e 5, estudamos uma classe particular de funções $f(R)$. Ao invés de utilizarmos o método usual, de manter a liberdade de escolha da forma analítica da função $f(R)$ antes das equações de movimento, optamos por escolher a forma analítica previamente. A função escolhida representa um modelo estendido do modelo de Starobinsky, a saber, $f(R) = R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R^m$. No caso de $\Lambda = \beta = 0$, este modelo corresponde ao modelo clássico de Starobinsky. No contexto desta classe de teorias modificadas da gravitação, estudamos a corda cósmica Abelian, resolvendo numericamente as equações de campo para as funções da métrica, o campo escalar e o campo de gauge. Os resultados mostram que os campos escalar e de gauge continuam gerando uma configuração do tipo corda cósmica, e o perfil da função radial é pouco modificado em relação ao mesmo sistema na relatividade geral. Em relação às funções da métrica, o

mesmo não ocorre, e isto afeta diretamente tanto o déficit angular gerado pela corda, quanto o valor do horizonte cosmológico.

Na ausência do termo de constante cosmológica, o déficit angular é atenuado para todos os valores positivos dos parâmetros α e β , e a atenuação é tanto maior quanto maior forem tais parâmetros. A atenuação do déficit angular pode ajudar a explicar a não observação de alguns efeitos astrofísicos que, espera-se, sejam resultados da interação entre a luz e a geometria cônica gerada pela corda. Como um exemplo, podemos citar os efeitos de lente gravitacional. Com isto, os possíveis valores permitidos para o valor esperado de vácuo do campo escalar, são maiores no contexto do modelo estendido de Starobinsky, em relação ao mesmo sistema na relatividade geral. Também foi estudado como a atenuação ocorre em relação ao polinômio utilizado para o termo estendido de Starobinsky, e o resultado é que a atenuação é tanto maior quanto menor a potência do polinômio. Este é um indício que o modelo de Starobinsky estendido é uma boa aproximação para uma função $f(R)$ arbitrária, tendo em vista que, considerando a função $f(R)$ como uma série de potência, apenas os primeiros termos são relevantes. Seria interessante o estudo do modelo de Starobinsky estendido no contexto de outros defeitos topológicos, como por exemplo, no caso do monopolo de t'Hooft, com o objetivo de verificar se este mesmo comportamento é reproduzido.

Estudamos também o comportamento do horizonte cosmológico, devido a presença da constante cosmológica. Para o modelo de Starobinsky puro, encontramos que, a medida que aumentamos o parâmetro relacionado ao termo quadrático, o valor do horizonte cosmológico, na presença da corda, tende a se aproximar do valor do horizonte cosmológico, na ausência da corda. Ou seu, à medida que o termo quadrático tende a se tornar mais relevante, menos a presença da corda influi no valor do horizonte cosmológico, sendo este totalmente definido pelo valor da constante cosmológica. No caso estendido de Starobinsky, o mesmo estudo apresentou diferenças qualitativas. Isto se deve ao fato de que os termos do polinômio de ordens superiores são geradores de dois efeitos, a saber, de atenuar as consequências da corda cósmica sobre o horizonte cosmológico, como também de aumentar o valor da constante cosmológica.

Nos capítulos 6 e 7 foi estudada a emissão de ondas gravitacionais, por buracos negros, com a presença de defeitos topológicos. Inicialmente estudamos o caso da presença de um monopolo global, em teorias $f(R)$ da gravitação. Posteriormente estudamos o caso da presença de uma nuvem de cordas, desta vez em teorias de Lovelock, mais especificamente na teoria de Einstein-Gauss-Bonnet. Para o cálculo dos modos quasinormais foi utilizado o método WKB de quinta ordem, cujo resultado é uma boa aproximação quando o momento angular é superior ao número quântico de energia, ou seja, $l > n$, em especial quando $l \gg n$.

Para o buraco negro, com um monopolo global, em teorias $f(R)$ da gravitação, calculamos tanto o espectro escalar quanto o espectro espinorial. Nosso primeiro resultado foi de que o espectro de modos começa a apresentar problemas quando o parâmetro ψ_0 , relacionado à função $f(R)$ da teoria, se aproxima da unidade. Em termos físicos, no limite $\psi_0 \rightarrow 1$, o horizonte de eventos e o horizonte cosmológico tendem a se aproximar, e mesmo antes de $\psi_0 = 1$ eles já se encontram. Para $\psi_0 \ll 1$, o espectro dos modos quasinormais é comparado com o espectro do mesmo sistema, na relatividade geral. O resultado encontrado é que os valores em módulo, tanto para a parte real, quanto para a parte imaginária, são atenuados. Este resultado encontra-se presente para o caso escalar, como também para o caso espinorial.

A nuvem de cordas foi analisada no contexto das teorias de Lovelock, através de seu espectro de modos escalares. Como teorias de Lovelock são naturais generalizações da relatividade geral em dimensões superiores, o estudo foi realizado para $D > 4$, onde D é a dimensão do espaço-tempo. O resultado encontrado foi que a presença da nuvem de cordas atenua o valor dos modos quasinormais, tanto em sua parte real, como também em sua parte imaginária. Para valores não muito elevados do parâmetro η^2 , relacionado ao tensor de energia-momento da nuvem de corda, a atenuação em relação a este parâmetro não parece depender do parâmetro α , relacionado à teoria de Einstein-Gauss-Bonnet. Já para valores mais elevados de η^2 , o valor real dos modos aparenta aproximar-se de um valor assintótico, e essa aproximação ocorre para menores valores de η^2 , quanto menor for a dimensão D . Ou seja, para o valor real dos modos quasinormais, neste sistema, a teoria de Einstein-Gauss-Bonnet parece ser menos afetada quanto maior for a dimensão do espaço-tempo.

Parte IV

APÊNDICES

EQUAÇÕES DE CAMPO E TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO PARA A CORDA ABELIANA

Neste apêndice, iremos derivar as equações de campo da corda Abelianas, em um espaço-tempo curvo. A ação para os campos escalar e de gauge é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi^* (\partial^\mu - ieA^\mu) \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - v^2)^2 \right) \quad (\text{A.1})$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, o chamado tensor de intensidade de campo. Nosso *ansatz* para os campos escalar e de gauge são dados, respectivamente, por

$$\phi(r, \theta) = v e^{i\theta} f(r) \quad (\text{A.2})$$

e

$$A_\mu dx^\mu(r, \theta) = \frac{1}{e} [1 - P(r)] d\theta \quad (\text{A.3})$$

onde, por simplicidade, iremos nos restringir ao caso em que o número de enrolamentos, dado por n , é igual a um.

Para o elemento de linha da métrica, iremos propor um *ansatz* axialmente simétrico, dado por

$$ds^2 = N^2(r) dt^2 - dr^2 - L^2(r) d\phi - K^2(r) dz^2. \quad (\text{A.4})$$

Podemos trocar o campo escalar e seu conjugado como variáveis independentes. Desta forma, os termos da ação que contêm o campo escalar podem ser escritos como

$$S = \int \frac{d^4x}{2} \left[-\phi^* (\partial_\mu \partial^\mu \phi) \sqrt{|g|} + \phi^* (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \sqrt{|g|}) + \phi^* (e^2 A_\mu - ie((\partial_\mu \sqrt{|g|}) A^\mu \phi^* \phi A^\mu \phi) \sqrt{|g|} + \sqrt{|g|} (\partial_\mu A^\mu) \phi^* \phi) + \sqrt{|g|} A^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi^* (\partial^\mu \phi) \sqrt{|g|} \right], \quad (\text{A.5})$$

onde foram realizadas duas integrais por partes, e posteriormente negligenciados os termos de superfície. A expressão acima pode ser, então, expressa como

$$S = - \int d^4x \frac{\sqrt{g}}{2} \phi^* [\square \phi - e^2 A_\mu A^\mu \phi + ie(\nabla_\mu A^\mu) \phi - 2ie A_\mu \partial^\mu \phi], \quad (\text{A.6})$$

onde $\square f \equiv \partial_\mu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu f)/\sqrt{|g|}$ e $\nabla_\mu f^\mu \equiv \partial_\mu(\sqrt{|g|}f^\mu)/\sqrt{|g|}$.

Desta forma, variando (A.6) em relação ao conjugado do campo escalar, encontramos a equação

$$\square\phi - e^2 A_\mu A^\mu \phi + ie(\nabla_\mu A^\mu)\phi - 2ieA_\mu \partial^\mu \phi + \lambda(\phi^* \phi - v^2)\phi = 0, \quad (\text{A.7})$$

e basta substituírmos o campo ϕ por nosso *ansatz* proposto. O cálculo é direto, porém iremos realiza-lo em detalhes aqui. O terceiro termo de A.7 é nulo, enquanto os outros quatro termos são

$$\frac{\partial_\mu(\text{NKL}\partial^\mu v f e^{i\phi})}{\text{NKL}} + \frac{(1-P)^2}{L^2} v f e^{i\phi} + \frac{2i(1-P)}{L^2} \partial_\phi(v f e^{i\phi}) + \lambda(v^2 f^2 - v^2) v f e^{i\phi} = 0. \quad (\text{A.8})$$

O primeiro termo de (A.8) possui dependência tanto na componente radial quanto na direção do ângulo ϕ . Realizando as devidas derivadas, temos

$$-\frac{(\text{NKL}f')'}{\text{NKL}} v f e^{i\phi} + \frac{v f e^{i\phi}}{L^2} + \frac{(1-2P+P^2)}{v} f e^{i\phi} L^2 + -\frac{2(1-P)}{L^2} v f e^{i\phi} + \lambda(v^2 f^2 - v^2) v f e^{i\phi} = 0, \quad (\text{A.9})$$

e, reorganizando os termos da expressão acima, temos

$$-\frac{(\text{NKL}f')'}{\text{NKL}} + \frac{1}{L^2}(f + f - 2Pf + P^2f - 2f + 2Pf) - \lambda v^2(1 - f^2)f = \frac{(\text{NKL}f')'}{\text{NKL}} + (\lambda v^2(1 - f^2) - \frac{P^2}{L^2})f = 0, \quad (\text{A.10})$$

que representa nossa expressão final da equação de campo, ao qual o campo escalar deve obedecer. Vamos passar agora para o campo de gauge. Expandindo a ação (A.1) em todos os componentes que envolvam o campo de gauge, encontramos

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi \right]. \quad (\text{A.11})$$

Vamos realizar algumas integrais por partes em (A.11), de forma a deixar sempre um termo do campo de gauge à esquerda de qualquer operador diferencial. Fazendo isto, e negligenciando os termos de superfície, encontramos

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{|g|}}{2} [A_\nu \nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - A_\nu \nabla_\mu \nabla^\nu A^\mu + e^2 A_\nu A^\nu \phi^* \phi - A_\nu ie(\partial^\nu \phi^*)\phi + A_\nu \phi^* ie(\partial^\nu \phi)]. \quad (\text{A.12})$$

Finalmente, variando a ação acima em respeito ao campo de gauge, a equação a ser obedecida pelo campo de gauge será

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}A^{\nu}-A_{\nu}\nabla_{\mu}\nabla^{\nu}A^{\mu}+2e^2A^{\nu}\phi^*\phi-ie(\partial^{\nu}\phi^*)\phi+\phi^*ie(\partial^{\nu}\phi)=0 \quad (\text{A.13})$$

onde $\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}A^{\nu}=\partial_{\mu}(\sqrt{|g|}g^{\mu\kappa}g_{\nu\rho}\partial_{\kappa}A_{\rho})/\sqrt{|g|}$. Tudo o que temos a fazer agora é inserir o nosso *ansatz* para o campo de gauge. Fazendo isto, a equação diferencial a ser obedecida pela função $P(r)$, é dada por

$$\frac{L}{NK}\left(\frac{NK}{L}P'\right)'-e^2v^2f^2P=0. \quad (\text{A.14})$$

EQUAÇÕES DE CAMPO PARA TEORIAS $f(R)$ DA GRAVITAÇÃO

A ação das teorias $f(R)$ da gravitação é construída substituindo o escalar de curvatura, da ação de Einstein-Hilbert, por uma função analítica do mesmo. Ela é então dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (\text{B.1})$$

onde, como iremos realizar o cálculo no vácuo, não nos preocupamos com a introdução de constantes desnecessárias. A variação da ação acima é então

$$\delta S = \int d^4x \left((\delta \sqrt{-g}) f(R) + f'(R) \delta R \right), \quad (\text{B.2})$$

onde, utilizando a definição $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, e a relação $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(f'(R) (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} f(R) \right). \quad (\text{B.3})$$

Vamos agora trabalhar um cálculo mais detalhado para o termo $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$. Para este estudo, é útil considerarmos um referencial inicial local, onde

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}(P) \quad e \quad \nabla_\mu = \delta_\mu. \quad (\text{B.4})$$

Da definição do escalar de Ricci, temos

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \partial_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - g^{\mu\nu} \partial_\mu \delta \Gamma_{\rho\nu}^\rho. \quad (\text{B.5})$$

Os índices da expressão acima podem ser expressados como uma derivada total, de forma

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_\rho W^\rho, \quad (\text{B.6})$$

onde

$$W^\rho \equiv g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu. \quad (\text{B.7})$$

Na ação de Einstein-Hilbert, este termo não irá contribuir para as equações de campo, tendo em vista que ele é um termo de fronteira. Porém, na ação (B.2), este termo encontra-se multiplicado por $f'(R)$ e, logo, não é mais um termo de fronteira. Devemos, então, expressá-lo em termos do tensor métrico.

A variação da conexão é dada por

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}[g^{\sigma\alpha}(\partial_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}\delta g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}\delta g_{\mu\nu})], \quad (\text{B.8})$$

onde utilizamos a compatibilidade métrica, a saber, que $\partial_{\mu}g_{\alpha\beta}$. Contraindo dois dos termos da conexão, temos

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{1}{2}[g^{\nu\alpha}(\partial_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}\delta g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}\delta g_{\mu\nu})], \quad (\text{B.9})$$

onde os dois últimos termos formam um tensor anti-simétrico, e este se anula quando contraído com a métrica. Logo, temos que

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{1}{2}g^{\nu\alpha}\partial_{\mu}\delta g_{\alpha\nu}. \quad (\text{B.10})$$

A conexão, contraída com a métrica, é dada por

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}(g^{\rho\alpha}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} + g^{\rho\alpha}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\delta g_{\mu\alpha} - g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\partial_{\alpha}\delta g_{\mu\nu}). \quad (\text{B.11})$$

Vamos trabalhar melhor o primeiro termo do lado direito de (B.9), de forma que

$$g^{\rho\alpha}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} = g^{\mu\nu}\partial_{\mu}(g^{\rho\alpha}\delta g_{\alpha\nu}) = -g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu}g^{\rho\alpha}), \quad (\text{B.12})$$

onde novamente utilizamos a compatibilidade métrica. De forma análoga, podemos expressar o segundo termo de (B.9), como

$$g^{\rho\alpha}g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\partial_{\nu}(g_{\alpha\mu}\delta g^{\rho\alpha}). \quad (\text{B.13})$$

Rearrmando os termos de (B.9), após um pouco de álgebra, obtemos

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\partial^{\rho}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^{\mu}(g_{\mu\nu}\delta g^{\nu\rho}). \quad (\text{B.14})$$

De forma análoga, rearrumando os termos de (B.11), obtemos

$$g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = -\frac{1}{2}\partial^{\rho}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}). \quad (\text{B.15})$$

Podemos agora expressar o termo de derivada total (B.7), como

$$W^\rho = \partial^\rho(g_{\mu\nu}\delta^{\mu\nu}) - \partial^\mu(g_{\mu\nu}\delta^{\nu\rho}), \quad (\text{B.16})$$

de forma que

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \delta g^{\mu\nu} [g_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho (\sqrt{-g} f'(R)) - g'_{\rho\nu} \partial^\rho \partial_\mu (\sqrt{-g} f'(R))]. \quad (\text{B.17})$$

Assim, a variação total da ação para as teorias $f(R)$, no formalismo métrico, será dada por

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + g_{\mu\nu} \frac{\partial_\rho \partial^\rho}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} f'(R)) - g_{\rho\nu} \frac{\partial_\mu \partial^\rho}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} f'(R)) \right]. \quad (\text{B.18})$$

Desta forma, como a variação na métrica é arbitrária, o integrando tem de ser nulo. Retornando para um referencial arbitrário, encontramos as equações de campo para as teorias $f(R)$ da gravitação, no vácuo, a saber

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = 0. \quad (\text{B.19})$$

BIBLIOGRAFIA

- [ACR79] U. Ascher, J. Christiansen and R. D. Russell, *A Collocation Solver for Mixed Order Systems of Boundary Value Problems*, Math. Comput. **33**(146), 659–679 (1979).
- [AE15] M. Ammon and J. Erdmenger, *Gauge/gravity duality*, Cambridge Univ. Pr., Cambridge, UK, 2015.
- [AMR87] U. Ascher, R. M. M. Mattheij and R. D. Russell, *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [BCS09] E. Berti, V. Cardoso and A. O. Starinets, *Quasinormal modes of black holes and black branes*, Class. Quant. Grav. **26**, 163001 (2009), 0905.2975.
- [BD61] C. Brans and R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. **124**, 925–935 (1961).
- [BD85] D. G. Boulware and S. Deser, *String Generated Gravity Models*, Phys. Rev. Lett. **55**, 2656 (1985).
- [BL00] Y. Brihaye and M. Lubo, *Classical solutions of the gravitating Abelian Higgs model*, Phys. Rev. **D62**, 085004 (2000), hep-th/0004043.
- [Bog76] E. B. Bogomolny, *Stability of Classical Solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976), [Yad. Fiz.24,861(1976)].
- [BSMo8] E. Barausse, T. P. Sotiriou and J. C. Miller, *A No-go theorem for polytropic spheres in Palatini $f(R)$ gravity*, Class. Quant. Grav. **25**, 062001 (2008), gr-qc/0703132.
- [BV89] M. Barriola and A. Vilenkin, *Gravitational Field of a Global Monopole*, Phys. Rev. Lett. **63**, 341 (1989).
- [BW57] D. R. Brill and J. A. Wheeler, *Interaction of neutrinos and gravitational fields*, Rev. Mod. Phys. **29**, 465–479 (1957).
- [Cap02] S. Capozziello, *Curvature quintessence*, Int. J. Mod. Phys. **D11**, 483–492 (2002), gr-qc/0201033.
- [CBdMG11] T. R. P. Carames, E. R. Bezerra de Mello and M. E. X. Guimaraes, *Gravitational Field of a Global Monopole in a Modified Gravity*, Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. **3**, 446–454 (2011), 1106.4033.

- [CDTT04] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, *Is cosmic speed - up due to new gravitational physics?*, Phys. Rev. **D70**, 043528 (2004), astro-ph/0306438.
- [Choo3] H. T. Cho, *Dirac quasinormal modes in Schwarzschild black hole space-times*, Phys. Rev. **D68**, 024003 (2003), gr-qc/0303078.
- [CLV99] M. Christensen, A. L. Larsen and Y. Verbin, *Complete classification of the string - like solutions of the gravitating Abelian Higgs model*, Phys. Rev. **D60**, 125012 (1999), gr-qc/9904049.
- [CSE07] T. Chiba, T. L. Smith and A. L. Erickcek, *Solar System constraints to general $f(R)$ gravity*, Phys. Rev. **D75**, 124014 (2007), astro-ph/0611867.
- [Dir38] P. A. M. Dirac, *New basis for cosmology*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A165**, 199–208 (1938).
- [ESo6] A. L. Erickcek and M. Smith, Tristan L. e Kamionkowski, *Solar System tests do rule out $1/R$ gravity*, Phys. Rev. **D74**, 121501 (2006), astro-ph/0610483.
- [Faro4] V. Faraoni, *Cosmology in scalar-tensor gravity*, Springer, 2004.
- [Filoo] A. Filippov, *The versatile soliton*, 2000.
- [FMo7] Y. Fujii and K. Maeda, *The scalar-tensor theory of gravitation*, Cambridge University Press, 2007.
- [Gar85] D. Garfinkle, *General Relativistic Strings*, Phys. Rev. **D32**, 1323–1329 (1985).
- [GB15] J. P. M. Graça and V. B. Bezerra, *Remarks about the correspondence between $f(R)$ and Brans-Dicke gravity theories*, Mod. Phys. Lett. **A30**(30), 1550156 (2015).
- [GB16] J. P. M. Graça and V. B. Bezerra, *Abelian cosmic string in the extended Starobinsky model of gravity*, (2016), 1601.06706.
- [GJo5] M. Giammatteo and J.-l. Jing, *Dirac quasinormal frequencies in Schwarzschild-AdS space-time*, Phys. Rev. **D71**, 024007 (2005), gr-qc/0403030.
- [God49] K. Godel, *An Example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21**, 447–450 (1949).

- [Got85] J. R. Gott, III, *Gravitational lensing effects of vacuum strings: Exact solutions*, *Astrophys. J.* **288**, 422–427 (1985).
- [Gra16] J. P. M. Graça, *Abelian cosmic string in the Starobinsky model of gravity*, *Class. Quant. Grav.* **33**(5), 055004 (2016), 1510.03905.
- [GVB15] J. P. M. Graça, H. S. Vieira and V. B. Bezerra, *Scalar and spinor quasinormal modes of an $f(R)$ global monopole*, Accepted for publication in *General Relativity and Gravitation* (2015), 1510.07184.
- [HR10] E. Herscovich and M. G. Richarte, *Black holes in Einstein-Gauss-Bonnet gravity with a string cloud background*, *Phys. Lett.* **B689**, 192–200 (2010), 1004.3754.
- [IW87] S. Iyer and C. M. Will, *Black Hole Normal Modes: A WKB Approach. 1. Foundations and Application of a Higher Order WKB Analysis of Potential Barrier Scattering*, *Phys. Rev.* **D35**, 3621 (1987).
- [Jino04] J.-l. Jing, *Dirac quasinormal modes of the Reissner-Nordstrom de Sitter black hole*, *Phys. Rev.* **D69**, 084009 (2004), gr-qc/0312079.
- [Kib76] T. W. B. Kibble, *Topology of Cosmic Domains and Strings*, *J. Phys.* **A9**, 1387–1398 (1976).
- [Kon03] R. A. Konoplya, *Quasinormal behavior of the d -dimensional Schwarzschild black hole and higher order WKB approach*, *Phys. Rev.* **D68**, 024018 (2003), gr-qc/0303052.
- [KZo8] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, *(In)stability of D -dimensional black holes in Gauss-Bonnet theory*, *Phys. Rev.* **D77**, 104004 (2008), 0802.0267.
- [Let79] P. S. Letelier, *Clouds of strings in general relativity*, *Phys. Rev.* **D20**, 1294–1302 (1979).
- [LGFN15] F. B. Lustosa, M. E. X. Guimarães, C. N. Ferreira and J. L. Neto, *Thermodynamical Analysis of a Black Hole with a Global Monopole Within a Class of a $f(R)$ Gravity*, (2015), 1510.08176.
- [Lin86] B. Linet, *The static, cylindrically symmetric strings in general relativity with cosmological constant*, *J. Math. Phys.* **27**, 1817–1818 (1986).
- [Lov71] D. Lovelock, *The Einstein tensor and its generalizations*, *J. Math. Phys.* **12**, 498–501 (1971).

- [MGVB16] J. P. Morais Graça, H. S. Vieira and V. B. Bezerra, *Scalar and spinor QNMs of a black hole with a global monopole in $f(R)$ gravity*, Gen. Rel. Grav. **48**(4), 38 (2016), 1510.07184.
- [Nas15] H. Nastase, *Introduction to the ADS/CFT Correspondence*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [NO73] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Vortex Line Models for Dual Strings*, Nucl. Phys. **B61**, 45–61 (1973).
- [NO03] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: Unification of the inflation and of the cosmic acceleration*, Phys. Rev. **D68**, 123512 (2003), hep-th/0307288.
- [NOSG09] S. Nojiri, S. D. Odintsov and D. Saez-Gomez, *Cosmological reconstruction of realistic modified $F(R)$ gravities*, Phys. Lett. **B681**, 74–80 (2009), 0908.1269.
- [Planck14] P. A. R. Ade and outros (Planck Collaboration), *Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation*, Astron. Astrophys. **571**, A22 (2014), 1303.5082.
- [Pol74] A. M. Polyakov, *Particle Spectrum in the Quantum Field Theory*, JETP Lett. **20**, 194–195 (1974), [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.20,430(1974)].
- [PS75] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, *An Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35**, 760–762 (1975).
- [Rub02] V. A. Rubakov, *Classical theory of gauge fields*, 2002.
- [Scho6] H.-J. Schmidt, *Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology*, eConf **C0602061**, 12 (2006), gr-qc/0602017, [Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.4,209(2007)].
- [SF10] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *$f(R)$ Theories Of Gravity*, Rev. Mod. Phys. **82**, 451–497 (2010), 0805.1726.
- [Shi12] M. Shifman, *Advanced topics in quantum field theory.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2012.
- [Sta80] A. A. Starobinsky, *A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity*, Phys. Lett. **B91**, 99–102 (1980).
- [Ste77] K. S. Stelle, *Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity*, Phys. Rev. **D16**, 953–969 (1977).

- [SW85] B. F. Schutz and C. M. Will, *BLACK HOLE NORMAL MODES: A SEMIANALYTIC APPROACH*, *Astrophys. J.* **291**, L33–L36 (1985).
- [SZ11] L. Sebastiani and S. Zerbini, *Static Spherically Symmetric Solutions in $F(R)$ Gravity*, *Eur. Phys. J.* **C71**, 1591 (2011), 1012.5230.
- [tH74] G. 't Hooft, *Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories*, *Nucl. Phys.* **B79**, 276–284 (1974).
- [Vil81] A. Vilenkin, *Gravitational Field of Vacuum Domain Walls and Strings*, *Phys. Rev.* **D23**, 852–857 (1981).
- [Vil94] A. Vilenkin, *Topological inflation*, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3137–3140 (1994), hep-th/9402085.
- [VNWP76] P. Van Nieuwenhuizen, D. Wilkinson and M. J. Perry, *On a Regular Solution of 't Hooft's Magnetic Monopole Model in Curved Space*, *Phys. Rev.* **D13**, 778 (1976).
- [VS00] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, 2000.
- [Wil93] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1993) 380 p, 1993.
- [Wil96] C. M. Will, *Einstein estava certo?*, Editora da UNB (1996) 280 p, 1996.
- [Zum86] B. Zumino, *Gravity Theories in More Than Four-Dimensions*, *Phys. Rept.* **137**, 109 (1986).