



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE ENERGIAS ALTERNATIVAS E RENOVÁVEIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENERGIAS RENOVÁVEIS**

**GUSTAVO ELIA ASSAD**

**ANÁLISE HÍBRIDA DA INTERAÇÃO MÚTUA ESCOAMENTO/CAMPO  
MAGNÉTICO NA REGIÃO DE ENTRADA DE UM CANAL DE PLACAS  
PARALELAS**

**JOÃO PESSOA – PB**

**2016**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE ENERGIAS ALTERNATIVAS E RENOVÁVEIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENERGIAS RENOVÁVEIS**

**GUSTAVO ELIA ASSAD**

**ANÁLISE HÍBRIDA DA INTERAÇÃO MÚTUA ESCOAMENTO/CAMPO  
MAGNÉTICO NA REGIÃO DE ENTRADA DE UM CANAL DE PLACAS  
PARALELAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal da Paraíba, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Energias Renováveis do Centro de Energias Alternativas e Renováveis, área de concentração em Energias Renováveis, para a obtenção do título de Mestre.

**Orientador:** Prof. Dr. João Alves de Lima

**Área de concentração:** Sistemas de Energias Renováveis

**JOÃO PESSOA - PB**

**2016**

A844a Assad, Gustavo Elia.

Análise híbrida da interação mútua escoamento/campo magnético na região de entrada de uma canal de placas paralelas / Gustavo Elia Assad.- João Pessoa, 2016.

165f. : il.

Orientador: João Alves de Lima

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CEAR

1. Energias renováveis. 2. Magnetohidrodinâmica (MHD).  
3. Equações de Navier-Stokes. 4. Transformação Integral Generalizada (GITT). 5. Placas paralelas.

UFPB/BC

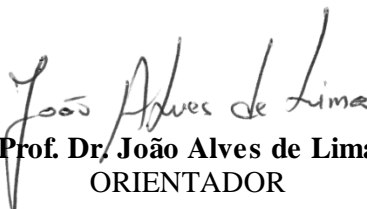
CDU: 620.91(043)


GUSTAVO ELIA ASSAD

**ANÁLISE HÍBRIDA DA INTERAÇÃO MÚTUA ESCOAMENTO/CAMPO  
MAGNÉTICO NA REGIÃO DE ENTRADA DE UM CANAL DE PLACAS  
PARALELAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal da Paraíba, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Energias Renováveis do Centro de Energias Alternativas e Renováveis, área de concentração em Energias Renováveis, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 25 de Agosto de 2016.

  
**Prof. Dr. João Alves de Lima**  
ORIENTADOR

  
Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho  
Examinador Externo

  
Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma  
Examinador Externo

  
Prof. Dr. Zaqueu Ernesto da Silva  
Examinador Interno

  
Prof. Dr. José Mauricio Alves de Matos Gurgel  
Examinador Interno

Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma

UFPA

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

UFPB

Prof. Dr. Zaqueu Ernesto da Silva

UFPB

Prof. Dr. José Mauricio Alves de Matos Gurgel

UFPB

Dedico este trabalho aos meus amados e onipresentes pais, Mário José Delgado Assad (*in memoriam*) e Margarida Maria Elia Assad, pelo belíssimo e inspirador legado que, em eterna construção, foi e ainda é passado com afincos a mim e a meus irmãos, Rodrigo e André Elia Assad, grandes companheiros de luta e vida. A razão deste trabalho existir está na minha família, minha esposa e incentivadora Fabiane Campos Assad, aguerrida e inigualável mulher, que me presenteou com o Santo Graal da minha vida, Gabriela e João Pedro Campos Assad, meus filhos!

## AGRADECIMENTOS

O ato de agradecer parece simples, faz bem ao corpo e à mente, mas não é, de fato, tão simples assim. O agradecimento só faz sentido quando meritório e é preciso fazê-lo sem que deixes dúvidas.

Gostaria, portanto, de iniciar agradecendo ao meu orientador, Prof. Dr. João Alves de Lima, pelo acompanhamento e franca disponibilidade que sempre foram características inerentes a ele e admiradas por mim. Sempre tivemos boas discussões e foi através delas, que me iniciei, quase como um ato de serendipismo, na magnífica magnetohidrodinâmica e em suas soluções não tão triviais. É fácil guardar na memória uma pessoa assim: com um humor ímpar associado a um imenso conhecimento determinante para meu aprendizado na área e para a conclusão deste trabalho. Então, professor, muito obrigado pelos ensinamentos e pelas agradáveis tardes de ciência. Nunca as esquecerei!

Meus agradecimentos também se voltam para o Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho, um grande físico, um grande professor, uma pessoa admirável pela tranquilidade e sabedoria com que ensina e que tanto tem suprido a falta de um “presidente” (é assim que ele se refere a um grande amigo em comum, em projetos vinculados às minhas origens junto à tão preciosa Física). Faz-me ver, a todo encontro, que não deve existir solipsismo científico. A Física deve ser compartilhada e a verdade nunca está em um só. Obrigado, *il professore!*

Como sou professor, não posso deixar de agradecer aos excelentes colegas que me acompanharam nesta longa história da sala de aula e que sabem que é ensinando que se aprende. À sala de aula, aos meus alunos, aos meus amigos, aos professores... meu muito obrigado!

### **Ao meu pai:**

Querido pai, este trabalho deve ser e é endereçado a você! Não sou capaz de expressar com palavras, nem que consiga ser um “Silverinha”, o quanto fico feliz, em saber inexoravelmente, que todas as minhas, ainda poucas, realizações científicas são ligadas a você! O quão você é lembrado nos momentos de produção! Você faz com que os trabalhos tenham um sentimento puro e suas as velhas palavras “se vai fazer, então faça direito”, pulsam, como aquele eterno universo, incansavelmente em minha mente. Vejo-o em tudo, em todo lugar, como um gás perfumado que se expande ocupando todos os espaços. Você está nas linhas e entrelinhas desta dissertação. Não estarei nunca acima de você, nunca abaixo de você, estarei sim, como combinamos, sempre ao seu lado.

Obrigado por tudo, pai!

A cada dia que vivo, mais me convenço de que o desperdício da vida está no amor que não damos, nas forças que não usamos, na prudência egoísta que nada arrisca e que, esquivando-nos do sofrimento, perdemos também a felicidade.

**Carlos Drummond de Andrade**

# Resumo

O objetivo do presente trabalho trata da análise da interação mútua escoamento/campo magnético que se desenvolve no interior de um canal de placas planas e paralelas ao se aplicar um campo magnético externo transversal. O fluido, eletricamente condutor, entra no canal sob um perfil qualquer de velocidade, e terá seu desenvolvimento natural afetado pelo campo magnético aplicado. Com uma interação acoplada de duas vias, o campo também será afetado pelo escoamento. O estudo dessas interações será efetuado a partir de uma formulação bidimensional das equações de Navier-Stokes, na formulação em função corrente, para escoamento em regime permanente, acoplada à equação de transporte do campo magnético. A solução das equações governantes será obtida através da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Os resultados obtidos para o campo de velocidade e campo magnético, bem como suas funções escalares associadas, são produzidos e comparados aos da literatura em função dos principais parâmetros de governo: número de Reynolds ( $Re$ ), número de Reynolds magnético ( $Re_m$ ) e número de Hartmann ( $Ha$ ). Com o objetivo de ilustrar a consistência da técnica da transformada integral generalizada, análises de convergência são também efetuadas e apresentadas.

**Palavras-chave:** Energias Renováveis, Magnetohidrodinâmica (MHD), Equações de Navier-Stokes, Transformação Integral Generalizada (GITT), Placas Paralelas.

# Abstract

The aim of this work deals with the analysis of the mutual interaction between flow and magnetic fields that develops in a parallel-plate channel as soon as an external magnetic field is applied transversely to the plates. The fluid, electrically conductive, enters the channel under any velocity profile and will have its natural development within the channel changed by the applied magnetic field. With a coupled two-way interaction, the field will also be affected by the flow. The study of these interactions will be made from the two-dimensional version of the steady-state Navier-Stokes equations in the stream function formulation, coupled with the transport equation of the magnetic field. The solution of the governing equations will be obtained by the Generalized Integral Transform Technique (GITT). The results obtained for the velocity field, magnetic field and temperature field, as well as the associated scalar functions, are produced and compared with the literature on the basis of the main parameters of government: Reynolds number ( $Re$ ), magnetic Reynolds number ( $Re_m$ ) and Hartmann number ( $Ha$ ). In order to illustrate the consistency of the generalized integral transform technique, convergence analysis, are also performed and presented.

**Keywords:** Renewable Energy, Magnetohydrodynamics (MHD), Navier-Stokes Equations, Integral Transforms (GITT), Parallel-Plate Channels.

# Lista de Figuras

## CAPÍTULO I

- Figura 1.1 Deflexão de um elétron no interior de um campo magnético mostrando o retardo  $\Delta x$  causado pelo efeito Hall. Fonte: elaborada pelo autor. 26

## CAPÍTULO II

- Figura 2.1 Esquema de uma bomba eletromagnética, indicando a força de Lorentz  $F = (J \times B)$  no sentido do escoamento. Fonte: DAVIDSON (2001). 33
- Figura 2.2 Situação em que a força elétrica se iguala à força magnética estabelecendo uma tensão constante transversal ao escoamento. Fonte: elaborada pelo autor. 33
- Figura 2.3 Um medidor de vazão Hall, com campo magnético vertical gerado por um eletroímã e os eletrodos laterais, ligados a um milivoltímetro, medindo a tensão Hall. Fonte: <http://www.mecatronicsatual.com.br>. Acesso em 24/05/2016. 34
- Figura 2.4 A corrente induzida no plasma sofre ação do campo gerado pela corrente no solenoide e a força magnética atua no sentido de confinar o plasma no centro e afastá-lo da parede do reator. Fonte: DAVIDSON (2001). 35
- Figura 2.5 Campo magnético agitando um fluido condutor por rotação. Fonte: elaborada pelo autor. 35
- Figura 2.6 Agitação de um líquido através da interação entre uma pequena barra colocada em seu interior e um campo magnético rotativo em sua base. Fonte: elaborada pelo autor. 36
- Figura 2.7 Imagem de um cilindro metálico sendo aquecido por indução. Fonte: <http://www.grefortec.com.br>. Acesso em 24/05/2016. 36
- Figura 2.8 Levitação magnética de uma gota onde  $i$  e  $i'$  representam, respectivamente, as correntes alternadas na gota e na bobina. Fonte: elaborada pelo autor. 37

Figura 2.9	Esquema simplificado de funcionamento de uma válvula de indução eletromagnética. Fonte: DAVIDSON, 2001.	37
Figura 2.10	Gerador eletromagnético na condição de que $E=0$ . Fonte: DAVIDSON (2001).	39
Figura 2.11	Corrente de portadores de carga positiva através de uma seção reta de área $A$ de um condutor. Fonte: YOUNG e FREEDMAN (2009).	40
Figura 2.12	Trajectoria genérica que engloba o fio reto e longo para integração do campo $B$ produzido por uma corrente saindo do plano da página. Fonte: YOUNG e FREEDMAN (2009).	41
Figura 2.13	A integral de linha do campo magnético total é igual a $\mu_0$ vezes a soma algébrica das correntes. $I_1$ e $I_3$ são positivas e $I_2$ , negativa. Fonte: YOUNG e FREEDMAN (2009).	42
Figura 2.14	Distribuição de corrente que atravessa uma superfície $S$ , mostrando o vetor normal $dS$ formando um ângulo $\theta$ com a densidade de corrente $J$ . Fonte: elaborada pelo autor	42
Figura 2.15	Elementos de fluxo: o vetor normal $dA$ que representa um elemento de área e o vetor campo $B$ que forma um ângulo $\theta$ com a normal. O fluxo neste elemento é dado por $d\phi=B.dA.cos\theta$ . Fonte: elaborada pelo autor.	43
Figura 2.16	Diagrama de forças sobre a barra em movimento no interior de um campo magnético e a corrente elétrica gerada pelo campo elétrico induzido no circuito. Fonte: elaborada pelo autor.	44
Figura 2.17	(a) Fio em repouso percorrido por corrente; (b) Fio em movimento percorrido por corrente, indicando-se a lei de Ohm para um referencial em movimento com o fio. Fonte: DAVIDSON (2001).	48
Figura 2.18	Aceleração de um elemento de fluido em um escoamento permanente. Fonte: DAVIDSON (2001).	50
Figura 2.19	(a) Campos independentes, não superpostos, do fio e da região; (b) Superposição de campos, indicando o adensamento de linhas à esquerda com conseqüente aumento de pressão magnética e geração de força, devido à tensão magnética, para direita. Fonte: DAVIDSON (2001).	51

Figura 2.20	A corrente através de $S_1$ é $I$ e de $S_2$ é nula. Exemplificando a inconsistência na lei de Ampère para correntes descontínuas. Fonte: YOUNG e FREEDMAN (2009).	52
Figura 2.21	Para $Re_m \gg 1$ , as linhas de campo parecem com elásticos arrastados pelo movimento e mantendo o fluxo magnético constante no interior da espira. Fonte: DAVIDSON (2001).	57
Figura 2.22	Uma onda de Alfvén com amplitude $n$ , propagando-se com velocidade $v_a$ em um campo $B$ . Fonte: DAVIDSON (2001).	58

#### CAPÍTULO IV

Figura 4.1	Desenho esquemático ilustrando o escoamento do fluido condutor no interior de um canal retangular de placas paralelas, sendo duas condutoras e duas isolantes, submetido a um campo magnético externo, $B_0^*$ . Fonte: elaborada pelo autor.	71
Figura 4.2	Desenho esquemático da região sob estudo (plano central do canal retangular) e condições de contorno. Fonte: elaborada pelo autor.	73
Figura 4.3	Canal de escoamento, em uma situação arbitrária, com placas condutoras laterais ligadas aos terminais de um voltímetro, para aferição de tensão, ou ligadas aos terminais de uma fonte de tensão variável que pode impor campos elétricos no interior do escoamento, contra ou a favor do eixo $z$ . Posições da chave Ch: A-Bomba, B-Gerador, C-Medidor de vazão. Fonte: elaborada pelo autor.	80

#### CAPÍTULO VI

Figura 6.1	Desenvolvimento do perfil da componente longitudinal da velocidade, para $Ha = 0$ e $Re = 20$ .	112
Figura 6.2	Desenvolvimento do perfil da componente longitudinal da velocidade, para $Ha = 0$ e $Re = 500$ .	112
Figura 6.3	Desenvolvimento do perfil da componente longitudinal da velocidade, para $Ha = 20$ , $Re = 20$ e $Re_m = 10^{-4}$ .	113
Figura 6.4	Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade ao longo da linha central do canal para $Re = 20$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diversos valores de $Ha$ . A curva tracejada é para $Re = 20$ , $Ha = 2$ e $Re_m = 50$ . A curva de traço-ponto é para $Re = 200$ , $Ha = 2$ e $Re_m = 1$ .	114
Figura 6.5	Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade ao longo da linha central do canal para $Re = 20$ , $Ha = 2$ e diversos valores de $Re_m$ . A curva que marca $Re_m \rightarrow \infty$ é para $Ha = 0$ .	115

Figura 6.6	Figura que mostra a convergência para um único valor de $u_c$ , para diversos valores do número de Reynolds magnético, indicando que se o $Re_m$ cresce, o ponto de convergência se distancia da entrada do canal.	115
Figura 6.7	Desenvolvimento da função escalar magnética (normalizada por $Re_m$ ) na linha central do canal. As linhas cheias são para $Re = 20$ , $Ha = 2$ e diversos valores de $Re_m$ . A linha tracejada é para $Re = 200$ , $Ha = 2$ e $Re_m = 1$ .	116
Figura 6.8	Desenvolvimento do perfil da componente longitudinal da velocidade, para $Ha = 0$ , $Re = 20$ e $Re = 500$ .	117
Figura 6.9	Densidade de corrente nula para diversos valores da posição ao longo do canal, no caso em que $Ha = 0$ .	118
Figura 6.10	Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para $Ha = 2$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Re$ .	119
Figura 6.11	Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para $Ha = 2$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Re$ .	120
Figura 6.12	Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para $Ha = 2$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Re$ .	120
Figura 6.13	Desenvolvimento da componente vertical de velocidade, para $Ha = 2$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Re$ .	120
Figura 6.14	Desenvolvimento da densidade de corrente, para $Ha = 2$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Re$ .	121
Figura 6.15	Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para $Ha = 2$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Re$ .	121
Figura 6.16	Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para $Ha = 2$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Re$ .	121
Figura 6.17	Desenvolvimento da componente longitudinal de velocidade, para $Re = 20$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Ha$ .	122
Figura 6.18	Desenvolvimento da componente vertical velocidade, para $Re = 20$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Ha$ .	123
Figura 6.19	Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para $Re = 20$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Ha$ .	123

Figura 6.20	Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para $Re = 20$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Ha$ .	123
Figura 6.21	Desenvolvimento da densidade de corrente, para $Re = 20$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Ha$ .	124
Figura 6.22	Desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para $Re = 20$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Ha$ .	124
Figura 6.23	Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para $Re = 20$ , $Re_m = 10^{-4}$ e diferentes $Ha$ .	125
Figura 6.24	Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para $Re = 20$ , $Re_m = 50$ e diferentes $Ha$ .	126
Figura 6.25	Desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Re = 20$ , $Re_m = 50$ e diferentes $Ha$ .	126
Figura 6.26	Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para $Re = 20$ , $Re_m = 50$ e diferentes $Ha$ .	127
Figura 6.27	Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para $Re = 20$ , $Re_m = 50$ e diferentes $Ha$ .	127
Figura 6.28	Desenvolvimento da densidade de corrente, para $Re = 20$ , $Re_m = 50$ e diferentes $Ha$ .	128
Figura 6.29	Desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para $Re = 20$ , $Re_m = 50$ e diferentes $Ha$ .	129
Figura 6.30	Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para $Re = 20$ , $Re_m = 50$ e diferentes $Ha$ .	129
Figura 6.31	Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para $Re = 20$ , $Ha = 2$ e diferentes $Re_m$ .	130
Figura 6.32	Desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Re = 20$ , $Ha = 2$ e diferentes $Re_m$ .	130
Figura 6.33	Influência do número de Reynolds magnético, para baixos $Ha$ , sobre as linhas de campo magnético, mostradas através da função escalar magnética ( $\beta$ ). ( $Re = 20$ , $Ha = 2$ e diferentes $Re_m$ )	131

Figura 6.34	Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético ( $B_1$ ) ao longo do canal, confirmando o comportamento da função magnética ( $\beta$ ).	131
Figura 6.35	Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético ( $B_2$ ) ao longo do canal, indicando que este valor sofre variações positivas e negativas em linhas verticais e tende, para posições distantes da entrada do canal, a se estabelecer em $B_2 = Ha = 2$ .	132
Figura 6.36	Desenvolvimento da densidade de corrente ao longo do canal, mostrando dupla inversão de sentido na variação de $y=0$ até $y=1$ , para o escoamento completamente desenvolvido.	133
Figura 6.37	Desenvolvimento da componente longitudinal da força de Lorentz volumétrica, para $Re = 20$ , $Ha = 2$ e diversos $Re_m$ .	133
Figura 6.38	Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz volumétrica, para $Re = 20$ , $Ha = 2$ e diversos $Re_m$ .	134
Figura 6.39	Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para $Re = 20$ , $Ha = 20$ e diferentes $Re_m$ .	135
Figura 6.40	Desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Re = 20$ , $Ha = 20$ e diferentes $Re_m$ .	135
Figura 6.41	Influência do número de Reynolds magnético, para altos $Ha$ , sobre as linhas de campo magnético, mostradas através da função escalar magnética ( $\beta$ ). ( $Re = 20$ , $Ha = 20$ e diferentes $Re_m$ ).	136
Figura 6.42	Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para $Re = 20$ , $Ha = 20$ e diferentes $Re_m$ .	136
Figura 6.43	Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para $Re = 20$ , $Ha = 20$ e diferentes $Re_m$ .	136
Figura 6.44	Desenvolvimento da densidade de corrente, para $Re = 20$ , $Ha = 20$ e diferentes $Re_m$ .	137
Figura 6.45	Desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para $Re = 20$ , $Ha = 20$ e diferentes $Re_m$ .	138
Figura 6.46	Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para $Re = 20$ , $Ha = 20$ e diferentes $Re_m$ .	138

# Lista de Tabelas

## CAPÍTULO II

Tabela 2.1	Equações de Maxwell	54
Tabela 2.2	Resumo das Equações do Eletromagnetismo aplicadas à MHD	56
Tabela 3.3	Parâmetros Básicos em MHD	56

## CAPÍTULO V

Tabela 5.1	Transformação do sistema de 4ª ordem para 1ª ordem.	102
------------	---	-----

## CAPÍTULO VI

Tabela 6.1	Análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para $Re = 20$ , $Ha = 2$ , $Ez = -Ha$ e diferentes valores de Reynolds magnético ( $Re_m = 10^{-4}$ , 1 e 50).	108
Tabela 6.2	Análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para $Re = 20$ , $Ha = 20$ , $Ez = -Ha$ e diferentes valores de Reynolds magnético ( $Re_m = 10^{-4}$ , 1 e 50).	109
Tabela 6.3	Comprimento de entrada hidrodinâmica, $x_\infty$ , para várias situações de escoamento.	111

# Lista de Siglas e Abreviaturas

AVCO	Acrônimo da expressão em inglês <i>Aviation Corporation</i>
BVPFD	Subrotina do IMSL para avaliação de sistemas de EDOs do tipo valor de contorno
EDO	Acrônimo de Equação Diferencial Ordinária
EPA	Agência de Proteção Ambiental dos Estados Unidos (acrônimo da expressão em inglês <i>Environmental Protection Agency</i> )
<i>fem</i>	Força eletromotriz
GITT	Técnica da Transformada Integral Generalizada (acrônimo da expressão em inglês <i>Generalized Integral Transform Technique</i> )
IMSL	Biblioteca numérica do Fortran (acrônimo para o nome em inglês <i>International Mathematical and Statistical Library</i> )
MHD	Magnetohidrodinâmica
N-S	Navier-Stokes
QDAGS	Subrotina do IMSL para avaliação de integrais por quadratura gaussiana
TOKAMAK	Câmara Toroidal Magnética (acrônimo para o nome do dispositivo Russo <i>toroidal'naya kamera s magnitnymi katushkami</i> )
ZBREN	Subrotina do IMSL para obtenção de raízes de equações transcendentais

# Lista de Símbolos

## CAPÍTULO I

$\Delta x$  Retardo do elétron na direção x

## CAPÍTULO II

$\vec{F}$  Força magnética de propulsão da bomba eletromagnética

$\vec{J}$  Vetor densidade de corrente

$\vec{B}$  Vetor campo magnético

$\vec{F}_e$  Vetor força elétrica

$\vec{F}_m$  Vetor força magnética

$\vec{E}$  Vetor campo elétrico

e Carga elementar

L Largura característica

$\vec{v}, \vec{V}$  ou  $\vec{u}$  Vetor velocidade

ds Deslocamento escalar infinitesimal

dt Intervalo infinitesimal de tempo

dV Elemento infinitesimal de volume

A Área de seção reta

P Peso do corpo

N Polo Norte magnético de um ímã

S Polo Sul magnético de um ímã

dq ou dQ Elemento infinitesimal de carga

dP Diferencial da pressão

I ou i Intensidade de corrente elétrica

n Densidade de cargas livres

$v_a$  Velocidade de arraste

d $\ell$  Elemento infinitesimal de comprimento de uma curva amperiana

dA Elemento infinitesimal de área

$\vec{F}_{motora}$	Força externa motora sobre uma barra condutora
$\vec{F}_{elétrica}$	Força elétrica gerada ao longo da barra devido à <i>fem</i>
$\vec{F}_y$	Componente vertical da força magnética sobre a barra
$\vec{F}_x$	Componente horizontal da força magnética sobre a barra
$d\vec{s}$	Deslocamento vetorial infinitesimal
$W_{mag}$	Trabalho realizado pela força magnética sobre a barra
Pot	Potência de geração de energia elétrica
$q$	Carga elétrica qualquer
$\vec{E}_r$	Campo elétrico efetivo
$I_d$	Corrente de deslocamento de Maxwell
$N_m$	Parâmetro de interação magnética
$\ell$	Comprimento característico
$\vec{F}_V$	Força de Lorentz por unidade de volume
Rem	Número de Reynolds magnético
Re	Número de Reynolds
$V_{alf}$	Velocidade de Alfvén
T	Tensão magnética
$Ha$	Número de Hartmann
$E_{Sistema}$	Energia total do sistema
$\dot{E}_{entrada}$	Taxa de energia que entra no sistema
$\dot{E}_{saída}$	Taxa de energia que sai do sistema

## CAPÍTULO IV <sup>1</sup>

$\vec{B}_0 = \vec{B}_{Ext}$	Vetor campo magnético externo
$x, y e z$	Coordenadas espaciais
$h$	Altura do canal
$w$	Largura do canal
$\vec{V}$	Vetor velocidade
$\vec{B}_{ind}$	Campo magnético induzido
$\vec{B}_1 e \vec{B}_2$	Componentes horizontal e vertical do campo resultante
$P$	Campo de pressão
$u(x, y)$	Componente da velocidade do fluido ao longo canal, na direção x
$v(x, y)$	Componente da velocidade do fluido transversal ao canal, na direção y
$\vec{U}_e$	Velocidade média do fluido na entrada do canal
$p_e$	Pressão média sobre o fluido na entrada do canal
$b_0$	Termo com dimensão de campo de indução magnética, fundamental no processo de adimensionalização

## CAPÍTULO V

$\tilde{Y}_i(y)$	Autofunção autonormalizada relacionada ao campo de função corrente
$\tilde{H}_i(y)$	Autofunção autonormalizada relacionada ao campo de função magnética
$g_{e,\infty}(y)$	Função corrente para entrada ou saída do canal
$h_{e,\infty}(y)$	Função magnética para entrada ou saída do canal
$N_i$	Norma associada a autofunções do campo de função corrente
$M_i$	Norma associada a autofunções do campo de função magnética
$\underline{X}(\eta)$	Vetor utilizado na rotina BVPFD (supracitada)

---

<sup>1</sup> As variáveis que apresentam o sobrescrito “\*” estão na forma dimensional e, quando não apresentam, estão na forma dimensional.

# Letras Gregas

## CAPÍTULO I

$\theta$  Ângulo de deflexão de um elétron no efeito Hall

## CAPÍTULO II

$\varepsilon$  Força eletromotriz

$\pi$  Número *pi*

$\varphi$  Vazão

$\sigma$  Condutividade elétrica do meio

$\rho$  Resistividade elétrica do meio ou densidade de cargas

$\mu_0$  Permeabilidade magnética do meio (vácuo)

$\phi$  Fluxo do campo magnético

$\varepsilon_0$  Permissividade elétrica do meio (vácuo)

$\tau_m$  Tempo de amortecimento magnético

$\rho$  Massa específica do fluido

$\lambda_m$  Difusividade magnética

$\nu$  Viscosidade cinemática

$\mu$  Viscosidade absoluta ou dinâmica

## CAPÍTULO V

$\psi$  Função escalar para o campo de velocidade, função corrente

$\beta$  Função escalar para o campo magnético, função magnética

$\psi_F(y)$  Campo de função corrente filtrado

$\beta_F(y;x)$  Campo de função magnética filtrado

$\mu_i$  Autovalor associado ao campo de função corrente

$\alpha_i$  Autovalor associado ao campo de função magnética

# Sumário

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>25</b>
1.1. INTRODUÇÃO AO TEMA.....	25
1.2. OBJETIVOS.....	27
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>30</b>
2.1. BREVE HISTÓRICO DE MHD.....	30
2.2. ALGUMAS APLICAÇÕES DA MHD.....	33
2.2.1. BOMBA ELETROMAGNÉTICA.....	33
2.2.2. MEDIDOR DE VAZÃO.....	33
2.2.3. CONFINAMENTO DE PLASMA.....	34
2.2.4. AGITADOR ELETROMAGNÉTICO.....	35
2.2.5. AQUECIMENTO ELETROMAGNÉTICO.....	36
2.2.6. LEVITAÇÃO ELETROMAGNÉTICA.....	36
2.2.7. VÁLVULA ELETROMAGNÉTICA.....	37
2.2.7. GERADOR ELETROMAGNÉTICO.....	37
2.3. CONCEITOS BÁSICOS.....	40
2.3.1. LEIS E CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO ELETROMAGNETISMO.....	40
2.3.1.1. A lei de Ohm e a condutividade elétrica.....	40
2.3.1.2. A lei de Ampère.....	41
2.3.1.3. A lei de Faraday.....	43
2.3.1.4. A força de Lorentz volumétrica.....	47
2.3.1.5. Pressão e tensão magnéticas.....	49
2.3.1.6. Equações de Maxwell e a corrente de deslocamento.....	52
2.3.1.7. Conservação da carga.....	55
2.3.2. PARÂMETROS FUNDAMENTAIS EM MHD.....	56
2.3.3. EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DO CAMPO MAGNÉTICO.....	59
2.3.4. EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES.....	60
<b>3. REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	<b>63</b>
3.1. MAGNETOHIDRODINÂMICA EM CANAIS.....	63
3.2. TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA.....	66
<b>4. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b> .....	<b>71</b>
4.1. MODELAGEM MATEMÁTICA.....	71
4.2. ADIMENSIONALIZAÇÃO E GRUPOS ADIMENSIONAIS.....	76
<b>5. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO</b> .....	<b>84</b>
5.1. FORMULAÇÃO EM FUNÇÕES ESCALARES.....	84
5.2. FILTRAGEM DOS CAMPOS.....	89

5.3. APLICAÇÃO DA GITT NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	91
5.3.1. PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O CAMPO DE FUNÇÃO CORRENTE ..	91
5.3.2. PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O CAMPO DA FUNÇÃO MAGNÉTICA	93
5.4. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA.....	95
5.4.1. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO DE VELOCIDADE .....	95
5.4.3. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO MAGNÉTICO .....	97
5.5. ALGORITMO COMPUTACIONAL.....	99
<b>6. RESULTADOS .....</b>	<b>106</b>
6.1. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA.....	106
6.2. COMPARAÇÃO COM OUTROS RESULTADOS .....	110
6.3. ANÁLISE DO ACOPLAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO.....	117
<b>7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>140</b>
7.1. CONCLUSÕES.....	140
7.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	142
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>143</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>149</b>
A – REGIÃO DE CAMPOS COMPLETAMENTE DESENVOLVIDOS.....	150
A.1. CAMPO MAGNÉTICO .....	150
A.2. CAMPO DE ESCOAMENTO.....	152
B – PRINCIPAIS PARÂMETROS DE COMPARAÇÃO .....	158
B.1. FATOR DE ATRITO LOCAL (FATOR DE ATRITO DE FANNING) - $f_x$ .....	158
B.2. FATOR DE ATRITO MÉDIO - $f_{xm}$ .....	159
C – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O CAMPO MAGNÉTICO.....	160

# **CAPÍTULO I**

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. INTRODUÇÃO AO TEMA

A magnetohidrodinâmica ou MHD é a área da ciência que estuda a interação entre o escoamento de fluidos condutores elétricos e campos magnéticos preestabelecidos na região do escoamento. Matematicamente, ela busca soluções para as equações da eletrodinâmica acopladas às equações da mecânica dos fluidos para interações macroscópicas e tipicamente lentas entre o campo magnético imposto e o escoamento. Isto posto assim, despreza-se a corrente de deslocamento de Maxwell e o acoplamento das equações se dá através da densidade de corrente e da lei de Ohm generalizada. As equações da MHD desprezam correções relativísticas, efeitos quânticos, conservam massa, energia e quantidade de movimento.

Quando um fluido condutor, sem movimento, por exemplo, está submetido a um fluxo de campo magnético variável, é gerada uma corrente induzida no fluido e, conseqüentemente, um campo magnético induzido. Estes campos, indutor e induzido, interagem entre si alterando o gradiente de pressão do fluido, que é matematicamente descrito pelo produto vetorial entre o vetor densidade de corrente elétrica e o vetor densidade de campo magnético indutor. Não obstante, se o fluido escoar, por exemplo, perpendicularmente<sup>2</sup> a um campo magnetostático, elétrons e íons podem ser defletidos transversalmente ao escoamento. Como a massa (a inércia) dos elétrons é muito menor que a dos íons, despreza-se o deslocamento dos íons frente aos dos elétrons, a velocidade de difusão dos elétrons é muito maior que a dos íons e a densidade da corrente elétrica é determinada, principalmente, pela difusão dos elétrons. Somente se o fluido estivesse submetido a um campo magnético muito intenso, a difusão dos íons não poderia ser negligenciada. Se o fluido condutor é um plasma, não apresenta íons, e só se pode considerar a deflexão de prótons e elétrons que estariam, em altíssimas temperaturas, tão distantes entre si, ao ponto de serem considerados como partículas independentes. Obviamente a difusão de elétrons ainda será mais evidente que a de prótons, devido à disparidade mássica entre eles. Se a substância é iônica (salina), de tal sorte que esteja no estado líquido ou dissolvida em solventes polares (normalmente água), só se pode considerar a deflexão de íons, cátions ou ânions da substância (ATKINS, 2002).

---

<sup>2</sup> O campo magnético pode não ser necessariamente perpendicular ao escoamento. Na configuração de ortogonalidade, as interações magnéticas com o escoamento têm intensidade máxima.

Deste ponto, desprezando-se o deslocamento de íons e prótons, com a deflexão dos elétrons pelo campo magnético perpendicular ao escoamento, surge uma densidade de corrente elétrica induzida, transversal ao escoamento, produzindo uma força eletromotriz que pode ser detectada por eletrodos nas paredes do duto onde ocorre o escoamento. Este efeito é conhecido como efeito Hall, descoberto por Edwin Herbert Hall em 1879, quando aluno de doutorado na universidade de Harvard. É importante salientar que essa densidade de corrente provoca um frenamento no fluido, confirmando um princípio fundamental da natureza que garante que a energia elétrica não pode ser gerada sem que outra diminua. Há uma transformação de energia mecânica de escoamento em energia elétrica Hall. Observa-se, na Figura 1.1, que se o elétron não fosse defletido, seguiria o escoamento da posição A para a posição B. Com a deflexão, ele segue de A para B', retardando  $\Delta x$  na direção do escoamento e quanto maior for o ângulo de deflexão  $\theta$ , maior é o efeito Hall. O ângulo  $\theta$  quantifica o efeito Hall.

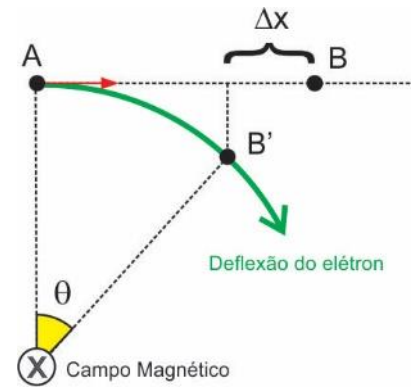


Figura 1.1 - Deflexão de um elétron no interior de um campo magnético mostrando o retardo  $\Delta x$  causado pelo efeito Hall. Fonte: elaborada pelo autor.

Paralelamente, o desenvolvimento de métodos numéricos, adotados na solução das equações que governam o escoamento e a transferência de calor, tem ganhado cada vez mais espaço na comunidade científica e tecnológica, principalmente no que diz respeito ao seu uso e aplicação. Atualmente, os métodos conhecidos como volumes finitos e elementos finitos formam a base das metodologias numéricas, que são empregadas nos núcleos de cálculo dos mais modernos *softwares*, encontrados nos campos de dinâmica dos fluidos computacional e de análise estrutural computacional.

Ademais, faz-se mister o desenvolvimento e aplicação de métodos matemáticos que mantenham um caráter analítico na obtenção da solução das equações dos mais variados campos da ciência. Dentre as metodologias que satisfazem tal requerimento, pelo menos parcialmente, está o método conhecido como Técnica da Transformada Integral Generalizada - GITT (COTTA, 1993; COTTA, 1998; SANTOS *et al.*, 2001). A GITT (acrônimo da expressão em inglês *Generalized Integral Transform Technique*) é uma técnica híbrida, numérico-analítica, que vem sendo desenvolvida de forma paralela aos métodos puramente numéricos, e que mantém, na sua aplicação, todas as características de uma solução analítica, como o método de separação de variáveis, associada, por outro lado, à robustez dos métodos puramente numéricos para soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

## 1.2. OBJETIVOS

O principal objetivo do presente trabalho consiste no desenvolvimento de análises híbridas, numérico-analíticas, da interação mútua entre o escoamento de um fluido condutor elétrico no interior de um canal de placas paralelas e campos magnéticos (externo e induzido).

O objetivo será alcançado com a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) nas equações que governam o escoamento do fluido condutor (na formulação completa de Navier-Stokes) e o transporte do campo magnético nesse campo de escoamento.

A análise da interação mútua escoamento/campo magnético será desenvolvida em um canal de placas planas e paralelas, separadas uma da outra por uma distância  $h$ . Um campo magnético externo é aplicado transversalmente a essas placas. O fluido, eletricamente condutor, entra no canal sob um perfil qualquer de velocidade, e terá seu desenvolvimento natural no interior do canal afetado pelo campo magnético aplicado (devido à força de Lorentz). Correntes elétricas serão induzidas no interior do escoamento (as quais podem ser aproveitadas para geração de energia elétrica, propulsão, etc.), de maneira que campos magnéticos também serão induzidos e superpostos àquele externamente aplicado. Esse efeito modifica dinamicamente o campo magnético externo. Diz-se então da interação de duas vias. O estudo dessas interações será efetuado a partir de uma formulação bidimensional das equações de Navier-Stokes, na formulação em função corrente para o escoamento em regime permanente, acoplada à equação de transporte do campo magnético.

O desenvolvimento do presente trabalho é justificado, basicamente, tendo em vista que:

- Atualmente, a GITT tem se tornado uma ferramenta de referência para fins de *benchmarking* em diversas situações físicas. O presente trabalho é uma extensão natural de sua aplicação nesse novo campo de pesquisa.

- Estudos anteriores que empregaram a GITT em magnetohidrodinâmica, adotaram a simplificação de camada limite (LIMA e RÊGO, 2013) ou resolveram problemas unidimensionais transientes (LIMA *et al.*, 2007; SILVA, 2014). Mais recentemente, a formulação de Navier-Stokes foi empregada na solução do escoamento MHD em um canal, mas sem considerar o efeito do escoamento sobre o campo magnético (PONTES, 2015).

- O interesse no estudo do efeito acoplado de duas vias, escoamento/campo magnético/escoamento requer a inserção da modelagem matemática, e da consequente solução, da equação de transporte do campo magnético. Tal efeito adiciona novos desafios ao presente estudo, tendo em vista a presença de novos acoplamentos, novas não linearidades e de novas especificações de condições de contorno para o campo magnético. Assim, o presente trabalho estende os esforços do estudo desenvolvido por Pontes (2015).

- A escolha de uma geometria simples se dá pela facilidade de geração de resultados *benchmarks*, em contraste ao emprego de um modelo físico, de mais difícil tratamento numérico.

- A proposta de estudo aqui colocada se insere no atual cenário de uso e desenvolvimento de novas tecnologias e fontes alternativas de geração e aproveitamento de energia.

## **CAPÍTULO II**

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1. BREVE HISTÓRICO DE MHD

Os fenômenos de magnetohidrodinâmica (MHD) foram descritos pela primeira vez quando Michael Faraday (1791-1867) experimentou a geração de eletricidade através do escoamento de um fluido condutor de eletricidade em uma região de campo magnético estacionário. Em janeiro de 1832, ele criou um medidor de fluxo, na ponte de Waterloo, em Londres. Ele imergiu eletrodos no rio Tamisa e, passando um fio ao longo da ponte, os conectou através de um galvanômetro. Ele, fundamentado no fato de que a água do rio era eletricamente condutora (salina), movendo-se através do campo magnético da Terra, deveria produzir uma força eletromotriz transversal ao fluxo do rio (LIPSCOMBE *et al.*, 2014; LITTLE, 1967). Pequenos desvios irregulares do galvanômetro foram de fato observados. No entanto, sua experiência não foi bem sucedida, pois os eletrodos eram eletroquimicamente polarizados – gerando efeitos não compreendidos naquele momento. O conceito teve pouca utilidade prática e, portanto, desapareceu, para reaparecer na literatura de patentes a partir do início de 1900 e na década de 1930 com o trabalho teórico sobre problemas cósmicos e projetos para geração de energia termonuclear que reavivou o interesse em MHD.

Em 13 de agosto de 1940, B. Karlovitz, um engenheiro húngaro, propôs um sistema MHD gasoso e arquivado sob patente US Nº. 2.210.918, intitulada "Processo para a conversão de energia". Trabalhando com os laboratórios de pesquisa da Westinghouse, ele tinha mais de 1.938 experimentos realizados nos produtos da combustão do gás natural como fluido de trabalho usando um gerador MHD anular - tipo Hall.

Em 1959, o engenheiro norte-americano Richard Rosa criou o primeiro gerador MHD verdadeiramente bem sucedido, produzindo cerca de 10 kW de potência elétrica. Pesquisas posteriores feitas por Rosa estabeleceram a praticidade da MHD para sistemas movidos a combustíveis fósseis.

Em 1963, o Laboratório de Investigação Aeronáutica AVCO Everett, sob a direção do engenheiro americano Arthur Robert Kantrowitz, começou uma série de experimentos que culminou com um gerador MHD de 35 MW que utilizava cerca de 8 MW para alimentar seu eletroímã. Este gerador manteve, por muitos anos, o recorde de potência útil, até então registrado. Prevendo-se que no final dos anos 1960 a energia nuclear iria dominar a geração de energia comercial e o fracasso em encontrar aplicações para missões

espaciais, extremamente cobiçada na época, houve uma redução acentuada nas pesquisas e financiamentos em MHD.

Em 1970, o prêmio Nobel de física foi concedido aos físicos, o sueco Hannes Olof Gosta Alfvén (1908-1995) e o francês Louis Eugène Félix Néel (1904-2000). Alfvén, por suas descobertas na magnetohidrodinâmica, e Néel por suas descobertas no magnetismo, particularmente, o antiferromagnetismo e o ferromagnetismo. Alfvén é considerado um dos maiores colaboradores da teoria da magnetohidrodinâmica. Ele argumentava que se um plasma (gases eletricamente carregados) permeia o espaço, ele poderia carregar correntes elétricas capazes de criar um campo magnético galáctico. Com essa discussão, ele, como professor da Universidade de Uppsala (Suécia), iniciou uma nova disciplina que mais tarde seria chamada de magnetohidrodinâmica (MHD). Alfvén ainda descreveu teorias sobre tempestades magnéticas, auroras boreais, manchas solares e formas de ondas de choque eletromagnéticas que se propagam em um plasma, ondas essas conhecidas como ondas de Alfvén.

Com a crise energética de 1973, reavivou-se o foco em sistemas MHD à base de carvão, mais eficientes para a geração de energia nos Estados Unidos como resumido por Pomeroy (1978). Uma análise histórica e técnica detalhada de geração de energia MHD à carvão foi apresentado por Gruhl (1977) com base no trabalho da EPA (Agência de Proteção Ambiental dos Estados Unidos) patrocinada pela empresa Exxon.

O interesse em MHD pela física de plasma só teve início nos anos 50, objetivando-se obter o controle da fusão termonuclear através do confinamento de plasma por campos magnéticos. Naquela década, os russos Igor Tamm e Andrei Sakharov (que foram inspirados por ideia original de Oleg Lavrentiev) criaram o TOKAMAK, uma câmara toroidal magnética para o confinamento de plasma e reprodução de fusões nucleares em altas temperaturas (150 milhões de °C), simulando a reação nuclear no interior do Sol e gerando energia limpa, uma vez que o processo não deixa resíduos radiativos como os conhecidos reatores de fissão nuclear.

Nas décadas de 60 e 70, surgiram, na engenharia, outras aplicações práticas da MHD, com os trabalhos pioneiros do engenheiro J. Hartmann, que inventou um dispositivo eletromagnético de bombeamento em 1918. Estudou meticulosamente as interações entre o escoamento de mercúrio e um campo magnético variável na região do escoamento. Com essas contribuições, Hartmann ganhou o título de “pai do metal líquido MHD” e, hoje em dia, o termo “escoamento Hartmann” é utilizado para descrever escoamentos em dutos sob a influência de um campo magnético.

A MHD na engenharia iniciou-se como resultado de grandes inovações tecnológicas, das quais, de acordo com Davidson (2001), é possível citar:

- O rápido desenvolvimento dos reatores nucleares, que utilizavam sódio líquido como refrigerantes e necessitavam de um bombeador eficiente e não invasivo;
- A fusão termonuclear controlada, que necessitava do domínio e do confinamento do plasma quente, o qual deveria ser mantido longe de qualquer tipo de superfície, proeza atingida apenas com forças magnéticas;
- O gerador de energia MHD, no qual um gás ionizado é propelido por entre um campo magnético, melhorando sua eficiência energética.

Duas décadas mais tarde, a MHD passaria a ser aplicada em diversas áreas, sendo fortemente utilizada por indústrias metalúrgicas e siderúrgicas para a extrusão e apuração de metais. O principal ponto dessa aplicação é a força de Lorentz, que proporciona um meio não invasivo de controlar o escoamento de metais.

## 2.2. ALGUMAS APLICAÇÕES DA MHD

### 2.2.1. BOMBA ELETROMAGNÉTICA

Esta aplicação ocorre quando campos elétricos e magnéticos, perpendiculares entre si, são impostos, ao mesmo tempo, perpendicularmente ao escoamento. Devido à densidade de corrente, estabelecida verticalmente para cima, no mesmo sentido do campo elétrico,

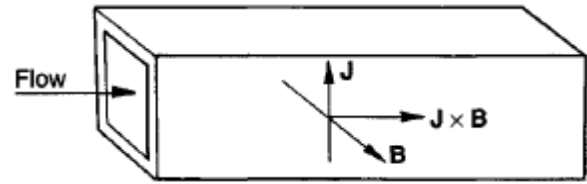


Figura 2.1 - Esquema de uma bomba eletromagnética, indicando a força de Lorentz  $F = (J \times B)$  no sentido do escoamento. Fonte: DAVIDSON (2001).

uma força magnética propulsiona o escoamento, sendo quantificada pela equação de Lorentz:  $\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$  (Figura 2.1). Proposta pela primeira vez por volta de 1832, a bomba eletromagnética encontrou sua aplicação ideal em reatores nucleares, onde é usado para bombear o líquido de arrefecimento de sódio líquido através do núcleo do reator (DAVIDSON, 2001).

### 2.2.2. MEDIDOR DE VAZÃO

Considere o escoamento uniforme, com velocidade  $v$ , de um fluido condutor no interior de um canal cilíndrico de diâmetro  $L$ , submetido a um campo magnético  $B$  perpendicular a ele e, diferentemente da bomba eletromagnética, uma

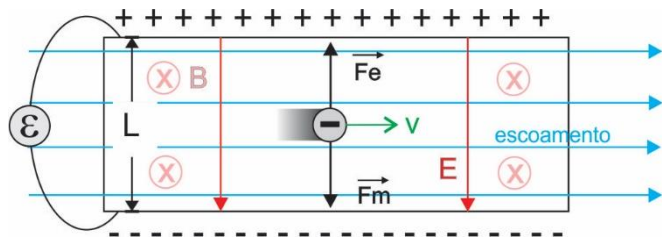


Figura 2.2 - Situação em que a força elétrica se iguala à força magnética estabelecendo uma tensão constante transversal ao escoamento. Fonte: elaborada pelo autor.

corrente elétrica não será imposta no escoamento. Devido à ação da força magnética, elétrons que fluem com o escoamento serão defletidos criando uma força eletromotriz ( $fem$ ,  $\varepsilon$ ) transversal, o efeito Hall. A deflexão de elétrons ocorrerá até que a força elétrica,  $F_e$ , criada pelo campo gerado pela  $fem$ , equilibre a força magnética,  $F_m$ , (Figura 2.2).

Assim, na situação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_E| &= |\vec{F}_M| & \Rightarrow & E = v \cdot B \\ e \cdot E &= e \cdot v \cdot B \end{aligned}$$

Sendo  $E \cdot L = \varepsilon$ , tem-se:

$$\varepsilon = L \cdot B \cdot v \tag{2.1}$$

Assim, se eletrodos forem colocados nas laterais do escoamento será possível medir, indiretamente, a vazão do fluido no canal. Da Figura 2.3 e, escrevendo-se  $v = ds/dt$ , tem-se:

$$\varepsilon = L \cdot B \frac{ds}{dt}$$

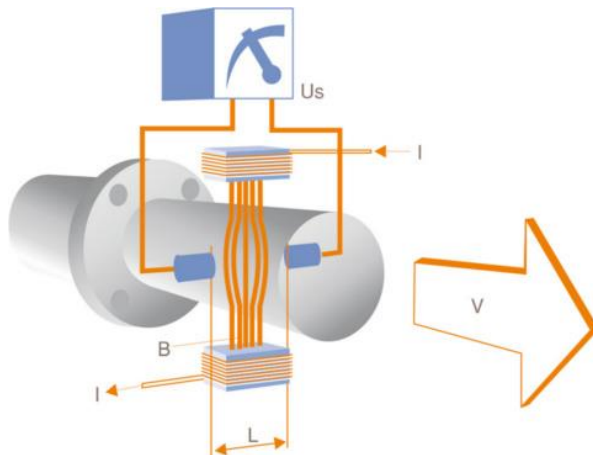


Figura 2.3 - Um medidor de vazão Hall, com campo magnético vertical gerado por um eletroímã e os eletrodos laterais, ligados a um milivoltímetro, medindo a tensão Hall. Fonte: <http://www.mecatronicaatual.com.br>. Acesso em: 24/05/2016.

Para o deslocamento  $ds$ , tem-se  $ds = dVol/A$ , onde  $dVol$  é um diferencial do volume e  $A$  é a área de seção transversal do tubo. Assim:

$$\varepsilon = L \cdot B \frac{1}{A} \frac{dVol}{dt}$$

Como  $dVol/dt$  representa a vazão ( $\varphi$ ) e

$$A = \frac{\pi L^2}{4}, \text{ obtém-se:}$$

$$\varphi(\varepsilon) = \left( \frac{\pi \cdot L}{4 \cdot B} \right) \varepsilon \quad (2.2)$$

Observa-se que a vazão é uma função da força eletromotriz medida nos eletrodos, uma vez que a largura do tubo e o campo magnético imposto são constantes.

### 2.2.3. CONFINAMENTO DE PLASMA

Outra aplicação de MHD se encontra, como já exposto, no controle da fusão termonuclear através do confinamento de plasma por campos magnéticos em reatores (como os TOKAMAKS). Neles, para que a fusão ocorra, as temperaturas do plasma chegam a ser da ordem de  $10^8$  K. Se ocorrerem choques entre as partículas e as paredes do reator, o plasma esfria rapidamente e a fusão não ocorre.

Se o plasma conseguir “sobreviver” suficientemente quente por cerca de 10 segundos com densidade suficiente (da ordem de um milionésimo da densidade do ar na pressão atmosférica), o aparelho poderia produzir mais energia do que gastaria – condição *sine qua non*, conhecida como critério de Lawson, para que se possa construir uma usina que gere energia (e não que consuma).<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Disponível em: <<http://portal.ifi.unicamp.br/deq/grupo-de-fisica-de-plasmas-e-fusao-termonuclear-controlada-gpftc>>. Acesso em 20 maio 2015.

Assim, forças magnéticas são usadas para manter/confinar o plasma quente longe das paredes do reator. A Figura 2.4 ilustra um exemplo simples de um sistema de confinamento magnético.

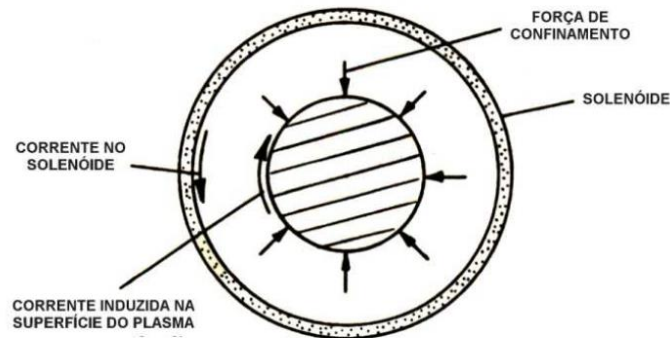


Figura 2.4 - A corrente induzida no plasma sofre ação do campo gerado pela corrente no solenoide e a força magnética atua no sentido de confinar o plasma no centro e afastá-lo da parede do reator. Fonte: DAVIDSON (2001).

#### 2.2.4. AGITADOR ELETROMAGNÉTICO

Talvez a aplicação mais generalizada de MHD em engenharia é a utilização de agitação eletromagnética. Aqui, o metal líquido a ser agitado é exposto a um campo magnético rotativo. Com a variação do fluxo magnético, um campo induzido é gerado no metal e este, por sua vez, vai interagir com o campo indutor, tentando freá-lo, criando assim uma força restauradora. A reação está no líquido, que é sempre forçado a girar no mesmo sentido do indutor, havendo uma transformação de energia do campo indutor em energia de rotação do fluido mais calor (devido às forças viscosas). Vide Figura 2.5.

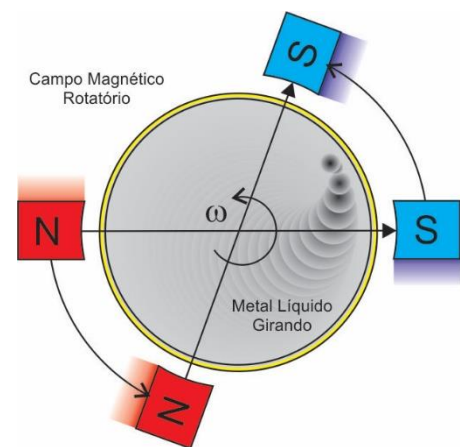


Figura 2.5 - Campo magnético agitando um fluido condutor por rotação. Fonte: elaborada pelo autor.

Esse sistema é usado em operações de fundição, para homogeneizar a zona de líquido de um lingote parcialmente solidificado. O movimento resultante tem uma profunda influência sobre o processo de solidificação, assegurando boa mistura dos elementos de liga e fragmentação contínua dos cristais do tipo “flocos de neve” que se formam na massa fundida.

Também é rotineiramente utilizado em laboratórios de química para uma boa agitação e homogeneização das misturas, mesmo que ela não seja condutora de eletricidade. Neste caso, a agitação se dá com a colocação de uma pequena barra metálica movida pelo campo magnético rotativo (Figura 2.6).

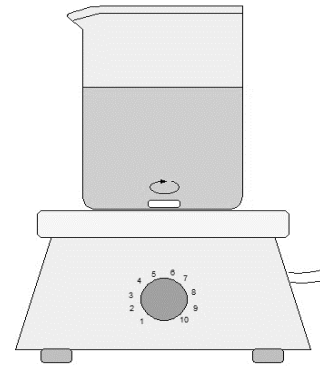


Figura 2.6 - Agitação de um líquido através da interação entre uma pequena barra colocada em seu interior e um campo magnético rotativo em sua base. Fonte: elaborada pelo autor.

### 2.2.5. AQUECIMENTO ELETROMAGNÉTICO

Outra aplicação bastante popular é o aquecimento eletromagnético por indução. Bobinas de alta frequência geram um campo magnético alternado no interior das mesmas. Se um material metálico condutor for introduzido no interior das mesmas, correntes de alta frequência serão induzidas no material e haverá dissipação de energia elétrica por efeito Joule, provocando seu aquecimento. Materiais altamente reativos são suscetíveis a este efeito. O aquecimento por indução é um processo que é usado para selagem, endurecimento ou amolecimento de metais ou outros materiais condutores. Uma aplicação comercial atual de aquecimento por indução são os fogões por indução.



Figura 2.7 - Imagem de um cilindro metálico sendo aquecido por indução. Fonte: [www.grefortec.com.br](http://www.grefortec.com.br). Acesso em 24/05/2016

### 2.2.6. LEVITAÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Se uma bobina magnética de alta frequência induz correntes alternadas em oposição de fase, em relação à sua, no material contido no interior da mesma, surgirão forças opostas de repulsão e de mesma intensidade, no material e na bobina, uma vez que correntes opostas se repelem.

Pode-se analisar, através de um modelo simplificado, a levitação de uma gota colocada na parte superior de um solenoide, conforme mostrado na Figura 2.8. Pode-se observar que, em certa potência da bobina, a força magnética equilibrará o peso da gota, provocando a levitação. Como já discutido anteriormente na Seção 2.2.5, haverá, ainda, o aquecimento do material por efeito Joule.

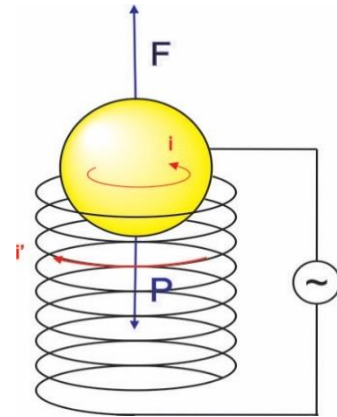


Figura 2.8 - Levitação magnética de uma gota onde  $i$  e  $i'$  representam, respectivamente, as correntes alternadas na gota e na bobina. Fonte: elaborada pelo autor.

### 2.2.7. VÁLVULA ELETROMAGNÉTICA

Considerando-se os efeitos descritos na seção anterior, se a massa da gota for aumentando continuamente, faz-se necessário aumentar a intensidade da corrente, ou seja, a potência da bobina para fazê-la levitar. Isto posto, é então possível em um escoamento, controlar a sua vazão através da intensidade do campo indutor, ou seja, da corrente alternada na bobina indutora. Assim, se a corrente for diminuída, a vazão aumenta, e se a corrente for aumentada, a vazão diminui. Essa possibilidade de controle de corrente caracteriza o princípio de funcionamento de uma válvula de indução eletromagnética (Figura 2.9).

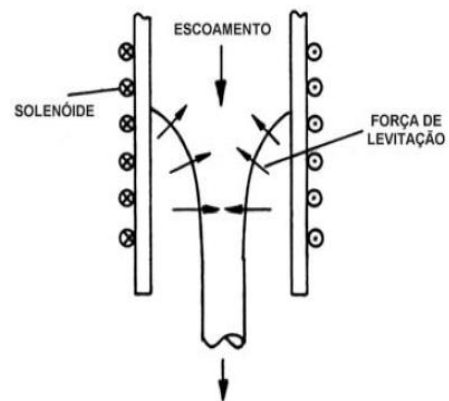


Figura 2.9 - Esquema simplificado de funcionamento de uma válvula de indução eletromagnética. Fonte: DAVIDSON (2001).

### 2.2.7. GERADOR ELETROMAGNÉTICO

Considere apenas o escoamento de um fluido condutor no interior de um duto, onde é imposto um campo magnético perpendicularmente ao escoamento, exatamente como o mostrado na Figura 2.2 para um medidor de fluxo. Note-se ainda que não existe nenhum campo elétrico imposto! Como já foi dito na seção 2.2.2, a deflexão dos elétrons ocorrerá até que a força magnética seja equilibrada pela força elétrica.

Assim,

$$|\vec{F}_E| = |\vec{F}_M| \Rightarrow e.E = e.v.B$$

Então, o chamado campo elétrico Hall é dado por:

$$E = v.B \quad (2.3)$$

O módulo da força magnética sobre uma quantidade infinitesimal de carga  $dq$ , é:

$$F = dq B v$$

Essa é a força que defletirá as partículas do fluido e, por conseguinte, é gerada por uma diferença de pressão e então pode ser escrita por  $F = dP A$ , onde  $A$  é um elemento de área perpendicular à força. Logo:

$$dP A = dq B v$$

Considerando que  $dq v = i ds$ , onde  $i$  é a corrente induzida, que  $ds$  é o deslocamento infinitesimal ao longo do escoamento e que  $J=i/A$  é a densidade de corrente (Eq. 2.6), tem-se:

$$dP A = i ds B$$

Assim,

$$\frac{dP}{ds} = J B \quad (2.4)$$

Na sequência deste trabalho, na seção 2.3.1.1, será mostrada a lei de Ohm que descreve a densidade de corrente como sendo  $J=\sigma E$ , onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica do meio. Assim rearranjando esta igualdade fundamental junto as Eqs. (2.3) e (2.4), conclui-se que os módulos do gradiente de pressão ao longo do escoamento e a densidade de corrente podem ser escritas por:

$$\frac{dP}{ds} = \sigma v B^2 \quad e \quad J = \sigma v B \quad (2.5a,b)$$

A conclusão é que a deflexão dos elétrons gera força eletromotriz induzida e, conseqüentemente, a geração de energia elétrica. Entretanto, a geração de energia elétrica, por um princípio de conservação fundamental, é gerada às custas da diminuição da energia mecânica do escoamento, causada pela diminuição de pressão ao longo do mesmo, que é convertida em eletricidade e calor. Tem aplicação fundamental em geradores de potência em MHD estudado na física de plasmas. Veja um esquema mostrado na Figura 2.10.

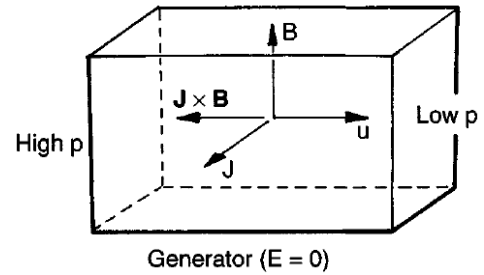


Figura 2.10 - Gerador eletromagnético na condição de que  $E=0$ . Fonte: DAVIDSON (2001).

de potência em MHD estudado na física de

## 2.3. CONCEITOS BÁSICOS

### 2.3.1. LEIS E CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO ELETROMAGNETISMO

Neste ponto serão apresentadas as leis e conceitos fundamentais do eletromagnetismo interessantes ao desenvolvimento do presente trabalho. O sistema de unidades adotado é o Sistema Internacional e na ausência de outras especificações dimensionais, tome-se o S.I..

#### 2.3.1.1. A LEI DE OHM E A CONDUTIVIDADE ELÉTRICA

Primeiramente, faz-se necessário definir o conceito de densidade de corrente elétrica. Ela é dada pela razão entre a intensidade de corrente elétrica e a área de seção reta por onde ela flui.

$$J = \frac{I}{A} \quad (2.6)$$

Observando-se a Figura 2.11, imagine-se que existam  $n$  portadores de carga  $q$  por unidade de volume ( $n$  representa a densidade de cargas livres e, por hipótese, considere que são positivas) e que estes portadores movam-se, sob a ação do campo elétrico, com a mesma velocidade de arraste  $v_a$ . Em um mesmo intervalo de tempo  $dt$ , todos se deslocam de uma distância  $ds = v_a \cdot dt$ . O volume do cilindro de espessura  $ds$  no interior do condutor é  $dV = A \cdot ds = A \cdot v_a \cdot dt$ . Assim, a carga fluindo por este volume é dada por  $dQ = n \cdot q \cdot dV = n \cdot q \cdot A \cdot v_a \cdot dt$ .

Logo, na expressão que define a corrente elétrica, tem-se:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n \cdot q \cdot A \cdot v_a \quad (2.7)$$

Para a densidade de corrente, então:

$$J = \frac{I}{A} = n \cdot q \cdot v_a \quad (2.8)$$

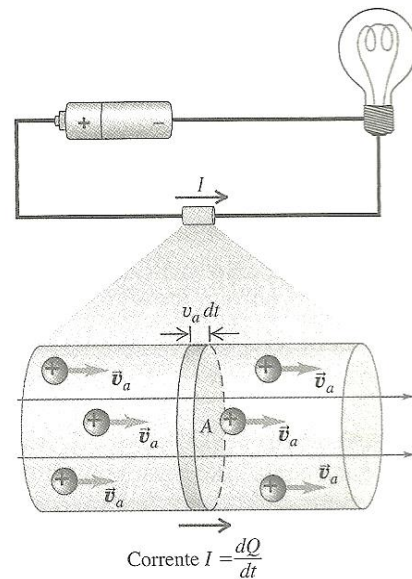


Figura 2.11 - Corrente de portadores de carga positiva através de uma seção reta de área  $A$  de um condutor. Fonte: YOUNG e FREEDMAN (2009).

Pode-se ainda se falar em um vetor densidade de corrente que, independentemente do sinal da carga transportada, tem sempre o mesmo sentido do campo elétrico e é dado por:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_a \quad (2.9)$$

A corrente dentro de um meio material resulta da resposta das partículas carregadas deste meio às forças a elas aplicadas; em geral, interessa a resposta a um campo elétrico. Essa resposta (relação entre  $\vec{J}$  e  $\vec{E}$ ) depende da natureza do meio material, sendo por isso denominada de equação constitutiva. Para uma grande variedade de materiais isotrópicos líquidos e sólidos, a lei de Ohm (formulada em 1826, por analogia com a lei da condução do calor) é dada por:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.10)$$

sendo a constante de proporcionalidade  $\sigma$ , característica intrínseca do material, a condutividade elétrica do material dada pelo inverso da resistividade  $\left(\sigma = \frac{1}{\rho}\right)$ .

### 2.3.1.2. A LEI DE AMPÈRE

A lei de Ampère (que relaciona campo magnético e densidade de corrente) não é determinada em termos do fluxo do campo magnético através de uma superfície, como a lei de Gauss para o campo elétrico, mas definida com base em uma integral de linha (da densidade) do campo magnético  $\vec{B}$  em torno de uma trajetória fechada ( $\Gamma$ ), ou circulação (da densidade) do campo magnético  $\vec{B}$  em torno de  $\Gamma$ , designada por:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

em que  $d\vec{\ell}$  é um segmento infinitesimal da trajetória  $\Gamma$ .

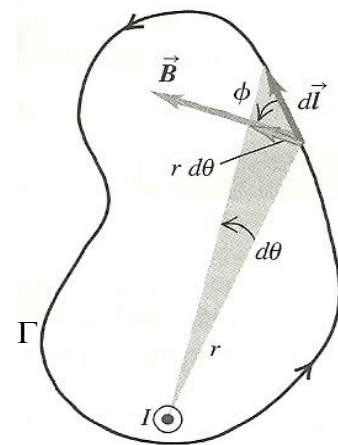


Figura 2.12 - Trajetória genérica que engloba o fio reto e longo para integração do campo  $\vec{B}$  produzido por uma corrente saindo do plano da página. Fonte: YOUNG e FREEDMAN, (2009).

Tomando-se a densidade do campo magnético de um condutor longo e retilíneo percorrido por *corrente contínua*<sup>4</sup>,  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , pode-se demonstrar a lei de Ampère adotando uma trajetória qualquer como a indicada na Figura 2.12. Na posição do elemento de linha  $d\vec{\ell}$ , o ângulo entre  $\vec{B}$  e  $d\vec{\ell}$  é  $\phi$  e assim,  $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B d\ell \cos\phi$ . Ainda observa-se, de acordo com a Figura 2.12, que  $d\ell \cos\phi = r d\theta$ , em que  $d\theta$  é o ângulo subtendido por  $d\ell$  em relação ao fio; e que  $r$  é a distância entre  $d\ell$  e o fio. Portanto:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} B r d\theta = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r d\theta) \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\theta$$

Assim, como  $\oint d\theta = 2\pi$ , conclui-se que:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Generalizando, considerem-se diversos fios retos longos que passam pela área delimitada pelo percurso de integração,  $\Gamma$  (Figura 2.13). O campo magnético total em qualquer ponto do percurso é dado pela soma vetorial dos campos individuais dos fios. Portanto, a integral de linha (da densidade) do campo magnético total é igual a  $\mu_0$  vezes a soma algébrica das correntes.

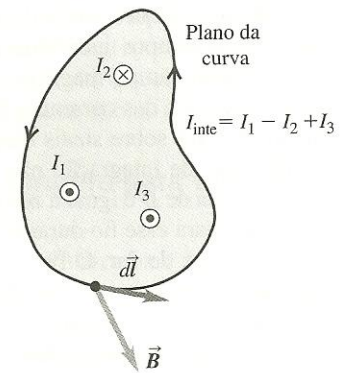


Figura 2.13 - A integral de linha do campo magnético total é igual a  $\mu_0$  vezes a soma algébrica das correntes.  $I_1$  e  $I_3$  são positivas e  $I_2$ , negativa. Fonte: YOUNG e FREEDMAN (2009).

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_n \tag{2.11}$$

Usa-se o sinal positivo da corrente quando ela gera um campo ao seu redor no mesmo sentido indicado no percurso de integração ( $\Gamma$ ), também conhecido como curva amperiana e sinal negativo em sentido oposto.

Se a Equação (2.11) for aplicada a uma distribuição de corrente que atravessa uma superfície  $S$  limitada pela curva

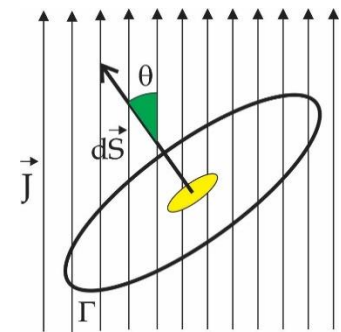


Figura 2.14 - Distribuição de corrente que atravessa uma superfície  $S$ , mostrando o vetor normal  $d\vec{S}$  formando um ângulo  $\theta$  com a densidade de corrente  $\vec{J}$ . Fonte: elaborada pelo autor

<sup>4</sup> A densidade do campo magnético em um fio reto e longo percorrido por corrente contínua, demonstrado em 1820, antes da Lei de Ampère, pela lei de Biot-Savart é dada por  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ , em que  $R$  é a distância (perpendicular ao fio) do fio ao ponto de análise.

amperiana, conforme a Figura 2.14, a corrente total no interior da superfície é dada por:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

e a lei de Ampère adquire a forma:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.12)$$

O primeiro membro da Equação (2.12) pode transformar-se em uma integral de superfície através do teorema de Stokes, ficando da seguinte forma:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Aplicando este resultado na Eq. (2.12), tem-se:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{S} = 0$$

Fazendo com que a lei de Ampère na forma diferencial seja escrita como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.13)$$

### 2.3.1.3. A LEI DE FARADAY

O fluxo de um campo vetorial está associado à quantidade de linhas de campo que atravessam uma determinada seção de área  $A$ . A densidade de linhas está associada à intensidade do campo e o fluxo por um elemento infinitesimal de área  $dA$  (o vetor normal é designado por  $d\vec{A}$ ) é dado por:

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.14)$$

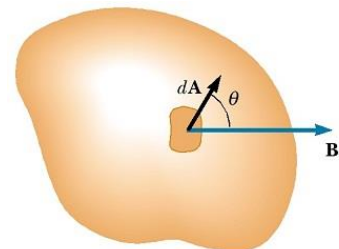


Figura 2.15 - Elementos de fluxo: o vetor normal  $d\vec{A}$  que representa um elemento de área e o vetor campo  $\vec{B}$  que forma um ângulo  $\theta$  com a normal. O fluxo neste elemento é dado por  $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} \cdot \cos\theta$ . Fonte: elaborada pelo autor.

O fluxo total do campo magnético através de uma superfície (A) subdividida em elementos infinitesimais de área  $dA$  é dado por:

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.15)$$

em que  $\vec{B}$  é o vetor densidade de campo magnético em cada elemento de área e o vetor  $d\vec{A}$  está associado a um vetor normal à superfície infinitesimal conforme Figura 2.15.

De posse do conceito de fluxo, para se entender a lei de Faraday, considere uma barra condutora, deslizando com velocidade constante sobre um trilho em forma de U, também condutor, e imerso em um campo magnético (Figura 2.16).

Quando a barra se move, sob a ação da força motora  $\vec{F}_{motora}$ , uma força magnética  $\vec{F}_Y$  desloca os elétrons para cima, fazendo com que uma corrente elétrica apareça no circuito no sentido horário, a qual é gerada por um campo elétrico induzido ao longo deste circuito e no mesmo sentido. Concomitantemente, uma força elétrica contrária ( $\vec{F}_{elétrica}$ ) se estabelece, equilibrando  $\vec{F}_Y$ . O campo magnético atua sobre a corrente gerando uma força magnética  $\vec{F}_X$ . O movimento uniforme se mantém pelo equilíbrio entre a força motora e a força magnética  $\vec{F}_X$ .

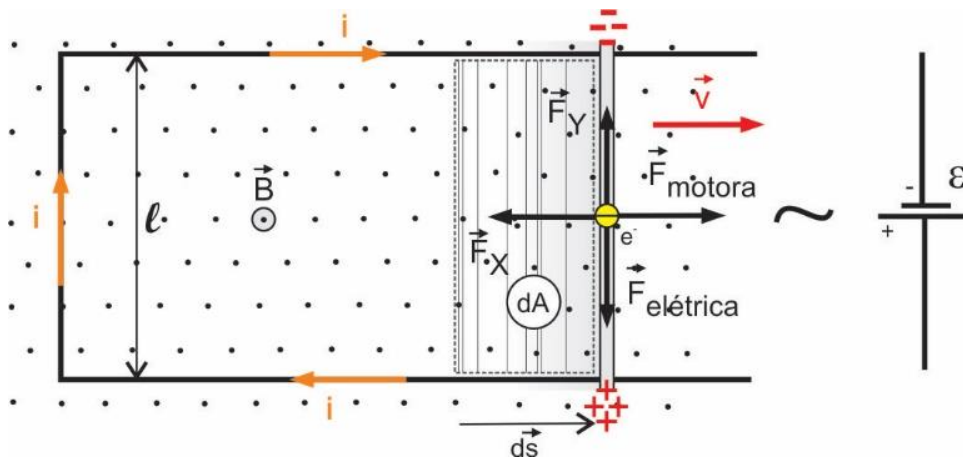


Figura 2.16 - Diagrama de forças sobre a barra em movimento no interior de um campo magnético e a corrente elétrica gerada pelo campo elétrico induzido no circuito. Fonte: elaborada pelo autor.

Iniciando a análise, o trabalho realizado pela força magnética  $\vec{F}_X$  ao longo do deslocamento infinitesimal  $d\vec{s}$ , é dado por:

$$dW_{mag} = \vec{F}_X \cdot d\vec{s} = -F_X ds$$

Note-se que se trata de um trabalho resistente e como  $\vec{F}_X$  tem intensidade dada por  $F_X = BI\ell$  tem-se:

$$dW_{\text{mag}} = -BI\ell ds$$

Sendo  $\ell ds = dA$ ,

$$dW_{\text{mag}} = -BI dA$$

e como, da Equação (2.11),  $BdA = d\phi$ :

$$dW_{\text{mag}} = -Id\phi$$

Dividindo ambos os membros por  $dt$ , tem-se:

$$\frac{dW_{\text{mag}}}{dt} = -I \frac{d\phi}{dt}$$

Note-se aqui que  $\frac{dW}{dt}$  representa o trabalho resistente, por unidade de tempo, realizado pela força magnética, e é ele que transforma a energia mecânica de movimentação da barra em energia elétrica. Este trabalho (por unidade de tempo) por unidade de carga transportada faz o papel de uma força eletromotriz ( $\varepsilon$ ) que têm exatamente a função de transformar outras formas de energia em energia elétrica. Assim, se  $\frac{dW}{dt}$  representa a potência de geração de energia elétrica, escreve-se que:

$$\text{Pot} = \frac{dW_{\text{mag}}}{dt} = -I \frac{d\phi}{dt}$$

e como  $\text{Pot} = I\varepsilon$ , conclui-se que

$$\text{Pot} = I\varepsilon = -I \frac{d\phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = - \frac{d\phi}{dt}$$

É de suma importância salientar que não há uma diferença de potencial nos extremos da barra em hipótese alguma. Uma diferença de potencial está associada a uma força conservativa e a força magnética, responsável pela corrente no circuito, não é.

Em resumo, Faraday propunha que a variação de um fluxo magnético em um circuito fechado, uma espira, por exemplo, provocaria o aparecimento de uma força eletromotriz induzida, cuja intensidade é dada por:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \quad (2.16)$$

Pela Equação (2.15) é possível reescrever a equação (2.16) da seguinte forma:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Ainda, analogamente à lei de Ampère, considerando uma curva (C) sobre a trajetória descrita pela corrente e orientada no mesmo sentido desta, a circulação do vetor campo elétrico induzido ao longo desta curva fechada, irá representar a *fem* induzida e, portanto:

$$\varepsilon = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.17)$$

É importante notar que a Equação (2.17) é válida em qualquer curva contínua em que o campo esteja definido em todos os seus pontos.

Assim, generalizando, a lei de Faraday pode ser escrita da seguinte forma:

$$\varepsilon = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.18)$$

Assim, como foi feito com a Equação (2.15), o primeiro membro da Equação (2.18) pode transformar-se em uma integral de superfície através do teorema de Stokes:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Aplicando este resultado na equação (2.18), tem-se:

$$\int_A \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \int_A \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} \right) \cdot d\vec{A} = 0$$

Fazendo que a lei de Faraday na forma diferencial seja escrita como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (2.19)$$

#### 2.3.1.4. A FORÇA DE LORENTZ VOLUMÉTRICA

Se um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$  agirem ao mesmo tempo sobre uma partícula carregada com carga  $q$  e em movimento com velocidade  $\vec{u}$ , a força total sobre ela pode ser expressa como:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{u} \times \vec{B} \quad (2.20)$$

Esta é a chamada força de Lorentz que não é um novo tipo de força, é apenas a soma das forças elétrica e magnética que podem estar agindo simultaneamente sobre uma partícula.

Como exemplo, tome um elemento de carga  $q$  em movimento com velocidade  $\vec{u}$  sob ação de um campo elétrico e um campo magnético, ambos estáticos em relação à Terra. Para um referencial fixo na Terra, a força total sobre a carga será dada conforme a Equação (2.20). Agora, para um referencial fixo na carga, ele só pode interpretar que esta força é somente devida ao campo elétrico. Assim, para este referencial,

$$\vec{F} = q\vec{E}_r,$$

sendo  $\vec{E}_r$  chamado de *campo elétrico efetivo* para o referencial da carga. Desta forma:

$$\vec{F} = q\vec{E}_r = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

e

$$\vec{E}_r = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \quad (2.21)$$

Neste ponto, se faz necessário a reedição da lei de Ohm para uma densidade de corrente no interior de um campo magnético. Considere um condutor percorrido por corrente. A densidade de corrente no condutor (Figura 2.17a), dada na Equação (2.10), é  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ .

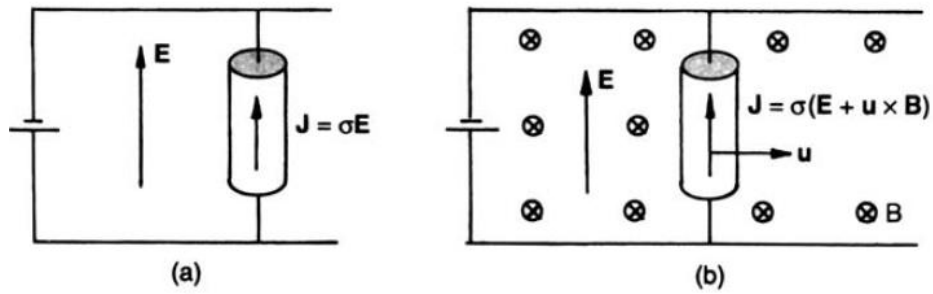


Figura 2.17 - (a) Fio em repouso percorrido por corrente; (b) Fio em movimento percorrido por corrente, indicando-se a lei de Ohm para um referencial em movimento com o fio. Fonte: DAVIDSON, 2001.

Na presença do campo magnético e o fio se movendo com velocidade  $\vec{u}$ , tem-se, conforme a Figura 2.17b, para um referencial em repouso em relação ao fio, fazendo alusão à Equação (2.21), a lei de Ohm é escrita assim:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_r = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (2.22)$$

No âmbito da MHD, o interesse é na força global agindo sobre o meio, não nas forças sobre partículas individuais. Desta forma considerando um escoamento onde uma fração de massa  $dm$  do fluido, de volume  $dV$  e de carga  $dq$ , possui velocidade  $\vec{u}$  e que o escoamento está submetido a um campo magnético  $\vec{B}$ , a força de Lorentz é dada por:

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Se a densidade de cargas do fluido é  $\rho$ , então  $dq = \rho dV$  e a força de Lorentz por unidade de volume ( $\vec{F}_v$ ), começa a ser escrita assim:

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{F}_v = \rho \vec{E} + \rho \vec{u} \times \vec{B}$$

Como a relação  $\rho \vec{u} = \vec{J}$  é uma ubiquidade eletrodinâmica, a versão volumétrica da força de Lorentz é dada por:

$$\vec{F}_v = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.23)$$

Por outro lado, a MHD de metais líquidos, o tempo de relaxação das cargas é muito pequeno (da ordem de  $10^{-18}$ s), e as cargas rapidamente se dispersam no fluido fazendo com que a densidade de cargas seja desprezível e o termo  $\rho\vec{E}$  também seja (DAVIDSON, 2001). A força de Lorentz volumétrica para MHD fica assim:

$$\vec{F}_V = \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.24)$$

### 2.3.1.5. PRESSÃO E TENSÃO MAGNÉTICAS

Como a densidade de corrente é dada por  $\vec{J} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0}$  (vide Equação 2.13) e se esta for substituída na Eq. (2.24), tem-se, para a força de Lorentz por unidade de volume ( $\vec{J} \times \vec{B}$ ), o que se segue:

$$\vec{F}_V = \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

Tomando a identidade vetorial  $(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \frac{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{B})}{2}$ , escreve-se que:

$$\vec{J} \times \vec{B} = -\vec{\nabla} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (2.25)$$

em que:

- $\frac{B^2}{2\mu_0}$  é a densidade de energia magnética ou pressão magnética;
- $-\vec{\nabla} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$  representa, então, o negativo do gradiente de pressão magnética ou força de pressão magnética;
- $\frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$  tem uma componente paralela às linhas de campo e a outra componente que atua perpendicularmente a elas.

Para compreender melhor o segundo termo do lado direito da Eq. (2.25), tome a aceleração material um elemento de fluido (descrição *lagrangeana*) em um dado escoamento.

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Considerando o escoamento em regime permanente  $\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0\right)$ , a aceleração resultante sobre este elemento é dada por:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Em termos de coordenadas curvilíneas ao longo de uma linha de corrente, como a mostrada na Figura 2.18., tem-se:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = V \frac{\partial V}{\partial s} \hat{e}_t - \frac{V^2}{R} \hat{e}_n \quad (2.26)$$

em que  $V \frac{\partial V}{\partial s} \hat{e}_t$  é a componente da aceleração ao longo da linha de corrente ( $\hat{e}_t$  é o vetor unitário tangente à linha) e  $\frac{V^2}{R} \hat{e}_n$  é a componente da aceleração perpendicular à linha ( $\hat{e}_n$  é o vetor unitário perpendicular à linha de corrente e R é o raio local de curvatura da linha em cada ponto) (DAVIDSON, 2001).

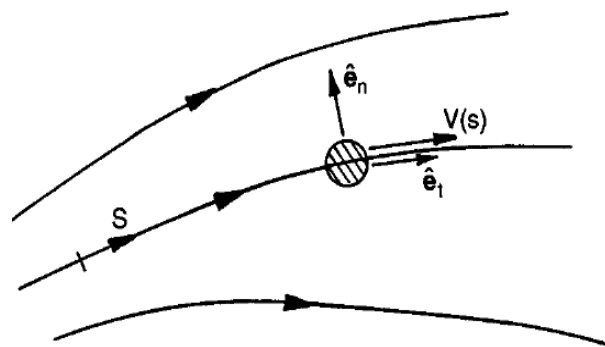


Figura 2.18 - Aceleração de um elemento de fluido em um escoamento permanente. Fonte: DAVIDSON (2001).

Desta forma, de modo análogo, o segundo termo do lado direito da Eq. (2.25) pode ser encontrado trocando-se  $\vec{V}$  por  $\vec{B}$  na Eq. (2.26). Assim,

$$\frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \frac{B}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial s} \hat{e}_t - \frac{B^2}{\mu_0 R} \hat{e}_n$$

ou

$$\frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{B^2}{\mu_0} \right) \hat{e}_t - \frac{B^2}{\mu_0 R} \hat{e}_n.$$

Logo, a equação da força de Lorentz volumétrica fica sendo, finalmente, como se segue.

$$\vec{J} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \hat{e}_t - \frac{B^2}{\mu_0 R} \hat{e}_n - \vec{\nabla} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (2.27)$$

Segundo Davidson (2001), nos casos em que a pressão magnética  $\left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$  possa ser desprezada, que normalmente é o caso em problemas de MHD, a força de Lorentz volumétrica, dada na Eq. (2.27) fica então escrita na forma indicada a seguir.

$$\vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \hat{e}_t - \frac{B^2}{\mu_0 R} \hat{e}_n$$

Observando-se a Figura 2.19 e considerando um fio reto percorrido por corrente colocado no interior de um campo magnético preestabelecido na região do fio, é possível observar, pela superposição dos campos magnéticos gerado pela corrente e o da região, que a densidade de linhas é maior do lado esquerdo do fio, fazendo com que o campo e a pressão magnética fiquem maiores à esquerda.

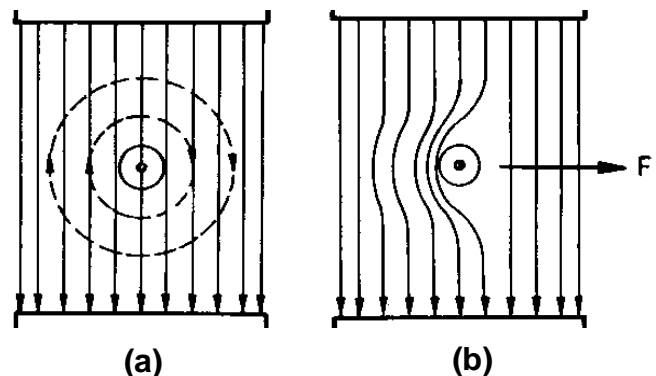


Figura 2.19 - (a) Campos independentes, não superpostos, do fio e da região; (b) Superposição de campos, indicando o adensamento de linhas à esquerda com consequente aumento de pressão magnética e geração de força, devido à tensão magnética, para direita. Fonte: DAVIDSON (2001).

Este efeito, como acaba de ser visto, faz com que o fio seja acelerado para direita pela força de tensão magnética, semelhante a um arco e flecha sendo armado.

Em um fluido em movimento no interior de um campo magnético, são induzidos campos que interagem com o anterior no sentido de reduzir o movimento relativo entre eles. Desta forma, o fluido em movimento pode “arrastar” linhas de campo magnético, assim como o campo magnético pode “segurar” o fluido. Estes efeitos são gerados pela variação da pressão magnética em pontos do escoamento, gerando forças que tentam restaurar a forma das linhas de campo originais, antes da indução. É este “congelamento” parcial do meio e do campo magnético que é o ponto principal da magnetohidrodinâmica e o interesse do presente trabalho.

### 2.3.1.6. EQUAÇÕES DE MAXWELL E A CORRENTE DE DESLOCAMENTO

As propriedades dos campos eletromagnéticos podem ser descritas por um conjunto de quatro equações, as chamadas equações de Maxwell. Duas destas equações são exatamente a lei de Gauss para os campos elétricos e magnéticos<sup>5</sup> e a terceira é a lei de Faraday (EISEBERG e LERNER, 1982, v. 4, p.70). A quarta é uma percepção maxwelliana de que havia uma inconsistência na lei de Ampère para o caso de correntes não contínuas.

A Figura 2.20 mostra duas diferentes superfícies,  $S_1$  e  $S_2$ , limitadas pela mesma curva  $C$ , que circula um fio que transporta uma corrente  $I$  para a placa de um capacitor em processo de carregamento. Segundo a lei de Ampère, a corrente que atravessa as duas superfícies deveria ser a mesma, porém, existe corrente na superfície  $S_1$ , mas não existe corrente através da superfície  $S_2$ .

Para se compreender a quarta equação de Maxwell ou a chamada lei de Ampère-Maxwell, pode-se observar que a taxa de aumento da carga na placa esquerda do capacitor é dada exatamente pela corrente  $I$ .

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

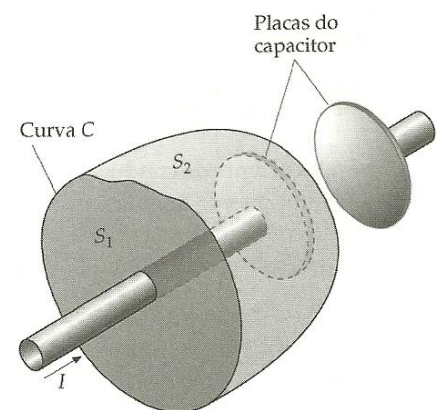


Figura 2.20 - A corrente através de  $S_1$  é  $I$  e de  $S_2$  é nula. Exemplificando a inconsistência na lei de Ampère para correntes descontínuas. Fonte: YOUNG & FREEDMAN, 2009.

<sup>5</sup> A discussão sobre a lei de Gauss pode ser encontrada em Tipler (2006, v. 2, p. 43), entre outras bibliografias.

Agora, considerando-se que as duas superfícies  $S_1$  e  $S_2$ , juntas, delimitam um volume cuja carga interna é  $Q(t)$  e cuja taxa de variação está indicada na equação acima. Tomando a lei de Gauss, observe que há um fluxo para fora do volume, passando pela superfície  $S_2$ , devido ao campo no interior do capacitor. Assim, se a superfície total for dividida em infinitos elementos de área  $dA$ , tem-se:

$$\phi = \oint_{S_1+S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad Q = \epsilon_0 \phi$$

Onde  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do meio (vácuo). Derivando cada membro em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi}{dt}$$

Essa equação afirma que a taxa de variação da carga é proporcional à taxa de variação do fluxo do campo elétrico líquido para fora do volume. Se a corrente era a fonte do campo magnético, Maxwell completou dizendo que campos elétricos variáveis no tempo também podem gerar campos magnéticos. Conforme escreveu Fleish (2008, p.84): “Uma corrente elétrica ou um fluxo de campo elétrico variável através de uma superfície, produz um campo magnético circulando em torno de qualquer caminho que circunda essa superfície”.

Maxwell chamou este efeito de variação do campo elétrico,  $\epsilon_0 \frac{d\phi}{dt}$ , que tem dimensão de corrente elétrica, de corrente de deslocamento ( $I_d$ ).

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi}{dt} \tag{2.28}$$

Ademais, a corrente total, chamada de corrente generalizada, através da curva amperiana C da Figura 2.19, é dada por  $I+I_d$ . Aplicando então a lei de Ampère em torno desta curva C:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi}{dt} \tag{2.29}$$

Esta é a quarta equação de Maxwell ou a lei de Ampère-Maxwell na forma integral.

Como uma corrente pode ser escrita como uma integral de superfície para uma densidade de corrente,  $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$  e como a densidade de corrente de deslocamento é  $\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$ , pode-se escrever a lei de Ampère-Maxwell, da seguinte forma:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A \left( \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}$$

Usando o teorema de Stokes para transformar a integral de linha do lado esquerdo da equação acima em uma integral de superfície,  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{A}$ , tem-se:

$$\int_A \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A \left( \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}$$

Logo, a quarta equação de Maxwell na forma diferencial é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (2.30)$$

Assim, as equações de Maxwell podem ser organizadas conforme a Tabela 2.1:

Tabela 2.1 – Equações de Maxwell.

EQUAÇÕES DE MAXWELL		
Forma Integral	Forma Diferencial	Equação
$\phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Lei de Gauss para o campo elétrico
$\phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Lei de Gauss para o campo Magnético
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Lei de Indução de Faraday
$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Lei de Ampère-Maxwell

### 2.3.1.7. CONSERVAÇÃO DA CARGA

Tomando-se a equação de Ampère-Maxwell na forma diferencial e aplicando a divergência em ambos os membros da equação, tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t}$$

Como, notoriamente, a divergência de um rotacional é zero e aplicando a lei de Gauss ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ), escreve-se que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.31)$$

Esta é exatamente a equação da conservação da carga, a qual demonstra que se a lei de Ampère fosse empregada sem a corrente de deslocamento (correção de Maxwell), a conservação da carga seria violada.

Entretanto, como já citado, em condutores, o termo  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  é desprezível, ou, por argumentos dimensionais, a corrente de deslocamento é muito menor do que  $\vec{J}$ . Assim a lei de Ampère (2.13) é suficiente para análises de MHD e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Desta forma, com a aproximação da MHD,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ , as equações do eletromagnetismo para escoamentos de fluidos condutores submetidos a campos magnéticos, ficam finalmente escritas conforme a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Resumo das Equações do Eletromagnetismo aplicadas à MHD.

EQUAÇÕES DO ELETROMAGNETISMO APLICADAS À MHD		
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Lei de indução de Faraday	(2.32)
$\vec{F}_V = \vec{J} \times \vec{B}$	Força de Lorentz volumétrica	(2.33)
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	Lei de Ampère	(2.34)
$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$	Lei de Ohm <sup>6</sup>	(2.35)
$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$	Conservação da carga	(2.36)
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Lei de Gauss para o campo Magnético <sup>7</sup>	(2.37)

### 2.3.2. PARÂMETROS FUNDAMENTAIS EM MHD

Alguns parâmetros são de suma importância para a descrição de fenômenos em MHD. Dentre eles pode-se citar três que estão escritos em sequência na Tabela 2.3 e após a elucidação de seus significados serão escritas as equações do eletromagnetismo.

Tabela 2.3 – Parâmetros Básicos em MHD.

$Re_m = \mu_0 \sigma u \ell$	Número de Reynolds Magnético	(i)
$v_{alf} = \frac{B}{\sqrt{\rho \mu_0}}$	Velocidade de Alfvén	(ii)
$\tau_m = \frac{\rho}{\sigma B^2}$	Tempo de Amortecimento Magnético	(iii)

em que,

<sup>6</sup> O termo  $(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$  representa o campo elétrico efetivo. Vide Equações (2.7) e (2.18).

<sup>7</sup> Esta lei deixa claro o comportamento solenoidal do campo magnético.

- $\mu_0$  é a permeabilidade magnética de um meio, que está associada à facilidade que um campo magnético tem de se propagar ou de se “estabelecer” neste meio;
- $\sigma$  é a condutividade elétrica do meio, que está associada à quantidade de elétrons livres disponíveis para condução ou à facilidade de se conduzir corrente elétrica e é dada pelo inverso da resistividade;
- $\rho$  é a massa específica do meio;
- $l$  é uma escala de comprimento característica;
- $B$  é o campo magnético externo, onde o fluido condutor escoou;
- $u$  é a velocidade característica do escoamento.

### (i) Número de Reynolds magnético

O número de Reynolds magnético é um parâmetro adimensional, que representa o quanto o campo magnético induzido pode alterar o imposto. Quando este número é grande ( $Re_m \gg 1$ ) significa que a influência de um sobre o outro é muito intensa, o campo induzido altera fortemente o indutor e as linhas de campo magnético parecem se mover como elásticos congelados no fluido condutor em escoamento. O congelamento do campo magnético faz com que seja previsível uma configuração magnética futura a partir de uma no presente, sendo, portanto, fundamental na compreensão de fenômenos fluidodinâmicos.

Isto traz duas consequências, quando o número de Reynolds magnético é grande: (a) o fluxo magnético através de uma espira em movimento no interior do campo magnético imposto tem valor constante (note que o número de linhas que atravessam a espira da Figura 2.21 antes e depois de entrar em movimento é o mesmo); (b) pequenas perturbações no meio resultam em oscilações quase-elásticas, onde o campo magnético imposto fornece a força restauradora. Se o meio for fluido, isto resultará nas chamadas ondas de Alfvén, que têm uma frequência angular de  $\omega \sim \frac{v_{alf}}{l}$ , onde  $v_{alf}$  é a velocidade de Alfvén, citada na Tabela 2.3.

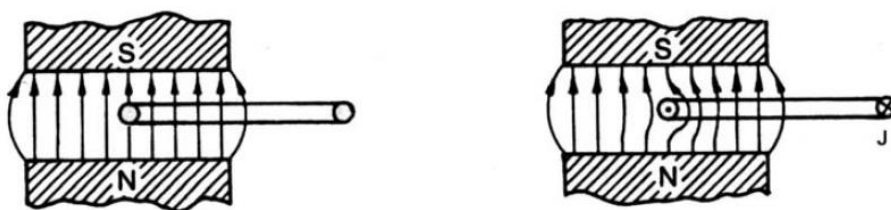


Figura 2.21 - Para  $Re_m \gg 1$ , as linhas de campo parecem com elásticos arrastados pelo movimento e mantendo o fluxo magnético constante no interior da espira.  
Fonte: DAVIDSON (2001).

Quando o número de Reynolds magnético é pequeno ( $Re_m \ll 1$ ) significa que o campo magnético induzido e a velocidade de escoamento  $\mathbf{u}$  tem pouca influência sobre o campo magnético imposto. O campo induzido é muito menor que o indutor. O campo magnético tem natureza dissipativa e não elástica, amortecendo o movimento e transformando energia cinética de escoamento em calor (efeito Joule e dissipação viscosa). A escala de tempo relevante é o tempo de amortecimento, mostrado na Tabela 2.3.

### (ii) Velocidade de Alfvén

Se pequenas perturbações, de amplitude  $\eta$ , são provocadas em um fluido condutor (com  $Re_m \gg 1$ ) escoando em um campo magnético imposto  $B$ , faz-se com que esta energia de vibração se propague como uma onda ao longo do campo. Estas ondas, as chamadas ondas de Alfvén, são ondas transversais que se propagam paralelamente às linhas de campo magnético e podem ser geradas em qualquer fluido eletricamente condutor permeado por um campo magnético (Figura 2.22). Elas foram deduzidas em 1942 por Hannes Olof Gösta Alfvén através das equações do eletromagnetismo e da hidrodinâmica.

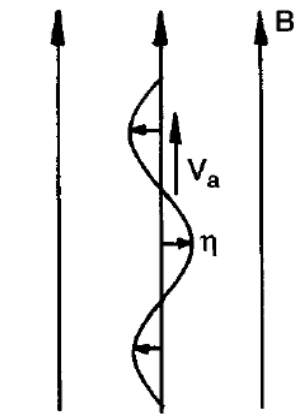


Figura 2.22 - Uma onda de Alfvén com amplitude  $\eta$ , propagando-se com velocidade  $v_a$  em um campo  $B$ . Fonte: DAVIDSON, 2001.

A confirmação experimental de sua existência ocorreu sete anos depois, através do estudo de ondas em mercúrio líquido. Já se sabe que essas ondas constituem um mecanismo importante de transporte de energia e momento linear em vários sistemas de MHD, tanto astrofísicos quanto geofísicos. (COSTA JR *et al.*, 2011).

Sabe-se que a tensão magnética que atua ao longo das linhas de campo magnético é dada por  $T = \frac{B_0^2}{\mu_0}$ , ela tensiona o campo de modo semelhante a uma corda esticada por uma tensão  $T$ .

Fazendo analogia, então, à velocidade de propagação de uma onda nesta corda,  $v = \sqrt{\frac{TENSÃO}{DENSIDADE}}$ , tem-se que a velocidade de propagação das ondas Alfvén é dada por:

$$v_{alf} = \frac{B}{\sqrt{\rho\mu_0}}$$

Uma análise dimensional confirma a homogeneidade da equação acima.

### (iii) Tempo de amortecimento magnético

Quando o escoamento se dá com um fluido que não é perfeitamente condutor (com  $Re_m \ll 1$ ), ou se consideram efeitos viscosos, as ondas de Alfvén que nele se propagam serão amortecidas e suas energias transmitidas para o meio em que estão se propagando na forma de calor.

O amortecimento destas ondas, governado pelo tempo de amortecimento, ilustrado na Tabela 2.3:

- cresce rapidamente com a frequência de oscilação, pois o aumento da mesma geraria a mais rápida interação com o meio e a conseqüente geração de calor;
- decresce rapidamente com o quadrado da intensidade do campo magnético;
- cresce com a viscosidade do fluido e a difusividade magnética “ $\lambda_m$ ” (lembrando que a difusividade magnética aumenta com a diminuição da condutividade  $\sigma$  do fluido, a saber:  $\lambda_m = 1/\mu_0\sigma$ ).

### 2.3.3. EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DO CAMPO MAGNÉTICO

Combinando as leis de Ohm, Faraday e Ampère obtém-se a equação que relaciona o campo magnético ( $\vec{B}$ ) com o campo de escoamento ( $\vec{u}$ ).

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left[ \left( \frac{\vec{J}}{\sigma} \right) - \vec{u} \times \vec{B} \right] = \vec{\nabla} \times \left( \vec{u} \times \vec{B} - \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0 \sigma} \right)$$

Tomando a identidade vetorial  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$ , acrescida da lei de Gauss para o campo magnético ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ), a equação acima simplifica-se para:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \lambda_m \nabla^2 \vec{B} \quad (2.38)$$

sendo  $\lambda_m = (\mu_0 \sigma)^{-1}$  a denominada de difusividade magnética. Observa-se o forte acoplamento entre o campo do escoamento e o campo magnético, caracterizando a interação de duas vias entre os dois campos. Condições de contorno e condições iniciais devem ser especificadas para o

campo magnético, de maneira a se estabelecer a solução de cada problema (SHERCLIFF, 1965). Como toda difusividade,  $\lambda_m$  tem como unidade, no sistema internacional,  $m^2/s$ .

Quando essa equação é escrita na forma adimensional, aparece um parâmetro (adimensional) o qual indica a intensidade relativa entre a advecção e a difusão do campo magnético. Por sua analogia com a equação de transporte de quantidade de movimento, tal parâmetro recebeu o nome de número de Reynolds magnético, já introduzido na Tabela 2.3 e agora mostrado na Equação (2.39).

$$Re_m = \mu_0 \sigma u \ell = \frac{u \ell}{\lambda_m} \quad (2.39)$$

Assim, quando  $Re_m$  é alto, a difusão do campo magnético é baixa, e o campo magnético é “arrastado/advectado” pelo escoamento. Caso contrário, quando  $Re_m$  é baixo, o campo magnético é difundido no campo de escoamento (SALAH, 1999).

### 2.3.4. EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Campos magnéticos, como qualquer outra força de campo/corpo, atuam em todo ponto do escoamento, de maneira que seu efeito é diretamente incluído através de um termo adicional de força por unidade de volume, a força de Lorentz volumétrica (Eq. 2.33). Assim, levando-se em conta tal força de corpo, as equações da continuidade de Navier-Stokes (as equações de conservação da massa e de quantidade de movimento), para um fluido incompressível com propriedades físicas constantes são escritas como (BATCHELOR, 2000):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.40a)$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\vec{F}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{(\vec{J} \times \vec{B})}{\rho} \quad (2.40b,c)$$

Três grupos adimensionais aparecem quando as equações de Navier-Stokes são escritas na forma adimensional. O primeiro é o número de Reynolds,  $Re = \frac{u\ell}{\nu}$ , que indica a razão das forças inerciais,  $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$ , pelas forças viscosas,  $\nu \nabla^2 V$ .

O segundo grupo é denominado parâmetro de interação magnética:

$$N_m = \frac{\sigma B^2 \nabla \ell}{\rho u} = \frac{\ell}{u \tau_m} \quad (2.41)$$

em que  $\tau_m$  é o tempo de amortecimento magnético (Tabela 2.3). O parâmetro de interação magnética é importante em situações onde a densidade de corrente  $\vec{J}$  se deve principalmente à  $\vec{u} \times \vec{B}$  na lei de Ohm. Em tal situação,  $N$  representa a razão das forças de Lorentz,  $(\vec{J} \times \vec{B})/\rho$ , pelas forças de inércia,  $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$ .

Finalmente, o terceiro parâmetro adimensional, denominado de número de Hartmann, é um híbrido entre  $Re$  e  $N$  representando a razão das forças de Lorentz,  $(\vec{J} \times \vec{B})/\rho$ , pelas forças viscosas,  $\nu \nabla^2 V$ :

$$Ha = (N_m Re)^{1/2} = B \ell \left( \frac{\sigma}{\rho \nu} \right)^{1/2} = B \ell \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^{1/2} \quad (2.42)$$

## **CAPÍTULO III**

### 3. REVISÃO DE LITERATURA

#### 3.1 MAGNETOHIDRODINÂMICA EM CANAIS

No presente trabalho estuda-se o desenvolvimento do campo de velocidade e do campo magnético, sob temperatura constante, na região de entrada de um canal de placas planas e paralelas, considerando o escoamento laminar, não isotérmico, de um fluido condutor elétrico sob a influência de um campo magnético externo. O intento é se estudar, principalmente, a influência do campo magnético externo sobre o escoamento e vice-versa. Neste trabalho, equacionar-se-ão, em termos de funções escalares, os campos citados acima e suas soluções dadas usando-se o método numérico-analítico da técnica da transformada integral generalizada. Com esses objetivos, é realizada uma revisão dos principais trabalhos que antecederam este e que pautaram o desenvolvimento do mesmo.

Os estudos iniciais sobre essa geometria de canais se mostraram focados apenas na dinâmica do escoamento (CHANG E LUNDGREN, 1959; TAO, 1960; MANOHAR, 1966; HWANG *et al.* 1966). Concomitante aos anteriores, efeitos térmicos também começavam a ser considerados, principalmente no estudo do problema da entrada térmica (desenvolvimento térmico sob condições de escoamento completamente desenvolvido sob um campo magnético: o escoamento de Hartmann). Nesses estudos, as propriedades termofísicas dos fluidos foram consideradas uniformes (NIGAM E SINGH, 1960; ALPHER, 1961; SHOHET *et al.*, 1962; ERASLAN E ERASLAN, 1969).

Posteriormente, desde que outros dispositivos magnetohidrodinâmicos (tais como em reatores nucleares) geralmente operam a temperaturas elevadas, a atenção foi voltada para o problema da entrada térmica magnetohidrodinâmica sob condições de propriedades de transporte dependentes da temperatura (HEYWOOD, 1965; ROSA, 1971; SETAYESH E SAHAI, 1990; ATTIA AND KOB, 1996; ATTIA, 1999; LIMA *et al.*, 2007).

Shercliff (1953, 1965) desenvolveu métodos aproximados para resolver o problema da entrada magnetohidrodinâmica em medidores de vazão de seção circular e retangular, mas não chegou a determinar, explicitamente, perfis de velocidades.

Roidt e Cess (1962) aplicaram o método de pequenas perturbações para o número de Reynolds abaixo do valor crítico, desenvolvido por Tollmien (1929) e Schlichting (1968), para resolver o problema do escoamento magnetohidrodinâmico na região de entrada de um canal

plano. As equações governantes foram inicialmente linearizadas e as equações resultantes foram resolvidas analítica e numericamente. O perfil de velocidade na entrada do duto foi considerado uniforme.

Manohar (1966) estudou o mesmo problema, aplicando um procedimento numérico semelhante ao de Hartree (1949), onde os termos das equações de governo envolvendo derivadas na direção do escoamento (direção  $x$ ) eram substituídos por diferenças finitas, enquanto as outras quantidades eram substituídas por suas médias. De acordo com o autor, o método empregado é mais acurado do que o anterior, uma vez que o mesmo corresponde apenas à primeira iteração do esquema desenvolvido por ele.

Hwang e Fan (1963) também estudaram o mesmo problema de entrada magnetohidrodinâmica com perfil de entrada uniforme na entrada do canal, mas desenvolveram um esquema mais adequado de diferenças finitas para o tipo de solução das equações não lineares que governam o problema, obtendo melhores resultados.

Maciulaitis e Loeffler (1964) empregaram o método integral de Karman-Pohlhausen para tratar o escoamento magnetohidrodinâmico na região de entrada de um canal, considerando um perfil de velocidade parabólico na entrada.

Posteriormente, Hwang *et al.* (1966), empregando um esquema de diferenças finitas semelhante ao desenvolvido por Hwang e Fan (1963), resolveram o mesmo problema de entrada magnetohidrodinâmica, considerando agora um perfil parabólico na entrada do canal. Por empregarem um método mais robusto, chegaram a resultados mais confiáveis do que os de Maciulaitis e Loeffler (1964).

Chen e Chen (1972) adaptaram o método desenvolvido por Sparrow *et al.* (1964) para o estudo de escoamentos em dutos, e analisaram a região de entrada do escoamento magnetohidrodinâmico induzido por uma distribuição de velocidade arbitrária na entrada do canal. Resolveram uma forma linearizada das equações de camada limite que descrevem o escoamento.

Dentre os trabalhos pesquisados, o único trabalho que relatava a solução do problema da entrada hidrodinâmica na presença de um campo magnético, considerando as equações de Navier-Stokes, foi o reportado por Brandt e Gillis (1966). Empregando a formulação de função corrente, empregaram um esquema de diferenças finitas para resolver as equações sem recorrer a nenhum recurso simplificador. Esta referência será tomada como base para o presente trabalho.

O problema do desenvolvimento simultâneo começou a ser tratado por Shohet *et al.* (1962). Considerando ambos os perfis, de velocidade e de temperatura, uniformes na entrada do canal, resolveram o problema da entrada simultânea, discretizando as equações na formulação de camada limite, baseando-se no método de diferenças finitas de Bodoia e Osterle (1961). Consideraram ainda duas condições de operação do canal: como gerador, na qual energia elétrica pode ser removida do fluido, e como bomba ou motor, na qual energia elétrica é adicionada ao fluido, introduzindo-se uma força de corpo aceleradora no escoamento.

Em um trabalho pioneiro, Rosa (1971) discutiu, experimental e teoricamente, o efeito de propriedades de transporte variáveis em escoamentos sob campos magnéticos.

Lohrasbi (1987) considerou a variação das propriedades de transporte com a temperatura em um escoamento bifásico unidimensional submetido a campos magnéticos.

Setayeshpour e Sahai (1985) também discutiram o efeito de propriedades de transporte dependentes da temperatura na região de entrada de um canal, considerando um tipo de condição de contorno generalizada, na qual o fluxo de calor é função linear da temperatura local.

Lima *et al.* (2007) resolvem o problema do escoamento MHD transiente em um canal de placas paralelas porosas e móveis, acrescido de transferência de calor para o fluido newtoniano adotado, utilizando-se a GITT.

Rêgo (2010) e Lima e Rêgo (2013) empregaram a GITT para analisar o problema do desenvolvimento simultâneo do escoamento MHD com transferência de calor em um canal de placas paralelas mantidas a temperatura constante, iguais ou diferentes. Naquele estudo, o escoamento podia entrar no canal sob um perfil uniforme ou parabólico de velocidade.

Aoki (2011) mostra a construção e operação de um dispositivo MHD, um canal de placas paralelas preenchido com fluido eletrolítico, conhecido como macrobomba. O escoamento se desenvolve na presença de campos magnético e elétrico externos e é resolvido numericamente, pelo acoplamento das equações de Navier-Stokes e de Maxwell.

Jelena (2014) resolve analiticamente o problema de um canal de placas paralelas e tubular sob ação de um campo magnético muito forte, paralelo e transversal ao escoamento, usando a aproximação de Oseen e a transformada de Fourier. Além disso, soluções assintóticas para números de Hartmann elevados são obtidas.

Finalmente, Pontes (2015) faz análise do escoamento com transferência de calor com formulação matemática dos modelos dada em termos de função corrente, obtida a partir das

equações de Navier-Stokes e da equação da energia. As hipóteses adotadas são de regime permanente, escoamento laminar e incompressível e propriedades físicas constantes. Admite-se também que o campo magnético externo, aplicado na direção normal ao escoamento, permanece uniforme, não sendo, dessa forma, influenciado por nenhum efeito magnético interno.

### **3.2. TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA**

Na área de magnetohidrodinâmica, é uma ubiquidade moderna que os problemas, após equacionados, não tenham solução exclusivamente analíticas, então, uma solução híbrida (numérico-analítica) seria minimamente desejável e é, exatamente, onde se aplica a, já bem fundamentada, técnica da transformada integral generalizada (GITT). Pautada em técnicas de aproximação numéricas e graças ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade de processamento e de grande capacidade de armazenamento de dados, é a ferramenta mais adequada e será empregada no presente trabalho.

As origens da denominada Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) estão associadas ao trabalho de Ozisik e Murray (1974), sobre a solução de problemas difusivos com coeficientes variáveis nas condições de contorno, onde vislumbrou-se a capacidade de se fornecer soluções analíticas aproximadas a uma faixa muito maior de problemas. A GITT, como já foi dito, proporciona soluções de natureza híbridas, numérico-analíticas, para problemas de convecção-difusão, entre outras, cuja transformação integral resulte em sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas, ou cujos problemas auxiliares são complexos do ponto de vista computacional.

Desde então, a GITT ganhou robustez no sentido de estender as ideias do procedimento de transformação integral para classes gerais de problemas, tanto lineares, quanto não-lineares. Um trabalho completo e sistemático sobre GITT é apresentado em Cotta (1993) e, revisões e atualizações posteriores do progresso da técnica, encontram-se em Cotta (1998) e Santos *et al.* (2001).

Silva (2011), Rêgo (2013), Silva (2014) e Pontes (2015) resolvem diferentes escoamentos sob à luz da técnica da transformada integral generalizada e representam, como foram e ainda serão citados, os trabalhos mais recentes nesta área.

Além de ser um método computacional alternativo, a abordagem proporcionada pela GITT é particularmente adequada para a obtenção de soluções para validação de códigos

numéricos, devido a característica de controle automático de erro, semelhante a uma solução analítica pura. Outro aspecto importante do método é a extensão direta a situações multidimensionais com um aumento não muito grande no esforço computacional, comparativamente ao caso unidimensional. A característica híbrida é a responsável por esse comportamento, uma vez que a solução analítica é empregada em todas as variáveis independentes, com exceção de uma, fazendo com que a tarefa numérica seja sempre reduzida à integração de um sistema diferencial ordinário em apenas uma direção (COTTA, 1993).

Assim, esta é uma técnica caracterizada pela garantia de convergência das soluções, para uma ordem crescente de truncamento das séries-soluções. Esta peculiaridade indica que é possível encontrar soluções com quantidade de algarismos significativos “exatos” (convergidos) para uma certa quantidade de termos nas expansões. Isto posto, o método tem precisão controlada, estabelecida na ordem de truncamento das expansões, que pode ser automaticamente encontrado durante o processo de solução, assemelhando-se bastante ao de uma solução puramente analítica.

Segundo Cotta (1998), as aplicações do método podem ser divididas em:

- Problemas que apresentem coeficientes variáveis em suas condições de contorno;
- Problemas que apresentem coeficientes variáveis nas equações governantes;
- Problemas que apresentem contornos variáveis;
- Problemas com fronteiras móveis;
- Problemas que envolvem dificuldades na solução do problema auxiliar;
- Problemas não-lineares caracterizados pela presença de equações cujos termos fonte e/ou condições de contorno dependam da função escalar a ser obtida.

Na última categoria, se encontra a maioria dos problemas na engenharia, particularmente na mecânica dos fluidos e transferência de calor, que podem ser citados: condução de calor com condutividade térmica variável, solução das equações da camada limite e solução das equações de Navier-Stokes (COTTA, 1992; LIMA, 1995; LIMA, 2000).

Isto posto, para declarar os passos seguidos até a aplicação da GITT no presente trabalho (que se enquadra na última categoria supracitada), procede-se assim: a partir do sistema de equações governantes do problema, inicia-se um processo de simplificação que passa pela adimensionalização das equações governantes e de suas condições de contorno, em seguida, no intento de se reduzir o número de variáveis, escreve-se as equações e condições de contorno, em

termos de funções escalares auxiliares. Como surgem equações diferenciais não homogêneas nas condições de contorno, aplica-se uma filtragem nas equações no sentido de se eliminar estas não homogeneidades. Só então o problema está pronto para receber a GITT. Estes passos serão descritos nos capítulos IV e V.

Ainda, na utilização da GITT, alguns passos devem ser aplicados sequencialmente, os quais podem ser assim resumidos:

1. Escolha de um problema auxiliar apropriado. Este tem por base um problema de autovalor que satisfaz, simultaneamente, dois requisitos:
  - a) Possuir a maior quantidade de informações possíveis do problema original, a ser resolvido nas direções coordenadas, escolhidas para a transformação;
  - b) Ser de solução relativamente simples, de preferência analítica.
2. Solução do problema auxiliar e obtenção das autofunções, autovalores, normas e das propriedades de ortogonalidade.
3. Descrição das funções escalares como uma expansão das autofunções oriundas do problema auxiliar. Determinação do par transformada/inversa.
4. Transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais originais, aplicando-se a fórmula da transformada em todos os termos das equações originais, seguida da fórmula de inversão nos termos não transformáveis. Obtém-se, assim, um sistema diferencial ordinário acoplado na variável independente restante.
5. Truncamento do sistema diferencial ordinário infinito e solução do sistema restante, por procedimentos numéricos bem estabelecidos disponíveis em bibliotecas de sub-rotinas, para obtenção dos campos transformados com precisão prescrita. Neste ponto, utiliza-se o controle automático de erro global para se ajustar as ordens de truncamento do sistema transformado e oferecer estimativas de erro relativo.
6. Obtenção das funções escalares originais, fazendo-se uso da fórmula analítica de inversão.

Basicamente, a aplicação da GITT em sistemas de equações diferenciais parciais, por meio de operadores integrais apropriados, leva à eliminação de variáveis independentes do problema, e como consequência à obtenção de um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias (EDOs) acopladas. Tal sistema, denominado simplesmente de sistema transformado,

deve ser truncado em uma ordem finita para que se possa resolvê-lo. A ordem de truncamento é selecionada de acordo com a precisão prescrita desejada. Se o sistema transformado apresentar solução analítica, esta pode ser obtida automaticamente através de sistemas de computação simbólica, caso contrário, uma solução numérica deve ser obtida através de algoritmos computacionais disponíveis em diversas bibliotecas de sub-rotinas específicas.

Do ponto de vista das aplicações práticas de engenharia, pode-se citar o sucesso da utilização da GITT na análise de equipamentos termo-hidráulicos, migração de rejeitos radioativos em solos, aerodinâmica de veículos espaciais, poluição ambiental, processo de secagem, problemas térmicos em siderurgia, enriquecimento isotópico, combustão, resfriamento de equipamentos eletrônicos, reservatórios de petróleo, entre outros (SILVA, 2014).

## **CAPÍTULO IV**

## 4. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

### 4.1. MODELAGEM MATEMÁTICA

No presente trabalho considera-se um canal de placas paralelas, onde as placas horizontais são isolantes e as verticais são constituídas por condutores onde serão colocados eletrodos para aferição de tensões, para a imposição de corrente ou para a ligação de uma carga resistiva. Um campo magnético externo,  $\vec{B}_0^*$ , será imposto paralelamente às placas condutoras verticais e o escoamento se dá ao longo do eixo  $x^*$ , conforme indicado na Figura 4.1. No interior do canal, o escoamento influencia no desenvolvimento, transporte e formato das linhas de campo magnético e que, por sua vez, influenciam o escoamento, cujas equações e resultados serão colocados *a posteriori*.

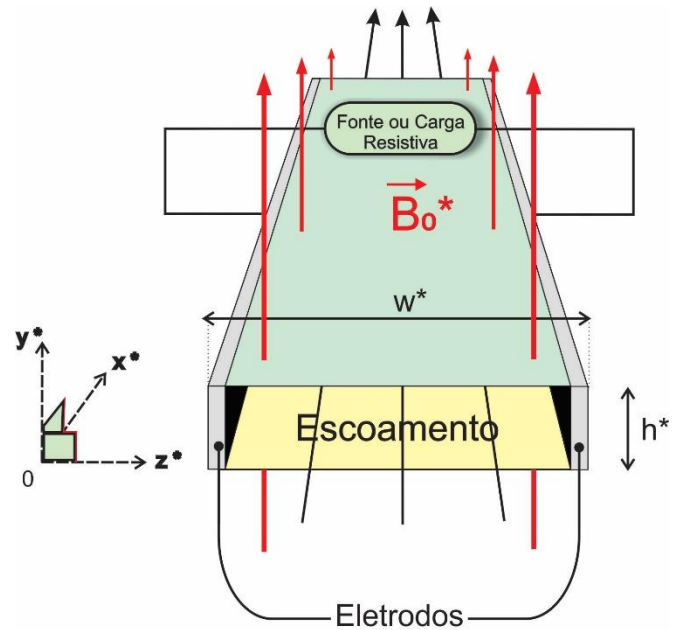


Figura 4.1 – Desenho esquemático ilustrando o escoamento do fluido condutor no interior de um canal retangular de placas paralelas, sendo duas condutoras e duas isolantes, submetido a um campo magnético externo,  $B_0^*$ . Fonte: elaborada pelo autor.

As seguintes hipóteses simplificadoras são consideradas na análise do problema:

- a) Efeitos secundários de borda desprezíveis ( $h^* \ll w^*$ , as placas verticais não interferem no escoamento na porção central do canal);
- b) O escoamento é bidimensional, incompressível, laminar e permanente (o vetor velocidade é descrito por duas componentes  $\vec{V}^* = \vec{V}^*(x^*, y^*) = u_x^*(x^*, y^*)\hat{i} + u_y^*(x^*, y^*)\hat{j}$ ). O interesse concentra-se no plano de simetria do canal (plano x-y) e considera-se que as correntes induzidas no eixo  $z^*$  não provocam movimento do fluido nesta direção ( $u_z^* = 0$ ).
- c) O campo magnético externo é uniforme e constante, apontando para a direção positiva de  $y^*$  (o vetor campo magnético externo é escrito como  $\vec{B}_{Ext}^* = B_0^* \hat{j}$ );

**d)** No interior do canal são induzidos campos magnéticos bidimensionais, de tal forma que,  $\vec{B}_{Ind}^* = \vec{B}_{Ind}^*(x^*, y^*) = B_x^*(x^*, y^*)\hat{i} + B_y^*(x^*, y^*)\hat{j}$ . Desta maneira, o campo magnético resultante interno é dado pela superposição dos campos induzido e externo, tal que:

$$\vec{B}^* = \vec{B}_{Ext}^* + \vec{B}_{Ind}^* = B_0^*\hat{j} + [B_x^*(x^*, y^*)\hat{i} + B_y^*(x^*, y^*)\hat{j}] = B_1^*(x^*, y^*)\hat{i} + B_2^*(x^*, y^*)\hat{j} \quad (4.1a)$$

$$B_1^*(x^*, y^*) = B_x^*(x^*, y^*) \quad (4.1b)$$

$$B_2^*(x^*, y^*) = B_0^* + B_y^*(x^*, y^*) \quad (4.1c)$$

**e)** Qualquer campo elétrico externamente imposto é uniforme e constante, apontando para a direção positiva de  $z^*$  (o vetor campo elétrico é escrito como  $\vec{E}^* = E_z^*\hat{k}$ );

**f)** O efeito Hall e o deslizamento de íons não são considerados na lei de Ohm, ou seja, correntes axiais devido ao efeito da curvatura de trajetórias de elétrons e íons em um campo magnético não são considerados, por conseguinte, não são induzidas componentes de velocidade na direção transversal (SUTTON e SHERMAN, 2006);

**g)** O fluido é considerado eletricamente condutor e não-magnético;

**h)** Todos os efeitos térmicos serão negligenciados, o escoamento se dá sob temperatura constante.

Agora, colocadas as aproximações de simplificação, escreve-se a lei de Ohm (Eq. 2.35) da seguinte forma:

$$\vec{J}^* = \sigma(\vec{E}^* + \vec{V}^* \times \vec{B}^*) = J_x^*\hat{i} + J_y^*\hat{j} + J_z^*\hat{k}$$

Usando as simplificações (b), (d) e (e), tem-se:

$$\vec{J}^* = \sigma \left[ E_z^*\hat{k} + (u_x^*\hat{i} + u_y^*\hat{j}) \times (B_1^*\hat{i} + B_2^*\hat{j}) \right] = \sigma (E_z^* + u_x^*B_2^* - u_y^*B_1^*)\hat{k} = J_z^*\hat{k} \quad (4.2a)$$

$$J_x^* = 0, \quad J_y^* = 0, \quad J_z^* = \sigma (E_z^* + u_x^*B_2^* - u_y^*B_1^*) \quad (4.2b)$$

Este resultado demonstra que, quando um campo elétrico é aplicado por uma fonte de tensão, ressaltando-se que somente a deflexão dos elétrons é considerada, a corrente induzida e a corrente devido ao campo eletrostático (quando aplicado), se dá somente no eixo  $z^*$  e no sentido de  $\hat{k}$ , com intensidade  $J^* = J_z^* = \sigma(E_z^* + u_x^*B_2^* - u_y^*B_1^*)$ .

Agora, desenvolvendo a força de Lorentz volumétrica ( $\vec{F}^* = \vec{J}^* \times \vec{B}^*$ ), observa-se que suas componentes são dadas por:

$$\vec{F}^* = J_z^* \hat{k} \times (B_1^* \hat{i} + B_2^* \hat{j}) = -J_z^* B_2^* \hat{i} + J_z^* B_1^* \hat{j} = F_x^* \hat{i} + F_y^* \hat{j}$$

Logo,

$$F_x^* = -J_z^* B_2^* = -\sigma B_2^* [E_z^* + u_x^* B_2^* - u_y^* B_1^*] \quad (4.3a)$$

$$F_y^* = J_z^* B_1^* = \sigma B_1^* [E_z^* + u_x^* B_2^* - u_y^* B_1^*] \quad (4.3b)$$

Assim, a força de Lorentz,  $\vec{F}^* = \vec{J}^* \times \vec{B}^*$ , atua na direção  $x^*$ , em sentido contrário a  $\hat{i}$  e na direção  $y^*$ , no mesmo sentido de  $\hat{j}$ .

Um desenho esquemático da região de interesse para estudo (o plano de simetria do canal retangular mostrado na Figura 4.1), ilustrando os tipos de condições de contorno empregadas na análise é visualizado na Figura 4.2 a seguir.

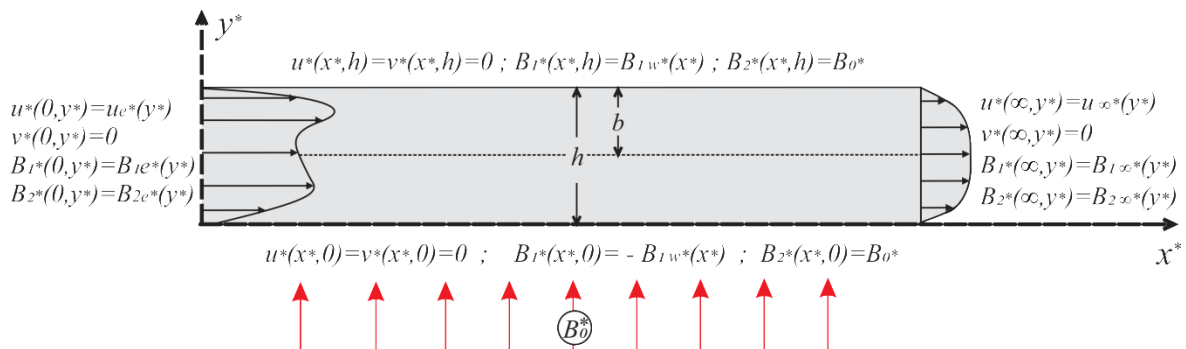


Figura 4.2 - Desenho esquemático da região sob estudo (plano central do canal retangular) e condições de contorno. Fonte: elaborada pelo autor.

Em função das hipóteses simplificadoras, expandindo as equações da continuidade de Navier-Stokes (2.40) e do campo magnético (2.38), levando em conta as características de cada campo, o problema é modelado em variáveis primitivas ( $u^* = u_x^*(x^*, y^*)$  e  $v^* = u_y^*(x^*, y^*)$ ) por:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (4.4)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \nu \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{1}{\rho} J_z^* B_2^* \quad (4.5)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \nu \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{1}{\rho} J_z^* B_1^* \quad (4.6)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^*} [u^* B_2^* - v^* B_1^*] + \lambda_m \left( \frac{\partial^2 B_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 B_1^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (4.7)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x^*} [u^* B_2^* - v^* B_1^*] + \lambda_m \left( \frac{\partial^2 B_2^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 B_2^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (4.8)$$

É importante esclarecer que as Equações 4.7 e 4.8 são obtidas à partir das equações do transporte do campo magnético (lei de Faraday), da lei de Ohm, da lei de Ampère e da lei de Gauss para o campo magnético, respectivamente, reescritas abaixo.

$$\vec{\nabla}^* \times \vec{E}^* = -\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t^*} = 0 \quad (4.9)$$

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{J}^*}{\sigma} - \vec{\nabla}^* \times \vec{B}^* \quad (4.10)$$

$$\vec{J}^* = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}^* \times \vec{B}^* \quad (4.11)$$

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{B}^* = 0 \quad (4.12)$$

As condições de contorno na entrada e na saída do canal são descritas como:

$$x^* = 0 \begin{cases} u^*(0, y^*) = u_e^*(y^*) \\ v^*(0, y^*) = 0 \\ B_1^*(0, y^*) = B_{1e}^*(y^*) \\ B_2^*(0, y^*) = B_{2e}^*(y^*) \end{cases}; \quad x^* \rightarrow \infty \begin{cases} u^*(x^* \rightarrow \infty, y^*) = u_\infty^*(y^*) \\ v^*(x^* \rightarrow \infty, y^*) = 0 \\ B_1^*(x^* \rightarrow \infty, y^*) = B_{1\infty}^*(y^*) \\ B_2^*(x^* \rightarrow \infty, y^*) = B_{2\infty}^*(y^*) \end{cases} \quad (4.13a-h)$$

Enquanto que as condições de contorno nas placas dielétricas, inferior e superior, são, respectivamente:

$$y^* = 0 \begin{cases} u^*(x^*, 0) = 0 \\ v^*(x^*, 0) = 0 \\ B_1^*(x^*, 0) = -B_{1w}^*(x^*) \\ B_2^*(x^*, 0) = B_0^* \end{cases} ; \quad y^* = h \begin{cases} u^*(x^*, h) = 0 \\ v^*(x^*, h) = 0 \\ B_1^*(x^*, h) = B_{1w}^*(x^*) \\ B_2^*(x^*, h) = B_0^* \end{cases} \quad (4.14a-h)$$

As condições de contorno na entrada do canal ( $x^* = 0$ ) especificam que: a componente horizontal da velocidade é uma função de  $y^*$  e que não há componente vertical da mesma (4.13a,b), ou seja o escoamento é paralelo e horizontal na entrada; o campo magnético é imposto somente na vertical (4.13c,d).

As condições de contorno na saída do canal ( $x^* \rightarrow \infty$ ) estabelecem que os campos de velocidade e magnético estão completamente desenvolvidos, isto é, não sofrem variações com a coordenada  $x^*$  ( $\frac{\partial}{\partial x^*} = 0$ ), Eqs. (4.13e-h). Note que, diferentemente da componente vertical do campo de velocidade (que é nula), a componente vertical do campo magnético é diferente de zero (dada pela superposição do campo magnético imposto e da componente vertical do campo magnético induzido nesta região), sendo descrita pela equação da condição de contorno (4.13h).

As condições de contorno nas placas ( $y^* = 0$  e  $y^* = h$ ) especificam a condição de não deslizamento do fluido,  $u^*(x^*, 0) = 0$  e  $u^*(x^*, h) = 0$ , e de impermeabilidade das placas,  $v^*(x^*, 0) = 0$  e  $v^*(x^*, h) = 0$ ; as condições de contorno para a componente longitudinal do campo magnético ( $B_1^*(x^*)$ ) nas placas isolantes (horizontais) são definidas de acordo com o tipo de conexão de um circuito elétrico com as placas condutoras laterais (verticais) e da interação entre o escoamento e o próprio campo magnético. Estas condições serão mais bem esclarecidas na seção seguinte e no apêndice A (região de escoamento completamente desenvolvido) onde as equações e condições de contorno serão escritas em termos de parâmetros adimensionais.

## 4.2. ADIMENSIONALIZAÇÃO E GRUPOS ADIMENSIONAIS

Com o objetivo de simplificar o processo de solução das equações governantes, os seguintes grupos adimensionais são definidos:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x^*}{h} & y &= \frac{y^*}{h} & u &= \frac{u^*}{\bar{U}_e} \\
 v &= \frac{v^*}{\bar{U}_e} & p &= \frac{p^* - p_e^*}{\rho \bar{U}_e^2} & E_z &= \frac{E_z^*}{\bar{U}_e b_0} \equiv \frac{E_z^*}{\bar{U}_e B_0^*} Ha \\
 B_x &= \frac{B_x^*}{b_0} & B_y &= \frac{B_y^*}{b_0} & b_0 &= \frac{1}{h} \left( \frac{\mu}{\sigma} \right)^{1/2} \equiv \frac{B_0^*}{Ha} \quad (4.15a-o) \\
 B_1 &= \frac{B_1^*}{b_0} = B_x & B_2 &= \frac{B_2^*}{b_0} = B_y + Ha & Ha &= \frac{B_0^*}{b_0} = B_0^* h \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^{1/2} \\
 J_z &= \frac{J_z^*}{\sigma \bar{U}_e b_0} & Re &= \frac{\bar{U}_e h}{\nu} & Re_m &= \mu_0 \sigma \bar{U}_e h = \frac{\bar{U}_e h}{\lambda_m}
 \end{aligned}$$

Nesses grupos,  $\bar{U}_e$  e  $p_e^*$  denotam, respectivamente, a velocidade média e a pressão média do escoamento na entrada do canal. Para a física estudada,  $Ha$  é o número de Hartmann,  $Re$  é o número de Reynolds,  $Re_m$  é o número de Reynolds magnético,  $\lambda_m = 1/(\mu_0 \sigma)$  é a difusidade magnética e  $E_z$  é o campo elétrico imposto nos eletrodos do canal.

Empregando-se os grupos adimensionais anteriores, as equações de governo são escritas adimensionalmente como se segue:

---

<sup>8</sup> Note-se que o termo  $b_0$  tem dimensão de campo de indução magnética e, portanto, não é adimensional. Entretanto, este termo é mostrado junto aos demais, pois é fundamental no processo de adimensionalização.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.16)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\text{Re}} J_z B_2 \quad (4.17)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} J_z B_1 \quad (4.18)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (u B_2 - v B_1) + \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} \right) \quad (4.19)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x} (u B_2 - v B_1) + \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y^2} \right) \quad (4.20)$$

Sendo, o vetor densidade de corrente (Lei de Ohm) escrito por:

$$\vec{J} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = J_z \hat{k} \quad (4.23a)$$

$$J_z = (E_z + u B_2 - v B_1) \quad (4.23b)$$

E, também, pela Lei de Ampère:

$$\vec{J} = \frac{1}{\text{Re}_m} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) \hat{k} \equiv J_z \hat{k} \quad (4.24a)$$

$$J_z = \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) \quad (4.24b)$$

Na forma adimensional, as condições de contorno na entrada e na saída do canal passam a ser escritas como:

$$x=0 \begin{cases} u(0, y) = u_e(y) \\ v(0, y) = 0 \\ B_1(0, y) = B_{1e}(y) \\ B_2(0, y) = B_{2e}(y) \end{cases} ; \quad x \rightarrow \infty \begin{cases} u(x \rightarrow \infty, y) = u_\infty(y) \\ v(x \rightarrow \infty, y) = 0 \\ B_1(x \rightarrow \infty, y) = B_{1\infty}(y) \\ B_2(x \rightarrow \infty, y) = B_{2\infty}(y) \end{cases} \quad (4.25a-h)$$

Enquanto que as condições de contorno nas placas dielétricas são:

$$y=0 \begin{cases} u(x,0) = 0 \\ v(x,0) = 0 \\ B_1(x,0) = -B_{1w}(x) \\ B_2(x,0) = Ha \end{cases} ; \quad y=1 \begin{cases} u(x,1) = 0 \\ v(x,1) = 0 \\ B_1(x,1) = B_{1w}(x) \\ B_2(x,1) = Ha \end{cases} \quad (4.26a-h)$$

O desenvolvimento para a determinação das condições de contorno, em especial, relativas à região da entrada do canal ( $u_e$ ,  $B_{1e}$  e  $B_{2e}$ ) e dos campos completamente desenvolvidos ( $u_\infty$ ,  $B_{1\infty}$  e  $B_{2\infty}$ ), é demonstrado em detalhes no Apêndice A.

Em particular, conforme foi citado no final da seção anterior, é de suma importância trazer à baila a discussão sobre as condições de contorno para a componente longitudinal do campo magnético nas placas isolantes (horizontais). Tal condição depende da natureza do campo elétrico na direção  $z$ ,  $E_z$ , (do seu comportamento ao longo do canal e se imposto ou não por uma fonte), e da interação entre o escoamento e o próprio campo magnético. Desta forma, é uma condição que se modifica concomitantemente com o desenvolvimento do escoamento. Para a sua determinação, tome-se a igualdade entre as equações que definem a densidade de corrente, Eqs. (4.23b) e (4.24b), em uma das placas (por exemplo,  $y = 1$ ). Após as devidas simplificações, chega-se à seguinte expressão:

$$\left. \frac{\partial B_1}{\partial y} \right|_{y=1} = -\text{Re}_m E_z \quad (4.27)$$

Essa expressão seria a condição de contorno ideal a ser adotada para avaliação do campo magnético. No entanto, como o presente trabalho emprega uma função escalar de campo magnético para a obtenção das características magnéticas do problema em questão (ver Eqs. 5.2), a condição de contorno passaria a ser escrita como:

$$\left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right|_{y=1} = -\text{Re}_m E_z \quad (4.28)$$

Além do desconhecimento da natureza do desenvolvimento do campo elétrico, tal condição de contorno envolve uma derivada segunda de uma função escalar, cuja equação diferencial também é de segunda ordem. O uso desse tipo de condição acarreta em dificuldades, tanto analíticas quanto numéricas, no procedimento de solução, seja de um método híbrido ou de um numérico.

Em função da natureza híbrida da técnica empregada como método de solução do sistema de equações, e pela formulação adotada em funções escalares, o presente trabalho faz uso das condições de contorno para a componente horizontal do campo magnético apenas na região de completamente desenvolvida. As condições de contorno na região de desenvolvimento são automaticamente avaliadas durante o procedimento de cálculo da região em desenvolvimento.

A liberdade para se realizar esse procedimento está associada à escolha de um problema de autovalor auxiliar que satisfaça, corretamente, as condições de contorno para a componente vertical do campo magnético, deixando-se livre a descrição da sua componente horizontal. Evita-se, assim, o uso de uma condição de contorno que apresente a mesma ordem da equação para a qual uma solução está sendo obtido, e cuja informação depende das características do desenvolvimento do escoamento e do campo magnético.

Uma vez que o comprimento ao longo do canal necessário para que o campo magnético se desenvolva é muito pequeno e adotando-se um valor médio<sup>9</sup> para o campo elétrico, a expressão utilizada como condição de contorno é dada, de acordo com o Apêndice A, como:

$$B_{1w\infty} = \pm \frac{\text{Re}_m}{2} [\bar{E}_{z\infty} + Ha] \begin{cases} + \text{ Parede Superior} \\ - \text{ Parede Inferior} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Para se ilustrar a importância do campo elétrico,  $E_z$ , sobre a interação entre os campos (e, por consequência, nas condições de contorno para o campo magnético e sobre o tipo de dispositivo magnetohidrodinâmico), considere o esquema do canal ilustrado na Fig. 4.3 e o escoamento completamente desenvolvido, em particular. Pode-se observar que o sentido da densidade de corrente traz ao sistema características distintas.

Escrevendo-se a lei de Ohm e a equação que define o gradiente longitudinal de pressão, em um ponto suficientemente distante da entrada do canal (Eq. A.15, apêndice A e Eq. (4.17), respectivamente), tem-se, respectivamente:

$$J_{z,\infty} = (E_{z\infty} + u_\infty Ha) , \quad \frac{\partial P_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\text{Re}} J_{z\infty} Ha , \quad u_\infty Ha = -E_{z\infty} - \frac{\text{Re}}{Ha} \frac{\partial P_\infty}{\partial x}$$

Dessa forma, vê-se claramente que a magnitude e o sentido de  $E_z$  interferem no comportamento do sistema através de alterações em  $J_{z\infty}$  e  $\partial P_\infty/\partial x$ : o sistema pode se comportar como gerador de eletricidade, medidor de vazão ou bomba eletromagnética.

---

<sup>9</sup> Para fins de simplificação, o valor médio do campo elétrico será empregado apenas na condição de contorno para a componente longitudinal do campo magnético na região completamente desenvolvida, Eq. (A.11)

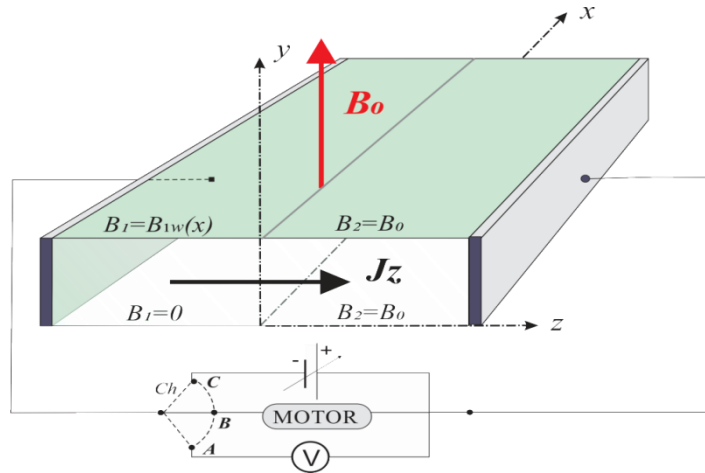


Figura 4.3 - Canal de escoamento, em uma situação arbitrária, com placas condutoras laterais ligadas aos terminais de um voltímetro, para aferição de tensão, ou ligadas aos terminais de uma fonte de tensão variável que pode impor campos elétricos no interior do escoamento, contra ou a favor do eixo z. Posições da chave Ch: A-Medidor de Vazão, B-Gerador, C-Bomba.

### Caso A – Medidor de vazão: $J_{z\infty} = 0$

Colocando-se um voltímetro nas placas condutoras laterais, é possível medir-se a vazão do escoamento através da tensão Hall gerada pelo movimento do fluido no interior do canal sob a ação do campo magnético externo, sem que haja corrente externa através dele,  $I_{ext} = 0$  (vide seção 2.2.2). Deve-se, no entanto, ter-se em mente que, à medida que o escoamento for se desenvolvendo ao longo do canal, haverá separação de cargas nas placas condutoras, de maneira que existirá um campo elétrico associado (Hall) desconhecido que também se desenvolve longitudinalmente,  $E_z(x)$ . Enquanto esse campo estiver sendo desenvolvido, existirá corrente elétrica interna (também força de Lorentz):

$$I(x) = \int_0^1 J_z(x, y) dy = \int_0^1 [E_z(x, y) + u(x, y) B_2(x, y) - v(x, y) B_1(x, y)] dy \quad (4.33)$$

Agora, ao se atingir a região completamente desenvolvida, o processo de separação de cargas cessa, e a densidade de corrente, a corrente e a força de Lorentz se anulam nesse tipo de dispositivo ( $J_z = 0$ ,  $I = 0$  e  $F_v = 0$ ), de maneira que, da densidade de corrente:

$$E_{z\infty}(y) = -Ha u_{\infty}(y) \quad (4.34)$$

Para fins de simplificação, será empregado o valor médio desse campo elétrico na condição de contorno para a componente longitudinal do campo magnético na parede:

$$\bar{E}_{z\infty} = \int_0^1 E_{z\infty} dy = -Ha \int_0^1 u_{\infty}(y) dy = -Ha \quad (4.35)$$

$$B_{1w\infty} = 0 \quad (4.36)$$

**Caso B – Gerador Magnetohidrodinâmico:  $J_{z,\infty} > 0$**

Colocando-se um receptor elétrico conectado às placas condutoras do canal, estabelecer-se-á uma corrente externa através dele. Devido ao efeito Hall, a corrente elétrica interna (e também força de Lorentz) se estabelecerá, de maneira que, por critério de continuidade, a corrente externa deve ser igual a essa corrente interna para esse tipo de dispositivo.

$$I_{ext} = I(x) = \int_0^1 J_z(x, y) dy = \int_0^1 [E_z(x, y) + u(x, y) B_2(x, y) - v(x, y) B_1(x, y)] dy \quad (4.37)$$

Como há geração elétrica, a força de Lorentz é retardadora, freando o escoamento e transformando energia mecânica em energia elétrica (vide seção 2.2.7).

Agora, para fins de simplificação de análise, considerando a região completamente desenvolvida e o termo de força de Lorentz da Eq. (4.20), tem-se:

$$J_{z,\infty} = (E_{z,\infty} + u_\infty Ha) > 0 \quad \text{e} \quad E_{z,\infty} > -Ha u_\infty \quad (4.38 \text{ a,b})$$

Da relação entre o gradiente de pressão e a densidade de corrente, percebe-se claramente que o valor dessa densidade de corrente (e da corrente total) é diretamente proporcional ao gradiente de pressão negativo.

Da Eq. (4.37), a corrente total externa é obtida como:

$$I_{ext\infty} = I(x_\infty) = \int_0^1 J_{z,\infty}(y) dy = \int_0^1 [E_{z,\infty}(y) + u_\infty(y) Ha] dy \quad (4.39)$$

Considerando valores médios nessa região do canal:

$$\bar{I}_{ext\infty} = \bar{E}_{z,\infty} + Ha \quad (4.40)$$

Assim, além da corrente (medida através de um amperímetro), o campo elétrico estabelecido devido ao efeito Hall ( $\bar{E}_{z,\infty}$ ) pode ser obtido dessa equação. Ademais, uma vez que  $J_{z,\infty} > 0$  (e também  $\bar{J}_{z,\infty} > 0$ ) obtém-se, para um gerador, a seguinte restrição:

$$\bar{E}_{z,\infty} > -Ha \quad (4.41)$$

Assim, a condição de contorno para a componente axial do campo magnético nas paredes isolantes deverá ser tal que:

$$B_{1w}(x) \cong B_{1w\infty} = -\text{Re}_m \left[ \bar{E}_{z\infty} + Ha \right] < 0 \quad (4.42)$$

De maneira que, para se impor essa condição de contorno, é necessário que o campo elétrico induzido seja medido indiretamente através da corrente externa (é necessária uma informação experimental!).

### Caso C – Bomba eletromagnética: $J_{z,\infty} < 0$

Neste caso, um campo elétrico, suficientemente grande, é imposto (no sentido oposto de  $z$ ) por uma fonte externa de tensão variável, produzindo assim uma força de Lorentz a favor do escoamento. O gradiente de pressão atua no sentido de acelerar o fluido (vide seção 2.2.1). Nesse caso, para a região de escoamento completamente desenvolvido:

$$J_{z,\infty} = (E_{z\infty} + u_\infty Ha) < 0 \quad \text{e} \quad E_{z\infty} < -Ha u_\infty \quad (4.43a,b)$$

Em termos médios:

$$\bar{E}_{z\infty} < -Ha \quad (4.44)$$

Assim, a condição de contorno para a componente axial do campo magnético na parede deverá ser tal que:

$$B_{1w\infty} = -\text{Re}_m \left[ \bar{E}_{z\infty} + Ha \right] > 0 \quad (4.45)$$

Note que, diferentemente da situação de um gerador, essa condição de contorno é conhecida *a priori*, não necessitando de um experimento para se “fechar” o modelo matemático!

As equações governantes (4.19) a (4.30) serão resolvidas através da Técnica da Transformada Integral Generalizada, empregando-se formulação em funções escalares (a função corrente e a função campo magnético), conforme descrito no capítulo a seguir.

## **CAPÍTULO V**

## 5. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

### 5.1. FORMULAÇÃO EM FUNÇÕES ESCALARES

A *função corrente* ( $\psi$ ) é uma função escalar que descreve escoamentos bidimensionais incompressíveis, satisfazendo automaticamente a lei de conservação da massa. Uma das vantagens do uso da formulação em função corrente é a fácil visualização das linhas de corrente do escoamento. Sob um ponto de vista de modelagem, além da redução do número de equações a serem resolvidas, o seu uso elimina a necessidade do cálculo da pressão, ou gradiente de pressão, para determinação do campo de velocidade.

No caso particular de trabalhos anteriores que empregaram a técnica da transformada integral generalizada (PIMENTEL, 1993 e SANTOS *et al.*, 2001), o uso da formulação em função corrente também apresentou taxas numéricas de convergência mais acentuadas do que aquelas que empregavam a formulação em variáveis primitivas.

Adicionalmente, uma vez que o campo magnético também apresenta características similares ao campo de escoamento, uma variável semelhante à função corrente também pode ser empregada para a descrição desse campo, uma outra função escalar,  $\beta$ , que será neste trabalho denominada de *função magnética*.

Nesse ponto, é importante entender que não há necessidade de se resolver as equações de transporte do campo magnético, Eqs. (4.19) e (4.20) na forma em que elas se apresentam. É possível substituir essas duas equações por uma única equação resultante obtida pela igualdade entre as equações de densidades de corrente (4.23b e 4.24b). A princípio, este procedimento pode parecer estranho, pois substitui-se um sistema de duas equações (a menos de  $u$  e  $v$ ) e duas variáveis ( $B_1$  e  $B_2$ ) por uma única equação com três variáveis ( $B_1$ ,  $B_2$  e  $E_z$ ). Entretanto, esse problema é resolvido escrevendo-se  $B_1$  e  $B_2$  em termos da função escalar magnética ( $\beta$ ), uma vez que a variável restante, o campo elétrico aplicado  $E_z$ , é conhecida (constante).

As equações das transformações em termos das funções escalares, supracitadas, indicam-se abaixo.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.1a, b)$$

$$B_1 = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad B_2 = -\frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (5.2a, b)$$

A transformação para estas novas variáveis é efetuada através dos seguintes passos:

a) Campo de Função Corrente

- i) Deriva-se, parcial e respectivamente, as equações de Navier-Stokes, Eqs. (4.17) e (4.18), em relação a  $y$  e a  $x$  e, em seguida, subtraem-se os resultados levando-se em conta que  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  (eq. da continuidade). Obtém-se, então, um resultado que não apresenta mais o termo de pressão.

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) \right] - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial J_z}{\partial y} B_2 + \frac{\partial J_z}{\partial x} B_1 + J_z \frac{\partial B_2}{\partial y} + J_z \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) \quad (5.3)$$

- ii) Derivam-se parcialmente, em relação a  $x$  e a  $y$ , as Equações (5.1a,b) e (5.2a,b), até que os termos tornem-se substituíveis na Eq. (5.3) e no passo (iv).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \end{cases} \quad (5.4a,b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \Rightarrow \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = -\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} = -\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \end{cases} \quad (5.5a,b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 \beta}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial B_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \beta}{\partial y^3} \end{cases} \quad (5.6a,b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B_2}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_2}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^3 \beta}{\partial y \partial x^2} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} = -\frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} \end{cases} \quad (5.7a,b)$$

- iii) Rescreve-se, finalmente, a Equação (5.3) em termos de (5.1a,b), (5.2a,b) (5.4a,b), (5.5a,b), (5.6) e (5.7a).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) \\ - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial J_z}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

- iv) Deriva-se, parcial e respectivamente, a equação da densidade de corrente (4.24b) em relação a  $x$  e a  $y$  e, em seguida, usam-se os resultados obtidos em (5.6a,b) e (5.7a,b).

$$\frac{\partial J_z}{\partial x} = - \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = - \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^3 \beta}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial y \partial x^2} \right) \quad (5.10)$$

Em que o termo de densidade de corrente, da Eq. (4.23b), passa a ser dado por:

$$J_z = - \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) = E_z - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

- v) Finalmente, substitui-se as Eqs. (5.9) e (5.10) em (5.8), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) - \\ \frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[ \frac{\partial \beta}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial y^3} \right) \right] + \\ \frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[ \frac{\partial \beta}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

## b) Campo de Função Magnética

- vi) Igualando-se a Lei de Ohm (4.23b) com a Lei de Ampère (4.24b) e substituindo-se, novamente, as Eqs. (5.1a,b) e (5.2a,b), tem-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + E_z \quad (5.12)$$

Desta forma, as equações de governo passam de cinco (Eqs. (4.16) a (4.20)) para duas (Eqs. (5.11) e (5.12)). Nessas novas variáveis, função corrente ( $\psi$ ) e função magnética ( $\beta$ ), o sistema de equações, em conjunto com suas condições de contorno, passa a ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right) &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) - \\ &\frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[ \frac{\partial \beta}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial y^3} \right) \right] + \\ &\frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[ \frac{\partial \beta}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + E_z \quad (5.14)$$

Para a entrada e saída do canal:

$$x = 0 \quad \begin{cases} \psi(0, y) = \psi_e(y) \equiv g_e(y) = \int_0^y u_e(y) dy \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y) = 0 \\ \beta(0, y) = h_e(y) = \int_0^y B_{1e}(y) dy \end{cases} \quad (5.15a-c)$$

$$x \rightarrow \infty \quad \begin{cases} \psi(x \rightarrow \infty, y) = \psi_\infty(y) \equiv g_\infty(y) = \int_0^y u_\infty(y) dy \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x \rightarrow \infty, y) = 0 \\ \beta(x \rightarrow \infty, y) = \beta_\infty(x \rightarrow \infty, y) = -Ha.x_\infty + h_\infty(y) \quad \text{com} \quad h_\infty(y) = \int_0^y B_{1\infty}(y) dy \end{cases} \quad (5.15d-f)$$

Enquanto que, nas placas dielétricas, inferior e superior, são:

$$y = 0 \begin{cases} \psi(x,0) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,0) = 0 \\ \beta(x,0) = -Ha.x \end{cases} \quad (5.16a-c)$$

$$y = 1 \begin{cases} \psi(x,1) = 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,1) = 0 \\ \beta(x,1) = -Ha.x + h_{\infty}(1) \end{cases} \quad (5.16d-f)$$

O desenvolvimento para a determinação das condições de contorno, em especial, relativas à região da entrada do canal ( $u_e$ ,  $\psi_e$  e  $\beta_e$ ) e dos campos completamente desenvolvidos ( $u_{\infty}$ ,  $\psi_{\infty}$  e  $\beta_{\infty}$ ), é demonstrado em detalhes no Apêndice A. Note, ainda, que as condições de contorno nas paredes do canal para a função escalar magnética são tais que satisfazem diretamente as condições originais para a componente vertical do campo magnético.

## 5.2. FILTRAGEM DOS CAMPOS

O uso da formulação das equações governantes em termos de funções escalares ( $\psi$  e  $\beta$ ) reduz o número de equações a serem resolvidas, elimina os termos associados à pressão e facilita a solução do problema. Não obstante, esta formulação introduz uma não-homogeneidade na condição de contorno da função corrente relativa à placa superior (Eq. (5.16d)).

Para que essa não homogeneidade, indesejada à luz da técnica da transformada integral, seja eliminada, propõe-se a aplicação de filtros nos campos, que consistem na separação dos campos originais em duas partes: um campo filtrado, que possuirá condições de contorno homogêneas e um filtro que carrega a não homogeneidade original. Trabalhos anteriores (MACHADO e COTTA 1995; SILVA, 1994; PIMENTEL, 1993; SANTOS *et al.*, 2001; RÊGO, 2010 e PONTES, 2015) atestam a eficácia da técnica de filtragem.

A eficiência desse procedimento é ditada pelo filtro, normalmente uma expressão analítica, a mais representativa possível, porém simples, do comportamento característico da solução do campo original. Uma vantagem adicional verificada nos trabalhos anteriormente citados é o enfraquecimento dos termos fontes das equações, responsáveis pelo atraso no processo de convergência dos métodos numéricos e, em particular, das expansões empregadas na técnica da transformada integral.

Isto posto, são propostas as seguintes separações dos campos de função corrente e função magnética:

$$\psi(x, y) = \psi_H(x, y) + \psi_F(y) \quad (5.17)$$

$$\beta(x, y) = \beta_H(x, y) + \beta_F(y; x) \quad (5.18)$$

Nestas expressões, o índice H representa o campo filtrado, isto é, homogeneizado, a ser avaliado com a transformação integral. Já o índice F está associado à expressão dos filtros<sup>10</sup>. Para a função corrente, o filtro empregado é a solução do campo completamente desenvolvido do escoamento,  $\psi_F(y) = \psi_\infty(y)$ . Para o campo de função magnética, o filtro empregado é uma expressão que satisfaz a solução do campo magnético na região completamente desenvolvida apenas para posições longitudinais muito distantes da entrada do canal, tendo como parâmetro a posição local ao longo dele,  $\beta_F(y; x) \neq \beta_\infty(x_\infty, y)$ .

---

<sup>10</sup> As expressões para os filtros são obtidas e descritas no apêndice A.

Os filtros são escritos como:

$$\psi_F(y) = \psi_\infty(y) = g_\infty(y)$$

$$\beta_F(y; x) = -Ha \cdot x + h_\infty(y)$$

Em que  $g_\infty(y)$  e  $h_\infty(y)$  estão explicitamente determinados no Apêndice A.

Com a aplicação das definições acima, as equações governantes (5.13) e (5.14) ficam, respectivamente, escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \right) \left( \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial y^3} + \frac{d^3 \psi_\infty}{dy^3} + \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial y \partial x^2} \right) = \\ \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial y^4} + \frac{d^4 \psi_\infty}{dy^4} \right) - \\ \frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[ \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \beta_F}{\partial y^3} \right) \right] + \\ \frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[ \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\left( \frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \right) \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right) = \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_F}{\partial y^2} \right) + E_z \quad (5.20)$$

sendo

$$J_z = -\frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_F}{\partial y^2} \right) = E_z - \left( \frac{\partial \Psi_H}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_\infty}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi_H}{\partial x} \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right)$$

Agora, a partir das separações propostas, as condições de contorno, na entrada e saída do canal, são:

$$x=0 \begin{cases} \psi_H(0, y) = \psi_e(y) - \psi_F(y) = g_e(y) - g_\infty(y) \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial x}(0, y) = 0 \\ \beta_H(0, y) = \beta_e(0, y) - \beta_F(y, 0) = h_e(y) - h_\infty(y) \end{cases} ; x \rightarrow \infty \begin{cases} \psi_H(x \rightarrow \infty, y) = 0 \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0 \\ \beta_H(x \rightarrow \infty, y) = 0 \end{cases} \quad (5.21a-f)$$

Já nas placas dielétricas, apresentar-se-ão assim:

$$y = 0 \begin{cases} \psi_H(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \beta_H(x, 0) = 0 \end{cases} ; \quad y = 1 \begin{cases} \psi_H(x, 1) = 0 \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial y}(x, 1) = 0 \\ \beta_H(x, 1) = 0 \end{cases} \quad (5.22a-f)$$

Onde, as funções  $g_e(y)$  e  $h_e(y)$  são, também, definidas no Apêndice A.

### 5.3. APLICAÇÃO DA GITT NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

O procedimento para a aplicação da transformação integral nas equações diferenciais parciais (5.19) e (5.20) consiste em se integrar as EDPs originais em uma das direções coordenadas (a direção dos problemas de autovalor), eliminando-se todas, menos uma variável, obtendo-se um sistema diferencial ordinário na direção restante. Este sistema pode ser resolvido através de sub-rotinas disponíveis em *softwares* computacionais.

Tal transformação é possível, considerando-se as funções corrente e magnética como expansões em autofunções, obtidas de um problema homogêneo resolvido sob o lastro de critérios de ortogonalidade.

O primeiro passo neste método é, portanto, definir o problema de autovalor auxiliar que permitirá encontrar estas autofunções (GUERRERO, 1991). Este problema auxiliar será obtido aplicando-se a separação de variáveis nos termos difusivos homogêneos das equações de governo. Dando sequência à solução do problema, faz-se a descrição da função escalar original como uma expansão das autofunções oriundas do problema auxiliar.

#### 5.3.1. PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O CAMPO DE FUNÇÃO CORRENTE

Tome-se a Equação 5.19. Como as condições de contorno (Eqs. 5.22 a,b,d,e) já são homogêneas em  $y$ , é conveniente considerar-se o problema auxiliar nesta direção, onde a autofunção normalizada será representada por  $\tilde{Y}_i$  e os autovalores por  $\mu_i$ . Assim, o problema de autovalor é, segundo Guerrero e Cotta (1995, 1996).

$$\frac{d^4 \tilde{Y}_i(y)}{dy^4} = \mu_i^4 \tilde{Y}_i(y) \quad (5.23)$$

Com as respectivas condições de contorno:

$$y=0 \begin{cases} \tilde{Y}_i(0) = 0 \\ \frac{d\tilde{Y}_i}{dy}(0) = 0 \end{cases} ; \quad y=1 \begin{cases} \tilde{Y}_i(1) = 0 \\ \frac{d\tilde{Y}_i}{dy}(1) = 0 \end{cases} \quad (5.24a-d)$$

A solução (autofunções) desse problema auxiliar é dada por:

$$\tilde{Y}_i(y) = \begin{cases} \frac{\cos\left[\mu_i\left(y-\frac{1}{2}\right)\right] \cosh\left[\mu_i\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\mu_i}{2}\right) \cosh\left(\frac{\mu_i}{2}\right)} & \text{para } i = 1,3,5, \dots \\ \frac{\sin\left[\mu_i\left(y-\frac{1}{2}\right)\right] \sinh\left[\mu_i\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\mu_i}{2}\right) \sinh\left(\frac{\mu_i}{2}\right)} & \text{para } i = 2,4,6, \dots \end{cases} \quad (5.25)$$

A partir das condições de contorno, Eqs. (5.24.a-d), os autovalores são as soluções da equação transcendental (obtidas com o uso da subrotina ZBREN (IMSL, 1989)):

$$\tanh\left(\frac{\mu_i}{2}\right) = \begin{cases} -\tan\left(\frac{\mu_i}{2}\right) & \text{para } i = 1,3,5, \dots \\ +\tan\left(\frac{\mu_i}{2}\right) & \text{para } i = 2,4,6, \dots \end{cases} \quad \text{ou} \quad \cos \mu_i \cosh \mu_i = 1 \quad (5.26)$$

Observa-se que a segunda equação, apresentada em (5.26), é numericamente mais fácil de ser avaliada.

As autofunções apresentam a propriedade de serem autonormalizadas, isto é, a sua propriedade de ortogonalidade é tal que:

$$\int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) dy = \begin{cases} N_i = 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases} \quad (5.27)$$

Admitindo-se que a função corrente  $\psi_H(x,y)$  pode ser construída como uma expansão de autofunções e como já estão definidas as autofunções, os autovalores e a norma, o par transformada integral/inversa é, então, definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{Hi}(x) = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \psi_H(x, y) dy \quad \text{transformada integral} \\ \psi_H(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y) \bar{\psi}_{Hi}(x) \quad \text{inversa} \end{array} \right. \quad (5.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{Hi}(x) = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \psi_H(x, y) dy \quad \text{transformada integral} \\ \psi_H(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y) \bar{\psi}_{Hi}(x) \quad \text{inversa} \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Pode-se, agora, prosseguir com a transformação integral do problema diferencial original, operando-se com  $\int_0^1 \tilde{Y}_i(y) dy$  em ambos os lados da equação (5.19) e na condição de contorno de entrada (Eq. (5.21a,b)) e de saída (Eq. (5.21d,e)). Estes resultados serão mostrados na seção 5.4.

### 5.3.2. PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O CAMPO DA FUNÇÃO MAGNÉTICA

Tome-se a Equação (5.20). De modo análogo à função corrente, devido à homogeneidade das condições de contorno na direção  $y$ , adota-se o problema auxiliar nesta direção e, chamando a autofunção normalizada de  $\tilde{H}_i$  e os autovalores por  $\alpha_i$ , o problema de autovalor é:

$$\frac{d^2 H_i(y)}{dy^2} = -\alpha_i^2 H_i(y) \quad (5.30)$$

Com condições de contorno:

$$H_i(0) = H_i(1) = 0 \quad (5.31)$$

A solução (autofunções) desse problema auxiliar é dada por:

$$H_i(y) = \text{sen}(\alpha_i y) \quad (5.32)$$

Diante das condições de contorno dadas nas Equações (5.31 e 5.32), tem-se os seguintes autovalores:

$$\alpha_i = i\pi, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.33)$$

Assim, as autofunções mostram a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 H_i(y) H_j(y) dy = \begin{cases} M_i & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases} \quad (5.34)$$

A norma associada a estas autofunções é avaliada por:

$$M_i = \int_0^1 H_i^2(y) dy = \int_0^1 \text{sen}^2(i\pi y) dy = \frac{1}{2} \quad (5.35)$$

Por questões de simplicidade, é empregada uma autofunção autonormalizada, definida como:

$$\tilde{H}_i(y) = \frac{H_i(y)}{\sqrt{M_i}} = \sqrt{2} \text{sen}(\alpha_i y) \quad (5.36)$$

Admitindo-se que a função magnética  $\beta_H(x,y)$  pode ser construído como uma expansão de autofunções e como já estão definidas as autofunções, os autovalores e a norma, o par transformada integral/inversa é, então, definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta}_i(x) = \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \beta_H(x,y) dy \quad \text{transformada integral} \end{array} \right. \quad (5.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_H(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{H}_i(y) \bar{\beta}_i(x) \quad \text{inversa} \end{array} \right. \quad (5.38)$$

Pode-se, agora, prosseguir com a transformação integral do problema diferencial original, operando-se com  $\int_0^1 \tilde{H}_i(y) dy$  em ambos os lados da equação (5.20) e nas condições de contorno de entrada e saída (Eq. 5.22 c,f). Estes resultados serão mostrados na seção 5.4.

## 5.4. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA

### 5.4.1. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO DE VELOCIDADE

Conforme dito na seção anterior, tendo estabelecido o par transformada-inversa (Eqs. 5.28 e 5.29) e havendo sido definidas a autofunção e as propriedades de ortogonalidade do problema de autovalor escolhido, pode-se, agora, prosseguir com a transformação integral do

problema diferencial original, operando-se com  $\int_0^1 \tilde{Y}_i(y) dy$  em ambos os lados da equação

(5.19),

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \left[ \left( \frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \right) \left( \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial y^3} + \frac{d^3 \psi_\infty}{dy^3} + \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial y \partial x^2} \right) \right] dy = \\ & \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \left[ \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial y^4} + \frac{d^4 \psi_\infty}{dy^4} \right) \right] dy + \\ & \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \left\{ -\frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[ \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \beta_F}{\partial y^3} \right) - \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \right\} dy \end{aligned} \quad (5.39)$$

Isto posto, após uso da fórmula de inversão, da propriedade de ortogonalidade das autofunções e das condições de contorno e, finalmente, das características do campo do escoamento completamente desenvolvido, o sistema resultante de quarta ordem para o campo de função corrente filtrada transformada é mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_{ijk}^\psi \left( \frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3}(x) \bar{\psi}_{Hk}(x) - \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hk}}{dx^2}(x) \right) + (B_{ijk}^\psi - E_{ijk}^\psi) \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \bar{\psi}_{Hk}(x) \right] + \\ & \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_{ij\infty}^\psi \frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3}(x) + (D_{ij\infty}^\psi - F_{ij\infty}^\psi) \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) - \frac{2}{\text{Re}} G_{ij}^\psi \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^2}(x) \right] + \\ & \frac{1}{\text{Re Re}_m} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I_{ijk}^\psi \left[ \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hk}}{dx^2}(x) - \frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3}(x) \bar{\beta}_{Hk}(x) + (\alpha_j^2 - \alpha_k^2) \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) \bar{\beta}_{Hk}(x) \right] + \\ & \frac{1}{\text{Re Re}_m} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ J_{ijF}^\psi \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) + K_{ijF}^\psi \left( \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^2}(x) - \alpha_j^2 \bar{\beta}_{Hj}(x) \right) + M_{ijF}^\psi \left( \alpha_j^2 \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) - \frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3}(x) \right) \right] = \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d^4 \bar{\psi}_{Hi}}{dx^4}(x) + \mu_i^4 \bar{\psi}_{Hi}(x) + H_{i\infty}^\psi - \frac{L_{iFF}^\psi}{\text{Re}_m} \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

De maneira similar, as condições de contorno de entrada e saída (Eqs. (5.22a,b,d,e)) são igualmente transformadas:

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{H_i}(0) = \bar{g}_i = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \psi_H(0, y) dy = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) [g_e(y) - g_\infty(y)] dy \\ \left. \frac{d\bar{\psi}_{H_i}}{dx} \right|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (5.41 \text{ a, b})$$

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{H_i}(x \rightarrow \infty) = 0 \\ \left. \frac{d\bar{\psi}_{H_i}}{dx} \right|_{x=\infty} = 0 \end{cases} \quad (5.42 \text{ a, b})$$

O termo  $\frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3}(x)$ , da Equação (5.40), será desenvolvido no final da próxima seção, que faz menção à transformação integral do campo magnético.

Os coeficientes<sup>11</sup> que aparecem na Equação (5.40), resultantes do processo de transformação integral, são definidos como:

$$\begin{aligned} A_{ijk}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \tilde{Y}_k'(y) dy & B_{ijk}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j''(y) \tilde{Y}_k'(y) dy \\ C_{ij\infty}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \frac{d\psi_\infty(y)}{dy} dy & D_{ij\infty}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j''(y) \frac{d\psi_\infty(y)}{dy} dy \\ E_{ijk}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \tilde{Y}_k'''(y) dy & F_{ij\infty}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \frac{d^3 \psi_\infty(y)}{dy^3} dy \\ G_{ij}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j''(y) dy & H_{i\infty}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \frac{d^4 \psi_\infty(y)}{dy^4} dy \\ I_{ijk}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j(y) \tilde{H}_k'(y) dy & J_{ijF}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j(y) \frac{\partial^3 \beta_F(y; x)}{\partial y^3} dy \\ K_{ijF}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j'(y) \frac{\partial \beta_F(y; x)}{\partial x} dy & L_{iFF}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \frac{\partial \beta_F(y; x)}{\partial x} \frac{\partial^3 \beta_F(y; x)}{\partial y^3} dy \\ M_{ijF}^\psi &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j(y) \frac{\partial \beta_F(y; x)}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (5.43a-m)$$

<sup>11</sup> Os índices sobrescritos nos coeficientes,  $\psi$  e  $\beta$ , são usados para diferenciar os coeficientes utilizados nas respectivas equações filtradas transformadas de campo de função corrente e função magnética. Nos integrandos, o apóstrofe (') denota diferenciação em relação à coordenada transversal  $y$ .

### 5.4.3. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO MAGNÉTICO

Conforme dito na seção anterior, tendo estabelecido o par transformada-inversa (Eqs. 5.37 e 5.38) e havendo sido definidas a autofunção e as propriedades de ortogonalidade do problema de autovalor escolhido, pode-se, agora, prosseguir com a transformação integral do problema diferencial original, operando-se com  $\int_0^1 \tilde{H}_i(y) dy$  em ambos os lados da equação (5.20),

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \left[ \left( \frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \right) \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right) \right] dy = \\ & \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \left[ \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_F}{\partial y^2} \right) + E_z \right] dy \end{aligned} \quad (5.44)$$

Isto posto, após uso da fórmula de inversão, da propriedade de ortogonalidade das autofunções e da condição de contorno e, finalmente, das características do campo magnético para o escoamento completamente desenvolvido, o sistema resultante de segunda ordem para o campo de função magnética filtrada transformada, é mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_{ijk}^\beta \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) \bar{\psi}_{Hk}(x) - E_{ijk}^\beta \bar{\beta}_{Hj}(x) \frac{d\bar{\psi}_{Hk}}{dx}(x) \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( B_{ijF}^\beta \bar{\psi}_{Hj}(x) - F_{ijF}^\beta \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \right) + \\ & \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij\infty}^\beta \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) = \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hi}}{dx^2}(x) - \alpha_i^2 \bar{\beta}_{Hi}(x) + G_{iF}^\beta(x) \right) + H_i^\beta E_z - D_{i\infty F}^\beta \end{aligned} \quad (5.45)$$

Com a condição de contorno na entrada transformada para:

$$\bar{\beta}_{Hi}(0) = \bar{h}_i = \int_0^1 \tilde{H}_i(y) [h_e(y) - h_\infty(y)] dy \quad \text{com} \quad i = 1, \dots, \infty \quad (5.46)$$

$$\bar{\beta}_{Hi}(x \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{com} \quad i = 1, \dots, \infty \quad (5.47)$$

Os coeficientes que aparecem na Equação (5.45), resultantes do processo de transformação integral, são definidos como:

$$\begin{aligned}
A_{ijk}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{H}_j(y) \tilde{Y}_k'(y) dy & B_{ijF}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{Y}_j'(y) \frac{\partial \beta_F}{\partial x}(y; x) dy \\
C_{ij\infty}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{H}_j(y) \frac{d\psi_\infty}{dy}(y) dy & D_{i\infty F}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \frac{d\psi_\infty}{dy}(y) \frac{\partial \beta_F}{\partial x}(y; x) dy \\
E_{ijk}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{H}_j'(y) \tilde{Y}_k(y) dy & F_{ijF}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \frac{\partial \beta_F}{\partial y}(y; x) dy \\
G_{iF}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \frac{\partial^2 \beta_F}{\partial y^2}(y; x) dy & H_i^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) dy
\end{aligned}$$

(5.48a-h)

Conforme anteriormente citado, o termo  $\frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3}(x)$  da Equação (5.40), é obtido a partir da transformação integral do termo  $\frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^3}(x)$  e este, por sua vez, é obtido da derivação da equação da função escalar magnética (Eq. 5.20), isolando-se nela o termo  $\frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2}$ , conforme mostrado a seguir.

$$\frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} = \text{Re}_m \left[ \left( \frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \right) \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left( \frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right) \right] - \left( \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_F}{\partial y^2} \right) - \text{Re}_m E_z \quad (5.49)$$

Assim,

$$\frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^3} = \text{Re}_m \left( \begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x \partial y} \frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x \partial y} \frac{\partial \beta_F}{\partial x} + \frac{\partial \psi_H}{\partial y} \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x^2} \frac{\partial \beta_H}{\partial y} - \right. \\ & \left. \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x^2} \frac{\partial \beta_F}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x \partial y^2} \right) \end{aligned} \right) \quad (5.50)$$

Aplicando a transformada integral,  $\int_0^1 \tilde{H}_j(y) \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^3}(x) dy$ , sobre a equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3} &= \text{Re}_m \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \begin{aligned} & A_{jmn}^\beta \left( \frac{d \bar{\beta}_{Hm}}{dx}(x) \frac{d \bar{\psi}_{Hn}}{dx}(x) + \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hm}}{dx^2}(x) \bar{\psi}_{Hn}(x) \right) - \\ & E_{jmn}^\beta \left( \frac{d \bar{\beta}_{Hm}}{dx}(x) \frac{d \bar{\psi}_{Hn}}{dx}(x) + \bar{\beta}_{Hm}(x) \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hn}}{dx^2}(x) \right) \end{aligned} \right] + \\
& \text{Re}_m \sum_{m=1}^{\infty} \left( B_{jmF}^\beta \frac{d \bar{\psi}_{Hm}}{dx}(x) - F_{jmF}^\beta \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hm}}{dx^2}(x) \right) + \text{Re}_m \sum_{m=1}^{\infty} C_{jm\infty}^\beta \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hm}}{dx^2}(x) + \alpha_j^2 \frac{d \bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x)
\end{aligned} \quad (5.51)$$

Os coeficientes indicados na Equação (5.51) são:

$$\begin{aligned}
 A_{jmn}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_j(y) \tilde{H}_m(y) \tilde{Y}_n'(y) dy & B_{jmF}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_j(y) \tilde{Y}_m'(y) \frac{\partial \beta_F}{\partial x}(y; x) dy \\
 C_{jm\infty}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_j(y) \tilde{H}_m(y) \frac{d\psi_\infty}{dy}(y) dy & E_{jmn}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_j(y) \tilde{H}_m'(y) \tilde{Y}_n(y) dy \\
 F_{jmF}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_j(y) \tilde{Y}_m(y) \frac{\partial \beta_F}{\partial y}(y; x) dy & &
 \end{aligned} \tag{5.52a-e}$$

Deve-se observar que os coeficientes acima (Equações (5.52a-e)) já foram definidos nas Equações 5.48, devendo-se apenas alterar os índices.

Observe-se que, ao fim da aplicação da transformação integral, o problema diferencial parcial foi transformado em um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares, infinito e acoplado, com condições de contorno definidas na entrada e na saída do canal.

## 5.5. ALGORITMO COMPUTACIONAL

Como não há possibilidade de desenvolvimento analítico para solução do sistema de equações ordinárias não lineares, Eqs. (5.40) e (5.45), procedimentos numéricos devem ser implementados. Não obstante, para se obter soluções exatas destas equações, uma vez que os somatórios nas equações se dão de um valor inicial até infinito, um sistema infinito de equações deveria ser resolvido e isto tornar-se-ia impossível do ponto de vista computacional. O método empregado garante a convergência das soluções para ordens crescentes de truncamento, assim é possível obter-se soluções com um número exato, ou convergido, de algarismos significativos, para um determinado número de termos nas expansões. É por isto, o controle na ordem de truncamento nas expansões, que a GITT. é conhecida como um método de precisão controlada.

Assim, truncam-se as respectivas equações transformadas de função corrente e de função magnética, para ordens  $N\psi$  e  $N\beta$ , que podem ser diferentes para cada expansão. Assim, omitindo a dependência dos campos transformados em relação à  $x$  para fins de simplificação, o sistema resultante, em conjunto com suas condições de contorno, torna-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 \bar{\psi}_{Hi}}{dx^4}(x) = & \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N\psi} \left[ A_{ijk}^{\psi} \left( \frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3} \bar{\psi}_{Hk} - \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx} \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hk}}{dx^2} \right) + (B_{ijk}^{\psi} - E_{ijk}^{\psi}) \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx} \bar{\psi}_{Hk} \right] + \\
& \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N\psi} \left[ C_{ij\infty}^{\psi} \frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3} + (D_{ij\infty}^{\psi} - F_{ij\infty}^{\psi}) \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx} - \frac{2}{\operatorname{Re}} G_{ij}^{\psi} \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^2} \right] + \\
& \frac{1}{\operatorname{Re}_m} \sum_{j=1}^{N\beta} \sum_{k=1}^{N\beta} I_{ijk}^{\psi} \left[ \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hk}}{dx^2} - \frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3} \bar{\beta}_{Hk} + (\alpha_j^2 - \alpha_k^2) \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} \bar{\beta}_{Hk} \right] + \\
& \frac{1}{\operatorname{Re}_m} \sum_{j=1}^{N\beta} \left[ J_{ijF}^{\psi} \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} + K_{ijF}^{\psi} \left( \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^2} - \alpha_j^2 \bar{\beta}_{Hj} \right) + M_{ijF}^{\psi} \left( \alpha_j^2 \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} - \frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3} \right) \right] \\
& - \left( \mu_i^4 \bar{\psi}_{Hi} + H_{i\infty}^{\psi} - \frac{L_{iFF}^{\psi}}{\operatorname{Re}_m} \right)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{Hi}(0) = \bar{g}_i = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) [g_e(y) - g_{\infty}(y)] dy, & \bar{\psi}_{Hi}(x \rightarrow \infty) = 0 \\ \left. \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx} \right|_{x=0} = 0, & \left. \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad \text{com } i=1, \dots, N\psi$$

$$\frac{d^2 \bar{\beta}_{Hi}}{dx^2}(x) = \operatorname{Re}_m \left( \sum_{j=1}^{N\beta} \sum_{k=1}^{N\psi} \left( A_{ijk}^{\beta} \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} \bar{\psi}_{Hk} - E_{ijk}^{\beta} \bar{\beta}_{Hj} \frac{d\bar{\psi}_{Hk}}{dx} \right) + \sum_{j=1}^{N\psi} \left( B_{ijF}^{\beta} \bar{\psi}_{Hj} - F_{ijF}^{\beta} \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx} \right) + \sum_{j=1}^{N\beta} C_{ij\infty}^{\beta} \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} - \left( H_i^{\beta} E_z - D_{i\infty F}^{\beta} \right) \right) + \alpha_i^2 \bar{\beta}_{Hi} - G_{iF}^{\beta} \tag{5.54}$$

$$\bar{\beta}_{Hi}(0) = \bar{h}_i = \int_0^1 \tilde{H}_i(y) [h_e(y) - h_{\infty}(y)] dy, \quad \bar{\beta}_{Hi}(x \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{com } i=1, \dots, N\beta$$

Observa-se que as condições de contorno na saída do canal estão especificadas no infinito. Este entrave é minimizado considerando-se uma posição suficientemente distante da entrada, de maneira que o escoamento possa ser considerado completamente desenvolvido. O

truncamento ideal do domínio, ainda desconhecido, é encontrado repetindo-se a solução do problema, considerando-se as condições de contorno em outras posições, até que as soluções encontradas não sofram mais alterações com a distância à entrada do canal.

Segundo Perez-Guerrero (1993), este procedimento é contornado por uma transformação da variável independente, redefinindo o domínio de  $[0, \infty)$  para o domínio  $[0, 1]$ . Para isso, recomenda a seguinte transformação:

$$\eta = 1 - e^{-cx} \quad (5.55)$$

onde  $c$  é um parâmetro de compressão de escala, escolhido de maneira tal que o comportamento numérico da solução seja o mais suave possível.

O uso da transformação do domínio é completado ao definir-se:

$$\frac{d\eta}{dx} = c(1 - \eta) \quad (5.56)$$

Isto posto, o problema a ser resolvido seria dado pelas Equações (5.53) e (5.54), associadas às Equações (5.55) e (5.56) e as condições de contorno agora especificadas em  $\eta = 1$ .

A solução numérica deste sistema será obtida através de algoritmos bem estabelecidos e testados, disponíveis em bibliotecas de sub-rotinas matemáticas, como o IMSL (1989). O IMSL possui a sub-rotina BVPFD para a solução de problemas diferenciais ordinários não lineares com condições de contorno em dois pontos, que apresentam comportamento "stiff". (GUERRERO, 1993, p.23).

Essa rotina resolve problemas do tipo:

$$\underline{X}' = f(x, \underline{X}) \quad \text{com } x \in [a, b] \quad (5.57a)$$

$$g_{bc}[\underline{X}(a), \underline{X}(b)] = 0 \quad (5.57b)$$

Seu algoritmo é baseado na rotina PASVA3, descrita em Pereyra (1978), a qual faz uma discretização trapezoidal do sistema de equações diferenciais sobre uma malha não uniforme, escolhida adaptativamente, de modo a se obter um erro local aproximadamente igual em

qualquer posição. Discretizações de ordens elevadas são obtidas através de correções atrasadas. Estimativas do erro global são produzidas de maneira a se controlar os cálculos. O sistema algébrico não-linear resultante é resolvido mediante o método de Newton com controle do passo e o sistema linearizado de equações é resolvido empregando-se uma forma especial do método de eliminação de Gauss que preserva a esparsidade da matriz.

Para fazer uso da BVPFD, que resolve sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares de 1ª ordem, é necessário reescrever as equações de 4ª e de 2ª ordem como um sistema de 1ª ordem. Para isso, adote-se o vetor  $\underline{X}(\eta)$ , cujo tamanho será  $4N\psi + 2N\beta$ , tal que:

$$X = \left\{ \bar{\psi}_{Hi}, \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx}, \frac{d^2\bar{\psi}_{Hi}}{dx^2}, \frac{d^3\bar{\psi}_{Hi}}{dx^3}, \bar{\beta}_{Hj}, \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} \right\}_{4N\psi+2N\beta}; \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N\psi \\ j = 1, 2, \dots, N\beta \end{cases} \quad (5.58)$$

**Tabela 5.1 – Transformação do sistema de 4ª. ordem para 1ª. ordem.**

VETOR $X$	DERIVADAS de 1ª ORDEM – Vetor $X'$ Subrotina da BVPFD
$X_i = \bar{\psi}_{Hi}$	$i = 1, 2, 3, \dots, N\psi$
$X_{N\psi+i} = \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx} = \frac{dX_i}{dx} = \frac{dX_i}{d\eta} \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_i}{d\eta} = X_{N\psi+i} / \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$
$X_{2N\psi+i} = \frac{d^2\bar{\psi}_{Hi}}{dx^2} = \frac{dX_{N\psi+i}}{dx} = \frac{dX_{N\psi+i}}{d\eta} \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{N\psi+i}}{d\eta} = X_{2N\psi+i} / \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$
$X_{3N\psi+i} = \frac{d^3\bar{\psi}_{Hi}}{dx^3} = \frac{dX_{2N\psi+i}}{dx} = \frac{dX_{2N\psi+i}}{d\eta} \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{2N\psi+i}}{d\eta} = X_{3N\psi+i} / \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$
$\frac{d^4\bar{\psi}_{Hi}}{dx^4} = \frac{dX_{3N\psi+i}}{dx} = \frac{dX_{3N\psi+i}}{d\eta} \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{3N\psi+i}}{d\eta} = \mathbf{Eq. (5.59)} / \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$
$X_{4N\psi+j} = \bar{\beta}_{Hj}$	$j = 1, 2, 3, \dots, N\beta$
$X_{4N\psi+N\beta+j} = \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+j}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+j}}{d\eta} \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{4N\psi+j}}{d\eta} = X_{4N\psi+N\beta+j} / \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$
$\frac{d^2\bar{\beta}_{Hj}}{dx^2} = \frac{dX_{4N\psi+N\beta+j}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+N\beta+j}}{d\eta} \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{4N\psi+N\beta+j}}{d\eta} = \mathbf{Eq. (5.60)} / \left( \frac{d\eta}{dx} \right)$

Em termos dos elementos do vetor  $\underline{X}(\eta)$ , as Eqs. (5,53) e (5.54) são reescritas como:

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 \bar{\psi}_{Hi}}{dx^4}(x) = & \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N\psi} \left[ A_{ijk}^{\psi} \left( X_{3N\psi+j} X_k - X_{N\psi+j} X_{2N\psi+k} \right) + \left( B_{ijk}^{\psi} - E_{ijk}^{\psi} \right) X_{N\psi+j} X_k \right] + \\
& \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N\psi} \left[ C_{ij\infty}^{\psi} X_{3N\psi+j} + \left( D_{ij\infty}^{\psi} - F_{ij\infty}^{\psi} \right) X_{N\psi+j} - \frac{2}{\operatorname{Re}} G_{ij}^{\psi} X_{2N\psi+j} \right] + \\
\frac{1}{\operatorname{Re}_m} \sum_{j=1}^{N\beta} \sum_{k=1}^{N\beta} I_{ijk}^{\psi} & \left[ X_{4N\psi+N\beta+j} \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hk}}{dx^2} - \frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3} X_{4N\psi+k} + \left( \alpha_j^2 - \alpha_k^2 \right) X_{4N\psi+N\beta+j} X_{4N\psi+k} \right] + \\
\frac{1}{\operatorname{Re}_m} \sum_{j=1}^{N\beta} & \left[ J_{ijF}^{\psi} X_{4N\psi+N\beta+j} + K_{ijF}^{\psi} \left( \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^2} - \alpha_j^2 X_{4N\psi+j} \right) + M_{ijF}^{\psi} \left( \alpha_j^2 X_{4N\psi+N\beta+j} - \frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3} \right) \right] \\
& - \left( \mu_i^4 X_i + H_{i\infty}^{\psi} - \frac{L_{iFF}^{\psi}}{\operatorname{Re}_m} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N\psi
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \bar{\beta}_{Hi}}{dx^2}(x) = & \operatorname{Re}_m \left( \sum_{j=1}^{N\beta} \sum_{k=1}^{N\psi} \left( A_{ijk}^{\beta} X_{4N\psi+N\beta+j} X_k - E_{ijk}^{\beta} X_{4N\psi+j} X_{N\psi+k} \right) + \right. \\
& \left. \sum_{j=1}^{N\psi} \left( B_{ijF}^{\beta} X_j - F_{ijF}^{\beta} X_{N\psi+j} \right) + \sum_{j=1}^{N\beta} C_{ij\infty}^{\beta} X_{4N\psi+N\beta+j} - \right. \\
& \left. \left( H_i^{\beta} E_z - D_{i\infty F}^{\beta} \right) \right) + \alpha_i^2 X_{4N\psi+i} - G_{iF}^{\beta}
\end{aligned} \tag{5.62}$$

,  $i = 1, 2, 3, \dots, N\beta$

Sendo,

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3}(x) = & \operatorname{Re}_m \sum_{m=1}^{N\beta} \sum_{n=1}^{N\psi} \left[ A_{jmn}^{\beta} \left( X_{4N\psi+N\beta+m} X_{N\psi+n} + \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hm}}{dx^2} X_n \right) - \right. \\
& \left. E_{jmn}^{\beta} \left( X_{4N\psi+N\beta+m} X_{N\psi+n} + X_{4N\psi+m} X_{2N\psi+n} \right) \right] + \\
& \operatorname{Re}_m \left( \sum_{m=1}^{N\psi} \left( B_{jmF}^{\beta} X_{N\psi+m} - F_{jmF}^{\beta} X_{2N\psi+m} \right) + \sum_{m=1}^{N\beta} C_{jm\infty}^{\beta} \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hm}}{dx^2} \right) + \alpha_j^2 X_{4N\psi+N\beta+j}
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Agora, as condições de contorno são rescritas, em termos dos elementos do vetor  $\underline{X}(\eta)$ , como, iniciando primeiramente com as condições de contorno na entrada do canal (esquerda) e depois na saída do canal (direita):

$$\begin{aligned} X_{LEFT}(i) &= \bar{g}_i \quad , & i &= 1, 2, 3, \dots, N\psi \\ X_{LEFT}(NV+i) &= 0 \quad , & i &= 1, 2, 3, \dots, N\psi \\ X_{LEFT}(4NV+i) &= \bar{h}_i \quad , & i &= 1, 2, 3, \dots, N\beta \end{aligned} \quad (5.64 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} X_{RIGHT}(i) &= 0 \quad , & i &= 1, 2, 3, \dots, N\psi \\ X_{RIGHT}(NV+i) &= 0 \quad , & i &= 1, 2, 3, \dots, N\psi \\ X_{RIGHT}(4NV+i) &= 0 \quad , & i &= 1, 2, 3, \dots, N\beta \end{aligned} \quad (5.64 \text{ b})$$

## **CAPÍTULO VI**

## 6. RESULTADOS

Para o desenvolvimento do sistema infinito de equações diferenciais acopladas, Eqs. (5.53) e (5.54), um programa computacional na linguagem Fortran 90 foi escrito e implementado em um computador Intel Xeon 3.7 GHz. De maneira a se obter resultados numéricos, as expansões foram truncadas em uma ordem finita de termos  $N = N\psi = N\beta$  e um critério relativo de erro de  $10^{-4}$  foi imposto para a análise de convergência das funções escalares transformadas. Do pacote de subrotinas científicas IMSL (2010), foi utilizada a DVFPD, que é uma subrotina especialmente apropriada para resolver sistemas rígidos (“*stiffs*”) de equações diferenciais ordinárias, como as que no presente trabalho se apresentam. Quando não explicitado no texto, os resultados mostrados foram obtidos fazendo-se  $N=70$ , ordem suficientemente elevada para garantia da convergência de todos os campos, para as várias situações analisadas. Os coeficientes integrais, apresentados nas Eqs. (5.43), (5.48) e (5.52), foram obtidos numericamente através de quadratura Gaussiana com o uso da subrotina DQAGS (IMSL, 2010). Um critério relativo de erro de  $10^{-12}$  foi usado em cada coeficiente.

### 6.1. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Em análises híbridas, como as que se apresentam no presente trabalho, a taxa de convergência corresponde à precisão com que uma determinada série/expansão representa a solução até que um número preestabelecido de algarismos significativos seja atingido (critério de erro), dizendo-se então que, neste ponto, houve convergência. Deve-se aumentar gradativamente a ordem de truncamento das séries/expansões até que o critério de convergência seja atingido. Deste modo, a fim de evidenciar a natureza híbrida da metodologia aplicada, é mostrado um estudo do comportamento de convergência dos campos anteriormente citados, em diferentes posições longitudinais ao longo do canal.

Primeiramente, a análise de convergência é feita para a componente longitudinal da velocidade na linha central do canal,  $u_c(x)$ , para o gradiente de velocidade na parede superior,  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} \equiv f_x \frac{Re}{2}$  (vide apêndice B1) e, finalmente, para a variação do valor da função escalar magnética (entre a parede superior e a linha central do canal), normalizada pelo número de Reynolds magnético adotado,  $\frac{\Delta\beta}{Re_m} = \frac{\beta(x, 0.5) - \beta(x, 1)}{Re_m}$ , em diferentes posições ao longo do canal e diferentes parâmetros físicos.

Nas tabelas a seguir, são mostradas duas variáveis adicionais ao lado de cada número de Reynolds magnético, a saber,  $c$  e  $i_{adap}$ .  $c$  é o fator de escala utilizado na transformação de domínio, dada pelas Eqs. (5.55) e (5.56).  $i_{adap}$  é um “flag” utilizado no código computacional que informa se o procedimento adaptativo de solução numérica é empregado ( $i_{adap} = 1$ ) ou não ( $i_{adap} = 0$ ). O procedimento adaptativo citado é caracterizado pela utilização dos dados de malha e dos potenciais transformados obtidos em uma simulação anterior como malha e estimativa iniciais, respectivamente, em uma simulação atual. Quando ambos os valores aparecem nas tabelas para um mesmo caso analisado (1/0 ou 0/1), isso indica que para um determinado número de termos nas expansões o procedimento foi utilizado e para outro número de termos, não foi, ou vice-versa. Entende-se que a disponibilização desses parâmetros, embora não essenciais, pode servir de ponto de partida para a reprodução dos resultados e auxiliar outros pesquisadores. Os valores desses parâmetros para todas as situações simuladas no presente trabalho se encontram disponibilizados na Tabela 6.3.

As Tabelas 6.1 e 6.2 ilustram a análise de convergência dessas variáveis para as situações em que  $Re = 20$ ,  $Ha = 2$  e  $Re = 20$ ,  $Ha = 20$ , respectivamente, e diferentes valores do número de Reynolds magnético ( $Re_m = 10^{-4}$ , 1 e 50). Os resultados são mostrados para o caso de um medidor de vazão magnetohidrodinâmico, uma vez que empregou-se  $E_z = -Ha$  em todas as simulações. Além da análise de convergência, um exame mais acurado desta tabela também mostra a influência do parâmetro de acoplamento entre o campo magnético e o escoamento, *i.e.*, o número de Reynolds magnético,  $Re_m$ , e também do número de Hartmann,  $Ha$ .

De antemão, sem se ater às características de convergência, percebe-se a relação direta que o número de Hartmann tem sobre o escoamento e a relação que o número de Reynolds magnético tem sobre o campo magnético. A influência do número de Reynolds magnético sobre o escoamento é pequena/sutil. Por outro lado, o número de Hartmann tem forte influência sobre ambos os campos. Estes comportamentos serão, mais adiante, melhor analisados, através de gráficos que ilustrem visualmente suas características de desenvolvimento.

Tabela 6.1: Análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para  $Re = 20, Ha = 2, E_z = -Ha$  e diferentes valores de Reynolds magnético ( $Re_m = 10^{-4}, 1$  e  $50$ )

$Re_m = 10^{-4} (c = 0,7 - i_{adap} = 1)$															
$x$	$u_c(x)$					$\frac{\partial u}{\partial y} \Big _{y=1} \equiv f_x \frac{Re}{2}$					$\frac{\Delta\beta(x)}{Re_m} \times 10^2$				
	0.1	0.2	0.3	0.4	$x_\infty$	0.1	0.2	0.3	0.4	$x_\infty$	0.1	0.2	0.3	0.4	$x_\infty$
5	1.108	1.097	1.149	1.224	1.476	18.95	14.51	11.22	9.179	6.389	0.8479	1.624	2.404	3.139	6.051
10	1.012	1.082	1.163	1.244	1.476	25.73	14.13	10.08	8.390	6.389	0.8276	1.661	2.481	3.230	6.051
30	1.022	1.082	1.164	1.246	1.476	24.30	13.15	9.798	8.288	6.389	0.8269	1.671	2.494	3.243	6.051
50	1.021	1.082	1.163	1.246	1.476	23.73	13.09	9.784	8.283	6.389	0.8269	1.671	2.495	3.243	6.051
70	1.021	1.082	1.163	1.245	1.476	23.61	13.08	9.781	8.281	6.389	0.8269	1.671	2.494	3.243	6.051
$Re_m = 1 (c = 0,3 - i_{adap} = 0)$															
5	1.108	1.476	1.476	1.476	1.476	18.95	14.50	11.22	9.170	6.389	0.6695	5.986	6.046	6.051	6.051
10	1.012	1.082	1.163	1.245	1.476	25.73	14.12	10.07	8.380	6.389	0.6442	1.346	2.081	2.787	6.051
30	1.022	1.082	1.164	1.246	1.476	24.30	13.14	9.790	8.278	6.389	0.6428	1.355	2.094	2.801	6.051
50	1.021	1.082	1.164	1.246	1.476	23.73	13.09	9.776	8.273	6.389	0.6429	1.355	2.094	2.801	6.051
70	1.021	1.082	1.164	1.246	1.476	23.60	13.07	9.773	8.271	6.389	0.6429	1.355	2.094	2.801	6.051
$Re_m = 50 (c = 0,1 - i_{adap} = 1)$															
5	1.108	1.097	1.150	1.228	1.476	18.94	14.48	11.18	9.114	6.389	0.06565	0.06851	0.09513	0.1548	6.051
10	1.012	1.083	1.164	1.248	1.476	25.72	14.10	10.05	8.345	6.389	0.01293	0.03076	0.07982	0.1556	6.051
30	1.022	1.082	1.165	1.249	1.476	24.29	13.13	9.772	8.250	6.389	0.005352	0.02993	0.08150	0.1581	6.051
50	1.022	1.082	1.165	1.249	1.476	23.73	13.08	9.758	8.245	6.389	0.005359	0.02994	0.08150	0.1581	6.051
70	1.021	1.082	1.165	1.249	1.476	23.60	13.06	9.755	8.244	6.389	0.005359	0.02994	0.08150	0.1581	6.051

Tabela 6.2: Análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para  $Re = 20, Ha = 20, E_z = -Ha$  e diferentes valores de Reynolds magnético ( $Re_m = 10^{-4}, 1$  e  $50$ )

<b><math>Re_m = 10^{-4} (c = 0,7 - i_{adap} = 1)</math></b>															
$x \backslash N$	$u_c(x)$					$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=1} \equiv f_x \frac{Re}{2}$					$\frac{\Delta\beta(x)}{Re_m} \times 10^2$				
	0.1	0.2	0.3	0.4	$x_\infty$	0.1	0.2	0.3	0.4	$x_\infty$	0.1	0.2	0.3	0.4	$x_\infty$
5	1.0663	1.0629	1.0898	1.1104	1.1110	26.642	23.848	22.526	22.111	22.222	4.6161	8.6098	12.228	15.125	22.223
10	0.99774	1.0533	1.0931	1.1140	1.1110	32.265	24.069	22.204	21.919	22.222	4.3977	8.6036	12.329	15.341	22.223
30	1.0171	1.0567	1.0940	1.1141	1.1110	30.991	23.378	22.076	21.892	22.222	4.3899	8.6619	12.396	15.290	22.223
50	1.0170	1.0567	1.0940	1.1141	1.1110	30.583	23.357	22.069	21.887	22.222	4.3913	8.6642	12.398	15.292	22.223
70	1.0170	1.0567	1.0940	1.1141	1.1110	30.503	23.354	22.069	21.889	22.222	4.3914	8.6644	12.399	15.292	22.223
<b><math>Re_m = 1 (c = 0,7 - i_{adap} = 1)</math></b>															
5	1.0670	1.0652	1.0938	1.1151	1.1110	26.604	23.752	22.403	21.995	22.222	3.9084	7.5008	10.961	13.867	22.223
10	0.99893	1.0565	1.0979	1.1194	1.1110	32.168	23.896	22.017	21.753	22.222	3.6859	7.4892	11.063	13.985	22.223
30	1.0181	1.0597	1.0987	1.1194	1.1110	30.873	23.191	21.876	21.713	22.222	3.6756	7.5466	11.132	14.043	22.223
50	1.0180	1.0597	1.0987	1.1194	1.1110	30.464	23.167	21.866	21.706	22.222	3.6770	7.5490	11.135	14.045	22.223
70	1.0180	1.0597	1.0987	1.1194	1.1110	30.384	23.162	21.862	21.703	22.222	3.6771	7.5492	11.135	14.045	22.223
<b><math>Re_m = 50 (c = 0,7 - i_{adap} = 1)</math></b>															
5	1.0671	1.0762	1.1383	1.2002	1.1110	26.395	22.859	20.914	20.266	22.222	0.36644	0.44563	0.77327	1.3547	22.223
10	0.9992	1.0700	1.1436	1.2027	1.1110	31.615	22.833	20.774	20.389	22.222	0.10180	0.27543	0.71635	1.3523	22.223
30	1.0195	1.0746	1.1448	1.2028	1.1110	30.446	22.574	20.874	20.492	22.222	0.04835	0.27073	0.72628	1.3668	22.223
50	1.0194	1.0746	1.1448	1.2029	1.1110	30.156	22.586	20.966	20.479	22.222	0.04841	0.27094	0.72667	1.3674	22.223
70	1.0194	1.0746	1.1448	1.2029	1.1110	30.096	22.586	20.963	20.473	22.222	0.04842	0.27095	0.72672	1.3674	22.223

A partir destes dados, pode-se observar, claramente, as elevadas taxas de convergência para as funções selecionadas, obtidas com a abordagem da transformada integral (GITT). Os seguintes comentários, pautados nessas tabelas, para cada variável e para os diferentes valores de Reynolds magnético, são efetuados a seguir.

- Para o caso da componente longitudinal da velocidade no cetro do canal ( $u_c$ ), observa-se uma elevada taxa de convergência, ocorrendo para  $N = 10$ , no terceiro algarismo significativo, para os diversos valores de  $x$  ao longo do canal, excetuando-se  $x = 0.1$ , onde a convergência se dá para  $N = 30$ .
- Para o gradiente de velocidade na parede superior,  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} \equiv \frac{f_x Re}{2} \right)$ , observa-se uma convergência mais lenta ( $N = 30$ ) em relação ao anterior, ocorrendo somente para  $x \geq 0.2$  e no segundo algarismo significativo. De modo geral, a convergência na entrada do canal é mais lenta, devido ao uso do filtro da região do escoamento completamente desenvolvido e da descontinuidade da função corrente nesta região.
- Para a variação do valor da função escalar magnética,  $\left( \frac{\Delta\beta(x)}{Re_m} \right)$ , observa-se uma convergência para  $N = 30$ , em todas posições ao longo do canal e no terceiro algarismo significativo. Como para a velocidade, esse potencial não envolve gradientes, sendo ainda avaliado no centro do canal, uma região de mais fácil convergência.

## 6.2. COMPARAÇÃO COM OUTROS RESULTADOS

A Tabela 6.3 mostra a comparação com os resultados obtidos por diferenças finitas por Brandt e Gillis (1966) para o comprimento de entrada hidrodinâmica,  $x_\infty$ . O comprimento de entrada hidrodinâmico é definido como a distância à entrada do canal onde 97% da diferença entre o valor da velocidade na linha de centro do canal do escoamento completamente desenvolvido e o valor da velocidade na linha de centro do canal na entrada é atingido, isto é:

$$\left| u_c(\infty) - u_c(x_\infty) \right| = 0.03 \left| u_c(\infty) - u_c(0) \right| \quad (5.83)$$

Tabela 6.3 – Comprimento de entrada hidrodinâmica,  $x_{\infty}$ , para várias situações de escoamento.

$Re$	$Ha$	$Re_m$	Presente Trabalho			Brandt e Gillis (1969)
			$x_{\infty}^*$	$c$	$i_{adap}$	$x_{\infty}^{BG}$
20	0	--- ( $10^{-4}$ )	<b>2,25</b>	0,5	1	2,26
	2	$10^{-4}$	<b>2,146</b>	0,7	1	2,151
		0,1	<b>2,140</b>	0,7	1	2,149
		1	<b>2,124</b>	0,3	0	2,131
		10	<b>1,996</b>	0,3	1	2,001
		50	<b>1,913</b>	0,1	1	1,890
		$\infty$	---	---	---	1,792
	4	$10^{-4}$	<b>1,88</b>	0,7	1	1,90
	10	$10^{-4}$	<b>1,15</b>	0,7	1	1,18
	20	$10^{-4}$	<b>0,72</b>	0,8	1/0	0,78
		1	<b>0,67</b>	0,7	0	---
		10	<b>0,52</b>	0,5	0	---
50		<b>0,50</b>	0,1	0	---	
200	0	---- ( $10^{-4}$ )	<b>18,28</b>	0,1	1	18,23
	2	$10^{-4}$	<b>17,40</b>	0,09	0/1	---
	2	1	<b>17,41</b>	0,2	1/0	17,32
500	0	--- ( $10^{-4}$ )	<b>44,9</b>	0,1	1	44,8
	2	$10^{-4}$	<b>42,67</b>	0,1	0	---

\* Devido à diferença entre os grupos adimensionais do presente trabalho e os do trabalho de Brandt e Gillis (1969), a relação para o comprimento de entrada entre os dois trabalhos é  $x_{\infty}^* = 2x_{\infty} = x_{\infty}^{BG}$ .

Um exame dessa tabela revela a consistência dos resultados obtidos para o comprimento de entrada hidrodinâmica, como definido por Brandt e Gillis (1969), com a presente metodologia. Todos os resultados obtidos com o presente método apresentam erro relativo inferior à 2,5%. As pequenas diferenças apontadas na tabela se devem ao desconhecimento e diferenças das malhas numéricas empregadas pelos autores. Adicionalmente, deve-se ter em mente que, para se garantir uma precisão de milésimos, como visualizados em alguns resultados disponibilizados pelos autores sob comparação, deve-se trabalhar com uma malha numérica uniforme extremamente fina, cuja discretização garanta esta precisão, situação certamente não empregada pelos autores.

Agora, para se mostrar visualmente a performance do código computacional desenvolvido, comparações são realizadas, inicialmente, para o caso de escoamento não magnetohidrodinâmicos ( $Ha = 0$ ) para diferentes números de Reynolds.

As Figuras 6.1, e 6.2 ilustram estas comparações, mostrando o desenvolvimento da velocidade longitudinal ao longo do canal para  $Re = 20$  e  $Re = 500$ , respectivamente. Adicionalmente, para se perceber melhor a distância à entrada do canal para a qual a região de escoamento completamente desenvolvida é alcançada, o perfil de velocidade para a posição  $x \rightarrow \infty$  ( $x = 500$ ) é também visualizada.

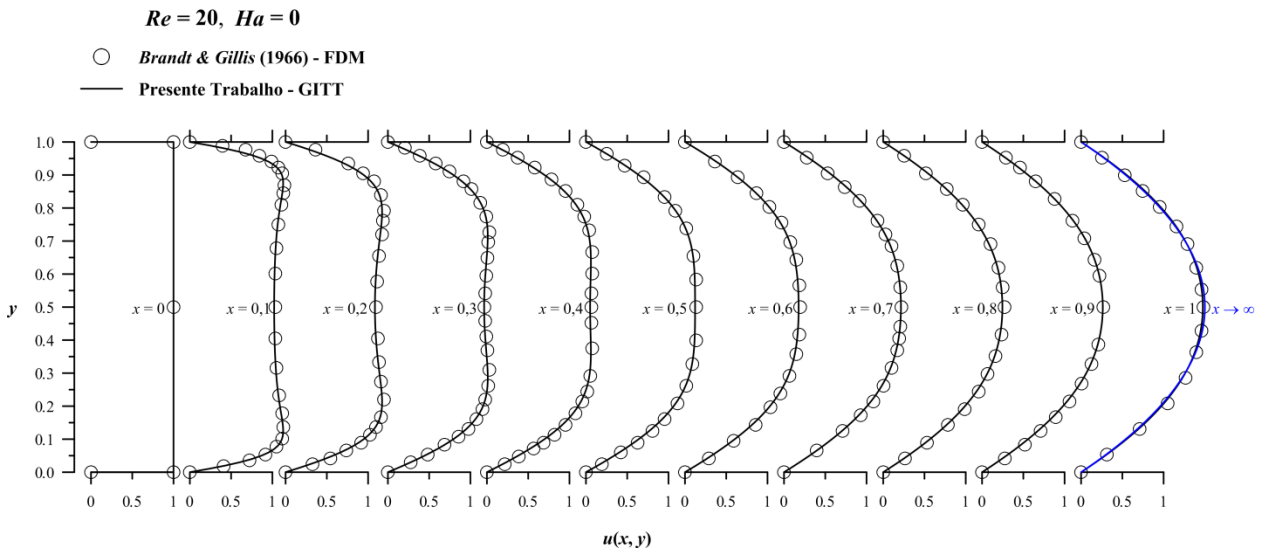


Figura 6.1 - Desenvolvimento do perfil da componente longitudinal da velocidade, para  $Ha = 0$  e  $Re = 20$ .

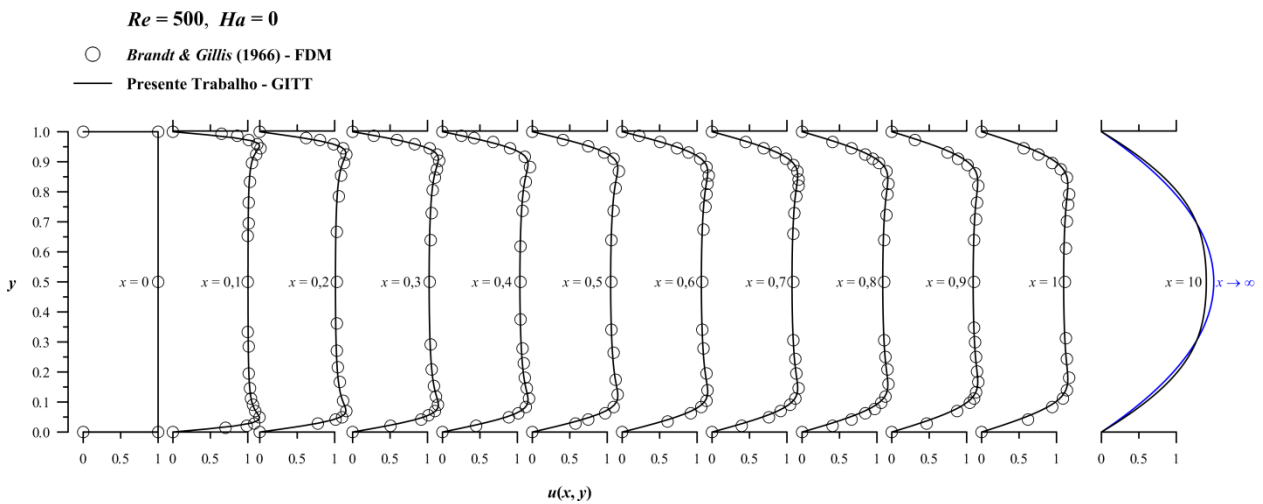


Figura 6.2 - Desenvolvimento do perfil da componente longitudinal da velocidade, para  $Ha = 0$  e  $Re = 500$ .

Estas figuras mostram o forte efeito do número de Reynolds no desenvolvimento do escoamento ao longo do eixo do canal. Quanto maior for o número de Reynolds, mais “achatado” é o perfil da componente longitudinal da velocidade, fazendo com que, como esperado, o gradiente de velocidade na parede seja muito mais elevado.

Agora, a influência da presença de um campo magnético sobre o escoamento é comparada na Fig. 6.3, onde é ilustrado o comportamento do perfil da componente de velocidade, ao longo do eixo  $x$ , para a situação em que  $Re = 20$ ,  $Ha = 20$  e  $Re_m = 10^{-4}$ . Para essa ordem de grandeza do número de Reynolds magnético ( $Re_m \ll 1$ ), é esperado, como se verá mais adiante, que não haja interação do escoamento sobre o campo magnético imposto, mas apenas do campo magnético sobre o escoamento.

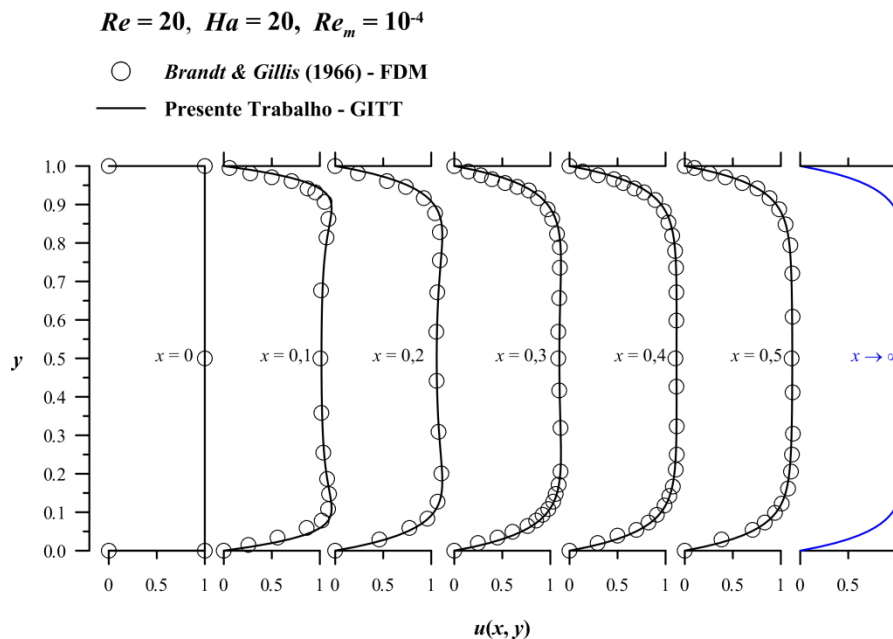


Figura 6.3 - Desenvolvimento do perfil da componente longitudinal da velocidade, para  $Ha = 20$ ,  $Re = 20$  e  $Re_m = 10^{-4}$ .

Como nas figuras anteriores, os resultados numéricos da referência de comparação são reproduzidos com o uso da presente metodologia. Além do comportamento numérico, uma comparação entre os resultados das Figs. 6.1 e 6.3 apontam a grande influência que o número de Hartmann exerce sobre o escoamento. A característica parabólica do escoamento na região completamente desenvolvida é perdida quando o número de Hartmann é elevado. Os perfis de velocidade ao longo do canal devem ser tornar mais achatados, parecendo perfis de um escoamento turbulento, à medida que o número de Hartmann vai crescendo.

Para estudar um pouco melhor este comportamento, e também como forma de se comparar mais ainda os resultados híbridos do presente trabalho com os resultados numéricos de Brandtl e Gillis (1969), a Fig. 6.4. ilustra a evolução da velocidade ao longo da linha central do canal, para diferentes valores dos números de Hartmann. Por outro lado, as Figs. (6.5 e 6.5) ilustram a evolução dessa velocidade para diferentes valores do número de Reynolds magnético.

A Fig. 6.4 ilustra o desenvolvimento para  $Re = 20$ ,  $Re_m = 10^{-4}$  e diferentes valores de Hartmann,  $Ha = 2, 4, 10$  e  $20$ . Duas curvas extras são mostradas na figura, para observação de dois casos limites: a) valor baixo para o número de Reynolds e valor elevado para o número de Reynolds magnético ( $Re = 20$ ,  $Ha = 2$  e  $Re_m = 50$ ) e, b) valor elevado para o número de Reynolds e valor baixo para o número de Reynolds magnético ( $Re = 200$ ,  $Ha = 2$  e  $Re_m = 1$ ).

Como em todas as situações analisadas, os resultados híbridos obtidos reproduzem os dados numéricos da referência empregada para comparação, para todas as faixas de parâmetros adimensionais analisados. Um exame mais detalhado na Fig. 6.4 revela um fenômeno de *overshooting* na velocidade na linha de centro canal, isto é, o valor dessa variável é maior do que o seu valor na região completamente desenvolvida, em algumas posições axiais próximas à entrada do canal quando o número de Hartmann é elevado ( $Ha > 10$ ).

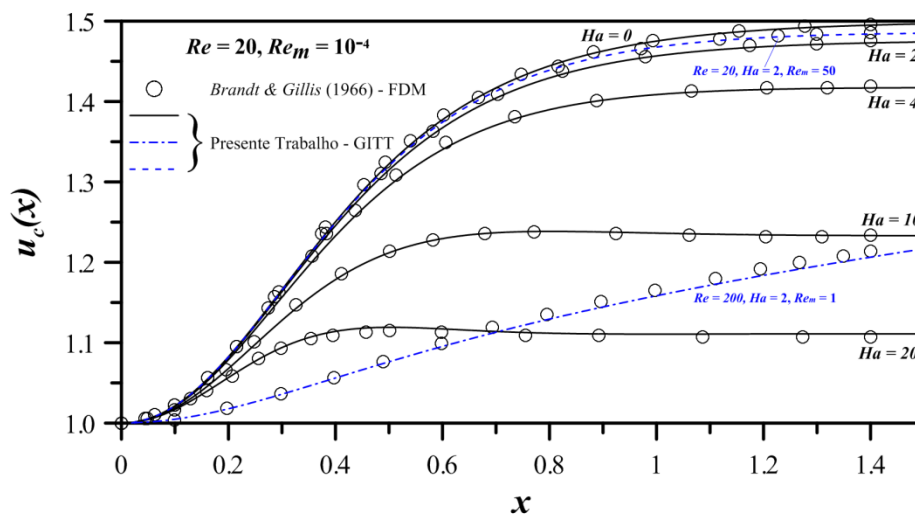


Figura 6.4 - Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade ao longo da linha central do canal para  $Re = 20$ ,  $Re_m = 10^{-4}$  e diversos valores de  $Ha$ . A curva tracejada é para  $Re = 20$ ,  $Ha = 2$  e  $Re_m = 50$ . A curva de traço-ponto é para  $Re = 200$ ,  $Ha = 2$  e  $Re_m = 1$ .

A Figura 6.5 ilustra o desenvolvimento da velocidade na linha de centro do canal como função do número de Reynolds magnético ( $Re_m = 10^{-4}, 10, 50$  e  $\infty$ ). Conforme indicado por Brandtl e Gillis (1969), a curva para a qual  $Re_m \rightarrow \infty$  foi obtida fazendo-se  $Ha = 0$  nos cálculos. A linha tracejada horizontal é ilustrada como referência para o valor da velocidade na linha de centro do canal na região de escoamento completamente desenvolvida, onde  $u_c = 1,476246$ .

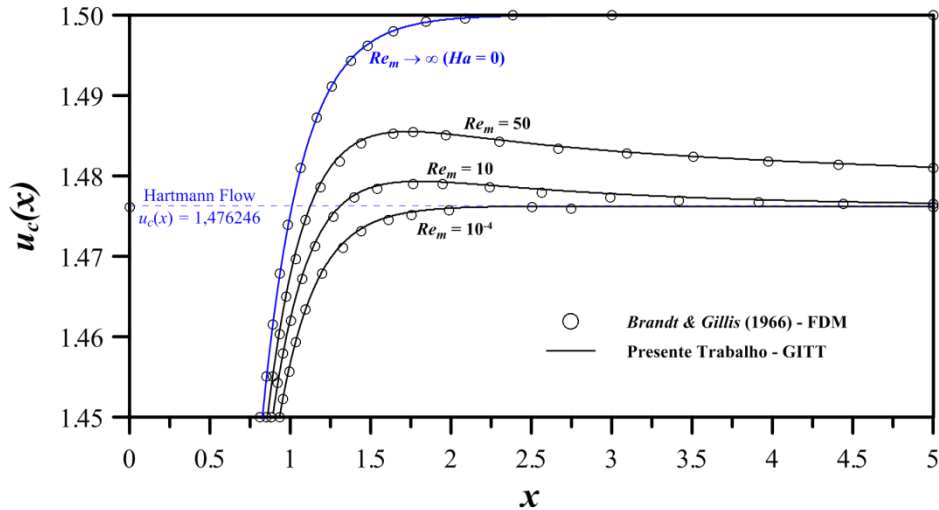


Figura 6.5 - Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade ao longo da linha central do canal para  $Re = 20$ ,  $Ha = 2$  e diversos valores de  $Re_m$ . A curva que marca  $Re_m \rightarrow \infty$  é para  $Ha = 0$ .

A comparação entre os resultados continua mostrando a excelente aderência entre os resultados numéricos e híbridos. Os resultados dessa figura demonstram a existência, também, do fenômeno de *overshooting* da velocidade na linha de centro do canal em uma determinada região do escoamento, para valores crescentes do número de Reynolds magnético.

Percebe-se ainda, que, para posições suficientemente distantes da entrada do canal, com exceção do caso em que  $Ha = 0$ , o valor da velocidade no centro do canal converge para um único valor ( $u_c = 1,476246$ ), independente de  $Re_m$ . No entanto, quanto maior é o número de Reynolds magnético, mais distante da entrada do canal é o ponto de convergência. Estes valores também corroboram com os resultados encontrados por Brandt e Gillis (1966). A Figura 6.6 ratifica esse comportamento, mostrando, em maior evidência o fenômeno de *overshooting*.

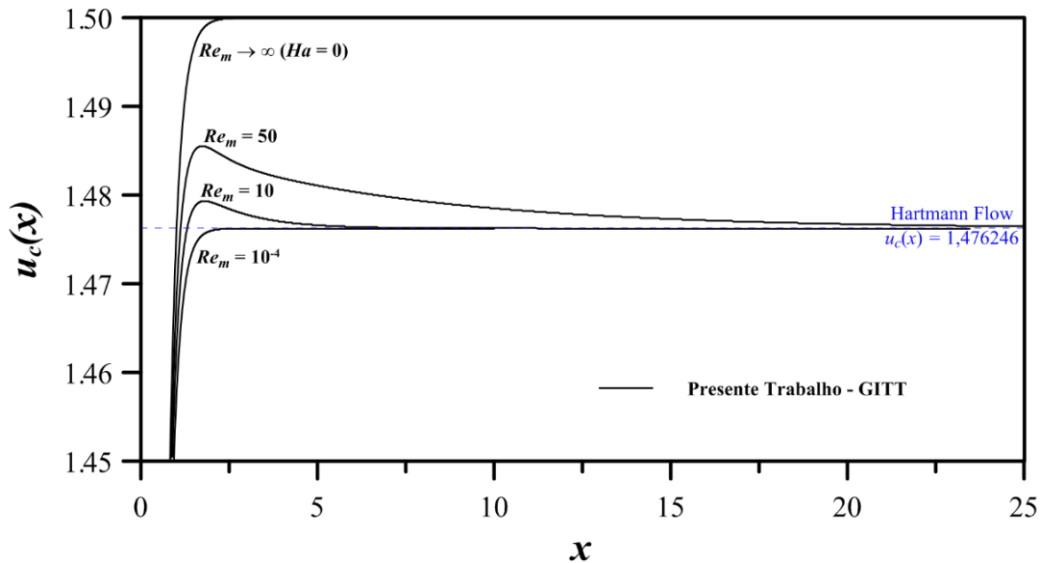


Figura 6.6 - Figura que mostra a convergência para um único valor de  $u_c$ , para diversos valores do número de Reynolds magnético, indicando que se o  $Re_m$  cresce, o ponto de convergência se distancia da entrada do canal.

Finalmente, o comportamento do desenvolvimento do campo magnético é comparado na Fig. 6.7 através da variação do valor da função escalar magnética (entre a parede superior e a linha de centro do canal), em relação ao número de Reynolds magnético. A razão ilustrada na figura,  $\Delta\beta(x)/Re_m$ , é uma normalização de  $\Delta\beta(x)$ , feita para melhor visualização gráfica desse potencial. As curvas foram obtidas para as situações em que  $Re = 20$ ,  $Ha = 2$  e diferentes números de Reynolds magnético ( $Re_m = 10^{-4}$ , 1, 10 e 50). Uma curva adicional para  $Re = 200$ ,  $Ha = 2$  e  $Re_m = 1$  é disponibilizada para se gerar uma comparação cruzada dos resultados entre o número de Reynolds e o número de Reynolds magnético para a função escalar magnética.

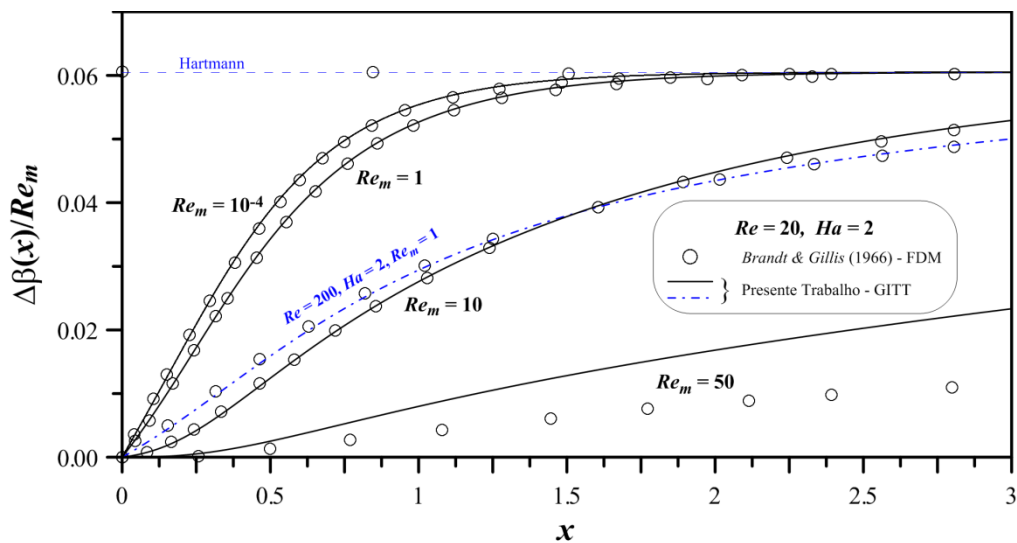


Figura 6.7 - Desenvolvimento da função escalar magnética (normalizada por  $Re_m$ ) na linha central do canal. As linhas cheias são para  $Re = 20$ ,  $Ha = 2$  e diversos valores de  $Re_m$ . A linha tracejada é para  $Re = 200$ ,  $Ha = 2$  e  $Re_m = 1$ .

O comportamento obtido para esse potencial é reproduzido com o presente método de solução para todas as, menos uma, situações estudadas. Os resultados encontrados com a técnica da transformada integral superestimam os valores numéricos encontrados para a situação de maior número de Reynolds magnético ( $Re_m = 50$ ).

Poder-se-ia, a princípio, criticar os valores numéricos de Brandt e Gillis (1969) por se tratar de uma situação de mais difícil convergência e de forte acoplamento entre os campos, uma vez que os resultados obtidos para a velocidade no centro do canal da Fig. 6.6, para a mesma situação estudada, apresentam concordância. No entanto, uma vez que esse valor de número de Reynolds magnético é elevado, governando a equação que descreve o comportamento da função escalar magnética, pode-se atribuir a diferença à má solução dessa equação pelo presente método. Assim, sugere-se a realização de análises mais aprofundadas sobre esse comportamento.

### 6.3. ANÁLISE DO ACOPLAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO

Nesta seção, faz-se uma análise de características dos campos magnético e de velocidade, bem como da densidade de corrente e da força de Lorentz, para diversos valores dos parâmetros inerentes ao acoplamento entre os estes campos ( $Re$ ,  $Ha$ ,  $Re_m$ ). Para que a influência dos parâmetros fique devidamente evidenciada, os gráficos serão superpostos em grupos, classificados através da análise de influência de cada parâmetro, individualmente.

O número de Reynolds,  $Re$ , é dado pela razão entre as forças de inércia e as forças viscosas, assim, à medida que  $Re$  cresce, as forças de inércia tornam-se maiores que as forças viscosas e o perfil de velocidade torna-se mais achatado ao longo das seções transversais de um canal. O número de Hartmann,  $Ha$ , é o parâmetro adimensional que governa o comportamento do escoamento em relação às forças impostas pelo campo magnético. Assim, quanto maior for o número de Hartmann, mais intensas serão as forças magnéticas sobre o escoamento. Por outro lado, o número de Reynolds magnético,  $Re_m$ , é o parâmetro que governa o comportamento do campo magnético frente as forças advectivas do escoamento. Assim, quanto maior for o número de Reynolds magnético, mais “arrastadas/advectadas” serão as linhas de campo magnético.

#### a) Influência do Número de Reynolds, $Re$

A Figura 6.8 ilustra a influência do número de Reynolds sobre o desenvolvimento do escoamento para uma situação de escoamento não magnetohidrodinâmico ( $Ha = 0$ ). Os resultados são os mesmos das Fig. 6.1 e 6.2, no entanto, o comportamento é ilustrado de maneira mais direta, uma vez que as duas curvas (para os dois números de Reynolds) são plotadas simultaneamente para cada posição longitudinal.

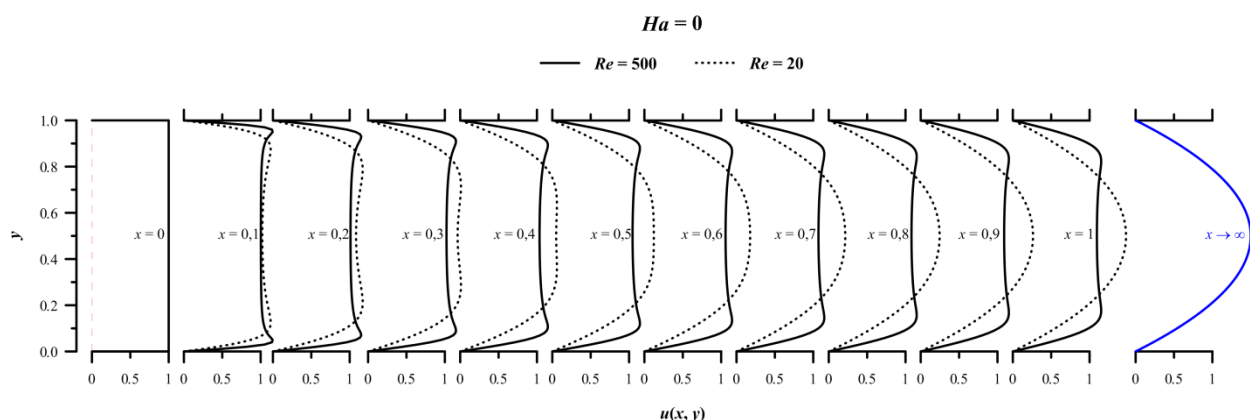


Figura 6.8 - Desenvolvimento do perfil da componente longitudinal da velocidade, para  $Ha = 0$ ,  $Re = 20$  e  $Re = 500$ .

Percebe-se, claramente, que a região de escoamento completamente desenvolvida é mais rapidamente alcançada para números de Reynolds menores ( $x \cong 1$  para  $Re = 20$ ,  $x > 10$ , para  $Re = 500$ ). Isto indica que as forças viscosas são mais intensas, de maneira que os efeitos das forças de atrito são mais rapidamente percebidos no centro do canal, e um menor comprimento ao longo do canal é necessário para se atingir a região completamente desenvolvida.

Outra característica interessante, que pode ser destacada desta figura, é o já bem conhecido perfil em forma de “M” (concavidade) para a componente longitudinal da velocidade na entrada do canal, especialmente para números de Reynolds elevados. Este efeito não é observado em resultados de formulação em camada limite, uma vez que ela negligencia o termo das forças viscosas (difusão axial). Estes termos são associados a um gradiente de pressão negativo que se estabelece perto da região da parede, e a uma zona de pressão positiva na região perto da linha central ( $y = 0.5$ ), de modo que, o escoamento perto da linha central não é imediatamente acelerado e os *overshoots* de velocidade são formados (Sparrow *et al.*, 1964).

Observe-se, também, que na região de escoamento completamente desenvolvido ( $x \rightarrow \infty$ , curvas em azul), os perfis de velocidade (parabólicos) para os diferentes números de Reynolds são idênticos (as duas curvas colapsam uma sobre a outra), indicando a independência do perfil sobre esse parâmetro naquela região. Esse comportamento se deve aos grupos adimensionais empregados.

Finalmente, uma vez que  $Ha = 0$ , não há acoplamento entre os campos, tampouco não existe nenhum comportamento associado ao campo magnético. A Figura 6.9 comprova essa ausência, confirmando a nulidade dos valores da densidade de corrente,  $J_z$ , e das componentes da força de Lorentz,  $F_x$  e  $F_y$ , ao longo do canal.

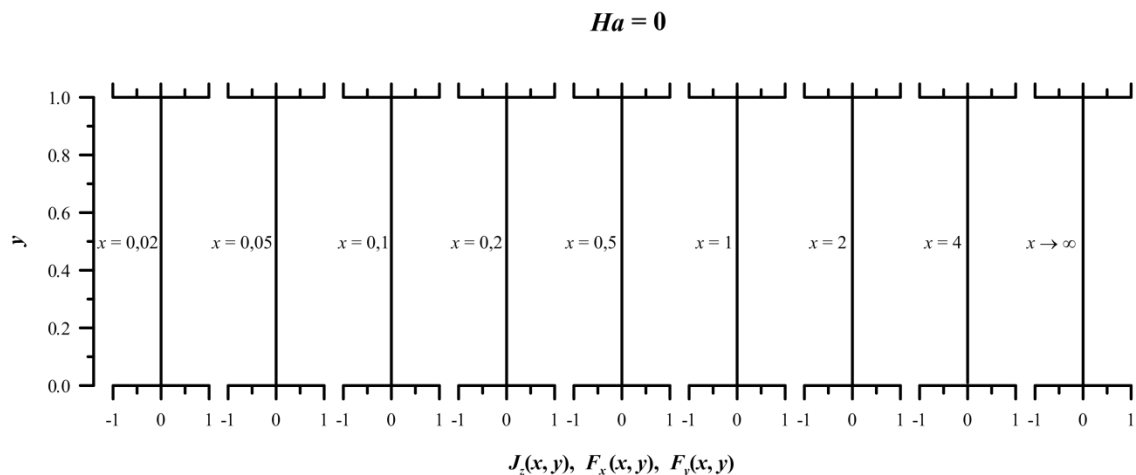


Figura 6.9 - Densidade de corrente nula para diversos valores da posição ao longo do canal, no caso em que  $Ha = 0$ .

Por outro lado, quando o número de Hartmann é diferente de zero, o acoplamento passa a ocorrer, de maneira que o escoamento é afetado pelo campo magnético. Se, em adição, o número de Reynolds magnético é de ordem maior que um, o acoplamento passa a se dar também nas duas direções, isto é, o campo magnético também passa a ser afetado pelo escoamento.

Assim, a partir deste ponto, são mostrados conjuntos de figuras que mostram os comportamentos das intensidades da componente longitudinal e vertical da velocidade ( $u$  e  $v$ ), da função escalar magnética ( $\beta$ ), das componentes do campo magnético ( $B_1$  e  $B_2$ ), da densidade de corrente ( $J_z$ ) e, das componentes da força de Lorentz ( $F_x$  e  $F_y$ ). Mais uma vez, apenas a situação de medidor de vazão magnetohidrodinâmico ( $E_z = -Ha$ ) é considerada no presente trabalho.

Para pequenos valores dos números de Hartmann e de Reynolds magnético, não há um acoplamento substancial e a variação do número de Reynolds não afeta as componentes do campo magnético. As Figs. 6.10 e 6.11 ilustram, respectivamente, o desenvolvimento das componentes horizontal e vertical do campo magnético ao longo do canal para diferentes valores do número de Reynolds e  $Ha = 2$  e  $Re_m = 10^{-4}$ , mostrando que o número de Reynolds não afeta o campo magnético, isto é, que não há componente induzida de campo magnético na direção  $x$ ,  $B_1 = 0$ , e que a componente vertical permanece constante no interior do canal,  $B_2 = 2$ .

Por outro lado, como o escoamento ( $u$  e  $v$ ) é afetado pelo número de Reynolds (Fig. 6.12 e 6.13), todas as variáveis dependentes do escoamento, a saber,  $J_z$  e  $F_x$  serão afetadas. A componente vertical da força de Lorentz ( $F_y$ ) será nula, neste caso, uma vez que ela é diretamente relacionada à componente horizontal do campo magnético,  $B_1$ . As Figs. 6.14 a 6.16 ilustram o comportamento do desenvolvimento da densidade de corrente e das componentes vertical e longitudinal das forças de Lorentz, respectivamente, como função de  $Re$ .

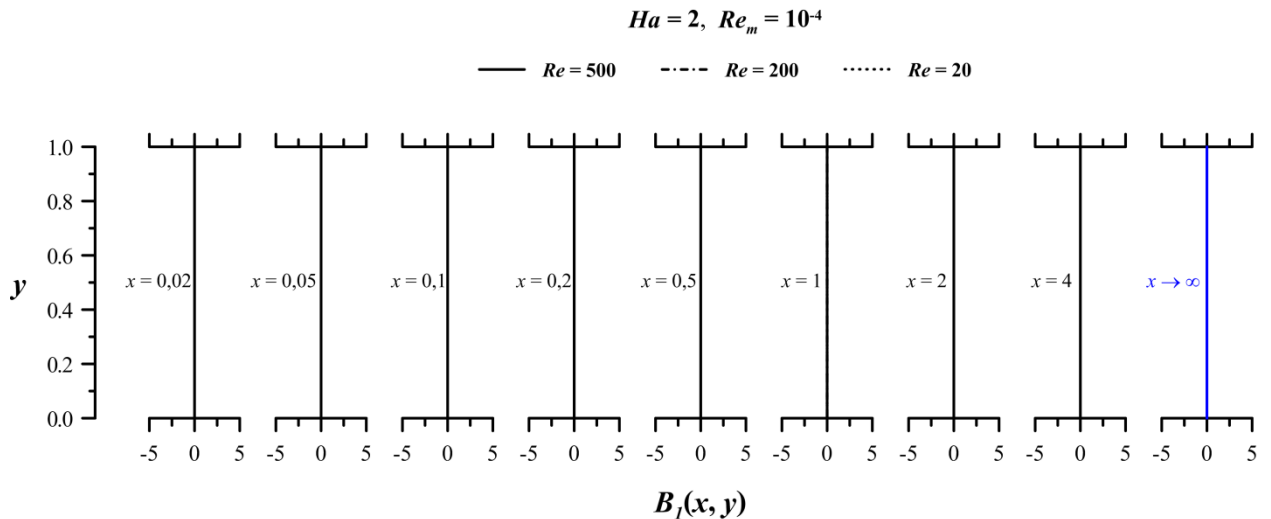


Figura 6.10 - Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para  $Ha = 2$ ,  $Re_m = 10^{-4}$  e diferentes  $Re$ .

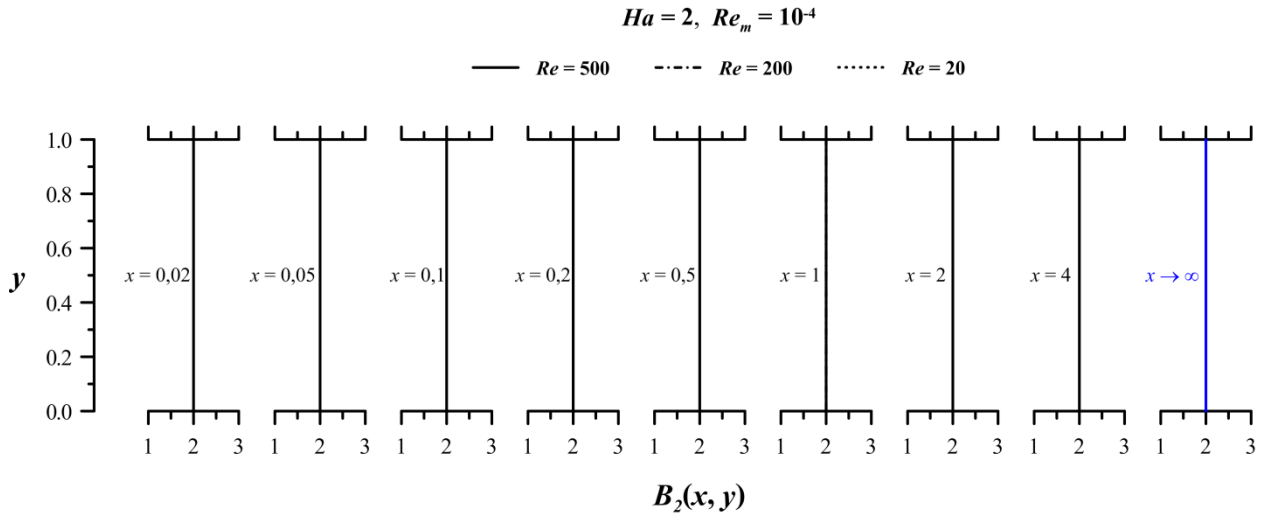


Figura 6.11 - Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para  $Ha = 2, Re_m = 10^{-4}$  e diferentes  $Re$ .

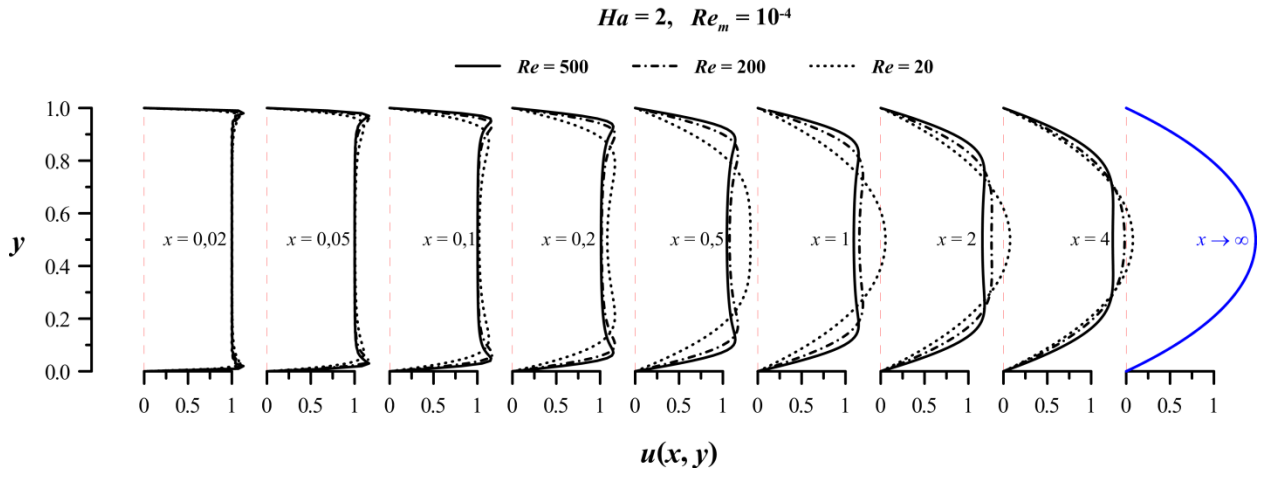


Figura 6.12 - Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para  $Ha = 2, Re_m = 10^{-4}$  e diferentes  $Re$ .

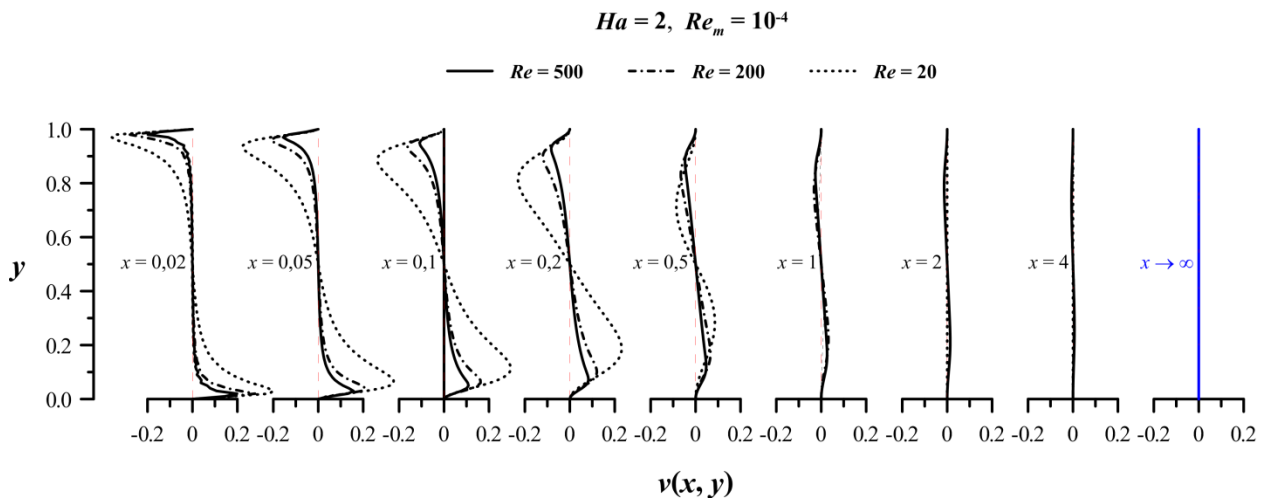


Figura 6.13 - Desenvolvimento da componente vertical de velocidade, para  $Ha = 2, Re_m = 10^{-4}$  e diferentes  $Re$ .

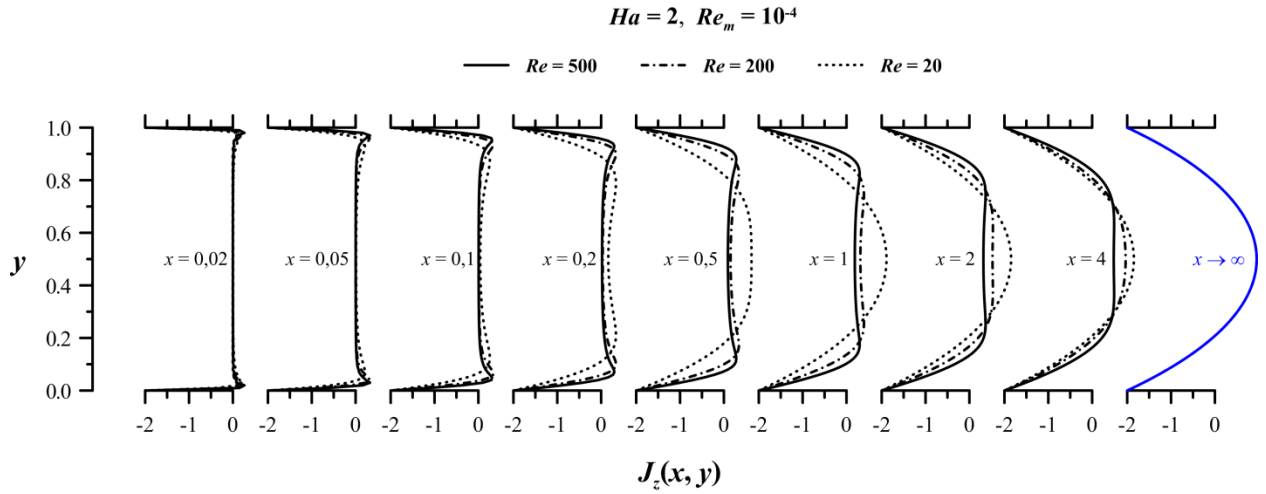


Figura 6.14 - Desenvolvimento da densidade de corrente, para  $Ha = 2, Re_m=10^{-4}$  e diferentes  $Re$ .

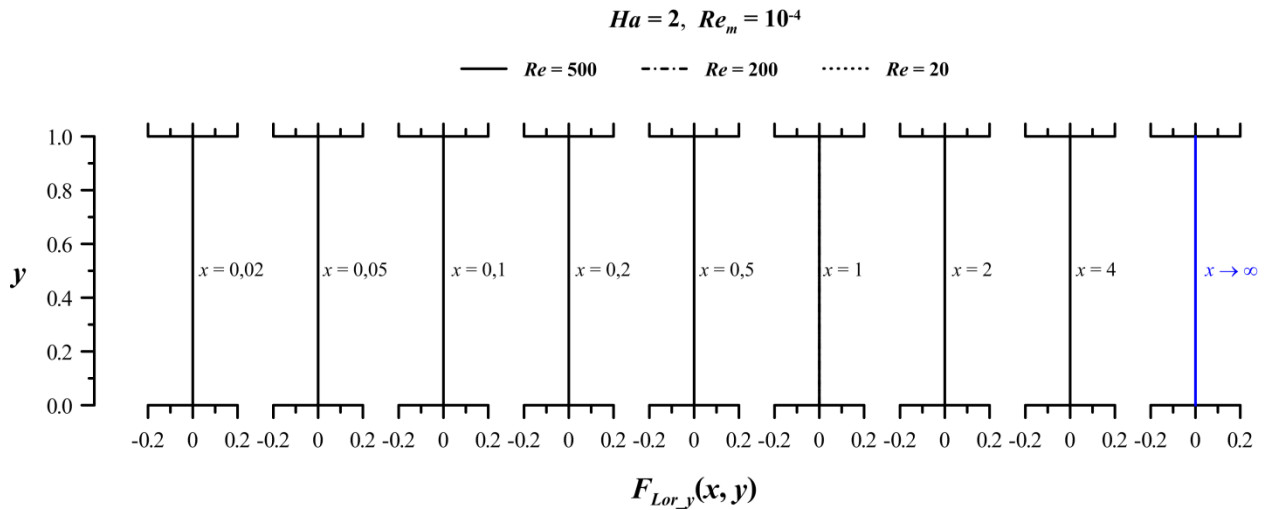


Figura 6.15 - Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para  $Ha = 2, Re_m=10^{-4}$  e diferentes  $Re$ .

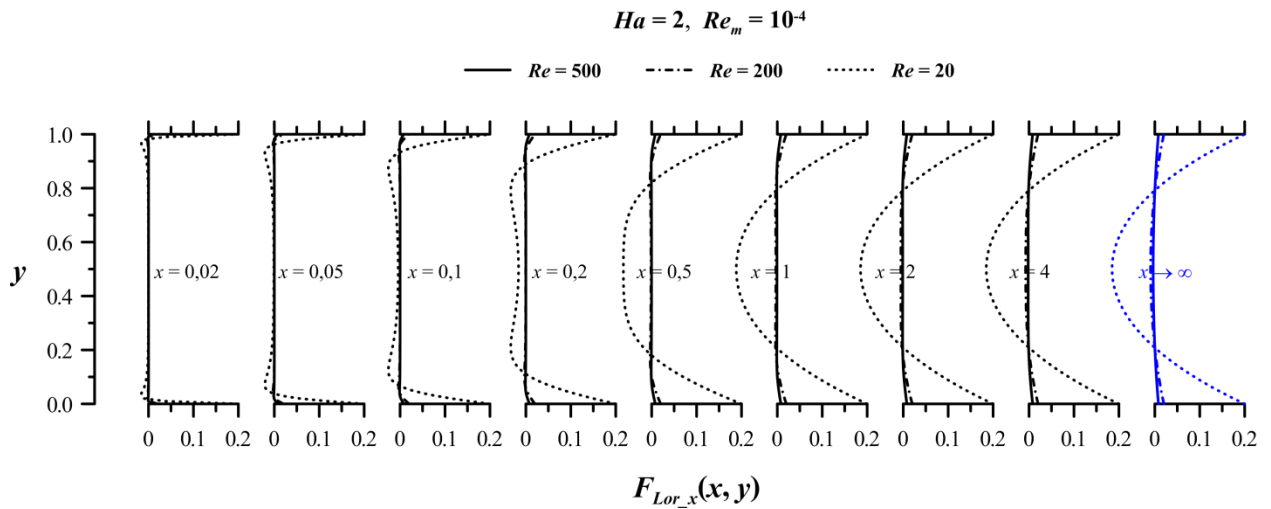


Figura 6.16 - Desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para  $Ha = 2, Re_m=10^{-4}$  e diferentes  $Re$ .

### b) Influência do Número de Hartmann, $Ha$

A influência do número de Hartmann sobre o desenvolvimento do escoamento é agora ilustrada. Para se avaliar a influência cruzada do número de Reynolds magnético, serão empregados dois valores para esse parâmetro ( $Re_m = 10^{-4}$  e  $Re_m = 50$ ). Tomou-se o valor  $Re = 20$  para o número de Reynolds e três valores para o número de Hartmann ( $Ha = 2, 10$  e  $20$ ) para se investigar a sua influência sobre o campo de escoamento.

#### b.1) $Re_m \ll 1$ ( $Re_m = 10^{-4}$ )

Para pequenos valores do número de Reynolds magnético, não há alteração das intensidades das componentes do campo magnético por influência do escoamento. O número de Hartmann faz com que o perfil de velocidade seja afetado pelo campo externo e o perfil torna-se mais empistonado, *plug-flow*, para valores mais elevados deste parâmetro. Não obstante, para qualquer que seja o valor de  $Ha$  (2, 10 ou 20), o escoamento torna-se completamente desenvolvido para  $x = 1$ . A Fig. 6.17 mostra o comportamento da componente longitudinal da velocidade, confirmando o comentário acima sobre o perfil de velocidade. A Fig. 6.18 representa o comportamento da componente vertical da velocidade, mostrando que, de fato, a partir de  $x = 1$ , o valor de  $v$  é praticamente nulo, confirmando o escoamento completamente desenvolvido. Já as Figs. 6.19 e 6.20 mostram, respectivamente, o desenvolvimento das componentes horizontal e vertical do campo magnético, ratificando que o campo não é afetado pelo escoamento, independentemente do valor de  $Ha$ .

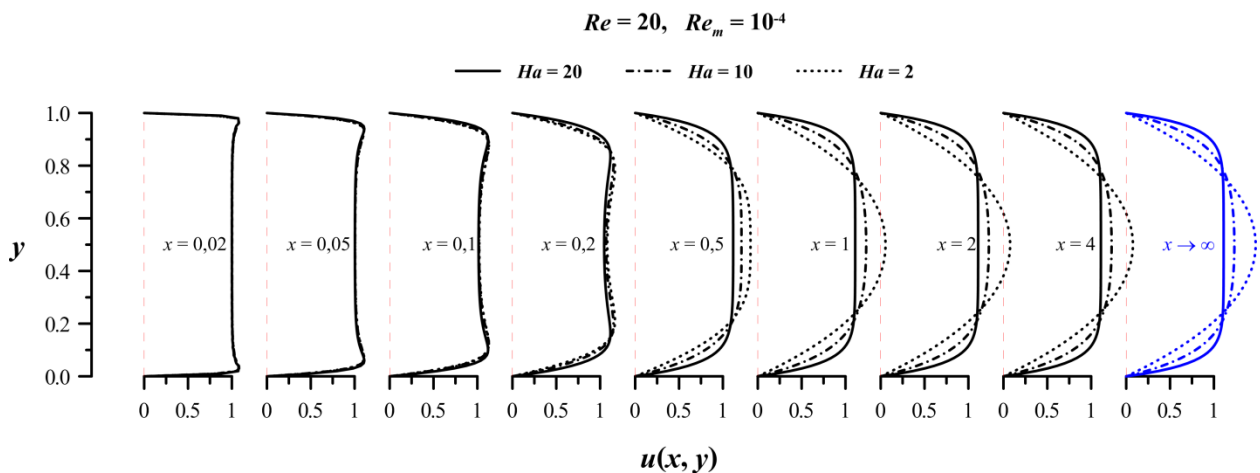


Figura 6.17 - Desenvolvimento da componente longitudinal de velocidade, para  $Re = 20$ ,  $Re_m = 10^{-4}$  e diferentes  $Ha$ .

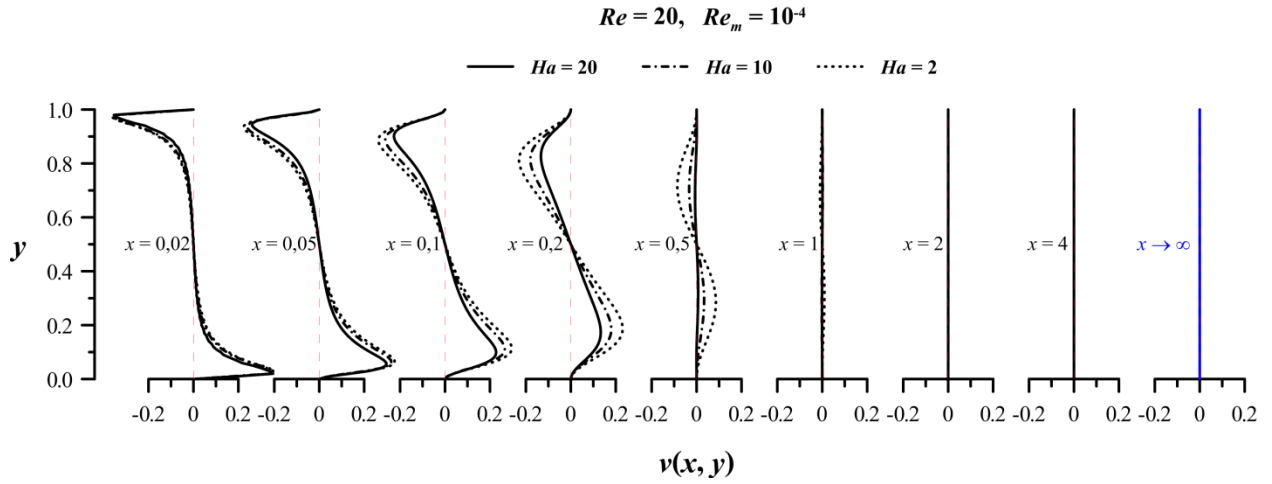


Figura 6.18 - Desenvolvimento da componente vertical velocidade, para  $Re = 20, Re_m=10^{-4}$  e diferentes  $Ha$ .

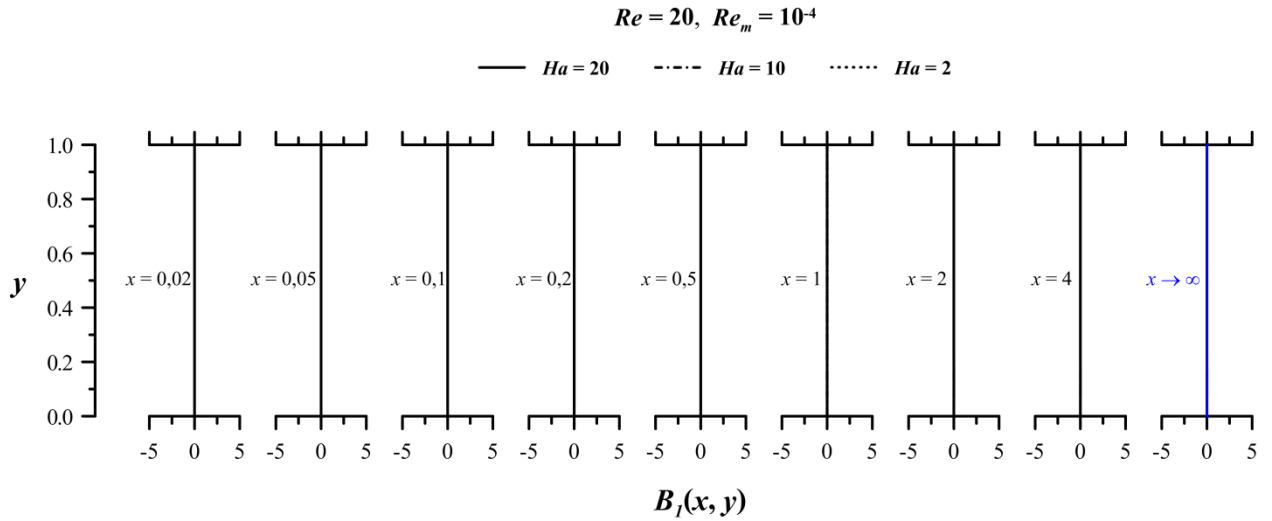


Figura 6.19 - Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para  $Re = 20, Re_m= 10^{-4}$  e diferentes  $Ha$ .

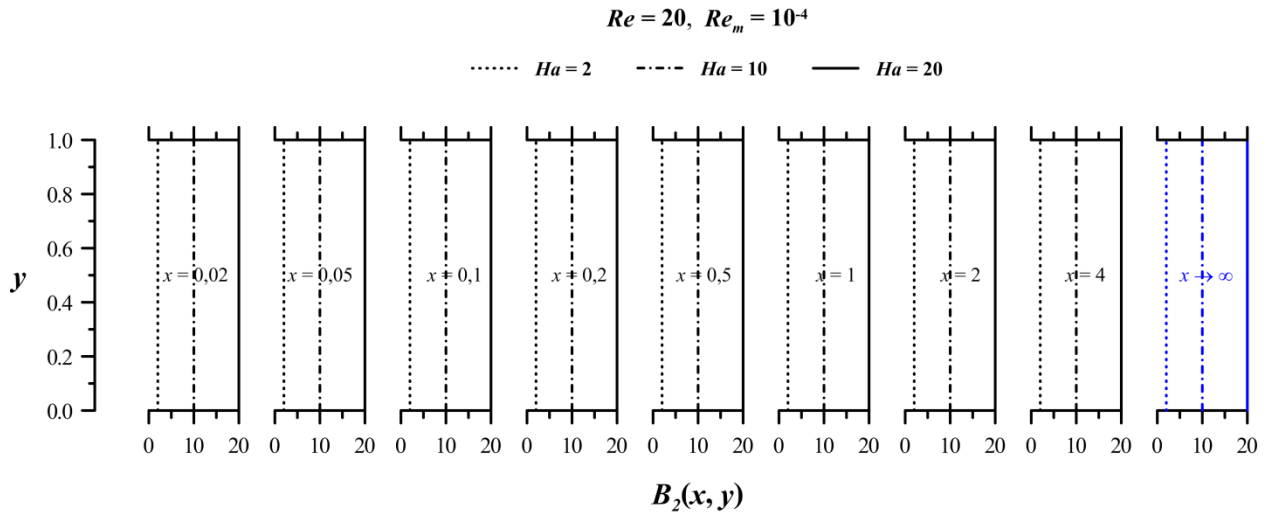


Figura 6.20 - Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para  $Re = 20, Re_m= 10^{-4}$  e diferentes  $Ha$ .

Observa assim, dessas figuras, que, para baixos números de Reynolds magnéticos, uma vez que não há geração de um campo magnético induzido, as componentes se mantêm constantes, *i.e.*,  $B_1(x,y) = 0$  e  $B_2(x,y) = Ha$ .

É importante salientar que, se as componentes  $u$  e  $v$  da velocidade são afetadas por alterações no número de Hartmann, as demais variáveis dependentes do escoamento, a saber,  $J_z$  e  $F_x$  serão afetadas. Observando o comportamento de  $J_z$ , e  $F_x$ , nas Figuras 6.21 e 6.22, vê-se um comportamento enantiomorfo, justificado pela expressão adimensional,  $F_x = -\frac{1}{Re} J_z B_2$ , da componente horizontal da força de Lorentz volumétrica (vista na Eq. 4.17). Mais explicitamente, como  $B_2 = Ha$  e  $Re = 20$ , então,  $F_x = -\frac{J_z Ha}{20}$ .

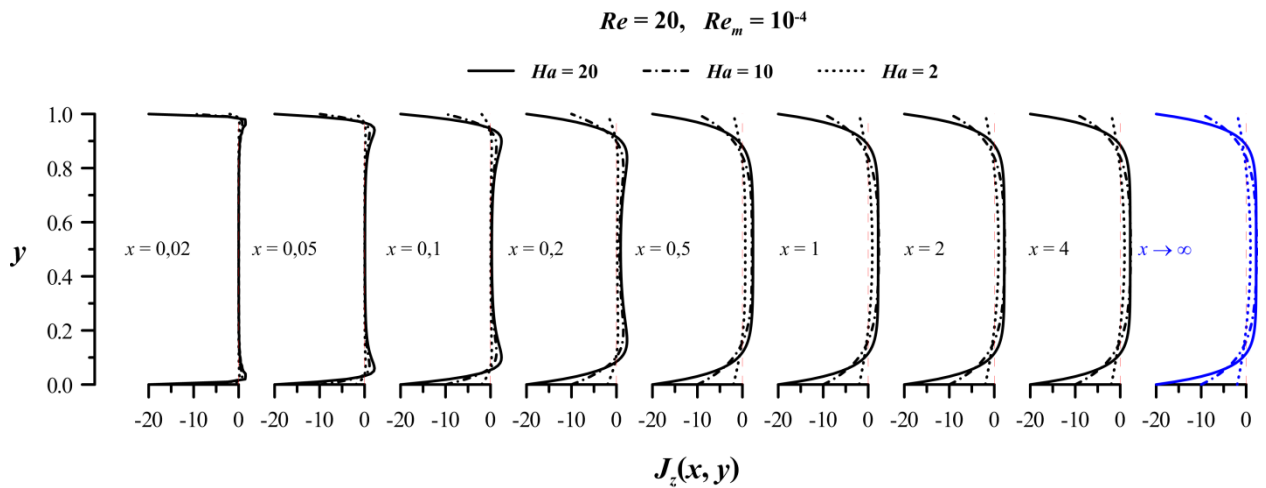


Figura 6.21 - Desenvolvimento da densidade de corrente, para  $Re = 20$ ,  $Re_m = 10^{-4}$  e diferentes  $Ha$ .

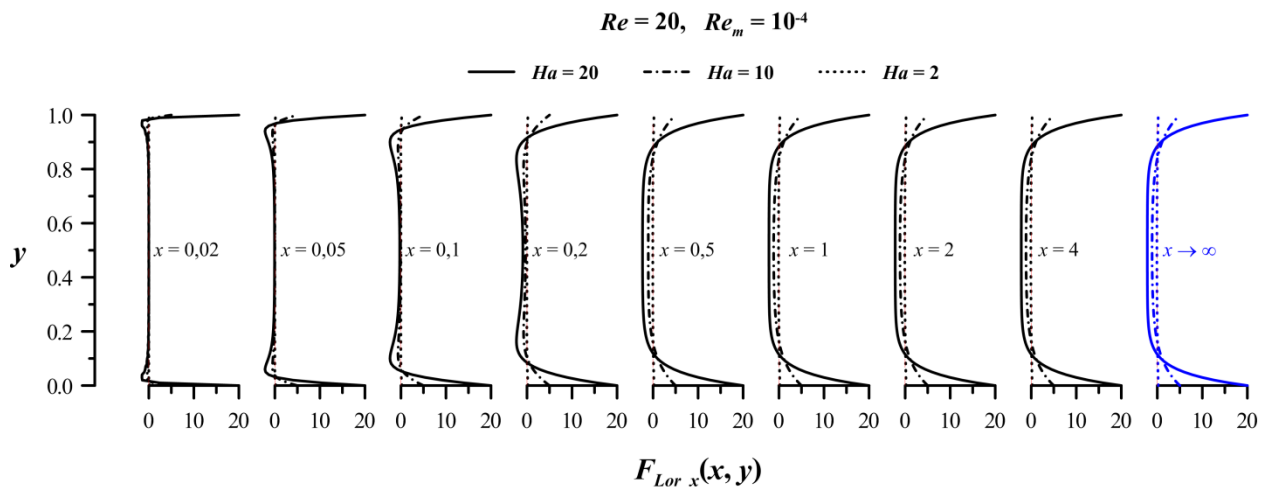


Figura 6.22 - Desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para  $Re = 20$ ,  $Re_m = 10^{-4}$  e diferentes  $Ha$ .

A componente vertical da força de Lorentz ( $F_y$ ), vista na Fig. 6.23, será nula, uma vez que ela é diretamente relacionada à componente horizontal do campo magnético por,  $F_y = J_z B_1 / Re$  (vide Eq. 4.18), com  $B_1 = \text{constante} = 0$ .

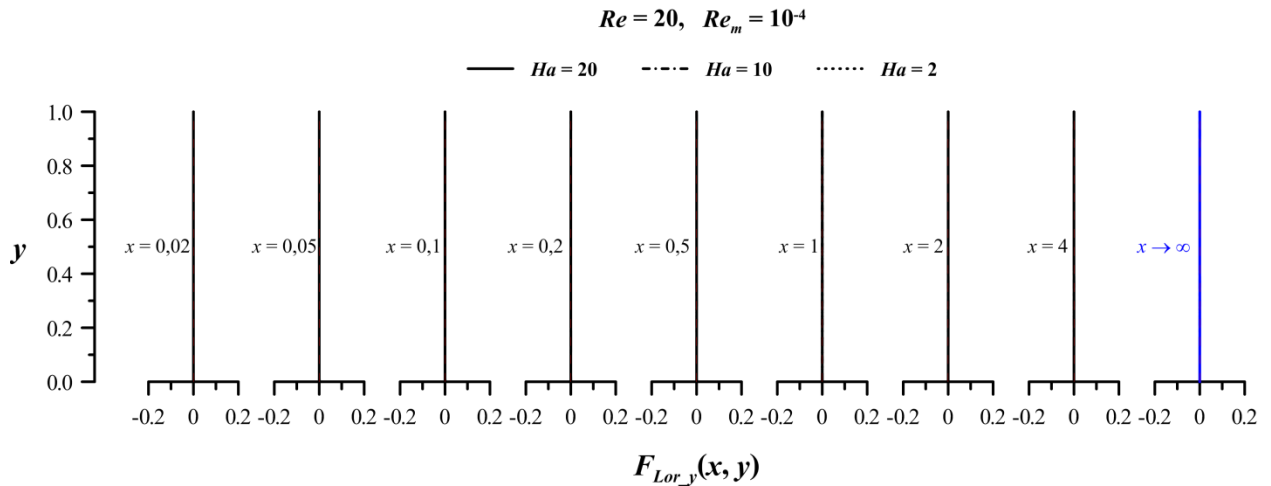


Figura 6.23 - Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para  $Re = 20, Re_m = 10^{-4}$  e diferentes  $Ha$ .

**b.2)  $Rem \gg 1$  ( $Rem = 50$ )**

Para valores elevados do número de Reynolds magnético, observa-se que as componentes do campo magnético ( $B_1$  e  $B_2$ ) passam a ser afetadas pelo escoamento (há geração de um campo magnético induzido), como era de se esperar, mas, as componentes de velocidade ( $u$  e  $v$ ), analisadas para a condição em que  $Re = 20$ , para os casos indicados na seções (b) e (c), não sofrem substancial alteração, exceto por variações do número de Hartmann, como já comentado.

A Fig. 6.24, comparada com a Fig. 6.17, mostra que o desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade ( $u$ ) quase não é afetada pelo número de Reynolds magnético, excetuando-se que o perfil, mais empistonado para  $Ha$  elevados, demora mais a se desenvolver por completo, ocorrendo para  $x > 2$ . Observa-se, também, que a velocidade no centro do canal sofre um ligeiro *overshoot*, nas proximidades de  $x = 0.5$  ( $Ha = 20$ ).

A Fig. 6.25 mostra o desenvolvimento da componente vertical da velocidade ( $v$ ), indicando, também, que o aumento do número de Reynolds magnético não altera, substancialmente, o desenvolvimento desta componente e, em uma rápida comparação com a Figura 6.18, percebe-se tal afirmação. Nota-se, ainda, que um aumento no número de Hartmann faz com que esta componente se anule mais rapidamente enquanto o escoamento vai se desenvolvendo ao longo do canal. Em uma região muito próxima à entrada do canal,  $Ha$  tem pouco efeito sobre essa componente.

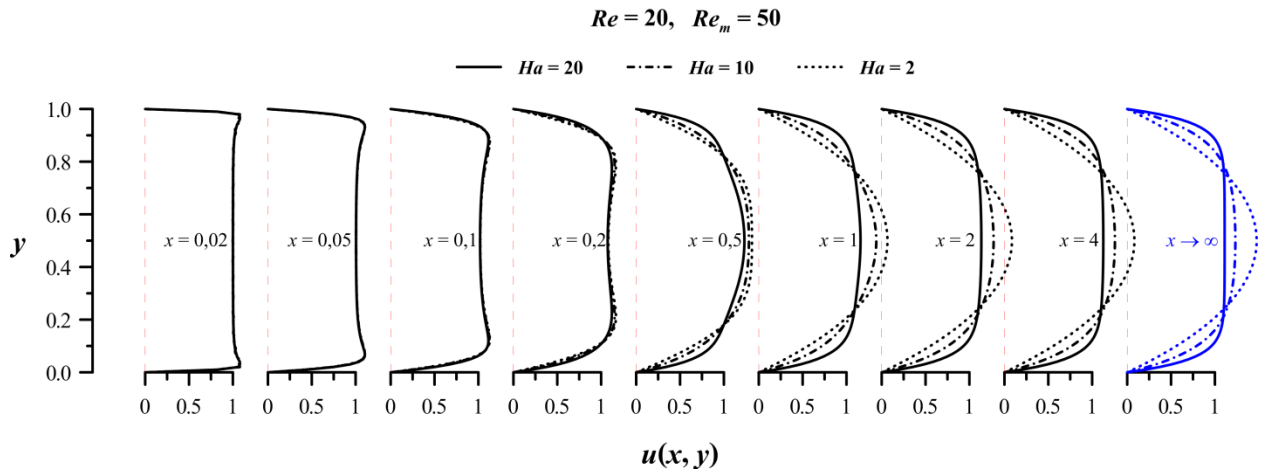


Figura 6.24 - Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para  $Re = 20, Re_m=50$  e diferentes  $Ha$ .

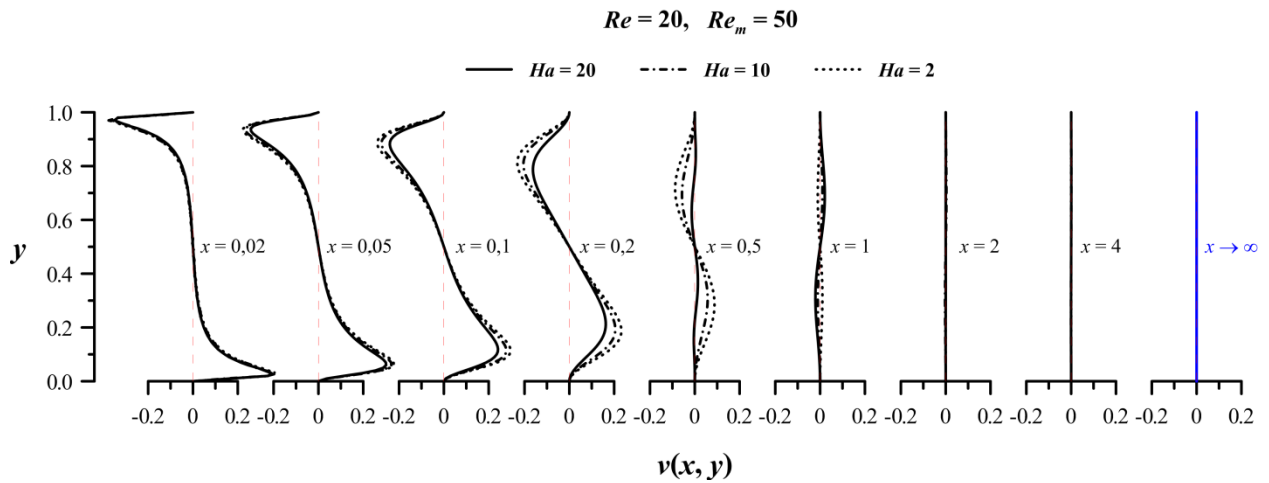


Figura 6.25 - Desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para  $Re = 20, Re_m=50$  e diferentes  $Ha$ .

As Figuras 6.26 e 6.27 representam, respectivamente, o desenvolvimento das componentes horizontal e vertical do campo magnético. Neste caso, como  $Re_m$  torna-se elevado, o escoamento passa a afetar, claramente, o campo magnético. As Fig. 6.26 e 6.27 mostram que as componentes horizontal ( $B_1$ ) e vertical ( $B_2$ ) começam a sofrer variações na entrada do canal e nas proximidades das placas, inferior e superior, onde o gradiente de velocidade é mais intenso e, portanto, onde as variações de velocidade afetam mais intensamente o campo.

Em particular, a Figura 6.26 ilustra perfeitamente que as condições de contorno nas paredes do canal são para a componente horizontal do campo magnético estão sendo automaticamente calculadas na região de desenvolvimento ( $x \leq 4$ ), se a necessidade da prescrição das condições de contorno para essa componente. Evidencia-se, assim, a excelente característica híbrida do método.

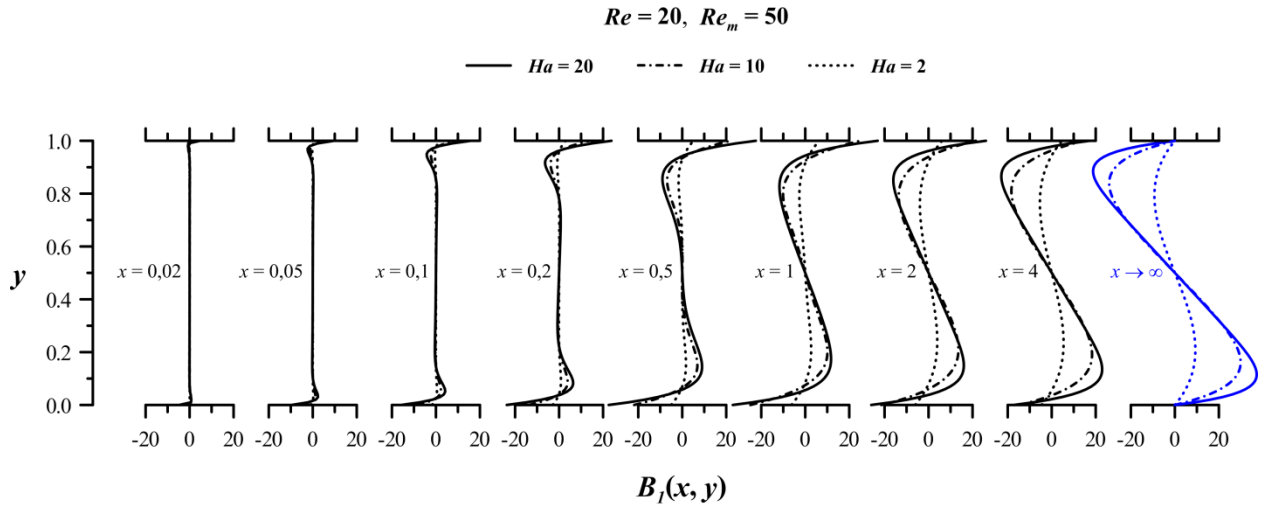


Figura 6.26 - Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para  $Re = 20, Re_m=50$  e diferentes  $Ha$ .

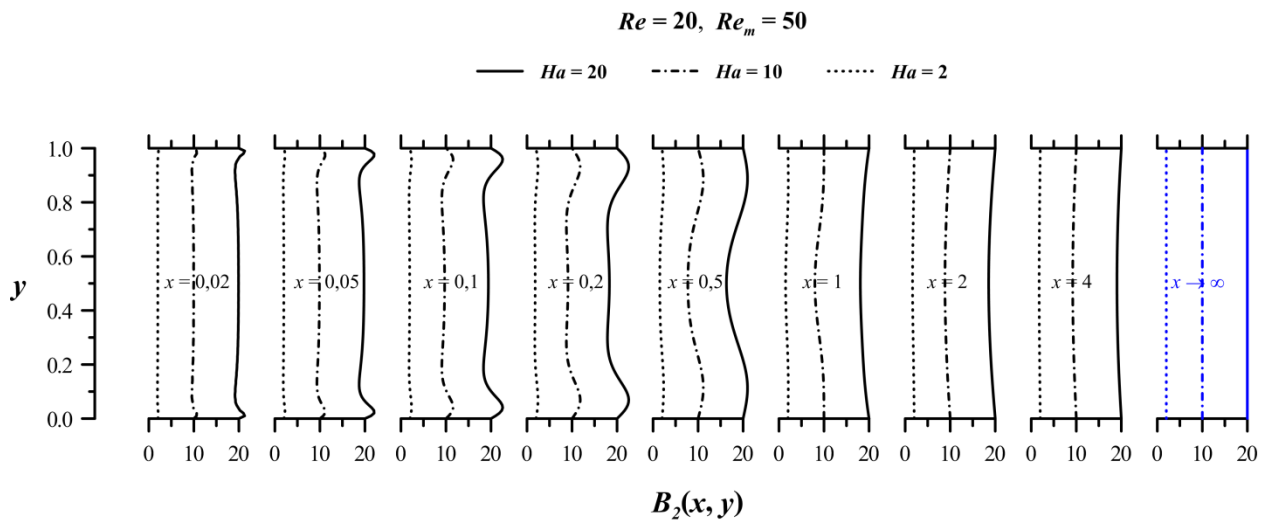


Figura 6.27 - Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para  $Re = 20, Re_m=50$  e diferentes  $Ha$ .

Estas figuras reiteram que, quando  $Re_m$  é elevado, números de Hartmann maiores indicam uma influência maior do escoamento sobre o campo, provocando variações mais acentuadas nestas componentes. Saliente-se, em concomitância, que, devido à simetria dos perfis, a componente horizontal do campo magnético assume valor nulo no eixo central do canal ( $B_1(x, 0.5) = 0$ ), para qualquer posição ao longo do mesmo e para qualquer situação, anterior e posteriormente citadas, indicando um valor mínimo da intensidade do campo magnético total e uma inflexão das linhas de campo (em situações em que  $B_1$  varia), uma vez que os valores de  $B_1$  passam de positivo para negativo.

Na Figura 6.28, é mostrado o comportamento da densidade de corrente, para  $Re_m = 50$ ,  $Re = 20$  e diversos valores do número de Hartmann. Uma comparação desta figura com a Fig. 6.21, dada para  $Re_m = 10^{-4}$ ,  $Re = 20$  e diversos valores de  $Ha$ , indica uma profunda semelhança entre as mesmas. Esta coincidência está associada ao fato de que, como  $J_z = E_z + uB_2 - vB_1$ , onde  $E_z$  é constante ( $E_z = -Ha$ : condição de medidor de vazão, analisado no presente trabalho), os comportamentos de  $u$  e  $v$  são muito semelhantes aos de  $Re_m = 10^{-4}$  e, quando observa-se uma substancial diferença no comportamento de  $B_I$  (em relação ao caso de  $Re_m=10^{-4}$ ), os valores assumidos por  $v$  são muito pequenos para que variações no termo  $vB_1$  possam afetar o comportamento de  $J_z$ .

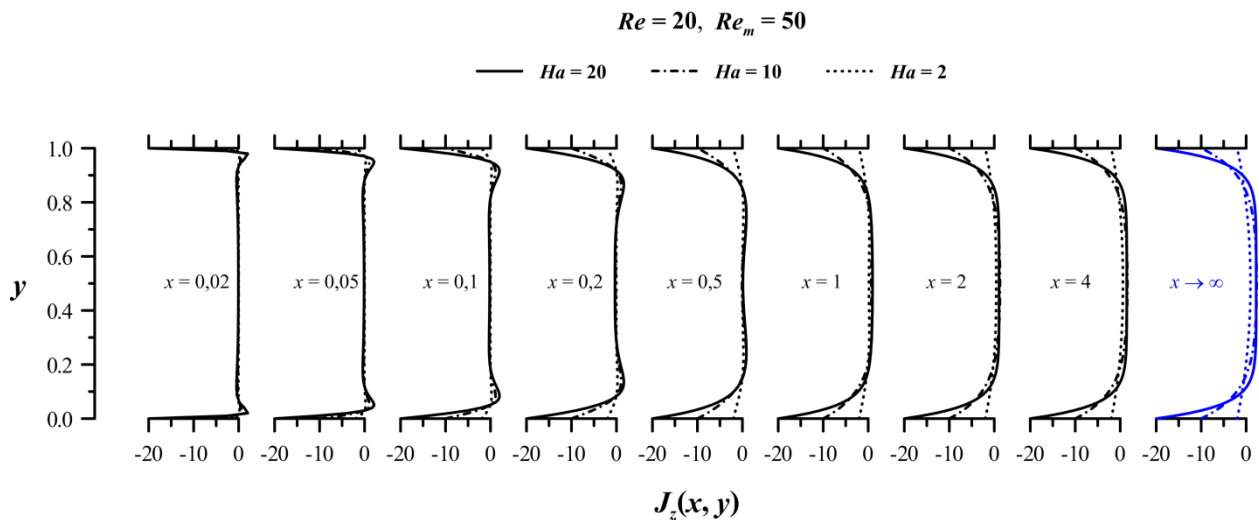


Figura 6.28 - Desenvolvimento da densidade de corrente, para  $Re = 20$ ,  $Re_m=50$  e diferentes  $Ha$ .

Analisando a força de Lorentz, observa-se, na Fig. 6.29, que a componente horizontal ( $F_x = -\frac{1}{Re} J_z B_2$ ) não sofre alterações relevantes, uma vez que  $J_z$  e  $B_2$ , também não sofrem. Já a componente vertical ( $F_y = \frac{1}{Re} J_z B_1$ ) sofre uma forte alteração em seu comportamento, uma vez que, para elevados números de  $Re_m$ , as linhas de campo são arrastadas/advectadas pelo escoamento e a componente  $B_I$ , sofre variações muito elevadas, principalmente para o escoamento completamente desenvolvido, provocando assim, o comportamento referendado na Fig. 6.30. Observe-se, ainda, que quanto maior o número de Hartmann, maiores são os módulos dos valores assumidos, localmente, pelas componente da força de Lorentz, afetando, assim, mais intensamente o escoamento. Isto justifica o fato de que a força de Lorentz se torna bem maior que as forças viscosas, para  $Ha$  elevados.

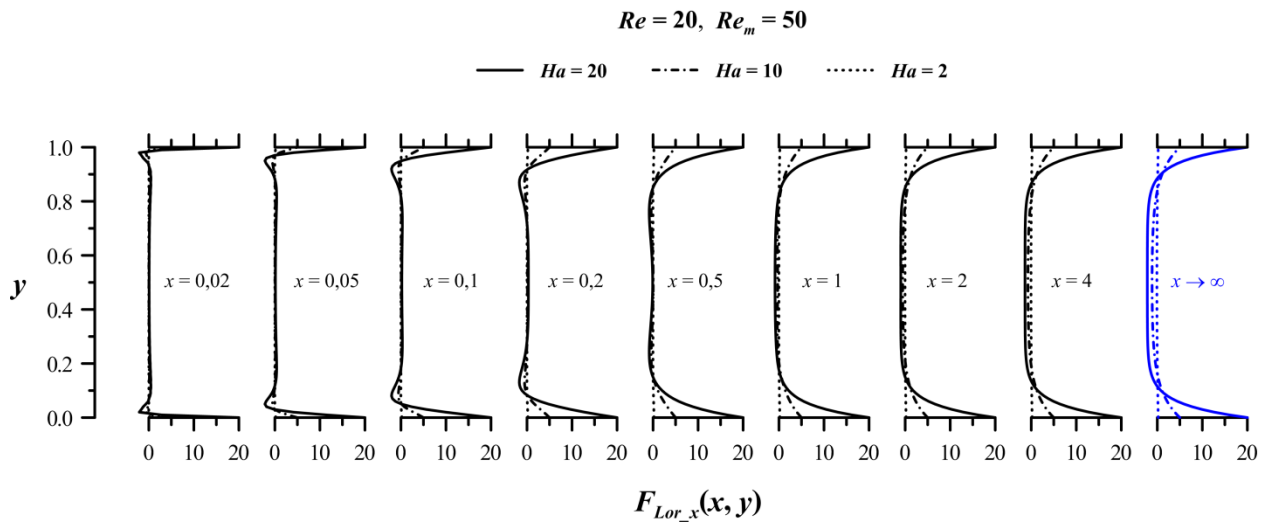


Figura 6.29 - Desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para  $Re = 20, Re_m=50$  e diferentes  $Ha$ .

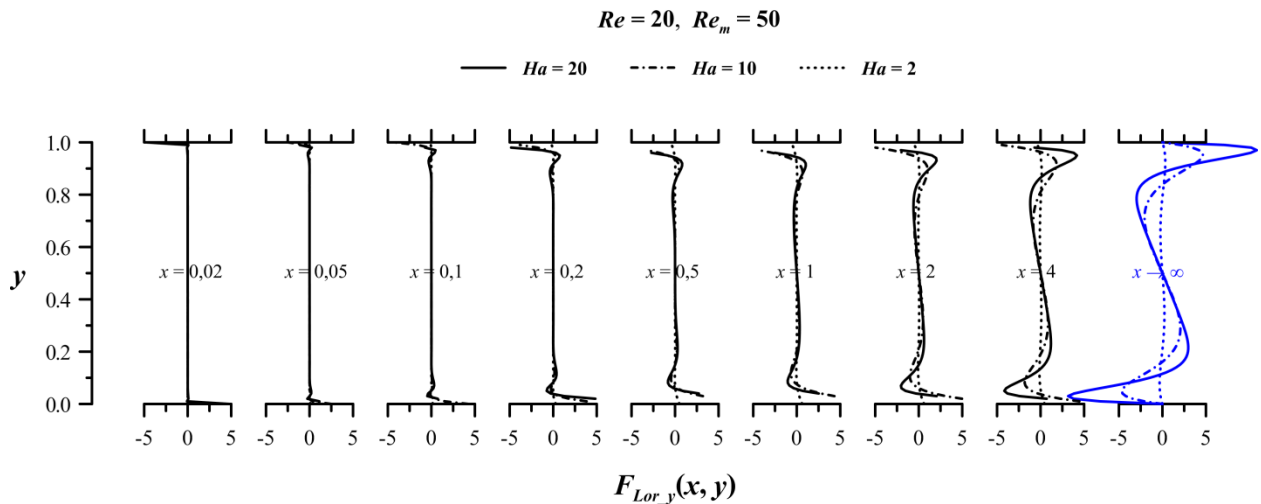


Figura 6.30 - Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para  $Re = 20, Re_m=50$  e diferentes  $Ha$ .

### c) Influência do Número de Reynolds Magnético, $Re_m$

A influência do número de Reynolds magnético sobre o desenvolvimento do escoamento é, por último, analisada. Para se avaliar a influência cruzada do número de Hartmann, serão empregados dois valores para esse parâmetro ( $Ha = 2$  e  $Ha = 20$ ). Tomou-se o valor  $Re = 20$  para o número de Reynolds e três valores para o número de Reynolds magnético ( $Re_m = 10^{-4}, 10$  e  $50$ ) para se investigar a sua influência sobre o campo de escoamento.

### c.1) $Ha$ pequenos - $Ha = 2$

Observa-se que, quando  $Ha$  é pequeno, o perfil de velocidade, visualizado principalmente pelo comportamento da componente longitudinal da velocidade, não é afetado pelo número de Reynolds magnético. As Figs 6.31 e 6.32 mostram uma superposição de três curvas, de  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ , para os três diferentes valores de  $Re_m$ , indicando que elas são idênticas.

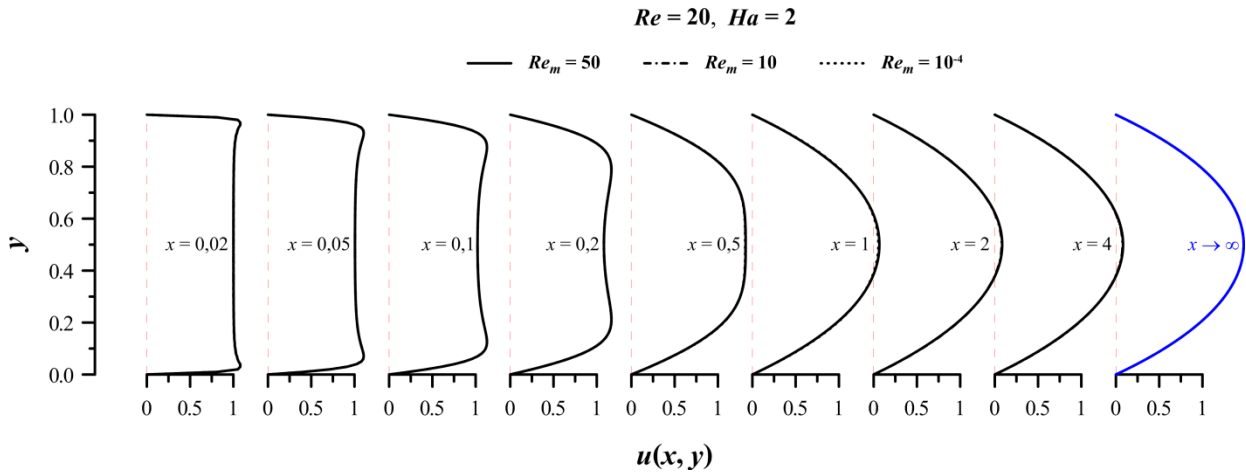


Figura 6.31 - Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para  $Re = 20, Ha = 2$  e diferentes  $Re_m$ .

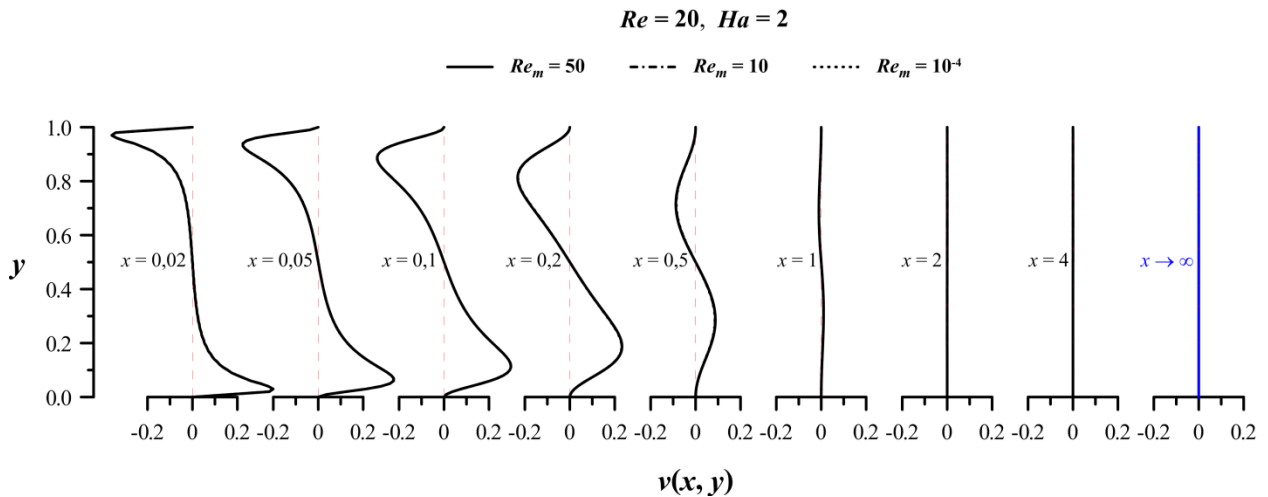


Figura 6.32 - Desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para  $Re = 20, Ha = 2$  e diferentes  $Re_m$ .

O comportamento ilustrado nas figuras anteriores ratifica o fato que, se  $Ha$  é baixo, as componentes da velocidade ( $u$  e  $v$ ) não são afetadas pelo campo magnético, mesmo para valores elevados do número de Reynolds magnético.

Na Fig. 6.33, é possível confirmar que, ao passo que  $Re_m$  cresce, as linhas de campo, visualizadas através da função magnética, são “arrastadas” pelo escoamento, mostrando forte

acoplamento para  $Re_m = 50$  e nenhum acoplamento perceptível para  $Re_m = 10^{-4}$ . Na região de desenvolvimento do canal (e.g.,  $x > 0,2$  para  $Re_m = 50$ ), existem inflexões da função  $\beta$  próximas às placas, inferior e superior, especialmente para  $Re_m$  elevados. Nas proximidades da placa inferior,  $\partial\beta/\partial y < 0$  e, nas proximidades da placa superior,  $\partial\beta/\partial y > 0$ .

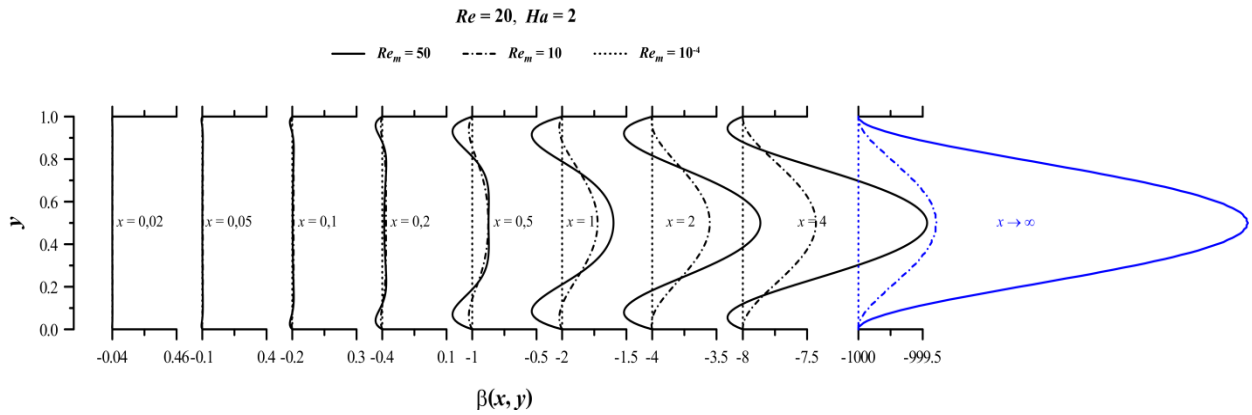


Figura 6.33 - Influência do número de Reynolds magnético, para baixos  $Ha$ , sobre as linhas de campo magnético, mostradas através da função escalar magnética ( $\beta$ ). ( $Re = 20, Ha = 2$  e diferentes  $Re_m$ )

Estes comportamentos mostram que  $B_1$ , a componente horizontal do campo magnético, deve assumir, na região de entrada do canal, valores negativos nas proximidades da placa inferior e valores positivos nas proximidades da placa superior. Fato visualizável através da Eq. (5.2 a),  $B_1 = \partial\beta/\partial y$ . É possível ver, também, que na região central do canal, para qualquer valor de  $x$ ,  $B_1(x, 0.5) = \partial\beta/\partial y = 0$ . Veja o comportamento da componente horizontal do campo magnético na Fig. 6.34, indicando que as variações de  $B_1$  são mais acentuadas para  $Re_m$  elevados.

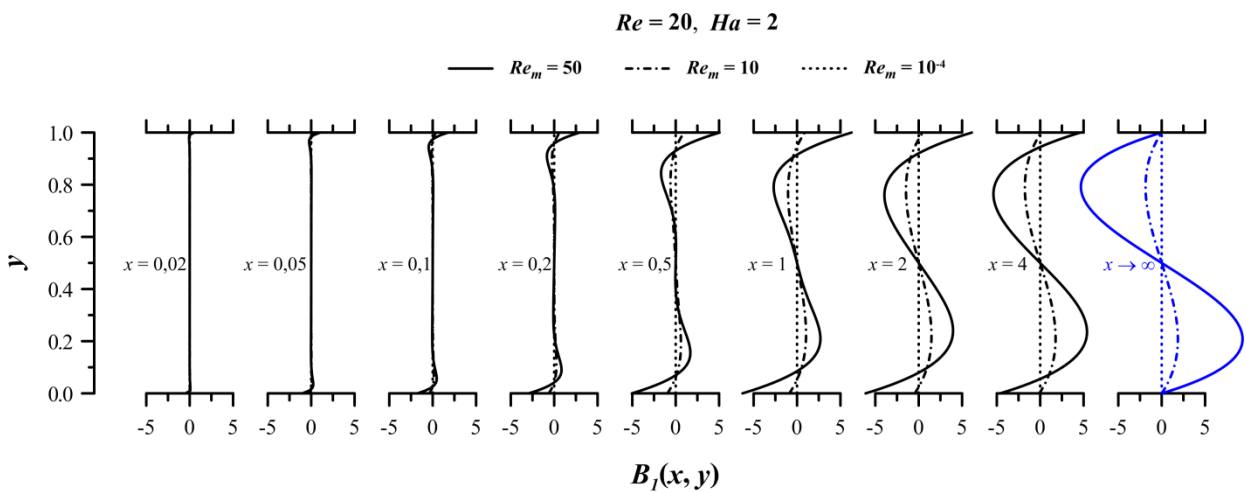


Figura 6.34 - Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético ( $B_1$ ) ao longo do canal, confirmando o comportamento da função magnética ( $\beta$ ).

Na Fig. (6.35), observa-se que a componente vertical do campo magnético, definida em função de  $\beta$ , na Equação (5.2 b),  $B_2 = -\partial\beta/\partial x$ , assume o valor imposto nas condições de contorno nas placas,  $B_2(x,0) = B_2(x,1) = -Ha$ , sofrendo variações ao longo do eixo vertical, devido ao desenvolvimento da função escalar magnética, até que se torne constante ( $B_{2\infty}(x,y) = -Ha$ ) na região do escoamento completamente desenvolvido (e.g.  $x \geq 4$  para  $Re_m = 10$ ). Observe-se, ainda, a influência mais acentuada de  $Re_m$  elevados sobre a intensidade desta componente e que, valores baixos deste parâmetro não afetam o valor de  $B_2$ .

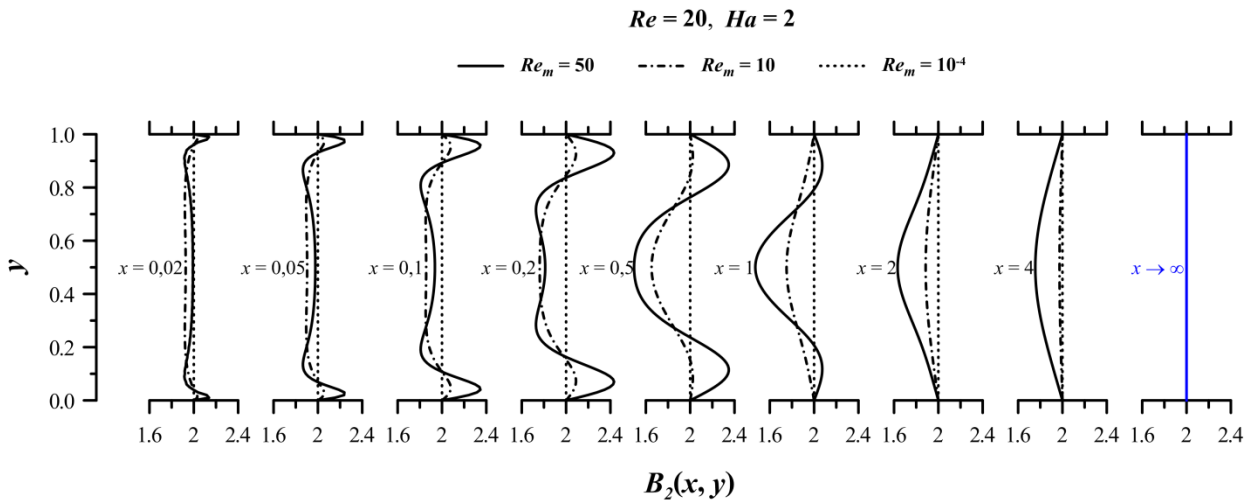


Figura 6.35 - Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético ( $B_2$ ) ao longo do canal, indicando que este valor sofre variações positivas e negativas em linhas verticais e tende, para posições distantes da entrada do canal, a se estabelecer em  $B_2 = Ha = 2$ .

Na Fig. 6.36, é visto o comportamento da densidade de corrente, dada pela Eq. (4.23 b),  $J_z = (E_z + uB_2 - vB_1)$ . Com as condições de contorno em relação às placas (4.26 a, b, e, f),  $u(x,0) = u(x,1) = v(x,0) = v(x,1) = 0$  e tomando que  $E_z = -Ha = -2$ , observa-se que, em qualquer posição ao longo do canal,  $J_z(x,0) = J_z(x,1) = -Ha = -2$ . Em relação ao eixo vertical, na entrada do canal, a densidade de corrente se estabelece como negativa nas regiões muito próximas às placas e tem magnitude próxima de zero na maior parte da região central do canal. Para valores de  $x \geq 2$ , o comportamento se aproxima daquele da região completamente desenvolvida, mostrando que no centro do canal a densidade de corrente se torna positiva e, nas proximidades das placas, torna-se negativa. O número de Reynolds magnético, quando elevado, faz com que o estabelecimento da densidade de corrente, para a região do completamente desenvolvido, seja um pouco mais demorado em relação aos demais valores de  $Re_m$ , especialmente, em relação à região central do canal.

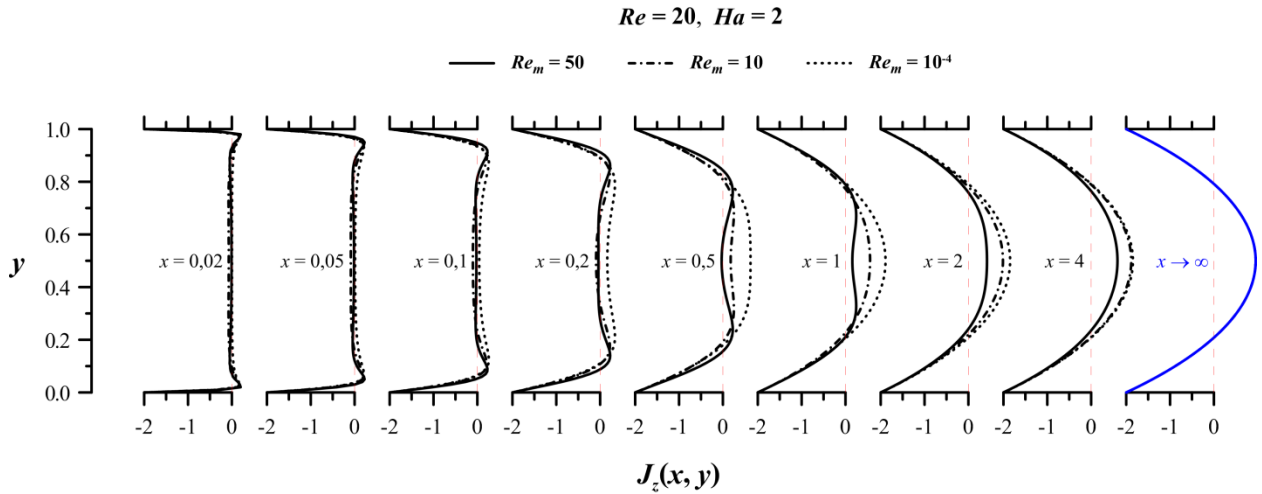


Figura 6.36 - Desenvolvimento da densidade de corrente ao longo do canal, mostrando dupla inversão de sentido na variação de  $y = 0$  até  $y = 1$ , para o escoamento completamente desenvolvido.

Na Fig. 6.37, é mostrado o comportamento da componente longitudinal da força de Lorentz volumétrica dada, na forma adimensional, por  $F_x = -\frac{1}{Re} J_z B_2$ . Observa-se que, na entrada e na saída do canal, onde  $B_2$  sofre variações muito pequenas, o perfil de  $F_x$  torna-se, em boa aproximação, uma imagem do perfil de  $J_z$ . Este fato pode ser justificado pois justamente na região central do canal (e.g.  $0.2 \leq x < 1$  para  $Re_m = 10$ ), onde  $B_2$  sofre variações mais significantes e, assim, afetaria o perfil de  $F_x$ , o valor de  $J_z$ , é praticamente nulo, fazendo com que  $F_x$  seja, também, praticamente nulo nesta região. Para as demais posições,  $B_2$  se mostra, praticamente sem alteração e  $F_x$  segue um comportamento quase simétrico ao de  $J_z$ .

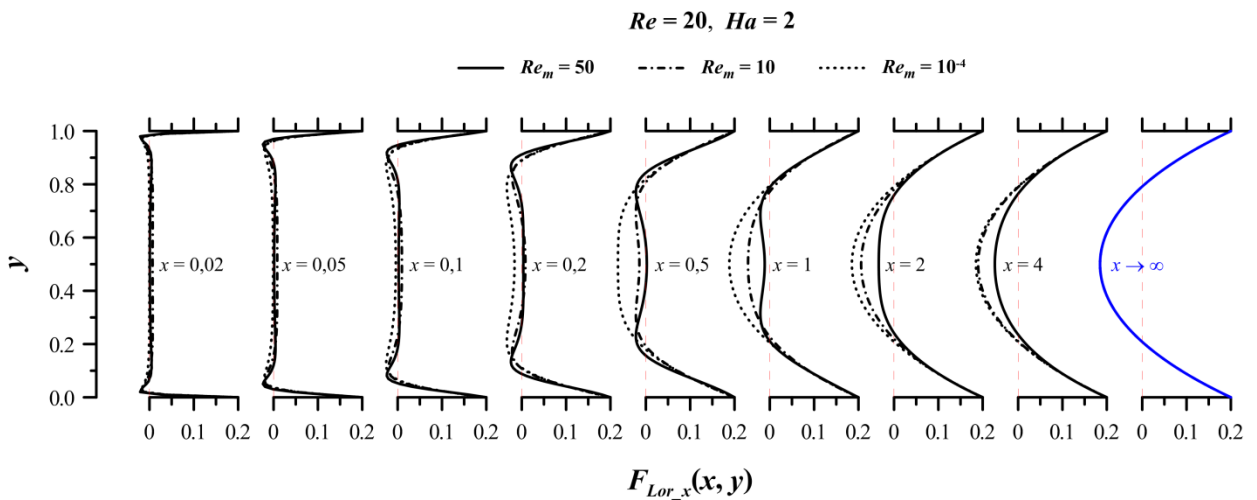


Figura 6.37 - Desenvolvimento da componente longitudinal da força de Lorentz volumétrica, para  $Re=20, Ha=2$  e diversos  $Re_m$ .

Note-se ainda que, para que este comportamento fosse percebido, a escala de  $F_x$  foi ampliada (15 vezes) em relação a de  $J_z$ . O fato desta componente ser pequena é que faz com que o escoamento seja pouco, ou quase nada, afetado pela força de Lorentz, independentemente de  $Re_m$ , uma vez que  $Ha$  é baixo.

Na Fig. 6.38, é mostrado o comportamento da componente vertical da força de Lorentz volumétrica dada, na forma adimensional, por  $F_y = \frac{1}{Re} J_z B_1$ . Este comportamento fornece uma leitura, mais imediata, de que o **valor médio** da componente  $F_y$ , ao longo de uma linha vertical é nulo, condizendo com o fato de que a mesma característica é observada com a componente  $B_1$ , mostrada na Fig. 6.34. Para  $Re_m$  mais elevados, observam-se picos de amplitudes mais elevadas, pois a componente  $B_1$  também é afetada mais intensamente conforme já foi dito anteriormente. Note que, uma vez que as condições de contorno para a componente horizontal do campo magnético sejam automaticamente obtidas, os valores da componente horizontal da força de Lorentz nas placas também sê-los-ão.

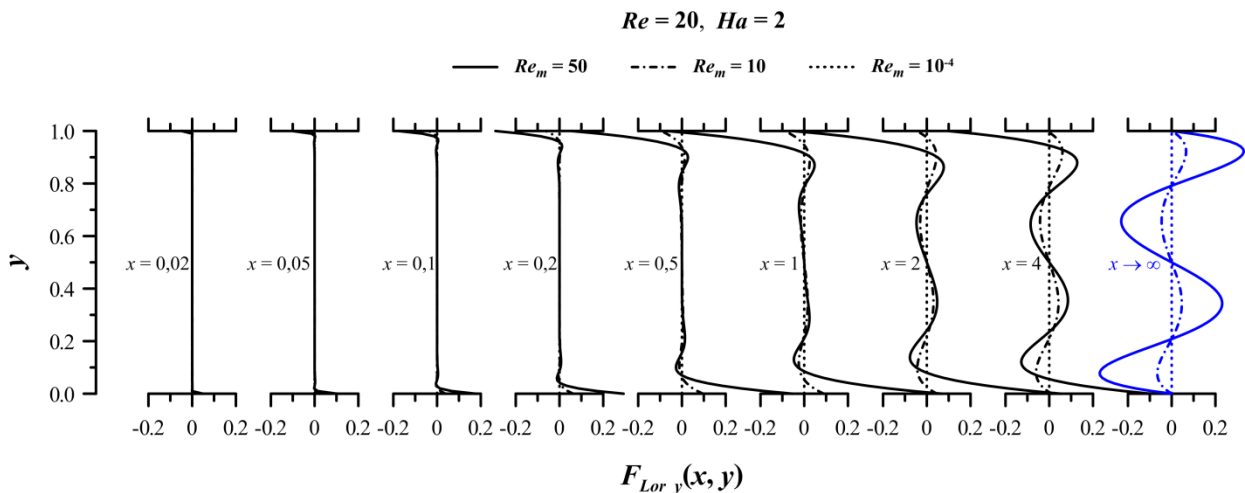


Figura 6.38 - Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz volumétrica, para  $Re=20$ ,  $Ha=2$  e diversos  $Re_m$ .

### c.2) $Ha$ elevados - $Ha = 20$

Neste ponto, serão observadas tanto variações no campo magnético, devido a número de Reynolds magnético elevados, como variações no campo de velocidade, devido ao crescimento do número de Hartmann. O crescimento deste último faz com que o perfil de velocidade torne-se mais empistonado devido à ação mais intensa do campo magnético. Este comportamento pode ser visto na Fig. 6.39 e comparado com a Fig. 6.31. A peculiaridade de *overshoot* em  $x = 0.5$ , já foi comentada na Fig. 6.24.

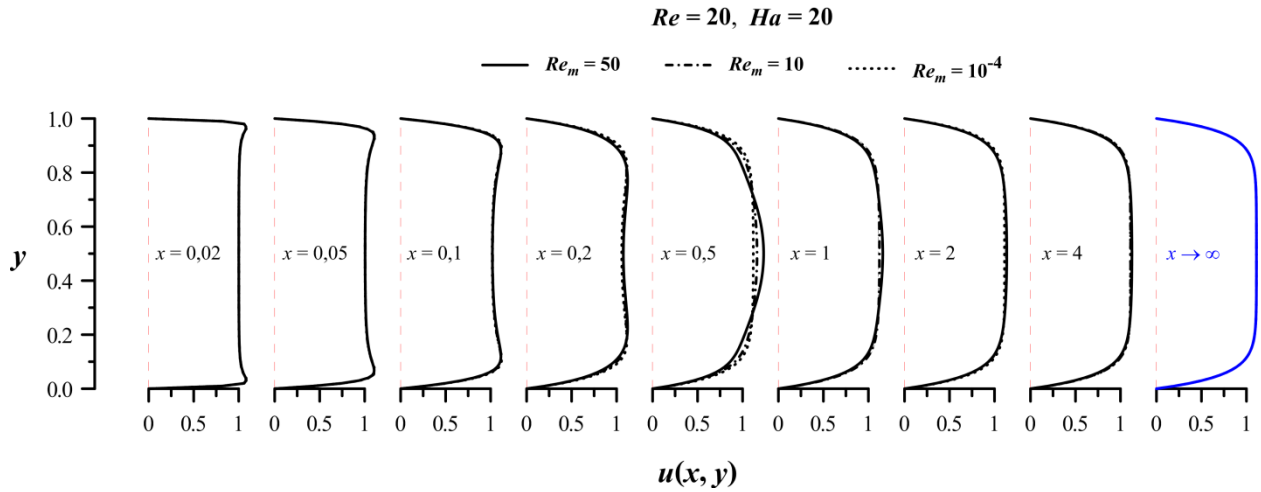


Figura 6.39 - Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para  $Re = 20$ ,  $Ha = 20$  e diferentes  $Re_m$ .

A Fig. 6.40 mostra o desenvolvimento da componente vertical da velocidade e, em comparação com a Fig. 6.32, mostra que, com o aumento do número de Hartmann, o número de Reynolds magnético também começa a fazer mais efeito, indicando que o escoamento demora mais a se desenvolver para  $Re_m$  elevados, confirmando uma interação mais forte entre o escoamento e o campo magnético.

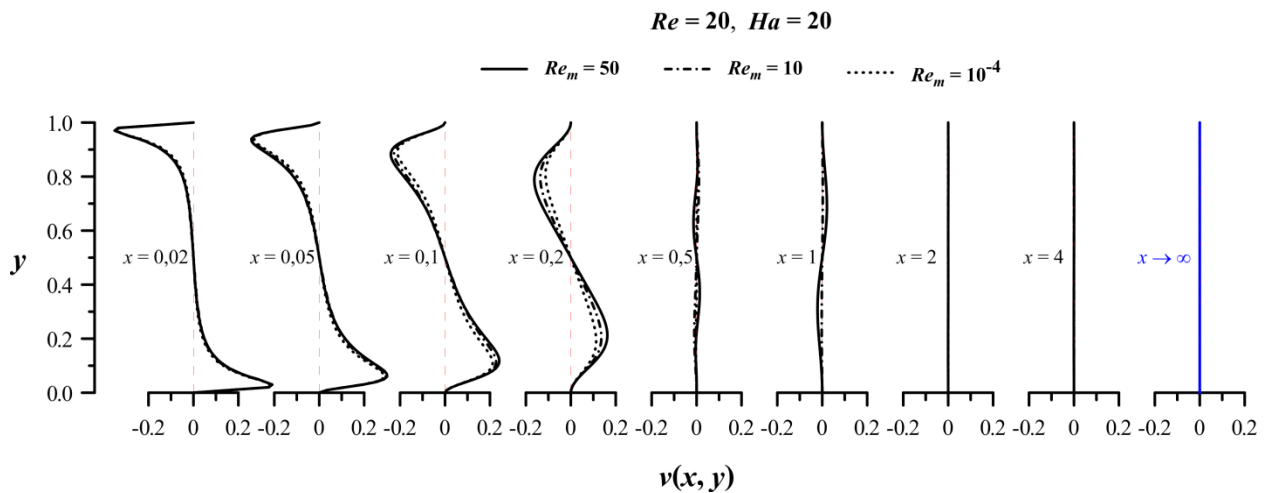


Figura 6.40 - Desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para  $Re = 20$ ,  $Ha = 20$  e diferentes  $Re_m$ .

A Figura 6.41 mostra o comportamento da função escalar magnética ( $\beta$ ) e, em comparação com a Fig. 6.33, ratifica que o aumento do número de Hartmann intensifica o acoplamento entre os campos ( $Ha$  e  $Re_m$  elevados), fazendo com que as linhas de campo sejam arrastadas mais intensamente pelo escoamento (vide escalas das figuras). Perceba-se, como já foi dito, que para  $Re_m$  baixos não se observa influência do escoamento sobre o campo.



O que se observa, em respectiva comparação com as Figs. 6.34 e 6.35, é que, como já mencionado, o aumento do número de Hartmann torna o acoplamento mais forte e, embora com perfis semelhantes, observando as escalas, vê-se, claramente, que os valores absolutos máximos de  $B_1$  e  $B_2$ , são muito maiores quando  $Ha = 20$ . O aumento do número de Reynolds magnético faz com que, em qualquer caso, o completo desenvolvimento do campo magnético se dê em posições cada vez mais distantes da entrada do canal.

Para a Figura 6.44, que representa a densidade de corrente se desenvolvendo ao longo do canal, observam-se amplitudes de variação maiores que as apresentadas na Fig. 6.36, pelas mesmas razões supracitadas mas, faz-se importante observar que, nas placas inferior e superior, onde  $u = v = 0$ , tem-se,  $J_z = E_z = -Ha = -20$ .

Ainda, para perceber a quase nulidade de  $J_z$  na região central do canal, observe que  $v$  assume valores muito pequenos ( $v \approx 0$ ), o valor médio de  $E_z$  é  $-Ha$ ,  $u \approx 1$  e o valor médio de  $B_2$  é  $Ha$ . Assim, se  $J_z = (E_z + u B_2 - v B_1)$ , em boa aproximação, ela é nula na região central do canal. Devido à escala adotada nesta figura, não se observam as inflexões, na linha central do canal, causadas por variações de  $B_2$ , observadas na Fig. 6.36.

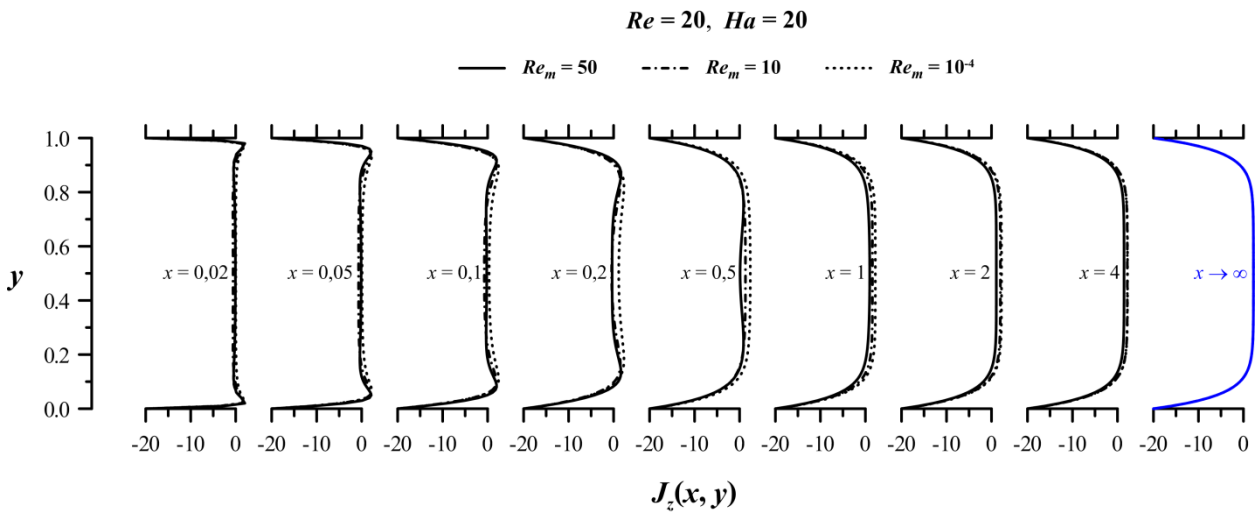


Figura 6.44 - Desenvolvimento da densidade de corrente, para  $Re = 20$ ,  $Ha = 20$  e diferentes  $Re_m$ .

Nas Figuras 6.45 e 6.46, mostram-se, respectivamente, os comportamentos das componentes horizontal ( $F_x$ ) e vertical ( $F_y$ ) da força de Lorentz volumétrica. Como  $F_x = -J_z B_2 / Re$ , o comportamento segue o enantiomorfismo em relação à densidade de corrente, conforme visto, também, anteriormente. Para a componente vertical,  $F_y = J_z B_1 / Re$ , o aumento do número de  $Ha$ , não altera o valor médio de  $F_y = 0$ , mas gera picos mais acentuados para a

oscilação do valor desta componente ao longo do eixo vertical, confirmando o forte acoplamento entre o escoamento e o campo. Note-se ainda que, como  $J_z$  e  $B_I$  têm sinais opostos na placa superior e sinais iguais na placa inferior,  $F_y$  tem sentidos contrários nestas posições, justamente onde  $J_z$  sofre variações mais significativas, uma vez que, como já comentado,  $J_z$  é muito pequeno na região central do canal e faz com que  $F_y$  também seja.

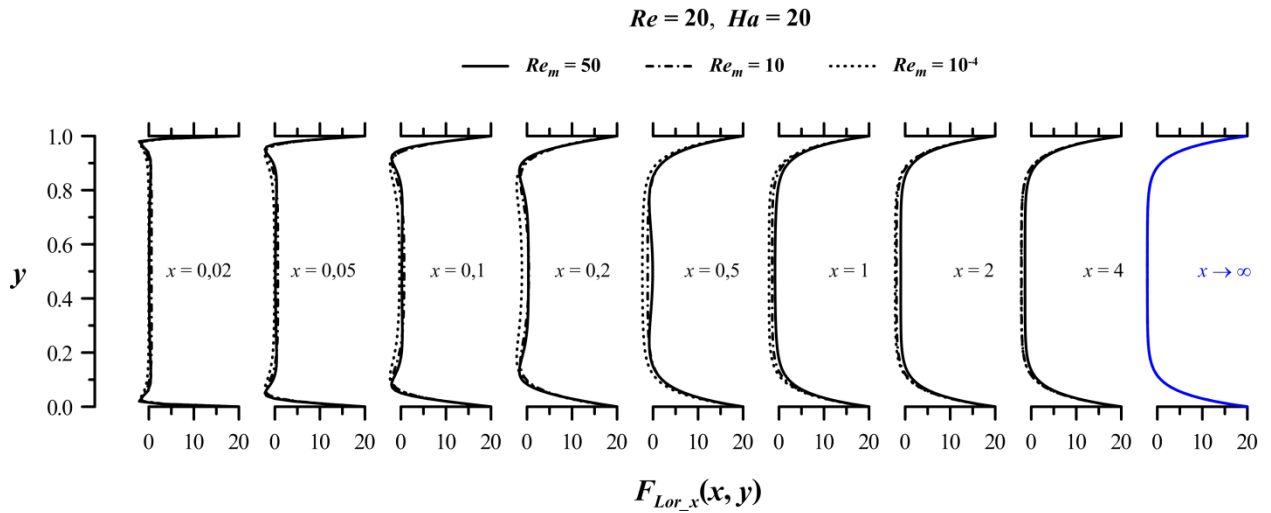


Figura 6.45 - Desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para  $Re = 20, Ha = 20$  e diferentes  $Re_m$ .

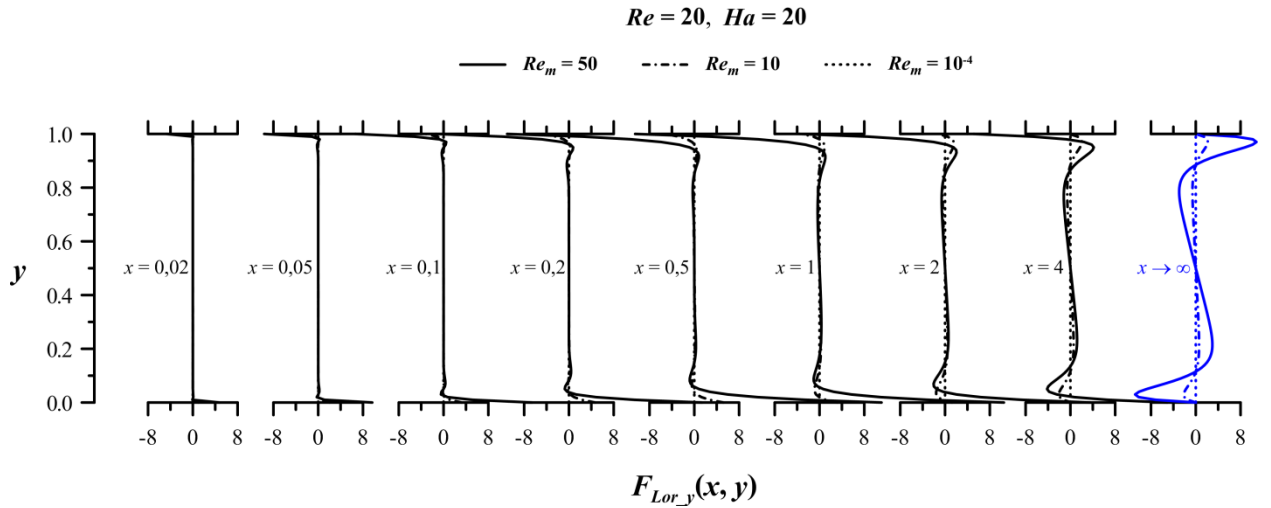


Figura 6.46 - Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para  $Re = 20, Ha = 20$  e diferentes  $Re_m$ .

## **CAPÍTULO VII**

## 7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 7.1. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi estudada a análise da interação mútua escoamento/campo magnético que se desenvolve no interior de um canal de placas planas e paralelas ao se aplicar um campo magnético externo transversal. Quando o fluido, eletricamente condutor, newtoniano, incompressível entra no canal sob um perfil qualquer de velocidade, tem seu desenvolvimento natural no interior do canal afetado pelo campo magnético aplicado (devido à força de Lorentz). Como correntes elétricas são induzidas no interior do escoamento, campos magnéticos também são induzidos e superpostos àquele externamente aplicado. Esse efeito modifica, dinamicamente, o campo magnético externo, observando-se, então, a interação acoplada de duas vias. A formulação bidimensional, na forma completa das equações de Navier-Stokes, em termos de uma função escalar para o campo de velocidade, acopladas às equações de transporte do campo magnético, em termos de uma função escalar para o campo magnético, foi empregada e assim foram encontradas as soluções das equações de acoplamento entre ambos os campos. Deste ponto, como uma solução híbrida (numérico-analítica) seria minimamente desejável, aplicou-se a, já bem fundamentada, técnica da transformada integral generalizada (GITT) que, com o auxílio de técnicas de aproximação numéricas e graças ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade de processamento e de grande capacidade de armazenamento de dados, torna-se uma ferramenta atraente na solução de certas classes de equações da física-matemática.

As análises de convergência das séries/expansões que representam os campos de velocidade, o campo magnético e de outros parâmetros associadas foram desenvolvidas, demonstrando assim, o quão eficaz e apropriada é a GITT, para finalidades de “*benchmarking*”. O procedimento de filtragem dos campos, aplicado às equações de governo, mostra-se como uma ferramenta catalisadora do processo de convergência, tendo em vista que, dependendo da quantidade de variáveis associadas ao filtro, as soluções dos campos na região completamente desenvolvida são automaticamente recuperadas pelos mesmos, caracterizando-se assim como uma vantagem adicional associada ao tipo de metodologia empregada.

Os resultados e figuras aqui mostrados são validados com resultados numéricos e gráficos de outros autores. Isto mostra que o código computacional desenvolvido pode ser aplicado em investigações mais profundas dos casos aqui considerados e de mais efeitos e condições sobre o escoamento e acoplamento do campo magnético no interior do canal. Mais ainda, o código pode

ser estendido para outras formulações ou modelos matemáticos, além de outras geometrias de interesse.

Finalmente, a contribuição que o presente trabalho apresenta em relação a trabalhos anteriores (RÊGO, 2013; PONTES, 2015), que utilizaram a GITT como ferramenta de solução é que, em relação ao primeiro, a formulação em camada limite que foi empregada, é simplificada e não se considera a interação mútua entre o escoamento e o campo magnético; enquanto que o segundo, apesar de empregar a formulação completa de Navier-Stokes em sua forma bidimensional, também não considera a interação entre os campos. Sob a luz destas considerações, ambos os trabalhos, devem ser utilizados como referência para situações em que o número de Reynolds magnético é muito menor do que a unidade ( $Re_m \ll 1$ ). Isto posto, é expoente a contribuição do presente trabalho para referências futuras, uma vez que a solução é feita na formulação completa de N-S e com o devido acoplamento entre os campos magnético e de velocidade, sendo aplicado para qualquer valor do número de Reynolds magnético e diferentes condições de contorno, ou seja, sendo aplicado para diversos dispositivos magnetohidrodinâmicos, como bomba, medidor de vazão ou gerador.

Conclui-se, deste modo, que o objetivo do trabalho foi alcançado de forma satisfatória, uma vez que foi realizada uma análise detalhada com relação ao fenômeno do escoamento MHD em um canal de placas paralelas.

## 7.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Diante das conclusões dadas na seção anterior e com o escopo do próprio trabalho, pode-se colocar algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Desenvolver um modelo em que as propriedades físicas e de transporte sejam dependentes da temperatura, de modo a considerar uma gama de aplicações mais genéricas;
- Estender a análise para uma quantidade maior de casos, de novas geometrias para o canal para que, deste modo, haja uma abrangência maior do fenômeno magnetohidrodinâmico, oferecendo à comunidade científica uma compreensão maior acerca de suas soluções e acoplamentos;
- Analisar as situações em que  $Ez \neq Ha$ , isto é, as situações de geradores e bombas eletromagnéticas, aprimorando o estudo acerca das condições de contorno das componentes do campo magnético, ressaltando-se a influência do campo magnético induzido sobre o campo magnético externo imposto.
- Incluir a solução do campo de temperatura, na solução de acoplamento das equações de Navier-Stokes na sua forma completa e das equações de transporte do campo magnético.
- Desenvolver um procedimento experimental que propicie uma visão física mais acurada e que possa, em definitivo, confirmar os resultados dos trabalhos descritos nesta área e neste trabalho. Um aparato como este é mostrado por Aoki (2011) e, então, sugere-se a construção de dispositivos mais complexos como: experimentos com modelos miniaturizados dentro do canal, visando o comportamento e a reação dos mesmos perante as forças eletromagnéticas; experimentos que analisem os efeitos sobre a condutividade e sobre as características do escoamento, devido ao aquecimento por efeito Joule.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALPHER, R.A. **Heat Transfer in Magnetohydrodynamic Flow between Parallel Plates.** International Journal of Heat and Mass Transfer, 1961. vol. 3, no 2, p. 108-112.

AOKI, L. P. **Estudo do efeito magnetohidrodinâmico em um eletrólito a partir do uso de um dispositivo ejetor eletromagnético.** 2011. Dissertação (Mestrado em Aeronaves) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

ARPACI, V. S.; LARSEN, P. S. **Convection heat transfer.** 1st. Ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1984.

ATTIA, H.A. & KOTB, N.A. **MHD Flow between two Parallel Plates with Heat Transfer.** Acta Mechanica, v. 117, p. 215-220. 1996.

ATTIA, H.A. **Transient MHD Flow and Heat Transfer between two Parallel Plates with Temperature Dependent Viscosity.** Mechanics Research Communications, v. 26, n. 1, p. 115-121. 1999.

ATKINS, P. **Princípios de química:** questionando a vida moderna e o meio ambiente. Colorado, US, 2002.

BATCHELOR, G. K. **An Introduction to Fluid Dynamics.** 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. Cambridge Books Online. Web. 23 February 2016.

BODOIA, J.R.; OSTERLE, J.F. **Finite Difference Analysis of Plane Poiseuille and Couette Flow Developments.** Applied Scientific Research, vol. 10, no 1, 1961, p. 265-276.

BRANDT, A.; GILLIS, J. **Magnetohydrodynamic Flow in the Inlet Region of a Straight Channel,** The Physics of Fluids, vol. 9, no 4, 1966, p. 690-699.

CHANG, C.C. & LUNDGREN, T.S. **The Flow of an Electrically Conducting Fluid through a Duct with Transverse Magnetic Field.** Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, University of California at Los Angeles, Stanford University Press (1959).

CHAND, K.; SINGH, K.D. & SHARMA, S. **Effect of Hall current and rotation on heat transfer in MHD flow of oscillating dusty fluid in a porous channel.** NISCAIR-CSIR, vol. 51, pp. 669-682, India (2013).

CHEN, T.S.; CHEN, G.L. **Magnetohydrodynamic Channel Flow with an Arbitrary Inlet Velocity Profile.** The Physics of Fluids, vol. 15, no 8, 1972, p. 1531-1534.

COSTA JR., E. et al . **Ondas de Alfvén no meio interplanetário**. Revista Brasileira de Ensino Física, São Paulo, v. 33, n. 2, p. 1-8, June 2011. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbef/v33n2/a03v33n2.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2015.

COTTA, R.M. **Computational Integral Transform Approach in nonlinear Diffusion and Convection -Diffusion Problems**. Laboratório di Engenharia Nuclear di Montecuccolino, série Scientifica Lin-1202 (Invited Lecture), Università Degli Studi di Bologna, Itália, Jul.(1992).

COTTA, R.M.; RAMOS, R. **Integral transforms in the two-dimensional non-linear formulation of longitudinal fins with variable profile**. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 8, n. 1, pp. 27-42 (1998).

COTTA, R.M. **Integral transform in computational heat and fluid flow**. CRC PRESS, Boca Raton, FL, USA (1993).

COTTA, R.M. **The Integral Transform Method in Thermal and Fluid**. Science and Engineering, Begell House Inc, NY, USA (1998).

DAVIDSON, P. A. **An Introduction to Magnetohydrodynamics**. New York: Cambridge University Press, 2001.

EISEBERG, R. M.; LERNER, L. S. **FÍSICA fundamentos e aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982, v.4.

ERASLAN, A.H. & ERASLAN, N.F. **Heat Transfer in Magnetohydrodynamic Channel Flow**. *The Physics of Fluids*, 1969. vol. 12, no 1, p. 120-128.

FLEISH, D. **A Student's Guide to Maxwell's Equations**. New York: Cambridge University Press, 2008.

GUERRERO, J. S. P. **Solução das equações de Navier-Stokes em função de função corrente via transformada integral**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1991, 102 f.

GUERRERO, J. S. P. **Solução das equações de Navier-Stokes para escoamento laminar via transformada integral**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1993, 75 f.

GUERRERO, J.S. & COTTA, R.M. **Benchmark Integral Transform Results for Flow over a Backward-Facing Step**. *Computers and Fluids*, vol. 25, no 5, pp. 572-540 (1996).

GUERRERO, J.S. & COTTA, R.M. **Integral Transform Solution of Developing Laminar Duct Flow in Navier-Stokes Formulation**. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 20, no 11, pp. 1203-1213 (1995).

GRUHL, J. **Coal-fired open cycle magnetohydrodynamic power plant emissions and energy efficiencies.** MIT Energy Lab Report MIT- Nov. 1977.

HARTREE, D.R. **A Solution of Laminar Boundary Layer Equation for Retarded Flow.** A.R.C., R. & M., p. 2426. 1949.

HWANG, C.L.; FAN, L.T. **A Finite Difference Analysis of Laminar Magneto-Hydrodynamic Flow in the Entrance Region of a Flat Rectangular Duct.** Applied Scientific Research, Section B, vol. 10, no 3-4, 1963, p. 329-343.

HWANG, C.L.; FAN, L.T. **Finite Difference Analysis of Forced-Convection Heat Transfer in Entrance Region of a Flat Rectangular Duct.** Applied Scientific Research, vol. 13, no 1, 1964, p. 401-422.

HWANG, C.L.; KNIEPER, P.J.; FAN, L.T. **Heat Transfer to MHD Flow in the Thermal Entrance of a Flat Duct.** International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 9, no 8, 1966, p. 773-789.

HWANG, C.L.; LI, K.C.; FAN, L.T. **Magnetohydrodynamic Channel Entrance Flow with Parabolic Velocity at the Entry.** The Physics of Fluids, vol. 9, no 6, 1966, p. 1134-1140.

IMSL Library, Math/Lib., Houston, TX 1989.

JELENA, L. **Analytical solutions of magnetohydrodynamical problems on a flow of conducting fluid in the entrance region of channels in a strong magnetic field.** 2014. 138 f. Tese (Ph.D. in mathematics engineering) - Faculty of Computer Science and Information Technology. Riga Technical University, Riga. 2014.

KUNDU, P. K. **Fluid Mechanics.** 1st. Ed. U.S.: Academic Press, 1990.

LIMA, J.A. **Solução das Equações de Navier-Stokes médias para Escoamento Turbulento via Transformação Integral.** PEM/COPPE/UFRJ, M.Sc. Dissertação, 82 p, Rio de Janeiro, Brasil. 1995.

LIMA, J.A. **Escoamento Turbulento em Canais de Placas Planas e Paralelas: Análise via Transformada Integral e Modelos Algébricos e K-L de Turbulências.** UFPB/CT/CPGEM, D.Sc. Tese, 222 p, João Pessoa, Brasil. 2000.

LIMA, J.A. & RÊGO, M.G.O. **On the integral transform solution of low-magnetic MHD flow and heat transfer in the entrance region of a channel.** International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 50, 2013, p.25-39.

LIMA, J.A.; QUARESMA, J.N.N. & MACÊDO, E.N. **Integral transform analysis of MHD flow and heat transfer in parallel-plates channels.** International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 34, n. 4, pp. 420-431 (2007).

LIPSCOMBE, G, *et al.* **Water Under the Bridge**. Journal of Physics Special Topics. Department of Physics and Astronomy, University of Leicester, Leicester, LE1 7RH, nov. 2014.

LITTLE, N. C. **Magnetohydrodynamics**. New Jersey, Princeton. D. Van Nostrand Company, Inc., Cap. 3, 1967.

LOHRASBI, J. **Magnetohydrodynamic Heat Transfer in Two-Phase with Temperature Dependent Properties**. IEEE International Conference on Plasma Science, Cristal City, Virginia, USA, 1987.

MACHADO, H.A.; COTTA, R.M. **Integral Transform Method, for Boundary Layer Equations in Simultaneous Heat and Fluids Flow Problems**. International Journal for Numerical Methods in Heat and Fluid Flow, vol. 5, pp 225-237. 1995.

MACIULAITIS, A.; LOEFFLER Jr., A.L., **A Theoretical Investigation of MHD Channel Entrance Flows**, AIAA Journal, vol. 2, no 12, 1964, p. 2100-2103.

MANOHAR, R. **An Exact Analysis of Laminar Magnetohydrodynamic Flow in the Entrance Region of a Flat Duct**. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik - ZAMM, vol. 46, nº 2, 1966, p. 111-117.

MITTAL, M. L.; NATARAJA, H.R.; NAIDU, V.G. **Fluid Flow Heat Transfer in the Duct of an MHD Power Generation**. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 30, no 3, 1987, p. 527-535.

NIGAM, S.D. & SINGH, S. N. **Heat Transfer by Laminar Flow between Parallel Plates under the Action of a Transverse Magnetic Field**. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 13, Pt.1, pp. 85-97 (1960).

OZISIK, M.N. & MURRAY, R.L. **On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters**. ASME Journal of Heat Transfer, vol. 96, Series C, no 1, pp. 48-51. 1974.

PEREYRA, V. **Pasva3: An adaptive finite difference fortran program for first order nonlinear, ordinary boundary problems**. Lec. Notes in Comp. Science, 76, Springer-Verlag, Berlin, p. 67-88, 1978.

PIMENTEL, L.C.G. **Simulação do Escoamento Turbulento em dutos via Modelo Algébrico de Turbulência e Transformação Integral**. Dissertação (Mestrado em engenharia mecânica). MPEM/COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, Brasil (1993).

POMEROY, B.D., *et al.* **Comparative Study and Evaluation of Advanced Cycle Systems**. General Electric, EPRI Report AF-664, 1978.

PONTES, F. de A. **Escoamento Magnetohidrodinâmico com Transferência de Calor em Canais de Placas Planas: Uma Abordagem via Transformação Integral**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Instituto de Tecnologia. Universidade Federal do Pará, Belém, 2015, 58 f.

RÊGO, M. das G. O. **Análise da magnetohidrodinâmica com transferência de calor em canais de placas paralelas via transformação integral**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Instituto de Tecnologia. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2010.

ROIDT, M.; CESS, R.D. **An Approximate Analysis of Laminar Magnetohydrodynamic Flow in the Entrance Region of a Flat Duct**. ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 29, 1962, p. 171-176.

ROSA, R.J. **Design Consideration for Coal-Fired MHD Generation Ducts**. 5th International Conference on MHD Electrical Power Generation, Munich, Germany, vol. 1, 1971, p. 427-439.

SALAH, N. B. **A Finite Element Method for the Fully-Coupled Magnetohydrodynamics**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Concordia University. Quebec, Canadá, 1999.

SANTOS, C.A.C.; QUARESMA, J.N.N. & LIMA, J.A. **Convective heat transfer in ducts: the integral transform approach**, 348 p., E-Papers, ABCM Mechanical sciences series, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.

SCHLICHTING, H. **Boundary-Layer Theory**. McGraw-Hill, 1968.

SETAYESH, A. & SAHAI, V. **Heat Transfer in Developing Magnetohydrodynamic Poiseuille Flow and Variable Transport Properties**. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1990. vol. 33, no 8, p. 1711-1720.

SETAYESHPOUR, A. **Heat Transfer in Developing Magnetohydrodynamic Flow with Variable Transport Properties**. Ph.D. Thesis, Tennessee Technological University, Cookeville, Tennessee, USA, 1984.

SETAYESHPOUR, A.; SAHAI, V. **Heat Transfer in Variable-Properties MHD Entrance Flow with a Generalized Temperature Boundary Condition**. Proc. 29th Heat Transfer and Fluid Mech. Inst, 1985,p. 171-187.

SHERCLIF, J. A. **Steady Motion of Conducting Fluids in Pipes under Transverse Magnetic Fields**. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1953, p. 49-136.

SHERCLIFF, J. A. **A Textbook of Magnetohydrodynamics**. London, UK: Pergamon Press, 1965.

SHOHET, J. L.; OSTERLE, J. F.; YOUNG, F.J. **Velocity and Temperature Profiles for Laminar Magnetohydrodynamic Flow in the Entrance Region of a Plane Channel: The Physics of Fluids**, vol. 5, no 5, 1962, p. 545-549.

SILVA, B. N. M. da. **Aplicação da técnica da transformada integral generalizada em escoamento em canais considerando efeitos magnetohidrodinâmicos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014, 71 f.

SILVA, F. Da. **Transformação Integral das Equações de Camada Limite em Convecção Interna nas Formulações Função Corrente e Variáveis Primitivas**, PEM/COPPE/UFRJ, MSc. Tese, Rio de Janeiro, Brasil. 1994.

SILVA, J. J. G. da. **Escoamento Magnetohidrodinâmico Transiente em Cavidades Usando Transformada Integral**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Instituto de Tecnologia. Universidade Federal do Pará, Belém. 2011.

SPARROW, E.M.; LIN, S.H.; LUNDGREN, T.S. **Flow Development in the Hydrodynamic Entrance Region of Tubes and Ducts**. The Physics of Fluids, vol. 7, no 3, 1964, p. 338-347.

SUTTON, G.W.; SHERMAN, A. **Engineering Magnetohydrodynamics**. Dover Publications, Inc, Mineola, New York, USA, 2006.

TAO, L.N. **Magnetohydrodynamic Effects on the Formation of Couette Flow**. Journal of Aerospace Science, vol. 27, p. 334 (1960).

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **FÍSICA: eletricidade e magnetismo, óptica**. Rio de Janeiro: LTC, 2006, v. 2.

TOLLMIEEN, W. **Über die entstehung der turbulenz**. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1929). English Translation NACA TM 1931.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física III**. São Paulo: Addison Wesley, 2009, v.2.

## APÊNDICES <sup>12</sup>

---

<sup>12</sup> Nesta seção adota-se uma numeração de equações independente da vista ao longo do presente trabalho. Iniciar-se-á no numeral 1 e todos serão precedidos pela letra referente ao apêndice, *i.e.*, A1, B1. Diga-se também que equações do trabalho podem, eventualmente, ser citadas com sua numeração original.

## A – REGIÃO DE CAMPOS COMPLETAMENTE DESENVOLVIDOS

### A.1. CAMPO MAGNÉTICO

Tomando as equações das componentes do campo magnético (Eq. 4.19 e Eq. 4.20, respectivamente) na região de desenvolvimento, juntamente com as condições de contorno associadas (Eqs. 4.26c,d,g,h):

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (uB_2 - vB_1) + \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} \right) \quad (4.22)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x} (uB_2 - vB_1) + \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y^2} \right) \quad (4.23)$$

$$y = 0 \begin{cases} B_1(x, 0) = -B_{1w\infty} \\ B_2(x, 0) = Ha \end{cases} \quad y = 1 \begin{cases} B_1(x, 1) = B_{1w\infty} \\ B_2(x, 1) = Ha \end{cases} \quad (4.26 \text{ c, d, g, h})$$

E, considerando que na região de escoamento completamente desenvolvido,  $u = u_\infty$ ,  $v = 0$ ,  $B_1 = B_{1\infty}$ ,  $B_2 = B_{2\infty}$  e  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ , tem-se:

$$0 = \frac{d}{dy} (u_\infty B_{2,\infty}) + \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{d^2 B_{1,\infty}}{dy^2} \quad (A.1)$$

$$0 = \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{d^2 B_{2,\infty}}{dy^2} \quad (A.2)$$

A solução da Eq. (A.2), sujeita às condições de contorno, resulta, após integração:

$$B_{2,\infty}(y) = Ha \quad (A.3)$$

E, como consequência,  $\frac{dB_{2,\infty}(y)}{dy} = \frac{dB_{2,\infty}(y)}{dx} = 0$

Assim, conclui-se que, na região de escoamento completamente desenvolvido, não existe componente vertical do campo magnético induzido ( $B_y$ ), pois:

$$B_{2,\infty}(y) = Ha = B_{y,\infty}(y) + Ha \Rightarrow B_{y,\infty}(y) = 0 \quad (A.4)$$

Agora, substituindo-se a Eq. (A.3) na Eq. (A.1), resulta, após integração e uso das condições de contorno:

$$B_{1,\infty}(y) = \text{Re}_m Ha [y - g_\infty(y)] + B_{1w\infty} (2y - 1) \quad (\text{A.5})$$

onde:

$$g_\infty(y) = \int_0^y u_\infty(y') dy' \quad (\text{A.6})$$

E, como consequência:

$$\frac{dB_{1,\infty}(y)}{dy} = \text{Re}_m Ha [1 - u_\infty(y)] + 2B_{1w\infty} \quad (\text{A.7})$$

**OBSERVAÇÃO:** Avaliação de  $B_{1w\infty}$

Tomando a equação da corrente para essa região, obtida pela igualdade entre a lei de Ohm, (Eq. 4.23 b), e a lei de Ampère, (Eq. 4.24 b), tem-se:

$$E_{z\infty} + u_\infty B_{2,\infty} - v_\infty B_{1,\infty} = \frac{1}{\text{Re}_m} \left( \frac{\partial B_{2,\infty}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1,\infty}}{\partial y} \right) \quad (\text{A.8})$$

E, levando-se em conta os resultados anteriores, essa equação reduz-se a:

$$E_{z\infty} + Ha u_\infty = -\frac{1}{\text{Re}_m} \frac{dB_{1,\infty}}{dy} \quad (\text{A.9})$$

Logo,

$$\frac{dB_{1,\infty}(y)}{dy} = \text{Re}_m Ha \left[ -\frac{E_{z\infty}}{Ha} - u_\infty(y) \right] \quad (\text{A.10})$$

Finalmente, da igualdade entre as Eqs. (A.7) e (A.10), conclui-se que:

$$B_{1w\infty} = -\frac{\text{Re}_m}{2} (E_{z\infty} + Ha) \quad (\text{A.11})$$

Com esse resultado, a expressão final para a componente horizontal do campo magnético nessa região também pode ser escrita como:

$$B_{1,\infty}(y) = -\text{Re}_m \left\{ [E_{z\infty} y - Ha g_\infty(y)] - \frac{1}{2}(E_{z\infty} + Ha) \right\} \quad (\text{A.12})$$

De maneira que:

$$\begin{cases} B_{1,\infty}(0) = \frac{\text{Re}_m}{2}(E_{z\infty} + Ha) \equiv -B_{1w\infty} \\ B_{1,\infty}(1) = -\frac{\text{Re}_m}{2}(E_{z\infty} + Ha) \equiv B_{1w\infty} \end{cases} \quad (\text{A.13a,b})$$

## A.2. CAMPO DE ESCOAMENTO

Tomando as equações do campo do escoamento (Eq. 4.17 e Eq. 4.18) juntamente com as condições de contorno associadas (Eqs. 4.25 e 4.26) e lembrando que na região completamente desenvolvida  $u = u_\infty$ ,  $v = 0$ ,  $p = p_\infty$ ,  $J_z = J_{z\infty}$ ,  $B_1 = B_{1\infty}$ ,  $B_2 = B_{2\infty}$  e  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ , obtém-se:

$$0 = -\frac{\partial P_\infty}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 u_\infty}{dy^2} - \frac{1}{\text{Re}} J_{z\infty} B_{2\infty} \quad (\text{A.14})$$

$$0 = -\frac{\partial P_\infty}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} J_{z\infty} B_{1\infty} \quad (\text{A.15})$$

$$u_\infty(0) = 0, \quad u_\infty(1) = 0 \quad (\text{A.16a, A.16b})$$

Note que, agora, o campo de pressão é uma função de  $x$  e  $y$ ,  $p_\infty \equiv p_\infty(x, y)$ , diferentemente da situação em que  $Ha = 0$ , onde  $p_\infty \equiv p_\infty(x)$ .

Tomando a equação da lei de Ohm (Eq. 4.23 b), com as considerações anteriores, tem-se:

$$J_{z\infty} = E_{z\infty} + Ha u_\infty \quad (\text{A.17})$$

Agora, substituindo-se a Eq. (A.17) na Eq. (A.14) resulta a seguinte EDO:

$$\frac{d^2 u_\infty}{dy^2} - Ha^2 u_\infty = -C_0 \quad (\text{A.18})$$

Com

$$C_0 = -\left( \text{Re} \frac{\partial P_\infty}{\partial x} + Ha E_{z_\infty} \right) \quad (\text{A.19})$$

A solução dessa equação, satisfazendo as condições de contorno associadas é dada por:

$$u_\infty(y) = \begin{cases} K \left( \sinh[Ha(y-1)] - \sinh[Ha y] + \sinh[Ha] \right), & Ha \neq 0 \\ 6(y - y^2), & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Sendo,

$$K = \frac{Ha}{2(1 - \cosh[Ha]) + Ha \sinh[Ha]} \quad (\text{A.21})$$

$$C_0 = K Ha^2 \sinh(Ha) \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial P_\infty(x, y)}{\partial x} = cte = \begin{cases} -\frac{Ha^2}{\text{Re}} (K \sinh[Ha] - 1), & Ha \neq 0 \\ -\frac{12}{\text{Re}}, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Agora, substituindo as equações envolvendo a corrente e a componente  $x$  do campo magnético na equação da quantidade de movimento na direção  $y$ , Eq. (A.15), tem-se:

$$\frac{\partial P_\infty(x, y)}{\partial y} = s(y) = \begin{cases} -\frac{1}{\text{Re Re}_m} B_{1\infty}(y) \frac{dB_{1\infty}(y)}{dy}, & Ha \neq 0 \\ 0, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

**- Campo de Pressão  $P_\infty(x, y)$**

Lembrando que, para  $Ha \neq 0$ , o campo de pressão é uma função de  $x$  e  $y$ ,  $p_\infty \equiv p_\infty(x, y)$ , e após manipulação da Eq. (A.5), Eq. (A.7), Eq. (A.15), Eq. (A.23) e Eq. (A.24), com posterior integração, obtém-se:

$$P_\infty(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial P_\infty}{\partial x} x - \frac{1}{2 \text{Re} \text{Re}_m} B_{1\infty}^2(y), & Ha \neq 0 \\ -\frac{12}{\text{Re}} x, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

**- Função Corrente na Saída do Canal  $g_\infty(y) \equiv \psi_\infty(y) = \int_0^y u_\infty(y') dy'$**

Substituindo a Eq. (A.20) na definição de  $g_\infty(y)$  e realizando a integração, obtém-se:

$$\psi_\infty(y) = \begin{cases} \frac{K}{Ha} (1 - \cosh[Ha] - \cosh[Ha y] + \cosh[Ha(1-y)] + Ha y \sinh[Ha]), & Ha \neq 0 \\ 3y^2 - 2y^3, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

**- Derivada Primeira Função Corrente  $\psi'_\infty(y) \equiv u_\infty(y)$**

Da definição da componente longitudinal de velocidade:

$$\psi'_\infty(y) \equiv u_\infty(y) = \begin{cases} K (\sinh[Ha(y-1)] - \sinh[Ha y] + \sinh[Ha]), & Ha \neq 0 \\ 6(y - y^2), & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

**- Derivada Segunda da Função Corrente  $\psi''_\infty(y) \equiv u'_\infty(y)$**

Derivando a expressão da velocidade em relação a  $y$ , Eq. (A.20), obtém-se:

$$\psi''_\infty(y) \equiv u'_\infty(y) = \begin{cases} K Ha (\text{Cosh}[Ha(y-1)] - \text{Cosh}[Ha y]), & Ha \neq 0 \\ 6(1 - 2y), & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

- **Derivada Terceira da Função Corrente**  $\psi_{\infty}'''(y) \equiv u_{\infty}'''(y)$

Derivando a Eq. (A.28) em relação a  $y$  obtém-se:

$$\psi_{\infty}'''(y) \equiv u_{\infty}'''(y) = \begin{cases} K Ha^2 \left( \text{Sinh}[Ha(y-1)] - \text{Sinh}[Ha y] \right), & Ha \neq 0 \\ -12, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

- **Derivada Quarta da Função Corrente**  $\psi_{\infty}''''(y) \equiv u_{\infty}''''(y)$

Derivando a Eq. (A.29) em relação a  $y$  obtém-se:

$$\psi_{\infty}''''(y) \equiv u_{\infty}''''(y) = \begin{cases} K Ha^3 \left( \text{Cosh}[Ha(y-1)] - \text{Cosh}[Ha y] \right), & Ha \neq 0 \\ 0, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

- **Função**  $h_{\infty}(y) = \int_0^y B_{1\infty}(y') dy'$

Substituindo a equação de  $B_{1\infty}(y)$ , Eq. (A.12), na definição de  $h_{\infty}(y)$ , tem-se:

$$h_{\infty}(y) = -\text{Re}_m \int_0^y \left\{ [E_{z\infty} y - Ha g_{\infty}(y)] - \frac{1}{2}(E_{z\infty} + Ha) \right\} dy' \quad (\text{A.31})$$

Agora, inserindo-se o resultado de  $g_{\infty}(y) \equiv \psi_{\infty}(y)$ , Eq. (A.26), na equação acima e realizando a integração obtém-se:

$$h_{\infty}(y) = \begin{cases} \frac{\text{Re}_m}{2} \left[ (E_{z\infty} + Ha) y - E_{z\infty} y^2 - \frac{a_h}{Ha} K \right], & Ha \neq 0 \\ 0, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

onde

$$a_h = 2Ha y (\cosh[Ha] - 1) - (Ha^2 y^2 + 2) \text{senh}[Ha] + 2(\text{senh}[Ha y] + \text{senh}[Ha(1-y)])$$

**- Função Campo Magnético  $\beta_\infty(x \rightarrow \infty, y)$**

Das relações entre a função escalar campo magnético e as componentes do campo magnético na região completamente desenvolvida:

$$B_{1\infty} = \frac{\partial \beta_\infty}{\partial y} \qquad B_{2\infty} = -\frac{\partial \beta_\infty}{\partial x}$$

E empregando-se as Eqs. (A.3) e (A.12) obtém-se:

$$\beta_\infty(x \rightarrow \infty, y) = -Ha x_\infty + h_\infty(y) \qquad (A.33)$$

**OBSERVAÇÃO: Condições de Contorno na Entrada do Canal**

Na entrada do canal, são permitidas diferentes possibilidades de entrada para os campos de escoamento e magnético. Pode-se empregar qualquer perfil para estes campos na entrada, mas em particular, o interesse é voltado à aplicação de um perfil de velocidade uniforme ou parabólico (obtido de um escoamento completamente desenvolvido sem aplicação de campo magnético). Com essa configuração, estuda-se a influência da aplicação de um campo magnético externo sobre o desenvolvimento do escoamento a partir de um perfil uniforme ou parabólico.

a) Perfil de velocidade uniforme ( $Ha = 0$ ):  $u_e(y) = 1$

$$g_e(y) \equiv \psi_e(y) = \int_0^y u_e(y') dy' = \int_0^y dy' \qquad (A.34)$$

$$g_e(y) \equiv \psi_e(y) = y \qquad (A.35)$$

Nesse caso,

$$h_e(y) = \int_0^y B_{1e}(y') dy' = 0 \qquad (A.36)$$

b) Perfil de velocidade parabólico ( $Ha = 0$ ):  $u_e(y) = 6(y - y^2)$

$$g_e(y) \equiv \psi_e(y) = \int_0^y u_e(y') dy' = 6 \int_0^y (y' - y'^2) dy' \quad (\text{A.37})$$

$$g_e(y) \equiv \psi_e(y) = (3y^2 - 2y^3) \quad (\text{A.38})$$

Nesse caso,

$$h_e(y) = \int_0^y B_{1e}(y') dy' = 0 \quad (\text{A.39})$$

c) Por outro lado, caso se imponha um perfil de campo magnético, deve-se aplicar um perfil de velocidade desenvolvido que corresponda à aplicação desse campo magnético. Assim, se for imposto um perfil de campo magnético obtido de um escoamento completamente desenvolvido para  $Ha \neq 0$  como o dado pela Eq. (A.33), o perfil de velocidade na entrada deverá ser aquele dado pela Eq. (A.27):

$$u_e(y) = K \left( \sinh[Ha(y-1)] - \sinh[Ha y] + \sinh[Ha] \right) \quad (\text{A.40})$$

De maneira que a função corrente na entrada será dada pela Eq. (A.24):

$$g_e(y) \equiv \psi_e(y) = \int_0^y u_e(y') dy'$$

$$\psi_e(y) = \frac{K}{Ha} \left( 1 - \cosh[Ha] - \cosh[Ha y] + \cosh[Ha(1-y)] + Ha y \sinh[Ha] \right) \quad (\text{A.41})$$

E, agora  $B_{1e}(y) \equiv B_{1\infty}(y)$

$$h_e(y) = \int_0^y B_{1\infty}(y') dy' \equiv h_\infty(y) \quad (\text{A.42})$$

## B – PRINCIPAIS PARÂMETROS DE COMPARAÇÃO

### B.1. FATOR DE ATRITO LOCAL (FATOR DE ATRITO DE FANNING) - $f_x$

É função da tensão de cisalhamento média nas paredes do canal (gradiente de velocidade médio) e é associado aos requisitos de potência para bombeamento do fluido, sendo definido por:

$$f_x = \frac{\tau_w^*}{\frac{1}{2} \rho \bar{U}_e^2} \quad (\text{B.1})$$

Como a tensão de cisalhamento é dada por  $\tau_w^* = \mu \left. \frac{\partial u^*}{\partial y} \right|_{y_w^*}$ , então:

$$f_x = \mu \left. \frac{\partial u^*}{\partial y} \right|_{y_w^*} \frac{2}{\rho \bar{U}_e^2} \quad (\text{B.2})$$

Adimensionalizando com  $u^* = u \bar{U}_e$  e  $y^* = hy$ , tomando  $Re = \frac{\bar{U}_e h \rho}{\mu}$  e  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ , tem-se

$$f_x = \frac{2}{Re} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_w} \Rightarrow f_x \frac{Re}{2} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_w} \Rightarrow f_x \frac{Re}{2} = \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{y_w} \quad (\text{B.3})$$

Assim, na parede inferior:

$$f_{x0} = \frac{2}{Re} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \Rightarrow f_{x0} \frac{Re}{2} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \Rightarrow f_{x0} \frac{Re}{2} = \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{y=0} \quad (\text{B.4})$$

Na parede superior:

$$f_{x1} = -\frac{2}{Re} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} \Rightarrow f_{x1} \frac{Re}{2} = -\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} \Rightarrow f_{x1} \frac{Re}{2} = -\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{y=1} \quad (\text{B.5})$$

## B.2. FATOR DE ATRITO MÉDIO - $f_{xm}$

Por definição:

$$f_{xm} = \frac{1}{A_L} \int_{A_L} f_x dA_L \quad (\text{B.6})$$

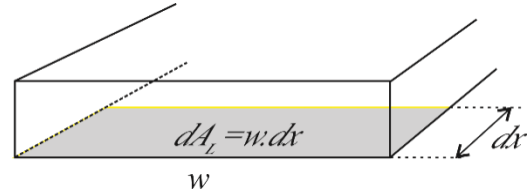


Figura 1B - elemento de área no canal.

Observando a Fig. 1B,  $A_L = wx$ ,  $dA_L = w dx$  e os fatores de atrito locais nas paredes inferior e superior são respectivamente,  $f_{x0}$  e  $f_{x1}$ , então:

$$f_{xm} = \frac{1}{x} \int_0^x (f_{x0} + f_{x1}) dx = \frac{1}{x} \int_0^x \left( \frac{2}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{2}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} \right) dx \quad (\text{B.7})$$

$$f_{xm} = \frac{2}{x Re} \int_0^x \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} \right) dx \quad (\text{B.8})$$

Se  $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1}$  então,

$$f_{xm} = \frac{4}{x Re} \int_0^x \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) dx \equiv \frac{4}{x Re} \int_0^x \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right) dx \quad (\text{B.9})$$

Com a Eq. 5.16, para o filtro de velocidade:

$$f_{xm} = \frac{4}{x Re} \int_0^x \left( \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial y^2} \Big|_{y=0} + \frac{\partial^2 \psi_\infty}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right) dx \quad (\text{B.10})$$

Fazendo a transformação integral da equação acima;

$$f_{xm} = \frac{4}{Re} \left[ \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{N\psi} \tilde{Y}_i''(0) \int_0^x \bar{\psi}_{Hi}(x) dx + \frac{\partial^2 \psi_\infty}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right] \quad (\text{B.11})$$

## C – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O CAMPO MAGNÉTICO

### INTERFACE INFERIOR: MEIO EXTERNO – INTERIOR DO CANAL

Para a análise das condições de contorno do campo magnético na placa isolante inferior, tome-se uma superfície gaussiana cilíndrica e uma curva amperiana ABCD que atravessam a superfície inferior, conforme mostra a Figura (1C).

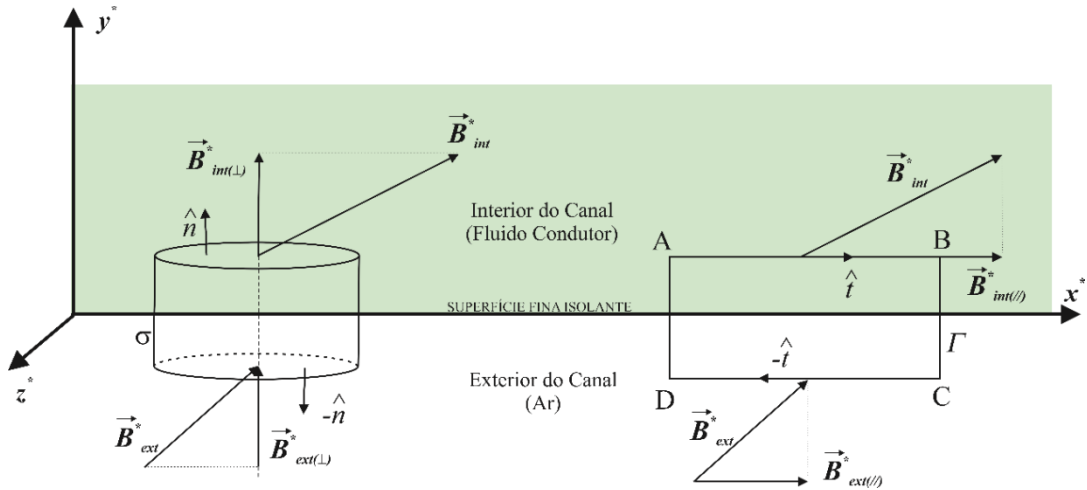


Figura 1C - Superfície gaussiana e curva amperiana para determinação das condições de contorno para o campo magnético na placa inferior.

### Componente Normal:

Aplicando-se a lei de Gauss sobre a superfície cilíndrica de espessura infinitesimal (as contribuições sobre a superfície lateral do cilindro serão negligenciadas, considerando-se um cilindro de altura infinitesimal), tem-se:

$$\oint_{\sigma} \vec{B}^* \cdot d\vec{A}^* = 0$$

$$\oint_{\sigma} \vec{B}_{ext}^* \cdot (-\hat{n})dA + \oint_{\sigma} \vec{B}_{int}^* \cdot (\hat{n})dA = 0 \quad \therefore B_{int(\perp)}^* - B_{ext(\perp)}^* = 0$$

$$\Rightarrow B_{int(\perp)}^* = B_{ext(\perp)}^*$$

Este resultado mostra que não há descontinuidade da componente vertical do campo magnético na interface que separa o meio externo ao canal e o fluido condutor não magnético.

Assim, considerando a espessura das placas isolantes, como desprezíveis e, adotando a nomenclatura do presente trabalho, obtém-se as condições de contorno da componente vertical do campo magnético na placa inferior. Como, no presente trabalho, impõe-se  $B_{ext}^*(\perp) = B_0^*$ :

$$B_2^*(x^*, 0)_{int} = B_2^*(x^*, 0)_{ext} = B_0^* \quad (C.1)$$

Na forma adimensional:

$$B_2(x, 0)_{int} = B_2(x, 0)_{ext} = Ha \quad (C.2)$$

Salienta-se, peremptoriamente, que a componente vertical do campo magnético total sofre variações dentro do canal devido às condições de acoplamento MHD discutido no escopo do presente trabalho.

### **Componente Tangencial:**

Aplicando-se a lei de Ampère sobre a curva ABCD, onde  $\overline{BC} = \overline{DA} \approx 0$  e  $\overline{AB} = \overline{CD} = L$ , (as contribuições sobre os lados BC e DA serão negligenciadas, considerando-se um curva retangular de espessura infinitesimal), mostrada na Figura 1C, tem-se:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}^* \cdot d\vec{\ell}^* = \mu_0 I_{Total}^*$$

$$\int_A^B \vec{B}_{int}^* \cdot \hat{t} d\ell^* + \int_C^D \vec{B}_{ext}^* \cdot (-\hat{t}) d\ell^* = \mu_0 I_{Total}^* \quad \therefore \quad B_{int(\parallel)}^* L - B_{ext(\parallel)}^* L = \mu_0 I_{Total}^*$$

$$\Rightarrow B_{int(\parallel)}^* - B_{ext(\parallel)}^* = \mu_0 \frac{I_{Total}^*}{L}$$

Observe que o termo  $(I_{Total}^*/L)$  representa a corrente total no interior da curva amperiana ABCD por unidade de comprimento ao longo da direção  $x$  e, como a espessura do retângulo ABCD é desprezível, estas correntes estão associadas a correntes locais, correntes de superfície.

Lembrando que *as placas (inferior e superior) são isolantes* e, portanto, não serão consideradas tais correntes de superfície,  $I_{Total}^*$ , de maneira que a componente horizontal do campo magnético também é contínua. Assim,

$$B_{int(\parallel)}^* = B_{ext(\parallel)}^* \quad (C.3)$$

Na nomenclatura do presente trabalho:

$$B_1^*(x^*, 0)_{int} = B_1^*(x^*, 0)_{ext} \quad (C.4)$$

E na forma adimensional:

$$B_1(x, 0)_{int} = B_1(x, 0)_{ext} \quad (C.5)$$

Agora, observa-se que pode haver componente horizontal do campo magnético total, induzida por correntes no interior do escoamento, mesmo que o campo magnético imposto seja estritamente vertical.

### **PLACAS INFERIOR E SUPERIOR: RELAÇÃO ENTRE COMPONENTES**

(Procedimento para Determinação das Condições de Contorno na Placa Superior)

Para saber o que ocorre com as componentes horizontal e vertical do campo magnético tota no interior do canal, entre as placas inferior e superior, tomem-se superfícies gaussianas e curvas amperianas que tangenciem as placas do canal, conforme ilustra a Figura (2C).

De antemão, toma-se um valor médio para a densidade de corrente e desprezam-se variações de borda no campo magnético (nas bases superior e inferior do cilindro gaussiano e nas proximidades dos lados AB e CD do retângulo amperiano).

Observe-se que, desta forma, são nulas as contribuições da densidade média de corrente no interior do canal sobre as laterais do cilindro gaussiano do retângulo amperiano, desta forma, o campo magnético total é o próprio campo externo imposto ( $B_0^*$ ). Não obstante, devido à simetria do canal e a uniformidade da densidade média de corrente, os campos inferior e superior à curva amperiana têm mesmo módulo e sentidos opostos, vide Fig. (2C).

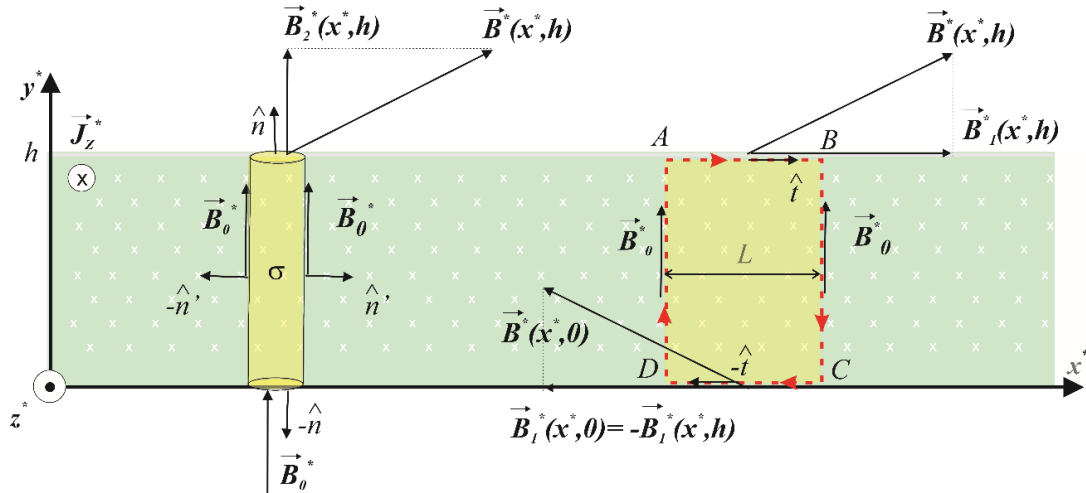


Figura 2C - Superfície gaussiana e curva amperiana para determinação da relação entre as componentes do campo magnético nas placas.

### Componente Normal:

Aplicando-se a lei de Gauss sobre a superfície cilíndrica mostrada, tem-se:

$$\oint_{\sigma} \vec{B}^* \cdot d\vec{A}^* = 0$$

$$\oint_{\sigma} \vec{B}_0^* \cdot (-\hat{n}) dA^* + \oint_{\sigma} \vec{B}^*(x^*, h) \cdot (\hat{n}) dA^* = 0$$

$$\Rightarrow B_2^*(x^*, h) = B_0^*$$

Este resultado mostra que a componente vertical do campo magnético em ambas as placas é a mesma, isto é:

$$B_2^*(x^*, 0) = B_2^*(x^*, h) = B_0^* \quad (\text{C.6})$$

Ou, na forma adimensional:

$$B_2(x, 0) = B_2(x, 1) = Ha \quad (\text{C.7})$$

### Componente Tangencial:

Aplicando-se a lei de Ampère sobre a curva ABCD, mostrada na Figura 2C, já observando-se que as contribuições nos lados BC e DA cancelam-se, tem-se:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}^* \cdot d\vec{\ell}^* = \mu_0 I_{Total}^*$$

Desta forma,

$$\int_A^B \vec{B}^*(x^*, h) \cdot \hat{t} d\ell^* + \int_C^D \vec{B}^*(x^*, 0) \cdot (-\hat{t}) d\ell^* = \mu_0 I_{Total}^*$$

Como:

$$\vec{B}_1^*(x^*, 0) = -\vec{B}_1^*(x^*, h) \quad \text{e} \quad I_{Total}^* = \oint_{ABCD} \vec{J}_z^* \cdot d\vec{S}^*$$

Tem-se:

$$2B_1^*(x^*, h)L = \mu_0 J_z^*(Lh) \quad \Rightarrow \quad B_1^*(x^*, h) = \frac{\mu_0 J_z^* h}{2}$$

Tomando-se os grupos adimensionais, mostrados nas Eqs. (4.15j,m,o) e o valor médio para a densidade de corrente, dado pela Eq. (4.23b) em um ponto suficientemente distante da entrada do canal,  $x \rightarrow \infty$ , conclui-se que:

$$B_1(x, 1) = \frac{Re_m J_z}{2} = \frac{Re_m}{2} (\bar{E}_z + Ha) \quad (C.8)$$

$$B_1(x, 0) = -\frac{Re_m J_z}{2} = -\frac{Re_m}{2} (\bar{E}_z + Ha) \quad (C.9)$$

Os módulos de  $B_1(x,0)$  e  $B_1(x,1)$  na região completamente desenvolvida são simploriamente chamados de  $B_{1w\infty}$  (campo horizontal nas paredes), ou seja:

$$B_{1w\infty} = \frac{Re_m}{2} (\bar{E}_z + Ha) \quad (C.10)$$