



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Tecnologia  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**  
**MESTRADO – DOUTORADO**

**ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR EM  
DUTOS CIRCULARES SUBMETIDOS AOS EFEITOS DA  
CONDUÇÃO AXIAL E RADIAÇÃO**

por

Dhiego Luiz de Andrade Veloso

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba  
para obtenção do Título de Mestre.

João Pessoa – Paraíba

Agosto – 2015

**DHIEGO LUIZ DE ANDRADE VELOSO**

**ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR EM  
DUTOS CIRCULARES SUBMETIDOS AOS EFEITOS DA  
CONDUÇÃO AXIAL E RADIAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Mestre.

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** TERMOFLUIDOS

**ORIENTADOR:** PROF. DR. CARLOS ANTÔNIO CABRAL DOS SANTOS

JOÃO PESSOA – PB

AGOSTO – 2015

V443a Veloso, Dhiego Luiz de Andrade.  
Análise da convecção forçada laminar em dutos circulares submetidos aos efeitos da condução axial e radiação / Dhiego Luiz de Andrade Veloso.- João Pessoa, 2015.  
108f.  
Orientador: Carlos Antônio Cabral dos Santos  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CT  
1. Engenharia mecânica. 2. Condição axial. 3. Número de Peclet. 4. Lei de potência. 5. GITT. 6. Radiação.

UFPB/BC

CDU: 621(043)

**ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR EM  
DUTOS CIRCULARES SUBMETIDOS AOS EFEITOS DA  
CONDUÇÃO AXIAL E RADIAÇÃO**

por

Dhiego Luiz de Andrade Veloso

*Dissertação aprovada em 12 de agosto de 2015*

*Período letivo 2015.2*

---

Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos  
ORIENTADOR - UFPB

---

Prof. Dr. Abel Cavalcante Lima Filho  
EXAMINADOR INTERNO - UFPB

---

Prof. Dr. Laurivan da Silva Diniz  
EXAMINADOR EXTERNO - IFPB

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho a Deus, por sua infinita bondade e misericórdia, por seu infinito amor.

A minha esposa Márcia Amaro Brasil Veloso, por todo amor, apoio e compreensão em ter conseguido lidar com minha falta de atenção e isolamento ao longo da elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, Luiz Alberto Freire Veloso e Walmira de Andrade Veloso, pelo constante apoio, incentivo e esforço para que eu pudesse concluir não só este trabalho, mas a minha formação.

A minha avó Lúcia Freire Veloso, por todo estímulo e suporte financeiro fornecido para a minha progressão enquanto estudante, lhe serei eternamente grato.

Ao meu filho, Mateus, que ainda está por vir, mas já o amo muito. Também dedico a ele este trabalho.

Aos meus irmãos, Thiago Luiz de Andrade Veloso e Higor Luiz de Andrade Veloso, pela amizade e pelo amor que construímos ao longo desses anos.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, dono de toda a sabedoria.

Ao Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos pelas orientações fornecidas e pelo total apoio para a execução deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Laurivan da Silva Diniz pela presteza em colaborar na implementação computacional que valida este trabalho.

A todos os professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

A todos os meus familiares e amigos.

## ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR EM DUTOS CIRCULARES SUBMETIDOS AOS EFEITOS DA CONDUÇÃO AXIAL E RADIAÇÃO

### RESUMO

Com o grande avanço tecnológico experimentado pela humanidade torna-se providencial um conhecimento aprofundado sobre os processos reais de transferência de calor, bem como surge uma necessidade de analisá-los quantitativamente. No presente trabalho estuda-se a transferência de calor na convecção forçada laminar na região de entrada térmica de um tubo circular considerando os efeitos de condução axial no fluido e de radiação, uma vez que em baixos números de Peclet desempenham um papel importante nos problemas de transferência de calor e sua omissão oferece um erro apreciável na computação da taxa de transferência de calor. Na primeira parte deste trabalho considera-se um escoamento tipo pistão, cuja solução analítica exata foi discutida. Na segunda parte do trabalho considera-se um escoamento no modelo lei de potência, apresentando uma proposta de solução analítica aproximada e uma solução numérica, bem como a comparação entre as duas soluções. Neste trabalho utiliza-se o método híbrido numérico-analítico denominado Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT) para resolver a equação da energia. O campo de temperatura e o número de Nusselt local são avaliados para vários valores do número de Peclet e uma condição de contorno do primeiro tipo. Os resultados, apresentados na forma de tabelas e gráficos, permitem analisar a influência que o número de Peclet e o índice lei de potência exercem no perfil de temperatura e no número de Nusselt. Os resultados obtidos neste trabalho se apresentam em total concordância com as literaturas científicas.

**Palavras – chave:** condução axial, Peclet, lei de potência, GITT, radiação.

## **ANALYSIS OF LAMINAR FORCED CONVECTION IN CIRCULAR DUCTS SUBJECTED TO THE EFFECTS OF AXIAL CONDUCTION AND RADIATION**

### **ABSTRACT**

With the great technological advances experienced by humanity becomes providential depth knowledge about real processes of heat transfer, as well as a need arises to analyze them quantitatively. In the present work is studied the heat transfer in laminar forced convective in the entrance region of a circular tube considering the effects of axial conduction into the fluid and radiation, since in low Peclet numbers play an important role in heat transfer problems and its omission offers a significant error in the computation of the heat transfer rate. In the first part of this work is considered a slug-flow, whose exact analytical solution was discussed. In the second part of the work is considered a flow in the power law model, proposes an approximate analytic solution and numerical solution, as well as the comparison of these solutions. In this paper is used the hybrid numeric-analytical method named **Generalized Integral Transform Technique (GITT)** to solve the energy equation. The temperature field and local Nusselt number are calculated for several values of Peclet numbers and with a boundary condition of first kind. The results presented in the form of tables and graphs permit to analyze the influence that the Peclet number and the power law index exercise in the temperature profile and the Nusselt number. The results of this study are presented in full compliance with the scientific literature.

**Keywords:** axial conduction, Peclet, power law, GITT, radiation.

## SUMÁRIO

DEDICATÓRIA	ii
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiii
<b>CAPÍTULO 1</b>	
<b><u>INTRODUÇÃO</u></b>	<b>01</b>
1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	01
1.2 BREVE HISTÓRICO DA DISTRIBUIÇÃO ESPECTRAL DA RADIAÇÃO TÉRMICA	02
1.3 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	05
1.4 FLUIDOS NEWTONIANOS E NÃO-NEWTONIANOS	06
1.5 ESCOPO DO TRABALHO	07
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b><u>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</u></b>	<b>09</b>
2.1 PROBLEMAS COM CONDUÇÃO AXIAL EM DUTOS	09
2.2 PROBLEMAS ACOPLADOS COM CONDUÇÃO-RADIAÇÃO EM DUTOS	10
<b>CAPÍTULO 3</b>	
<b><u>ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DA CONVECCÃO LAMINAR COM CONDUÇÃO AXIAL E PERFIL UNIFORME DE VELOCIDADE</u></b>	<b>13</b>
3.1 PROBLEMA FÍSICO	13
3.2 MODELAMENTO MATEMÁTICO	14
3.3 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA	15
3.4 PROBLEMA AUXILIAR DE AUTOVALOR NA DIREÇÃO RADIAL	17
3.5 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NO CAMPO DE TEMPERATURA	19
3.6 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE ENTRADA	22

3.7	TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE SAÍDA	23
3.8	CÁLCULO DO POTENCIAL DE TEMPERATURA TRANSFORMADA	23
3.9	CÁLCULO DO CAMPO DE TEMPERATURA	24
3.10	CÁLCULO DA TEMPERATURA MÉDIA ADIMENSIONAL	24
3.11	CÁLCULO DO NÚMERO DE NUSSELT LOCAL	26
3.12	RESULTADOS OBTIDOS	26
	3.12.1- Análise da Convergência	26
	3.12.2- Efeito do Peclet	27
	3.12.3- Comparação entre a solução analítica exata e a solução numérica	30

## **CAPÍTULO 4**

	<b><u>ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DA CONVECCÃO LAMINAR COM CONDUÇÃO AXIAL E PERFIL DE VELOCIDADE NO MODELO LEI DE POTÊNCIA</u></b>	<b>31</b>
4.1	PROBLEMA FÍSICO	31
4.2	MODELAMENTO MATEMÁTICO	32
4.3	ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA	34
4.4	PROBLEMA AUXILIAR DE AUTOVALOR NA DIREÇÃO RADIAL	35
4.5	TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NO CAMPO DE TEMPERATURA	36
4.6	TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE ENTRADA	38
4.7	TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE SAÍDA	39
4.8	PROPOSTA DE UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA PARA O POTENCIAL DE TEMPERATURA TRANSFORMADA	40
4.9	CÁLCULO DA TEMPERATURA MÉDIA ADIMENSIONAL	42
4.10	CÁLCULO DO NÚMERO DE NUSSELT LOCAL	43
4.11	RESULTADOS OBTIDOS	43
	4.11.1- Análise da Convergência	43
	4.11.2- Efeito do Peclet para a solução analítica aproximada	45
	4.11.3- Efeito do índice lei de potência para a solução analítica aproximada	49
	4.11.4- Comparação entre a solução analítica aproximada e a solução numérica	51
	4.11.5- Validação da solução numérica	53

**CAPÍTULO 5****MODELAMENTO MATEMÁTICO COM EFEITO RADIATIVO -****SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA VIA GITT** **56**

5.1 PROBLEMA FÍSICO 56

5.2 MODELAMENTO MATEMÁTICO 57

5.3 FILTRO NO CAMPO DE TEMPERATURA 60

5.4 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA 61

5.5 PROBLEMA AUXILIAR DE AUTOVALOR NA DIREÇÃO RADIAL 63

5.6 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NO CAMPO DE TEMPERATURA 64

5.7 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE ENTRADA 67

5.8 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE SAÍDA 68

**CAPÍTULO 6****MODELAMENTO MATEMÁTICO COM EFEITO RADIATIVO -****SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA VIA GITT** **70**

6.1 MODELAMENTO MATEMÁTICO ADIMENSIONALIZADO 70

6.2 FILTRO NO CAMPO CAMPO DA INTENSIDADE DE RADIAÇÃO TOTAL 72

6.3 PROBLEMA AUXILIAR DE AUTOVALOR NA DIREÇÃO RADIAL 74

6.4 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO  
CAMPO DE INTENSIDADE DE RADIAÇÃO TOTAL 76

6.5 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE ENTRADA 79

6.6 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE SAÍDA 80

6.7 CÁLCULO DA TEMPERATURA MÉDIA ADIMENSIONAL 81

6.8 CÁLCULO DO NÚMERO DE NUSSELT 81

6.9 ANÁLISE QUALITATIVA 81

**CAPÍTULO 7****CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES** **84****REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS** **86**

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1:	Comparação entre a distribuição espectral prevista pela Física Clássica e a que ocorre por meio das experiências.	04
Figura 1.2:	Comparação entre a distribuição espectral prevista pela Teoria de Planck e a que ocorre por meio das experiências.	06
Figura 3.1:	Ilustração do problema para o perfil de velocidade tipo pistão.	13
Figura 3.2:	Nusselt em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo pistão.	28
Figura 3.3:	Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo pistão.	28
Figura 3.4:	Comparação da solução analítica e numérica para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo pistão	30
Figura 4.1:	Ilustração do problema para o perfil de velocidade parabólico.	31
Figura 4.2:	Nusselt em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para $n=1/3$ no uso da solução analítica aproximada.	46
Figura 4.3:	Nusselt em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo parabólico no uso da solução analítica aproximada	46
Figura 4.4:	Nusselt em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para $n=3$ no uso da solução analítica aproximada.	47

- Figura 4.5: Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=1/3$  no uso da solução analítica aproximada. 48
- Figura 4.6: Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo parabólico no uso da solução analítica aproximada. 48
- Figura 4.7: Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=3$  no uso da solução analítica aproximada. 49
- Figura 4.8: Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=1, 1/3$  e  $3$  e  $Pe = 10$  no uso da solução analítica aproximada. 50
- Figura 4.9: Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=1, 1/3$  e  $3$  e  $Pe = 10$  no uso da solução analítica aproximada. 50
- Figura 4.10: Comparação das soluções analítica aproximada e numérica para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade modelo lei de potência ( $n=1/3$ ). 51
- Figura 4.11: Comparação das soluções analítica aproximada e numérica para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo parabólico. 52
- Figura 4.12: Comparação das soluções analítica aproximada e numérica para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade modelo lei de potência ( $n=3$ ). 52

- Figura 4.13: Comparação da solução numérica com uma solução de referência literária para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade modelo lei de potência ( $n=1/3$ ). 53
- Figura 4.14: Comparação da solução numérica com uma solução de referência literária para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo parabólico. 54
- Figura 4.15: Comparação da solução numérica com uma solução de referência literária para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade modelo lei de potência ( $n=3$ ). 54
- Figura 4.16: Nussel local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=1, 1/3$  e  $3$  e  $Pe = \infty$  no uso da solução numérica. 55
- Figura 5.1: Ilustração do problema considerando o efeito radiativo. 56

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1:	Convergência do número de Nussel local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade tipo pistão.	27
Tabela 2.1:	Convergência do número de Nussel local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para $n=1/3$ no uso da solução analítica aproximada.	44
Tabela 2.2:	Convergência do número de Nussel local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade tipo parabólico no uso da solução analítica aproximada.	44
Tabela 2.3:	Convergência do número de Nussel local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para $n=3$ no uso da solução analítica aproximada..	45
Tabela 3.1:	Convergência do número de Nussel local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para $n=1/3$ no uso da solução numérica.	82
Tabela 3.2:	Convergência do número de Nussel local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade tipo parabólico no uso da solução numérica.	83
Tabela 3.3:	Convergência do número de Nussel local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para $n=3$ no uso da solução numérica.	83

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_{ik}$	Coeficientes definidos pela equação [4.6j].
$A_{ij}$	Coeficientes definidos pela equação [5.9f].
$B_{ik}$	Coeficientes definidos pela equação [5.9g].
$B_{il}$	Coeficientes definidos pela equação [6.5i].
$c$	Velocidade da luz no vácuo [m/s].
$C_p$	Calor específico do corpo à pressão constante [J/ Kg.K].
$D_h$	Diâmetro do tubo circular [m].
$e$	Poder de emissão radiativa total.
$f$	Frequência de onda [Hz].
$G$	Intensidade de Radiação total [W/ m <sup>2</sup> ].
$G^*$	Intensidade de Radiação total adimensional.
$G^{**}$	Campo de intensidade de Radiação total definido pela equação [6.4b].
$G_f$	Filtro no campo de intensidade de Radiação total.
$\overline{G}_i[x^*]$	Transformada do campo da radiação definida pela equação [6.4a].
$h$	Constante de Planck [J/s].
$I_b(T)$	Intensidade total de radiação emitida pelo corpo negro [W/ m <sup>2</sup> ].
$I_T$	Intensidade de radiação emitida por um corpo em função da temperatura [W/ m <sup>2</sup> ].
$I_0(\Omega,S)$	Intensidade de radiação de um feixe monocromático [W/ m <sup>2</sup> ].
$I_0(\zeta)$	Função de Bessel modificada de ordem zero.
$I_1(\zeta)$	Função de Bessel modificada de primeira ordem.
$k$	Condutividade Térmica [W/ m.K].
$K_i$	Normas das autofunções do problema auxiliar no campo de radiação.
$n$	Índice lei de potência [adimensional].
$N$	Parâmetro condução-radiação [adimensional].
$N_i$	Normas das autofunções do problema auxiliar no campo da temperatura.
$Pe$	Número de Peclet [adimensional].
$Pr$	Número de Prandtl [adimensional].
$\mathbf{q}^r$	Vetor fluxo de calor radiativo [W/ m <sup>2</sup> ].

$r$	Variável radial [m].
$R_e$	Número de Reynolds [adimensional].
$R_i$	Coefficientes definidos pela equação [5.9h].
$S$	Coordenada do caminho da radiação [m].
$T_e$	Temperatura de entrada [K].
$T_w$	Temperatura na parede do tubo circular [K].
$T(x, r)$	Temperatura do fluido de escoamento [K].
$u_m$	Velocidade média do escoamento [m/s].
$u(r)$	Campo de velocidade [m/s].
$u^*(\zeta)$	Campo de velocidade adimensionalizado.
$x$	Variável espacial [m].
$x^*$	Variável espacial adimensional.

### Símbolos Gregos

$\Theta^*(x^*, \zeta)$	Temperatura adimensional do fluido em escoamento.
$\Theta(x^*)_{média}$	Temperatura média do fluido em escoamento [adimensional].
$\bar{\Theta}_i(x^*)$	Potencial transformado para o campo de temperatura.
$\beta$	Coefficiente de extinção do meio [ $m^{-1}$ ].
$\beta_i$	Autovalores do problema auxiliar no campo da radiação.
$\tau$	Espessura óptica do corpo [adimensional].
$\nabla$	Operador nabra.
$\mu_i$	Autovalores do problema auxiliar no campo da temperatura.
$\Psi_i(\mu_i, \zeta)$	Autofunções do problema auxiliar no campo de temperatura.
$\phi_i(\mu_i, \zeta)$	Autofunções do problema auxiliar no campo da radiação.
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann [ $=5.670 \times 10^{-8} \text{ W / m}^2 \cdot \text{K}^4$ ].
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker.
$\Omega$	Direção da radiação.
$\kappa$	Coefficiente de absorção do meio [ $m^{-1}$ ].
$\zeta$	Variável radial adimensional.

**Subscritos**

c            Relativo a convecção.

r            Relativo a radiação.

**Abreviação**

ETR        Equação da transferência radiativa.

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

A transferência de calor simultânea por radiação, condução e/ou convecção é de extrema relevância em muitas aplicações de engenharia, tais como fornos para produção de aço, vidro, alumínio, materiais cerâmicos e cimento, câmaras de combustão e trocadores de calor com alta temperatura.

A maioria das abordagens dos estudos de transferência de calor está focado na aplicação e solução da equação da energia sem o acoplamento com o efeito da radiação no meio. Muitas vezes a falta do acoplamento se deve a considerações de ordem de grandeza e a pouca importância relativa da contribuição da radiação em relação a convecção e a condução. Quando ao uso de meios semi-transparentes cinzentos, a importância da radiação se torna efetiva e deve ser incluída na proposta de formulação dos problemas, e que muitas vezes é tentada a remoção em função das complexidades matemáticas associadas. A abordagem teórica tem sido de certa forma negligenciada, principalmente, pelas limitações das técnicas matemáticas tradicionais, tais como separação de variáveis e uso de funções de Green. O desenvolvimento da Técnica de Transformada Integral Generalizada, como ferramenta matemática robusta, tem permitido o avanço em soluções de problemas mais complexos e produzindo soluções para os campos de temperaturas com extensões para parâmetros de interesses práticos, tais como fator de atrito e número de Nusselt.

Para se determinar o campo térmico em um problema de transferência de calor com acoplamento condução-irradiação é necessário resolver simultaneamente a equação da energia e a equação da transferência radiativa (ETR).

A equação da energia e a equação radiativa são de natureza não linear, sujeitas a condições de contorno envolvendo a troca de calor por irradiação e convecção entre o fluido e o meio. Neste trabalho, é feita uma proposta de modelagem matemática para que tanto a equação da energia como a equação da transferência radiativa sejam resolvidas empregando-se a metodologia da GITT apresentada por *Cotta* (1993).

Como o problema físico com acoplamento condução-irradiação apresenta grandes dificuldades tanto do ponto de vista matemático como do ponto de vista computacional, será feito neste trabalho uma análise matemática com o objetivo de entender e verificar o caso que omite e que inclui a irradiação.

Os resultados da modelagem matemática que será proposta neste trabalho serão buscados através do uso da plataforma Fortran e com controle especificado e seguro de erros previstos nas subrotinas do IMSL.

## **1.2 BREVE HISTÓRICO DA DISTRIBUIÇÃO ESPECTRAL DA RADIAÇÃO TÉRMICA**

No final do século XIX havia o problema de como interpretar a energia emitida por irradiação através de um sólido incandescente, a chamada irradiação térmica. Todos os corpos, com temperatura maior que o zero absoluto, emitem esta irradiação. Sabe-se pelas experiências que a coloração dominante da irradiação visível emitida pelo corpo se desloca para frequências mais elevadas à medida que a sua temperatura aumenta. Neste momento, assumiu real interesse para os físicos descreverem a distribuição de energia da irradiação emitida pelo corpo e sua variação com a frequência da irradiação e com a temperatura do corpo.

Para estudar a emissão e absorção de radiação por um objeto, os físicos idealizaram o que se chama de **corpo negro**, um corpo que absorve toda a radiação nele incidente.

A variação da energia irradiada com a temperatura de um objeto era uma lei bem estabelecida, chamada de lei de Stefan-Boltzmann. Esta lei estabelece que a energia total emitida por tempo por uma superfície ( $I_T$ ), à temperatura absoluta  $T$ , é:

$$I_T = \varepsilon \sigma T^4$$

onde  $\sigma$  é a chamada constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ K}^4$ );  $\varepsilon$  é a emissividade da superfície, que depende da natureza da superfície emissora, assumindo valores de 0 a 1 ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ). Para o corpo negro ideal  $\varepsilon = 1$ .

A lei de Stefan-Boltzmann, porém, não relaciona a variação da energia irradiada com as várias frequências da radiação emitida. No início do século XX, Rayleigh e Jeans, usando os conhecimentos da física clássica, encontraram o seguinte resultado:

$$\rho_T(f) = \frac{8\pi \cdot f^2 k_B \cdot T}{c^3}$$

A função  $\rho_T(f)$  mede a densidade de energia irradiada em uma dada frequência  $f$ , quando o corpo negro se encontra a uma temperatura fixa  $T$ . Nessa fórmula,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $k_B$  é a constante de Boltzmann ( $k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ).

A previsão de Rayleigh e Jeans diz que, para uma dada temperatura, a energia aumenta com o quadrado da frequência. Como a energia total é igual a soma sobre todas as frequências de zero até infinito, esta fórmula prevê que a energia irradiada total seria infinita. Quando comparada com os dados empíricos, houve uma discrepância enorme com a previsão teórica. O fato entrou para a História da Física com o nome de catástrofe do ultravioleta, remetendo ao fato de que esse efeito se deve às frequências elevadas. Na figura abaixo podemos visualizar a discordância discutida.

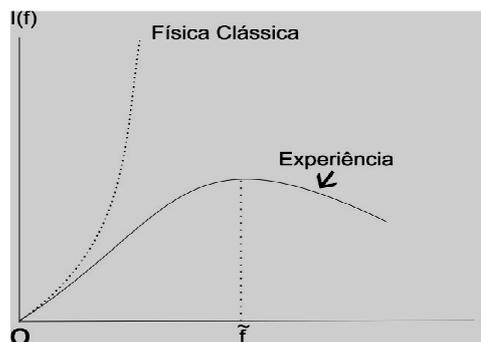


Figura 1.1 – Comparação entre a distribuição espectral prevista pela Física Clássica e a que ocorre por meio das experiências.

Esse problema, juntamente com outros, que não serão aqui mencionados, marcam um período da Física denominado Crise da Física Clássica. A Física Clássica precisaria ser revista por não reproduzir fidedignamente os resultados empíricos, ao contrário, trazia conclusões inaceitáveis.

Ao tentar solucionar o problema da catástrofe do ultravioleta, o físico Max Planck inaugurou uma nova era da física, a física quântica. Na época, contudo, o trabalho de Planck não recebeu muita atenção, foi somente depois da explicação do efeito efeito Compton dada por Arthur Compton e do efeito fotoelétrico dada por Einstein, ambos usando a idéia de Planck, que o trabalho ganhou credibilidade.

Max Planck conseguiu explicar a distribuição de radiação de corpo negro fazendo a hipótese de que a emissão e a absorção de energia eletromagnética não se dão de forma contínua, mas em unidades discretas de uma quantidade mínima  $\Delta E$ . A fim de poder ajustar os dados experimentais com a sua teoria, ele supôs que a quantidade mínima era proporcional à frequência da radiação:  $\Delta E = hf$ . A constante de proporcionalidade  $h$  é a famosa constante de Planck ( $h = 6,626 \times 10^{-34}$  J.s). A partir de sua hipótese, Planck deduziu a seguinte fórmula para a distribuição espectral de energia do corpo negro:

$$\rho_T(f) = \frac{8\pi \cdot h}{c^3} \frac{f^3}{e^{hf/k_B \cdot T} - 1}$$

Essa expressão reproduz perfeitamente o que é observado experimentalmente, além do que também conduz corretamente à Lei de Stefan-Boltzmann. Por meio da figura abaixo podemos verificar que a hipótese de Planck tinha boa validade.

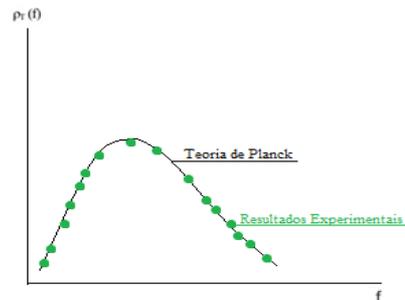


Figura 1.2 – Comparação entre a distribuição espectral prevista pela Teoria de Planck e a que ocorre por meio das experiências.

O gráfico acima reproduz a distribuição espectral da radiação emitida por um corpo negro em todo o espectro eletromagnético. Na faixa do espectro eletromagnético de comprimentos de onda de  $0,1 \mu\text{m}$  a  $100 \mu\text{m}$ , esta radiação é denominada de radiação térmica, que se aplica em grande parte dos problemas de engenharia.

### 1.3 TÉCNICA DE TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é um método híbrido analítico-numérico que serve como uma importante ferramenta na solução de problemas de difusão de calor e massa, pois permite um controle especificado e seguro de erros previstos conforme as necessidades de aplicações dos problemas.

A idéia básica da GITT consiste em transformar um sistema de equações diferenciais parciais original em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias, onde esses podem ser resolvidos de maneira mais simples, e a partir desta solução poder construir a solução do problema original permitindo um controle sobre o erro relativo dos resultados.

Para resolução de problemas utilizando a Técnica de Transformada Integral Generalizada, os seguintes passos sequenciais deverão ser aplicados:

- Escolha de um problema de autovalor auxiliar adequado, que carregue o máximo de informações possíveis do problema original;
- Definição do par transformada-inversa que possibilite a transformação e a ortogonalidade das autofunções;
- Transformação integral da equação diferencial parcial, reduzindo o problema original num sistema infinito e acoplado de equações diferenciais ordinárias;
- Resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas utilizando métodos analíticos ou rotinas numéricas disponíveis, obtendo assim o potencial transformado;
- Uso da fórmula de inversão para obtenção do potencial original.

Além disso, dependendo das dificuldades do problema a ser analisado, pode-se utilizar passos intermediários como o uso de filtros e balanço integral para o melhoramento da performance computacional no uso da GITT.

#### 1.4 FLUIDOS NEWTONIANOS E NÃO-NEWTONIANOS

Os fluidos para os quais a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação são denominados fluidos newtonianos. A constante de proporcionalidade é a viscosidade absoluta do fluido. Valendo-se a equação:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad ; \quad \mu = \text{viscosidade absoluta}$$

Apesar de não existir um fluido perfeitamente newtoniano, em muitos casos práticos a água e ar podem ser aproximados como tais.

Os fluidos para os quais a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação são denominados fluidos não newtonianos. Valendo-se, para muitas aplicações de engenharia, a equação:

$$\tau_{yx} = \Gamma \left( \frac{du}{dy} \right)^{n-1} \frac{du}{dy} = \eta \frac{du}{dy} \quad ; \quad \eta = \text{viscosidade aparente, } \Gamma = \text{índice de consistência}$$

Exemplos típicos de substâncias com comportamentos não-newtonianos são: polímeros, borrachas, plásticos, fibras sintéticas, petróleo, detergente e sabão, alimentos, tintas, etc. São muito utilizados nas indústrias siderúrgica, petroquímica, entre outros.

## 1.5 ESCOPO DO TRABALHO

Esta dissertação é composta de oito capítulos. No Capítulo I, são apresentadas as motivações e os objetivos principais para realização deste trabalho, uma breve discussão sobre a evolução do pensamento científico no que se refere a distribuição espectral da radiação térmica, apresentação da metodologia a ser seguida no uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada e um sucinto comentário sobre fluidos newtonianos e não-newtonianos.

No Capítulo II é feita uma revisão bibliográfica. Primeiramente, é feito um breve levantamento literário sobre os trabalhos que discorrem sobre a convecção forçada laminar na região de entrada térmica de um tubo circular com condução axial no fluido para as várias condições de contorno. Logo em seguida, é feita uma breve revisão bibliográfica à respeito dos problemas com acoplamento condução-radiação com as mais diversas metodologias para a sua solução, destacando alguns trabalhos.

No Capítulo III estuda-se o problema da convecção forçada laminar na região de entrada térmica de um tubo circular com um escoamento tipo pistão, considerando a condução axial no fluido. Desenvolve-se a modelagem matemática para a solução da equação da energia via GITT. Por meio da GITT, a solução analítica exata foi discutida. O campo de temperatura e o número de Nusselt local são avaliados para vários valores do número de Peclet e uma condição de contorno do primeiro tipo.

No Capítulo IV estuda-se o problema da convecção forçada laminar na região de entrada térmica de um tubo circular com um escoamento no modelo lei de potência, considerando a condução axial no fluido. Desenvolve-se a modelagem matemática para a solução da equação da energia via GITT. Por meio da GITT, uma solução analítica aproximada foi discutida. O mesmo problema é resolvido numericamente, e as soluções são comparadas. O campo de temperatura e o número de Nusselt local são avaliados para vários valores do número de Peclet e uma condição de contorno do primeiro tipo.

No Capítulo V é feita a apresentação de um problema físico com acoplamento condução-radiação. As equações e as condições de contorno que governam o problema físico são apresentadas, o acoplamento entre as equações é discutido, bem como desenvolve-se a modelagem matemática para a solução da equação da energia via GITT.

No Capítulo VI desenvolve-se a modelagem matemática para a solução da equação radiativa via GITT para o mesmo problema físico do capítulo anterior. No final deste capítulo é feita uma discussão sobre o cálculo do número de Nusselt a partir dos potenciais de temperatura e radiação já estabelecidos.

No Capítulo VII discute-se sobre os resultados obtidos e apresenta-se sugestões para trabalhos futuros.

No Capítulo VIII têm-se as referências bibliográficas usadas para contextualizar, fundamentar e validar este trabalho.

## CAPÍTULO II

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 PROBLEMAS COM CONDUÇÃO AXIAL EM DUTOS

A convecção forçada laminar na região de entrada térmica de um tubo circular com condução axial no fluido para as várias condições de contorno foi estudada por muitos anos por vários pesquisadores, tanto com tratamento analítico como com tratamento numérico. A seguir será feito uma breve revisão bibliográfica sobre esta temática, destacando alguns trabalhos importantes.

*Hiroyuki, Nagasue* (1981) estudou analiticamente a transferência de calor em um escoamento com fluxo laminar em estado estacionário com condução axial em um tubo circular, com uma temperatura específica na parede (ou fluxo de calor).

*Eleftherios Papoutsakis et al.* (1980) produziram uma solução inteiramente analítica para o problema clássico de Graetz para a condição de contorno de Dirichlet (temperatura do contorno especificada), com base em um formalismo de decomposição da equação de difusão convectiva para um par de equações diferenciais parciais de primeira ordem.

*B.Vick et al.* (1980) usaram uma técnica de transformada integral finita para resolver o problema de transferência de calor com fluxo laminar dentro de um tubo circular com baixo número de Peclet na região de entrada térmica, incluindo os efeitos da condução axial.

*Y. Bayazitoglu e M.N. Özisik* (1980) desenvolveram uma técnica de transformada integral finita para a solução de problemas tipo Graetz com condução axial.

*C. Laohakul et al.* (1985) encontraram duas soluções aproximadas do problema Graetz com condução axial e temperatura de parede especificada, uma para baixos números locais de Peclet e outra para números elevados de Peclet, favoravelmente com as soluções de análise exatas.

*Peter R. Johnston* (1991) estudou o problema de transferência de calor para um plástico Bingham em fluxo laminar num tubo com a condução axial tanto excluída como incluída. Demonstrou que a hipótese de ignorar a condução axial para números locais de Peclet superior a 100 é errônea, especialmente perto do início da zona aquecida do tubo.

*Santos, C.A.C.* (1992) investigou analiticamente a transferência de calor em um escoamento tipo pistão com condução axial no fluido. O trabalho utiliza as idéias da técnica de transformada integral generalizada para fornecer uma solução exata, na forma explícita, para o campo de temperatura de um fluido Newtoniano em escoamento tipo pistão, na região de entrada térmica de um tubo circular.

## **2.2 PROBLEMAS ACOPLADOS COM CONDUÇÃO-RADIAÇÃO EM DUTOS**

Para solucionar os problemas de transferência de calor com acoplamento condução-radiação é necessário resolver simultaneamente duas equações que regem o problema físico: a equação da energia e a equação da transferência radiativa. Para a solução da transferência radiativa vários métodos aproximados foram desenvolvidos, dentre eles: método  $F_N$ , método de Galerkin, método dos harmônicos esféricos, método das ordenadas discretas, método das soluções elementares, método das projeções, método dos elementos finitos, etc. Agora, será feito um breve levantamento literário à respeito dos problemas

acoplados condução-radiação com as mais diversas metodologias para a sua solução, destacando alguns trabalhos.

*Echigo et al.* (1975) apresentam um método analítico para a transferência de calor por convecção e por radiação simultaneamente, com um fluxo laminar totalmente desenvolvido num tubo circular. Usando técnicas de diferenças finitas, os autores examinaram a equação da energia com a transferência de calor por radiação bidimensional.

*Y. Yener e T.M. Fong* (1986) estudaram a interação da radiação e a convecção forçada laminar através de um tubo circular. O fluido foi tratado como cinzento, espalhando isotropicamente e absorvendo a radiação, mas negligenciando a emissão do fluido. A condução axial e a radiação axial foram desprezadas na modelagem do problema. A equação da energia foi desenvolvida na forma da série de Fourier e a equação radiativa foi analisada pelo método  $F_N$ .

*J.R. Tsai e M.N. Özisik* (1989) analisaram a interação da radiação e a convecção forçada laminar através de um tubo circular de um fluido não-newtoniano, que absorve, emite e espalha a radiação isotropicamente. O perfil de velocidade foi completamente desenvolvido, estabelecido por meio do modelo da lei de potência. A equação da energia foi resolvida por um método implícito de diferenças finitas, enquanto a parte da radiação do problema foi resolvida pelo método de colocação. O número de Nusselt local ao longo do tubo foi analisado para o caso da lei de potência quando  $n = 1/3, 1$  e  $3$ , em que o caso em que  $n = 1$  corresponde ao fluido newtoniano.

*G. Yang e M.A. Ebadian* (1991) investigaram a combinada convecção forçada laminar e radiação térmica na região de entrada térmica de um tubo circular com condução de calor axial e radiação térmica. O método dos momentos foi aplicado para modelar o processo de transporte de calor por radiação. As equações governantes foram resolvidas através da aplicação do algoritmo SIMPLE de Pantakar. Os efeitos do número de Peclet e sua interação com o parâmetro condução-radiação e espessura óptica na transferência de calor na região de entrada térmica foram investigados.

*Götz* (2002) estudou a transferência de calor transiente para o acoplamento condução-radiação num meio cilíndrico semitransparente de comprimento infinito. A equação da transferência radiativa foi resolvida pela técnica “Ray-Tracing”, e a equação da energia foi resolvida por um método implícito de diferenças finitas.

*Viskanta e Lim* (2002) estudaram a transferência de calor transiente para o acoplamento condução-radiação num corpo cilíndrico de comprimento finito. A equação da transferência radiativa foi resolvida pelo Método das Ordenadas Discretas, e a equação da energia foi resolvida numericamente pelo Método de Volumes finitos.

Toda a complexidade no tratamento dos problemas de transferência de calor com acoplamento condução-radiação se dá pelo fato do problema ser não linear. Para que um problema seja não linear é necessário que a equação que o represente e/ ou suas condições de contorno sejam não-lineares. Pelo fato de não existir uma teoria matemática genérica para solucionar os problemas de equações diferenciais não-lineares, as quais são geralmente de resolução analítica difícil ou mesmo impossível, cada caso deve ser analisado individualmente buscando a solução através de simplificações ou algum método numérico existente.

## CAPÍTULO III

### ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DA CONVECÇÃO LAMINAR COM CONDUÇÃO AXIAL E PERFIL UNIFORME DE VELOCIDADE

#### 3.1 PROBLEMA FÍSICO

Pode-se perceber na figura 3.1 o problema a ser estudado, que representa um escoamento uniforme, tipo pistão, completamente desenvolvido em um tubo circular, sujeito as condições de contorno do 1º tipo (condição de Dirichlet, pois a temperatura do contorno é especificada) e do 2º tipo (condição de Neumann, devido a simetria do perfil). A condição de entrada do problema garante que o fluido escoante está com uma temperatura  $T_e$ . Considera-se que as paredes do tubo se mantêm com uma temperatura  $T_w$ . No infinito, ao longo da linha de escoamento, o fluido entrará em equilíbrio térmico com as paredes do tubo circular.

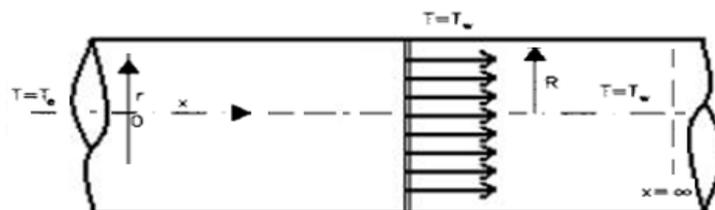


Figura 3.1 - Ilustração do problema

### 3.2 MODELAMENTO MATEMÁTICO

Deseja-se determinar a distribuição de temperatura do fluido ao longo do tubo circular. Levando-se em conta o problema acoplado condução-convecção de transferência de calor mencionado, considerando-se constantes as propriedades de difusividade e condutividade térmicas do fluido, adotando-se as condições de contorno de 1<sup>o</sup> e 2<sup>a</sup> espécie, bem como as condições de entrada e saída prescritas, o modelamento matemático para um escoamento pistão completamente desenvolvido no interior do tubo mostrado na figura 3.1 pode ser escrito da seguinte forma:

#### Equação principal

$$\rho C_p u(r) \frac{\partial T(x, r)}{\partial x} = \kappa \left[ \frac{\partial^2 T(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(x, r)}{\partial r} \right) \right]; \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq R \quad (3.1a)$$

onde:  $u(r) = u_m$  é o campo de velocidade para um escoamento laminar tipo pistão completamente desenvolvido em um duto, sendo  $u_m$  a velocidade média de escoamento.

Organizando os termos da equação (3.1a), encontramos:

$$\frac{u(r)}{\alpha} \frac{\partial T(x, r)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(x, r)}{\partial r} \right); \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq R \quad (3.1b)$$

onde:  $\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p}$  é a difusividade térmica do fluido, sendo  $\kappa$  a condutividade térmica,  $\rho$  a

massa específica e  $C_p$  o calor específico a pressão constante.

### Condições de contorno

$$\frac{\partial T(x,r)}{\partial r} = 0 ; \quad r=0 \quad \text{e} \quad x > 0 \quad (3.1c)$$

$$T(x,r) = T_w ; \quad x > 0 \quad \text{e} \quad r = R \quad (3.1d)$$

### Condição de entrada

$$T(x,r) = T_e ; \quad x=0 \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq R \quad (3.1e)$$

### Condição de saída

$$T(x,r) = T_w ; \quad x = \infty \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq R \quad (3.1f)$$

## 3.3 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Para a análise do problema foram definidos os seguintes parâmetros adimensionais, dados pelas equações (3.2a-h), com o objetivo de se resolver não só um problema particular, mas uma classe de problemas que sejam definidos pelo mesmo modelo proposto

$$X = \frac{\alpha \cdot x}{D_h^2 \cdot u_m} \quad \zeta = \frac{r}{R} \quad u(\zeta) = \frac{u(r)}{u_m} = 1 \quad Bi = \frac{hR}{\kappa} \quad (3.2a-d)$$

$$\Theta(X, \zeta) = \frac{T(x,r) - T_w}{T_e - T_w} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad Re_h = \frac{D_h \cdot u_m}{\nu} \quad Pe = Re_h \cdot Pr = \frac{D_h u_m}{\alpha} \quad (3.2e-h)$$

Onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $D_h = 2R$  é o diâmetro do tubo circular, e  $Pr$ ,  $Re_h$  e  $P_e$  são, respectivamente, os números de Prandtl, Reynolds hidráulico e Peclet.

Substituindo os parâmetros adimensionais na equação (3.1b), encontramos a equação principal na forma adimensionalizada:

$$\frac{\zeta}{4} \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial X} = \frac{\zeta}{4P_e^2} \frac{\partial^2 \Theta(X, \zeta)}{\partial X^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \right]; \quad X > 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (3.3a)$$

Analogamente, pode-se escrever as condições de contorno, a condição de entrada e a condição de saída na forma adimensionalizada:

$$\frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} = 0; \quad \zeta = 0 \quad \text{e} \quad X > 0 \quad (3.3b)$$

$$\Theta(X, \zeta) = 0; \quad \zeta = 1 \quad \text{e} \quad X > 0 \quad (3.3c)$$

$$\Theta(X, \zeta) = 1, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad X = 0 \quad (3.3d)$$

$$\Theta(X, \zeta) = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad X = \infty \quad (3.3e)$$

### 3.4 PROBLEMA AUXILIAR DE AUTOVALOR NA DIREÇÃO RADIAL

O problema auxiliar para o campo de temperatura, pelo fato do problema original ser descrito por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, recai sobre o problema típico de Sturm-Liouville, que tem solução analítica discutida por (*Özişik, 1993*).

O problema auxiliar escolhido para a determinação do campo de temperatura é escrito da seguinte forma:

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) + \mu_i^2 \Psi_i(\mu_i, \zeta) = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 ; \quad \zeta = 0 \quad \text{e} \quad \mu_i > 0 \quad (3.4b)$$

$$\Psi_i(\mu_i, \zeta) = 0 ; \quad \zeta = 1 \quad \text{e} \quad \mu_i > 0 \quad (3.4c)$$

Para este caso as equações descritas acima têm solução analítica clássica, por se tratar da equação diferencial de Bessel. Portanto, as autofunções  $[\Psi_i(\mu_i, \zeta)]$  assumem a forma:

$$\Psi_i(\mu_i, \zeta) = J_0(\mu_i \zeta) \quad (3.5)$$

Os autovalores ( $\mu_i$ 's) são as raízes das equações transcendentais:

$$J_0(\mu_i) = 0 \quad (3.6a)$$

As normas das autofunções podem ser calculadas pela expressão:

$$N_i = \int_0^1 \zeta \cdot \Psi_i^2(\mu_i, \zeta) d\zeta \quad (3.6b)$$

Ou ainda:

$$N_i = \frac{1}{2} [J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i)] \quad (3.6c)$$

As autofunções normalizadas podem ser encontradas por meio da equação:

$$\tilde{\Psi}_i(\mu_i, \zeta) = \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} \quad (3.6d)$$

Vale salientar que as funções de Bessel obedecem ao princípio da ortogonalidade. De modo que:

$$\int_0^1 \zeta \cdot \tilde{\Psi}_i(\mu_i, \zeta) \tilde{\Psi}_j(\mu_j, \zeta) d\zeta = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (3.7)$$

No presente trabalho utiliza-se o método da contagem de sinal para a determinação dos autovalores ( $\mu_i$ ), das autofunções,  $\Psi(\mu_i, \zeta)$ , e das normas ( $N_i$ ). O método da contagem de sinal foi implementado no código computacional na plataforma Fortran INTEL para a solução do problema de autovalor associado.

### 3.5 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO DE TEMPERATURA

O par transformada integral definido para este problema é dado por:

$$\bar{\Theta}_i(X) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \cdot \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta(X, \zeta) d\zeta, \quad \text{Transformada} \quad (3.8a)$$

$$\Theta(X, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta) \bar{\Theta}_i(X)}{N_i^{1/2}}, \quad \text{Inversa} \quad (3.8b)$$

Operando a equação (3.3a) por  $\int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , nos faz encontrar:

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dX} \left[ \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta(X, \zeta) d\zeta \right] = \frac{1}{4P_e^2} \frac{d^2}{dX^2} \left[ \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta(X, \zeta) d\zeta \right] + \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \Psi_i(\mu_i, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \right] d\zeta \quad (3.9a)$$

Usando a definição da transformada, segue que:

$$\frac{1}{4} \frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = \frac{1}{4P_e^2} \frac{d^2\bar{\Theta}_i(X)}{dX^2} + \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \Psi_i(\mu_i, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \right] d\zeta \quad (3.9b)$$

Da equação do problema auxiliar, temos que:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) + \zeta \cdot \mu_i^2 \Psi_i(\mu_i, \zeta) = 0 \quad (3.9c)$$

Operando a equação (3.9c) por  $\int_0^1 \frac{\Theta(X, \varsigma)}{N_i^{1/2}} d\varsigma$ , segue que:

$$\int_0^1 \frac{\Theta(X, \varsigma)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) d\varsigma + \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0 \quad (3.9d)$$

Somando a equação (3.9d) com a equação (3.9b), encontra-se que:

$$\frac{1}{4} \frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = \frac{1}{4P_e^2} \frac{d^2\bar{\Theta}_i(X)}{dX^2} - \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{1}{N_i^{1/2}} \left\{ \int_0^1 \left[ \Psi_i(\mu_i, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \Theta(X, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) - \Theta(X, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) \right] d\varsigma \right\} \quad (3.9e)$$

Integrando por partes o último termo do lado direito, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_i^{1/2}} \left\{ \int_0^1 \left[ \Psi_i(\mu_i, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \Theta(X, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) - \Theta(X, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) \right] d\varsigma \right\} = \\ \frac{1}{N_i^{1/2}} \left( \Psi_i(\mu_i, \varsigma) \varsigma \frac{\partial \Theta(X, \varsigma)}{\partial \varsigma} \Big|_0^1 - \int_0^1 \varsigma \frac{\partial \Theta(X, \varsigma)}{\partial \varsigma} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) + \\ - \frac{1}{N_i^{1/2}} \left( \Theta(X, \varsigma) \varsigma \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \Big|_0^1 - \int_0^1 \varsigma \frac{\partial \Theta(X, \varsigma)}{\partial \varsigma} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) \end{aligned} \quad (3.9f)$$

Organizando os termos, usando a definição da inversa e utilizando que  $\frac{\partial \Theta(X, 0)}{\partial \varsigma} = 0$

(3.3b),  $\Theta(X, 1) = 0$  (3.3d),  $\frac{\partial \Psi_i(\mu_i, 0)}{\partial \varsigma} = 0$  (3.4b) e  $\Psi_i(\mu_i, 1) = 0$  (3.4c), resta que:

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \left\{ \int_0^1 \left[ \Psi_i(\mu_i, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \Theta(X, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) - \Theta(X, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) \right] d\varsigma \right\} = 0 \quad (3.9g)$$

Logo, a equação (3.9e) torna-se:

$$\frac{d^2 \bar{\Theta}_i(X)}{dX^2} - P_e^2 \frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} - 4P_e^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0 \quad (3.9h)$$

Como a equação (3.9h) se trata de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, homogênea e com coeficientes constantes, têm solução analítica clássica. Fazendo  $\bar{\Theta}_i(X) = e^{m \cdot X}$ , a equação característica assume a forma:

$$m^2 - P_e^2 m - 4P_e^2 \mu_i^2 = 0 \quad (3.9i)$$

As soluções da equação característica são:

$$m_1 = \frac{P_e^2}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16\mu_i^2}{P_e^2}} \right] \quad (3.9j)$$

$$m_2 = \frac{P_e^2}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{16\mu_i^2}{P_e^2}} \right] \quad (3.9k)$$

Logo, a solução geral da equação (3.9h) assume a forma:

$$\bar{\Theta}_i(X) = C_1 \cdot e^{m_1 X} + C_2 \cdot e^{m_2 X} \quad (3.9l)$$

Onde  $m_1$  e  $m_2$  são dados pelas equações (3.9j) e (3.9k), respectivamente. As constantes  $C_1$  e  $C_2$  serão obtidas no atendimento das condições de contorno, para a obtenção da solução particular da equação diferencial.

### 3.6 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DA CONDIÇÃO DE ENTRADA

Operando a equação (3.3d) por  $\int_0^1 \zeta \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , obtém-se:

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \cdot \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta_i(X, \zeta) d\zeta = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \cdot \Psi_i(\mu_i, \zeta) \cdot 1 d\zeta \quad (3.10a)$$

o lado esquerdo da equação (3.10a) representa a transformada, dada pela equação (3.8a), logo:

$$\bar{\Theta}_i(0) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \cdot \Psi_i(\mu_i, \zeta) d\zeta \quad (3.10b)$$

Da equação do problema auxiliar, temos que:

$$\zeta \cdot \Psi_i(\mu_i, \zeta) = -\frac{1}{\mu_i^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) \quad (3.10c)$$

Logo:

$$\int_0^1 \zeta \cdot \Psi_i(\mu_i, \zeta) d\zeta = -\frac{1}{\mu_i^2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) d\zeta = -\frac{1}{\mu_i^2} \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_0^1 \quad (3.10d)$$

Portanto:

$$\bar{\Theta}_i(0) = -\frac{1}{\mu_i^2 N_i^{1/2}} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, 1)}{\partial \zeta} = \bar{f}_i \quad (3.10e)$$

### 3.7 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DA CONDIÇÃO DE SAÍDA

Operando a equação (3.3e) por  $\int_0^1 \zeta \cdot \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , obtém-se:

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \cdot \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta_i(X, \zeta) d\zeta = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \cdot \Psi_i(\mu_i, \zeta) \cdot 0 \cdot d\zeta \quad (3.11a)$$

o lado esquerdo da equação (3.11a) representa a transformada, dada pela equação (3.8a),

logo:

$$\bar{\Theta}_i(\infty) = 0 \quad (3.11b)$$

### 3.8 CÁLCULO DO POTENCIAL DE TEMPERATURA TRANSFORMADA

A solução particular, de nosso interesse, da equação principal (3.9i) torna-se possível com o uso concomitante das condições de entrada e de saída, dadas pelas equações (3.10e) e (3.11b), respectivamente.

Aplicando a condição de entrada em (3.9i), verifica-se que:

$$\bar{\Theta}_i(0) = C_1 + C_2 = \bar{f}_i \quad (3.12a)$$

Aplicando a condição de saída em (3.9l), verifica-se que:

$$\bar{\Theta}_i(\infty) = C_1 \cdot e^{m_1 \infty} + C_2 \cdot e^{m_2 \infty} = 0 \quad (3.12b)$$

Para a equação (3.12b) ser satisfeita é necessário que  $C_1 = 0$ , uma vez  $m_1$  é um valor estritamente crescente. Retornando a equação (3.12a), concluímos que  $C_2 = \bar{f}_i$ . Logo a solução particular do potencial de temperatura transformada assume a forma:

$$\bar{\Theta}_i(X) = \bar{f}_i \cdot e^{m_2 X} \quad (3.12c)$$

A partir desta solução, utilizaremos a fórmula da inversa (eq. 3.8b) para encontrar a solução geral do problema físico proposto.

### 3.9 CÁLCULO DO CAMPO DE TEMPERATURA

Fazendo agora uso da fórmula da inversa, dada pela equação (3.8b), podemos obter o campo de temperatura para a região de entrada térmica na seguinte forma:

$$\Theta_i(X, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_i \zeta) \cdot \bar{f}_i \cdot e^{m_2 X}}{\left\{ \frac{1}{2} [J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i)] \right\}^{1/2}} \quad (3.13)$$

### 3.10 CÁLCULO DA TEMPERATURA MÉDIA ADIMENSIONAL

Segundo MIKHAILOV e ÖSIZIK, a temperatura média no tubo circular, em coordenadas cilíndricas, pode ser calculada por meio da expressão:

$$\Theta(X)_{m\acute{e}dia} = \frac{\int_0^1 \zeta \cdot \Theta(X, \zeta) d\zeta}{\int_0^1 \zeta \cdot d\zeta} \quad (3.14a)$$

Substituindo a expressão de  $\Theta(X, \zeta)$ , verifica-se que:

$$\Theta(X)_{m\acute{e}dia} = 2 \cdot \int_0^1 \zeta \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_i \zeta) \cdot \bar{f}_i \cdot e^{m_2 X}}{\left\{ \frac{1}{2} [J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i)] \right\}^{1/2}} d\zeta \quad (3.14b)$$

Organizando os termos, encontramos:

$$\Theta(X)_{m\acute{e}dia} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \bar{f}_i \cdot e^{m_2 X} \int_0^1 \frac{\zeta \cdot J_0(\mu_i \zeta)}{\left\{ \frac{1}{2} [J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i)] \right\}^{1/2}} d\zeta \quad (3.14c)$$

Que pode ser reescrito na forma:

$$\Theta(X)_{m\acute{e}dia} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \bar{f}_i \cdot e^{m_2 X} \int_0^1 \frac{\zeta \cdot \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta \quad (3.14d)$$

Logo, usando as equações (3.10b) e (3.10e), concluimos que:

$$\Theta(X)_{m\acute{e}dia} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \bar{f}_i^2 \cdot e^{m_2 X} \quad (3.14e)$$

### 3.11 CÁLCULO DO NÚMERO DE NUSSELT LOCAL

Uma vez conhecida as expressões para  $\Theta(X, \zeta)$  e  $\Theta(X)_{média}$ , podemos calcular o número de Nusselt por meio da expressão:

$$Nu(X) = -\frac{2}{\Theta(X)_{média} - \Theta_{parede}(X)} \left. \frac{d\Theta(X, \zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} \quad (3.15)$$

onde  $\Theta_{parede}(X)$  representa a temperatura adimensional ao longo da parede do tubo.

### 3.12 RESULTADOS OBTIDOS

O tratamento analítico deste problema foi discutido por *Santos, C.A.C.* (1992). Neste capítulo do presente trabalho este mesmo problema também foi resolvido numericamente, onde utilizou-se um código em Fortran para a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias, com o uso da subrotina DBVPFD do IMSL. O objetivo é comparar os resultados, validando o bom manuseio desta subrotina para o seu uso em problemas posteriores.

#### 3.12.1 Análise de Convergência

Aqui, a convergência dos resultados foi analisada para a solução analítica exata. A mesma deve ser analisada sob o aspecto do número de autovalores ( $N_T$ ) que define a ordem de truncamento das séries de autofunções. A análise da convergência foi feita considerando um caso de pequena influência da condução axial no processo interno de transferência de

calor (grande Peclet). Para um Peclet especificado, os resultados são apresentados logo abaixo, onde pode ser feita uma análise quanto a qualidade obtida em termos de convergência:

<b>Número de Nusselt local - Nu</b>							
Pe = 100							
<i>X</i>	<b>N<sub>T</sub> = 5</b>	<b>N<sub>T</sub> = 10</b>	<b>N<sub>T</sub> = 15</b>	<b>N<sub>T</sub> = 20</b>	<b>N<sub>T</sub> = 25</b>	<b>N<sub>T</sub> = 30</b>	<b>N<sub>T</sub> = 35</b>
0.0010	16,98703	20,55380	20,89867	20,92131	20,92256	20,92263	20,92263
0.0015	15,36640	17,02758	17,07942	17,08031	17,08032	17,08032	17,08032
0.0020	14,07649	14,88966	14,89798	14,89801	14,89801	14,89801	14,89801
0.050	5,81917	5,81917	5,81917	5,81917	5,81917	5,81917	5,81917
0.100	5,78345	5,78345	5,78345	5,78345	5,78345	5,78345	5,78345
0.200	5,78318	5,78318	5,78318	5,78318	5,78318	5,78318	5,78318
0.400	5,78318	5,78318	5,78318	5,78318	5,78318	5,78318	5,78318

Tabela 1.1 : Convergência do número de Nusselt local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade tipo pistão.

Com base nos resultados apresentados na tabela acima, pode-se considerar que a metodologia de resolução usada neste trabalho, apresenta forte estabilidade e baixo custo computacional. Além disso, fica estabelecida que a convergência com cinco algoritmos significativos para os pontos escolhidos ocorre para os valores de  $N_T=30$ .

### **3.12.2 Efeito do Peclet**

O número de Peclet representa a relação entre a energia convectada e a energia conduzida axialmente no fluido. Quando o Peclet é grande, significa que a contribuição da convecção no escoamento se torna mais relevante em relação a condução axial. Da mesma forma, se o Peclet é pequeno, significa que a contribuição da convecção no escoamento se torna pouco relevante em relação a condução axial, sinalizando a efetiva importância da condução axial .

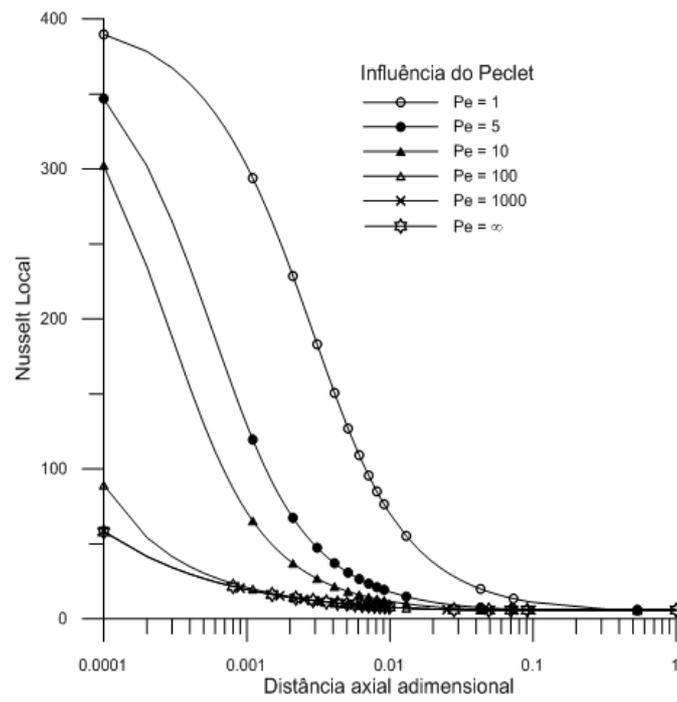


Figura 3.2 : Nussel local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo pistão.

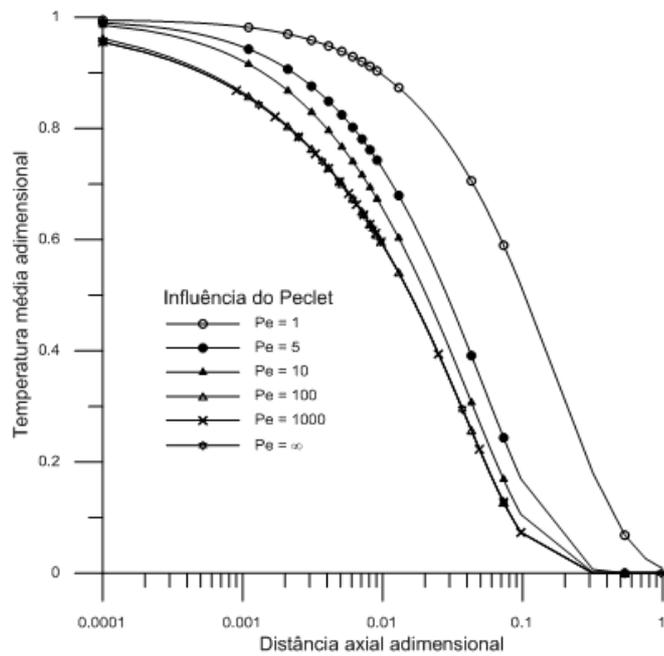


Figura 3.3 : Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo pistão.

As curvas acima mostram que para diferentes valores de Peclet, os resultados são bastante diferentes. Para os gráficos acima foram usados 100 autovalores e 100 autofunções correspondentes.

A Figura 3.2 mostra os resultados do número de Nusselt local em função da distância axial adimensional. Pode-se perceber que o número de Nusselt local decresce com o aumento do número de Peclet. Quando o Peclet é muito grande, a curva recai assintoticamente para a solução clássica do problema de Graetz com perfil de velocidade uniforme, onde a condução axial é negligenciada. Para o problema de Graetz:  $Nu(x \rightarrow \infty) = 5,783$ , em conformidade com o trabalho apresentado.

O que acontece na figura 3.2 pode ser compreendido tendo-se em vista que o número de Nusselt representa a relação entre a energia convectada e a energia conduzida radialmente (transversalmente) no fluido. Pela equação (3.2h) percebemos que o número de Peclet, uma vez que o diâmetro do tubo e a difusividade térmica são constantes, é proporcional a velocidade média de escoamento do fluido. Quanto mais rápido o fluido passar (maior Peclet), maior será a energia conduzida radialmente, diminuindo o valor do número de Nusselt.

A Figura 3.3 mostra os resultados obtidos para a temperatura média global em função da distância axial adimensional, para vários valores do número de Peclet. Pode-se perceber que quanto menor o valor do Peclet (condução axial significativa) mais a temperatura média global cai lentamente com a distância axial adimensionalizada, apesar do fluido se deslocar com menor velocidade média.

### 3.12.3 Comparação entre a solução analítica exata e a solução numérica

Com o uso da subrotina DBVPFD do IMSL, o sistema de equações diferenciais ordinárias foi resolvido. Usando 20 autovalores e 20 autofunções, podemos comparar as soluções através do gráfico que segue:

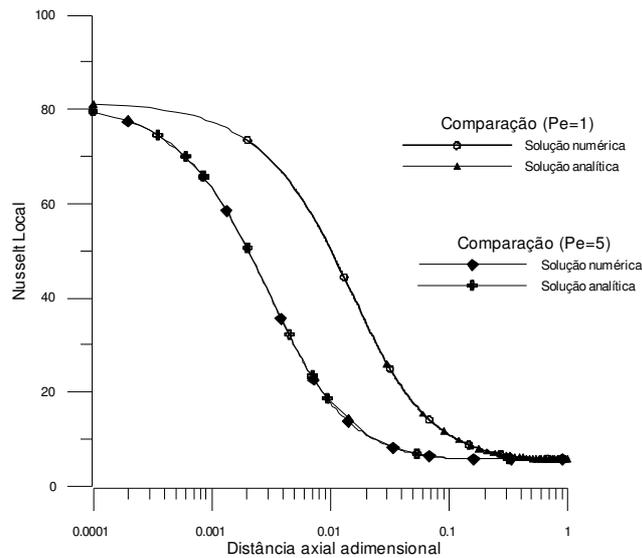


Figura 3.4 : Comparação da solução analítica e numérica para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo pistão.

Por meio do gráfico acima podemos perceber que a curva que melhor passa por pontos escolhidos na solução analítica se superpõe a curva que melhor passa por pontos escolhidos na solução numérica, o que não devia ser diferente, uma vez que a solução analítica discutida é exata. Vale salientar, também, que a solução numérica requer um tempo computacional de convergência bem superior quando comparada com a solução analítica.

## CAPÍTULO IV

### ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DA CONVECCÃO LAMINAR COM CONDUÇÃO AXIAL E PERFIL DE VELOCIDADE NO MODELO LEI DE POTÊNCIA

#### 4.1 PROBLEMA FÍSICO

Na figura 4.1 pode-se perceber o problema a ser estudado, que representa um escoamento no modelo de lei de potência completamente desenvolvido em um tubo circular, sujeito as condições de contorno do 1º tipo e do 2º tipo. A condição de entrada garante que o fluido em escoamento está a uma temperatura  $T_e$ , analogamente ao caso discutido no capítulo anterior. Também considera-se que as paredes do tubo se mantenham com uma temperatura  $T_w$ . Além da região de entrada térmica, o fluido entrará em equilíbrio térmico com as paredes do tubo circular.

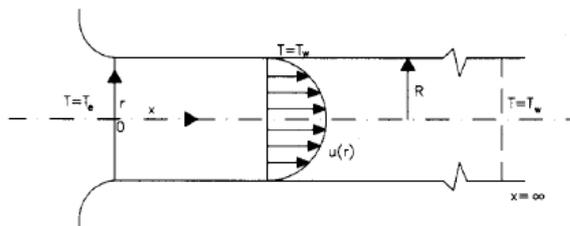


Figura 4.1 - Ilustração do problema

## 4.2 MODELAMENTO MATEMÁTICO

Deseja-se, mais uma vez, determinar a distribuição de temperatura do fluido ao longo do tubo circular. A modelagem que será proposta pode ser aplicada a fluidos newtonianos e não-newtonianos. Levando-se em conta o problema acoplado condução-convecção de transferência de calor mencionado, considerando-se constantes as propriedades térmicas do fluido, adotando-se a prescrição das condições de contorno, de entrada e de saída, o modelamento matemático para um escoamento no modelo lei de potência completamente desenvolvido no interior do tubo mostrado na figura 4.1 pode ser escrito da seguinte forma:

### Equação principal

$$\rho C_p u(r) \frac{\partial T(x, r)}{\partial x} = \kappa \left[ \frac{\partial^2 T(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(x, r)}{\partial r} \right) \right]; \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq R \quad (4.1a)$$

onde:  $u(r) = \frac{1+3n}{1+n} u_m \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right]$  é o campo de velocidade para um escoamento laminar,

no modelo lei de potência, completamente desenvolvido de um fluido não-newtoniano em um tubo circular. Sendo  $u_m$  a velocidade média de escoamento e  $R$  o raio do tubo circular. Sendo  $n=1$  o fluido será newtoniano e o perfil de velocidade assume o modelo parabólico. Caso  $1 < n < \infty$  o fluido será não-newtoniano do tipo dilatante, e se  $0 < n < 1$  o fluido será não-newtoniano do tipo pseudoplástico.

Organizando os termos da equação (4.1a), encontramos:

$$\frac{u(r)}{\alpha} \frac{\partial T(x, r)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(x, r)}{\partial r} \right); \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq R \quad (4.1b)$$

onde:  $\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p}$  é a difusividade térmica do fluido, sendo  $\kappa$  a condutividade térmica,  $\rho$  a

massa específica e  $C_p$  o calor específico a pressão constante.

### Condições de contorno

$$\frac{\partial T(x, r)}{\partial r} = 0; \quad r = 0 \quad \text{e} \quad x > 0 \quad (4.1c)$$

$$T(x, r) = T_w; \quad x > 0 \quad \text{e} \quad r = R \quad (4.1d)$$

### Condição de entrada

$$T(x, r) = T_e; \quad x = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq R \quad (4.1e)$$

### Condição de saída

$$T(x, r) = T_w; \quad x = \infty \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq R \quad (4.1f)$$

### 4.3 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Define-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$X = \frac{\alpha \cdot x}{D_h^2 \cdot u_m} \quad \zeta = \frac{r}{R} \quad u(\zeta) = \frac{u(r)}{u_m} = \frac{1+3n}{1+n} \left(1 - \zeta^{\frac{1+n}{n}}\right) \quad Bi = \frac{hR}{\kappa} \quad (4.2a-d)$$

$$\Theta(X, \zeta) = \frac{T(x, r) - T_w}{T_e - T_w} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad Re_h = \frac{D_h \cdot u_m}{\nu} \quad P_e = Re_h \cdot Pr = \frac{D_h u_m}{\alpha} \quad (4.2e-h)$$

Onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $D_h = 2R$  é o diâmetro do tubo circular, e  $Pr$ ,  $Re_h$  e  $P_e$  são, respectivamente, os números de Prandtl, Reynolds hidráulico e Peclet.

Substituindo os parâmetros adimensionais na equação (4.1b), encontramos a equação principal na forma adimensionalizada:

$$u(\zeta) \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial X} = \frac{1}{P_e^2} \frac{\partial^2 \Theta(X, \zeta)}{\partial X^2} + \frac{4}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \right]; \quad X \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (4.3a)$$

Pode-se, também, escrever as condições de contorno, a condição de entrada e a condição de saída na forma adimensionalizada:

$$\frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} = 0; \quad \zeta = 0 \quad \text{e} \quad X > 0 \quad (4.3b)$$

$$\Theta(X, \zeta) = 0 ; \quad \zeta = 1 \text{ e } X > 0 \quad (4.3c)$$

$$\Theta(X, \zeta) = 1, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad X = 0 \quad (4.3d)$$

$$\Theta(X, \zeta) = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad X = \infty \quad (4.3e)$$

#### 4.4 PROBLEMA AUXILIAR DE AUTOVALOR NA DIREÇÃO RADIAL

O problema auxiliar escolhido para a determinação do campo de temperatura assume a forma:

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) + \mu_i^2 u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 ; \quad \zeta = 0 \text{ e } \mu_i > 0 \quad (4.4b)$$

$$\Psi_i(\mu_i, \zeta) = 0 ; \quad \zeta = 1 \text{ e } \mu_i > 0 \quad (4.4c)$$

No presente trabalho utiliza-se, mais uma vez, o método da contagem de sinal para a determinação dos autovalores ( $\mu_i$ ), das autofunções,  $\Psi(\mu_i, \zeta)$ , e das normas ( $N_i$ ), implementado no código computacional na plataforma Fortran INTEL.

## 4.5 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO DE TEMPERATURA

O par transformada integral definido para este problema é dado por:

$$\bar{\Theta}_i(X) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \cdot u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta(X, \zeta) d\zeta, \quad \text{Transformada} \quad (4.5a)$$

$$\Theta(X, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta) \bar{\Theta}(X)}{N_i^{1/2}}, \quad \text{Inversa} \quad (4.5b)$$

Operando a equação (4.3a) por  $\int_0^1 \zeta \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , nos faz encontrar:

$$\frac{d}{dX} \left[ \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta(X, \zeta) d\zeta \right] = \frac{1}{P_e^2} \frac{d^2}{dX^2} \left[ \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta(X, \zeta) d\zeta \right] + \frac{4}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \Psi_i(\mu_i, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \right] d\zeta \quad (4.6a)$$

Identificando a transformada e usando a definição da inversa, segue que:

$$\frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = \frac{1}{P_e^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Theta}_k(X)}{dX^2} \frac{1}{N_i^{1/2} N_k^{1/2}} \int_0^1 \zeta \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Psi_k(\mu_k, \zeta) d\zeta + \frac{4}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \Psi_i(\mu_i, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \right] d\zeta \quad (4.6b)$$

Fazendo:  $A_{ik} = \frac{1}{N_i^{1/2} N_k^{1/2}} \int_0^1 \zeta \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Psi_k(\mu_k, \zeta) d\zeta$ , temos que:

$$\frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = \frac{1}{P_e^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Theta}_k(X)}{dX^2} A_{ik} + \frac{4}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \Psi_i(\mu_i, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \right] d\zeta \quad (4.6c)$$

Da equação do problema auxiliar, temos que:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) + \zeta \mu_i^2 u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) = 0 \quad (4.6d)$$

Operando a equação (4.6d) por  $4 \int_0^1 \frac{\Theta(X, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , segue que:

$$4 \int_0^1 \frac{\Theta(X, \zeta)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) d\zeta + 4 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0 \quad (4.6e)$$

Somando a equação (4.6e) com a equação (4.6c), encontra-se que:

$$\frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = \frac{1}{P_e^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Theta}_k(X)}{dX^2} A_{ik} - 4 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{4}{N_i^{1/2}} \left\{ \int_0^1 \left[ \Psi_i(\mu_i, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \right) - \Theta(X, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) \right] d\zeta \right\} \quad (4.6f)$$

Integrando por partes o último termo do lado direito, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{4}{N_i^{1/2}} \left\{ \int_0^1 \left[ \Psi_i(\mu_i, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \right) - \Theta(X, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) \right] d\zeta \right\} = \\ = \frac{4}{N_i^{1/2}} \left( \Psi_i(\mu_i, \zeta) \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_0^1 - \int_0^1 \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) + \\ - \frac{4}{N_i^{1/2}} \left( \Theta(X, \zeta) \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_0^1 - \int_0^1 \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (4.6g)$$

Organizando os termos, utilizando que  $\frac{\partial \Theta(X,0)}{\partial \zeta} = 0$  (4.3b),  $\Theta(X,1) = 0$  (4.3c),

$\frac{\partial \Psi_i(\mu_i,0)}{\partial \zeta} = 0$  (4.4b) e  $\Psi_i(\mu_i,1) = 0$  (4.4c), resta que:

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \left\{ \int_0^1 \left[ \Psi_i(\mu_i, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} \right) - \Theta(X, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) \right] d\zeta \right\} = 0 \quad (4.6h)$$

Logo, a equação (4.6f) torna-se:

$$\frac{1}{P_e^2} \sum_{k=0}^{\infty} A_{ik} \frac{d^2 \bar{\Theta}_k(X)}{dX^2} - \frac{d \bar{\Theta}_i(X)}{dX} - 4\mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0 \quad (4.6i)$$

Onde:

$$A_{ik} = \frac{1}{N_i^{1/2} N_k^{1/2}} \int_0^1 \zeta \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Psi_k(\mu_k, \zeta) d\zeta \quad (4.6j)$$

## 4.6 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DA CONDIÇÃO DE ENTRADA

Operando a equação (4.3d) por  $\int_0^1 \zeta u(\zeta) \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , obtém-se:

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta_i(X, \zeta) d\zeta = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \cdot 1 \cdot d\zeta \quad (4.7a)$$

o lado esquerdo da equação (4.7a) representa a transformada, dada pela equação (4.5a),

logo:

$$\bar{\Theta}_i(0) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) d\zeta \quad (4.7b)$$

Da equação do problema auxiliar, temos que:

$$\zeta u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) = -\frac{1}{\mu_i^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) \quad (4.7c)$$

Logo:

$$\int_0^1 \zeta u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) d\zeta = -\frac{1}{\mu_i^2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) d\zeta = -\frac{1}{\mu_i^2} \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_0^1 \quad (4.7d)$$

Portanto:

$$\bar{\Theta}_i(0) = -\frac{1}{\mu_i^2 N_i^{1/2}} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, 1)}{\partial \zeta} \Big|_1 = \bar{f}_i \quad (4.7e)$$

#### 4.7 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DA CONDIÇÃO DE SAÍDA

Operando a equação (4.3e) por  $\int_0^1 \zeta u(\zeta) \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , obtém-se:

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta_i(X, \zeta) d\zeta = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \cdot 0 d\zeta \quad (4.8a)$$

o lado esquerdo da equação (4.8a) representa a transformada, dada pela equação (4.5a),

logo:

$$\bar{\Theta}_i(X) = 0 \quad (4.8b)$$

A solução particular, de nosso interesse, da equação principal 4.6i torna-se possível com o uso das condições de entrada e de saída, dadas pelas equações (4.7e) e (4.8b). A partir desta solução, utiliza-se a fórmula da inversa (eq. 4.5b) para encontrar a solução geral do problema físico proposto.

#### 4.8 PROPOSTA DE UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA PARA O POTENCIAL DE TEMPERATURA TRANSFORMADA

Para a obtenção da solução analítica aproximada do potencial de temperatura transformada, será feita uma aproximação no coeficiente  $A_{ik}$ . Será considerado uma diagonalização nesta matriz, levando em conta apenas os elementos de sua diagonal principal, fazendo  $i=k$ . Assim sendo, resulta que:

$$A_{ii} = \frac{1}{N_i} \int_0^1 \zeta \cdot \Psi_i^2(\mu_i, \zeta) d\zeta \quad (4.9a)$$

Com esta consideração, a equação diferencial (4.6i) torna-se:

$$\frac{A_{ii}}{P_e^2} \frac{d^2 \bar{\Theta}_i(X)}{dX^2} - \frac{d \bar{\Theta}_i(X)}{dX} - 4\mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0 \quad (4.9b)$$

Organizando os termos, encontra-se:

$$\frac{1}{P_e^2} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 \bar{\Theta}_1(X)}{dX^2} \\ \frac{d^2 \bar{\Theta}_2(X)}{dX^2} \\ \frac{d^2 \bar{\Theta}_3(X)}{dX^2} \\ \frac{d^2 \bar{\Theta}_4(X)}{dX^2} \\ \frac{d^2 \bar{\Theta}_n(X)}{dX^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{d \bar{\Theta}_1(X)}{dX} \\ \frac{d \bar{\Theta}_2(X)}{dX} \\ \frac{d \bar{\Theta}_3(X)}{dX} \\ \frac{d \bar{\Theta}_4(X)}{dX} \\ \frac{d \bar{\Theta}_n(X)}{dX} \end{bmatrix} - 4\mu_i^2 \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_1(X) \\ \bar{\Theta}_2(X) \\ \bar{\Theta}_3(X) \\ \bar{\Theta}_4(X) \\ \bar{\Theta}_n(X) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.9c)$$

Organizando os termos, encontra-se o termo geral do sistema de equações diferenciais a serem resolvidas:

$$\frac{d^2 \bar{\Theta}_n(X)}{dX^2} - \frac{P_e^2}{A_{nn}} \frac{d \bar{\Theta}_n(X)}{dX} - \frac{4\mu_i^2 P_e^2}{A_{nn}} \bar{\Theta}_n(X) = 0 \quad (4.9d)$$

Como a equação (4.9d) se trata de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, homogênea e com coeficientes constantes, têm solução analítica clássica. Fazendo  $\bar{\Theta}_n(X) = e^{m \cdot X}$ , a equação característica assume a forma:

$$m^2 - \frac{P_e^2}{A_{nn}} m - \frac{4\mu_i^2 P_e^2}{A_{nn}} = 0 \quad (4.9e)$$

As soluções da equação característica são:

$$m_1 = \frac{P_e^2}{2A_{nn}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16\mu_i^2 A_{nn}}{P_e^2}} \right] \quad (4.9f)$$

$$m_2 = \frac{P_e^2}{2A_{nn}} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{16\mu_i^2 A_{nn}}{P_e^2}} \right] \quad (4.9g)$$

Logo, a solução geral da equação (4.9d) assume a forma:

$$\bar{\Theta}_n(X) = C_1 \cdot e^{m_1 X} + C_2 \cdot e^{m_2 X} \quad (4.9h)$$

Aplicando a condição inicial em (5.9h), verifica-se que:

$$\bar{\Theta}_n(0) = C_1 + C_2 = \bar{f}_i \quad (4.9i)$$

Aplicando a condição final em (5.9h), verifica-se que:

$$\bar{\Theta}_n(\infty) = C_1 \cdot e^{m_1 \infty} + C_2 \cdot e^{m_2 \infty} = 0 \quad (4.9j)$$

Para a equação (4.9j) ser satisfeita é necessário que  $C_1 = 0$ , uma vez  $m_1$  é um valor estritamente crescente. Retornando a equação (4.9i), concluímos que  $C_2 = \bar{f}_i$ . Logo a solução particular do potencial de temperatura transformada assume a forma:

$$\bar{\Theta}_n(X) = \bar{f}_i \cdot e^{m_2 X} \quad (4.9k)$$

A partir desta solução, utilizaremos a fórmula da inversa (eq. 4.5b) para encontrar a solução geral do problema físico proposto.

#### 4.9 CÁLCULO DA TEMPERATURA MÉDIA ADIMENSIONAL

Segundo MIKHAILOV e ÖSIZIK, a temperatura média no tubo circular, em coordenadas cilíndricas, pode ser calculada por meio da expressão:

$$\Theta(X)_{m\u00e9dia} = \frac{\int_0^1 \zeta u(\zeta) \Theta(X, \zeta) d\zeta}{\int_0^1 \zeta u(\zeta) d\zeta} \quad (4.10a)$$

Analogamente ao que foi feito no cap\u00edtulo anterior, usando a solu\u00e7\u00e3o anal\u00edtica aproximada, pode-se mostrar que:

$$\Theta(X)_{m\u00e9dia} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \bar{f}_i^2 \cdot e^{m_2 X} \quad (4.10b)$$

#### 4.10 C\u00c1LCULO DO N\u00daMERO DE NUSSELT LOCAL

Uma vez conhecida as express\u00f5es para  $\Theta(X, \zeta)$  e  $\Theta(X)_{m\u00e9dia}$ , podemos calcular o n\u00famero de Nusselt por meio da express\u00e3o:

$$Nu(X) = - \frac{2}{\Theta(X)_{m\u00e9dia} - \Theta_{parede}(X)} \left. \frac{d\Theta(X, \zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} \quad (4.11)$$

onde  $\Theta_{parede}(X)$  representa a temperatura adimensional ao longo da parede do tubo.

#### 4.11 RESULTADOS OBTIDOS

Foi feito neste trabalho um tratamento anal\u00edtico aproximado para o problema supracitado. Para este mesmo problema foi obtida uma solu\u00e7\u00e3o num\u00e9rica, onde utilizou-se um c\u00f3digo em Fortran para a solu\u00e7\u00e3o do sistema de equa\u00e7\u00f5es diferenciais ordin\u00e1rias, com o uso da subrotina DBVFPD do IMSL. O objetivo \u00e9 comparar, mais uma vez, os resultados via tratamento anal\u00edtico aproximado e num\u00e9rico.

#### 4.11.1 - Análise de Convergência para a solução analítica aproximada

A convergência dos resultados será analisada sob o aspecto do número de autovalores ( $N_T$ ) que define a ordem de truncamento das séries de autofunções. Para um Peclet especificado e ( $n$ ) dado no modelo lei de potência, os resultados são apresentados logo abaixo, onde pode ser feita uma análise quanto a qualidade obtida em termos de convergência:

Número de Nusselt local - Nu								
Pe = 1000 , n=1/3								
X	$N_T = 10$	$N_T = 15$	$N_T = 20$	$N_T = 25$	$N_T = 30$	$N_T = 35$	$N_T = 40$	$N_T = 45$
0.00001	8,74301	5,82212	4,66879	4,26039	4,18125	4,17545	4,17532	4,17532
0.00004	5,69761	4,35343	4,17843	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532
0.00007	4,95028	4,1992	4,17534	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532
0.000147	4,35743	4,17545	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532
0.200	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532
0.400	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532	4,17532

Tabela 2.1: Convergência do número de Nusselt local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=1/3$  no uso da solução analítica aproximada.

Número de Nusselt local - Nu											
Pe = 100 , n=1											
X	$N_T = 5$	$N_T = 10$	$N_T = 15$	$N_T = 20$	$N_T = 25$	$N_T = 30$	$N_T = 35$	$N_T = 40$	$N_T = 45$	$N_T = 50$	$N_T = 55$
0.00001	10,1477	9,56222	6,01362	4,56042	3,95348	3,7301	3,6692	3,65815	3,65688	3,65679	3,65679
0.00004	9,24362	5,55989	4,00552	3,68394	3,65735	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679
0.00007	8,51125	4,66824	3,737	3,65778	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679
0.000147	7,18079	3,95628	3,65885	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679
0.200	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679
0.400	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679	3,65679

Tabela 2.2: Convergência do número de Nusselt local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade tipo parabólico no uso da solução analítica aproximada.

<b>Número de Nusselt local - Nu</b>									
<b>Pe = 1000 , n=3</b>									
<b>X</b>	<b>N<sub>T</sub> = 10</b>	<b>N<sub>T</sub> = 15</b>	<b>N<sub>T</sub> = 20</b>	<b>N<sub>T</sub> = 25</b>	<b>N<sub>T</sub> = 30</b>	<b>N<sub>T</sub> = 35</b>	<b>N<sub>T</sub> = 40</b>	<b>N<sub>T</sub> = 45</b>	<b>N<sub>T</sub> = 50</b>
0.00001	7,58019	4,9881	3,93698	3,52336	3,42041	3,40941	3,409	3,40899	3,40899
0.00004	4,91772	3,63909	3,41651	3,40901	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899
0.00007	4,2409	3,45311	3,40911	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899
0.000147	3,65835	3,40964	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899
0.200	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899
0.400	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899	3,40899

Tabela 2.3: Convergência do número de Nusselt local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=3$  no uso da solução analítica aproximada.

Com base nos resultados apresentados na tabela acima, pode-se considerar que a metodologia de resolução usada neste trabalho, apresenta forte estabilidade e baixo custo computacional. Além disso, fica estabelecida que a convergência com cinco algarismos significativos para os pontos escolhidos em  $n=1/3$  ocorre para os valores de  $N_T=40$ . Para os pontos escolhidos em  $n=1$  ocorre para os valores de  $N_T=50$ . Para os pontos escolhidos em  $n=3$  ocorre para os valores de  $N_T=45$ .

#### **4.11.2- Efeito do Peclet para a solução analítica aproximada**

Mais uma vez o efeito de Peclet sobre o escoamento é investigado. As curvas acima mostram, mais uma vez, que para diferentes valores de Peclet os resultados são bastante diferentes.

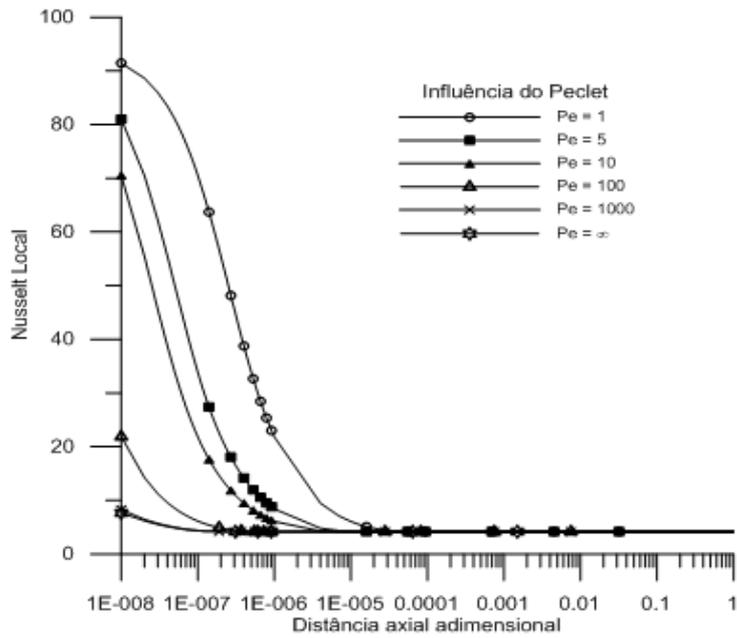


Figura 4.2 : Nussel local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=1/3$  no uso da solução analítica aproximada.

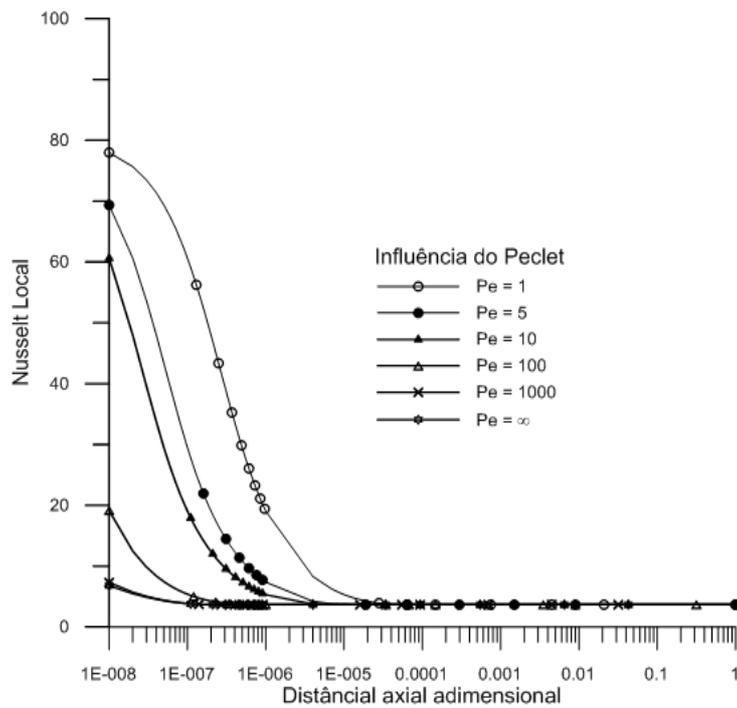


Figura 4.3 : Nussel local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo parabólico no uso da solução analítica aproximada.

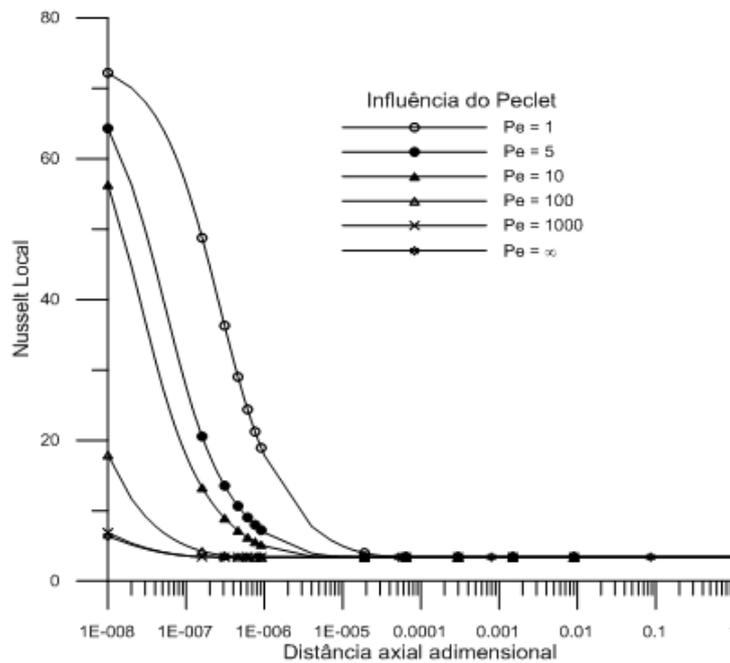


Figura 4.4 : Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=3$  no uso da solução analítica aproximada.

As figuras 4.2, 4.3 e 4.4 mostram os resultados do número de Nusselt local em função da distância axial adimensional para  $n = 1/3$ ,  $n=1$  e  $n=3$ , respectivamente. Pode-se perceber que o número de Nusselt local decresce com o aumento do número de Peclet, analogamente ao que ocorreu no caso estudado no capítulo anterior. Para o problema de Graetz, onde a condução axial é negligenciada, no modelo parabólico de velocidade, é sabido que:  $Nu(x \rightarrow \infty) = 3,657$ , em conformidade com o trabalho apresentado. Ainda para o problema de Graetz, verifica-se neste trabalho que:  $Nu(x \rightarrow \infty) = 4,17532$  para  $n = 1/3$  e  $Nu(x \rightarrow \infty) = 3,40899$  para  $n = 3$ .

A seguir mostra-se o efeito do número de Peclet sobre a temperatura média global em função da distância axial adimensional.

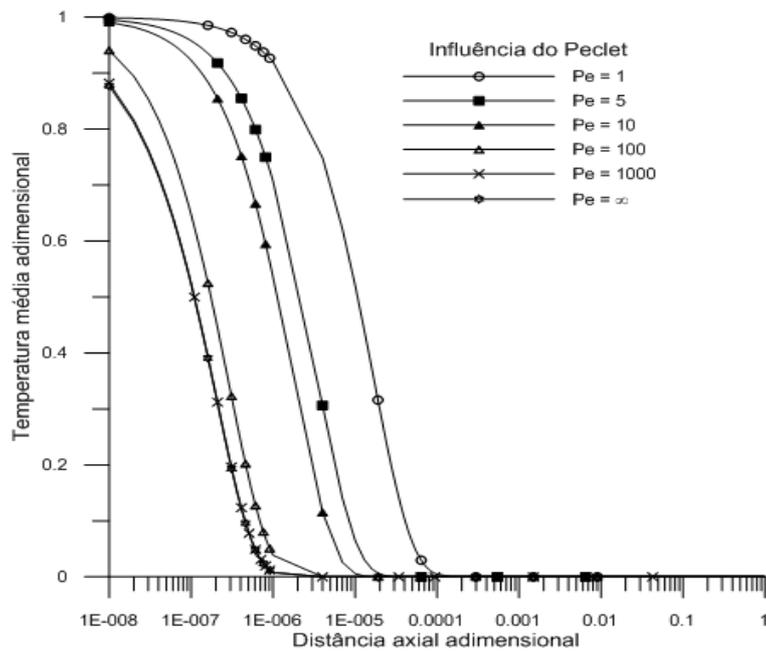


Figura 4.5 : Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=1/3$  no uso da solução analítica aproximada.

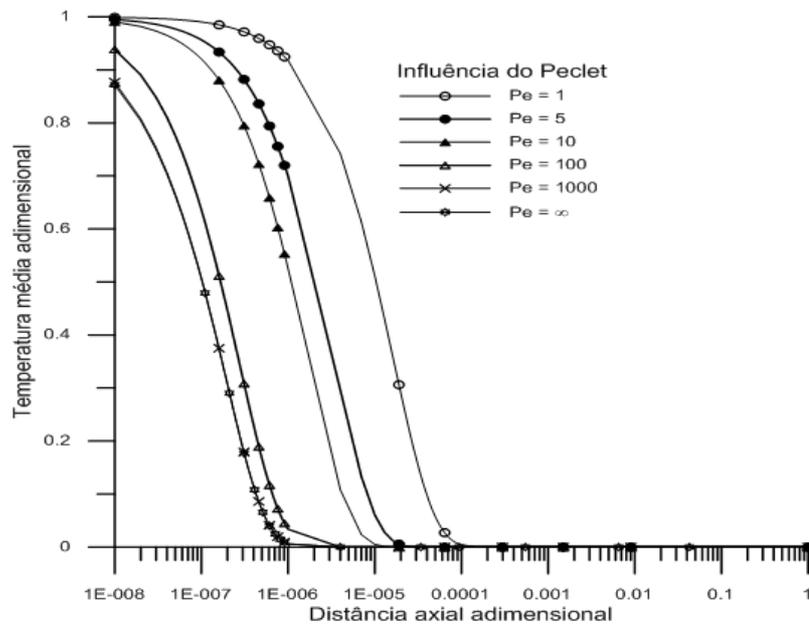


Figura 4.6 : Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo parabólico no uso da solução analítica aproximada.

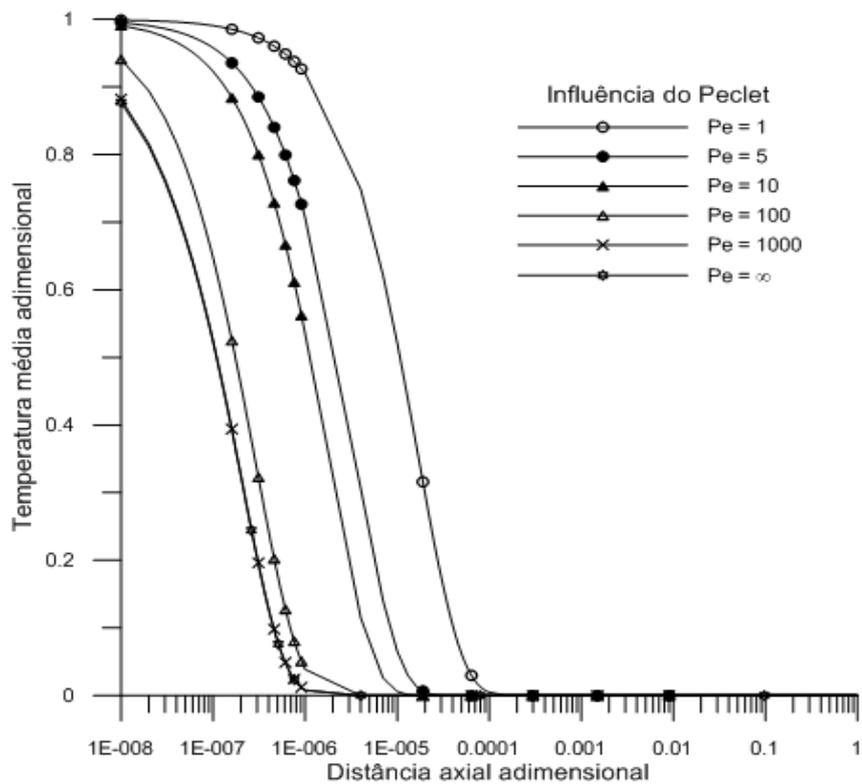


Figura 4.7 : Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=3$  no uso da solução analítica aproximada.

As figuras 4.5, 4.6 e 4.7 mostram os resultados obtidos para a temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional, para vários valores do número de Peclet. Pode-se perceber que quanto menor o valor do Peclet (condução axial significativa) mais a temperatura média global cai lentamente com a distância axial adimensionalizada, identicamente ao caso estudado no capítulo anterior.

#### 4.11.3- Efeito do índice lei de potência para a solução analítica aproximada

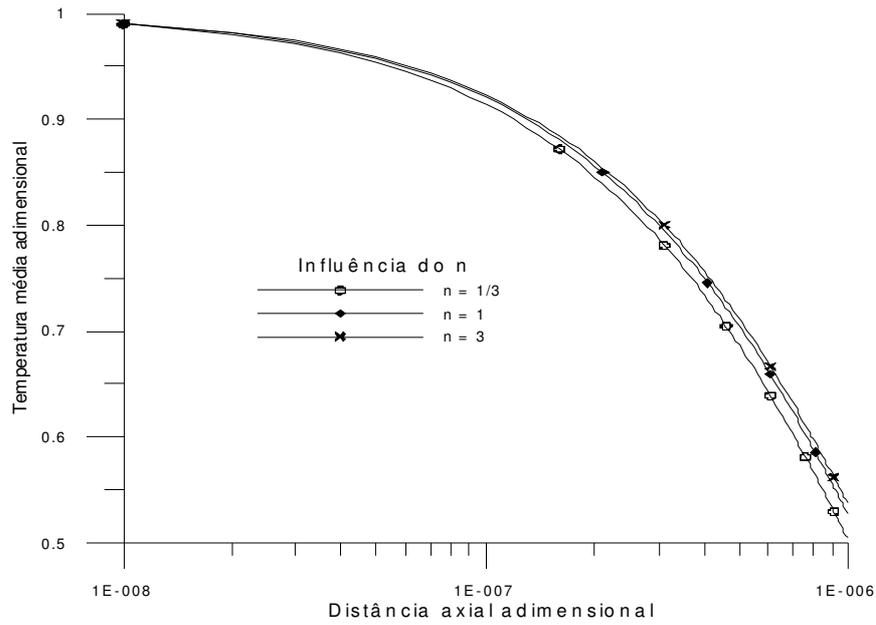


Figura 4.8 : Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=1, 1/3$  e  $3$  e  $Pe = 10$  no uso da solução analítica aproximada.

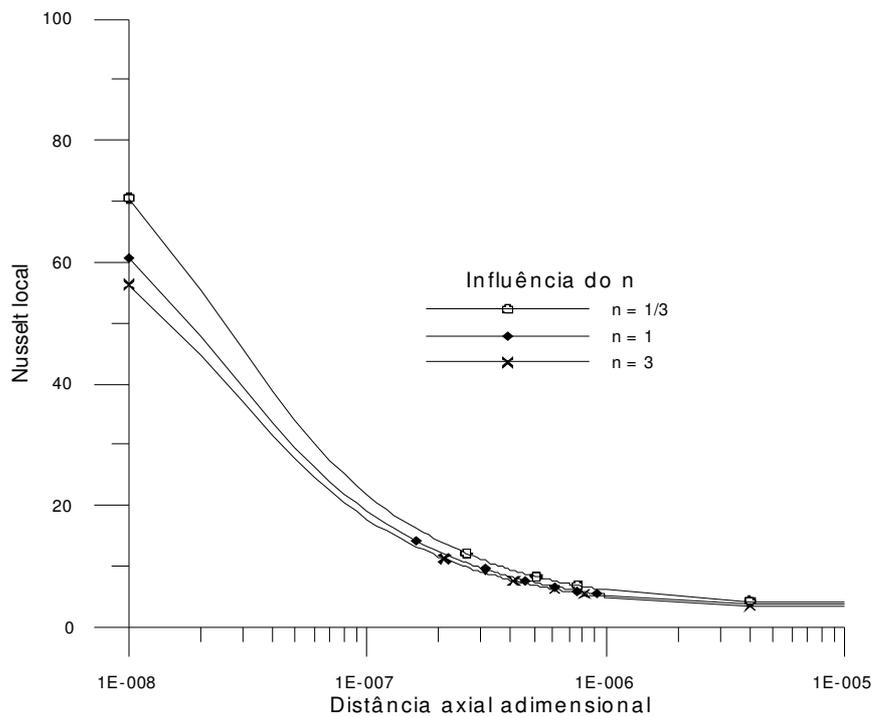


Figura 4.9 : Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=1, 1/3$  e  $3$  e  $Pe = 10$  no uso da solução analítica aproximada.

As figuras 4.8 e 4.9 mostram, respectivamente, os resultados obtidos para a temperatura média global em função da distância axial adimensional e do Nusselt local em função da distância axial adimensional, para  $n=1/3, 1$  e  $3$  e  $Pe = 10$ . Pode-se perceber que quanto maior o valor do índice lei de potência mais lentamente a temperatura média global cai com a distância axial adimensionalizada. Pode-se perceber também que quanto maior o valor do expoente  $n$ , menor o valor do número de Nusselt local.

#### 4.11.4- Comparação entre a solução analítica aproximada e a solução numérica

Aqui, iremos comparar a solução numérica com a solução analítica aproximada. Desejamos analisar a viabilidade da solução analítica aproximada para a sua introdução em problemas posteriores, frente a solução numérica. Os gráficos esquematizados nas figuras 4.10, 4.11 e 4.12, logo abaixo, mostram a comparação destas soluções para um caso em que a condução axial no fluido possa ser negligenciada e o índice lei de potência assume os valores  $1/3, 1$  e  $3$ .

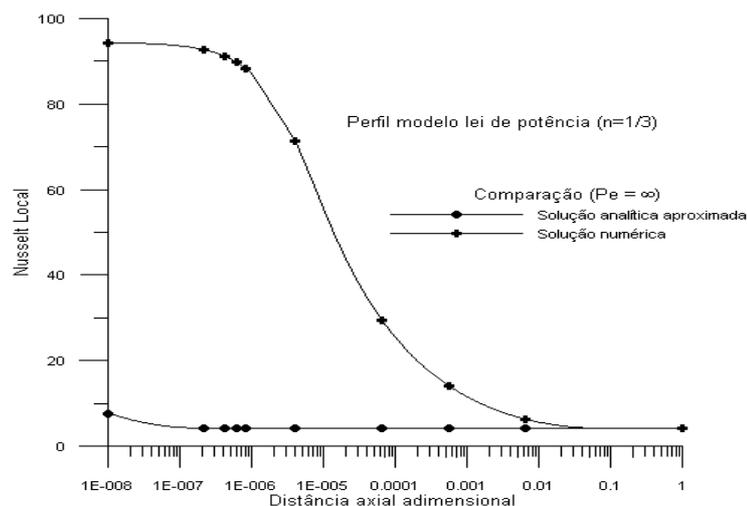


Figura 4.10 : Comparação das soluções analítica aproximada e numérica para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade modelo lei de potência ( $n=1/3$ ).

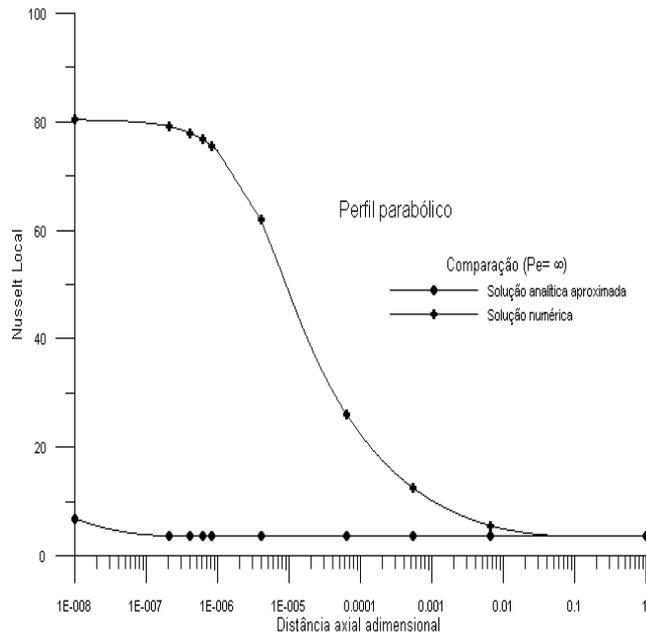


Figura 4.11 : Comparação das soluções analítica aproximada e numérica para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo parabólico.

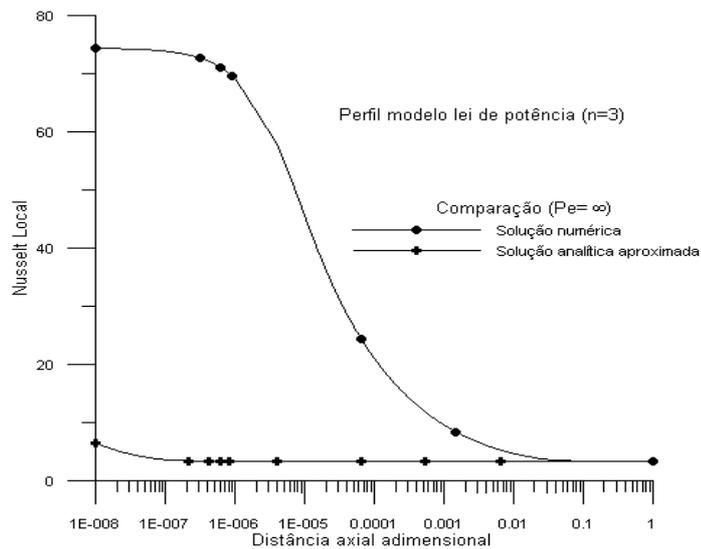


Figura 4.12 : Comparação das soluções analítica aproximada e numérica para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade modelo lei de potência ( $n=3$ ).

Por meio das figuras 4.10, 4.11 e 4.12 percebemos que a solução analítica aproximada não se mostra interessante para reproduzir a variação do Nusselt Local com a distância axial adimensional, muito embora reproduza com certo grau de precisão o valor de convergência do número de Nusselt quando  $x \rightarrow \infty$ . Consegue-se perceber, também, a rápida convergência da solução analítica aproximada, já esperada, de acordo com as tabelas de convergência 3.1, 3.2 e 3.3.

#### 4.11.5- Validação da solução numérica

Como método de validação da solução numérica obtida, cabe investigar o grau de precisão da solução quando confrontada com soluções conhecidas na literatura. Usando como referência o trabalho do *J.R. Tsai e M.N. Özisik (1989)*, onde os autores utilizam o método das diferenças finitas para a solução do problema, no gráfico que segue mostra-se o cruzamento destes resultados.

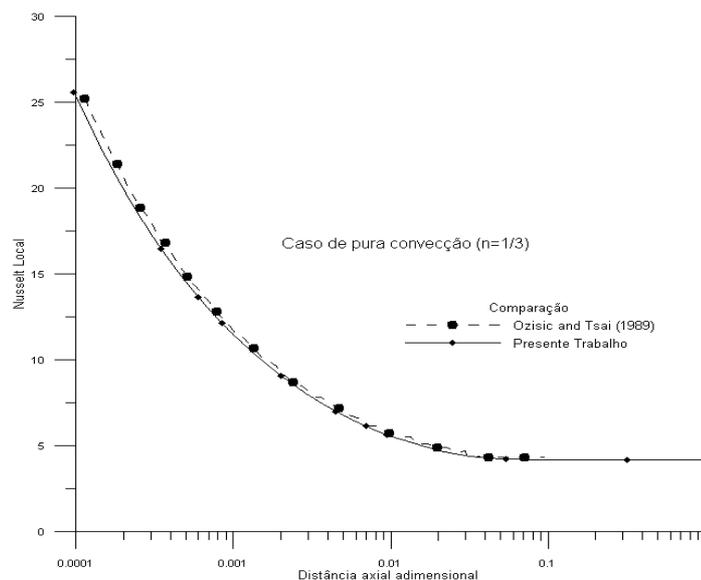


Figura 4.13 : Comparação da solução numérica com uma solução de referência literária para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade modelo lei de potência ( $n=1/3$ ).

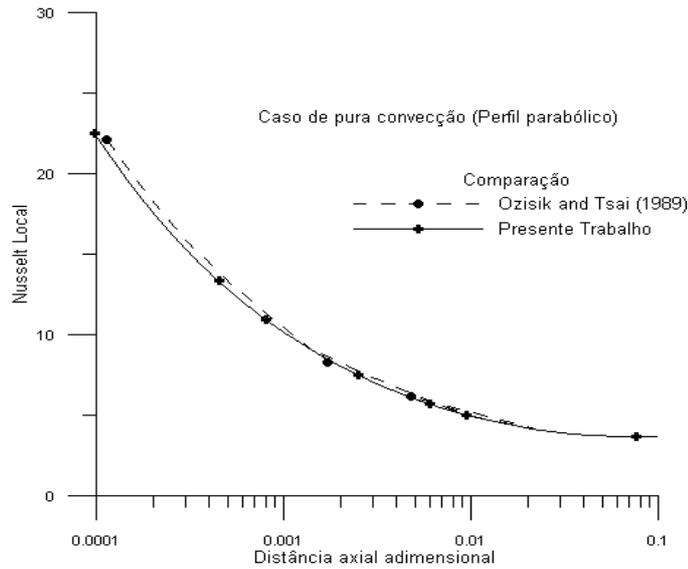


Figura 4.14: Comparação da solução numérica com uma solução de referência literária para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade tipo parabólico.

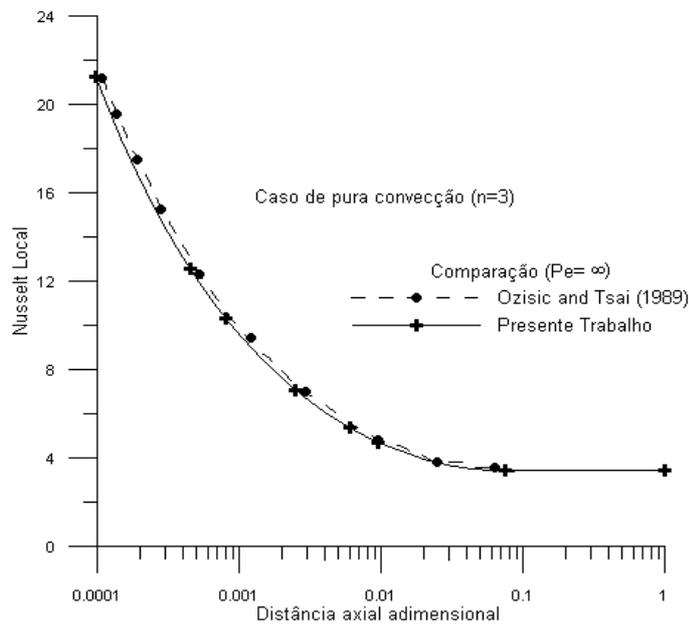


Figura 4.15 : Comparação da solução numérica com uma solução de referência literária para o Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade modelo lei de potência (n=3).

Nas figuras 4.13, 4.14 e 4.15 podemos perceber que a solução numérica encontrada no presente trabalho se mostra extremamente coerente. Pontos obtidos no trabalho do *Ozisc e Tsai* foram escolhidos, e a curva pontilhada mostrada no gráfico acima é que melhor passa por estes pontos. Da mesma forma foi feito nos pontos deste trabalho, e percebemos que estas curvas caminham muito próximas, a princípio, depois tendem a uma superposição.

Usando as curvas obtidas pela solução numérica, podemos ainda comparar a distribuição do Nusselt Local com a distância axial adimensional para os vários índices de lei de potência.

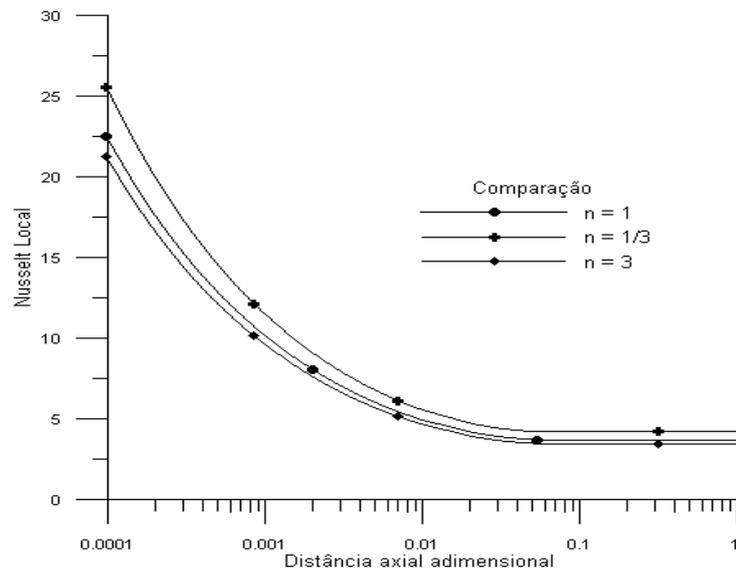


Figura 4.16 : Nusselt local em função da distância axial adimensional para o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para  $n=1$ ,  $1/3$  e  $3$  e  $Pe = \infty$  no uso da solução numérica.

Logo, concluímos que quanto maior o índice de lei de potência menor o número de Nusselt Local.

# CAPÍTULO V

## MODELAMENTO MATEMÁTICO COM EFEITO RADIATIVO - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA VIA GITT

### 5.1 PROBLEMA FÍSICO

Na figura 5.1 pode-se visualizar o problema a ser estudado, que representa um escoamento completamente desenvolvido em um tubo circular, sujeito a condição de contorno do 3º tipo considerando a participação do efeito radioativo. A condição de entrada garante que o fluido de escoamento está a uma temperatura de entrada  $T_e$ . Considera-se que a parede do tubo é mantida com uma temperatura  $T_w > T_e$ . A condição de saída garante que o fluido entrará em equilíbrio térmico com as paredes do tubo circular. O fluido é tratado como cinzento, que emite e absorve radiação de modo que todas as suas propriedades radiativas são independentes da frequência de onda.

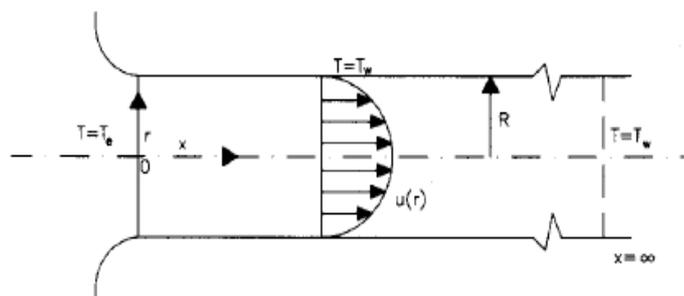


Figura 5.1 - Ilustração do problema

## 5.2 MODELAMENTO MATEMÁTICO

O modelamento matemático tem como propósito determinar o campo de temperatura do fluido ao longo do escoamento no duto circular. Levando-se em conta o problema acoplado condução-radiação de transferência de calor descrito, considerando-se constantes as propriedades de térmicas do fluido, adotando-se as condições de contorno de 1°, 2ª e 3ª espécie, bem como as condições de entrada e de saída prescritas, o modelamento matemático para um escoamento completamente desenvolvido no interior do tubo mostrado na figura 5.1 pode ser escrito da seguinte forma:

### Equação principal da energia

$$\rho C_p u(r) \frac{\partial T(x, r)}{\partial x} = k \left[ \frac{\partial^2 T(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(x, r)}{\partial r} \right) \right] - \nabla \cdot \mathbf{q}^r ; \quad x > 0 \text{ e } 0 < r < R \quad (5.1a)$$

onde:  $u(r) = \frac{1+3n}{1+n} u_m \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right]$  é, mais uma vez, o campo de velocidade para um

escoamento laminar completamente desenvolvido, no modelo lei de potência, de um fluido não-newtoniano em um tubo circular. Se  $n=1$  o fluido será newtoniano, se  $1 < n < \infty$  o fluido será não-newtoniano do tipo dilatante e se  $0 < n < 1$  o fluido será não-newtoniano do tipo pseudoplástico.

$\nabla \cdot \mathbf{q}^r$  é o divergente do fluxo de calor por radiação, dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^r = - \int_{4\pi} \kappa \left[ I_0(\bar{\Omega}, S) - I_b(T) \right] d\omega = -\kappa(G - 4\sigma T^4) \quad (5.1b)$$

sendo  $\kappa$  o coeficiente volumétrico de absorção da radiação,  $I_0(\vec{\Omega}, S)$  representa a intensidade de radiação de um feixe monocromático ao atravessar um meio na direção  $\Omega$  ao longo do caminho  $S$ ,  $I_b(T)$  representa a intensidade de radiação monocromática do corpo negro na temperatura local  $T = T(x, r)$ ,  $d\omega$  é o ângulo sólido elementar cuja radiação vai ser espalhada,  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann e  $G$  é a intensidade de radiação total, que pode ser encontrada, segundo (*Ebdian e Yang, 1991*), pela solução da equação de transferência radiativa (ETR) :

$$\frac{\partial^2 G(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G(x, r)}{\partial r} \right) = 3\beta\kappa [G(x, r) - 4\sigma T^4] \quad (5.1c)$$

onde  $\beta$  é o coeficiente espectral de extinção.

Na apresentação das equações (da energia e radiativa) fica claro o acoplamento do problema, de modo que a distribuição de temperatura do fluido é obtida através da solução da equação da energia, e essa, por sua vez, envolve o divergente do fluxo de calor por radiação, que é determinado a partir da solução da equação da transferência radiativa que depende da temperatura elevada a quarta potência.

No presente trabalho utiliza-se a Técnica da transformada Integral Generalizada (GITT) para resolver a equação da energia, bem como para resolver a equação da transferência radiativa. A solução geral do problema físico proposto corresponde a solução simultânea destas duas equações.

Organizando os termos da equação (5.1a), encontramos:

$$\frac{u(r)}{\alpha} \frac{\partial T(x,r)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T(x,r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(x,r)}{\partial r} \right) + \frac{\kappa}{k} [G(x,r) - 4\sigma T^4(x,r)]; \quad x > 0 \text{ e } 0 < r < R \quad (5.1d)$$

onde:  $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$  é a difusividade térmica do fluido.

### Condições de contorno

$$\frac{\partial T(x,r)}{\partial r} = 0; \quad x > 0 \text{ e } r = 0 \quad (5.1e)$$

$$\frac{\partial G(x,r)}{\partial r} = 0; \quad x > 0 \text{ e } r = 0 \quad (5.1f)$$

$$T(x,r) = T_w; \quad x > 0 \text{ e } r = R \quad (5.1g)$$

$$\frac{\partial G(x,r)}{\partial r} = -\frac{3\xi_w \kappa}{2(2-\xi_w)} [G(x,r) - 4\sigma T_w^4]; \quad x > 0 \text{ e } r = R \quad (5.1h)$$

### Condições de entrada

$$T(x,r) = T_e; \quad x = 0 \text{ e } 0 < r < R \quad (5.1i)$$

$$\frac{\partial G(x,r)}{\partial x} = -\frac{3}{2} \kappa [G(x,r) - 4\sigma T_e^4]; \quad x = 0 \text{ e } 0 < r < R \quad (5.1j)$$

### Condições de saída

$$T(x,r) = T_w; \quad x = \infty \text{ e } 0 < r < R \quad (5.1k)$$

$$\frac{\partial G(x, r)}{\partial x} = 0 ; \quad x = \infty \quad \text{e} \quad 0 < r < R \quad (5.11)$$

onde  $\xi_w$  é o coeficiente de emissividade da parede.

### 5.3 FILTRO NO CAMPO DA TEMPERATURA

A GITT será aplicada na equação da energia, na direção radial. Como o problema original possui condição de contorno não homogênea nesta direção, dada pela equação (5.1g), filtros matemáticos serão utilizados para que a GITT seja aplicada adequadamente, bem como melhore a performance computacional. O filtro proposto para o campo da temperatura será da forma:

$$T(x, r) = T^*(x, r) + T_w \quad (5.2a)$$

Substituindo a equação (5.2a) em (5.1d), verifica-se que a equação da energia torna-se:

$$\frac{u(r)}{\alpha} \frac{\partial T^*(x, r)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T^*(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T^*(x, r)}{\partial r} \right) + \frac{\kappa}{k} \left\{ G(x, r) - 4\sigma [T^*(x, r) + T_w]^4 \right\} \quad (5.2b)$$

Analogamente, substituindo a equação (5.2a) em (5.1c), verifica-se que a equação da transferência radiativa torna-se:

$$\frac{\partial^2 G(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G(x, r)}{\partial r} \right) = 3\beta\kappa \left[ G(x, r) - 4\sigma [T^*(x, r) + T_w]^4 \right] \quad (5.2c)$$

Com a aplicação do filtro, as condições de contorno, a condição de entrada e a condição de saída tornam-se:

$$\frac{\partial T^*(x,r)}{\partial r} = 0 ; \quad x > 0 \quad \text{e} \quad r = 0 \quad (5.2d)$$

$$\frac{\partial G(x,r)}{\partial r} = 0 ; \quad x > 0 \quad \text{e} \quad r = 0 \quad (5.2e)$$

$$T^*(x,r) = 0 ; \quad x > 0 \quad \text{e} \quad r = R \quad (5.2f)$$

$$\frac{\partial G(x,r)}{\partial r} = -\frac{3\xi_w \kappa}{2(2-\xi_w)} [G(x,r) - 4\sigma T_w^4] ; \quad x > 0 \quad \text{e} \quad r = R \quad (5.2g)$$

$$T^*(x,r) = T_e - T_w ; \quad x = 0 \quad \text{e} \quad 0 < r < R \quad (5.2h)$$

$$\frac{\partial G(x,r)}{\partial x} = -\frac{3}{2} \kappa [G(x,r) - 4\sigma T_e^4] ; \quad x = 0 \quad \text{e} \quad 0 < r < R \quad (5.2i)$$

$$T^*(x,r) = 0 ; \quad x = \infty \quad \text{e} \quad 0 < r < R \quad (5.2j)$$

$$\frac{\partial G(x,r)}{\partial x} = 0 ; \quad x = \infty \quad \text{e} \quad 0 < r < R \quad (5.2k)$$

#### 5.4 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Define-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$x^* = \frac{x}{D_h Pe} \quad \zeta = \frac{r}{R} \quad u^*(\zeta) = \frac{u(r)}{u_m} \quad G^*(x^*, \zeta) = \frac{G(x, r)}{4\sigma T_w^4} \quad (5.3a-d)$$

$$\tau = \kappa D_h \quad \Theta^*(x^*, \zeta) = \frac{T^*(x, r)}{T_w} \quad N = \frac{k \cdot \kappa}{4\sigma T_w^3} \quad \Theta(x^*, \zeta) = \frac{T(x, r)}{T_w} \quad (5.3e-h)$$

$$R_e = \frac{D_h u_m}{\nu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad P_e = R_e \cdot Pr = \frac{D_h u_m}{\alpha} \quad (5.3i-k)$$

Onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $D_h = 2R$  é o diâmetro do tubo circular,  $\tau$  é a espessura óptica,  $N$  é o parâmetro condução-radiação, e  $Pr$ ,  $R_e$  e  $P_e$  são, respectivamente, os números de Prandtl, Reynolds e Peclet.

Aplicando os parâmetros adimensionais na equação (5.2a), verifica-se que:

$$\Theta(x^*, \zeta) = \Theta^*(x^*, \zeta) + 1 \quad (5.4a)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais na equação (5.2b), encontramos a equação principal da energia na forma adimensionalizada:

$$u^*(\zeta) \frac{\partial \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial x^*} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial x^{*2}} + \frac{4}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} \right] + \frac{\tau^2}{N} \left[ G^*(x^*, \zeta) - [\Theta^*(x^*, \zeta) + 1]^4 \right]; \quad x^* > 0 \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4b)$$

Analogamente, podemos escrever a equação radiativa na forma adimensionalizada:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 G^*(x^*, \zeta)}{\partial x^{*2}} + \frac{4}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial G^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} \right] = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[ G^*(x^*, \zeta) - [\Theta^*(x^*, \zeta) + 1]^4 \right]; \quad x^* > 0 \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4c)$$

Da mesma forma, podemos escrever as condições de contorno na forma adimensionalizada:

$$\frac{\partial \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 ; \quad x^* > 0 \text{ e } \zeta = 0 \quad (5.4d)$$

$$\frac{\partial G^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 ; \quad x^* > 0 \text{ e } \zeta = 0 \quad (5.4e)$$

$$\Theta^*(x^*, \zeta) = 0 ; \quad x^* > 0 \text{ e } \zeta = 1 \quad (5.4f)$$

$$\frac{\partial G^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{3\xi_w \tau}{4(2-\xi_w)} [G^*(x^*, \zeta) - 1] ; \quad x^* > 0 \text{ e } \zeta = 1 \quad (5.4g)$$

$$\Theta^*(x^*, \zeta) = \frac{T_e - T_w}{T_w} ; \quad x^* = 0 \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4h)$$

$$\frac{\partial G^*(x^*, \zeta)}{\partial x^*} = -\frac{3}{2} \tau Pe \left[ G^*(x^*, \zeta) - \left( \frac{T_e}{T_w} \right)^4 \right] ; \quad x^* = 0 \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4i)$$

$$\Theta^*(x^*, \zeta) = 0 ; \quad x^* = \infty \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4j)$$

$$\frac{\partial G^*(x^*, \zeta)}{\partial x} = 0 ; \quad x^* = \infty \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4k)$$

## 5.5 PROBLEMA AUXILIAR DE AUTOVALOR NA DIREÇÃO RADIAL

O problema auxiliar deve conter o maior número de informações do problema original, que no nosso caso, a princípio, é o problema principal da energia, satisfazendo o primeiro passo para o uso da Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT) para a solução da equação da energia.

O problema auxiliar escolhido para a determinação de campo de temperatura é escrito da seguinte forma:

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) + \mu_i^2 u^*(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) = 0, \quad 0 < \zeta < 1 \quad (5.5a)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} = 0; \quad \zeta = 0 \text{ e } \mu_i > 0 \quad (5.5b)$$

$$\Psi_i(\mu_i, \zeta) = 0; \quad \zeta = 1 \text{ e } \mu_i > 0 \quad (5.5c)$$

Mais uma vez utiliza-se o método da contagem de sinal para a determinação dos autovalores ( $\mu_i$ ), das autofunções,  $\Psi(\mu_i, \zeta)$ , e das normas ( $N_i$ ) no problema de autovalor associado.

## 5.6 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO DE TEMPERATURA

O par transformada integral definido para este problema é dado por:

$$\bar{\Theta}_i(x^*) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u^*(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta^*(x^*, \zeta) d\zeta, \quad \text{Transformada} \quad (5.8a)$$

$$\Theta^*(x^*, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta) \bar{\Theta}_i(x^*)}{N_i^{1/2}}, \quad \text{Inversa} \quad (5.8b)$$

Operando a equação (5.4b) por  $\int_0^1 \zeta \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , nos faz encontrar:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^*} \left[ \int_0^1 \zeta u^*(\zeta) \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta^*(x^*, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta \right] &= \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2}{dx^{*2}} \left[ \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta^*(x^*, \zeta) d\zeta \right] + 4 \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} \right] d\zeta \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 \zeta \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} G^*(x^*, \zeta) d\zeta - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 \zeta \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} [\Theta^*(x^*, \zeta) + 1]^4 d\zeta \end{aligned} \quad (5.9a)$$

Ou ainda, usando as definições da transformada e da inversa, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Theta}_i(x^*)}{dx^*} &= \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(x^*)}{dx^{*2}} \left[ \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \int_0^1 \zeta \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Psi_j(\mu_j, \zeta) d\zeta \right] + 4 \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} \right] d\zeta \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 \zeta \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} G^*(x^*, \zeta) d\zeta - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 \zeta \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_k(\mu_k, \zeta) \bar{\Theta}_k(x^*)}{N_k^{1/2}} + 1 \right]^4 d\zeta \end{aligned} \quad (5.9b)$$

Da equação do problema auxiliar, temos que:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) + \zeta \mu_i^2 u^*(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) = 0 \quad (5.9c)$$

Operando a equação (5.9c) por  $-4 \int_0^1 \frac{\Theta^*(x^*, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , segue que:

$$-4 \int_0^1 \frac{\Theta^*(x^*, \zeta)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) d\zeta - 4\mu_i^2 \bar{\Theta}_i(x^*) = 0 \quad (5.9d)$$

Somando a equação (5.9d) com a equação (5.9b), encontra-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Theta}_i(x^*)}{dx^*} = & \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(x^*)}{dx^{*2}} - 4\mu_i^2 \bar{\Theta}_i(x^*) + \frac{4}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \left\{ \Psi_i(\mu_i, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} \right] - \Theta^*(x^*, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) \right\} d\zeta \\ & + \frac{\tau^2}{N} R_i[\bar{G}_k(x^*)] - \frac{\tau^2}{N} B_{ik}[\bar{\Theta}_k(x^*)] \end{aligned} \quad (5.9e)$$

Tal que:

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{\zeta \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Psi_j(\mu_j, \zeta)}{(N_i N_j)^{1/2}} d\zeta \quad (5.9f)$$

$$B_{ik}[\bar{\Theta}_k(x^*)] = \int_0^1 \zeta \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_k(\mu_k, \zeta) \bar{\Theta}_k(x^*)}{N_k^{1/2}} + 1 \right]^4 d\zeta \quad (5.9g)$$

$$R_i[\bar{G}_k(x^*)] = \int_0^1 \zeta \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} G^*(x^*, \zeta) d\zeta \quad (5.9h)$$

Analisando o terceiro termo após a igualdade na equação (5.9e), usando o teorema de Green, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \left\{ \Psi_i(\mu_i, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left[ \varsigma \frac{\partial \Theta^*(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right] - \Theta^*(x^*, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) \right\} d\varsigma = \\
& = \frac{4}{N_i^{1/2}} \left[ \Psi_i(\mu_i, \varsigma) \varsigma \frac{\partial \Theta^*(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \Big|_0^1 - \int_0^1 \varsigma \frac{\partial \Theta^*(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} d\varsigma \right] + \\
& \quad - \frac{4}{N_i^{1/2}} \left[ \Theta^*(x^*, \varsigma) \varsigma \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \Big|_0^1 - \int_0^1 \varsigma \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \frac{\partial \Theta^*(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} d\varsigma \right] \quad (5.9i)
\end{aligned}$$

Organizando os termos da equação (5.9i) e sabendo que  $\frac{\partial \Theta^*(x^*, 0)}{\partial \varsigma} = 0$  (5.4d),  $\Theta^*(x^*, 1) = 0$

(5.4f),  $\frac{\partial \Psi_i(\mu_i, 0)}{\partial \varsigma} = 0$  (5.5b) e  $\Psi_i(\mu_i, 1) = 0$  (5.5c), encontra-se que:

$$\frac{4}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \left\{ \Psi_i(\mu_i, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left[ \varsigma \frac{\partial \Theta^*(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right] - \Theta^*(x^*, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) \right\} d\varsigma = 0 \quad (5.9j)$$

Substituindo a equação(5.9j) na equação (5.9e), verifica-se que:

$$-\frac{1}{Pe^2} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(x^*)}{dx^{*2}} + \frac{d \bar{\Theta}_i(x^*)}{dx^*} + 4\mu_i^2 \bar{\Theta}_i(x^*) + \frac{\tau^2}{N} B_{ik} [\bar{\Theta}_k(x^*)] - \frac{\tau^2}{N} R_i [\bar{G}_k(x^*)] = 0 \quad (5.9k)$$

Portanto, a equação principal torna-se a equação 5.9k, tal que as constantes  $A_{ij}$ ,

$B_{ik} [\bar{\Theta}_k(x^*)]$  e  $R_i [\bar{G}_k(x^*)]$  são dadas, respectivamente, pelas equações 5.9f, 5.9g e 5.9h .

## 5.7 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE ENTRADA

Operando a equação (5.4h) por  $\int_0^1 \zeta u^*(\zeta) \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , obtém-se:

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u^*(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta^*(x^*, \zeta) d\zeta = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u^*(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \frac{T_e - T_w}{T_w} d\zeta \quad (5.10a)$$

o lado esquerdo da equação (5.10a) representa a transformada, dada pela equação (5.8a), logo:

$$\bar{\Theta}_i(x^* = 0) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \frac{T_e - T_w}{T_w} \int_0^1 \zeta u^*(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) d\zeta \quad (5.10b)$$

Do problema auxiliar, temos que:

$$\zeta u^*(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) = -\frac{1}{\mu_i^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right)$$

Substituindo em (5.10b), encontra-se que:

$$\bar{\Theta}_i(x^* = 0) = -\frac{1}{\mu_i^2 \cdot N_i^{1/2}} \frac{T_e - T_w}{T_w} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, 1)}{\partial \zeta} = \frac{T_e - T_w}{T_w} \bar{f}_i \quad (5.10c)$$

## 5.8 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE SAÍDA

Operando esta equação (5.4j) por  $\int_0^1 \zeta u^*(\zeta) \frac{\Psi_i(\mu_i, \zeta)}{N_i^{1/2}} d\zeta$ , obtém-se:

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u^*(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \Theta^*(x^*, \zeta) d\zeta = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta u^*(\zeta) \Psi_i(\mu_i, \zeta) \cdot 0 d\zeta \quad (5.11a)$$

o lado esquerdo da equação (5.11a) representa a transformada, dada pela equação (5.8a), logo:

$$\overline{\Theta}_i(x^* = \infty) = 0 \quad (5.11b)$$

A solução particular, de nosso interesse, da equação principal da energia (5.9k) torna-se possível com o uso das condições de entrada e de saída, dadas pelas equações (5.10c) e (5.11b). A partir desta solução, utilizaremos a fórmula da inversa (eq. 5.8b) para encontrar  $\Theta^*(x^*, \zeta)$ . Por fim, a solução geral para a equação da energia do problema físico proposto será encontrada na obtenção de  $\Theta(x^*, \zeta)$  por meio da equação (5.4a).

# CAPÍTULO VI

## MODELAMENTO MATEMÁTICO COM EFEITO RADIATIVO - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA VIA GITT

### 6.1 MODELAMENTO MATEMÁTICO ADIMENSIONALIZADO

Para o mesmo problema físico proposto no capítulo anterior, agora assume real interesse a solução da equação de transferência radiativa (ETR). Utilizaremos o método híbrido numérico-analítico denominado Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT) para que a solução da ETR se torne possível. Como discutido, o problema adimensionalizado assumiu a forma:

Equação principal da energia na forma adimensionalizada:

$$u^*(\zeta) \frac{\partial \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial x^*} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial x^{*2}} + \frac{4}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} \right] + \frac{\tau^2}{N} \left[ G^*(x^*, \zeta) - [\Theta^*(x^*, \zeta) + 1]^4 \right]; \quad x^* > 0 \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4b)$$

Equação de transferência radiativa na forma adimensionalizada:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 G^*(x^*, \zeta)}{\partial x^{*2}} + \frac{4}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial G^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} \right] = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[ G^*(x^*, \zeta) - [\Theta^*(x^*, \zeta) + 1]^4 \right]; \quad x^* > 0 \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4c)$$

Condições de contorno, condição de entrada e condição de saída na forma adimensionalizada:

$$\frac{\partial \Theta^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 ; \quad x^* > 0 \text{ e } \zeta = 0 \quad (5.4d)$$

$$\frac{\partial G^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 ; \quad x^* > 0 \text{ e } \zeta = 0 \quad (5.4e)$$

$$\Theta^*(x^*, \zeta) = 0 ; \quad x^* > 0 \text{ e } \zeta = 1 \quad (5.4f)$$

$$\frac{\partial G^*(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{3\xi_w \tau}{4(2-\xi_w)} [G^*(x^*, \zeta) - 1] ; \quad x^* > 0 \text{ e } \zeta = 1 \quad (5.4g)$$

$$\Theta^*(x^*, \zeta) = \frac{T_e - T_w}{T_w} ; \quad x^* = 0 \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4h)$$

$$\frac{\partial G^*(x^*, \zeta)}{\partial x^*} = -\frac{3}{2} \tau.Pe \left[ G^*(x^*, \zeta) - \left( \frac{T_e}{T_w} \right)^4 \right] ; \quad x^* = 0 \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4i)$$

$$\Theta^*(x^*, \zeta) = 0 ; \quad x^* = \infty \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4j)$$

$$\frac{\partial G^*(x^*, \zeta)}{\partial x} = 0 ; \quad x^* = \infty \text{ e } 0 < \zeta < 1 \quad (5.4k)$$

A solução geral do problema físico proposto corresponde a solução simultânea da equação principal da energia e da equação de transferência radiativa, obedecendo as condições de contorno impostas. Uma vez que já utilizamos a GITT para encontrar a solução da equação da energia, agora usaremos da mesma metodologia para resolver a ETR.

## 6.2 FILTRO NO CAMPO DA INTENSIDADE DE RADIAÇÃO TOTAL

A GITT será aplicada na equação de transferência radiativa na direção radial. Como o problema original possui condição de contorno não homogênea nesta direção, dada pela equação (5.4g), filtros matemáticos serão utilizados para que a GITT seja aplicada adequadamente, bem como melhore a performance computacional. O filtro para o campo da intensidade de radiação total será da forma:

$$G^*(x^*, \zeta) = G^{**}(x^*, \zeta) + G_f(\zeta) \quad (6.1a)$$

Substituindo o filtro nas equações (5.4c), (5.4e) e (5.4g), obtém-se:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 G^{**}(x^*, \zeta)}{\partial x^{*2}} + \frac{4}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} [G^{**}(x^*, \zeta) + G_f(\zeta)] \right\} = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} [G^{**}(x^*, \zeta) + G_f(\zeta) - [\Theta^*(x^*, \zeta) + 1]^4] \quad (6.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} [G^{**}(x^*, \zeta) + G_f(\zeta)] = 0 ; \quad x^* > 0 \quad \text{e} \quad \zeta = 0 \quad (6.1c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} [G^{**}(x^*, \zeta) + G_f(\zeta)] = -\frac{3\xi_w \tau}{4(2 - \xi_w)} [G^{**}(x^*, \zeta) + G_f(\zeta) - 1] ; \quad x^* > 0 \quad \text{e} \quad \zeta = 1 \quad (6.1d)$$

O filtro  $G_f(\zeta)$  introduzido deve ser tal que obedeça as condições:

$$\frac{4}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left[ \zeta \frac{\partial G_f(\zeta)}{\partial \zeta} \right] - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} G_f(\zeta) = 0; \quad 0 < \zeta < 1 \quad (6.1e)$$

$$\frac{dG_f(\zeta)}{d\zeta} = 0; \quad \zeta = 0 \quad (6.1f)$$

$$\frac{dG_f(\zeta)}{d\zeta} + \frac{3\xi_w \tau}{4(2-\xi_w)} G_f(\zeta) = \frac{3\xi_w \tau}{4(2-\xi_w)}; \quad \zeta = 1 \quad (6.1g)$$

Resolvendo a equação diferencial (6.1e), segue que:

$$\frac{d^2 G_f(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dG_f(\zeta)}{d\zeta} - 3\tau^2 \frac{\beta}{4\kappa} G_f(\zeta) = 0 \quad (6.1h)$$

A equação diferencial ordinária acima têm solução clássica, por se tratar da equação diferencial de Bessel modificada. Usando o software de manipulação algébrica/simbólica MATHEMATICA (1991), a equação diferencial ordinária apresentada acima foi resolvida, tendo solução particular dada por:

$$G_f(\zeta) = \frac{a I_0(a \cdot \zeta)}{a I_0(a) + I_1(a)}; \quad a = \sqrt{3\tau^2 \frac{\beta}{4\kappa}} \quad (6.1i)$$

Onde  $I_0$  é a função de Bessel modificada de ordem zero e  $I_1$  é a função de Bessel modificada de primeira ordem. Uma vez que a expressão do filtro  $G_f(\zeta)$  já é conhecida,

precisamos agora determinar  $G^{**}(x^*, \zeta)$ , que será possível mediante a solução das equações:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 G^{**}(x^*, \zeta)}{\partial x^{*2}} + \frac{4}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta \frac{\partial G^{**}(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} \right] = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[ G^{**}(x^*, \zeta) - [\Theta^*(x^*, \zeta) + 1]^4 \right] \quad (6.1j)$$

$$\frac{\partial G^{**}(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 ; \quad x^* > 0 \quad \text{e} \quad \zeta = 0 \quad (6.1k)$$

$$\frac{\partial G^{**}(x^*, \zeta)}{\partial \zeta} + \frac{3\xi_w \tau}{4(2 - \xi_w)} G^{**}(x^*, \zeta) = 0 ; \quad x^* > 0 \quad \text{e} \quad \zeta = 1 \quad (6.1l)$$

Com  $G^{**}(x^*, \zeta)$  e  $G_f(\zeta)$  podemos determinar  $G^*(x^*, \zeta)$  por meio da equação (6.1a).

### 6.3 PROBLEMA AUXILIAR DE AUTOVALOR NA DIREÇÃO RADIAL

Mais uma vez, pelo fato do problema original ser descrito por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, recai sobre o problema típico de Sturm-Liouville.

A determinação do problema auxiliar deve conter o maior número de informações do problema original, que no nosso caso, agora, é o problema de transferência radiativa para  $G^{**}(x^*, \zeta)$ , satisfazendo o primeiro passo para o uso da Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT).

O problema auxiliar escolhido para a determinação da intensidade de radiação total é escrito da seguinte forma:

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \phi_i(\beta_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) + \beta_i^2 \phi_i(\beta_i, \zeta) = 0, \quad 0 < \zeta < 1 \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial \phi_i(\beta_i, \zeta)}{\partial \zeta} = 0; \quad \zeta = 0 \text{ e } \beta_i > 0 \quad (6.2b)$$

$$\frac{\partial \phi_i(\beta_i, \zeta)}{\partial \zeta} + \frac{3\xi_w \tau}{4(2 - \xi_w)} \phi_i(\beta_i, \zeta) = 0; \quad \zeta = 1 \text{ e } \beta_i > 0 \quad (6.2c)$$

Para este caso as equações descritas acima têm solução clássica, por se tratar da equação diferencial de Bessel. Portanto, as autofunções  $[\phi_i(\beta_i, \zeta)]$  assumem a forma:

$$\phi_i(\beta_i, \zeta) = J_0(\beta_i \zeta) \quad (6.3a)$$

Os autovalores ( $\beta_i$ 's) são as raízes das equações transcendentais:

$$\frac{3\xi_w \tau}{4(2 - \xi_w)} J_0(\beta_i) + \beta_i J_0'(\beta_i) = 0 \quad (6.3b)$$

As normas das autofunções podem ser calculadas pela expressão:

$$K_i = \int_0^1 \zeta \cdot \phi_i^2(\beta_i, \zeta) d\zeta \quad (6.3c)$$

As autofunções normalizadas podem ser encontradas por meio da equação:

$$\tilde{\phi}_i(\beta_i, \zeta) = \frac{\phi_i(\beta_i, \zeta)}{K_i^{1/2}} \quad (6.3d)$$

Vale salientar que as funções de Bessel obedecem ao princípio da ortogonalidade. De modo que:

$$\int_0^1 \zeta \cdot \tilde{\phi}_i(\beta_i, \zeta) \tilde{\phi}_j(\beta_j, \zeta) d\zeta = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (6.3e)$$

No presente trabalho utiliza-se o método da contagem de sinal para a determinação dos autovalores ( $\beta_i$ ), das autofunções  $\phi(\beta_i, \zeta)$ , e das normas ( $K_i$ ). O método da contagem de sinal foi implementado no código computacional na plataforma Fortran INTEL para a solução do problema de autovalor associado.

#### 6.4 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO DE INTENSIDADE DE RADIAÇÃO TOTAL

O par transformada integral definido para este problema é dado por:

$$\bar{G}_i(x^*) = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \cdot \phi_i(\beta_i, \zeta) G^{**}(x^*, \zeta) d\zeta, \quad \textit{Transformada} \quad (6.4a)$$

$$G^{**}(x^*, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\phi_i(\beta_i, \zeta) \bar{G}_i(x^*)}{K_i^{1/2}}, \quad \textit{Inversa} \quad (6.4b)$$

Operando a equação (6.1j) por  $\int_0^1 \zeta \frac{\phi_i(\beta_i, \zeta)}{K_i^{1/2}} d\zeta$ , nos faz encontrar:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \varsigma \phi_i(\beta_i, \varsigma) G^{**}(x^*, \varsigma) d\varsigma \right] + 4 \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \phi_i(\beta_i, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left[ \varsigma \frac{\partial G^{**}(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right] d\varsigma = \\
& = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \varsigma \phi_i(\beta_i, \varsigma) G^{**}(x^*, \varsigma) d\varsigma - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \varsigma \phi_i(\beta_i, \varsigma) [\Theta^*(x^*, \varsigma) + 1]^4 d\varsigma \quad (6.5a)
\end{aligned}$$

Usando a definição da transformada, encontra-se que:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(x^*)}{dx^2} + 4 \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \phi_i(\beta_i, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left[ \varsigma \frac{\partial G^{**}(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right] d\varsigma = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(x^*) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \varsigma \phi_i(\beta_i, \varsigma) [\Theta^*(x^*, \varsigma) + 1]^4 d\varsigma \quad (6.5b)$$

Da equação do problema auxiliar, temos que:

$$\frac{1}{\varsigma} \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \phi_i(\beta_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) + \beta_i^2 \phi_i(\beta_i, \varsigma) = 0 \quad (6.2a)$$

Operando a equação (6.2a) por  $-4 \int_0^1 \varsigma \frac{G^{**}(x^*, \varsigma)}{K_i^{1/2}} d\varsigma$ , segue que:

$$-4 \int_0^1 \frac{G^{**}(x^*, \varsigma)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \phi_i(\beta_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) d\varsigma - 4\beta_i^2 \bar{G}_i(x^*) = 0 \quad (6.5c)$$

Somando a equação (6.5c) com a equação (6.5b), encontra-se que:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(x^*)}{dx^2} + 4 \frac{1}{K_i^{1/2}} \left[ \int_0^1 \phi_i(\beta_i, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left[ \varsigma \frac{\partial G^{**}(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right] d\varsigma - \int_0^1 G^{**}(x^*, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \phi_i(\beta_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) d\varsigma \right] - 4\beta_i^2 \bar{G}_i(x^*) = \\
& = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(x^*) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \varsigma \phi_i(\beta_i, \varsigma) [\Theta^*(x^*, \varsigma) + 1]^4 d\varsigma \quad (6.5d)
\end{aligned}$$

Usando o teorema de Green no segundo termo do lado esquerdo da equação (6.5d), verifica-se que:

$$\begin{aligned}
& 4 \frac{1}{K_i^{1/2}} \left[ \int_0^1 \phi_i(\beta_i, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left[ \varsigma \frac{\partial G^{**}(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right] d\varsigma - \int_0^1 G^{**}(x^*, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \phi_i(\beta_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) d\varsigma \right] = \\
& = \frac{4}{K_i^{1/2}} \left[ \phi_i(\beta_i, \varsigma) \varsigma \frac{\partial G^{**}(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \Big|_0^1 - \int_0^1 \varsigma \frac{\partial G^{**}(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \frac{\partial \phi_i(\beta_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} d\varsigma \right] + \\
& \quad - \frac{4}{K_i^{1/2}} \left[ G^{**}(x^*, \varsigma) \varsigma \frac{\partial \phi_i(\beta_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \Big|_0^1 - \int_0^1 \varsigma \frac{\partial \phi_i(\beta_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \frac{\partial G^{**}(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} d\varsigma \right] \quad (6.5e)
\end{aligned}$$

Organizando os termos da equação (6.5e), bem como utilizando as condições de contorno:  $\frac{\partial G^{**}(x^*, 0)}{\partial \varsigma} = 0$  (6.1k),  $\frac{\partial G^{**}(x^*, 1)}{\partial \varsigma} = -\frac{3\xi_w \tau}{4(2-\xi_w)} G^{**}(x^*, 1)$  (6.1l),  $\frac{\partial \phi_i(\beta_i, 0)}{\partial \varsigma} = 0$  (6.2b) e  $\frac{\partial \phi_i(\beta_i, 1)}{\partial \varsigma} = -\frac{3\xi_w \tau}{4(2-\xi_w)} \phi_i(\beta_i, 1)$  (6.2c), encontra-se que:

$$4 \frac{1}{K_i^{1/2}} \left[ \int_0^1 \phi_i(\beta_i, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left[ \varsigma \frac{\partial G^{**}(x^*, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right] d\varsigma - \int_0^1 G^{**}(x^*, \varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \varsigma \frac{\partial \phi_i(\beta_i, \varsigma)}{\partial \varsigma} \right) d\varsigma \right] = 0 \quad (6.5f)$$

Retornando a equação (6.5d), resta que:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(x^*)}{dx^2} - 4\beta_i^2 \bar{G}_i(x^*) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(x^*) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \varsigma \phi_i(\beta_i, \varsigma) [\Theta^*(x^*, \varsigma) + 1]^4 d\varsigma = 0 \quad (6.5g)$$

Utilizando a definição de inversa do campo da temperatura, do capítulo anterior, dada pela equação (5.8b), podemos reescrever a equação (6.5g) como sendo:

$$\frac{1}{P\epsilon^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(x^*)}{dx^2} - 4\beta_i^2 \bar{G}_i(x^*) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(x^*) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \phi_i(\beta_i, \zeta) \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Psi_l(\mu_l, \zeta) \bar{\Theta}_l(x^*)}{N_l^{1/2}} + 1 \right]^4 d\zeta = 0 \quad (6.5h)$$

Fazendo:

$$B_{il} [\bar{\Theta}_l(x^*)] = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \cdot \phi_i(\beta_i, \zeta) \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Psi_l(\mu_l, \zeta) \bar{\Theta}_l(x^*)}{N_l^{1/2}} + 1 \right]^4 d\zeta \quad (6.5i)$$

Resta que:

$$\frac{1}{P\epsilon^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(x^*)}{dx^2} - 4\beta_i^2 \bar{G}_i(x^*) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(x^*) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} B_{il} [\bar{\Theta}_l(x^*)] = 0 \quad (6.5j)$$

Portanto, a equação principal torna-se a equação 6.5j, tal que a constante  $B_{il} [\bar{\Theta}_l(x^*)]$  é dada pela equação 6.5i .

## 6.5 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE ENTRADA

Operando a equação (5.4i) por  $\int_0^1 \zeta \frac{\phi_i(\beta_i, \zeta)}{K_i^{1/2}} d\zeta$ , obtém-se:

$$\frac{d}{dx^*} \left[ \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \phi_i(\beta_i, \zeta) G^{**}(x^*, \zeta) d\zeta \right] = -\frac{3}{2} \tau P e \left\{ \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta \phi_i(\beta_i, \zeta) [G^{**}(x^*, \zeta) + G_f(\zeta)] d\zeta \right\} + \frac{3}{2} \tau P e \left( \frac{T_e}{T_w} \right)^4 \int_0^1 \zeta \frac{\phi_i(\beta_i, \zeta)}{K_i^{1/2}} d\zeta \quad (6.6a)$$

no lado esquerdo e no primeiro termo do lado direito da equação (6.6a) aparece a definição da transformada, dada pela equação (6.4a), logo:

$$\left. \frac{d\bar{G}_i(x^*)}{dx^*} \right|_{x^*=0} = -\frac{3}{2}\tau.Pe\bar{G}_i(x^*)\Big|_{x^*=0} - \frac{3}{2}\tau.Pe\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta\phi_i(\beta_i, \zeta)G_f(\zeta)d\zeta + \frac{3}{2}\tau.Pe\left(\frac{T_e}{T_w}\right)^4 \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta\phi_i(\beta_i, \zeta)d\zeta \quad (6.6b)$$

Da equação do problema auxiliar, dada pela equação (6.2a), temos que:

$$-\frac{1}{\beta_i^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \phi_i(\beta_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right) = \zeta \phi_i(\beta_i, \zeta)$$

Logo, temos que:

$$\left. \frac{d\bar{G}_i(x^*)}{dx^*} \right|_{x^*=0} = -\frac{3}{2}\tau.Pe\bar{G}_i(x^*)\Big|_{x^*=0} - \frac{3}{2}\tau.Pe\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 \zeta\phi_i(\beta_i, \zeta)G_f(\zeta)d\zeta + \frac{3}{2}\tau.Pe\left(\frac{T_e}{T_w}\right)^4 \frac{1}{\beta_i^2.K_i^{1/2}} \frac{3\xi_w\tau}{4(2-\xi_w)} \phi_i(\beta_i, 1) \quad (6.6c)$$

## 6.6 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL NA CONDIÇÃO DE SAÍDA

Operando esta equação (5.4k) por  $\int_0^1 \zeta \frac{\phi_i(\beta_i, \zeta)}{K_i^{1/2}} d\zeta$ , obtém-se:

$$\frac{d\bar{G}_i(x^*)}{dx} = 0 \quad ; \quad x^* = \infty \quad (6.7a)$$

A solução particular da equação de transferência radiativa (6.5j) torna-se possível com o uso das condições de entrada e de saída, dadas pelas equações (6.6c) e (6.7a). A partir desta solução, utiliza-se a fórmula da inversa (eq. 6.4b) para encontrar a solução  $G^{**}(x^*, \zeta)$  do problema físico proposto. Por fim, usa-se as equações (6.1i) e (6.1a) para encontrar a solução geral  $G^*(x^*, \zeta)$ .

## 6.7 CÁLCULO DA TEMPERATURA MÉDIA ADIMENSIONAL

A temperatura média no tubo circular pode ser calculada por meio da expressão:

$$\Theta(x^*)_{média} = \frac{\int_0^1 \zeta \cdot u(\zeta) \Theta(x^*, \zeta) d\zeta}{\int_0^1 \zeta \cdot u(\zeta) d\zeta} \quad (6.8)$$

## 6.8 CÁLCULO DO NÚMERO DE NUSSELT

Uma vez conhecida as expressões para  $\Theta(x^*, \zeta)$  e  $G^*(x^*, \zeta)$ , podemos calcular o número de Nusselt por meio da expressão:

$$Nu_t = Nu_c + Nu_r = \frac{2}{\Theta(x^*)_{média}} \left. \frac{d\Theta(x^*, \zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} - \frac{1}{2\Theta(x^*)_{média}} \frac{\tau}{N} \left( \frac{\epsilon_w}{2 - \epsilon_w} \right) [G^*(x^*, 1) - 1] \quad (6.9)$$

Onde os índices t, c, r representam, respectivamente, a transferência total, convectiva e radiativa de calor.

## 6.9 ANÁLISE QUALITATIVA

O problema físico com acoplamento condução-radiação apresenta grandes dificuldades tanto do ponto de vista matemático como do ponto de vista computacional. Uma das dificuldades encontradas na execução deste trabalho foi a implementação computacional dos coeficientes não lineares:  $B_{i_k} [\bar{\Theta}_k(x^*)]$  e  $B_{i_l} [\bar{\Theta}_l(x^*)]$ . Essa dificuldade

impôs dúvidas sobre a correta implementação destes coeficientes, o que acabou acarretando em uma divergência na subrotina DBVFPD do IMSL. Portanto, nesta parte do trabalho será feita uma análise qualitativa das equações obtidas no modelamento matemático, fazendo-se comparações com os casos mais simplificados discutidos nos capítulos anteriores.

Comparando a equação da energia (4.6i), onde a radiação é negligenciada, com a equação da energia (5.9k), que considera o efeito radiativo, percebemos que a diferença entre elas consiste na introdução dos coeficientes  $B_{i_k} [\overline{\Theta}_k(x^*)]$  e  $R_i [\overline{G}_k(x^*)]$ , de modo que se na implementação computacional estes coeficientes fossem zerados, os resultados obtidos deveriam ser os mesmos que foram encontrados no capítulo IV.

A seguir, serão apresentadas tabelas de convergência para a solução numérica, no uso da subrotina DBVFPD do IMSL, para o caso em que a radiação é negligenciada.

<b>Número de Nusselt local - Nu</b>				
Pe = 1000 , n=1/3				
X	N <sub>T</sub> = 5	N <sub>T</sub> = 10	N <sub>T</sub> = 15	N <sub>T</sub> = 20
0.001997	8.75148	9.07284	9.07359	9.07359
0.002997	7.85269	7.94401	7.94402	7.94402
0.004997	6.75357	6.76249	6.76249	6.76249
0.009997	5.53788	5.53791	5.53791	5.53791
0.064497	4.19002	4.19002	4.19002	4.19002
0.097197	4.17638	4.17638	4.17638	4.17638
0.316197	4.17532	4.17532	4.17532	4.17532

Tabela 3.1: Convergência do número de Nusselt local para diferentes números de autovalores (N<sub>T</sub>) com o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para n=1/3 no uso da solução numérica.

<b>Número de Nusselt local - Nu</b>				
Pe = 1000 , n=1				
X	N <sub>T</sub> = 5	N <sub>T</sub> = 10	N <sub>T</sub> = 15	N <sub>T</sub> = 20
0.001997	7.70916	8.03887	8.04001	8.04001
0.002997	6.94486	7.04535	7.04538	7.04538
0.004997	5.99126	6.00256	6.00256	6.00256
0.009997	4.91637	4.91644	4.91644	4.91644
0.064497	3.67485	3.67485	3.67485	3.67485
0.097197	3.65836	3.65836	3.65836	3.65836
0.316197	3.65679	3.65679	3.65679	3.65679

Tabela 3.2: Convergência do número de Nusselt local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade tipo parabólico no uso da solução numérica.

<b>Número de Nusselt local - Nu</b>					
Pe = 1000 , n=3					
X	N <sub>T</sub> = 5	N <sub>T</sub> = 10	N <sub>T</sub> = 15	N <sub>T</sub> = 20	N <sub>T</sub> = 25
0.001997	7.25107	7.59298	7.59446	7.59447	7.59447
0.002997	6.54609	6.65478	6.65482	6.65482	6.65482
0.004997	5.65498	5.66827	5.66827	5.66827	5.66827
0.009997	4.63743	4.63753	4.63753	4.63753	4.63753
0.064497	3.42999	3.42999	3.42999	3.42999	3.42999
0.097197	3.41105	3.41105	3.41105	3.41105	3.41105
0.316197	3.40899	3.40899	3.40899	3.40899	3.40899

Tabela 3.3: Convergência do número de Nusselt local para diferentes números de autovalores ( $N_T$ ) com o perfil de velocidade no modelo de lei de potência para n=3 no uso da solução numérica.

Fica estabelecida que a convergência com cinco algarismos significativos para os pontos escolhidos em  $n=1/3$  ocorre para os valores de  $N_T = 15$ . Para os pontos escolhidos em  $n=1$  ocorre para os valores de  $N_T = 15$ . Para os pontos escolhidos em  $n = 3$  ocorre para os valores de  $N_T = 20$ .

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES

O presente trabalho caracteriza-se principalmente pelo seu tratamento analítico aproximado confrontado com a solução numérica. Para ambas situações, se utiliza a metodologia híbrida analítica-numérica da Técnica de Transformada Integral Generalizada para resolver a equação da energia.

Uma análise dos resultados obtidos permite as seguintes conclusões:

- A Técnica da Transformada Integral Generalizada permite uma abordagem analítica e sistemática a problemas inerentemente complexos, permitindo, com baixo custo computacional, a obtenção de resultados precisos para o campo de temperatura;
- Em baixos números de Peclet a condução axial desempenha um papel importante nos problemas de transferência de calor e sua omissão oferece um erro apreciável na computação da taxa de transferência de calor;
- Para pequenos números de Peclet a temperatura média no centro do tubo cai mais lentamente ao longo da distância axial. Efeito decorrente da condução axial no fluido, que faz preservar a temperatura;
- O número de Nusselt e o número de Peclet são inversamente proporcionais;
- A solução analítica aproximada não se mostrou satisfatória para perceber a variação do Nusselt com a distância axial, muito embora para  $Pe = \infty$  conseguisse reproduzir, com certa precisão, a convergência;
- O número de Nusselt tende a diminuir com o aumento do índice lei de potência;

- Constatou-se que a temperatura média ao longo do duto tende a aumentar à medida que o índice lei de potência cresce, mas não de forma muito significativa, pois os valores ficaram muito próximos;
- Os resultados obtidos no estudo de fluidos não-newtonianos com comportamento pseudoplástico são de grande importância, principalmente para o setor petróleo e gás que está na busca de soluções para o campo de velocidade e temperatura para estes tipos de fluidos.

Além disso, pode-se indicar as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Devido a dificuldades encontradas durante a implementação computacional da modelagem matemática proposta para o escoamento com acoplamento condução-radiação, a primeira proposta para trabalho futuro é fazer corretamente esta implementação computacional para obtenção e validação dos resultados obtidos;
- Estender a modelagem anterior a meios semitransparentes participantes, ou seja, que absorvem, emitem e espalham radiação, uma vez que a mesma ocorre em muitas aplicações de engenharia;
- Promover modelagens que incluam as propriedades térmicas dependentes do potencial, o que inclui considerações de anisotropia no problema;
- Solucionar o problema com acoplamento condução-radiação com condições de contorno geral, pois, nesse caso, aproxima-se consideravelmente do que ocorre na prática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ÇENGEL, Y., A.; “Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática”;  
**The McGraw Hill Companies**, Interamericana do Brasil Ltda. São Paulo,  
2009.
  
- [2] COTA, R., M.; “Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow”;  
**CRC Press**, Boca Raton, FL, EUA, 1993.
  
- [3] FORTRAN POWERSTATION, Version 4.0; **Microsoft Corporation.**, 1980.
  
- [4] **IMSL, Library**, 1989, Math/Lib, Houston, Texas.
  
- [5] MATHEMATICA, Version 8.0.1.0; **Wolfram.**, 2011.
  
- [6] MIKHAILOV, M. D.; and VULCHANOV, N. L.; “Computational procedure for  
Sturm-Liouville problems”, **Journal of computational Physics**, v. 5, 323-336,  
1983.
  
- [7] LOPES, M. M.; “Análise da convecção forçada no escoamento bidimensional  
laminar em dutos circulares em variáveis primitivas via GITT”; **Dissertação de  
mestrado- CT/UFPB**, 2012.

- [8] ANDRADE, J. H.; “Análise das Equações de Navier-Stokes no Escoamento Bidimensional em Dutos com Formulação em Variáveis Primitivas via GITT”; **Dissertação de mestrado, - CT/UFPB, 2010.**
- [9] MIKHAILOV, M. D.; ÖZISIK, M. N.; “Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion”, John Wiley, New York, 1984.
- [10] DINIZ, L. S.; “Estudo do Comportamento Térmico dos Materiais Cerâmicos”; **Dissertação de mestrado, - CT/UFPB, 2002.**
- [11] DINIZ, L. S.; “Estudo das Tensões Térmicas no Acoplamento Condução-Radiação em Materiais Semitransparentes”; **Tese de doutorado, - CT/UFPB, 2006.**
- [12] GOTZ, T., 2002, “Coupling heat conduction and radiative transfer”, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, Vol. 72, pp. 57-73.
- [13] VISKANTA, R. and LIM, J., 2002, “Transient cooling of cylindrical glass gob”, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, Vol. 73, pp. 481-490.
- [14] Einstein, T. H. Radiant heat transfer to absorbing gases enclosed in a circular pipe with conduction, gas flow and internal heat generation. NASA TR R-156, 1963.

- [15] Pearce, B. E., and Emery, A. Heat transfer by thermal radiation and laminar forced convection to absorbing fluid in the entry region of a pipe. *J. Heat Transfer*, 1970, 92, 221-230.
- [16] Echigo, R., Hasegawa, S., and Kinamoto, K. Composite heat transfer in a pipe with thermal radiation of two-dimensional propagation in connection with the temperature rise in a flowing medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1975, 18, 1149-1159.
- [17] Yener, Y., and Fong, T. M. I. Radiation and forced convection interaction in thermally developing laminar flow through a circular pipe. *Proc. 8<sup>th</sup> Int. Heat Transfer Conf.*, 1986, 2, 785-790.
- [18] HIROYUKI NAGASUE., “Steady-state heat transfer with axial conduction in laminar flow in circular tube with a specified temperature on heat flux wall”, *Int. J. Heat Mass Transfer* 24, 1823-1832 (1981).
- [19] ELEFThERIOS PAPOUTSAKIS, Doraiswami Rankrishna and Henry C. Lim., “The extended Graetz problem with Dirichet wall boundary conduction”, *Appl. Sci. Res* 36,13-34 (1980).
- [20] Y. BAGAZITOGU AND M. N. OZISIK., “On the solution of Graetz type problem with axial conduction”, *Int. J. Heat Mass Transfer* 23, 1399-1402 (1980).

- [21] B. VICK, M. N. OZISIK AND Y. BAGAZITOGU, "A method of analysis for low Peclet number thermal entry regions problems with axial conduction", *Letters in Heat Mass Transfer* 7, 235-248 (1980).
- [22] C. LAOHAKUL, C. Y. LOOK AND C. W. TAN, "On approximate solutions of the Graetz problem with axial conduction", *Int. J. Heat Mass Transfer* 28, 541-545 (1985).
- [23] PETER R. JOHNSTON, "Axial conduction and the Graetz problem for a Bingham Plastic in laminar tube flow", *Int. J. Heat Mass Transfer* 34, 1209-1217 (1991).
- [24] F. H. VERHOFF AND D. P. FISHER, "A numerical solution of the Graetz problem with axial conduction include", *Int. J. Heat Mass Transfer* 95, 132-134 (1973).
- [25] M.L. MICHELSON AND J. VILLADSEN, "The Graetz problem with axial heat conduction", *Int. J. Heat Mass Transfer* 17, 1391-1402.
- [26] Ozisik, M. N. *Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*. John Wiley, New York, 1973.
- [27] Sparrow, E. M., and Cess, R. D. *Radiation Heat Transfer Hemisphere*, Washington, DC, 1978.

- [28] SANTOS, C.A.C., “Solução exata para o escoamento tipo pistão com condução axial no fluido”, II Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, 287-294 (1992).
- [29] OLIVEIRA, IVAN S., Física Moderna para iniciados, interessados e aficionados, volume 1, editora da Física.
- [30] NUSSENZVEIG, H.M., Curso de Física Básica, Volume 4, editora Blucher, 1<sup>o</sup> edição, 1998.
- [31] KAKAÇ, S. and YENER, Y., Convective Heat Transfer, Second Edition, 1995.
- [32] G. YANG and M. A. EBADIAN, “Thermal Radiation and laminar forced convection in the entrance region of o pipe with axial conduction and radiation”, Int. J. Heat and Fluid Flow, 202-209 (1991).
- [33] J.R. TSAY and M.N. ÖZISIK, “Radiation and laminar forced convection of non-Newtonian fluid in a circular tube”, Int. J. Heat and Fluid Flow, 361-365 (1989).