



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

- Mestrado – Doutorado

**ANÁLISE TEÓRICA DO ESCOAMENTO BIFÁSICO E/OU
DOIS-FLUIDOS IMISCÍVEIS ANULAR ASCENDENTE VIA
GITT**

por

Patrícia Haueisen Dias Ruas

*Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da
Paraíba para obtenção do grau de Mestre*

PATRÍCIA HAUEISEN DIAS RUAS

**ANÁLISE TEÓRICA DO ESCOAMENTO BIFÁSICO E/OU
DOIS-FLUIDOS IMISCÍVEIS ANULAR ASCENDENTE VIA
GITT**

Dissertação apresentada à banca
examinadora do Curso de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica na área de
concentração Termofluidos da Universidade
Federal da Paraíba, em cumprimento às
exigências para obtenção do Grau de Mestre

Orientador: Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos

R894a Ruas, Patrícia Haueisen Dias.
Análise teórica do escoamento bifásico e/ou dois-fluidos
imiscíveis anular ascendente via GITT / Patrícia Haueisen Dias
Ruas.- João Pessoa, 2016.
95f. : il.
Orientador: Carlos Antônio Cabral dos Santos
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CT
1. Engenharia mecânica. 2. Escoamento bifásico.
3. Escoamento dois-fluidos. 4. Indústria - petróleo. 5. Técnica
da transformada integral generalizada.

UFPB/BC

CDU: 621(043)

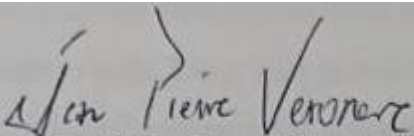
ANÁLISE TEÓRICA DO ESCOAMENTO BIFÁSICO E/OU DOIS-FLUIDOS IMISCÍVEIS ANULAR ASCENDENTE VIA GITT

por

Patrícia Haueisen Dias Ruas

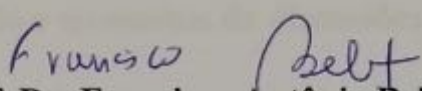
Dissertação aprovada em 04 de fevereiro de 2016

Período letivo 2015.2



Prof. Dr. Jean Pierre Veronese

Examinador Externo ao Programa – UFPB



Prof. Dr. Francisco Antônio Belo

Examinador Interno – UFPB

Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos

Orientador – UFPB

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pela família maravilhosa em que me inseriu nesta encarnação e sem a qual não teria como me dedicar aos estudos como tenho feito. Por Sua intervenção contínua em minha vida, me guiando pelos caminhos que, se a princípio pareciam desastrosos, se mostraram vantajosos tanto para o meu crescimento intelectual quanto pessoal.

À minha irmã, pelo simples fato de existir e estar ao meu lado em todos os instantes em que mais precisei. Aos meus pais, Regina Roxane Dias Ruas e Lister Haueisen de Pimenta Ruas, por tornarem a minha caminhada mais suave, apoiando-me e incentivando os meus sonhos, não importando o quão louco eles possam parecer no primeiro momento, pois para eles a única coisa que sempre importou foi a minha felicidade.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ao Prof. Cabral, que muito contribuiu para a concretização de mais etapa da minha vida acadêmica. Agradeço pela paciência, confiança, palavras de incentivo e por estar continuamente disposto a compartilhar comigo uma pequena parte do seu grande saber. Agradeço ainda por cada sugestão e momentos de discussões, sem os quais esta conquista não seria completa.

Aos demais professores do programa de pós-graduação em engenharia mecânica.

A todos os meus amigos, em especial, à Juanice Helena de Andrade por todos os momentos difíceis e de desespero em que ela me escutou e me acalmou, lembrando-me de que é possível.

Por último, mas não menos importante, agradeço a minha primeira professora de iniciação científica, Andrea Latge, que desempenhou um papel importantíssimo despertando em mim o interesse pela pesquisa.

“O futuro pertence àqueles que acreditam na beleza dos seus sonhos”.

Eleanor Roosevelt

ANÁLISE TEÓRICA DO ESCOAMENTO BIFÁSICO E/OU DOIS-FLUIDOS IMISCÍVEIS ANULAR ASCENDENTE VIA GITT

RESUMO

O presente trabalho realiza uma análise do escoamento multifásico (óleo-gás) ascendente em regime laminar, com perfis hidrodinamicamente desenvolvidos e interagindo termicamente. Os fluidos em análise são considerados imiscíveis, desenvolvendo-se em campos separados de velocidade e temperatura. A equação da energia é aplicada para a obtenção dos campos térmicos em desenvolvimento na região de entrada térmica dos fluidos escoando na mesma direção. Embora resultados de parâmetros de interesse prático já tenham sido obtidos através de procedimentos puramente numéricos, o sistema de equações que regem esse tipo de escoamento envolve diferenciais parciais e ainda não foram solucionadas analiticamente com sucesso. Dessa forma, o uso da Técnica de Transformada Integral Generalizada, como ferramenta matemática, é proposto para resolver as equações de energia associada ao escoamento produzindo resultados híbridos, analítico-numérico, com maior flexibilidade de análise e extensão para um grande número de parâmetros utilizados na engenharia de petróleo e gás. Problemas auxiliares com o maior número possível de informações do problema original são apresentados na busca da melhoria da convergência numérica. Por fim, uma rotina computacional é elaborada em FORTRAN para a obtenção da solução numérica. Os resultados numéricos obtidos para os campos são apresentados na forma de tabelas e gráficos para em seguida serem comparados com o máximo de esmero aos parâmetros de casos especiais disponíveis na literatura especializada.

Palavras Chaves - Escoamento bifásico, escoamento dois-fluidos, indústria de petróleo, técnica da transformada integral generalizada.

THEORETICAL ANALYSIS OF TWO-PHASE AND/OR IMMISCIBLE TWO-FLUID FLOW UP ANNULAR ASCENDING BY GITT

ABSTRACT

The present paper makes an analysis of multiphase flow up (oil-gas) in laminar regime, with hydrodynamically developed profiles and interacting heat. The fluids analyzed are considered immiscible, developing into separated speed and temperature fields. The energy equations are applied to obtain of heat fields in the thermal entry region of the fluids flowing in the same direction. Although the results of parameters of practical interest has been obtained by purely numerical procedures, the system governing equations involving partial differential and have not been resolved successfully analytically yet. Thus, the use of Generalizes Integral Transform Technique, as powerful mathematical tool, is proposed to solve the energy equations associated with the flow and to producing hybrid results, analytical-numerical, more extension e analysis flexibility to a large number of parameter used in oil and gas engineering. Auxiliary problems with the greatest possible number of original problem information are presented in an attempt of improving the numerical convergence. Lastly, a computational routine is developed in FORTRAN to obtain the numerical solution. The numerical results obtained for the fields are presented in tables and graphs for then be compared with the maximum care to the parameters of special cases available in the literature.

Keywords – Two-phase flow, two-fluid flow, oil industry, generalizes integral transform technique.

SUMÁRIO

1 O TRABALHO DISSERTATIVO	1
1.1 INTRODUÇÃO	1
1.2 ASPECTOS MOTIVACIONAIS	4
1.3 OBJETIVOS	6
1.3.1 Objetivos Gerais	6
1.3.2 Objetivos Específicos	6
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	6
2 ESCOAMENTO MULTIFÁSICO E/OU DOIS-FLUIDOS	8
2.1 INTRODUÇÃO	8
2.2 PADRÕES DE FLUXO	9
2.2.1 Padrões de Fluxo no escoamento Bifásico e/ou Dois-fluidos	10
2.3 MODELAGEM DO ESCOAMENTO MULTIFÁSICO E/OU MULTIFLUIDO..	16
2.3.1 Modelo de dois-fluidos	17
2.4 ESCOAMENTO NO PADRÃO ANULAR	21
2.5 ESTADO DA ARTE.....	23
3 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	27
3.1 INTRODUÇÃO	27
3.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	28
3.3 ESTADO DA ARTE	29
4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	32
4.1 INTRODUÇÃO	32
4.2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA FÍSICO	32
4.3 MODELO MATEMÁTICO	34

4.3.1 Equações de Balanço	35
4.3.2 Perfis de Velocidade e Velocidades Média	37
4.3.2 O Problema na Forma Adimensional	38
 5. APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALI- ZADA NA SOLUÇÃO DOS CAMPOS TÉRMICOS	 41
5.1 INTRODUÇÃO	41
5.2 PASSO 1: ESCOLHA DO PROBLEMA DE AUTOVALOR AUXILIAR	41
5.3 PASSO 2: OBTENÇÃO DO PAR TRANSFORMADA-INVERSA	44
5.4 PASSO 3: TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA ORIGINAL	45
5.5 PASSO 4: SOLUÇÃO DO PROBLEMA TRANSFORMADO	48
 6 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR NOS CASOS DE MEIO COM- POSTO	 49
6.1 INTRODUÇÃO	49
6.2 O PROBLEMA DE AUTOVALOR	49
6.3 DETERMINAÇÃO DOS AUTOVALORES PELO MÉTODO DA CONTA- GEM DE SINAL	 58
6.4 DETERMINAÇÃO DAS AUTOFUNÇÕES E DAS NORMAS ASSOCIADAS AO PROBLEMA DE AUTOVALOR	 59
 7 ANÁLISE DOS RESULTADOS	 61
7.1 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA	61
7.2 PARÂMETRO DE INTERESSE: NÚMERO DE NUSSELT	62
7.3 VALIDAÇÃO	67
 8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	 70
8.1 PRINCIPAIS RESULTADOS INFERIDOS	70
8.2 TEMAS A SEREM ABORDADOS EM TRABALHOS FUTUROS	71

APÊNDICES:

A - SOLUÇÃO FORMAL DOS PERFIS DE VELOCIDADE E DAS VELOCIDADES MÉDIA PARA O ESCOAMENTO GÁS-LÍQUIDO EM CANAL DE GEOMETRIA CIRCULAR COM A ORIGEM NO SISTEMA DE COORDENADAS NO CENTRO DO CANAL	72
REFERÊNCIAS	76

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Classificação do fluxo bifásico e/ou dois-fluidos	12
Figura 2.2	Padrões de fluxo no escoamento bifásico e/ou dois-fluidos horizontal ..	13
Figura 2.3	Padrões de fluxo no escoamento bifásico e/ou dois-fluidos vertical	14
Figura 2.4	Representação da secção transversal do escoamento gás-líquido no padrão anular	22
Figura 4.1	Esquema do Problema Proposto	33
Figura 5.1	Estrutura do código computacional desenvolvido: HANCAF	48
Figura 6.1	Esquema representado as duas regiões: gás-líquido	50
Figura 6.2	Esquema representando as duas regiões e suas sub-regiões	51
Figura 7.1	Número de Nusselt local para diferentes espessuras de filme líquido $(1 - \delta)$	65
Figura 7.2	Número de Nusselt local para diferentes valores do parâmetro $\hat{G} = \left[\frac{\partial \hat{p}_l}{\partial Z} + \hat{\rho}_l g \right] / \left[\frac{\partial \hat{p}_g}{\partial Z} + \hat{\rho}_g g \right]$	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1	Temperaturas média adimensionais (θ_b) obtidas truncando-se as séries para diferentes ordens (i)	62
Tabela 7.2	Números de Nusselt locais (Nu) obtidos para $\delta = 0.9999$ truncando-se as séries em diferentes ordens (i)	64
Tabela 7.3	Números de Nusselt locais (Nu) obtidos para diferentes valores de B - fazendo $\delta = 0.8$ e $i=20$ -.	67
Tabela 7.4	Números de Nusselt locais (Nu) obtidos para diferentes valores de B - fazendo $\delta = 0.9999$ e $i=20$ -.	67
Tabela 7.5	Autovalores para escoamento em dutos circulares.....	68
Tabela 7.6	Comparação entre a temperatura média adimensional obtida no presente trabalho e a apresentado por NOGUEIRA (1988))	69
Tabela 7.7	– Comparação entre a temperatura média adimensional obtida no presente trabalho e a apresentado por NOGUEIRA (1988)	69

LISTA DE SÍMBOLOS

Latim

A_i	-	Coeficiente de expansão
a_i	-	Concentração de área interfacial
$Bi_{g,l}$	-	Número de <i>Biot</i> na interface entre as regiões gás-líquido
$Bi_{l,\infty}$	-	Número de <i>Biot</i> na interface do duto
C_f	-	Capacitância térmica da fase/região f
Cp_f	-	Calor específica a pressão constante da fase/região f
D_h	-	Diâmetro hidráulico
E_f	-	Ganho de energia total originário da interface para a fase/região f
E_s	-	Fonte de energia total do sistema fluídico originário da interface
Fr	-	Número de <i>Froude</i>
g_f	-	Gravidade
$\hat{e}_f$	-	Energia interna virtual (energia interna + energia cinética devido à turbulência) média ponderada pela massa e associada à fase/região f
$\hbar$	-	Coeficiente de contato térmico
$\hbar_{l,\infty}$	-	Coeficiente de contato térmico na interface com o duto
$\hbar_{g,l}$	-	Coeficiente de contato térmico na interface entre as fases/regiões gás-líquido.
$\hat{h}_{fi}$	-	Entalpia virtual (entalpia + energia cinética devido à turbulência) média ponderada pela massa na interface do sistema fluídico
$\mathbb{I}$	-	Tensor unitário
I_f	-	Fonte interfacial da fase/região f
I_s	-	Fonte interfacial do sistema fluídico
J_f	-	Tensor de fluxo generalizado instantâneo relacionado a fase/região f
$\bar{J}_f$	-	Tensor de fluxo generalizado médio relacionado a fase/região f

J_f^T	- Tensor de fluxo turbulento relacionado a fase/região f
k_f	- Condutividade térmica da fase/região f
M_f	- Termo fonte relacionado à quantidade de movimento para a fase/região f
M_s	- Termo fonte relacionado à quantidade de movimento para o sistema fluídico
M_{if}	- Arrasto interfacial generalizado
$\dot{m}_{LF}$	- Fluxo de massa do filme líquido
N_i	- Norma associada ao autovalor λ_i
Nu	- Número de <i>Nusselt</i> local
p_f	- Pressão parcial para a fase/região f
$\overline{p}_{fi}$	- Pressão média da interface
Pe	- Número de <i>Peclet</i>
Pr	- Número de <i>Prandtl</i>
q_f	- Fluxo de calor relacionada à fase/região f
$\overline{q}_f$	- Fluxo de calor médio associado à fase/região f
$\dot{q}_f$	- Fluxo de calor local relacionado à fase/região f
$\overline{q''}_{fi}$	- Energia média transferida para a fase/região f por unidade de área interfacial
q_f^T	- Fluxo de calor turbulento associado à fase/região f
R	- Coordenada espacial radial adimensional
r	- Coordenada espacial radial
r_i	- Coordenada radial associada à interface entre as fase/regiões
r_t	- Coordenada radial associada à interface do duto
Re_{LFC}	- Número de <i>Reynolds</i> crítico do filme líquido
t	- Tempo
T	- Temperatura
T_0	- Temperatura em $z = 0$
$\mathbb{T}_f$	- Tensor das tensões da fase/região f
T_b	- Temperatura média (<i>bulk</i>)
$\hat{u}_f$	- Energia interna média ponderada pela massa da fase/região f
V_f	- Velocidade adimensional associada à fase/região f
$\mathbf{v}_f$	- Vetor velocidade da fase/região f
v_r	- Componente do vetor velocidade na direção r

v_θ	-	Componente do vetor velocidade na direção θ
v_z	-	Componente do vetor velocidade na direção z
$\bar{v}$	-	Velocidade média do escoamento (no canal)
$\bar{v}_f$	-	Velocidade média do fluido escoando na fase/região f
$\hat{v}_f$	-	Velocidade média ponderada pela massa da região f (velocidade do centro de massa referente a cada região)
$\hat{v}_{fi}$	-	Velocidade média da interface
W_{fi}^T	-	Trabalho devido às flutuações das forças de arrasto
w_f	-	Função associada à fase/região f , definida em (5.1g)
x	-	Coordenada espacial
y	-	Coordenada espacial
z	-	Coordenada espacial axial
Z	-	Coordenada espacial axial adimensional

Grego

α_f	-	Difusividade da fase/região f
Γ_f	-	Termo fonte relacionado à quantidade de massa para a fase/região f
δ	-	Coordenada radial adimensional associada à interface entre as fases/regiões
ε_f	-	Fração de vazia da fase/região f
θ_f	-	Temperatura adimensional associada à fase/região f
θ_b	-	Temperatura média (<i>bulk</i>) adimensional
λ_i	-	Autovalor
μ_g	-	Viscosidade da região de gás
μ_l	-	Viscosidade da região de líquido
μ_{LF}	-	Viscosidade do filme líquido
$\bar{\rho}_f$	-	Massa específica média da fase/região f ponderada pela função de fase
ρ_g	-	Massa específica da região de gás
ρ_l	-	Massa específica da região de líquido
ϕ_f	-	Termo fonte relacionada a fase/região f
$\hat{\phi}_f$	-	Propriedade extensiva genérica média da fase/região f ponderada pela massa
ψ_{if}	-	Autofunção associada ao autovalor λ_i e à fase/região f

- $\mathfrak{C}_f$ - Tensor das tensões viscosas da fase/região f
 $\mathfrak{C}_f^T$ - Tensor das tensões turbulentas da fase/região f
 $\overline{\mathfrak{C}}_{fi}$ - Tensor das tensões interfaciais

Subscritos

- i - Referente ao autovalor λ_i
 f - Referente à fase/região f
 g - Referente à região de gás
 l - Referente à região de líquido

CAPÍTULO I

O TRABALHO DISSERTATIVO

Neste capítulo introdutório o tema do trabalho é contextualizado e sua importância discutida. Nesta seção, são apresentados, ainda, os motivos que impulsionaram o desenvolvimento deste projeto. Por fim, discorre-se a respeito da forma adotada na organização e apresentação do conteúdo exposto.

1.1 INTRODUÇÃO

O entendimento do mecanismo de transferência de calor e massa num escoamento simultâneo de pelo menos dois fluidos e/ou duas fases através de um mesmo canal é assunto de interesse crescente da comunidade acadêmica. A compreensão precisa das leis que regem os sistemas de fluxo multifluido e/ou multifásico é de fundamental importância no que se refere à garantia de projetos eficientes e seguros nas mais diversas áreas da engenharia. RODRIGUEZ (2011) cita exemplos importantes onde o escoamento multifásico está presente, como segue:

- *Indústria de petróleo*: os projetos que envolvem os processos de perfuração e produção de poços, bem como o transporte e separação das misturas de óleo e gás requerem previsão da queda de pressão e fração de líquido.
- *Indústria de energia*: o adequado projeto de dispositivos como evaporadores, condensadores, câmaras de combustão e reatores nucleares, exigem métodos para previsão da queda de pressão, concentração volumétrica, taxas de transferência de calor e massa, para seu adequado projeto.

- *Indústria de processos, alimentícias e agrícolas*: reatores químicos, unidades de destilação, unidades de extração e absorção, emulsificadores, secadores, ciclones de separação, atomizadores, lavadores e compressores de ar ou sistemas de transporte de líquido, exigem previsões das taxas de transferência de calor e massa, perda de carga e concentrações
- *Indústria automotiva*: para que se tenha uma boa eficiência e baixo nível de emissão do motor é necessário o conhecimento da distribuição do escoamento e determinação das taxas de transferência de calor e massa nos sistemas de alimentação de misturas combustível-ar, sistema de combustão e células de combustível.
- *Indústria de aquecimento e refrigeração*: refrigeradores, condicionadores de ar, bombas de calor e seus componentes, sistemas de resfriamento de circuitos eletrônicos, onde a determinação da perda de carga, concentração volumétrica e taxas de transferência de calor e massa são imprescindíveis.
- *Indústria metalúrgica*: conhecimento do escoamento bifásico com mudança de fases são importantes na elaboração de projetos de fornos e sistemas de escoamentos que trabalham com metais fundidos.
- *Indústria aeroespacial*: além da geração de energia, sistemas compactos de armazenamento de energia e tubos de calor requerem conhecimentos do fluxo multifásico com mudança de fase em ausência de gravidade.

Este cenário implica na verificação de uma crescente necessidade em se desenvolver métodos mais consistentes de análise, do escoamento em questão, baseados num arcabouço matemático que possa prever com certa segurança o comportamento dinâmico do sistema em estudo.

Contudo, poucos são os estudos teóricos neste contexto. Muitos creditam este fato à complexidade dos modelos físicos e matemáticos que governam tal escoamento. A principal dificuldade está em prever as distribuições de velocidade, de temperatura e das fases. Essas determinações assumem uma maior complexidade se comparadas ao escoamento de apenas um fluido numa mesma fase devido, em especial, às várias maneiras que a(s) interface(s) entre as regiões podem se distribuir espacialmente e temporalmente. Tais configurações recebem o nome de regimes ou padrões de fluxo (ou ainda de escoamento) e vão depender de certas variáveis que caracterizam o escoamento como a vazão de cada componente, propriedades dos fluidos e geometria da tubulação.

O estudo acerca do escoamento de um único fluido apresentando apenas uma fase se encontra bastante adiantado, por esta razão muitas das vezes ao se trabalhar em situações adversas o escoamento é simplificado como um-fluido monofásico, no intuito de facilitar a tratamento matemático. No entanto, esta aproximação pode levar a incertezas que não são percebidas de forma imediata. No caso específico da indústria de petróleo, a depender das simplificações realizadas, verifica-se um possível comprometimento no dimensionamento dos dutos e bombas, na determinação da composição do fluido de perfuração, no controle da produção e na própria segurança das operações. Dessa forma, há momentos em que se faz necessária uma análise mais criteriosa do escoamento estudado, a fim de se obter melhores resultados, nesses casos, o escoamento deverá ser tratado de forma mais rigorosa.

Ao se trabalhar na análise de escoamentos multifluidos e/ou multifásicos de forma mais estrita é imposto aos modelos físicos e matemáticos que governam o escoamento uma maior complexidade. Além das dificuldades relacionadas à predição do comportamento nas interfaces, já citadas, limitações matemática também estão presentes, uma vez que o entendimento do escoamento em questão está associado à solução das equações diferenciais que o governam, que por apresentarem diferenciais parciais limitam o número de situações em que uma solução analítica satisfatória é possível.

Diante de tal problemática, alguns estudiosos optam por analisarem alguns casos de escoamento com base em correlações existentes na literatura que podem prever o gradiente de pressão em situações específicas. Em contrapartida, sabe-se que o enfoque correlacional é fortemente empírico (baseando na análise de dados de campo e/ou experimentais) e suas aplicações são restritas pelos limites inerentes aos experimentos que os deram origem.

Nesse contexto, a utilização do método dos volumes finitos, que traz vantagens como facilidade na aplicação e natureza implicitamente conservativa, ganhou espaço há algumas décadas com o considerável incremento no poder de processamento dos computadores, sendo hoje amplamente utilizado. No entanto, ao se fazer uso dos métodos discretos algumas desvantagens geram preocupações, como é o caso das dificuldades nas análises e os erros de truncamento - originários de aproximações de derivadas e integrais em termos de pontos nodais no domínio computacional, o que implica na necessidade de um refinamento adequado da malha utilizada.

Diante de todos os empecilhos apresentados na análise desse do escoamento multifluido e/ou multifásico, o presente trabalho sugere a utilização da Técnica da

Transformada Integral Generalizada, GITT¹, na solução das equações que o governam. A GITT tem como ideia base a expansão da função potencial buscada em termos de infinitas bases ortogonais de autofunções, mantendo assim, a análise num domínio contínuo. Como resultado tem-se um conjunto de equações diferenciais acopladas que pode ser resolvido sem maiores dificuldades através de rotinas numéricas que permitem o controle da precisão. Porém, como as séries infinitas deverão ser truncadas tem-se um erro de truncamento envolvido que é tanto menor quanto maior for o número de termos. Ainda como vantagem deste método tem-se o melhor controle do erro global da solução, uma vez que a representação em série facilita a obtenção da estimativa do erro. A desvantagem do método reside na necessidade de manipulação analítica mais elaborada.

1.2 ASPECTOS MOTIVACIONAIS

O petróleo é um fluido heterogêneo, isto é, formado por múltiplos componentes. Sua composição depende das condições originais de pressão e temperatura da rocha geradora, assim como do tipo da matéria orgânica que lhe dá origem. Dessa forma, o óleo formado na rocha geradora e estancado no reservatório pode ser composto por diferentes concentrações das frações de hidrocarbonetos (desde metano até cadeias com mais de 38 átomos de carbono), compostos nitrogenados, compostos oxigenados, compostos sulfurosos, resinas e asfaltenos.

Além do óleo propriamente dito, é esperado de um reservatório de petróleo que ele produza simultaneamente gás natural e água; e em alguns casos até mesmo areia. Logo, a produção de petróleo constitui um exemplo clássico de escoamento multifásico-multifluido, uma vez que além do óleo ser composto por múltiplos componentes em grande parte dos casos estão presentes as três fases físicas possíveis:

- *Gás*: vapor d'água e hidrocarbonetos gasosos;
- *Líquido*: água e hidrocarbonetos líquido;
- *Sólido*: areia, sílica, resinas, asfaltenos, compostos metálicos e sais.

Diante disso torna-se evidente que o escoamento multifluido é inerente à indústria do petróleo, estando presente tanto no processo de recuperação (escoamento através do

¹ Sigla originada da língua inglesa. *Generalized Integral Transform Technique*

reservatório/meio poroso) quanto no processo de produção (- elevação: escoamento através da coluna de produção; - coleta: escoamento através das linhas de superfície).

O caminho percorrido pelo fluido de interesse tem início no reservatório atravessando o meio poroso até o fundo do poço. A partir daí o fluxo se dá através de tubulações de geometria cilíndrica passando pela coluna de produção, árvore de natal, linhas de produção, regulador de fluxo, até chegarem por fim nos vaso-separadores. Como observado, um longo caminho é percorrido pelos fluidos durante todo o processo de recuperação e produção.

No presente trabalho, o estudo abarca o escoamento gás-óleo, através de *risers* rígidos verticais em poços *offshore*. *Risers*, na indústria do petróleo é o termo empregado para se referir aos dutos responsáveis em transportar o fluido produzido desde a árvore de natal, localizada na cabeça do poço no fundo do mar, até a plataforma ou navio de produção na superfície. Os dutos em questão são classificados quanto à sua constituição estrutural em flexíveis e rígidos. Os primeiros são constituídos de camadas de materiais diferentes sendo o seu centro composto por uma armadura espiralada. Já os *risers* rígidos são compostos de dutos interligados constituídos por liga de aço ou mesmo titânio.

Na produção *offshore*, o fluido produzido escoar através dos *risers* a temperaturas elevadas se comparada à da água do mar que comumente é encontrada na ordem de 2°C. Diante deste gradiente de temperatura haverá troca de calor entre o petróleo que está sendo transportado e os *risers* que estão na temperatura do ambiente ao qual estão inseridos, 2°C. Consequentemente o óleo será resfriado o que acarreta alterações diretas no comportamento do escoamento do fluido assim como em suas características. Dependendo da faixa de variação da temperatura em que é submetido o petróleo alguns efeitos indesejáveis podem ser observados como o aumento na viscosidade efetiva do óleo e a deposição de parafinas nas paredes dos dutos. Ambos os efeitos podem acarretar problemas operacionais como um maior consumo de energia para o bombeamento do fluido e/ou uma diminuição da vazão.

Dessa forma, a qualidade da produção petrolífera está fortemente relacionada a manutenção da temperatura numa determinada faixa ao longo do *riser*. Para tanto, atualmente são empregados sistemas de isolamento térmico e aquecedores elétricos acionados através do monitoramento da transferência de calor ao longo da parede do *riser*.

Diante do que foi exposto é evidente que o conhecimento do mecanismo de troca de calor durante o escoamento através dos *risers* é de especial interesse, podendo seu estudo e previsão evitar problemas operacionais além de otimizar a produção. Em adição, o

conhecimento das características do escoamento de forma mais precisa oferece vantagens e facilidades no desenvolvimento de equipamentos de medição, no correto dimensionamento de toda a estrutura de transporte projetada e no controle e gerenciamento da quantidade de fluido produzido e transferido.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Apresentar o emprego Técnica da Transformada Integral Generalizada como metodologia para a obtenção de resultados na análise do escoamento bifásico/dois-fluidos óleo-gás, considerando a influência da temperatura nas propriedades termo físicas dos fluidos de interesse.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Realizar um levantamento dos métodos de análise de escoamento bifásico e/ou dois-fluidos existentes, enfatizando o adotado na realização do estudo;
- Solucionar o problema de escoamento formulado através da Técnica de Transformada Integral Generalizada;
- Elaborar uma rotina computacional responsável pela solução numérica;
- Apresentar e avaliar os resultados obtidos validando-os a partir de valores existentes na literatura.

1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho de dissertação encontra-se estruturado em oito capítulos organizados da forma especificada a seguir.

No capítulo I faz-se uma introdução do tema estudado contextualizando-o de forma a justificar a sua importância e necessidade acadêmicas. Ainda neste capítulo encontra-se os objetivos almejados e uma descrição da organização do trabalho.

Como o trabalho de pesquisa desenvolvido engloba duas áreas distintas de estudo: escoamento multifluido e/ou multifásico e técnica da transformada integral generalizada;

optou-se, no intuito de situar o problema estudo em relação ao conhecimento existente neste âmbito, por apresentar tanto a fundamentação teórica quanto o estado da arte de cada um dos campos de estudo citados em capítulos distintos. Dessa forma, enquanto o capítulo II discorre sobre as questões do escoamento multifluido enquanto que o capítulo III considera os aspectos relacionas à metodologia empregada, isto é, a GITT.

No capítulo seguinte, capítulo IV, o problema proposto é especificado fisicamente. Nele também se observa a apresentação da formulação matemática desenvolvida com base nas considerações e hipóteses simplificadoras adotadas.

Já no capítulo V é realizado a aplicação da metodologia proposta, GITT, para a resolução do problema formulado no capítulo anterior. No capítulo VI o problema de autovalor para o caso de meios compostos é desenvolvido no intuito para que se possa melhor embasar a metodologia apresentada e aplicada no capítulo anterior. Os resultados obtidos são apresentados no capítulo VII, juntamente com sua análise e a comparação dos dados gerados com os existentes na literatura aberta.

Por fim, no capítulo VIII, são expostas as conclusões acerca dos resultados alcançados para em seguida oferecer-se sugestões de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

ESCOAMENTO MULTIFÁSICO E/OU MULTIFLUIDO

Neste capítulo são desenvolvidos alguns conceitos importantes que deverão ser considerados na elaboração e modelagem do problema a ser proposto no Capítulo IV. Inicialmente a definição de escoamento multifluido é apresentada, assim como sua distinção em relação ao escoamento multifásico. Posteriormente, é levantada uma discussão acerca dos padrões de fluxo existentes, para, por fim, apresentar-se o modelo de dois fluidos.

2.1 INTRODUÇÃO

A hidrodinâmica é o ramo da mecânica dos fluidos que estuda os escoamentos ou fluxos dos fluidos tendo como arcabouço as leis de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia e entropia.

Os fluxos são tradicionalmente classificados em:

- Laminar ou turbulento
- Uni, bi ou tridimensional
- Rotacional ou irrotacional
- Permanente ou transitório
- Livre ou forçado

Ainda neste contexto, o escoamento pode ser classificado quanto ao número de fases que compõem o sistema fluídico em estudo em monofásico ou multifásico, no qual o último inclui os casos de fluxo bifásico. Seguindo o mesmo raciocínio, os escoamentos podem ser agrupados, segundo o número de fluidos imiscíveis escoando simultaneamente através de um mesmo canal, em monofluido (um-fluido) ou multifluido, naturalmente o

fluxo dois-fluidos está inserido na classe dos multifluido. É notório que uma classificação não exclui a outra, por exemplo, o escoamento de vapor d'água - água é classificado como bifásico e monofluido, da mesma forma, o escoamento ar-água é dito bifásico e dois-fluidos.

Apesar das distinções, é comum se verificar na literatura os termos multifásico e multifluido, assim como bifásico e dois-fluidos, sendo tratados como sinônimos. Isso se deve ao fato de ambos os tipos de escoamento possuírem aspectos em comum, como a presença de interface(s), que possibilitam, para fins práticos, serem tratados sob uma mesma perspectiva de análise. Segundo WALLIS (1969 *apud* LIMA, 2011), desde que as formulações matemáticas que descrevem o escoamento multifásico e o escoamento multifluido sejam idênticas, qualquer uma das duas definições pode ser utilizada sem prejuízo. Sendo assim, doravante no presente trabalho, não se fará distinções entre os termos.

2.2 PADRÕES DE FLUXO

A natureza complexa do escoamento multifásico e/ou multifluido tem como princípio a existência de interfaces entre as regiões com diferentes fases e/ou fluidos que estão escoando simultaneamente. Utilizando-se a abordagem da mecânica clássica dos meios contínuos define-se interface como uma superfície de *descontinuidade*, isto é, não possuem espessura nem massa mas pode acumular energia e entropia (possui temperatura bem definida), que delimita duas regiões podendo ainda assim deslocar-se no espaço e deformar-se: as propriedades do escoamento como velocidade e tensões a depender do caso podem apresentar em seus valores descontinuidades significativas.

O conhecimento das características relacionadas à interface (e.g. distribuição espacial dos fluidos e tipo de acoplamento existente entre estes) juntamente com todas as variáveis já inseridas pelo escoamento monofásico e/ou monofluido, são necessários na elaboração de um modelo que capture de forma satisfatória as informações do escoamento multifásico e/ou multifluido.

Uma vez que o sistema em estudo é dito multifásico e/ou multifluido ele poderá ser classificado ainda de acordo com o seu padrão de fluxo. Tal classificação refere-se às diferentes geometrias que podem ser formadas pelas interfaces dependendo das vazões, das propriedades e das características do meio pelo qual ocorre o escoamento. A saber, ao se analisar diferentes padrões de escoamento observa-se alterações visíveis na estrutura das regiões, no entanto, isso não implica na necessidade de elaboração de uma nova abordagem

matemática, como ocorre quando se analisa diferentes regimes de escoamento (laminais/turbulento).

2.2.1 Padrões de Fluxo no Escoamento Bifásico e/ou Dois-fluidos

No escoamento multifásico e/ou multifluido estão sempre presentes interfaces delimitando as diferentes fases e/ou componentes. Tais interfaces se distribuem em configurações particulares determinadas pelo balanço das forças locais, de campo e de superfície no interior de cada região e nas interfaces. As possíveis distribuições espaciais e temporais que as interfaces, e consequentemente as fases e/ou componentes que compõem o escoamento, podem assumir são responsáveis pela determinação dos padrões de fluxo do escoamento multifásico e/ou multifluido. Estes, por sua vez, indicam a magnitude dos fenômenos de transporte no escoamento e das variáveis específicas. Em outras palavras, grandezas como fração de residência local da fase e/ou região (a probabilidade de se encontrar certa fase e/ou região em determinada localização do escoamento) e fração de vazio média na secção transversal do escoamento (a fração da área da secção transversal do escoamento ocupada pela fase e/ou região), assim como a transferência de massa, de quantidade de movimento e de calor são dependentes do padrão de escoamento (FRANÇA, 2008).

Consequentemente, a elaboração de modelos que representem de forma adequada os escoamentos multifásicos e/ou multifluido requer o conhecimento do padrão de fluxo em questão. Ou seja, é de especial importância na escolha do método de cálculo a ser utilizado, na caracterização do fluxo e na obtenção de soluções confiáveis a identificação das configurações (topologias) das fases e/ou componentes presentes no escoamento.

Segundo ISHII; HIBIKI (2011) a distribuição das fases e/ou componentes, sua forma e densidade superficial estão relacionadas com as forças interfaciais atuantes no escoamento. Tais forças, assim como o padrão de fluxo que irá se apresentar, dependem em maior ou menor intensidade de questões como:

- Fatores relacionados ao sistema de transporte do(s) fluido(s): características geométricas da tubulação (forma, dimensão característica e rugosidade) assim como a sua inclinação com relação à horizontal;
- Variáveis operacionais: velocidade, temperatura, vazão mássica ou volumétrica de cada fase e/ou fluido e pressão local do escoamento.;

- Propriedades físicas das substâncias que compõem o sistema fluídico – massa específica, viscosidade e tensão superficial.

Dessa forma, variações nos padrões de escoamento são sentidas modificando um ou mais dos itens relacionados anteriormente. A depender da velocidade e da intensidade que tais variações ocorram pode se gerar instabilidades que caracterizam períodos de transição, isto é, o escoamento irá apresentar uma topologia mal definida representando a mudança de um padrão de fluxo para outro.

As primeiras identificações de padrão de escoamento foram feitas por meio de observações direta, isto é, análises visuais. Posteriormente, métodos indiretos, baseados na análise estatística das flutuações, passaram a ser utilizados concomitantemente, permitindo a geração de modelos matemáticos. Por fim, surgiram os mapas de fluxo, nos quais os padrões de escoamento são representados na forma de gráficos que identificam a sua ocorrência dentro de certos limites de uma variável do escoamento.

Os mapas de fluxo podem ser fenomenológicos, obtidos a partir de bases teóricas dos fenômenos físicos que ocorrem nas transições entre os padrões de escoamento, ou correlacionais, obtidos a partir de dados experimentais e generalizados. Existe uma grande variedade de mapas de fluxo publicados, no entanto, é comum observar divergências entre eles. Dentre os motivos para tais divergências estão as discordâncias quanto a própria classificação e nomeação dos padrões. É comum encontrar na literatura trabalhos distintos utilizando diferentes termos subjetivos para descrever um mesmo padrão de fluxo ou ainda discordando quanto às suas transições.

Como exemplo de uma possível classificação tem-se a apresentada por ISHII; HIBIKI (2011) na qual, o escoamento bifásico e/ou dois-fluidos foi agrupado de acordo com a geometria da interface em três grandes classes: escoamento separado, escoamento misto (transitório ou intermitente) e escoamento disperso. Posteriormente tais classes foram subdivididas de acordo com propriedades específicas das interfaces a fim de se obter uma caracterização mais detalhada, como é observada na Fig. (2.1).

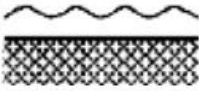
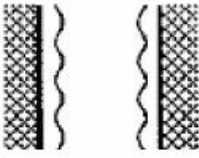
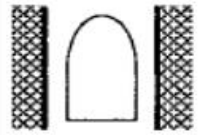
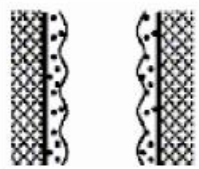
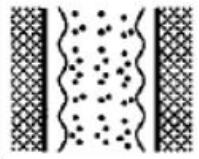
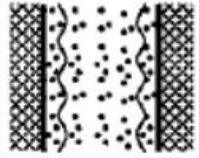
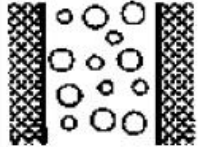
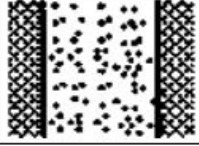
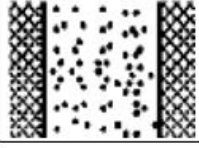
Classe o Padrão	Regimes	Geometria	Configuração
Escoamento separado	Escoamento em camada		Película de líquido em gás. Película de gás em líquido.
	Escoamento anular		Líquido no centro e uma película de gás. Gás no centro e uma película de líquido.
	Escoamento de jato		Jato líquido em gás ou um jato gasoso em líquido.
Escoamento transitório ou misto	Escoamento pistonado		Gás embolsado no líquido
	Escoamento anular com bolhas		Bolhas de gás escoando dentro de uma camada de líquido com uma corrente de gás no centro.
	Escoamento anular com gotas		Uma corrente de gás transportando gotas, adicionalmente uma camada de líquido escoa na parede do tubo.
	Escoamento anular com gotas e bolhas		Uma corrente de gás envolvida com gotas e uma película de líquido com bolhas de gás.
Escoamento disperso	Escoamento de bolhas		Bolhas de gás transportadas por uma corrente de líquido.
	Escoamento de gotas		Gotas de líquido em uma corrente de gás.
	Escoamento particulado		Partículas sólidas carregadas por uma corrente de líquido ou gás.

Figura 2.1 – Classificação do fluxo bifásico e/ou dois-fluidos

Fonte: Adaptado de ISHII (1975 *apud* ISHII; HIBIKI,2011)

No caso do escoamento bifásico e/ou dois-fluidos horizontal a subclassificação proposta por TAITEL; DUKLER (1976 *apud* LIMA 2011) é amplamente aceita na comunidade científica. Nela são apresentados seis padrões de fluxo: bolhas, bolha alongada, golfadas, estratificado liso, estratificado ondulado e anular, Fig. (2.2).

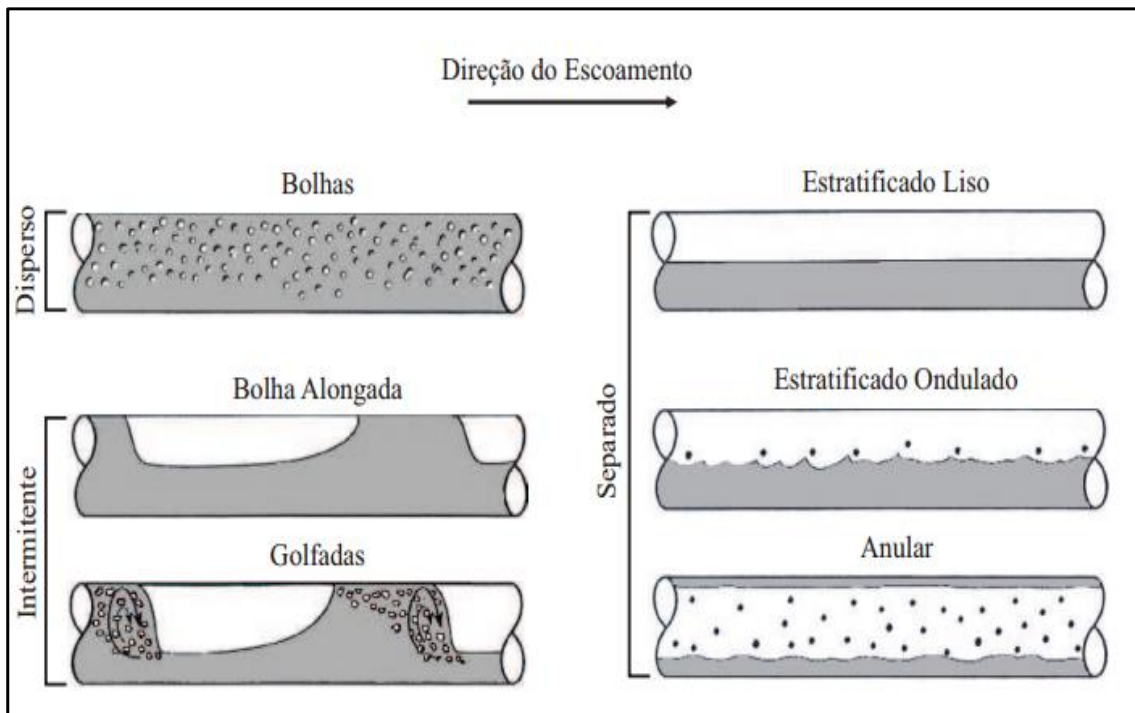


Figura 2.2 – Padrões de fluxo no escoamento bifásico e/ou dois-fluidos horizontal.

Fonte: Adaptado de SHOHAM (2005).

Já com relação ao escoamento bifásico e/ou dois-fluidos vertical TAITEL *et al.* (1980 *apud* LIMA,2011) subdividem as três grandes classes em: bolhas uniformes, bolhas distorcidas, golfadas, agitado e anular, sendo tal classificação frequentemente utilizada. A Figura 2.3 representa os padrões de fluxo no escoamento bifásico e/ou dois-fluidos em linhas verticais, sendo os mesmos descritos em seguida para o caso do escoamento gás-líquido.

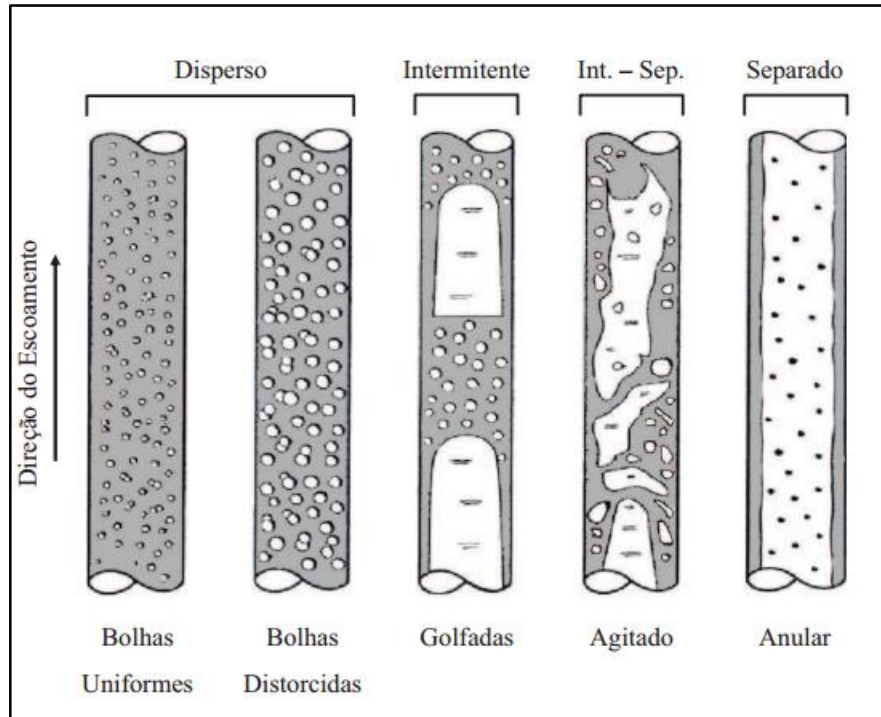


Figura 2.3 – Padrões de fluxo no escoamento bifásico e/ou dois-fluidos vertical.

Fonte: Adaptado de SHOHAM (2005).

○ PADRÃO DE FLUXO BOLHAS (*BUBBLES*)

Nesta configuração as bolhas estão distribuídas de forma discreta na fase contínua. A parede do duto está sempre em contato com a fase líquida e o tamanho das bolhas não se aproxima do diâmetro do duto. Em tubos verticais as bolhas geralmente se distribuem de forma homogênea por toda a secção transversal, enquanto que em dutos horizontais há uma concentração das bolhas na parte superior do duto devido a ação da gravidade. Ainda é possível separar o padrão de fluxo bolhas em uniformes e distorcidas. Bolhas uniformes (*uniforms bubbles*) são monodispersas com tamanho uniforme, não interagem entre si e tendem a seguir o movimento do líquido descrevendo uma trajetória retilínea. Já as bolhas distorcidas (*distorted bubbles*) são aglomerações com tamanhos variados, interagem constantemente entre si sofrendo coalescência e escoam descrevendo uma trajetória em ziguezague.

- PADRÃO DE FLUXO GOLFADA (*SLUG*)

Este padrão surge a partir da coalescência das bolhas que estavam dispersas no padrão anterior. Sua topologia é marcada pela presença de configurações que se assemelham a uma sequência de projéteis (ou golfadas) separados pela parte contínua (líquido) que por sua vez pode conter pequenas bolhas dispersas (a velocidade das golfadas é superior à da fase contínua). As paredes do duto se mantêm em contato constante com a parte líquida apesar das golfadas tenderem a ocupar toda a secção do cano. Na literatura este padrão também é encontrado com o nome de *Fluxo Pistonado*.

- PADRÃO DE FLUXO AGITADO (*CHURN*)

Ocorre quando o escoamento pistonado é desestabilizado e as grandes bolhas se quebram deslocando parte do fluido para a parede e dando lugar a um escoamento caótico no centro do duto. Também conhecido como *Fluxo Caótico* ou *de Transição*, não possui uma forma característica e ambas as partes são ditas descontínuas.

- PADRÃO DE FLUXO ANULAR

Caracteriza-se por uma das fases escoar através do centro do duto, enquanto que a outra o escoamento se dá parte na forma de gotículas dispersas no centro e parte através de um filme aderido à parede, formando uma espécie de anel. Quando estabilizado praticamente não há gotículas dispersas e pode-se afirmar que ambas as fases são contínuas e melhor separadas.

Além dos padrões listados anteriormente, há autores que identificam, no escoamento bifásico e/ou dois-fluidos, um sexto padrão inserido na classe dos dispersos e denominado *padrão de fluxo nevoeiro* ou *gotas (drops)*. Trata-se de um padrão subsequente ao padrão anular quando a fase líquida se encontra completamente atomizada (BRENNER, 2005). Este padrão se difere do padrão bolha especialmente pelo fato das gotas demorarem muito tempo para se adaptarem ao movimento do fluido que está ao seu redor.

2.3 MODELAGEM DO ESCOAMENTO MULTIFÁSICO E/OU MULTIFLUIDO

Um bom modelo matemático deve ser capaz de representar da forma mais fiel possível a situação física em análise, sem, no entanto, apresentar complexidade elevada a ponto de o tornar inviável no que diz respeito a obtenção de soluções. RODRIGUEZ (2011) classifica os modelos mais usados em escoamento multifásico em três categorias seguindo as características gerais dos padrões de escoamento:

- **MODELO DE DOIS FLUIDOS**

Comumente utilizados na análise de problemas envolvendo padrões de escoamento de fases separadas, como é o caso do escoamento anular. Nesta abordagem as equações de balanço são descritas para cada fase e/ou fluido e podem ser vistas como a representação da contribuição da fase às variações das propriedades do escoamento da mistura. As transferências de massa, energia e quantidade de movimento são expressadas por meio das leis de interação, logo, o emprego deste modelo requer o conhecimento das leis construtivas de interação entre as interfaces.

- **MODELOS CINEMÁTICOS**

São frequentemente utilizados para análise de escoamento dispersos, mas podem também serem empregados nos casos em que os termos interfaciais são difíceis de serem avaliados ou mesmo desconhecidos. Neste tipo de abordagem as equações de balanço são escritas para a mistura. Busca-se descrever diretamente o movimento relativo entre as fases, diferenças de temperatura e pressão, em vez que fazer uso das leis de interação dinâmica no intuito de representar as transferências de massa, movimento e energia. Ainda de acordo com RODRIGUEZ (2011) os modelos cinemáticos mais importantes são:

- *Modelo homogêneo*: as velocidades, temperaturas e pressões são assumidas as mesmas para todas as fases em qualquer secção transversal do canal.
- *Modelo de deslizamento*: verificado em padrões de fase dispersa onde se assume, em relação ao centro volumétrica da mistura, a o movimento da fase dispersa.

- *Modelo de razão de deslizamento*: aplicado nos casos em que o escoamento em questão é o de fases separadas, faz uso da variável razão de velocidade na análise do problema e que tem como origem os perfis de velocidade das fases.

- **MODELOS COMBINADOS**

Reúnem as características de ambos os modelos, sendo, em geral, usados para analisar padrões de escoamento misto. Nestes modelos as equações de balanço são escritas para a mistura. Busca-se descrever diretamente o movimento relativo entre as fases, diferenças de temperatura e pressão.

2.3.1 Modelo de dois-fluidos

No modelo de dois-fluidos as equações de transporte para cada fase são expressas de forma separada sem que para isso os campos médios de cada fase e/ou componente sejam independentes. Para tanto, termos de interação indicando o processo de interação entre as fases e/ou componentes - transferência de massa (Γ_f), de momentum (M_f) e de energia (E_f) - devem ser introduzidos às equações de balanço. Uma vez que Γ_f , M_f e E_f devem obedecer às leis de balanço na interface, além de indicar o grau de acoplamento entre as fases e/ou componentes eles são responsáveis em fixar as condições de transferência interfacial devido à condição de salto na interface.

Como é possível observar, o modelo em questão dispense considerável atenção à dinâmica e às interações entre as fases. Neste fato reside sua real vantagem com relação ao modelo de mistura (*drift flux*) em especial no que diz respeito à análise de fenômenos transientes, propagação de ondas e mudanças de padrão de escoamento. Entretanto, se a análise proposta objetiva o estudo da resposta total do sistema fluídico em detrimento do comportamento das taxas locais de cada fase e/ou componente o modelo de mistura é na maioria das vezes eficaz e simples.

É esperado que a utilização do modelo de dois fluidos seja proveitosa em cenários onde as fases e/ou componentes são fracamente acopladas de forma que a inércia de cada região possa mudar rapidamente. Entretanto, em cenários onde as fases e/ou componentes estão fortemente acopladas (as respostas das fases são simultâneas: estão perto de um equilíbrio térmico e dinâmico ou as ondas de propagação estão firmemente interligadas) a

aplicação do modelo de dois fluidos traz complicações desnecessárias às aplicações práticas (ISHII; HIBIKI, 2011).

Segundo a abordagem do modelo de dois fluidos, a equação de equilíbrio macroscópico para a fase f e sua condição de transferência interfacial em termos médios são dadas pela Eqs. (2.1a-b), respectivamente (ISHII; HIBIKI, 2011). A determinação destas equações abarca o conceito de mecânica do contínuo e a aplicação de média, uma vez que seu desenvolvimento tem como partida as equações diferenciais de campo que após darem origem às equações locais instantâneas sofrem um processo de média temporal, volumétrica ou de conjunto.

$$\frac{\partial \varepsilon_f \bar{\rho}_f \hat{\phi}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f \bar{\rho}_f \hat{\phi}_f \hat{\mathbf{v}}_f) = -\nabla \cdot [\varepsilon_f (\bar{\mathbf{J}}_f + \mathbf{J}_f^T)] + \varepsilon_f \bar{\rho}_f \phi_f + I_f \quad (2.1a)$$

$$\sum_{f=1}^2 I_f - I_s = 0 \quad (2.1b)$$

Dessa forma, o modelo de dois fluidos para o caso em que o fluxo sob análise apresenta duas regiões, como se observa no escoamento óleo-gás (bifásico e dois-fluidos), expressa as leis de conservação por meio de seis equações de campo, a saber: duas equações da continuidade, duas equações do momentum e duas equações da energia. E três condições de transferência na interface (de massa, de momentum e de energia) responsáveis por acoplar o processo de transporte entre as fases. Em grande parte dos problemas proposto essas equações deverão ser complementadas por *equações construtivas* ou *de fechamento* no intuito de especificar o mecanismo de transferência interfacial, o processo de difusão molecular, o transporte turbulento e as relações entre as variáveis termodinâmicas.

- EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

A lei de conservação da massa para o modelo de dois fluidos é representada pela Eq. (2.2a) e sua condição de transferência de massa interfacial, Eq. (2.2b), obtidas ao fazer $\hat{\phi}_f = 1, J_f = 0, \theta_f = 0, I_f = \Gamma_f$ e $I_s = 0$ em (2.1a-b).

$$\frac{\partial \varepsilon_f \bar{\rho}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f \bar{\rho}_f \hat{\mathbf{v}}_f) = \Gamma_f \quad (2.2a)$$

$$\sum_{f=1}^2 \Gamma_f = 0 \quad (2.2b)$$

- EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A lei de conservação da quantidade de movimento para o modelo de dois fluidos é representada pela Eq. (2.3a) e sua condição de transferência de momentum interfacial, Eq. (2.3b), obtidas fazendo $\hat{\phi}_f = \hat{\mathbf{v}}_f$, $J_f = -\mathbb{T}_f = p_f \mathbb{I} - \mathfrak{C}_f$, $J_f^T = -\mathfrak{C}_f^T$, $\phi_f = \mathbf{g}_f$, $I_f = \mathbf{M}_f$ e $I_s = \mathbf{M}_s$ em (2.1a-b).

$$\frac{\partial \varepsilon_f \bar{\rho}_f \hat{\mathbf{v}}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f \bar{\rho}_f \hat{\mathbf{v}}_f \hat{\mathbf{v}}_f) = -\nabla \varepsilon_f \bar{p}_f + \nabla \cdot [\varepsilon_f (\bar{\mathfrak{C}}_f + \mathfrak{C}_f^T)] + \varepsilon_f \bar{\rho}_f \mathbf{g}_f + \mathbf{M}_f \quad (2.3a)$$

$$\sum_{f=1}^2 \mathbf{M}_f - \mathbf{M}_s = 0 \quad (2.3b)$$

Onde,

$$\mathbf{M}_f = \hat{\mathbf{v}}_{fi} \Gamma_f + \overline{\bar{p}_{fi}} \nabla \varepsilon_f + \mathbf{M}_{if} - \nabla \varepsilon_f \cdot \overline{\bar{\mathfrak{C}}_{fi}} \quad (2.3c)$$

- EQUAÇÃO DA ENERGIA TOTAL

A conservação da energia para o modelo de dois fluidos é representada pela Eq. (2.4a) e acopladas pela condição de transferência de energia interfacial, dada pela Eq.(2.4b)

obtidas fazendo $\hat{\phi}_f = \hat{u}_f + \hat{v}_f^2/2$, $J_f = \mathbf{q}_f - \mathbb{T}_f \cdot \mathbf{v}_f = \mathbf{g}_f$, $\phi_f = \mathbf{g}_f \cdot \mathbf{v}_f + \dot{q}_f/\rho_f$, $I_f = \mathbf{E}_f$ e $I_s = \mathbf{E}_s$ em (2.1a-b).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon_f \bar{\rho}_f \left(\hat{e}_f + \frac{\hat{v}_f^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\varepsilon_f \bar{\rho}_f \left(\hat{e}_f + \frac{\hat{v}_f^2}{2} \right) \hat{\mathbf{v}}_f \right] = \\ -\nabla \cdot [\varepsilon_f (\bar{\mathbf{q}}_f + q_f^T)] + \nabla \cdot (\varepsilon_f \mathbb{T}_f \cdot \bar{\mathbf{v}}_f) + \varepsilon_f \bar{\rho}_f \hat{\mathbf{g}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \mathbf{E}_f \end{aligned} \quad (2.4a)$$

$$\sum_{f=1}^2 \mathbf{E}_f - \mathbf{E}_s = 0 \quad (2.4b)$$

Onde,

$$\begin{aligned} E_f = \Gamma_f \left(\hat{h}_{fi} + \hat{\mathbf{v}}_{fi} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f - \frac{\hat{\mathbf{v}}_f^2}{2} \right) + a_i \bar{q}_{fi}'' - \bar{p}_{fi} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \mathbf{M}_{if} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{fi} \\ - (\nabla \varepsilon_f \cdot \bar{\mathbf{c}}_{fi}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_{fi} + W_{fi}^T \end{aligned} \quad (2.4c)$$

A Eq. (2.4a) pode ser reescrita como a soma das Eqs (2.5a,b) que expressam respectivamente a *equação da energia mecânica* e *equação da energia térmica*. Esta separação da equação da energia é útil na resolução de algumas questões práticas onde uma das formas de energia é considerada desprezível. Neste contexto estão os problemas envolvendo transferência de calor nos quais é conveniente o uso da equação da energia térmica ao invés da equação da energia total. Como é o caso de problemas bifásicos e/ou dois-fluidos com transferência de calor em que o(s) fluido(s) escoam com **baixa velocidade** e os termos referentes a energia mecânica se torna insignificantes em comparação às taxas de transferência de calor (ISHII; HIBIKI, 2011).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_f \bar{\rho}_f \frac{\hat{v}_f^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\varepsilon_f \bar{\rho}_f \frac{\hat{v}_f^2}{2} \hat{\mathbf{v}}_f \right) = -\hat{\mathbf{v}}_f \cdot \nabla (\varepsilon_f \bar{\rho}_f) +$$

$$\hat{\mathbf{v}}_f \cdot \nabla \cdot [\varepsilon_f (\bar{\bar{\mathbf{C}}}_f + \mathbf{C}_f^T)] + \varepsilon_f \bar{\rho}_f \hat{\mathbf{g}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \mathbf{M}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f - \frac{\hat{v}_k^2}{2} \Gamma_f \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varepsilon_f \bar{\rho}_f \hat{e}_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f \bar{\rho}_f \hat{e}_f \hat{\mathbf{v}}_f) = \\ -\nabla \cdot [\varepsilon_f (\bar{\bar{\mathbf{q}}}_f + \mathbf{q}_f^T)] + \nabla \cdot (\varepsilon_f \mathbb{T}_f \cdot \bar{\bar{\mathbf{v}}}_f) + \mathbf{E}_f - \mathbf{M}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \frac{\hat{v}_f^2}{2} \Gamma_f \end{aligned} \quad (2.5b)$$

2.4 ESCOAMENTO NO PADRÃO ANULAR

O padrão de escoamento anular é comumente observado em diversas áreas da engenharia como é o caso das indústrias de processos, nuclear, e de petróleo. Em particular, este é o padrão dominante nos poços de petróleo com produção de óleo na presença de frações leves que evaporam rapidamente.

O padrão de escoamento anular é caracterizado por uma das fases e/ou componente escoando através da região central do duto (núcleo) enquanto que a outra fase e/ou componente a envolve formando uma espécie de película que está em contato permanente com a parede, lembrando um anel.

A depender da estabilidade do fluxo o entranhamento de uma das fases e/ou componentes na outra será maior ou menor. Ainda assim, o padrão anular está seguramente inserido na classe dos escoamentos separados uma vez que a configuração adotada pelas fases e/ou componentes que escoam simultaneamente permite uma fácil localização da interface e distinção entre as regiões.

Em geral, a interface entre o filme líquido e o núcleo gasoso é irregular, sendo formada por um complexo conjunto de ondas capilares e de perturbação. As ondas capilares apresentam pequeno comprimento de onda e pequena amplitude e estão presentes em praticamente todas as possíveis combinações de vazão gás-líquido. Já as ondas de perturbação (*disturbance waves*) caracterizadas pelo grande comprimento de onda e maior amplitude ocorrem nos casos em que um valor crítico do número de *Reynolds* para o filme de líquido, $Re_{LFC} = (\dot{m}_{LF} D_h) / \mu_{LF}$, é superado. Acredita-se que o mecanismo pelo qual as ondas de perturbação são criadas é o mesmo que dá origem ao fenômeno *turbulent bursts*

que ocorre na camada limite turbulenta em escoamentos monofásicos (RODRIQUEZ et. al., 2011).

As ondas de perturbação são as principais responsáveis pelo processo de **entranhamento**, no qual gotículas de líquido são formadas pelo cisalhamento do gás sobre a crista das ondas do líquido e adicionadas ao núcleo. Devido à **difusão turbulenta** do escoamento do núcleo, a massa de líquido atomizada, após ser arrastada longo do duto pelo gás, é depositada novamente no filme de líquido numa posição à jusante de onde ocorreu seu entranhamento, processo este denominado **deposição**. A Figura 2.4 esquematiza, num corte transversal, o processo contínuo de transporte de massa de líquido entre o filme e o núcleo na forma de gotículas. Neste esquema é possível observar um número significativo de gotículas de líquido, tais gotículas são uma característica importante do escoamento anular e devido sua existência este escoamento é considerado por alguns autores como parcialmente separado.

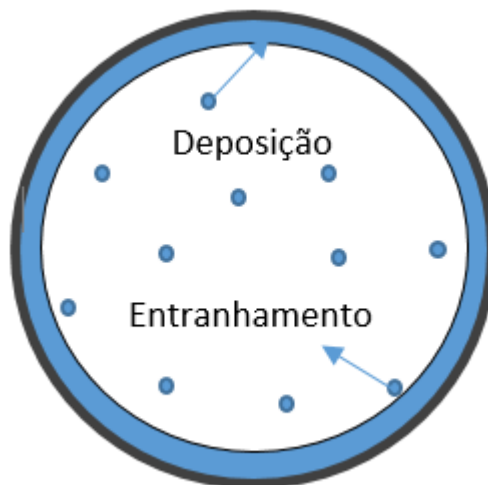


Figura 2.4 – Representação da secção transversal do escoamento gás-líquido no padrão anular.

COUSINS *et al.* (1965, *apud* RODRIGUES (Org.), 2011) sugeriram que a vazão do filme líquido abaixo da qual não há entranhamento de gotículas pode ser definida pelo número de Reynolds crítico para filme, assim como o se dá com relação ao aparecimento das ondas de perturbação. Fica reforçada assim, a compreensão de que a atomização da massa líquida do filme (formação de gotículas) está intimamente relacionada ao surgimento das ondas de perturbação.

É possível encontrar na literatura diferentes critérios que correlacionam o número de *Reynolds* crítico. Dentre eles cita-se:

- Critério de Ishii e Grolmes (1975)

$$Re_{LFC} = \left[\frac{y^+ \mu_g}{0,347 \mu_l} \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} \right]^{3/2} \quad (2.6a)$$

- Critério de Owen (1986)

$$Re_{LFC} = \exp \left[5,8405 + 0,4249 \left(\frac{\mu_l}{\mu_g} \right) \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} \right] \quad (2.6b)$$

Nos casos em que o movimento relativo entre o núcleo e o filme líquido é insuficiente para acionar o aparecimento das ondas interfaciais o entranhamento de gotículas no núcleo é considerado zero, nesta ocasião as fases e/ou fluidos se encontram totalmente separados por uma interface considerada perfeitamente lisa. Este cenário configura o que se chama de escoamento no padrão anular *ideal*.

2.5 ESTADO DA ARTE

São consideráveis os esforços empregados no entendimento do escoamento bifásico e/ou dois-fluidos. Em ISHII (1975) foi apresentado o modelo de dois-fluidos que ainda hoje é a abordagem macroscópica mais detalhada e empregada nos casos de escoamento multifásico.

Neste campo do conhecimento pode-se citar alguns trabalhos que se tornaram referência, como: HEWITT e TAYLOR (1971); BRENNEN (2005), CROWE (2006), ISHII e HIBBIK (2011) entre outros.

Neste contexto, dentre os trabalhos mais recentes encontrados na literatura aberta e que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa pode-se citar:

SOUZA (2010); GESSNER (2010); LIMA e ROSA (2010); GESSNER e BARBOSA (2010); LUBNICKI (2011); TOLEDO (2011); NAKAYAMA(2011); LIMA (2011); FALCONE e BARBOSA (2012); EHIZOYANYAN, APPAH e SYLVESTER (2015).

SOUZA (2010) propôs uma estrutura matemática que permite acoplar a metodologia de padrões de escoamento descrita por CROWE (2006 *apud* Souza, 2010) às equações de fechamento do modelo dinâmico bifásico. Para modelar o problema, a partir das equações diferenciais parciais originadas do balanço de massa e momento das fases, Souza fez uso de uma notação matricial comum. Chaveamentos entre os padrões de escoamento foram feitos através de funções sigmoidais que são ajustadas visando evitar descontinuidade e estabilizar a solução numérica das simulações estacionárias e dinâmicas. Segundo o autor, o modelo assim apresentado é capaz de descrever o comportamento do escoamento bifásico em uma ampla faixa de condições operacionais em qualquer padrão de fluxo (abordagem contínua), além de apresentar um menor custo computacional e manter uma precisão tolerável para os problemas práticos de engenharia.

GESSNER (2010) realizou a modelagem numérica do escoamento anular vertical gás-liquido em regime transiente através do Método da Divisão de Matriz de Coeficientes. A discretização numérica foi efetuada por meio do Método das Diferenças Finitas

GESSNER e BARBOSA (2010) modelaram o escoamento unidimensional ascendente através de dutos verticais no padrão anular. Ainda neste trabalho, desenvolveu-se um código computacional denominada HyTAF² visando solucionar sistemas de equações hiperbólicas com base no método das diferenças finitas. Posteriormente, ALVES, FALCONE e BARBOSA (2012) após validarem o código HyTAF para o caso de escoamento anular através de comparações com dados experimentais encontrados na literatura aberta, foi analisada a possibilidade de estender a sua aplicação para escoamentos no padrão caótico. Neste caso, os erros apontados ao se comparar os dados obtidos na simulação com os dados experimentais foram na ordem de 20% o que levou os autores a concluir que o código HyTAF constitui uma valiosa ferramenta para entender os fenômenos envolvendo a transição do padrão anular para o caótico.

LIMA e ROSA (2010) realizaram uma comparação de desempenho entre o modelo de fases separadas e o modelo de mistura aplicados ao escoamento permanente vertical

² sigla originária da língua inglesa: *Hyperbolic Transient Annular Flow*

anular ascendente gás-líquido na determinação do gradiente de pressão. A resolução numérica foi obtida pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.

LUBNICKI (2011) apresentou um estudo numérico com base no método dos volumes finitos do escoamento em dutos verticais no padrão anular (gás-líquido) considerando os efeitos da turbulência. O escoamento é assumido como completamente desenvolvido, axial-simétrico, sem transferência líquida de massa entre as fases e sem deslizamento entre as gotículas e o núcleo de gás que o arrasta. Para o fechamento das equações governantes foram apresentadas duas propostas com relação ao cálculo da distribuição da viscosidade turbulenta. A primeira sugere a aplicação do modelo $k - \varepsilon$ no cálculo da viscosidade turbulento do núcleo gasoso, enquanto que o no filme líquido se utilizaria o modelo $k - L$. A segunda proposta considerou a utilização do modelo $k - \varepsilon$ em ambas as regiões. Conforme o autor, a segunda proposta possui um melhor desempenho global.

Seguindo a linha de pesquisa adotada por Lubnicki, TOLEDO (2011) complementa o estudo ao considerar o escoamento em desenvolvimento e os fenômenos de entranhamento e deposição de gotículas. O modelo numérico adotado despreza a difusão da quantidade de movimento e energia da direção axial. O algoritmo numérico desenvolvido foi validado comparando-se os resultados obtidos com dados experimentais existentes na literatura, mostrando-se satisfatório para os seguintes casos:

- Escoamento laminar plenamente desenvolvido, sem entranhamento e com transferência de calor na região de entrada térmica;
- Escoamento turbulento, plenamente desenvolvido e considerando o fenômeno de entranhamento;
- Escoamento turbulento em desenvolvimento hidrodinâmico
- Escoamento turbulento com transferência de calor e mudança de fase

NAKAYAMA (2011) avaliou o desempenho de diversos modelos de reconhecimento de padrão de escoamento bifásico líquido-gás em escoamentos verticais ascendentes a partir de comparações com dados experimentais. A autora analisou a sensibilidade dos modelos de transição com relação a variações de propriedades físicas e geométricas do escoamento (viscosidade dos fluidos, diâmetro da tubulação e pressão de operação). Nakayama observou divergências entre os modelos de transição e conclui que melhores concordâncias com os dados experimentais são verificadas em:

- Taitel *et. al* (1980): transição entre os padrões de fluxo bolhas discretas-pistonado em tubos de pequeno diâmetro (25mm)
- Taitel *et. al.* (1980) e McQuillan e Whalley (1985): transição entre os padrões de fluxo bolhas-pistonado em tubos de grande diâmetro (200mm);
- Jayanti e Hewitt (1992): transição pistonado-agitante
- Barnea e Taitel (1985): transição para o padrão de fluxo bolhas dispersas;
- Taitel *et. al.* (1980) e McQuillan e Whalley (1985): transição para o padrão de fluxo anular

LIMA (2011) realizou um estudo das vantagens e das limitações na utilização da abordagem do modelo de mistura ao se analisar um escoamento isotérmico gás-líquido em regime permanente através de tubulações com secção transversal constante. Concluiu-se que tal modelo captura de forma satisfatória o gradiente de pressão para diversos padrões de fluxo, tendo como vantagem possuir uma formulação mais simples se comparado ao modelo de dois fluidos além de ser possível a sua aplicação aos diversos padrões de escoamento, o que não se verifica ao utilizar os modelos de fases separadas e homogêneo.

EHIZOYANYAN, APPAH e SYLVESTER (2015) desenvolveram um modelo analítico-numérico para determinar importantes parâmetros do escoamento, como: gradiente de pressão, fração de vazio e padrão de fluxo corrente. O modelo foi proposto visando a análise de fluxos concorrentes ou contracorrentes em poços verticais: bifásico gás-líquido e sólido-líquido, e multifásico gás-líquido-sólido. Os resultados obtidos foram comparados com dados encontrados na literatura. Segundo os autores, o padrão estratificado para escoamento ascendente foi eliminado pela razão de nessas condições padrão golfada ser mais comum em se observar.

CAPÍTULO III

TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

3.1 INTRODUÇÃO

É de interesse no desenvolvimento científico a obtenção de informações que possibilitem a interpretação dos fenômenos estudados com a máxima precisão e confiabilidade num menor custo e tempo. Neste contexto, técnicas híbridas, analítico-numérica, vêm ganhando destaque em várias áreas da engenharia, como é o caso da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).

Inicialmente as técnicas analíticas constituíam a única possibilidade de se atacar problemas difusivos e difusivos-convectivos, o que restringia significativamente o número de problemas que possuíam soluções. Com o advento dos computadores com alta capacidade de processamento métodos discretos passaram a ser usados em larga escala. No entanto, tais métodos apresentam desvantagens intrínsecas, como é o caso da ocorrência de erros de truncamento devido a aproximações das derivadas e integrais em termos de pontos nodais em um domínio computacional, o que exige o refinamento das malhas para que se verifique o seu decaimento.

Nesse contexto, a GITT vem se firmando e se desenvolvendo significativamente nos últimos 30 anos como uma ferramenta robusta para a solução de problemas difusivos e convectivos complexos que muitas vezes não possuem solução puramente analítica. Em se tratando de um método híbrido, a GITT associa a precisão das técnicas analíticas a um custo computacional competitivo juntamente com a versatilidade das técnicas numéricas.

3.2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A GITT é um método híbrido para a solução de problemas modelados através de equações diferenciais parciais. A ideia básica consiste em transformar tais equações em equações diferencial ordinária, através da expansão em autofunções. A técnica em questão pode ser vista como uma extensão da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT)³. A diferença entre a CITT e a GITT consiste no fato de que enquanto a primeira somente é aplicada quando todos os termos da equação diferencial original são transformáveis, permitindo a obtenção de um sistema de equações desacoplado, a GITT se aplica também aos termos não transformáveis, resultando num sistema de equações acoplado e infinito.

De forma geral, ao se fazer uso da GITT uma sequência de passos deve ser observada, a saber (COTTA, 1993):

Passo 1: escolher um problema de autovalor auxiliar (problema de *Sturm-Liouville*) que guarde o maior número de informações relativo à geometria e aos operadores do problema original. O problema auxiliar deve ser solucionado obtendo-se assim as autofunções, os autovalores e as normas associados;

Passo 2: estabelecer o par transformada-inversa da função potencial em termos de uma base ortogonal de autofunções obtidas a partir do problema auxiliar escolhido. Para tanto, deve-se escrever o potencial original como uma expansão das autofunções fornecidas pelo problema auxiliar;

Passo 3: efetuar a transformação integral do problema original, isto é, transformar a equação diferencial parcial original em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias (expansão em série) a partir do uso de operadores adequados que possibilitem a eliminação das derivadas parciais espaciais de ordem superior

Passo 4: resolver analiticamente o problema transformado desacoplado ou numericamente caso o problema transformado seja acoplado ou infinito. A série deverá ser truncada numa ordem tal que garanta a precisão preestabelecida e o controle de erro ao reconstruir a função potencial. Na resolução numérica é comum a utilização das sub-rotinas DIVPAG, para problemas parabólicos, e DBVPFD, em problemas de autovalor elíptico; ambas as rotinas pertencem à biblioteca IMSL (1989).

Passo 5: recuperar o potencial original através da fórmula inversa.

³ Sigla originada da língua inglesa. *Classical Integral Transform Technique*.

Passos intermediários podem ser introduzidos no intuito de se otimizar o desempenho da técnica, como exemplo de tais passos pode-se citar a aplicação de filtros que aceleram a convergência e o reordenamento de autovalores e potenciais.

3.3. ESTADO DA ARTE

Preliminarmente, ÖZISIK e MURRAY (1974) deram um grande avanço no desenvolvimento e aplicação de métodos analíticos para a solução de problemas diferenciais, que a princípio não poderiam ser resolvidos através do método de separação de variáveis, introduzindo a ideia da Técnica da Transformada Integral Clássica em suas soluções.

Posteriormente, a Técnica da Transformada Integral foi formalizada por MIKHAILOV e ÖZISIK (1984). Neste trabalho um grande grupo de problemas difusivos foram organizados em sete classes a fim de serem tratados de maneira sistemática e unificada.

A GITT continuou avançando na solução de um número cada vez maior de problemas, sendo eles lineares ou não. Em COTTA (1993) foi apresentada uma revisão dos formalismos clássicos da transformada integral, estendendo-os para a solução de problemas não lineares e fortemente acoplados. Já em COTTA (1998), um estudo mais específico das aplicações da GITT em problemas difusivos e difusivos convectivos foi realizado.

Desde de então, a GITT vem sendo aplicada com sucesso em diversas áreas da engenharia. A seguir são citados alguns trabalhos utilizando a GITT relevantes ao desenvolvimento desta dissertação.

No que diz respeito a problemas difusivos com propriedades térmicas dependentes da temperatura solucionados via GITT pode-se citar DINIZ (2000), OLIVEIRA (2010) e LAGE *et al.* (2012).

DINIZ (2000) utilizou a GITT para a obtenção do campo das tensões térmicas (provenientes dos choques térmicos) num problema unidimensional de condução transiente em placas infinitas. A dependência térmica das propriedades do material, no caso cerâmica, foi considerada. Os resultados obtidos foram inicialmente analisados quanto sua qualidade em termos de convergência, confiabilidade e controle dos parâmetros que influenciam as tensões térmicas, demonstrando-se satisfatórios. Diniz conclui que a GITT leva a resultados confiáveis e com um menor custo computacional.

OLIVEIRA (2010) apresentou um estudo do problema de difusão de calor unidimensional transiente no interior de uma cavidade cilíndrica de alumínio contendo água. A difusividade térmica foi considerada inicialmente constante para depois ser tratada como dependente da temperatura. Dois métodos de solução foram propostos e comparados para a obtenção do campo de temperatura: a Técnica da Transformada Integral Generalizada e o Método de Simulação de Rede (NSM). Para efeito de validação das soluções obtidas desenvolveu-se um aparato experimental com base no sistema de controle térmico. Oliveira afirma que devido a pequena variação da difusividade térmica do material na faixa de temperatura investigada, os resultados obtidos para a difusividade constante e dependente da temperatura foram muito próximo, o que permite concluir que a aproximação desta propriedade por uma constante é satisfatória.

LAGE *et al.* (2012) analisaram a partir do problema de convecção forçada interna a influência da variação da temperatura na viscosidade em nanofluidos. Resultados teóricos foram obtidos via GITT e comparados com os existentes na literatura. No caso da condição de contorno de fluxo de calor prescrito a validação dos resultados se fez através da comparação com dados experimentais obtidos no Laboratório de Transmissão e Tecnologia de Calor, LTTC, Engenharia Mecânica, POLI & COPPE/UFRJ, para o nanofluido comercial água-sílica. As comparações realizadas confirmaram que a metodologia empregada representa adequadamente o desenvolvimento térmico em estudo. Os autores concluíram também que o comportamento do nanofluido água-sílica ensaiado está de acordo com o esperado pelas correlações clássicas construídas a partir de fluidos ordinários.

Na literatura poucos são os trabalhos encontrados tratando, via GITT, de problemas difusivos-convectivos envolvendo fluidos imiscíveis. Dentre eles cita-se: NOGUEIRA, DANTAS e COTTA (2004) e KIMURA, OLIVEIRA e NOGUEIRA (2011).

NOGUEIRA, DANTAS e COTTA (2004) estudaram o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento entre gás e líquido no padrão anular. Foram analisados os efeitos na transferência de calor e massa ocasionados devidos à existência de ondas na interface gás-líquido. O problema foi tratado via GITT e os resultados sofreram comparações críticas com os dados experimentais disponíveis. Dessa forma os autores, além de constatarem a viabilidade do modelo proposto, concluíram que os efeitos de onda são significativos.

KIMURA, OLIVEIRA e NOGUEIRA (2011) apresentaram um estudo analítico do comportamento de fluidos newtonianos imiscíveis (água e óleo), em condições de

escoamento laminar anular horizontal completamente desenvolvido em placas planas e dutos circulares. Foram obtidos os campos de velocidade de cada fluido para diferentes campos de temperatura de mistura. Os autores demonstraram que no escoamento em dutos de seção circular a temperatura de 9.4°C permite a redução da potência de bombeamento em aproximadamente 64%. Concluíram também que a temperatura de 36°C é considerada limitante para o uso de água como filme no caso de escoamento através de placas planas.

CAPÍTULO IV

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

4.1 INTRODUÇÃO

O problema a ser estudado é apresentado neste capítulo tanto no seu aspecto físico quanto matemático. Para tanto são especificadas as condições em que o escoamento em análise está submetido, assim como as hipóteses e considerações simplificadoras, impostas ao sistema, que possibilitam a solução teórica. Por fim, chega-se a uma definição matemática problema na forma adimensional, obtida a partir do modelo de dois fluidos unidimensional.

4.2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA FÍSICO

Um alto número dos poços *off-shore*⁴ se encontram em águas ultra-profunda, onde a lâmina d'água é superior a 1000m. Este é o caso dos poços do pré-sal. Nestas condições os *risier*, tubulação responsável por transportar os fluidos produzidos da cabeça do poço até a plataforma de produção, encontram-se comumente submetidos a grandes variações de temperatura.

Inserido neste contexto, o presente trabalho sugere o estudo dos parâmetros de interesse do escoamento gás-líquido em dutos de secção transversal circular constante. Situação análoga à observada no transporte dos fluidos produzidos por poços de petróleo *off-shore* através dos *risers* rígidos, como representado pela Figura 4.1.

⁴ Termo da língua inglesa cujo o sentido literal é *afastado da costa*. Na engenharia de petróleo é usado para designar poços e/ou operações realizadas em alto mar.

Os *risers*, comumente, percorrem uma lâmina d'água tal que o submete à gradientes de temperatura que vai de -5°C a 25°C (valores facilmente encontrados na prática em se tratando de lâminas ultraprofundas). Na análise que se segue é considerado que a tubulação está em equilíbrio térmico com o meio (água marítima) e que o fluido chega a uma temperatura de 63°C ⁵ ao BOP⁶.

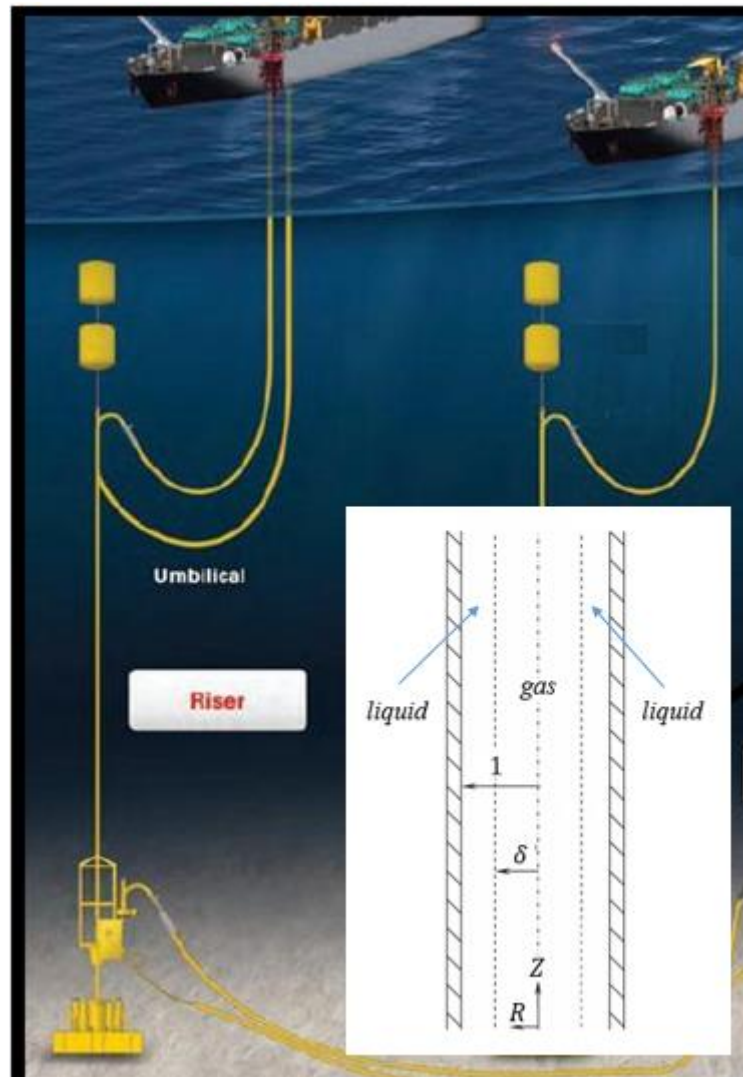


Figura 4.1 – Esquema do Problema Proposto

Fonte: Adaptado de <<http://www.tenaris.com/en/products/offshorelinepipe/risers.aspx>>

⁵ Dado extraído e disponível em: <<http://mundoestranho.abril.com.br/materia/como-o-petroleo-e-extraido-do-fundo-do-mar>>

⁶ Sigla originada da língua inglesa: *Blowout Preventer*.

Sendo assim, em síntese, o problema proposto visa simular e analisar o escoamento bifásico e/ou dois-fluidos, gás-líquido, que ocorre no interior dos *risers* rígidos considerando os efeitos da variação da temperatura sobre as propriedades dos fluidos.

4.3 MODELO MATEMÁTICO

O problema físico apresentado fica bem definido como: escoamento bifásico líquido-gás em regime **laminar** para **região de entrada térmica**. Tendo em vista que o modelo deverá ser o mais fiel possível à realidade, sendo, porém, passível de resolução através da metodologia proposta, serão admitidas as considerações e hipóteses restritivas que se seguem:

1. Sistema de coordenadas cilíndrica;
2. Escoamento unidimensional na direção axial com simetria radial e completamente desenvolvido: $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = (0, 0, v_z)$
3. Hidrodinamicamente desenvolvido: $v_z = f(r) = v(r)$;
4. Escoamento permanente (estacionário);
5. Escoamento vertical ascendente;
6. Padrão de fluxo anular ideal: fases totalmente separadas por uma interface perfeitamente lisa (ausência dos processos de entranhamento e deposição de gotículas líquida);
7. Interface fixa e perfeitamente vertical: a área da secção vertical ocupada por cada fase e/ou região é constante $\rightarrow \varepsilon_f = \text{constante}$
8. Propriedades termofísicas dependentes do potencial térmico;
9. A capacitância térmica ($C_f = \rho_f C p_f$) constante na secção transversal do duto (direção radial), ou seja, sua variação espacial é considerada apenas na direção axial;
10. Fluidos newtonianos;
11. Efeitos de dissipação viscosa desprezível;
12. Velocidades de fluxo moderada: energia cinética desprezível;
13. Ausência de geração de energia interna;
14. Processo de transferência de calor por radiação desprezado
15. Ausência de mudança de fase;

16. O fluxo na interface atende aos critérios de continuidade (na interface tem-se: tensão de cisalhamento de ambas as fases assim como fluxos iguais)

17. Ausência de deslizamento entre as fases na interface.

4.3.1 Equações de Balanço

Dessa forma, as equações de balanço, com base no modelo de dois-fluidos, representadas no Capítulo II pelas Eqs. (2.2a -2.5b), ao serem reescritas considerando as hipóteses simplificadoras listadas anteriormente as formas dadas pelas Eqs. (4.1a - 4.3b) com as condições de contorno, de valor inicial e de interface dadas por (4.4a-h).

- EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

$$\frac{\partial}{\partial z} v_f(r) = 0 \quad f = \begin{cases} g, & 0 < r < r_i \\ l, & r_i < r < r_t \end{cases} \quad (4.1)$$

- EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_f r \frac{\partial v_f(r)}{\partial r} \right] = \frac{\partial p_f}{\partial z} - \rho_f g; \quad f = \begin{cases} g, & 0 < r < r_i \\ l, & r_i < r < r_t \end{cases} \quad (4.2)$$

- EQUAÇÃO DA ENERGIA

$$\rho_f C p_f v_g(r) \frac{\partial T_f(r,z)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_f r \frac{\partial T_f(r,z)}{\partial r} \right); \quad f = \begin{cases} g, & 0 < r < r_i \\ l, & r_i < r < r_t \end{cases} \quad (4.3a)$$

Ou ainda,

$$v_f(r) \frac{\partial T_f(r,z)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha_f r \frac{\partial T_f(r,z)}{\partial r} \right); \quad f = \begin{cases} g, & 0 < r < r_i \\ l, & r_i < r < r_t \end{cases} \quad (4.3b)$$

Onde,

$$\alpha_f = \frac{k_f}{\rho_f C p_f} \quad (4.3c)$$

• CONDIÇÕES INICIAL, DE CONTORNO E DE INTERFACE

✓ Condições iniciais: $z = 0$

$$T_g(r, z = 0) = T_0 \quad (4.4a)$$

$$T_l(r, z = 0) = T_0 \quad (4.4b)$$

✓ Condições de contorno: $r = 0$ e $r = r_t$

$$\frac{\partial v_g(r = 0)}{\partial r} = 0 \quad (4.4c)$$

$$\frac{\partial T_g(r = 0, z > 0)}{\partial r} = 0 \quad (4.4d)$$

$$v_l(r = r_t) = 0 \quad (4.4e)$$

$$\begin{aligned} -k_l \frac{\partial T_l(r = r_t, z > 0)}{\partial r} \\ = h_{l,\infty} [T_l(r = r_t, z > 0) - T_\infty(r = r_t, z > 0)] \end{aligned} \quad (4.4f)$$

✓ Condições de interface: $r = r_i$

$$v_g(r = r_i) = v_l(r = r_i) \quad (4.4g)$$

$$\mu_g \frac{\partial v_g(r = r_i)}{\partial r} = \mu_l \frac{\partial v_l(r = r_i)}{\partial r} \quad (4.4h)$$

$$k_g \frac{\partial T_g(r = r_i, z > 0)}{\partial r} = k_l \frac{\partial T_l(r = r_i, z > 0)}{\partial r} \quad (4.4i)$$

$$-k_g \frac{\partial T_g(r = r_i, z > 0)}{\partial r} = h_{g,l}[T_g(r = r_i, z > 0) - T_l(r = r_i, z > 0)] \quad (4.4j)$$

Assim, diante das equações apresentadas, o problema proposto fica completamente definido em sua forma analítica.

4.3.2 Perfis de Velocidade e Velocidades Média

Os perfis de velocidade para as regiões nas quais escoam o gás e o líquido são definidos pelas Eqs (4.5a) e (4.5b) respectivamente.

$$v_g(r) = \frac{G_g}{4\mu_g}(r^2 - r_i^2) + \frac{G_l}{4\mu_l}(r_i^2 - r_t^2) + \frac{(G_g - G_l)}{2\mu_l}r_i^2 \ln(r_i/r_t) \quad (4.5a)$$

$$v_l(r) = \frac{G_l}{4\mu_l}(r^2 - r_t^2) + \frac{(G_g - G_l)}{2\mu_l}r_i^2 \ln(r/r_t) \quad (4.5b)$$

Onde,

$$G_f = \frac{\partial p_f}{\partial z} + \rho_f g \quad (4.5c)$$

Já as velocidades médias do gás ($\bar{v}_g$), do líquido ($\bar{v}_l$) e do escoamento (no canal) ($\bar{v}$) são dadas pelas Eqs. (4.6a), (4.6b) e (4.6c), respectivamente.

$$\bar{v} = -\frac{G_g r_t^2}{4\mu_l} \left[\frac{\mu_l}{\mu_g} \left(\frac{r_i^4}{2r_t^4} \right) + \frac{G_l}{G_g} \left(\frac{r_i^4}{2r_t^4} - \frac{r_i^2}{r_t^2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{r_i^2}{r_t^2} - \frac{r_i^4}{r_t^4} \right) \right] \quad (4.6a)$$

$$\bar{v}_g = \frac{G_g r_t^2}{2\mu_l} \left[-\frac{1}{4} \frac{r_i^2}{r_t^2} \frac{\mu_l}{\mu_g} + \frac{G_l}{2G_g} \left(\frac{r_i^2}{r_t^2} - 1 \right) + \frac{r_i^2}{r_t^2} \left(1 - \frac{G_l}{G_g} \right) \ln(r_i/r_t) \right] \quad (4.6b)$$

$$\bar{v}_l = \frac{2}{\left(\frac{r_i^2}{r_t^2} - 1\right)} \frac{G_l r_t^2}{4\mu_l} \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{r_i^2}{r_t^2} - \frac{3r_i^4}{4r_t^4} \right) + \frac{G_g}{G_l} \left(-\frac{1}{2} \frac{r_i^2}{r_t^2} + \frac{1}{2} \frac{r_i^4}{r_t^4} \right) - \left(\frac{G_g}{G_l} - 1 \right) \frac{r_i^4}{r_t^4} \ln(r_i/r_t) \right] \quad (4.6c)$$

As expressões apresentadas neste item foram validadas comparando-as com os resultados obtidos por NOGUEIRA (1988) após os devidos ajustes. O desenvolvimento formal destas, assim como a explicitação das velocidades na sua forma adimensional, se encontram no Apêndice A.

4.3.2 O Problema na Forma Adimensional

A adimensionalização do problema o torna a sua análise mais simples, uma vez que tal processo o generaliza além de reduzir o número de variáveis envolvidas. Diante disso, as equações de balanço apresentadas anteriormente foram reescritas na sua forma adimensional, para tanto, se fez uso dos seguintes grupos adimensionais:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\bar{\alpha} z}{\bar{v} D_h^2}; & V_f(R) &= \frac{v_f}{\bar{v}}; & R &= \frac{r}{r_t}; & \delta &= \frac{r_i}{r_t}; \\ \hat{\mu}_f &= \frac{\mu_f}{\mu_0}; & \hat{p}_f &= \frac{p_f}{\rho_0 \bar{v}^2}; & Re_0 &= \frac{\rho_0 \bar{v} D_h}{\mu_0}; & Fr &= \frac{\bar{v}}{\sqrt{g D_h}}; \\ \hat{\rho}_f &= \frac{\rho_f}{\rho_0}; & Pr_0 &= \frac{\mu_0}{\rho_0 \bar{\alpha}}; & Pr_0 Re_0 &= \frac{\bar{\alpha}}{D_h \bar{v}}; & \theta_f(R, Z) &= \frac{T_f - T_\infty}{T_0 - T_\infty}; \\ \hat{\alpha}_f &= \frac{\alpha_f}{\bar{\alpha}}; & \mathbb{C} &= \frac{T_{f0} - T_\infty}{T_0 - T_\infty}; & Bi_{g,l} &= \frac{\hbar_{g,l} r_t}{k_0}; & Bi_{l,\infty} &= \frac{\hbar_{l,\infty} r_t}{k_0}; \end{aligned} \quad (4.7)$$

Onde,

$$\mu_0 = \frac{\mu_{g0} + \mu_{l0}}{2}$$

$$\rho_0 = \frac{\rho_{g0} + \rho_{0l}}{2} \quad (4.8)$$

$$k_0 = \frac{k_{g0} + k_{l0}}{2}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_{g0} + \alpha_{l0}}{2}$$

Sendo o índice ‘0’ indicador de estado de referência (considerado como coincidente à condição inicial em $Z=0$).

- Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial Z} V_f(R) = 0 \quad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < R < 1 \end{cases} \quad (4.8a)$$

- Equação da Quantidade de Movimento

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\hat{\mu}_f R \frac{\partial V_f(R)}{\partial R} \right) = \hat{P}_f; \quad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < R < 1 \end{cases} \quad (4.8b)$$

Onde,

$$\hat{P}_f \equiv \left(\frac{r_t}{D_h} \right)^2 Re_0 \left[Re_0 Pr_0 \frac{\partial \hat{p}_f}{\partial Z} - \frac{\hat{p}_f}{Fr^2} \right] \quad (4.8c)$$

- Equação da Energia

$$\left(\frac{r_t}{D_h} \right)^2 V_f(R) \frac{\partial \theta_f(R, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\hat{\alpha}_f R \frac{\partial \theta_f(R, Z)}{\partial R} \right]; \quad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < R < 1 \end{cases} \quad (4.8d)$$

- ✓ Condições iniciais: $Z = 0$

$$\theta_f(R, Z = 0) = \mathbb{C} \qquad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < R < 1 \end{cases} \quad (4.8e)$$

✓ Condições de Contorno: $R = 0$ e $R = 1$

$$\frac{\partial V_g(R = 0)}{\partial R} = 0 \quad (4.8f)$$

$$\frac{\partial \theta_g(R = 0, Z > 0)}{\partial R} = 0 \quad (4.8g)$$

$$V_l(R = 1) = 0 \quad (4.8h)$$

$$\begin{aligned} -\hat{k}_l \frac{\partial \theta_l(R = 1, Z > 0)}{\partial R} \\ = Bi_{l,\infty} [\theta_l(R = 1, Z > 0) - \theta_\infty], \end{aligned} \quad (4.8i)$$

✓ Condições de Interface: $R = \delta$

$$V_g(R = \delta) = V_l(R = \delta) \quad (4.8j)$$

$$\hat{\mu}_g \frac{\partial V_g(R = \delta)}{\partial R} = \hat{\mu}_l \frac{\partial V_l(R = \delta)}{\partial R} \quad (4.8l)$$

$$\hat{k}_g \frac{\partial \theta_g(R = \delta, Z > 0)}{\partial R} = \hat{k}_l \frac{\partial \theta_l(R = \delta, Z > 0)}{\partial R} \quad (4.8m)$$

$$-\hat{k}_g \frac{\partial \theta_g(R=\delta, Z>0)}{\partial R} = Bi_{g,l} [\theta_g(R = \delta, Z > 0) - \theta_l(R = \delta, Z > 0)] \quad (4.8n)$$

CAPÍTULO V

APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA SOLUÇÃO DOS CAMPOS TÉRMICOS

Neste capítulo, admitindo o problema hidrodinâmico resolvido, a equação da energia na sua forma adimensional apresentada no capítulo IV é solucionada por meio da utilização da Técnica da Transformada Integral Generalizada. Para tanto, são observados os passos apresentados no capítulo III.

5.1 INTRODUÇÃO

O problema proposto neste trabalho foi apresentado no Capítulo IV juntamente com desenvolvimento da sua formulação matemática. A equação da energia unidimensional adimensionalizada foi definida em (4.8d), enquanto que condições iniciais, de contorno e de interface foram dadas em (4.8e,f), (4.8h,j) e (4.8n,o), respectivamente. Sendo assim, dando sequência à solução analítica-numérica dos campos térmicos, será empregado, a partir da sequência de passos listados no capítulo III, o formalismo clássico para o problema de Classe II exposto por MIKHAILOV e ÖZISIK (1984).

5.2 PASSO 1: ESCOLHA DO PROBLEMA DE AUTOVALOR AUXILIAR

A saber, o primeiro passo para a aplicação da GITT é a escolha do problema de autovalor auxiliar (problema de *Sturm-Liouville*) que guarde o maior número de informações do problema original apresentado no capítulo anterior e reescrito abaixo para melhor compreensão.

A saber, o primeiro passo para a aplicação da GITT é a escolha do problema de autovalor auxiliar (problema de *Sturm-Liouville*) que guarde o maior número de informações do problema original, apresentado no capítulo anterior e reescrito abaixo para melhor compreensão:

✓ Problema original e suas condições:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[\hat{\alpha}_f R \frac{\partial \theta_f(R, Z)}{\partial R} \right] = \left(\frac{r_t}{D_h} \right)^2 V_f(R) R \frac{\partial \theta_f(R, Z)}{\partial Z} \quad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < R < 1 \end{cases} \quad (5.1a)$$

$$\theta_f(R, Z = 0) = \mathbb{C} \quad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < R < 1 \end{cases} \quad (5.1b)$$

$$\frac{\partial \theta_g(R = 0, Z > 0)}{\partial R} = 0 \quad (5.1c)$$

$$\begin{aligned} -\hat{k}_l \frac{\partial \theta_l(R = 1, Z > 0)}{\partial R} \\ = Bi_{l,\infty} [\theta_l(R = 1, Z > 0) - \theta_\infty] \end{aligned} \quad (5.1d)$$

$$\hat{k}_g \frac{\partial \theta_g(R = \delta, Z > 0)}{\partial R} = \hat{k}_l \frac{\partial \theta_l(R = \delta, Z > 0)}{\partial R} \quad (5.1e)$$

$$-\hat{k}_g \frac{\partial \theta_g(R=\delta, Z>0)}{\partial R} = Bi_{g,l} [\theta_g(R = \delta, Z > 0) - \theta_l(R = \delta, Z > 0)] \quad (5.1f)$$

Dessa forma, optou-se pelo problema de autovalor associado e as condições correspondentes apresentados a seguir:

✓ Problema da Autovalor Associado

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{d\psi_f(\lambda_i, R)}{dR} \right] = -\beta_i^2 w(R) R \psi_f(\lambda_i, R); \quad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < R < 1 \end{cases} \quad (5.2a)$$

Onde,

$$w(R) = R V_f(R) \quad (5.2b)$$

e

$$\beta^2 = \lambda_i^2 \left(\frac{r_t}{D_h} \right)^2 \quad (5.2c)$$

✓ Condição inicial: $Z = 0$

$$\psi_f(R, Z = 0) = \mathbb{C}; \quad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < R < 1 \end{cases} \quad (5.2e)$$

✓ Condições de Contorno: $R = 0$ e $R = 1$

$$\frac{\partial \psi_g(R = 0, Z > 0)}{\partial R} = 0 \quad (5.2f)$$

$$\begin{aligned} -\hat{k}_l \frac{\partial \psi_l(R = \delta, Z > 0)}{\partial R} \\ = Bi_{l,\infty} [\psi_l(R = \delta, Z > 0) - \psi_\infty(R = \delta, Z > 0)] \end{aligned} \quad (5.2g)$$

✓ Condições de Interface: $R = \delta$

$$\hat{k}_g \frac{\partial \psi_g(R = \delta, Z > 0)}{\partial R} = \hat{k}_l \frac{\partial \psi_l(R = \delta, Z > 0)}{\partial R} \quad (5.2h)$$

$$-\hat{k}_g \frac{\partial \psi_g(R=\delta, Z>0)}{\partial R} = Bi_{g,l} [\psi_g(R = \delta, Z > 0) - \psi_l(R = \delta, Z > 0)] \quad (5.2i)$$

Uma vez definido o problema de auxiliar deverá ser solucionado, o que pode se dar por meio da técnica de contagem de sinal que possibilita a obtenção dos autovalores, autofunções e normas associadas com precisão e controle satisfatórios. Um estudo detalhado do problema de autovalor em meios compostos é desenvolvido no capítulo seguinte.

5.3 PASSO 2: OBTENÇÃO DO PAR TRANSFORMADA-INVERSA

Na obtenção do par transformada-inversa inicialmente se deve escrever o potencial desejado, $\theta_f(R, Z)$, como uma expansão em termos das autofunções, $\psi(\mu_i, R) \equiv \psi_i(R)$, fornecidas pelo problema de autovalor associado e que formam uma base ortogonal. A expansão descrita é representada pelas Eqs. (5.3a).

$$\theta(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(Z) \psi_{if}(R); \quad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < r < 1 \end{cases} \quad (5.3a)$$

Onde,

$$A_i(Z) = \frac{1}{N_i} [(\psi_{gi}, \theta_g) + (\psi_{li}, \theta_l)] \quad (5.3b)$$

e

$$N_i = [(\psi_{gi}, \psi_{gi}) + (\psi_{li}, \psi_{li})] \quad (5.3c)$$

Logo, a expansão do potencial pode ser reescrita na forma dada por (5.4).

$$\theta(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i} \psi_{if}(R) [(\psi_{gi}, \theta_g) + (\psi_{li}, \theta_l)]; \quad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < r < 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

Nota-se que o potencial expandido pode ser representado através do par transformada-inversa:

✓ Transformada:

$$\theta(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_i}} \psi_{if}(R) \tilde{\theta}_i(Z) \quad (5.5a)$$

✓ Inversa:

$$\tilde{\theta}_i(Z) = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 R V_f(R) \psi_{fi}(R), \theta_f(R, Z) = \frac{1}{\sqrt{N_i}} [(\psi_{gi}, \theta_g) + (\psi_{li}, \theta_l)] \quad (5.5b)$$

5.4 PASSO-3: TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA ORIGINAL

O terceiro passo consiste em efetuar a transformação integral do problema original, isto é, transformá-lo em um sistema infinito de equações diferenciais. Para tanto se realiza as substituições e manipulações matemáticas como descrito a seguir.

Aplicando-se o operador linear: $\frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 R \psi_i(R) dR$ à Eq. (5.1a), tem-se:

$$\frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 \psi_i(R) \frac{\partial}{\partial R} \left[\hat{\alpha}_f R \frac{\partial \theta_f(R, Z)}{\partial R} \right] dR = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \left(\frac{r_t}{D_h} \right)^2 \int_0^1 R w(R) \frac{\partial \theta_f(R, Z)}{\partial Z} \psi_i(R) dR \quad (5.6)$$

Para que seja possível a avaliação do primeiro termo da Eq.(5.6), se faz necessário o conhecimento da função $\hat{\alpha}_g(\theta)$. Propõe-se:

$$\alpha_f(\theta) = \mathbb{A} + \mathbb{B} \theta_f(R, Z) \quad (5.7)$$

Então, aplicando a definição da por (5.7) à Eq. (5.6) e realizar algumas manipulações, obtém-se a Eq.(5.8).

$$\frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 \psi_i(R) \frac{\partial}{\partial R} \left[(\mathbb{A} + \mathbb{B} \theta_f(R, Z)) R \frac{\partial \theta_f(R, Z)}{\partial R} \right] dR = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \left(\frac{r_t}{D_h} \right)^2 \frac{d}{dZ} \left[\int_0^1 R w(R) \theta_f(R, Z) \psi_i(R) dR \right] \quad (5.8)$$

Uma vez que, $\int_0^1 R w(R) \theta_f(R, Z) \psi_i(R) dr \equiv (\psi_{gi}, \theta_g) + (\psi_{li}, \theta_l) \equiv \sqrt{N_i} \tilde{\theta}_i(Z)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 \psi_i(R) (\mathbb{A} + \mathbb{B} \theta_f(R, Z)) \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta_f(R, Z)}{\partial R} \right) dR + \\ \frac{1}{\sqrt{N_i}} \mathbb{B} \int_0^1 \psi_i(R) R \left(\frac{\partial \theta_f(R, Z)}{\partial R} \right)^2 dR = \left(\frac{r_t}{D_h} \right)^2 \frac{d\tilde{\theta}_i(Z)}{dZ} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Aplicando-se o operador linear: $\frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 R \theta_f(R, Z) dR$ à Eq. (5.2a) e realizando as operações indicadas, obtém-se a Eq. (5.10).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 \theta_f(R, Z) \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\psi_f(\lambda_i, R)}{dR} \right] dR \\ = -\beta_i^2 \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 R w(R) \psi_f(\lambda_i, R) \theta_f(R, Z) dR \end{aligned} \quad (5.10)$$

Uma vez que, $\int_0^1 R w(R) \theta_f(R, Z) \psi_i(R) dr \equiv (\psi_{gi}, \theta_g) + (\psi_{li}, \theta_l) \equiv \sqrt{N_i} \tilde{\theta}_i(Z)$

$$-\frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 \theta_f(R, Z) \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\psi_f(\lambda_i, R)}{dR} \right] dR = \beta_i^2 \tilde{\theta}_i(Z) \quad (5.11)$$

Dando continuidade, soma-se as Eqs.(5.8) e (5.11) obtendo-se (5.12).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 \psi_i(R) (\mathbb{A} + \mathbb{B} \theta_f) \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta_f}{\partial R} \right) dR + \frac{1}{\sqrt{N_i}} \mathbb{B} \int_0^1 \psi_i(R) R \left(\frac{\partial \theta_f}{\partial R} \right)^2 dR - \\ \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 \theta_f(R, Z) \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\psi_f(\lambda_i, R)}{dR} \right] dR = \left(\frac{r_t}{D_h} \right)^2 \frac{d\tilde{\theta}_i(Z)}{dZ} + \beta_i^2 \tilde{\theta}_i(Z) \end{aligned} \quad (5.12a)$$

Ou

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 \psi_i(R) (\mathbb{A} + \mathbb{B} \theta_f) \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta_f}{\partial R} \right) dR + \frac{1}{\sqrt{N_i}} \mathbb{B} \int_0^1 \psi_i(R) R \left(\frac{\partial \theta_f}{\partial R} \right)^2 dR - \\ & \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 \theta_f(R, Z) \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\psi_f(\lambda_i, R)}{dR} \right] dR = \left(\frac{r_t}{D_h} \right)^2 \left[\frac{d\tilde{\theta}_i(Z)}{dZ} + \lambda_i^2 \tilde{\theta}_i(Z) \right] \end{aligned} \quad (5.12b)$$

Fazendo $\mathbb{A} = 1$, é possível escrever a Eq. (5.12), como indicado por (5.13a), em função dos coeficientes C_{ijk} e C_{ip} , apresentados pelas Eqs.(5.13b-e).

$$\frac{d\tilde{\theta}_i(Z)}{dZ} = \left(\frac{D_h}{r_t} \right)^2 \mathbb{B} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\theta}_j(Z) \sum_{k=1}^{\infty} C_{ijk} \tilde{\theta}_k(Z) (-\beta_k^2) + \sum_{p=1}^{\infty} D_{ip} \tilde{\theta}_p(Z) \right] - \lambda_i^2 \tilde{\theta}_i(Z) \quad (5.13a)$$

Onde,

$$C_{ijk} = \frac{1}{\sqrt{N_i N_j N_k}} \int_0^1 w(R) \psi_i(R) \psi_j(R) \psi_k(R) dR \quad (5.13b)$$

Ou

$$C_{ijk} = \frac{1}{\sqrt{N_i N_j N_k}} \sum_{s=1}^{M+1} \bar{w}_s(R) \int_{R_s}^{R_{s+1}} \psi_i(R) \psi_j(R) \psi_k(R) dR \quad (5.13c)$$

e,

$$D_{ip} = \frac{1}{\sqrt{N_i N_p}} \int_0^1 \psi_i(R) R \left[\frac{\partial}{\partial R} (\psi_p(R)) \right]^2 dR \quad (5.13d)$$

Ou

$$\begin{aligned} D_{ip} &= \frac{1}{\sqrt{N_i N_p}} \sum_{s=1}^{M+1} \left[\frac{\partial}{\partial R} (\psi_p(R_s)) \right]^2 \int_{R_s}^{R_{s+1}} \psi_i(R) R dR = \\ & \frac{1}{\sqrt{N_i N_p}} \sum_{s=1}^{M+1} \left[\frac{\partial}{\partial R} (\psi_p(R_s)) \right]^2 \left[\frac{1}{\omega_s} - \frac{\cos[\omega_s(R_{s+1} - R_s)]}{\omega_s} \right] [R_{s+1} + R_s] \end{aligned} \quad (5.13e)$$

5.5 PASSO-4: SOLUÇÃO DO PROBLEMA TRANSFORMADO

O quarto passo refere-se à resolução analítico-numérico do problema transformado. Tal etapa foi realizada com a ajuda do código computacional desenvolvido em linguagem Fortran que seguiu o roteiro indicado pelo fluxograma da Fig. 5.1.

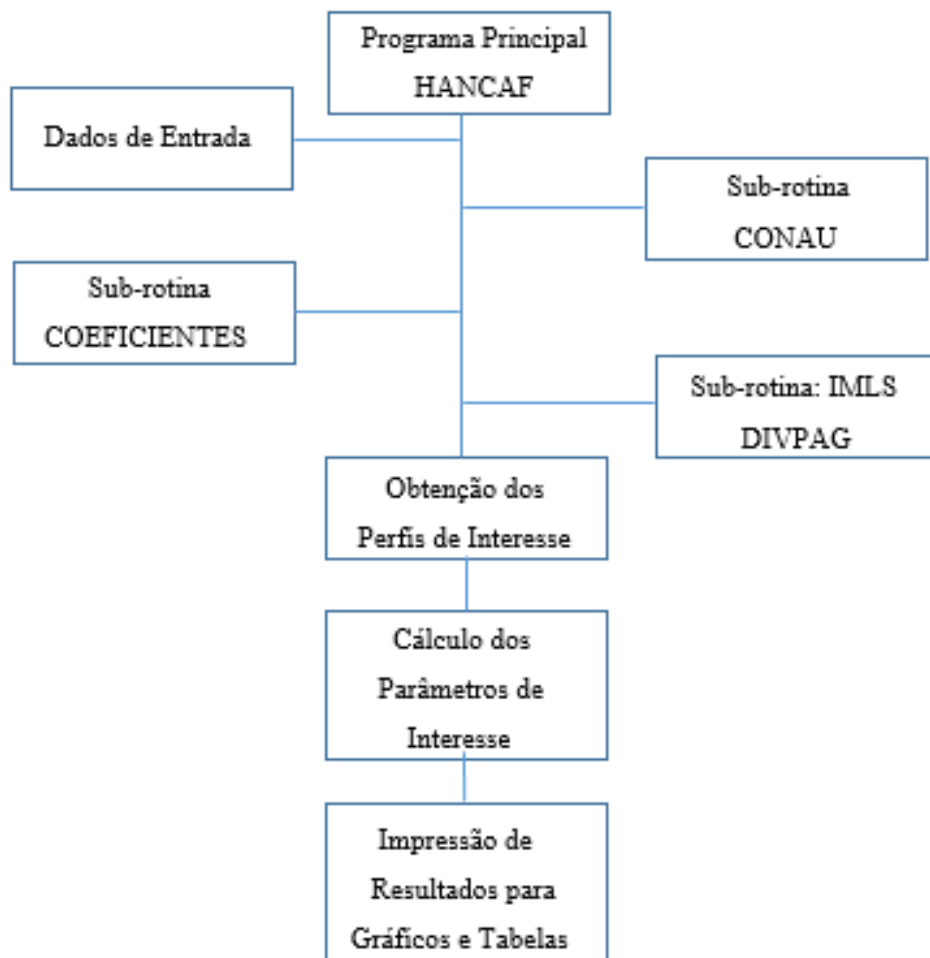


Figura 5.1 – Estrutura do código computacional desenvolvido: HANCAF⁷

⁷ Sigla originária da língua inglesa: Hybrid analytical-numerical annular flow

CAPÍTULO VI

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR NOS CASOS DE MEIO COMPOSTO

6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são expostas ideias central para a resolução do problema de autovalor para meio composto, como é o caso do problema proposto por este trabalho, em que o meio em análise compõe-se de duas regiões, a saber: óleo e gás. Desta forma, as ideias apresentadas e exploradas amplamente em MIKHAILOV e VULCHANOV (1981) para os casos de meios simples são estendidas para situações envolvendo meios compostos

6.2 O PROBLEMA DE AUTOVALOR

Como mencionado no Capítulo IV, o emprego da GITT requer a escolha de um problema auxiliar adequado, que corresponderá a uma forma mais geral do problema de *Sturm-Liouville* clássico. A solução de tal problema resulta na obtenção de seus autovalores, autofunções e normas.

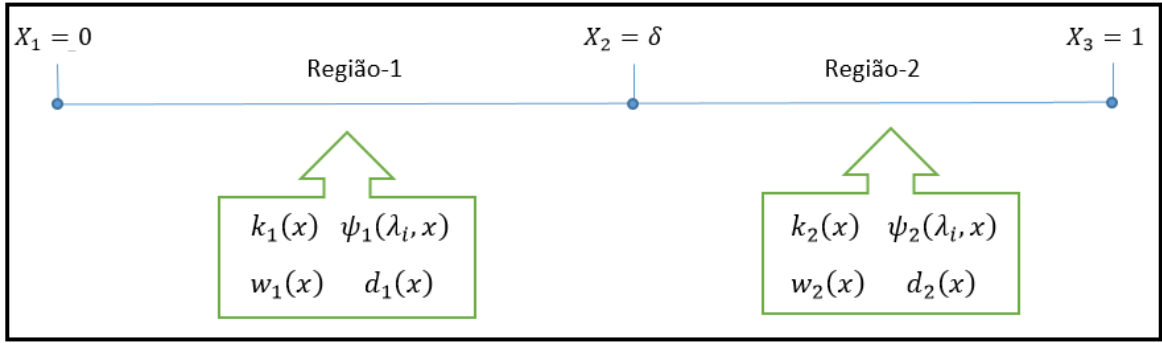


Figura 6.1 – Esquema representando as duas regiões: gás-líquido

A saber, este estudo pretende analisar o escoamento bifásico e/ou dois-fluidos, para tanto o problema de autovalor a ser solucionado deverá ser estendido de forma a atender os casos em que se observa a existência de mais de uma região, que serão indicadas pelo índice inferior f . Logo, $f = 1, 2$; no qual o índice 1 representa a região do gás (região 1); enquanto que o índice 2, representa a região do líquido (região 2), como representado na Figura (6.1)

$$\frac{d}{dx} \left[k_f(x) \frac{d}{dx} (\psi_f(\lambda_i, x)) \right] + [\lambda_i^2 w_f(x) - d_f(x)] \psi_f(\lambda_i, x) = 0, \quad (6.1)$$

em $x_f < x < x_{f+1} \quad f = 1, 2$

Com as seguintes condições de contorno e interface:

✓ Condições de contorno:

$$\alpha_1 \psi_1(\lambda_i, x_1) - \beta_1 k_1(x_1) \frac{d\psi_1(\lambda_i, x_1)}{dx} = 0 \quad (6.2a)$$

$$\alpha_3 \psi_2(\lambda_i, x_3) - \beta_3 k_2(x_3) \frac{d\psi_2(\lambda_i, x_3)}{dx} = 0 \quad (6.2b)$$

✓ Condições de interface:

$$k_1(x_2 = \delta) \frac{d\psi_1(\lambda_i, x_2 = \delta)}{dx} = k_2(x_2 = \delta) \frac{d\psi_2(\lambda_i, x_2 = \delta)}{dx} \quad (6.2.c)$$

$$k_1(x_2 = \delta) \frac{d\psi_1(\lambda_i, x_2 = \delta)}{dx} = \hbar_{1,2} [\psi_1(\lambda_i, x_2 = \delta) - \psi_2(\lambda_i, x_2 = \delta)] \quad (6.2d)$$

ou,

$$\psi_1(\lambda_i, x_2 = \delta) = \psi_2(\lambda_i, x_2 = \delta), \quad (6.2e)$$

A Eq. (6.2e) é aplicada nos casos particulares em que ocorre o contato perfeito entre as interfaces das regiões, um vez que nessas situações $\hbar_{1,2} \rightarrow \infty$. As funções auxiliares $k_f(x)$, $w_f(x)$ e $d_f(x)$ deverão ser reais e contínuas, assim como a primeira derivada de k_f . Observando-se ainda: $k_f > 0$ e $w_f(x) > 0$.

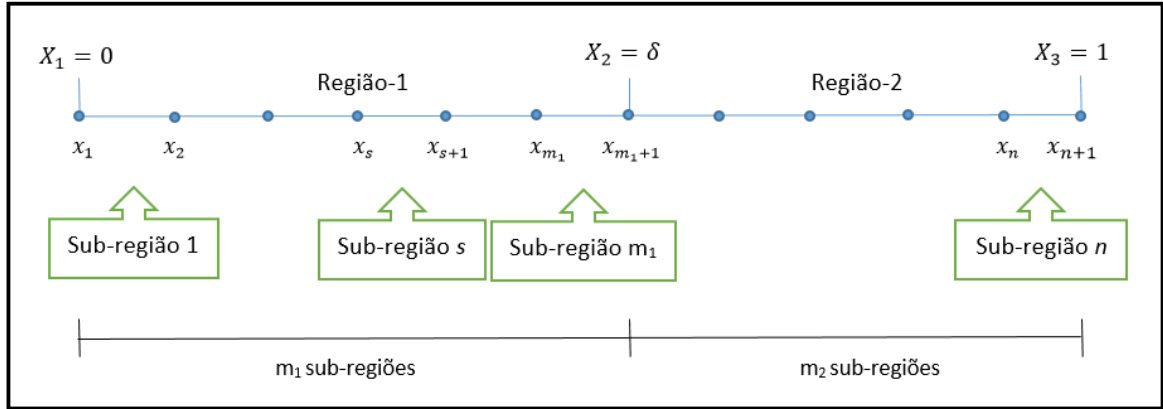


Figura 6.2 – Esquema representando as duas regiões e o suas sub-regiões

Nota-se que o problema apresentado para o caso composto por duas regiões (gás/líquido), possui coeficientes variáveis, que estão sinalizados pelas funções auxiliares $k_f(x)$, $d_f(x)$ e $w_f(x)$. Assim, no intuito de se trabalhar com valores constantes para tais coeficientes, divide-se cada região em sub-regiões ($s = 1, 2, \dots, m_f$), como ilustrado na Figura (6.2). Diante disso, tornando-se possível a determinação de valores constantes aproximados para as funções auxiliares válidos por toda sub-região como indicado pela Eq. (6.3).

$$k_f(x) = \bar{k}_{f,s} = \bar{k}_s$$

$$w_f(x) = \bar{w}_{f,s} = \bar{w}_s \quad (6.3)$$

$$d_f(x) = \bar{d}_{f,s} = \bar{d}_s$$

As aproximações anteriores podem se dar de maneiras diversas. A título de exemplo, lista-se abaixo três possíveis aproximações que poderiam ser realizadas sobre uma função auxiliar $F_f(x)$ genérica, válida na sub-região $x_s < x < x_{s+1}$:

○ Aproximação pela média aritmética simples dos valores da função nos extremos da sub-região:

$$\bar{F}_{f,s}(s) = \frac{F_f(r_{s-1}) + F_f(r_s)}{2} \quad (6.4)$$

○ Aproximação pela média ponderada dos valores da função na sub-região dada pela Eq. (6.6) obtida por meio da integração numérica que por sua vez pode ser implementada a partir da *Regra de Simpson Composta* apresentada em (6.5).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right] \quad (6.5)$$

No qual,

$$h = \frac{b-a}{n},$$

onde n representa o número de intervalos que a região $[a,b]$ é dividida.

$$x_i = a + ih$$

○ Aproximação pela média ponderada dos valores da função na sub-região, obtida por meio da integração analítica da expressão (6.6).

$$\bar{F}_{f,s} = \frac{\int_{x_{s-1}}^{x_s} x^n F_f(x) dx}{\int_{x_{s-1}}^{x_s} x dx} \quad (6.6)$$

onde,

$$n = \begin{cases} 0, & \text{coordenadas retangulares} \\ 1, & \text{coordenadas cilíndricas} \\ 2, & \text{coordenadas esféricas} \end{cases}$$

Esta última foi a aproximação utilizada para a análise do problema proposto neste trabalho. Resultando nos seguintes valores médios das funções auxiliares, Eqs. (6.7a) e (6.8b,c).

$$\bar{k}_s = \frac{\int_{R_s}^{R_{s+1}} (r) r dr}{DEN} \equiv \frac{[(R_{s+1})^3 - (R_s)^3]/3}{DEN}, \quad \forall R_s < R < R_{s+1} \quad (6.7a)$$

Onde,

$$DEN = \int_{R_s}^{R_{s+1}} R dR = \frac{(R_{s+1})^2 - (R_s)^2}{2} \quad (6.7b)$$

$$\bar{w}_{f,s} = \frac{\int_{R_s}^{R_{s+1}} V_f(R) R^2 dR}{DEN} \quad (6.8a)$$

Então,

$$\bar{w}_{g,s} = \frac{\int_{R_s}^{R_{s+1}} \left[\frac{\hat{\mu}_L(R^2 - \delta^2) + \hat{G}(\delta^2 - 1) + 2(1 - \hat{G})\delta^2 \ln(\delta)}{-\left[\frac{\hat{\mu}_L}{\hat{\mu}_g}\left(\frac{\delta^4}{2}\right) + \hat{G}\left(\frac{\delta^4}{2} - \delta^2 + \frac{1}{2}\right) + (\delta^2 - \delta^4)\right]} \right] R^2 dR}{DEN} \quad (6.8b)$$

e

$$\bar{w}_{l,s} = \frac{\int_{R_s}^{R_{s+1}} \left[\frac{\hat{G}(R^2 - 1) + 2(1 - \hat{G})\delta^2 \ln(R)}{-\left[\frac{\hat{\mu}_L}{\hat{\mu}_g}\left(\frac{\delta^4}{2}\right) + \hat{G}\left(\frac{\delta^4}{2} - \delta^2 + \frac{1}{2}\right) + (\delta^2 - \delta^4)\right]} \right] R^2 dR}{DEN} \quad (6.8c)$$

Onde, DEN foi definido anteriormente pela Eq. (B.7b)

Dessa forma, a Eq. (6.1) assumem a forma equivalente, para um número suficientemente grande de sub-regiões, dada por (6.9a,b), enquanto que suas condições iniciais, de contorno e de interface são reescritas na forma das Eqs. (6.10a-f). Nota-se que nesta nova representação os coeficientes são constantes e válidos em cada sub-região, $x_{s-1} < x < x_s$.

$$k_{f,s} \frac{d^2}{dx} (\psi_{f,s}(\lambda_i, x)) + [\lambda_i^2 w_{f,s} - d_{f,s}] \psi_{f,s}(\lambda_i, x) = 0 \quad (6.9a)$$

$$\text{Ou,} \quad (6.9b)$$

$$\frac{d^2(\psi_s(\lambda_i, x))}{dx} + \omega_{f,s}^2 \psi_{f,s}(\lambda_i, x) = 0 ,$$

No qual,

$$\omega_{f,s,i}^2 = \frac{\lambda_i^2 w_{f,s} - d_{f,s}}{k_{f,s}} \quad (6.9c)$$

em, $x_{f,s} < x < x_{f,s+1}$, ou simplesmente, $x_s < x < x_{s+1}$

Para, $f = 1, 2$ e $s = 1, 2, 3, \dots, m_1, \dots, n \rightarrow n = m_1 + m_2$

Enquanto que:

✓ Condições de contorno:

$$\alpha_1 \psi_1(\lambda_i, x_1) - \beta_1 k_1 \frac{d\psi_1(\lambda_i, x_1)}{dx} = 0 \quad (6.10a)$$

$$\alpha_3 \psi_n(\lambda_i, x_3) - \beta_3 k_n \frac{d\psi_n(\lambda_i, x_3)}{dx} = 0 \quad (6.10b)$$

✓ Condições de interface entre regiões

$$k_{m_1} \frac{d\psi_{m_1}(\lambda_i, x_{m_1+1} = \delta)}{dx} = k_{m_1+1} \frac{d\psi_{m_1+1}(\lambda_i, x_{m_1+1} = \delta)}{dx} \quad (6.10c)$$

$$\psi_{m_1}(\lambda_i, x_{m_1+1} = \delta) = \frac{k_{m_1}}{\hbar_{1,2}} \frac{d\psi_{m_1}(\lambda_i, x_{m_1+1} = \delta)}{dx} + \psi_{m_1+1}(\lambda_i, x_{m_1+1} = \delta) \quad (6.10d)$$

○ Condições de interface entre sub-regiões

$$k_s \frac{d\psi_s(\lambda_i, x_{s+1})}{dx} = k_{s+1} \frac{d\psi_{s+1}(\lambda_i, x_{s+1})}{dx} \quad (6.10e)$$

$$\psi_s(\lambda_i, x_{s+1}) = \psi_{s+1}(\lambda_i, x_{s+1}) \quad (6.10f)$$

Nas análises que se seguem o coeficiente d_f é considerado nulo, o que implica em $\omega_{fk}^2 > 0$. Observando-se tal restrição a Eq. (6.9) terá como solução a expressão dada por (6.11), válida em cada sub-região.

$$\psi_s(\lambda_i, x) = \psi_s(\lambda_i, x_s) \frac{\text{sen}[\omega_s(x_{s+1} - x)]}{\text{sen}(\omega_s l_s)} + \psi_s(\lambda_i, x_{s+1}) \frac{\text{sen}[\omega_s(x - x_s)]}{\text{sen}(\omega_s l_s)} \quad (6.11a)$$

onde,

$$l_s = x_{s+1} - x_s \quad (6.11b)$$

Ao submeter a solução acima às condições de contorno e de interface relacionadas anteriormente, obtém-se o seguinte sistema de equações dado em (6.12).

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + A_1\right) \psi_1(\lambda_i) - B_1 \psi_2(\lambda_i) = 0 \quad (6.12a)$$

$$-B_s \cdot \psi_s(\lambda_i) + (A_s + A_{s+1}) \cdot \psi_{s+1}(\lambda_i) - B_{s+1} \psi_{s+2}(\lambda_i) = 0 \quad (6.12b)$$

$$s = 1, 2 \dots n - 1 ; s \neq m_1$$

$$-B_{m_1} C_{1,2} \psi_{m_1}(\lambda_i) + (A_{m_1} C_{1,2} + A_{m_1+1}) \psi_{m_1+1}(\lambda_i) - B_{m_1+1} \cdot \psi_{m_1+2}(\lambda_i) = 0 \quad (6.12c)$$

$$-B_n \psi_n(\lambda_i) + \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} + A_n\right) \psi_{n+1}(\lambda_i) = 0 \quad (6.12d)$$

onde,

$$\psi_s(\lambda_i) = \psi_s(\lambda_i, x_s) = \psi_{s+1}(\lambda_i, x_s) \text{ para } s \neq m_1 + 1 \quad (6.12e)$$

$$A_s = B_s \cos(\omega_s l_s) \quad (6.12f)$$

$$B_s = \frac{k_s \omega_s}{\sin(\omega_s l_s)} \quad (6.12g)$$

$$C_{1,2} = \left[1 - \frac{A_{m_1+1}}{\hbar_{1,2}} \right] \quad (6.12h)$$

ψ_{m_1} , indica a autofunção no lado direito da interface $x_{m_1} = \delta$, é determinada pela expressão (6.13a,b).

$$\psi_{m_1} = \psi_{m_1} \left[1 - \frac{A_{m_1}}{\hbar_{1,2}} \right] + \frac{B_{m_1}}{\hbar_{1,2}} \psi_{m_1-1} \quad (6.13a)$$

Ou no caso de contato perfeito entre as interfaces:

$$\psi_{m_1} = \psi_{m_1} \quad (6.13b)$$

As expressões (6.12a-d) podem ser representadas na forma matricial, como se segue:

$$[K(\lambda_i)] [\psi_s(\lambda_i)] = 0 \quad (6.14a)$$

Ou de forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & a_2 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & a_3 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{m_1+1} & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & -b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_n & a_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{n-1} \\ \psi_n \\ \psi_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.14b)$$

Onde,

$$a_s = A_{s-1} + A_s \quad s = 1, 2, \dots, n+1 \quad \text{para} \quad s \neq m_{1+1} \quad (6.14c)$$

$$a_s = A_{s-1} \cdot C_{1,2} + A_k \quad s = m_{1+1} \quad (6.14d)$$

$$A_0 \equiv \alpha_1 / \beta_1 \quad \text{e} \quad A_{n+1} \equiv \alpha_n / \beta_n \quad (6.14e)$$

$$b_s = B_k \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (6.14f)$$

$$c_{s-1} = b_{s-1} \quad s = 2, 3, \dots, n+1 \quad \text{para} \quad s \neq m_{1+1} \quad (6.14g)$$

$$c_{s-1} = b_{s-1} \cdot C_{1,2} \quad s = m_{1+1} \quad (6.14h)$$

A saber, para que o sistema de Eqs. (6.14a) possua solução não trivial o determinante da matriz $[K(\lambda_i)]$ deverá ser nulo. No entanto, em muitos casos, soluções puramente analíticas ainda são desconhecidas, sendo necessário o uso de métodos numéricos.

Vários são os métodos que podem ser utilizados na obtenção dos autovalores desejados, como por exemplo o método das diferenças finitas e o de Runge-Kutta. Contudo, em alguns casos, tais métodos como podem incorrer na perda de alguns autovalores (em especial, o de primeira ordem) e numa baixa precisão ao se tratar de autovalores de ordem elevadas.

Diante deste cenário é que se opta pela utilização do método de contagem de sinal (*sign-count*), o qual a obtenção dos autovalores desejados sem risco de perdas, inclusive do primeiro, mantendo uma precisão definida que se aplica mesmo aos autovalores de ordem elevadas.

6.3 DETERMINAÇÃO DOS AUTOVALORES PELO MÉTODO DA CONTAGEM DE SINAL

WITTRICK e WILLIAMS (*apud* ÖZISIK (1984)) demonstraram que o número autovalores positivos existente entre zero e um autovalor prescrito é dado por:

$$N(\tilde{\lambda}) = N_0(\tilde{\lambda}) + S([K(\tilde{\lambda})]) \quad (6.15)$$

Onde $N_0(\tilde{\lambda})$ é dado pela Eq. (6.16) e indica o número de autovalores positivos não excedendo $\tilde{\lambda}$, referente ao sistema desacoplado, isto é, quando o vetor $[\psi_s(\lambda_i)]$ for nulo.

$$N_0(\tilde{\lambda}) = \sum_{s=1}^n N_{0,s}(\tilde{\lambda}) = \sum_{s=1}^n \text{int} \left(\frac{\omega_s^2 l_s}{\pi} \right) \quad (B.16)$$

Enquanto que $S([K(\tilde{\lambda})])$ indica o “*sign count*” de $[K(\tilde{\lambda})]$ dado pelo número de elementos negativos ao longo da diagonal principal da matriz triangular de $[K(\tilde{\lambda})]$. Tais elementos da diagonal principal (tanto os positivos quanto os negativos) podem ser determinados, através do método da eliminação de Gauss, pela Eq.(6.17).

$$d_s = a_s - \frac{b_{s-1}c_{s-1}}{d_{s-1}}, \quad s = 2, 3, \dots, n+1 \quad (6.17)$$

Com $d_1 = a_1$

6.4 DETERMINAÇÃO DAS AUTOFUNÇÕES E NORMAS ASSOCIADAS AO PROBLEMA DE AUTOVALOR

Para um dado valor de λ_i é possível determinar o vetor $[\psi_s(\lambda_i)]$ das autofunções impondo-se, inicialmente, $\psi_1 = \beta_1$ para em seguida fazer uso das leis de recorrência dadas pelas Eq. (6.12a-d). Dessa forma, as $n+1$ autofunções ficam completamente determinadas como apresentado em (6.18 a-e).

$$\psi_1(\lambda_i) = \beta_1 \quad (6.18a)$$

$$\psi_2(\lambda_i) = \frac{\alpha_1 + A_1\beta_1}{B_1} \quad (6.18b)$$

$$\psi_{s+2}(\lambda_i) = \frac{-B_s\psi_s(\lambda_i) + (A_s + A_{s+1})\psi_{s+1}(\lambda_i)}{B_{s+1}}, \quad s = 1, 2, \dots, n-2 \quad s \neq m_1 - 1 \quad (6.18c)$$

$$\psi_{m_1+2}(\lambda_i) = \frac{-B_{m_1}C_{1,2}\psi_{m_1}(\lambda_i) + (A_{m_1}C_{1,2} + A_{m_1+1})\psi_{m_1+1}(\lambda_i)}{B_{m_1+1}}, \quad (6.18d)$$

$$\psi_{n+1}(\lambda_i) = \frac{B_n\psi_n(\lambda_i)}{\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} + A_n\right)} \quad (6.18e)$$

Uma estimativa do erro global envolvido no cálculo das autofunções é obtida a partir da análise do desvio em relação a zero do lado direita do Eq. (6.12d) após a substituição de $\psi_n(\lambda_i)$ e $\psi_{n+1}(\lambda_i)$ pelos valores correspondentes que foram computados.

As normas associadas ao autovalor λ_i são dadas por:

$$N(\lambda_i) = N_i = (\psi_{gi}, \psi_{gi}) + (\psi_{li}, \psi_{li}) \quad (6.19)$$

$$N_i = \int_{\text{região}} w_g(x) \psi_{gi}^2(x) dx + \int_{\text{região}} w_l(x) \psi_{li}^2(x) dx$$

gás *líquido*

Então, considerando o valor médio da função auxiliar $w(x)$ a Eq.(6.19) é reescrita na forma apresentada em (6.20).

$$N_i = \sum_{s=1}^n \bar{w}_s(x) \int_{x_s}^{x_{s+1}} \psi_{i,s}^2(x) dx \quad (6.20)$$

Substituindo (6.11a) em (6.20) e integrando a norma passa a ser representada conforme a Eq.(6.21)

$$N_i = \sum_{s=1}^n \bar{w}_s(x) \frac{(\psi_s^2 + \psi_{s+1}^2) \left\{ \left[(A_s^2 + \omega_s^2 \bar{k}_s^2)^{l_s / \bar{k}_s} \right] - A_s \right\} + 2\psi_s \psi_{s+1} B_k \left(1 - A_s^{l_s / \bar{k}_s} \right)}{2\omega_s^2 \bar{k}_s} \quad (6.21)$$

Fazendo uso das ideias expostas neste capítulo elaborou-se o código computacional, HANCAF, responsável pela solução numérica do problema proposto e cujo algoritmo encontra-se no anexo B.

CAPÍTULO VII

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, antes de qualquer coisa, é feita uma análise da convergência do potencial desejado obtido pelo código implementado, para que assim se determine a ordem de truncamento da série que representa a expansão do mesmo de acordo com o erro preestabelecido. Para o problema proposto de transferência de calor e massa o número de Nusselt representa o principal parâmetro de interesse prático, dessa forma, após a análise de convergência é apresentado um estudo acerca deste parâmetro em função das variações sentidas como consequências de alterações em certas características do escoamento. Por fim, é apresentada a validação da formulação proposta.

7.1 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Na obtenção dos resultados a serem apresentados, caso não seja dito explicitamente o contrário, foram utilizadas as inicializações listadas abaixo:

$$\frac{\hat{\mu}_l}{\hat{\mu}_g} = 0.02 \quad \hat{G} = \frac{\frac{\partial \hat{p}_l}{\partial Z} + \hat{\rho}_l g}{\frac{\partial \hat{p}_g}{\partial Z} + \hat{\rho}_g g} = 1 \quad \hbar_{1,2} = 300 \quad B = 0$$

A convergência é avaliada a partir dos valores de temperatura média adimensional obtidos para diferentes ordens de truncamento (i), conforme apresentado na Tab. (7.1). Verifica-se que a convergência considerando um erro relativo de 10^{-3} é atingida truncando a série para autovalores de ordem 20. Já para um erro de 10^{-4} um truncamento na 60ª ordem se faz necessário.

Tabela 7.1 – Temperaturas média adimensional (θ_b) obtidas truncando-se as séries em diferentes ordens (i)

	Temperatura média adimensional: $\theta_b(Z)$							
Z	$i=10$	$i=20$	$i=30$	$i=40$	$i=50$	$i=60$	$i=70$	$i=80$
10^{-9}	.9865	.9934	.9953	.9962	.9967	.9970	.9972	.9974
10^{-8}	.9865	.9934	.9953	.9962	.9967	.9970	.9972	.9974
10^{-7}	.9865	.9934	.9953	.9962	.9967	.9970	.9972	.9973
10^{-6}	.9865	.9933	.9953	.9961	.9966	.9969	.9971	.9973
10^{-5}	.9864	.9931	.9949	.9957	.9962	.9964	.9965	.9966
10^{-4}	.9848	.9907	.9919	.9922	.9923	.9923	.9923	.9923
10^{-3}	.9711	.9727	.9727	.9727	.9727	.9727	.9727	.9727
10^{-2}	.8896	.8896	.8896	.8896	.8896	.8896	.8896	.8896
0.1	.5742	.5742	.5742	.5742	.5742	.5742	.5742	.5742
1	.0204	.0204	.0204	.0204	.0204	.0204	.0204	.0204

7.2 PARÂMETRO DE INTERESSE: NÚMERO DE NUSSELT

A saber, o número de Nusselt representa a razão entre a transferência de calor por convecção e por condução. Este parâmetro é bastante utilizado na determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção, sendo definido pela Eq. (7.1).

$$Nu(z) = \frac{\hbar(z)D_h}{k_l} \quad (7.1)$$

Onde,

$$\hbar(z) = \frac{-k_l \frac{\partial T_l}{\partial r}}{T_p - T_b} \quad (7.2)$$

Nota-se que a Eq. (7.1) pode ser reescrita conforme apresentado em (7.3).

$$Nu(Z) = \left[-k_l \frac{\frac{\partial T_l(r_t, z)}{\partial r}}{T_l(r_t, z) - T_b(Z)} \right] \frac{D_h}{r_t} \quad (7.3)$$

Ou ainda, na forma adimensional:

$$Nu(Z) = -\frac{D_h}{r_t} \left[\frac{\frac{\partial \theta_l(R=1, Z)}{\partial R}}{\theta_l(R=1, Z) - \theta_b(Z)} \right] \quad (7.4)$$

Onde,

$$\theta_b(Z) = \frac{\int_0^1 V_f(R) \theta_f(R, Z) R dR}{\int_0^1 V_f(R) R dR}; \quad f = \begin{cases} g, & 0 < R < \delta \\ l, & \delta < R < 1 \end{cases} \quad (7.5)$$

De acordo com os dados obtidos e apresentados na Tab. (7.2) alterações nos valores do número de Nusselt local são sentidas ao se variar a ordem do truncamento da série que representa o potencial desejado. Ainda é possível observar que a convergência deste parâmetro no infinito é obtida para qualquer ordem de truncamento, uma vez que ele depende unicamente do primeiro autovalor, em outras palavras, segue a seguinte relação:

$$Nu = \beta_1^2 \quad (7.6)$$

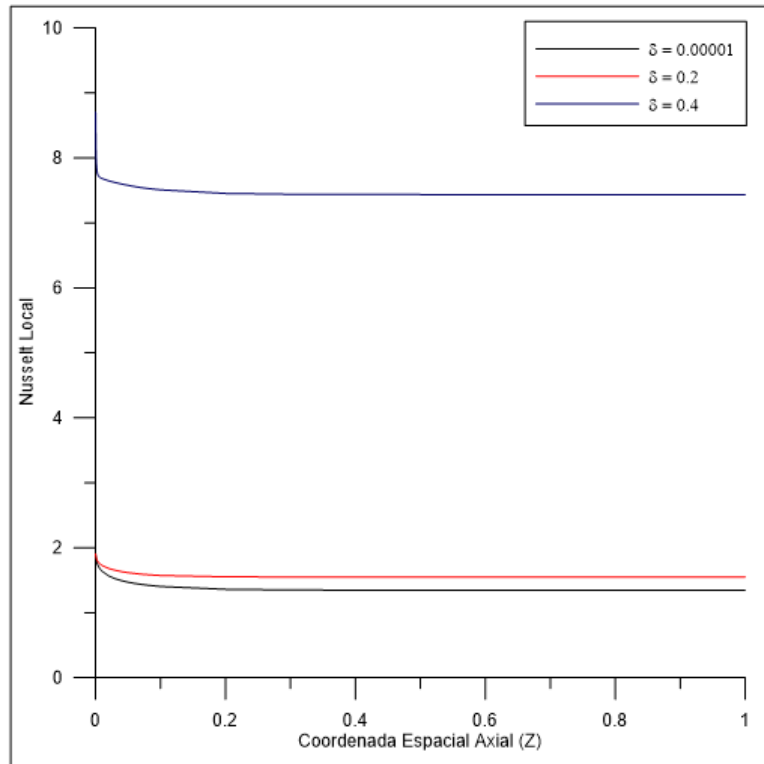
Ainda com relação aos dados ilustrados na Tab. (7.2) nota-se que o número de Nusselt na entrada sente fortemente os efeitos da ordem em que a série é truncada, a título de ilustração, observa-se que a diferença relativa entre este parâmetro para $i=20$ e $i=60$ é de 1.1801, enquanto que para a temperatura média é de 0,0036.

Tabela 7.2 – Número de Nusselt Local (Nu) obtidos para $\delta = 0.9999$ truncando-se as séries em diferentes ordens (i)

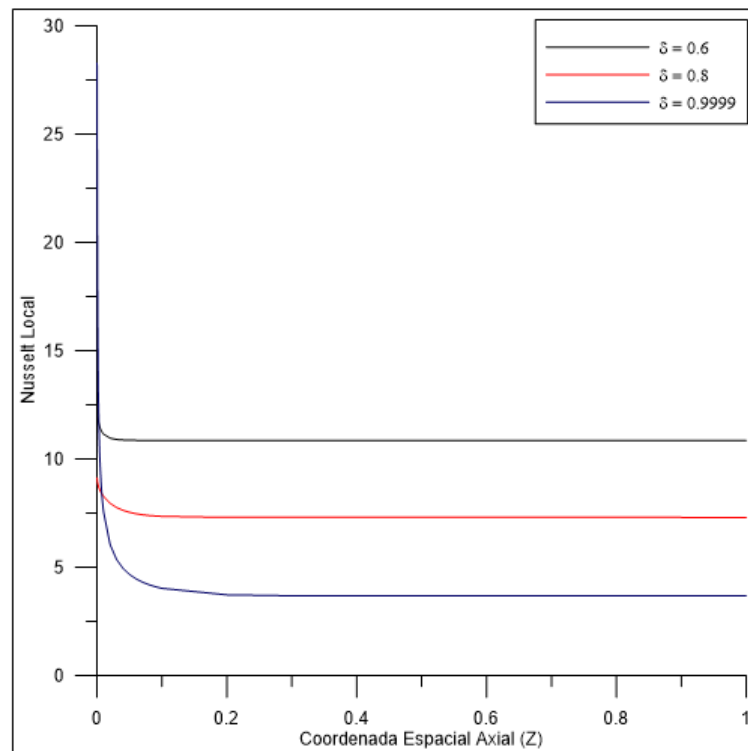
	Nusselt local: $Nu(Z)$	
Z	$i = 20$	$i = 60$
10^{-9}	28.2940	61.6840
10^{-8}	28.2938	61.6798
10^{-7}	28.2916	61.6377
10^{-6}	28.2702	61.2207
10^{-5}	28.0581	57.3724
10^{-4}	26.1182	37.3122
10^{-3}	16.5697	16.6736
10^{-2}	07.5579	07.5577
0.1	04.0332	04.0331
1	03.6838	03.6838

Dando continuidade à análise, variações sentidas pelo número de Nusselt local, diante de alterações impostas tanto na geometria do problema quanto nas propriedades dos fluidos envolvidos, foram comparadas. Os valores que se seguem são obtidos truncando a série na 20ª ordem.

- **Efeito sob o Número de Nusselt Local devido a variações decorrentes da espessura do filme líquido ($1 - \delta$):**



(a)



(b)

Figura 7.1 – Número de Nusselt Local para diferentes espessuras de filme líquido ($1 - \delta$)

A Fig.7.1 mostra o comportamento do número de Nusselt em função da variação do filme líquido imposto ao escoamento bifásico. Nota-se que o aumento no valor de δ , e logo a diminuição da espessura do filme líquido, implica na diminuição do número de Nusselt Local.

- **Efeito sob o número de Nusselt Local devido a variações no parâmetro $\hat{G}$**

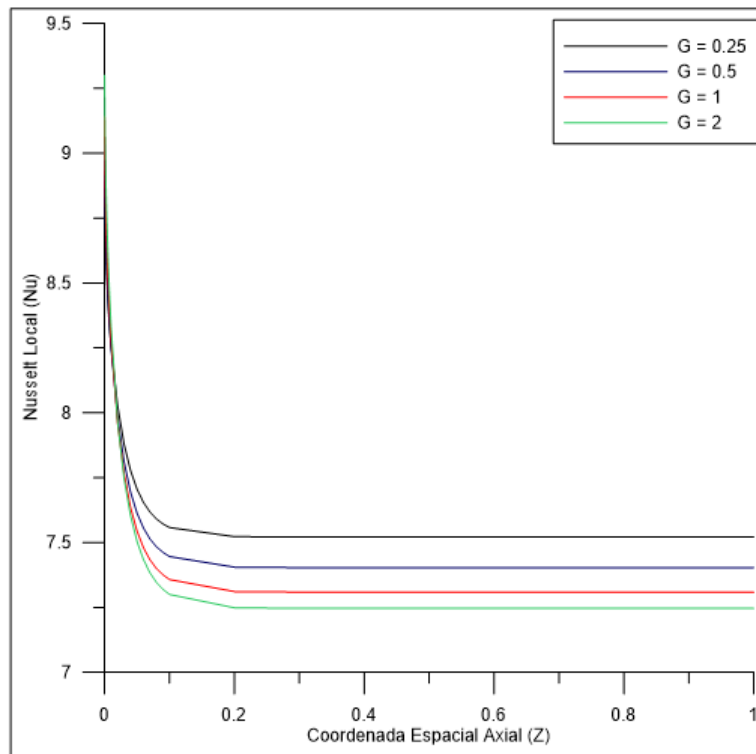


Figura 7.2 – Número de Nusselt local para diferentes valores do parâmetro $\hat{G} =$

$$\left[\frac{\partial \hat{p}_l}{\partial Z} + \hat{p}_l g \right] / \left[\frac{\partial \hat{p}_g}{\partial Z} + \hat{p}_g g \right]$$

- **Efeito sob o número de Nusselt devido a variações na função que representa a dependência da difusividade com a potencial.**

Conforme se observa através das Tabs. (7.3) e (7.4) os efeitos ocasionados sobre o número de Nusselt local ao alterar-se os valores de B, isto é a função que relaciona a dependência da difusividade com o potencial, mostram pequena influência do coeficiente em questão, dentro da relação proposta. Nota-se uma diferença relativa de 10^{-3} no caso do

escoamento bifásico, Tab (7.3), e de 10^{-2} no escoamento tendendo ao escoamento monofásico, Tab.(7.4). Diante disso, afirma-se que ao considerar-se os efeitos da temperatura sobre a difusividade adiciona-se certa complexidade ao modelo, sobretudo no que diz respeito ao tratamento analítico, que não são justificados pelos os resultados obtidos. Sendo assim, é aconselhável uma investigação adicional quanto a outras relações de dependência.

Tabela 7.3 – Números de Nusselt locais (Nu) obtidos para diferentes valores de B - fazendo $\delta = 0.8$ e $i = 20$ -.

	Números de Nusselt locais (Nu)			
Z	B=0	B=1	B=10	B=100
10^{-9}	9.129140	9.129140	9.129140	9.129138
0.5	7.309223	7.323156	7.338312	7.351006
1	7.302770	7.309862	7.316459	7.336307

Tabela 7.4 – Números de Nussel Locais (Nu) obtidos para diferentes valores de B - fazendo $\delta = 0.999$ e $i = 20$ -.

	Números de Nusselt locais (Nu)			
Z	B=0	B=1	B=10	B=100
10^{-9}	27.285043	27.285041	27.285020	27.284813
0.5	3.684031	3.688409	3.699921	3.812814
1	3.683829	3.686848	3.699047	3.811728

7.3 VALIDAÇÃO

O modelo proposto, assim como a metodologia aplicada, foi validado a partir de comparações entre os dados obtidos e os encontrados na literatura aberta. Para tanto, o código foi ajustado para o caso em que $\delta \rightarrow 1$, isto é, tendendo ao escoamento monofásico, e as inicializações listadas no início do capítulo foram utilizadas.

Com relação ao problema auxiliar, no que diz respeito aos autovalores encontrados, foram realizadas comparações com os valores apresentados tanto por KAKAÇ e YENER (1995), conforme ilustrado na Tab. (7.5).

Tabela 7.5 – Autovalores para escoamento em dutos circulares

i	β_i	<i>Autovalor segundo KAKAÇ e YENER (1995)</i>
1	2.7044	2.7044
2	6.6791	6.6790
3	10.6739	10.6734
4	14.6712	14.6711
5	18.6701	18.6699

Nota-se que os autovalores obtidos conferem com os valores confrontados, o confere confiabilidade no que diz respeito ao problema de autovalor.

No tocante ao potencial desejado, assim como do número de Nusselt local, comparações dos dados obtidos foram realizadas com os valores apresentados por NOGUEIRA (1988). Observou-se a concordância esperada, conforme ilustrado por meio da Tab (7.6). Observa-se que as coordenada espacial axial , z , encontra-se deslocada por um fator de 2, este fato é reflexo do tratamento dado ao problema original no que diz respeito a sua adimensionalização.

Na obtenção dos resultados apresentados nas Tab. (7.6) e (7.7) utilizou-se um delta igual a 0.9999. Observou-se que ao aproximarmos mais do fluxo monofásico, aumentando o número de nove após o zero o número de Nusselt vai para 3,66 o que confere com o apresentado por KAKAÇ e YENER (1995), a saber, 3,657.

Tabela 7.6 – Comparação entre a temperatura média adimensional obtida no presente trabalho e a apresentado por NOGUEIRA (1988).

NOGUEIRA (1988)		Presente Trabalho	
Z	$Nu(Z)$	Z	$Nu(Z)$
0.00005	29.502	0.0001	29.428
0.0005	13.069	0.001	13.075
0.005	6.052	0.01	6.058
0.05	3.732	0.1	3.736
0.5	3.679	1	3.683

Tabela 7.7 – Comparação entre a temperatura média adimensional obtida no presente trabalho e a apresentado por NOGUEIRA (1988).

NOGUEIRA (1988)		Presente Trabalho	
Z	$\theta_b(Z)$	Z	$\theta_b(Z)$
0.00005	0.9907	0.0001	0.9892
0.0005	0.9502	0.001	0.9587
0.005	0.8334	0.01	0.8321
0.05	0.3919	0.1	0.3912
0.5	0.0005	1	0.0005

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

8.1 PRINCIPAIS RESULTADOS INFERIDOS

Tendo como proposta a análise do escoamento multifásico gás/líquido ascendente em regime laminar através de dutos circulares; com perfis de velocidade hidrodinamicamente desenvolvidos e interagindo termicamente, elaborou-se um modelo analítico-numérico tendo como recurso o uso da GITT. Os resultados obtidos, apresentados e confrontados com os encontrados na literatura validaram o método utilizado, conferindo ao código a confiabilidade necessária para a análise.

Desta forma, conclui-se que a metodologia empregada neste trabalho representa adequadamente o desenvolvimento térmico do escoamento proposto. Sendo assim, acredita-se que a maior contribuição do trabalho apresentado consiste na validação do modelo a partir de uma metodologia confiável que se desenvolveu sobre um código, HANCAF, que possibilitando análises abrangentes com grande versatilidade. Uma vez que, através da correta alimentação dos dados o código permite avaliar diferentes situações no que diz respeito a geometria do escoamento e a propriedades dos fluidos em análise. De forma mais específica, foram ilustradas situações que se distinguem quanto ao modo como as propriedades termofísicas variam com a temperatura, quanto à espessura do filme líquido escoando em contato permanente com a parede do duto e com relação ao parâmetro $\hat{G}$, que além de carregar informações a respeito do gradiente de pressão pode ser manipulado de forma a permitir análises de escoamentos ligeiramente inclinados desde que sejam observadas as simetrias do escoamento.

Os resultados obtidos para o número de Nusselt nas mais diversas situações obedecem a relação esperada de proporcionalidade com o quadrado do primeiro autovalor correspondente.

Durante o processo de implementação do código observou-se que alterações na determinação do problema transformado são sentidas com maior intensidade nos valores de temperatura média relacionados a região de entrada, o que é esperado pelo comportamento característico desta curva.

8.2 TEMAS A SEREM ABORDADOS EM TRABALHOS FUTUROS

Visando dar continuidade à pesquisa iniciada no presente trabalho sugere-se sua extensão a partir de análises mais complexas do comportamento do escoamento no padrão anular.

Com relação ao aspecto físico do problema, propõe-se admitir, durante a formulação do problema, hipóteses mais realistas no que diz respeito às aplicações práticas, como:

- Escoamento tratado como turbulento;
- Ocorrência dos processos de entranhamento /deposição, típicos do padrão anular;
- Interfaces móveis e deformáveis (e não mais perfeitamente lisas);
- Mudança de fase no decorrer do escoamento;
- Investigação de novas funções que retratem o comportamento dos parâmetros termofísicos e sua posterior análise a partir de comparações com dados experimentais a fim de se averiguar qual seria o comportamento mais adequado e se as variações ocasionadas pela inserção dessas novas funções justificam o aumento na complexidade do problema.

Uma vez realizadas tais mudanças no modelo físico do problema é interessante o confronto dos resultados obtidos com os que foram alcançados em condições mais simples afim de se efetuar uma análise crítica no sentido de se verificar se tal aumento na complexidade do problema é justificada.

APÊNDICE A

SOLUÇÃO FORMAL DOS PERFIS DE VELOCIDADE E DAS VELOCIDADES MÉDIA PARA O ESCOAMENTO GÁS-LÍQUIDO EM CANAL DE GEOMETRIA CIRCULAR COM A ORIGEM DO SISTEMA DE COORDENADAS NO CENTRO DO CANAL

As equações da quantidade de movimento assim como as condições iniciais, de contorno e de interface a serem consideradas neste apêndice foram definidas no Capítulo IV.

A.1 PERFIS DE VELOCIDADE DA REGIÃO DE GÁS E DE LÍQUIDO

Integrando-se a equação da quantidade de movimento para a região de gás dada por (4.2a) obtém-se a Eq. (A.1).

$$v_g = \frac{G_g}{4\mu_g} r^2 + \frac{C_{1,g}}{\mu_g} \ln(r) + C_{2,g} \quad (\text{A.1})$$

Onde, $C_{1,g}$ e $C_{2,g}$ correspondem às constantes de integração, enquanto que G_g é definido como $\partial p_g / \partial z + \rho_g g \equiv G_g$.

Aplicando as condições de contorno e interface dadas pelas Eqs. (4.4c) e (4.4g) à Eq. (A.1), obtém-se as constantes de integração representadas pelas Eqs. (A.2) e (A.3).

$$C_{1,g} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$C_{2,g} = v_l(r = r_i) - \frac{G_g}{4\mu_g} r_i^2 \quad (\text{A.3})$$

De forma análoga, integrando-se a equação da quantidade de movimento para a região de líquido definida em (4.2b), obtém-se a Eq. (A.4).

$$v_l = \frac{G_l}{4\mu_l} r^2 + \frac{C_{1,l}}{\mu_l} \ln(r) + C_{2,l} \quad (\text{A.4})$$

Onde, $C_{1,l}$ e $C_{2,l}$ correspondem às constantes de integração, enquanto que G_l é definido como $\partial p_l / \partial z + \rho_l g \equiv G_l$.

$C_{2,l}$, é determinada por meio da imposição da condição de contorno (4.4e) à Eq. (A.4). Enquanto que $C_{1,l}$, é obtida pela imposição da condição de interface (4.4h).

Dessa forma, os perfis de velocidade tanto do líquido quanto do gás ficam completamente determinados pelas Eqs. (A.5) e (A.6), respectivamente.

$$v_g(r) = \frac{G_g}{4\mu_g} (r^2 - r_i^2) + \frac{G_l}{4\mu_l} (r_i^2 - r_t^2) + \frac{(G_g - G_l)}{2\mu_l} r_g^2 \ln(r_i/r_t) \quad (\text{A.5})$$

$$v_l(r) = \frac{G_l}{4\mu_l} (r^2 - r_t^2) + \frac{(G_g - G_l)}{2\mu_l} r_i^2 \ln(r/r_t) \quad (\text{A.6})$$

A.2 VELOCIDADE MÉDIA: DO GÁS, DO LÍQUIDO E DO ESCOAMENTO

A média na área de uma propriedade, Ψ , é definida pela Equação (A.7).

$$\bar{\Psi} = \frac{\int_A \Psi dA}{\int_A dA} \quad (\text{A.7})$$

No escoamento bifásico gás-líquido a velocidade pode ser representada pela Equação (A.8).

$$v = \begin{cases} v_g, & 0 \leq r \leq r_i \\ v_l, & r_i \leq r \leq r_t \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Onde, v_l e v_g são definidas pelas Equações (A.5) e (A.6).

Substituindo-se (A.8) em (A.7), após as devidas manipulações, obtém-se a *velocidade média na seção transversal do escoamento*, dada pela Eq. (A.9).

$$\bar{v} = -\frac{G_g r_t^2}{4\mu_l} \left[\frac{\mu_l}{\mu_g} \left(\frac{r_i^4}{2r_t^4} \right) + \frac{G_l}{G_g} \left(\frac{r_i^4}{2r_t^4} - \frac{r_i^2}{r_t^2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{r_i^2}{r_t^2} - \frac{r_i^4}{r_t^4} \right) \right] \quad (\text{A.9})$$

A partir da substituição dos perfis de velocidade dados pelas expressões (A.5) e (A.6) na Eq. (A.7) obtém-se as *velocidades média do líquido e do gás*, representadas pelas Eqs. (A.10) e (A.11) respectivamente.

$$\bar{v}_g = \frac{G_g r_t^2}{2\mu_l} \left[-\frac{1}{4} \frac{r_i^2}{r_t^2} \frac{\mu_l}{\mu_g} + \frac{G_l}{2G_g} \left(\frac{r_i^2}{r_t^2} - 1 \right) + \frac{r_i^2}{r_t^2} \left(1 - \frac{G_l}{G_g} \right) \ln(r_i/r_t) \right] \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_l = \frac{2}{\left(\frac{r_i^2}{r_t^2} - 1 \right)} \frac{G_l r_t^2}{4\mu_l} & \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{r_i^2}{r_t^2} - \frac{3r_i^4}{4r_t^4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{G_g}{G_l} \left(-\frac{1}{2} \frac{r_i^2}{r_t^2} + \frac{1}{2} \frac{r_i^4}{r_t^4} \right) - \left(\frac{G_g}{G_l} - 1 \right) \frac{r_i^4}{r_t^4} \ln(r_i/r_t) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

As Eqs. (A.5), (A.6) e (A.9) foram validadas comparando-as aos resultados obtidos por NOGUEIRA (1988). Para tanto, tais equações foram adaptas ao caso proposto naquele trabalho fazendo $G_g = G_l$.

A.3 VELOCIDADES NA FORMA ADIMENSIONAL

Define-se:

$$V_g(R) = \frac{v_g(r)}{\bar{v}} = \frac{\frac{\mu_l}{\mu_g}(\delta^2 - R^2) + \frac{G_l}{G_g}(1 - \delta^2) + 2\left(\frac{G_l}{G_g} - 1\right)\delta^2 \ln(\delta)}{\left[\frac{\mu_l}{\mu_g} \left(\frac{\delta^4}{2} \right) + \frac{G_l}{G_g} \left(\frac{\delta^4}{2} - \delta^2 + \frac{1}{2} \right) + (\delta^2 - \delta^4) \right]} \quad (\text{A.12})$$

$$V_l(R) = \frac{v_l(r)}{\bar{v}} = \frac{\frac{G_l}{G_g}(1 - R^2) + 2 \frac{(G_l - G_g)}{G_g} \delta^2 \ln(R)}{\left[\frac{\mu_l}{\mu_g} \left(\frac{\delta^4}{2} \right) + \frac{G_l}{G_g} \left(\frac{\delta^4}{2} - \delta^2 + \frac{1}{2} \right) + (\delta^2 - \delta^4) \right]} \quad (\text{A.13})$$

REFERÊNCIAS

- ALVEZ, M. V. C.; FALCONE, G.; BARBOSA JÚNIOR, J. R., 2012, “Modeling the Transient Behavior of Churn-annular Flow in a Vertical Pipe”. *3° Brazilian Conference on Boiling Condensation and Multiphase Flow*, NÚMERO DO ARTIGO, Curitiba, Paraná, Brasil, 7-9 de Maio.
- BRENNEN, C.E., 2005, *Fundamentals of multiphase flows*. 1 ed. Pasadena, Cambridge University Press.
- COTTA, R. M., 1993, *Integral Transform in Computational Heat and Fluid Flow*. Boca Raton: CRC Press, 337p.
- COTTA, R. M., 1998, *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering*. New York: Begell House INC, 430p.
- CROWE, C., 2006, *Multiphase Flow Handbook*. CRC Press.
- DINIZ, L. S., 2000, *Análise das Tensões Térmicas em Cerâmicas via Utilização Técnica Transformada Integral Generalizada*. 2000. 90f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.
- DUKLER, A. E., 1976, A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow. *AIChE Journal*, v. 22, n. 1, p. 47–55. ISSN 0001-1541
- EHIZOYANYAN, O.; APPAH, D.; SYLVESTER, O., 2015, “Estimation of Pressure Drop, Liquid Holdup and Flow Pattern in a Two Phase Vertical Flow”. *International Journal of Engineering and Technology*. v. 5, n. 4 (Abr.).
- FRANÇA, F. de A., 2008, *Os Padrões de Escoamento Bifásico Gás-Líquido*. 6f. Notas de Aula. Disponível em <http://www.fem.unicamp.br/~ffranca/MultiPhase_2008_05.pdf>

- GESSNER, T. R., 2010, *Modelagem Numérica do Escoamento Anular Gás-líquido Transiente pelo Método da Divisão da Matriz de Coeficiente*. Dissertação de M.sc., Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
- GESSNER, T. R.; BARBOSA JUNIOR, J. R., 2010, "A Three-Field Model for Transient Annular Two-phase Flow in a Vertical Tube". 2º *Encontro Brasileiro sobre Ebulição, Condensação e Escoamentos Multifásicos*, NÚMERO DO ARTIGO, São Carlos, São Paulo, Brasil, 3-4 de Maio.
- HEWITT, G. F.; HALL-TAYLO, N. S., 1971. *Annular two-phase flow*. Oxford: Pergamon,
- IMSL library – MATH/LIB, 1989. Houston, Texas.
- ISHII, M.; HIBIKI, T., 2011, *Thermo-fluid dynamic of two-phase flow*. 2ed. Nova Iorque, Springer.
- ISHII, M., 1975, *Thermo-fluid Dynamic Theory of Two-phase Flow*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricite de France, Eyrolles, Paris, France, 22.
- KAKÇ, S.; YENER, Y., 1995, *Convective Heat Transfer*. 2ed. Florida, USA.
- KIMURA, A.; NOGUEIRA, E., 2010, *Análise de Transferência de Calor em Regime Laminar Completamente Desenvolvido de Fluidos Imiscíveis (Água-Óleo)*. CONEM 2012, Campina Grande, PB.
- KIMURA, A.; OLIVEIRA, C. V.; NOGUEIRA, 2011,E. *Análise do Comportamento de Fluidos Imiscíveis (Água- Óleo) em Dutos Circulares e Placas Planas*. COBENGE 2011, Blumenau, SC.
- KIMURA, A.; OLIVEIRA, C. V.; NOGUEIRA, E.,2011, *Hidrodinâmica de Líquidos Imiscíveis (Água-óleo) em Escoamentos Internos: Secção Reta Circular e Placas Planas Paralelas*. Caderno UniFOA. Volta Redonda, RJ, Ano VI, n.17, p.17-26.
- LAGE, L. F.,2011, *Análise da Influência da Dependência em Temperatura da Viscosidade na Convecção Forçada com Nanofluidos*. 80 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ.
- LAGE. L. F.; CERQUEIRA I. G.; COTTA, R. M.; QUARESMA, J. N. N.; ORLANDE, H. R. B.; ROBERTIS, E.2012, *Experimental-Theoretical Analysis of Laminar Forced Convection of*

- Water-Silica Nanofluids in a Circular Tube*. In: VII National Congress of Mechanical Engineering, CONNEM 2012, Rio de Janeiro, RJ, v.1, p. 1-10.
- LIMA, L. E. M., 2011, *Análise de Mistura Aplicado Em Escoamentos Isotérmicos Gás-Líquido*. Tese de D.sc. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- LIMA, E. M.; ROSA, E. S., 2010, Análise dos modelos de fases separadas e de mistura aplicados ao escoamento anular vertical ascendente. *Mecânica Computacional*, Buenos Aires, v. 29, p. 3573-3592.
- LUBNICKI, F. M. F., 2011, *Estudo Numérico de Escoamento Turbulento em Padrão Anular Gás-líquido em Dutos Verticais*. Dissertação de M.sc., Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.
- MIKHAILOV, M. D. e ÖZISIK, M. N., 1984, *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. New York: John Wiley. 357p.
- NOGUEIRA, E. 1988, *Escoamento Laminar e Transferência de Calor em Fluidos Imiscíveis sem Estratificação*. Dissertação de M.sc. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil.
- NOGUEIRA, E.; DANTAS, L. B.; COTTA, R. M., 2004. *Analysis of Interfacial and Mass Transfer Effect on Forced Convection in Gas-Liquid Annular Two-Phase Flow*. Thermal Engineering, Curitiba, v.5, p. 45-51,
- OLIVEIRA, A. S., 2010 *Estudo Teórico Experimental da Dinâmica de Temperatura no Interior de uma Cavidade Cilíndrica*. 118 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.
- ÖZISIK, M. M. e MURRAY, R. L., 1974. *On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions Parameters*, Journal Heat Transfer, ASME, v.96, p.48-51.
- RODRIGUES, O.M.H (Org.), 2011. *Escoamento Multifásico*. Vol1. ABCM.
- SHOHAM, O., 2005, *Mechanistic Modeling of Gas-Liquid Two-phase Flow in Pipe*. 1ed. Texas, Society of Petroleum Engineers.

- SOUZA, J. N. M DE., 2010, *Modelagem e Simulação de Escoamento Multifásico em Dutos de Produção de Óleo e Gás Natural*. Tese de D.sc., Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- TAITEL, Y.; BARNEA, D.; DUKLER, A. E., 1980. Modelling flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes. *AIChE Journal*, v. 26, n. 3, p. 345–354. ISSN 0001-1541
- TOLEDO, A. A., 2011, *Modelagem Numérica de Escoamento em Padrão Anular com Transferência de Calor e Massa*. Dissertação de M.sc., Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, SC, Brasil.
- WALLIS, G. B., 1969, *One-dimensional Two-phase Flow*. McGraw-Hill Book Company.