



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
- Mestrado - Doutorado



ESTUDOS ANALÍTICOS E EM PSPICE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CORPOS CILÍNDRICOS

Por

Adson Íkaro Silva Leite de Andrade

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba
para obtenção do grau de Doutor.*

ADSON ÍKARO SILVA LEITE DE ANDRADE

**ESTUDOS ANALÍTICOS E EM PSPICE DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CORPOS
CILÍNDRICOS**

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Antônio Belo

João Pessoa - Paraíba

Agosto, 2016

A553e Andrade, Adson Íkaro Silva Leite de.
 Estudos analíticos e em PSPICE de transferência de calor
 em corpos cilíndricos / Adson Íkaro Silva Leite de Andrade.-
 João Pessoa, 2016.
 113f. : il.
 Orientador: Francisco Antônio Belo
 Tese (Doutorado) - UFPB/CT
 1. Engenharia mecânica. 2. Método de simulação de rede
 (NSM). 3. Condução de calor. 4. Técnica da Transformada
 Integral Generalizada (GITT).

UFPB/BC

CDU: 621(043)

ESTUDOS ANALÍTICOS E EM PSPICE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CORPOS CILÍNDRICOS

por

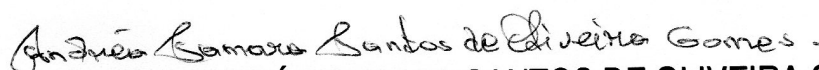
ADSON ÍKARO SILVA LEITE DE ANDRADE

Tese aprovada em 31 de agosto de 2016


Prof. Dr. FRANCISCO ANTÔNIO BELO
Orientador - UFPB


Prof. Dr. ABEL CAVALCANTE LIMA FILHO
Examinador Interno - UFPB


Prof. Dr. CARLOS ANTÔNIO CABRAL DOS SANTOS
Examinador Interno - UFPB


Profa. Dra. ANDRÉA SAMARA SANTOS DE OLIVEIRA GOMES
Examinador Externo - IFPB


Prof. Dr. HAMILTON SOARES DA SILVA
Examinador Externo - UFPB

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família e amigos, e especialmente às minhas mães, Márcia Jocélia e Maria Jocilda, a minha esposa, Roselany Bernardino, aos meus pais José Jocerlan e Erivaldo Leite, e a meus irmãos, Alexandre Ítalo, Aline Isis, Anderson Igor e Ingrid, pelo apoio e suporte dado durante o trabalho e principalmente nos momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus por ter me dado a oportunidade de dar mais um passo importante nos meus estudos e na minha vida.

Ao meu orientador Professor Francisco Antônio Belo pela sua dedicação, suporte e atenção. A Professora Andréa Samara Santos de Oliveira Gomes, por sua orientação, dedicação, suporte e atenção. Aos Professores Abel, Laurivan e Cabral pelo seu suporte e atenção.

Aos meus companheiros de pesquisa e laboratório, Tássio Borges, Hugo, Jobson. A todos os alunos companheiros de laboratório pela disposição em ajudar sempre que preciso.

A todos os amigos que contribuíram de forma direta e indireta na realização desse trabalho.

Agradeço à cada um dos meus familiares que me apoiaram durante toda a minha jornada, agradeço aqueles que mesmo estando longe me deram seu apoio. Agradeço especialmente as minhas mães, Márcia Jocélia e Maria Jocilda, a minha esposa, Roselany Bernardino, aos meus pais José Jocerlan e Erivaldo Leite, e a meus irmãos, Alexandre Ítalo, Aline Isis, Anderson Igor e Ingrid, aos meus sobrinhos Bruno Filho, Lucas, Mateus e Isabela que me deram todo o carinho e força necessário para superar as adversidades encontradas no caminho.

ESTUDOS ANALÍTICOS E EM PSPICE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CORPOS CILÍNDRICOS

RESUMO

É apresentada neste trabalho de tese, uma proposta para solução de problemas de engenharia na área de transferência de calor utilizando o método de simulação de rede (NSM – *Network Simulation Method*), que consiste na resolução destes problemas pela analogia existente entre os circuitos térmicos e os circuitos elétricos. Nele será apresentada a validação do problema bidimensional de condução de calor em um cilindro, no qual, serão confrontadas as soluções obtidas por simulação com a solução obtida analiticamente via Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Nas simulações realizadas faz-se a discretização do corpo em estudo, com o objetivo de se estabelecer uma correlação entre a quantidade de células (refinamento da malha) e a relação entre o tamanho do raio e comprimento do cilindro para que a solução do problema de transferência de calor no corpo possa ser considerada unidimensional. A comparação se dará entre a resposta analítica e a obtida por simulação, variando o número de divisões e as diferentes relações entre as dimensões raio e comprimento do cilindro. A partir da solução validada pela metodologia proposta, o trabalho apresenta como aplicação, uma malha genérica elaborada através do NSM e implementação no PSPICE, a qual serve para resolução de diversos problemas de condução de calor em geometria cilíndrica.

Palavras-chave: Método de simulação de rede (NSM), Condução de calor, Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)

ANALYTICAL STUDIES AND PSPICE STUDIES OF BODIES IN CYLINDRICAL HEAT TRANSFER

ABSTRACT

It is presented in this thesis, a proposal for solution of engineering problems in heat transfer area using the network simulation method (NSM - Network Simulation Method), which is to solve these problems by analogy between the thermal circuits and electrical circuits. It will be presented to validate the two-dimensional problem of heat conduction in a cylinder in which the solutions obtained by simulation with the solution analytically obtained via Technical Generalized Integral Transform will face (GITT). In the simulations makes up the body discretization study with the aim of establishing a correlation between the amount of cells (the mesh refinement) and the relationship between the radius of the size and length of the cylinder so that the problem solution of heat transfer in the body can be considered one-dimensional. A comparison will be made between the analytical response and obtained by simulation, varying the number of divisions and different relationships between beam dimensions and length of the cylinder. From the solution validated the proposed method, applying the work presented as a generic fabric prepared by the NSM and implementation PSPICE, which serves for solving many problems of heat conduction in a cylindrical geometry.

Keywords: Network Simulation Method (NSM), heat conduction, Technical Generalized Integral Transform (GITT)

SUMÁRIO

CAPÍTULO I.....	1
INTRODUÇÃO.....	1
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2 OBJETIVOS	5
1.2.1 Objetivo Geral	5
1.2.2 Objetivos Específicos	5
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	5
CAPÍTULO II.....	7
ESTADO DA ARTE	7
2.1 CONDUÇÃO DE CALOR	7
2.1.1 Equacionamento da Difusão de Calor	10
2.2 O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE REDE.....	13
2.3 A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	16
CAPÍTULO III	19
MODELAGEM MATEMÁTICA	19
3.1 ESCOLHA DO MÉTODO	19
3.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO	19
3.2.1 Adimensionalizando	22
3.2.2 Escolha do problema de autovalor.....	29
3.2.3 Desenvolvimento do par de fórmula transformada-inversa	30
3.2.4 Transformação Integral do problema original	30
3.2.5 Solução do problema transformado	33
3.2.6 Recuperação do Potencial Original	36
CAPÍTULO IV	37

MÉTODO DA SIMULAÇÃO DE REDES	37
4.1 METODOLOGIA DAS SIMULAÇÕES.....	37
4.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA BIDIMENSIONAL PELO NSM	39
CAPÍTULO V	46
ANÁLISE DE RESULTADOS.....	46
5.1 ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA	46
5.2 VALIDAÇÃO DO MÉTODO	54
5.3 ESTUDO DA RELAÇÃO RAIO / COMPRIMENTO.....	55
5.4 ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA QUANTIDADE DE CÉLULAS.....	64
5.5 ANÁLISE DURANTE TRANSIENTE	70
5.5.1 Análise da Influência da Quantidade de Divisões Durante Transiente	76
CAPÍTULO VI.....	82
COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....	82
6.1 CONCLUSÕES	82
6.2 SUGESTÕES E PERSPECTIVAS	83
REFERÊNCIAS	84
APÊNDICE A – TABELA DE AUTOVALORES CÁLCULADOS PELO <i>WOLFRAM MATHEMATICA</i>	91
APÊNDICE B – ROTINAS UTILIZADAS PARA AS SOLUÇÕES ANÁLITICA E CÁLCULO DOS PARAMETROS	94

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Volume de controle diferencial, $dr \cdot r d\phi \cdot dz$, para a análise da condução de calor em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) . Fonte: INCROPERA e DEWITT (2008).	11
Figura 2.2: Condições de contorno para a equação da difusão de calor na superfície $(x=0)$ Fonte: INCROPERA e DEWITT (2008)	13
Figura 3.1 Representação da amostra no equacionamento de segunda espécie	20
Figura 4.1: Circuito no PSPICE da célula unitária unidimensional transversal.....	40
Figura 4.2: Circuito no PSPICE da célula unitária unidimensional radial	40
Figura 4.3: Circuito no PSPICE da célula unitária bidimensional	41
Figura 4.4: Célula, ou volume elementar do circuito elétrico em rede RC. Fonte: OLIVEIRA 2010	42
Figura 4.5: Definição do tipo de análise e definição dos valores desejados no <i>PSPICE</i>	42
Figura 4.6: Diagrama esquemático de um circuito RC radial no <i>PSPICE</i>	43
Figura 4.7: Diagrama esquemático de um circuito RC transversal no <i>PSPICE</i>	44
Figura 4.8: Diagrama esquemático de um circuito RC bidimensional no <i>PSPICE</i>	44
Figura 4.9: Tela para visualização do resultado da simulação de um circuito em rede RC bidimensional no <i>PSIPCE</i>	45
Figura 5.1: Gráfico com a solução contendo 5 autovalores	47
Figura 5.2: Gráfico com a solução contendo 10 autovalores	48
Figura 5.3: Gráfico com a solução contendo 20 autovalores	49
Figura 5.4: Gráfico com a solução contendo 40 autovalores	50
Figura 5.5: Gráfico com a solução contendo 50 autovalores	51
Figura 5.6: Gráfico com a solução contendo 100 autovalores	52
Figura 5.7: Gráfico com a solução contendo 200 autovalores	53
Figura 5.8: Gráfico de comparação para diferentes autovalores	54
Figura 5.9: Comparação entre o resultado analítico e o resultado via NSM.....	55

Figura 5.10: Comparação de resultados via NSM quando o raio é duas vezes maior que o comprimento do cilindro	56
Figura 5.11: Comparação de resultados via NSM quando o raio é quatro vezes maior que o comprimento do cilindro	57
Figura 5.12: Comparação de resultados via NSM quando o raio é seis vezes maior que o comprimento do cilindro	58
Figura 5.13: Comparação de resultados via NSM quando o raio é oito vezes maior que o comprimento do cilindro	59
Figura 5.14: Comparação de resultados via NSM quando o raio é dez vezes maior que o comprimento do cilindro.	60
Figura 5.15: Comparação de resultados via NSM quando o raio é doze vezes maior que o comprimento do cilindro.	61
Figura 5.16: Comparação de resultados via NSM quando o raio é quatorze vezes maior que o comprimento do cilindro.	61
Figura 5.17: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte vezes maior que o comprimento do cilindro.	62
Figura 5.18: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte e quatro vezes maior que o comprimento do cilindro	63
Figura 5.19: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte e oito vezes maior que o comprimento do cilindro.....	63
Figura 5.20: Comparação de resultados via NSM quando o raio é trinta vezes maior que o comprimento do cilindro.	64
Figura 5.21: Comparação de resultados via NSM com 2 células.....	65
Figura 5.22: Comparação de resultados via NSM com 3 células.....	65
Figura 5.23: Comparação de resultados via NSM com 4 células.....	66
Figura 5.24: Comparação de resultados via NSM com 6 células.....	66
Figura 5.25: Comparação de resultados via NSM com 8 células.....	67
Figura 5.26: Comparação de resultados via NSM com 10 células.....	67
Figura 5.27: Comparação de resultados via NSM com 12 células.....	68
Figura 5.28: Comparação de resultados via NSM com 14 células.....	69
Figura 5.29: Comparação de resultados via NSM com 20 células.....	69
Figura 5.30: Comparação de resultados via NSM com 30 células.....	70

Figura 5.31: Análise transiente da influência da relação comprimento 2 vezes maior que o raio.....	71
Figura 5.32: Análise transiente da influência da relação comprimento 4 vezes maior que o raio.....	72
Figura 5.33: Análise transiente da influência da relação comprimento 6 vezes maior que o raio.....	73
Figura 5.34: Análise transiente da influência da relação comprimento 8 vezes maior que o raio.....	74
Figura 5.35: Análise transiente da influência da relação comprimento 10 vezes maior que o raio.....	74
Figura 5.36: Análise transiente da influência da relação comprimento 20 vezes maior que o raio.....	75
Figura 5.37: Análise transiente da influência da relação comprimento 50 vezes maior que o raio.....	75
Figura 5.38: Análise transiente da malha com 2 células	76
Figura 5.39: Análise transiente da malha com 4 células	77
Figura 5.40: Análise transiente da malha com 6 células	77
Figura 5.41: Análise transiente da malha com 8 células	78
Figura 5.42: Análise transiente da malha com 10 células	78
Figura 5.43: Análise transiente da malha com 12 células	79
Figura 5.44: Análise transiente da malha com 14 células	79
Figura 5.45: Análise transiente da malha com 20 células	80
Figura 5.46: Análise transiente da malha com 30 células	80
Figura 5.47: Análise transiente da malha com 40 células	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Analogia entre grandezas nos circuitos elétricos e térmicos	38
Tabela A.1 – Autovalores utilizados na solução analítica de segunda espécie	91

LISTA DE SÍMBOLOS

$C \rightarrow$ Capacitância elétrica (F)

$C_p \rightarrow$ Calor específico (J/(kg·K))

$q \rightarrow$ taxa de transferência de calor (W)

$q'' \rightarrow$ fluxo de calor (Wm²)

$F \rightarrow$ Frequência (Hz)

$T \rightarrow$ Temperatura

$T_0 \rightarrow$ Temperatura Inicial

$T_{\infty} \rightarrow$ Temperatura Ambiente

$i \rightarrow$ Número complexo ($i = \sqrt{-1}$)

$h \rightarrow$ Coeficiente de transferência de calor por convecção (W m² K⁻¹)

$J_0 \rightarrow$ Função Bessel do primeiro tipo e ordem zero

$J_1 \rightarrow$ Função Bessel do primeiro tipo e ordem um

$L \rightarrow$ Comprimento do Cilindro (m)

$r \rightarrow$ Posição radial (m)

$R \rightarrow$ Posição radial adimensional

$R \rightarrow$ Resistência elétrica (Ω)

$R_r \rightarrow$ Resistência Elétrica Radial

$R_l \rightarrow$ Resistência Elétrica Longitudinal

$R_{tl} \rightarrow$ Resistência Elétrica Longitudinal Total

$C_{tl} \rightarrow$ Capacitância Elétrica Longitudinal Total

$C_r \rightarrow$ Capacitância Elétrica Radial

$C_l \rightarrow$ Capacitância Elétrica Longitudinal

$n \rightarrow$ Índice do nó

$nd \rightarrow$ Número de divisões

$t \rightarrow$ Tempo (s)

$z \rightarrow$ Posição longitudinal adimensional

$Z \rightarrow$ Posição longitudinal (m)

$\tau \rightarrow$ Tempo adimensional

$\alpha \rightarrow$ Difusividade Térmica (m²/s)

$\Delta T_r \rightarrow$ Variação de Temperatura

$\kappa \rightarrow$ Condutividade Térmica (W/(mK))

$\rho \rightarrow$ Densidade (kg/m³)

$\sigma \rightarrow$ Condutividade elétrica do material

$\theta \rightarrow$ temperatura adimensional

$\theta^* \rightarrow$ temperatura adimensional para um tempo longo

$\omega \rightarrow$ Frequência Angular (rad/s)

$\Omega \rightarrow$ Frequência Angular Adimensional

$Bi_1 \rightarrow$ Número de Biot

$Bi_2 \rightarrow$ Número de Biot

$\varphi_i \rightarrow$ Autofunção

$\mu_i \rightarrow$ Autovalor

$N_i \rightarrow$ Norma

$\tilde{\varphi}_i \rightarrow$ Autofunção Normalizada

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este capítulo de introdução trata da importância deste estudo nas mais variadas áreas da tecnologia, das motivações que nos levaram ao desenvolvimento deste estudo, como também, apresenta uma visão geral do trabalho e a organização do mesmo.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Os estudos no campo da temperatura são de extrema importância, pois, segundo OLIVEIRA (2010) um grande número de processos físicos e químicos, espontâneos ou não, estão intimamente relacionados à temperatura, tendo as suas realizações em conformidade com as condições térmicas às quais estão sendo submetidos. Tais processos incluem fenômenos de transporte de calor e/ou de massa, o que torna necessário o conhecimento das propriedades térmicas dos materiais envolvidos visando o seu gerenciamento e otimização. O desenvolvimento de soluções de sistemas de equações diferenciais parciais que governam os fenômenos de difusão de calor, é um campo de pesquisa bem definido e atrativo, pois, trata-se de uma área de grande interesse tanto no contexto da matemática aplicada quanto das ciências térmicas.

Historicamente, as soluções de problemas envolvendo sistemas térmicos eram obtidas analiticamente, muitas vezes eram de difícil solução dependendo da complexidade do

problema a ser resolvido. Com o avanço tecnológico e o surgimento de computadores com maiores capacidades de armazenamento e processamento houve também a evolução dos métodos numéricos de solução dentre os quais se destacam os métodos das diferenças finitas e o método dos elementos finitos que são os métodos mais utilizados. Porém existe um outro método que vem se tornando popular na resolução de problemas envolvendo fenômenos de transporte, que é o Método de Simulação de Rede que segundo KARPLUS (1958) é um procedimento considerado numérico, o qual tem base na analogia existente entre sistemas elétricos e térmicos. Inicialmente implementado através de elementos reais de circuito. A popularização deste método se deu com o aparecimento da ferramenta computacional de simulação de circuitos elétricos, proporcionada com o surgimento do *software* PSPICE.

O presente trabalho apresenta uma solução analítica da equação da condução de calor para o problema de condução bidimensional em coordenadas cilíndricas, onde tal solução analítica será confrontada com a solução discreta obtida pela simulação do circuito elétrico equivalente no *software* PSIPCE a fim de validar tal solução proposta.

Pode-se observar em trabalhos anteriores que as soluções do problema de condução de calor unidimensional em corpos de geometria cilíndrica, tanto na dimensão radial quanto na longitudinal, têm soluções satisfatórias utilizando o método proposto no presente estudo. A solução do problema unidimensional da equação da condução de calor no sentido radial é apresentada por OLIVEIRA (2010), trabalho no qual foi efetuado o confronto entre os resultados obtidos através da solução analítica via técnica da transformada integral generalizada GITT, aqueles alcançados na solução pelo método de simulação de rede e os dados experimentais, onde foi possível verificar a proximidade entre os perfis das curvas de temperatura. O que possibilitou a percepção das vantagens do método de simulação de rede em relação ao método analítico, tais como a velocidade e precisão na obtenção dos resultados, além de, dispensar o trabalho algébrico na resolução do sistema de equações diferenciais parciais.

A solução para o problema unidimensional da equação da condução de calor no sentido longitudinal é apresentada por SILVA (2014), estudo no qual também foi realizado o confronto da solução analítica com a solução via método de simulação de rede, para a comparação entre os campos de temperatura encontrados, os quais estavam muito próximos, mostrando a eficiência do método proposto. Permitindo, também, observar-se a

vantagem deste, por apresentar maior velocidade de resolução quando comparado ao método analítico.

A solução proposta pode ser utilizada para a determinação das propriedades térmicas dos materiais a partir dos dados de temperatura obtidos, pela aplicação da resolução do problema inverso. OLIVEIRA (2010) e SILVA (2014), aplicam o método inverso para obtenção das propriedades térmicas dos materiais utilizados em seus respectivos trabalhos.

Existem vários métodos de estimativa das propriedades térmicas na literatura, onde, é possível classificá-los em duas categorias, a primeira baseia-se no fluxo de calor em regime estacionário. Tais métodos, geralmente, são utilizados em geometria de placas planas paralelas ou cilindros coaxiais contendo uma amostra de fluido ou sólido no interior da cavidade. A segunda categoria de métodos para estimativa de parâmetros térmicos possibilita estimar simultaneamente mais de uma das propriedades térmicas do material, fazendo uso de alguns intervalos transientes ou estados periódicos estacionários. Nesta categoria encontram-se dois dos métodos de estimativa de parâmetros mais referenciados na literatura, são eles: o método *flash* e o método da sonda.

O método *flash*, inicialmente proposto por PARKER *et al* (1961) consiste em irradiar uma amostra cilíndrica opaca de tamanho reduzido em sua superfície frontal e medir a elevação da temperatura na face oposta. Apenas a transferência de calor axial é considerada no modelo matemático com a hipótese restritiva de que não ocorrem perdas de calor para o meio externo. O método *flash* possui a vantagem de evitar o problema da resistência térmica de contato entre a amostra a ser estudada e a fonte de calor ou o detector, uma vez que se utiliza um pulso de *laser* como fonte de calor e a elevação de temperatura na superfície oposta é detectada por um sensor infravermelho. Porém o método flash muitas vezes apresenta dificuldades de uso devido:

- Os materiais isolantes são muitas vezes semi-transparentes para as frequências de radiações da lâmpada flash;
- É muito difícil medir com precisão a temperatura de uma superfície em um material de baixa densidade;
- A transferência de calor sobre a face aquecida é frequentemente muito diferente da transferência de calor sobre as outras faces (diferenças de temperatura muito importantes) (JANNOT *et al*, 2009).

A técnica da sonda, ou do fio-quente, encontra larga aplicação na estimativa das propriedades térmicas, pois, se adéqua ao estudo térmico de diversos tipos de materiais. Segundo SASSI *et al* (2009), a técnica consiste no uso de uma delgada resistência cilíndrica fornecendo um fluxo de calor constante para um meio “infinito”. A medição da temperatura pode ser feita na superfície da resistência, ou em qualquer outro ponto de coordenada r pertencente ao meio em estudo. Normalmente, um modelo assintótico é aplicado na solução matemática no problema de condução de calor. O perfil de temperatura obtido é logarítmico e, em termos do número de Fourier, é válido apenas no intervalo de tempo em que este é inferior a um. Consequentemente, somente medições de temperatura para tempos maiores são utilizadas para estimar as propriedades térmicas e a eficiência do método está limitada a uma estreita faixa de valores para a difusividade.

Outras metodologias associadas à caracterização térmica de líquidos são as chamadas técnicas fototérmicas. Com o surgimento da cavidade ressonante de ondas térmicas, várias técnicas experimentais foram desenvolvidas para determinar a difusividade térmica de fluidos (gases e líquidos) fornecendo resultados de alta precisão. BALDERAS-LÓPEZ (2003) propõe a medição da efusividade térmica de líquidos transparentes por meio da técnica fotopiroelétrica. DELENCIOS *et al* (2007) propuseram um método avançado de medição da difusividade térmica de líquidos pela varredura da espessura da amostra analisando a fase do sinal fotopiroelétrico. Fazendo uso dos valores absolutos da fase e da espessura da amostra, o método produz resultados precisos para medidas de difusividade térmica, porém sua aplicação está associada a uma estreita faixa de variação nos parâmetros térmicos.

TILLMAN (2005) cita que as restrições dos métodos apresentados, tais como, as características destrutivas do método do Fio Quente e o alto custo do método Flash, indicam a necessidade do desenvolvimento de métodos alternativos que possam contornar esses problemas. Diante da citação de TILLMAN (2005) o estudo proposto para solução de problemas de condução de calor e estimativa de parâmetros via o método de simulação de rede, constitui um campo de pesquisa importante e atrativo.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Solução do problema de condução de calor bidimensional em corpos cilíndricos pelo Método de Simulação de Rede (NSM), utilizando o *software PSPICE*.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Resolver a equação de calor bidimensional analiticamente;
- Criação de uma malha genérica utilizando o método de simulação de rede;
- Comparar os resultados obtidos pela solução analítica com os resultados obtidos pelo método de simulação de rede através do *software PSPICE*;
- Verificar a relação entre tamanho do raio e do comprimento, afim de, determinar quando um problema bidimensional, pode ser aproximado ao caso unidimensional.
- Comparar os resultados do problema de condução de calor unidimensional longitudinal em regime estacionário em um corpo cilíndrico obtidos por SILVA (2014) com os resultados obtidos pelo presente estudo via NSM.
- Comparar os resultados do problema de condução de calor unidimensional radial em regime transitório em um corpo cilíndrico obtidos por OLIVEIRA (2012) com os resultados obtidos pelo presente estudo via NSM, para verificar a generalidade da malha proposta.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho de tese encontra-se dividido em 6 capítulos, organizados da seguinte forma:

No Capítulo I faz-se uma introdução ao assunto com a temática da pesquisa proposta, assim como a apresentação dos objetivos a serem atingidos e a descrição da organização deste relatório.

No Capítulo II é apresentada uma revisão do estado da arte das técnicas que serão aplicadas no sistema proposto.

O Capítulo III trata da modelagem matemática utilizada para solução do problema em estudo.

No Capítulo IV faz-se uma explanação da metodologia utilizada e apresentação da solução do problema de condução bidimensional pelo método de simulação de rede (NSM).

O Capítulo V é dedicado à exposição dos resultados obtidos pela solução analítica via Técnica da Transformada Integral Generalizada (implementada através do *software Wolfram Mathematica*) e daqueles resultantes das simulações via Método de Simulação de Rede – NSM (implementado pelo programa PSPICE).

No Capítulo VI expõem-se as conclusões alcançadas e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

ESTADO DA ARTE

O objetivo deste capítulo é apresentar as leis básicas que regem os fenômenos físicos envolvidos no problema em questão, como também, discorrer sobre as contribuições existentes na literatura sobre a resolução de problemas de transferência de calor com métodos semelhantes ao proposto.

2.1 CONDUÇÃO DE CALOR

Para falarmos de condução de calor primeiramente temos que entender o que seria calor, ÖZİŞİK (1993) definiu calor como a energia transferida pelas partículas constituintes da matéria como os átomos, moléculas ou elétrons livres a partir das regiões com maiores níveis de agitação (regiões mais quentes) para regiões de menores níveis de agitação (regiões mais frias), para INCROPERA e DEWITT (2008) calor é a energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperatura no espaço. Portanto, conforme SONNTAG *et al* (2008) calor é um fenômeno transitório.

Após entender-se o que é calor, precisa-se entender o que vem a ser condução de calor, ÖZİŞİK (1985) define condução de calor como o modo de transferência de calor na qual a troca de energia ocorre a partir da região de alta temperatura para a de baixa temperatura pelo movimento cinético ou impacto direto de moléculas. O fenômeno da transferência de calor por condução é regido pelo mecanismo físico da difusão de energia que é promovido pelo movimento molecular aleatório.

Sabe-se que todo processo físico é regido por uma lei, ÖZİŞİK (1985) cita que a lei de Fourier é uma lei empírica de condução de calor, baseada em observações experimentais originadas por Biot, usada na teoria analítica de calor por Fourier. ÖZİŞİK (1985) define

que esta lei estabelece que a taxa de fluxo de calor por condução numa dada direção é proporcional à área normal à direção do fluxo de calor e para o gradiente de temperatura naquela direção. Para um sólido isotrópico e homogêneo (isto é, um material no qual a condutividade térmica seja independente da direção), e reconhecendo que o fluxo térmico é uma grandeza vetorial, podemos escrever a equação da taxa da condução (lei de Fourier) em enunciado geral da seguinte forma:

$$\mathbf{q}_n = -k\nabla T \quad (2.1)$$

Onde, ∇ é o operador gradiente de temperatura tridimensional e $T(x,y,z)$ é o campo escalar de temperatura, o vetor $\mathbf{q}_n$ é o fluxo térmico em uma direção n , que é normal a uma isoterma na direção de valores decrescentes de temperatura e k é uma grandeza escalar positiva, denominada condutividade térmica do material. O sinal negativo presente no lado direito da equação 2.1 é justificado devido a propagação de energia ocorrer no sentido decrescente como já foi mencionado.

Para o estudo da transferência de calor precisamos conhecer algumas propriedades dos materiais, pois, algumas destas propriedades são bastante relevantes, tais como as propriedades termofísicas, nas quais se englobam as propriedades de transporte e propriedades termodinâmicas. OLIVEIRA (2010) cita que as propriedades de transporte incluem os coeficientes de taxa de difusão, como a condutividade térmica k (para transporte de calor) e a viscosidade cinemática ν (para transferência de momento), as propriedades termodinâmicas, referem-se ao estado de equilíbrio de um sistema, onde pode-se citar a massa específica (ρ) e o calor específico (c_p).

Entre as propriedades pertinentes ao fenômeno condução de calor, OLIVEIRA (2010) chama a atenção para a propriedade de condutividade térmica. ÇENGEL (2006) define a condutividade térmica como a taxa de calor que é transferida através de unidade de espessura do material, por unidade de área e por unidade de diferença de temperatura. A condutividade térmica é uma propriedade intrínseca do material que nos traz informações da capacidade que o material possui em conduzir o calor, essa propriedade precisa ser conhecida para que se possa aplicar a lei de Fourier. Como está propriedade vem da lei de Fourier, tal grandeza depende da direção, portanto como ela depende da direção existe a

possibilidade de ela assumir valores diferentes para cada direção. Quando a uma igualdade do seu valor nas diferentes direções, definimos que o meio é isotrópico.

Como esta propriedade controla a taxa de transferência de calor para um dado gradiente de temperatura existente no meio em análise, podemos classificar os materiais de acordo com sua propriedade de condutividade térmica, assim podemos classifica-los em materiais isolantes (que são os materiais que possuem baixa condutividade térmica) e os condutores térmicos (que são os materiais que possuem alta condutividade térmica).

INCROPERA E DEWITT (2008) definem que em geral a condutividade térmica de um sólido é maior que a de um líquido, que, por sua vez, é maior do que a de um gás, define-se também que a condutividade térmica de um sólido pode ser mais do que quatro ordens de grandeza superior à de um gás. Essa tendência se deve, em grande parte, à diferença no espaçamento intermolecular nos dois estados.

OLIVEIRA (2010) define ainda que a condutividade térmica de líquidos não-metálicos, tem a característica de diminuir com o aumento da temperatura, tendo algumas exceções, onde as mais conhecidas são a glicerina e a água, pois, para ambas há uma independência da pressão, exceto próximo ao ponto crítico. Outra característica da condutividade térmica é que geralmente ela diminui com o aumento do peso molecular. Pode-se encontrar inúmeras tabelas que relacionam a condutividade térmica com a temperatura do líquido no estado de saturação.

INCROPERA E DEWITT (2008) definem que o produto das propriedades termodinâmicas densidade (ρ) e o calor específico (c_p) é chamado de capacidade calorífica volumétrica, que representa a capacidade de um material armazenar energia térmica. Observa-se que em geral substâncias com grande massa específica, possuem baixo calor específico, essa característica é encontrada em vários sólidos e líquidos, tornando-os tipicamente bons meios de armazenamento de energia ($\rho c_p > 1 \text{ MJ/m}^3 \cdot \text{K}$) o que não ocorre com substâncias gasosas, devido aos seus baixíssimos valores de suas massas específicas.

ÇENGEL (2012) define a difusividade térmica (α) como a razão entre calor conduzido por meio do material e o calor armazenado por unidade de volume, ou seja, a difusividade térmica representa a velocidade com que o calor se difunde por meio de um material e pode ser expressa na forma:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (2.2)$$

Pode-se observar a partir da equação 2.2 que materiais com elevados valores de α responderão rapidamente a mudanças nas condições térmicas a eles impostas, enquanto materiais com menores valores de α responderão mais lentamente, levando mais tempo para atingir uma nova condição de equilíbrio.

De acordo com INCROPERA e DEWITT (2003), inúmeros exemplos de falhas de equipamentos ou no projeto de processos poderiam ser citados, além do não-entendimento das especificações de desempenho, que poderiam ser atribuídos à falta de informações quando da seleção dos valores das propriedades chaves usadas na análise inicial dos sistemas. Portanto, o conhecimento dos valores mais precisos das propriedades termofísicas dos materiais é imprescindível para a engenharia de processos. Deve-se evitar o uso de dados obtidos na literatura ou em manuais, os quais não tenham sido bem caracterizados ou avaliados.

2.1.1 Equacionamento da Difusão de Calor

O principal objetivo de se estudar a condução de calor para INCROPERA e DEWITT (2008) é determinar o campo das temperaturas em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras, ou seja, desejamos conhecer a distribuição de temperaturas, que representa como a temperatura varia com a posição no meio, que também pode ser representado pela obtenção do perfil de temperatura dentro do meio, variando suas posições e o tempo.

Conhecendo o perfil de temperatura no meio, pode-se aplicar a lei de Fourier diretamente para se obter o fluxo de calor em qualquer ponto do meio ou na superfície. A partir do conhecimento do perfil de temperatura de um sólido, pode-se verificar a sua integridade estrutural por meio da determinação de tensões, expansões e deflexões térmicas. INCROPERA e DEWITT (2008) citam outras aplicações importantes a partir do conhecimento do perfil de temperatura, tais como, a otimização da espessura de um material isolante ou para determinar a compatibilidade entre revestimentos especiais ou adesivos usados como o material.

O procedimento para se obter o perfil de temperatura deve obedecer à lei da conservação de energia, independentemente de qual seja a aplicação, isto é, a lei pode ser

aplicada a um volume finito, resultando em uma expressão que rege todo o comportamento do sistema, pode ser aplicada também a um volume infinitesimal, o qual resulta em uma equação diferencial, a qual pode ser resolvida para condições pontuais do sistema. INCROPERA E DEWITT (2008) sumariza em uma sequência simples a metodologia para determinar a distribuição de temperatura:

- Inicialmente, define-se um volume de controle, delimitando-se a superfície de controle com uma linha tracejada;
- Define-se uma base de tempo;
- Identificam-se os processos relevantes de troca de energia e faz-se uma representação gráfica dos mesmos em um diagrama;
- Finalmente, escreve-se a equação de conservação de energia, bem como as expressões apropriadas para as taxas de transferência de calor que devem substituir os respectivos termos na equação de balanço energético.

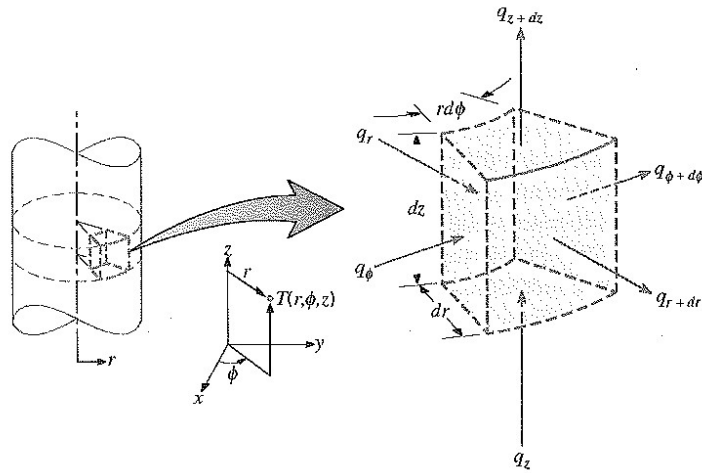


Figura 2.1: Volume de controle diferencial, $dr \cdot r d\phi \cdot dz$, para a análise da condução de calor em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) . Fonte: INCROPERA e DEWITT (2008).

Para um sistema de coordenadas cilíndricas, aplica-se o balanço de energia ao volume de controle diferencial conforme a Figura 2.1, a partir da qual pode-se chegar a equação geral do fluxo de calor para um cilindro:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(kr \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

Segundo OLIVEIRA (2010) esta expressão estabelece que em qualquer ponto do meio físico, a taxa líquida de energia transferida por condução para o interior de um volume unitário somado à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica armazenada no interior desse volume. Conforme hipóteses sejam admitidas, mediante análise do problema em questão, a equação deverá assumir uma forma simplificada.

Para a resolução da equação diferencial parcial (EDP), que para as coordenadas espaciais é de segunda ordem, faz-se necessária a especificação de duas condições de contorno. Já com relação ao tempo a EDP é de primeira ordem, fazendo-se necessária apenas a especificação da condição inicial. Conforme observado nas literaturas, existem três tipos diferentes de condições de contorno lineares para a solução analítica de problemas de condução de calor, o que está representado na Figura 2.2:

1. Primeiro tipo (condição de contorno de Dirichlet) – quando a distribuição de temperatura é prescrita na superfície de contorno: $T(0, t) = T_s$,

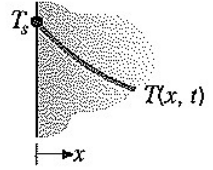
2. Segundo tipo (condição de contorno de Neumann) – quando o fluxo de calor na superfície é prescrito, $-k \frac{\partial T}{\partial r} = q''_s$. Um caso particular ocorre para uma superfície adiabática ou isolada, quando o fluxo é nulo, $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$.

3. Condição de contorno do terceiro tipo – situação em que ocorre convecção na superfície de contorno, $-k \frac{\partial T}{\partial r} = h[T_\infty - T(0, t)]$.

Segundo OLIVEIRA (2010) solucionar a equação de difusão de calor muitas vezes incorre em uma árdua tarefa de manipulação algébrica e, para certas condições não existe solução exata.

1. Temperatura da superfície constante

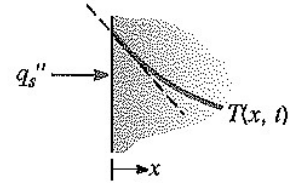
$$T(0, t) = T_s$$



2. Fluxo térmico na superfície constante

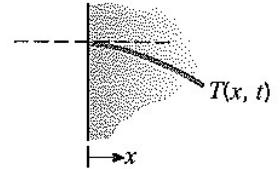
(a) Fluxo térmico diferente de zero

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s''$$



(b) Superfície isolada termicamente ou adiabática

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$



3. Condição de convecção na superfície

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$

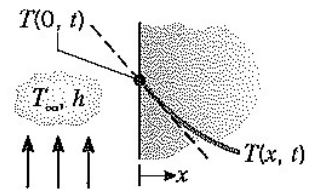


Figura 2.2: Condições de contorno para a equação da difusão de calor na superfície ($x=0$) Fonte: INCROPERA e DEWITT (2008)

2.2 O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE REDE

Este trabalho de pesquisa tem como proposta a aplicação da analogia entre sistemas elétricos e térmicos, auxiliado pelo *software* PSPICE, para solucionar o problema de transferência de calor bidimensional em um cilindro. A técnica é denominada Método de Simulação de Rede, do inglês, *Network Simulation Method (NSM)*, que é um procedimento numérico que tem como base a analogia física entre a condução de calor unidimensional transiente e o fluxo de corrente elétrica. A analogia entre sistemas térmicos e elétricos também é conhecida por analogia Resistência-Capacitância, ou analogia RC.

O SPICE (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*) é um *software* desenvolvido para checar a integridade de circuitos eletrônicos através de simulações, a fim de prever seu comportamento. A partir da entrada gráfica do usuário, o *software* cria

uma lista que descreve todos os elementos do circuito (resistores, capacitores, indutores, fontes de tensão, fontes de corrente, transistores e circuitos integrados), e suas respectivas conexões, dessa lista serão deduzidas as equações para serem resolvidas com o intuito de preverem o comportamento do sistema. Geralmente o equacionamento é dado por equações diferenciais, solucionadas por métodos implícitos, tais como o método de Newton e a técnica das matrizes. NAGEL e PEDERSON (1973) citam que o SPICE foi desenvolvido pelo *Electronics Research Laboratory* da Universidade da Califórnia (EUA).

VLADIMIRESCU (1994) faz um breve histórico sobre o SPICE, onde cita que inicialmente o programa SPICE foi escrito originalmente em linguagem FORTRAN IV, totalizando cerca de 10.000 comandos. Para melhorar a velocidade de processamento, algumas sub-rotinas de manipulação de matrizes foram codificadas em linguagem ASSEMBLY. A sintaxe de entrada de dados possui razoável grau de liberdade, sendo que o programa efetua nos passos iniciais uma verificação dos dados fornecidos, de modo a assegurar a correta descrição do circuito. Diversos parâmetros do circuito podem ser omitidos, adotando-se neste caso valores-padrões (default) previamente definidos. A partir de 1980 tornou-se disponível, a versão SPICE3, cujo programa-fonte pode ser fornecido e codificado em linguagem C para Universidades e Centros de Pesquisa. Uma vez que existem compiladores C para a maioria dos sistemas computacionais, este programa está sendo extensivamente utilizado desde então e tem servido como base de diversos programas comerciais.

VLADIMIRESCU (1994) também cita que o SPICE se tornou o programa padrão para simulação de circuitos elétricos de propósito geral, tanto para análise em corrente contínua quanto corrente alternada, sendo adequado tanto para circuitos elétricos lineares quanto não lineares. O SPICE utilizado no presente trabalho é o PSPICE, fabricado pela *Orcad*.

PSPICE (1994) cita que devido à complexidade dos modelos matemáticos que envolvem os processos de difusão de calor, a analogia entre circuitos térmicos e elétricos tem sido aplicada como uma ferramenta rápida, precisa e simples, dado que os problemas podem ser resolvidos através de um programa de simulação para circuitos elétricos.

O uso da ferramenta PSPICE no âmbito da resolução de problemas complexos da área de engenharia térmica permite que se alcance os resultados desejados de maneira mais direta e simples, possibilitando a solução até mesmo para aqueles que não possuem muita habilidade com as tradicionais modelagens matemáticas.

ZUECO e ALHAMA (2006) definem que este método não requer o estabelecimento de um critério de convergência para solucionar as equações diferenciais infinitas que têm origem na discretização das equações diferenciais parciais do modelo matemático. ALHAMA e CAMPO (2003) citam que o SPICE apresenta uma rápida convergência para análise de transientes, quando comparado com outros métodos de análise de transporte de energia por séries infinitas.

Atualmente o NSM tem sido bastante empregado na resolução de problemas de engenharia na área de transferência de calor. Em ACHARD *et al* (2002) a técnica é utilizada para modelar o comportamento térmico em construções. ALHAMA e CAMPO (2003) utilizaram este método para realizar previsão numérica de temperaturas, com um modelo espaço-temporal aplicado em paredes multicamadas (compostas) para um bocal de um motor de foguete experimental. Em TANG *et al* (2004) e WEIGEN *et al* (2009) a resolução do modelo térmico do transformador é feita através da analogia térmico-elétrica. ZUECO *et al* (2004) usa o método para estudar o comportamento transiente de transferência de calor bidirecional relativo a escoamento laminar em tubos submetidos a um degrau de temperatura. Em ALHAMA *et al* (2005) é apresentada o NSM e estudado a condução de calor para uma grande placa com a temperatura simétrica nas superfícies. ZUECO *et al* (2005) aplicaram o método de especificação da função sequencial, através do NSM, a fim de realizar a estimativa do coeficiente de difusão de calor dependente do tempo via solução de problema inverso em uma placa. ZUECO (2006) resolve um problema de convecção livre (regime transiente), onde um fluido dissipativo escoar ao longo de uma placa vertical semi-infinita com transferência de massa quando a superfície é exposta a um fluxo de calor constante. Já em ZUECO e ALHAMA (2006) são resolvidos, através desse método, os problemas direto e inverso da emissividade da superfície em função da temperatura de sólidos de propriedades térmicas variáveis. ZUECO e CAMPO (2006) aplicaram o NSM para analisar o transiente de transferência de calor por radiação entre as paredes espessas de uma cavidade, utilizando a ideia de Oppenheim. ZUECO e ALHAMA (2007) faz uso da técnica para a estimativa simultânea inversa das propriedades térmicas dependentes da temperatura (condutividade térmica e capacidade volumétrica de calor) de fluidos completamente desenvolvidos fluindo através de um duto circular. BÉG *et al* (2008) apresentam um modelo matemático bidimensional para convecção livre, em meios porosos, através do uso do NSM. YANG e ZHOU (2008) analisa as propriedades de

transferência de calor do diodo laser (LDM) pelo método da equivalência elétrica. Em PENG e WU (2008) é calculada a transferência de calor periódica que ocorre entre edificações e o ambiente externo a fim de simular climatização ambiente e melhorar o conforto térmico, auxiliados pela analogia entre sistemas térmicos e elétricos. Em ZUECO (2009) o fluxo de convecção natural não estacionário de um fluido dissipativo viscoso ao longo de uma placa vertical semi-infinita submetido a uma oscilação periódica da temperatura na superfície é investigado através do NSM. Recentemente SÁNCHEZ *et al* (2012) resolve equações diferenciais acopladas não-lineares para a corrosão por CO₂ com proteção filmes de carbonato de ferro. ALHAMA *et al* (2012) apresenta o NSM como ferramenta para solução de equações diferenciais ordinárias lineares ou não, de qualquer grau e ordem. ZHAO e WEI (2013) apresentam tipos de análises de simulação e os passos detalhados do *software* de simulação *PSPICE* aplicados no projeto de circuitos eletrônicos, onde, eles obtêm os resultados simulados estão de acordo com os resultados teóricos, para análises no domínio do tempo e frequência. TENG e HU (2013) apresentam uma análise de um sistema de uma colhedora de energia de vibração com vários componentes piezelétricos utilizando o *PSPICE*. GALLOY *et al* (2014) utilizam o um modelo elétrico desenvolvido no *PSPICE* para compreender os mecanismos físicos ligados a melhoria da resolução espacial. SILVA (2014) apresenta a solução para o problema unidimensional da equação da condução de calor no sentido longitudinal. RACITI *et al* (2015) apresentam um modelo eletro termal no *PSPICE* com base em camadas de um modulo de eletrônica de potência integrados. MARANO *et al* (2015) apresentam a implementação do modelo elétrico equivalente de silício fotomultiplicadores no *PSPICE* para prever a resposta transitória de eventos de disparo. ISMAIL *et al* (2015) apresentam um método de modelagem de uma planta fotovoltaica e de sistemas de alimentação ininterrupta utilizando o *PSPICE*. SAHA *et al* (2016) apresentam um estudo sobre os efeitos ambientais sobre o desempenho de um módulo de energia solar fotovoltaica através de simulação pelo *PSPICE* com base em dados experimentais.

2.3 A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é um método consolidado na resolução de complexos sistemas de equações diferenciais e que tem encontrado suporte no

desenvolvimento da capacidade de processamento e memória dos computadores atuais, bem como na evolução das linguagens computacionais.

Esta técnica espectral é definida como um método híbrido, devido à combinação entre ferramentas analíticas associadas a procedimentos numéricos que lhes são inerentes. Ela encontra vasto campo de aplicação na solução de problemas típicos de engenharia que envolvem acoplamento, oferecendo controle automático de erro global e significativa redução nos custos computacionais, quando comparada a métodos puramente numéricos.

Inicialmente, ÖZİŞIK e MURRAY (1974) propuseram a ideia da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) aplicada à resolução de sistemas de equações diferenciais parciais, que a princípio não poderiam ser solucionados pela abordagem da separação de variáveis, evitando, assim, a restrição da separação a priori.

Na década de oitenta, a CITT é estendida a aplicações em que tipicamente empregavam-se os métodos numéricos como diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos e seus variantes. Efetuando-se uma avaliação entre os métodos numéricos e a, então, recente técnica observou-se em favor desta as seguintes vantagens:

- Metodologia sistemática de solução;
- Redução do tempo de processamento;
- Controle prescrito de erro;
- Aceleração da taxa de convergência numérica;
- Não utilização de malhas;
- Obtenção de resultados *benchmark*;
- Determinação direta da função no ponto, sem necessidade de cálculos para instantes anteriores ou para outras posições espaciais;
- Possibilidade de integração com outros métodos.

MIKHAILOV e ÖZİŞIK (1984) apresentaram um trabalho formalizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), nele é feita uma classificação dos problemas lineares de valor de contorno (de difusão de calor e massa) a fim de tratar tais problemas através de uma abordagem sistemática e unificada, para tanto foram identificadas sete classes. O objetivo da nova técnica era reduzir as limitações impostas pela transformada clássica. A GITT proporciona soluções numérico-analíticas para problemas de convecção-

difusão, cuja transformação integral resulta em sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas.

A técnica de transformação integral continuou avançando na solução de um número cada vez maior de problemas, sendo eles lineares ou não. COTTA (1993) publicou o trabalho mais completo e sistematizado sobre o tema. O próprio COTTA realizou uma revisão sobre a evolução da técnica posteriormente, em 1998.

São diversas as aplicações desta técnica em modelagens avançadas, ciência e tecnologia, com contribuições nas engenharias aeroespacial, nuclear, de controle de processos, civil e alimentos. Como exemplos mais recentes de estudos publicados: SANTOS (2001) realizou um estudo sobre convecção forçada laminar de fluidos não newtonianos em tubos externamente aletados aplicando GITT, NASCIMENTO *et al* (2006) propuseram uma solução via transformada integral para o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido de fluidos não newtonianos em dutos circulares, VERONESE (2008) analisou o escoamento bidimensional de fluidos não newtonianos com formulação em variáveis primitivas, SILVA *et al* (2009) resolveram um problema de determinação do perfil de temperatura em solos utilizando esta técnica, Da SILVA *et al* (2009) em estudo sobre secagem de alimentos aplicaram a transformação integral na solução de um problema de transferência de massa e OLIVEIRA *et al* (2009) utilizaram GITT no dimensionamento de um sistema de controle térmico.

CAPÍTULO III

MODELAGEM MATEMÁTICA

O objetivo deste capítulo é mostrar a formulação matemática proposta para a resolução do problema físico em estudo. Nele iremos discorrer sobre o método analítico de solução utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), que servirá para a validação dos resultados obtidos através da solução via método de simulação de rede (NSM).

3.1 ESCOLHA DO MÉTODO

O método escolhido para a solução analítica do problema proposto que é um problema linear, foi o método da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), afim de, padronizar os estudos referentes a transferência de calor, pois, OLIVEIRA (2010) utiliza a GITT, para validar o problema de transferência de calor unidimensional radial em um cilindro.

3.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

O que está em análise, como objeto de estudo no presente trabalho, é um problema de condução de calor bidimensional em coordenadas cilíndricas conforme a Figura 4.1. A solução deste problema de temperatura foi desenvolvida utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) que segundo OLIVEIRA (2010), a classificação das equações diferenciais parciais, o número de dimensões físicas consideradas, o tipo de sistema de coordenadas envolvido, a forma das equações principais

e condições de contorno, o modo com o qual o problema se apresenta, se em regime permanente ou em transiente são fatores que afetam na formulação de um modelo matemático e na escolha do método de resolução.

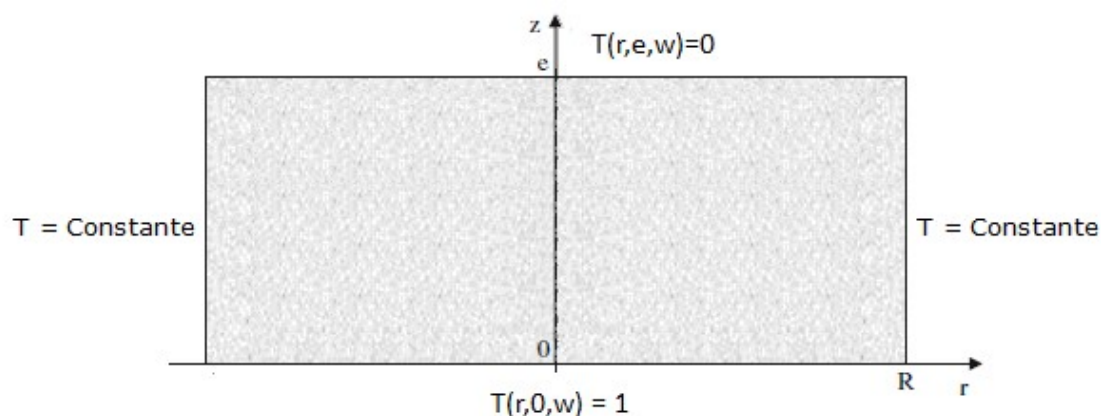


Figura 3.1 Representação da amostra no equacionamento de segunda espécie

Para o problema proposto são consideradas hipóteses simplificadoras para se efetuar a resolução do problema direto, difusão de calor:

- Sistema de coordenadas cilíndricas com simetria radial;
- Desprezam-se os efeitos de convecção e radiação;
- Condução bidimensional em regime permanente;

Segundo SILVEIRA (2012), geralmente, para a aplicação da Técnica Transformada Integral Generalizada é realizado um procedimento com passos sequenciais sistematizados, que dependendo de alguns tipos de problemas, pode haver algumas etapas intermediárias, como por exemplo, a utilização de filtros para otimização e aceleração da convergência.

As cinco etapas básicas são descritas sequencialmente (COTTA, 1997).

- Escolha de um problema auxiliar de autovalor, que contenha o maior número de informações possível acerca do problema original;
- Desenvolvimento do par Transformada–Inversa adequado;
- Transformação integral do problema original pela substituição da fórmula da inversa nos termos não transformáveis ou utilizando a abordagem do balanço integral;

- Resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, através do truncamento da série em uma ordem suficientemente grande para a precisão desejada, obtendo-se os potenciais transformados;

- Aplicação da fórmula inversa ao campo transformado para obter a solução do problema original.

As cinco etapas descritas acima serão observadas no procedimento de solução do problema.

A equação da energia que representa adequadamente o problema bidimensional é dada por:

$$k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

Rearranjando a equação 3.1, temos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2)$$

Para condição de contorno de simetria no eixo central do cilindro ($r = 0$):

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, z, t) = 0 \quad \text{em } r = 0 \quad (3.3)$$

Demais condições de contorno:

$$T(r, 0, t) = T_{\infty} + \Delta T(r) e^{i\omega t} \quad \text{para } z = 0 \quad (3.4)$$

$$h_1(T - T_{\infty}) + k \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{para } z = 1 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, z, t) = 0 \quad \text{para } r = 0 \quad (3.6)$$

$$h_2(T - T_\infty) + k \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ para } r = r_0 \quad (3.7)$$

Condição Inicial:

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (3.8)$$

3.2.1 Adimensionalizando

Segundo SILVEIRA (2012), a prática da adimensionalização para solução de problemas de equações diferenciais parciais fornece subsídios para minimizar os erros, pois reduz o número de parâmetros das equações, evitando trabalhar com ordens de grandezas, melhorando o comportamento numérico da solução, além de que os grupos adimensionais facilitam a interpretação do comportamento físico e generalizam os resultados obtidos.

Serão admitidos os seguintes grupos adimensionais:

- $R = \frac{r}{r_0}$;
- $Z = \frac{z}{r_0}$;
- $\theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T_r}$
- $\tau = \frac{r_0^2 t}{\alpha}$
- $\Omega = \frac{\omega \cdot r_0^2}{\alpha}$
- $Bi_1 = \frac{h_1 \cdot r_0}{k}$

Iremos, inicialmente, trabalhar em cada termo da Equação 3.9 separadamente, onde resolver cada termo separadamente da Equação 3.9, onde substituiremos a temperatura dimensional (T) pelo termo adimensional θ , de modo que a solução da derivada $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ é:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.9)$$

Substituindo o raio dimensional r pelo adimensional R , temos que a derivada $\frac{\partial \theta}{\partial R}$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial r} R_0 \quad (3.10)$$

Logo:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\Delta T_r}{R_0} \frac{\partial \theta}{\partial R} \quad (3.11)$$

Analogamente, substituindo o termo z por Z , temos que a solução da derivada primeira $\frac{\partial \theta}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial z} R_0 \quad (3.12)$$

Logo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{r_0}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.13)$$

Onde a derivada segunda, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}$ tem como solução a equação (3.14):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{r_0}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{r_0}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (3.14)$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{r_0^2}{\Delta T_r} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\Delta T_r}{r_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \quad (3.15)$$

Substituindo-se os valores obtidos nas Equações (3.11) e (3.15) na Equação 3.2, temos:

$$\frac{1}{R \cdot r_0} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta T_r}{r_0} \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\Delta T_r}{r_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.16)$$

Reorganizando a Equação 3.16, temos:

$$\frac{\Delta T_r}{r_0^2} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\Delta T_r}{r_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.17)$$

Dividindo-se a Equação 3.17 por $\left(\frac{\Delta T_r}{r_0^2}\right)$ resulta na Equação 3.18:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{r_0^2}{\alpha \Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.18)$$

Substituindo mais uma vez o termo T pelo termo adimensional θ , temos como resultado da derivada $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, a Equação 3.19:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.19)$$

Substituindo o tempo adimensional (t) pelo termo adimensional τ , temos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial t} \frac{r_0^2}{\alpha} \quad (3.20)$$

Logo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha \Delta T_r}{r_0^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (3.21)$$

Substituindo a Equação 3.21 na Equação 3.18, temos:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{r_0^2}{\alpha \Delta T_r} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (3.22)$$

Assim, a equação principal adimensionalizada é dada pela Equação 3.23:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (3.23)$$

Adimensionalizando-se as condições de contorno:

$$T(r, z, t) = T_\infty + \Delta T(r) e^{i\omega t} \quad (3.24)$$

Logo:

$$\Delta T_r \cdot \theta(R, Z, \tau) + T_\infty = T_\infty + \Delta T(r) e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

Onde:

$$\theta(R, Z, \tau) = \frac{\Delta T(r)}{\Delta T_r} e^{i\omega t} \quad (3.26)$$

Desta maneira:

$$\theta(R, Z, \tau) = \Delta \theta \cdot e^{i\omega t} \quad (3.27)$$

Substituindo-se os termos t e ω pelos seus respectivos termos adimensionais, temos:

$$\theta(R, Z, \tau) = \Delta\theta e^{i\Omega\tau} \text{ para } Z = 0 \quad (3.28)$$

Para condição de contorno em $Z = Z_0$, temos:

$$h_1(\theta \cdot \Delta T_r + T_\infty - T_\infty) + k \frac{\Delta T_r}{r_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad \text{para } Z = Z_0 \quad (3.29)$$

Substituindo a Equação 3.11 na Equação 3.29, temos a Equação 3.30:

$$h_1(\theta \cdot \Delta T_r + T_\infty - T_\infty) + k \frac{\Delta T_r}{r_0} \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad (3.30)$$

Após certa manipulação algébrica da Equação 3.30 e dividindo-a por h_1 , temos:

$$\theta + \frac{k}{h_1 \cdot r_0} \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad (3.31)$$

Reorganizado a Equação 3.31, temos:

$$\theta \frac{h_1 \cdot r_0}{k} + \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad (3.32)$$

Assumindo-se o termo que multiplica o θ igual a Bi_1 :

$$Bi_1 \theta + \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \text{para } Z = 1 \quad (3.33)$$

Por analogia:

$$Bi_2 \theta + \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \text{para } R = 1 \quad (3.34)$$

Substituindo o termo adimensional na Equação 3.6 temos:

$$\frac{\Delta T_r}{r_0} \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \text{para } R = 0 \quad (3.35)$$

Desta maneira:

$$\Delta T_r \cdot \theta + T_\infty = T_0 \quad (3.36)$$

Logo:

$$\theta = \frac{T_0 - T_\infty}{\Delta T_r} \rightarrow \theta = \Delta \theta \quad (3.37)$$

$$\theta(R, Z, \tau) = \theta_0 \quad \text{para } \tau = 0 \quad (3.38)$$

Após a adimensionalização o problema proposto é regido pela Equação 3.23 (principal) e pelas condições de contorno e inicial dadas respectivamente pelas Equações 3.27, 3.33, 3.34, 3.35 e 3.38. O problema para um tempo suficientemente longo pode ser reescrever conforme as equações a seguir:

$$\theta(R, Z, \tau) = \theta^*(R, Z) \Delta \theta e^{i\Omega \tau} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = \Delta \theta e^{i\Omega \tau} \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \Delta \theta e^{i\Omega \tau} \frac{\partial^2 \theta^*(R, Z)}{\partial Z^2} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \Delta \theta \cdot i \cdot \Omega \cdot e^{i\Omega \tau} \theta^*(R, Z) \quad (3.42)$$

Substituindo as Equações 3.39-3.42 na Equação 3.23, temos respectivamente a Equação geral, condições de contorno e inicial:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \cdot \Delta \theta e^{i\Omega\tau} \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} \right] + \Delta \theta e^{i\Omega\tau} \frac{\partial^2 \theta^*(R, Z)}{\partial Z^2} - \Delta \theta \cdot i \cdot \Omega \cdot e^{i\Omega\tau} \theta^*(R, Z) \quad (3.43)$$

Manipulando a Equação 3.43, temos:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \theta^*(R, Z)}{\partial Z^2} = i \cdot \Omega \cdot \theta^*(R, Z) \quad (3.44)$$

Para condição de contorno em $Z = 0$

$$\theta^*(R, Z) \Delta \theta e^{i\Omega\tau} = \Delta \theta e^{i\Omega\tau} \quad (3.45)$$

Logo:

$$\theta^*(R, Z) = 1 \quad (3.46)$$

Para condição de contorno em $Z = 1$

$$Bi_1 \cdot \theta^*(R, Z) \cdot \Delta \theta e^{i\Omega\tau} + \Delta \theta e^{i\Omega\tau} \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} = 0 \quad (3.47)$$

Manipulando a Equação 3.47, temos:

$$Bi_1 \cdot \theta^*(R, Z) + \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} = 0 \quad (3.48)$$

De modo análogo temos que a condição de contorno para $R = 1$

$$Bi_2 \cdot \theta^*(R, Z) + \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} = 0 \quad (3.49)$$

Para a condição de contorno $R = 0$

$$\frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} = 0 \quad (3.50)$$

Para condição inicial, $\tau = 0$, temos:

$$\theta^*(R, Z) \Delta \theta e^{i\Omega \tau} = \Delta \theta \quad (3.51)$$

Logo:

$$\theta^*(R, Z) = \frac{1}{e^{i\Omega \tau}} \quad (3.52)$$

Onde $\theta^*(R, Z, 0) = 0$ para um tempo muito longo.

Como consequência, o novo problema é regido pela Equação 3.44, e as condições de contorno e inicial, expressas, respectivamente pelas Equações 3.46, 3.48-3.50 e 3.52.

Após todo o problema ter sido adimensionalizado iremos aplicar a técnica da transformada integral generalizada, seguindo o seu passo a passo:

3.2.2 Escolha do problema de autovalor

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d\varphi_i(\mu_i R)}{dR} \right] + \mu_i^2 \varphi_i(\mu_i R) = 0 \quad (3.53)$$

$$\frac{d\varphi_i(\mu_i R)}{dR} = 0 \quad \text{para } R = 0 \quad (3.54)$$

$$Bi_2 \cdot \varphi_i(\mu_i R) + \frac{d\varphi_i(\mu_i R)}{dR} = 0 \quad (3.55)$$

O problema representado pelas Equações 3.53-3.55 têm solução do tipo:

Onde a autofunção é dada pela Equação:

$$\varphi_i(\mu_i, R) = J_0(\mu_i, R) \quad (3.56)$$

A norma é definida pela Equação:

$$N_i(\mu_i) = \frac{J_0^2(\mu_i) (B i_2^2 + \mu_i^2)}{2 \mu_i^2} \quad (3.57)$$

Assim, os autovalores são obtidos da Equação:

$$\mu_i \cdot J_0'(\mu_i) + B i_2 \cdot J_0(\mu_i) = 0 \quad (3.58)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\bar{\varphi}_i(\mu_i, R) = \frac{\varphi_i(\mu_i, R)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \quad (3.59)$$

3.2.3 Desenvolvimento do par de fórmula transformada-inversa

$$\begin{cases} \theta^*(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\mu_i, R) \cdot \bar{\theta}_i(Z) & \text{Inversa} \\ \bar{\theta}_i(Z) = \int_0^1 R \cdot \theta^*(R, Z) \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) dR & \text{Transformada} \end{cases} \quad (3.60) \quad (3.61)$$

3.2.4 Transformação Integral do problema original

Operando os dois lados da Equação 3.44 com o operador $\int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) dR$ resulta:

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R. \frac{\partial}{\partial R} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \bar{\theta}_j(Z) \right) \right] dR +$$

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R) \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \bar{\theta}_j(Z) \right) dR = \int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R). \bar{\theta}_j(Z) dR$$

(3.62)

Resolvendo separadamente cada termo da Equação 3.62, temos:

A solução do primeiro termo, é dada por:

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R. \frac{\partial}{\partial R} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R). \bar{\theta}_j(Z) \right) \right] dR$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\theta}_j(Z) \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R. \frac{\partial \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R)}{\partial R} \right] dR$$

(3.62a)

Para o segundo termo, temos:

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R) \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \bar{\theta}_j(Z) \right) dR$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_j(Z)}{\partial Z^2} \int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R) dR$$

(3.62b)

Para o terceiro termo que é o termo depois da igualdade, temos:

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R) \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R). \bar{\theta}_j(Z) dR$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\theta}_j(Z) \int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R) dR \quad (3.62c)$$

Devido à condição de ortogonalidade das autofunções tem-se:

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R) dR = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Das equações (3.62a) e (3.53), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\theta}_j(Z) \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R. \frac{\partial \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R)}{\partial R} \right] dR = \\ \sum_{j=1}^{\infty} -\mu_j^2. \bar{\theta}_j(Z) \int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R) dR \end{aligned} \quad (3.63)$$

Aplicando-se, agora, a condição de ortogonalidade nas equações (3.63), (3.62b) e (3.62c), temos como soluções as respectivas equações:

$$(3.63) \rightarrow -\mu_i^2. \bar{\theta}_i(Z)$$

$$(3.62b) \rightarrow \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Z)}{\partial Z^2}$$

$$(3.62c) \rightarrow \bar{\theta}_i(Z)$$

Portanto, a solução do problema representado pela Equação 3.44, é dada por:

$$-\mu_i^2. \bar{\theta}_i(Z) + \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Z)}{\partial Z^2} = \bar{\theta}_i(Z). i\Omega \quad (3.64)$$

Reorganizando os termos da Equação 3.64, temos:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Z)}{\partial Z^2} - \mu_i^2 \cdot \bar{\theta}_i(Z) - \bar{\theta}_i(Z) \cdot i\Omega = 0 \quad (3.65)$$

Logo, após nova reorganização, temos:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Z)}{\partial Z^2} - \bar{\theta}_i(Z) (\mu_i^2 + i\Omega) = 0 \quad (3.66)$$

Fazendo $\xi_i^2 = \mu_i^2 + i\Omega$, e substituindo na Equação 3.66, temos:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Z)}{\partial Z^2} - \xi_i^2 \bar{\theta}_i(Z) = 0 \quad (3.67)$$

3.2.5 Solução do problema transformado

A Equação 3.67 tem solução do tipo:

$$\bar{\theta}_i(Z) = C_1 e^{\xi_i Z} + C_2 e^{-\xi_i Z} \quad (3.68)$$

Onde as constantes C_1 e C_2 são obtidas a partir das condições de contorno (3.46) e (3.48) transformando:

Da equação (3.46), temos:

$$\int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_\nu, R) \cdot \theta^*(R, Z) dR - \int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_\nu, R) dR \quad (3.69)$$

Logo,

$$\bar{\theta}_i(0) = \int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_\nu, R) dR \quad (3.70)$$

A Equação 3.70 tem como solução:

$$\bar{\theta}_i(0) = \frac{I_1(\mu_i)}{\mu_i} \quad (3.71)$$

Da equação (3.48), resulta:

$$\int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) \cdot \theta^*(R, Z) \cdot Bi_1 \, dR + \int_0^1 \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) \frac{\partial}{\partial Z} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varphi}_j(\mu_j, R) \bar{\theta}_j(Z) \, dR \quad (3.72)$$

Reorganizando a Equação 3.72, temos:

$$Bi_1 \int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) \cdot \theta^*(R, Z) \cdot + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\bar{\theta}_j(Z)}{dZ} \int_0^1 \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) \cdot \bar{\varphi}_j(\mu_j, R) \, dR = 0 \quad (3.73)$$

Que tem como solução:

$$Bi_1 \cdot \bar{\theta}_i(Z) + \frac{d\bar{\theta}_i(Z)}{dZ} = 0 \quad (3.74)$$

Para $Z = 0$, temos como solução da Equação:

$$\bar{\theta}_i(Z) = C_1 e^{\xi_i Z} + C_2 e^{-\xi_i Z} \quad (3.75)$$

Onde:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \bar{\theta}_i(0) \\ C_1 + C_2 = \frac{I_1(\mu_i)}{\mu_i} \end{cases}$$

Fazendo:

$$\frac{d\theta_i(z)}{dz} = C_1 \xi_i e^{\xi_i z} - C_2 \xi_i e^{-\xi_i z} \quad (3.76)$$

Substituindo as equações 3.75 e 3.76 na Equação 3.74, temos:

$$C_1 \xi_i e^{\xi_i} - C_2 \xi_i e^{-\xi_i} + Bi_1 [C_1 e^{\xi_i} + C_2 e^{-\xi_i}] = 0 \quad (3.77)$$

Reorganizando a Equação 3.77, temos:

$$C_1 [\xi_i e^{\xi_i} + Bi_1 e^{\xi_i}] + C_2 [Bi_1 e^{-\xi_i} - \xi_i e^{-\xi_i}] = 0 \quad (3.78)$$

Substituindo $C_2 = \bar{\theta}_i(0) - C_1$, temos:

$$C_1 \xi_i e^{\xi_i} + C_1 Bi_1 e^{\xi_i} + (\bar{\theta}_i(0) - C_1) [Bi_1 e^{-\xi_i} - \xi_i e^{-\xi_i}] = 0 \quad (3.79)$$

Rearranjando a Equação 3.79 temos a Equação 3.80:

$$C_1 \xi_i e^{\xi_i} + C_1 Bi_1 e^{\xi_i} + \bar{\theta}_i(0) Bi_1 e^{-\xi_i} - \bar{\theta}_i(0) \xi_i e^{-\xi_i} - C_1 Bi_1 e^{-\xi_i} + C_1 \xi_i e^{-\xi_i} = 0 \quad (3.80)$$

Rearranjando novamente, temos:

$$C_1 [\xi_i e^{\xi_i} + Bi_1 e^{\xi_i} - Bi_1 e^{-\xi_i} + \xi_i e^{-\xi_i}] + \bar{\theta}_i(0) [Bi_1 e^{-\xi_i} - \xi_i e^{-\xi_i}] = 0 \quad (3.81)$$

Logo,

$$C_1 = \frac{-\bar{\theta}_i(0) [Bi_1 e^{-\xi_i} - \xi_i e^{-\xi_i}]}{\xi_i e^{\xi_i} + Bi_1 e^{\xi_i} - Bi_1 e^{-\xi_i} + \xi_i e^{-\xi_i}} \quad (3.82)$$

Reorganizando a Equação 3.82, temos:

$$C_1 = \frac{\bar{\theta}_i(0)e^{-\xi_i}[\xi_i - Bi_1]}{e^{-\xi_i}[\xi_i e^{2\xi_i} + \xi_i + Bi_1 e^{2\xi_i} - Bi_1]} \quad (3.83)$$

Reorganizando novamente, temos:

$$C_1 = \frac{\bar{\theta}_i(0)[\xi_i - Bi_1]}{-Bi_1 + Bi_1 e^{2\xi_i} + \xi_i + \xi_i e^{2\xi_i}} \quad (3.84)$$

Logo, $C_2 = \bar{\theta}_i(0) - C_1$ onde iremos substituir a Equação 3.71:

$$C_2 = \frac{J_1(\mu_i)}{\mu_i} - C_1 \quad (3.85)$$

3.2.6 Recuperação do Potencial Original

Por fim, para a obtenção da solução que representa o campo de temperatura do problema proposto, teremos que substituir a Equação 3.61 na Equação 3.51, para explicitar a expressão que representa o comportamento da temperatura para tal problema.

$$\theta(R, Z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R) \cdot \bar{\theta}_i(Z) \cdot \Delta\theta e^{i\lambda_i \tau} \quad (3.86)$$

CAPÍTULO IV

MÉTODO DA SIMULAÇÃO DE REDES

O objetivo central deste capítulo é mostrar a solução do problema de condução de calor bidimensional pelo Método da Simulação de Redes (NSM), e toda a metodologia envolvida para obter a malha que representa o sistema proposto.

4.1 METODOLOGIA DAS SIMULAÇÕES

Para as simulações dos problemas de condução de calor bidimensional nas dimensões radial e longitudinal fez-se o uso da analogia existente entre as grandezas térmicas e as grandezas elétricas, vide tabela 4.1.

O diagrama esquemático do circuito elétrico é feito dividindo-se o meio físico em um determinado número de células (discretização espacial), ou seja, para cada malha mínima no circuito elétrico projetado, tipo rede de Resistores-Capacitores (rede RC), o *software* gera um arquivo lista (*netlist*) descrevendo a composição e organização do sistema, então cria um conjunto de equações diferenciais, uma para cada volume de controle, obtida através da discretização espacial das equações definidas pelo modelo matemático no processo físico.

Para o dimensionamento dos componentes do circuito é necessário considerar a geometria cilíndrica do sistema, as propriedades térmicas (ρ , C_p e κ) dos materiais, o comprimento e raio do cilindro. Para um sistema bidimensional iremos considerar uma aproximação pelo teorema da superposição, o qual segundo KURUKAWA (2013) princípio da superposição estabelece que a resposta (a corrente e/ou a tensão) em qualquer parte de um circuito linear que tenha mais de uma fonte independente pode ser obtida a partir da soma das respostas

originadas pela ação de cada fonte independente agindo sozinha. Assim o teorema da superposição garante que em qualquer circuito, que contenha mais de uma fonte, a corrente ou a tensão pode ser obtida somando-se algebricamente todas as correntes ou tensões causadas pela ação individual de cada fonte, que exista no circuito, sendo todas as outras fontes de tensão substituídas por curto-circuitos e as fontes de corrente substituídas por circuitos abertos. Com base no teorema da superposição criaremos uma configuração que consiste na soma (composição) das células obtidas durante a resolução dos problemas, assumidos, como unidimensionais nos sentidos radial e longitudinal.

Tabela 4.1 - Analogia entre Grandezas nos Circuitos Elétricos e Térmicos. Fonte: Oliveira 2010

ELÉTRICAS			TÉRMICAS		
Descrição	Símbolo	Unidade	Descrição	Símbolo	Unidade
Diferença de potencial (voltagem)	Δv	V	Diferença de temperatura	Δt	K
Corrente	I	A	Taxa de transferência de calor	$\dot{q}$	W
Carga	Q_e	C	Energia térmica	Q	J
Tempo	T_e	S	Tempo	T_t	S
Resistência	R	Ω	Resistência térmica	R	K/W
Capacitância	C	F	Capacitância térmica	C	J/K

4.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA BIDIMENSIONAL PELO NSM

O estudo propõe a criação de uma malha genérica, baseada no teorema da superposição, a proposta consiste na criação de uma malha que englobe uma gama de condições de contorno diferentes em uma superfície cilíndrica, independente do problema ser em regime transitório ou permanente, para a resolução iremos sobrepor as resistências radiais e longitudinais e superpor (somar) o volume representado pela capacitância das células unidimensionais nos dois sentidos.

Para a determinação dos parâmetros da malha bidimensional, iremos calcular os parâmetros nos sentidos radial e longitudinal, separadamente. Onde para os cálculos no sentido radial, segundo KARPLUS (1958) pode-se, simplesmente, utilizar as equações (4.2.1) e (4.2.2). Por outro lado, os parâmetros no sentido longitudinal, podem ser encontrados as equações (4.2.3) e (4.2.4)

$$R_r = \frac{\ln\left(\frac{r_{n+\Delta}}{r_n}\right)}{2\pi kL} \quad (4.2.1)$$

$$C_r = \pi \rho c_p (r_{n+\Delta}^2 - r_n^2) L \quad (4.2.2)$$

$$R_t = \frac{1}{k} \frac{\Delta L}{2\pi(r_{n+\Delta}^2 - r_n^2)} \quad (4.2.3)$$

$$C_t = \Delta L \cdot \pi \cdot (r_{n+\Delta}^2 - r_n^2) \cdot \rho \cdot c_p \quad (4.2.4)$$

$$\Delta L = \frac{L}{nd} \quad (4.2.5)$$

Onde R_r e R_t são os valores das resistências elétricas que representam o efeito dissipativo do volume, considerando que r é a posição radial, k é condutividade térmica do material, L é o comprimento do cilindro, ρ e c_p são, respectivamente a massa específica e o calor específico do meio, o índice n indica o número do nó no circuito, ΔL é o valor do

comprimento dividido pela quantidade de divisões ou discretizações (nd). É importante lembrar que o valor da resistência no sentido longitudinal utilizada no circuito deve ser a metade do valor calculado, devido à necessidade de evitar que a última célula tenha seu capacitor anulado ao ligar em paralelo com o terra do circuito elétrico.

Obtidos os valores dos parâmetros, faremos a soma (superposição) da célula unitária unidimensional radial proposta por OLIVEIRA (2010) vide figura 4.2.1 com a célula unitária unidimensional longitudinal proposta por SILVA (2014) vide figura 4.2.2, a célula bidimensional resultante da aproximação pelo teorema da superposição é apresentada na figura 4.2.3.

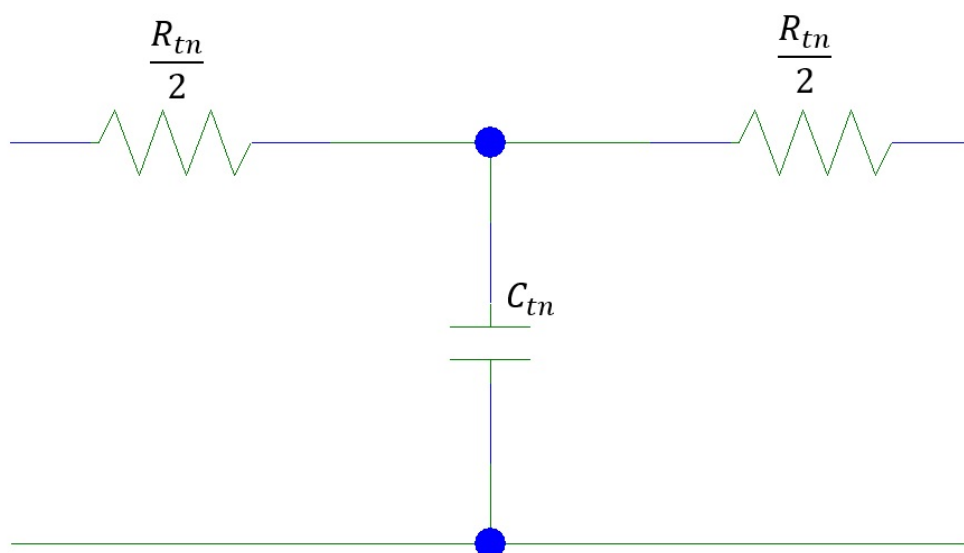


Figura 4.1: Circuito no PSPICE da célula unitária unidimensional transversal

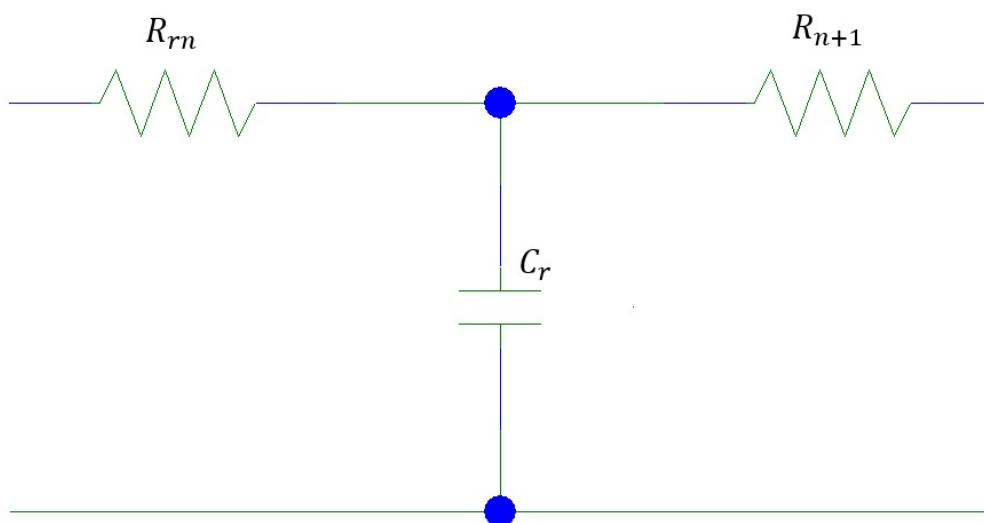


Figura 4.2: Circuito no PSPICE da célula unitária unidimensional radial

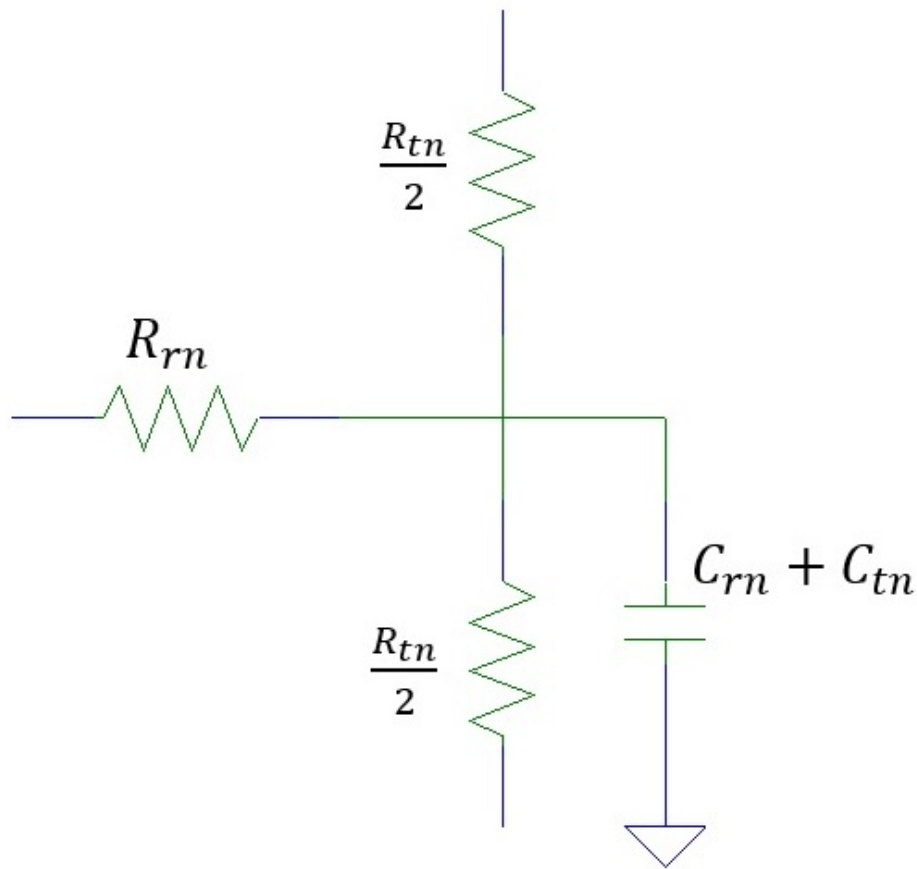


Figura 4.3: Circuito no PSPICE da célula unitária bidimensional

Com base na célula unitária radial OLIVEIRA (2010) explica a dinâmica do circuito conforme na Figura 4.4, onde T é o potencial do nó em Volts (V), i representa a corrente elétrica em Amperes (A), R resistência em Ohms (Ω), C representa a capacitância em Faraday (F), r a posição radial em metros (m), os índices n e Δ , referem-se ao número do nó e ao incremento, respectivamente. As condições de contorno são implementadas por dispositivos elétricos adicionais nas localizações requeridas. Podemos considerar um circuito alimentado por uma fonte de tensão, a seguir medimos a evolução da tensão elétrica em pontos específicos para estudar o comportamento do sistema. Calculados os valores dos componentes do circuito, faz-se um diagrama esquemático no *software* *PSPICE* e procede-se uma simulação, na qual especificamos o tipo de análise que iremos realizar e logo após a seleção especificamos o tempo total de observação, determinando, também, os intervalos de tempo em que serão feitas as tomadas (aquisições) dos valores de

tensão elétrica, vide Figura 4.5. O próprio programa fornece um gráfico de saída dos dados, as tensões nos pontos ao longo do tempo, equivalendo às medidas de temperatura nas posições especificadas em função do tempo. Numa primeira abordagem de solução, ao supor que os valores de R e C são constantes, temos que solucionar um problema linear de difusão de calor, ou seja, tomam-se as propriedades do meio como sendo independentes da temperatura.

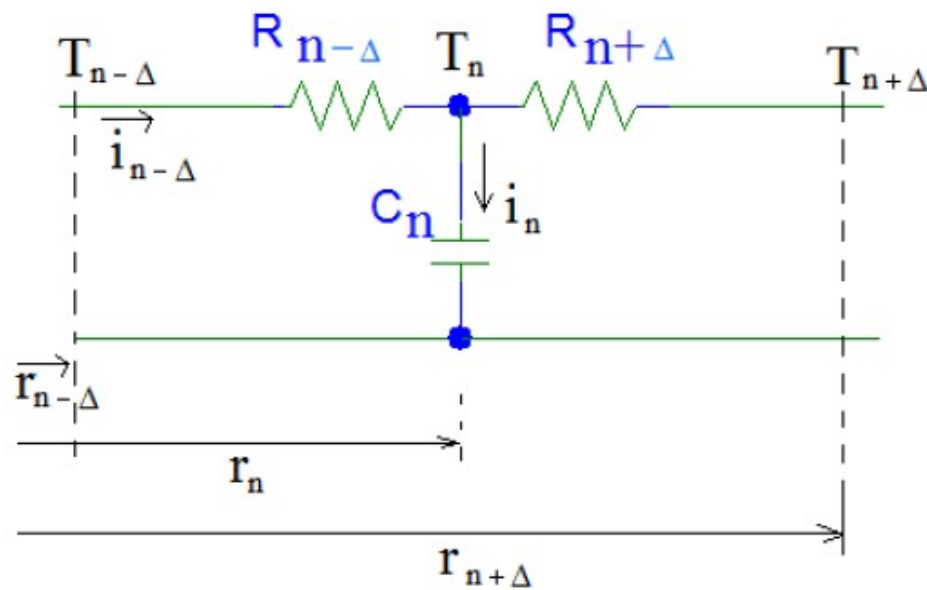


Figura 4.4: Célula, ou volume elementar do circuito elétrico em rede RC. Fonte: OLIVEIRA 2010

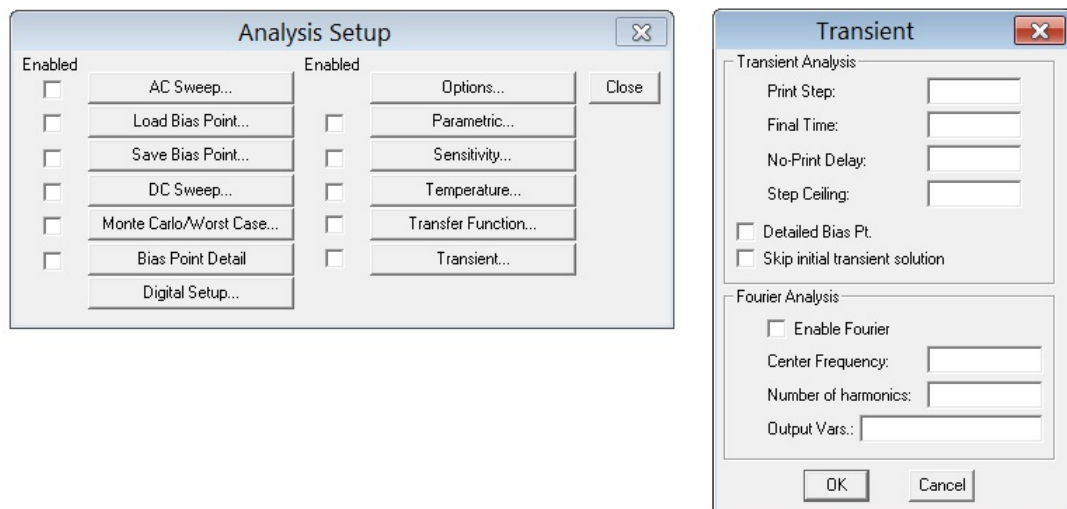


Figura 4.5: Definição do tipo de análise e definição dos valores desejados no *PSPICE*

Utilizaremos, para efeito de comparação exemplos de circuitos elétricos em rede RC com quatro células, isto é, os sistemas divididos em quatro volumes elementares (células) representados nas Figura 4.6, 4.7 e 4.8, as quais nos permitem observar os diagramas esquemáticos no *PSPICE* dos respectivos circuitos unidimensional radial, longitudinal e bidimensional, com a ilustração dos componentes e a visão geral da tela de diagramação do *software*. O circuito, basicamente, consiste numa rede de resistores e capacitores e o número de nós faz um ajuste na precisão de localização de um ponto, o aumento do número de nós implica no refinamento da malha de discretização espacial. Para a Figura 4.8 os resistores R_t e os capacitores C iremos considerar os valores obtidos pelas Equações 4.2.6 e 4.2.7.

$$R_{tn} = \frac{R_{tn}}{2} + \frac{R_{tn}}{2} \quad (4.2.6)$$

$$C_n = C_{vn} + C_{tn} \quad (4.2.7)$$

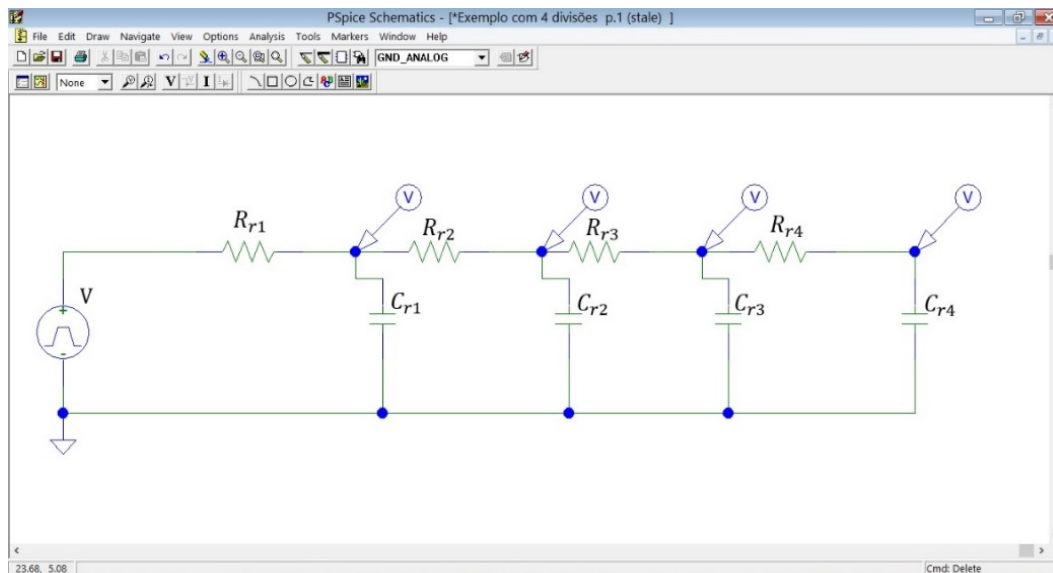


Figura 4.6: Diagrama esquemático de um circuito RC radial no *PSPICE*

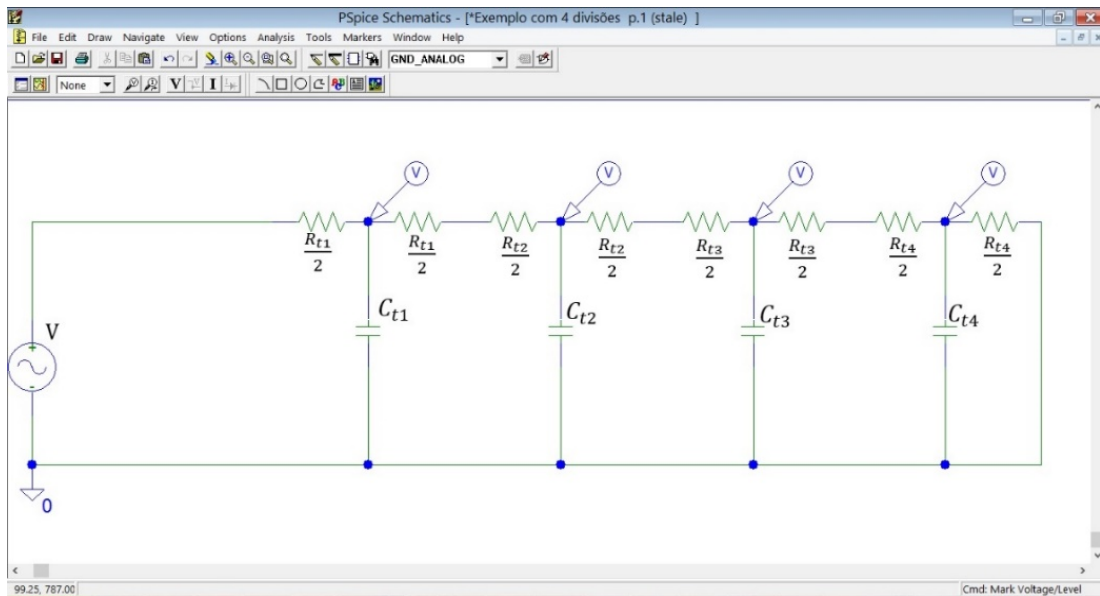


Figura 4.7: Diagrama esquemático de um circuito RC transversal no *PSPICE*

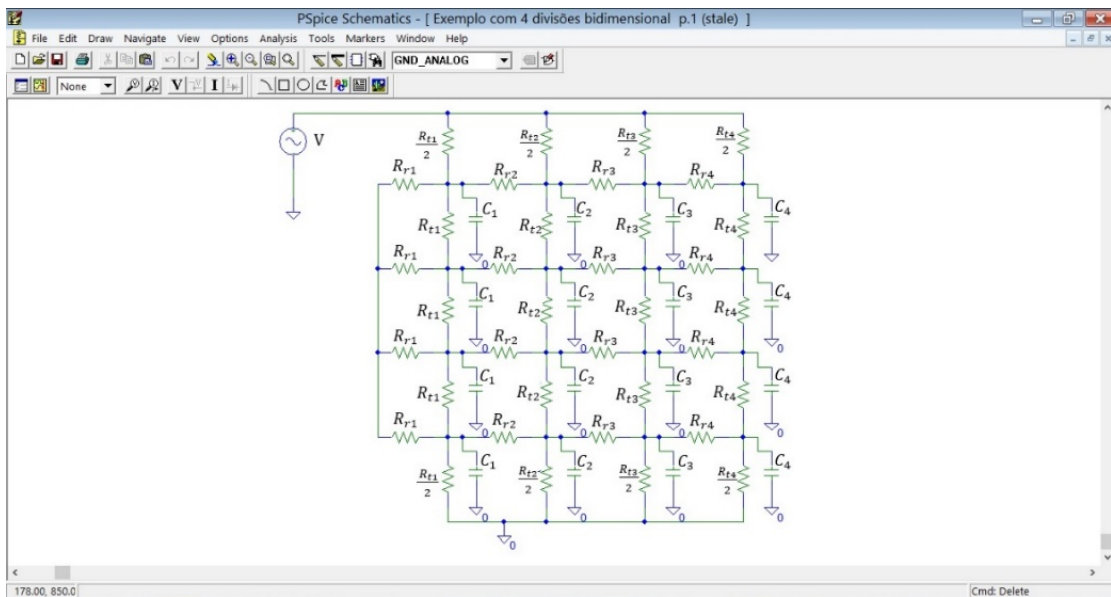


Figura 4.8: Diagrama esquemático de um circuito RC bidimensional no *PSPICE*

Após a simulação, o programa fornece uma saída de dados que pode ser diretamente analisada, como se pode verificar pela Figura 4.9 e, outra opção, é um arquivo com os resultados numericamente expressos (com extensão *.out*), o qual pode ser manipulado em editores de texto e planilhas eletrônicas.

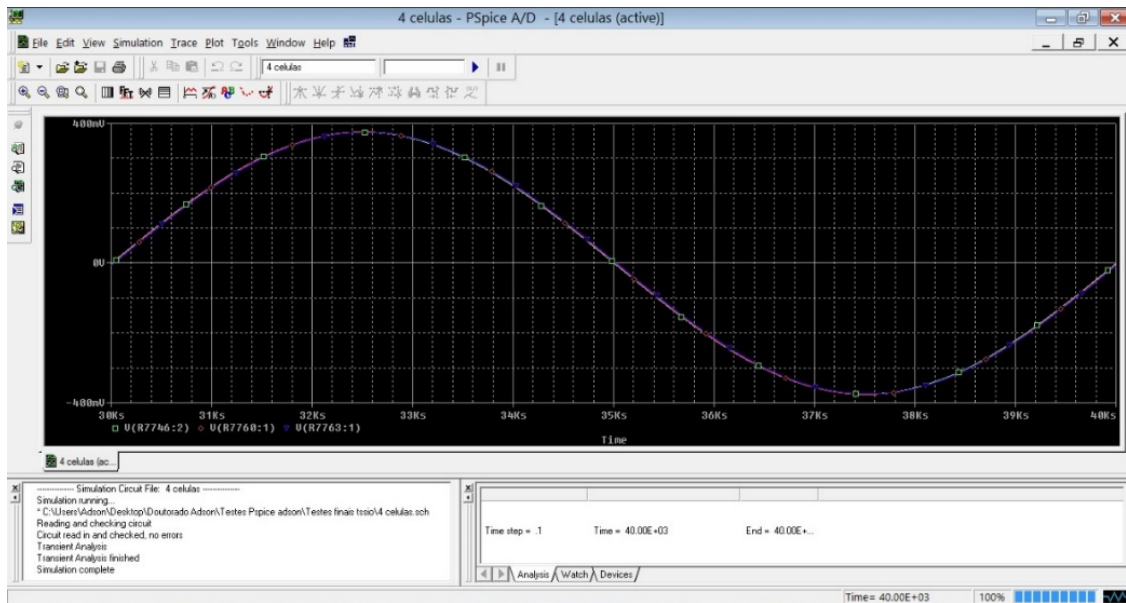


Figura 4.9: Tela para visualização do resultado da simulação de um circuito em rede RC bidimensional no *PSIPCE*

As principais vantagens deste método são: solução em verdadeiro tempo real, velocidade de processamento, ausência de sofisticada modelagem matemática e análise de convergência. Suas desvantagens residem na precisão, devido à discretização espacial e no projeto das células elementares, principalmente em sistemas multidimensionais.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DE RESULTADOS

No presente capítulo apresentam-se os resultados adquiridos ao longo do desenvolvimento deste estudo. Inicialmente, foram obtidos os resultados pela solução do alcançada através do método analítico, via Técnica da Transformação Integral Generalizada (GITT), posteriormente tem-se os resultados da solução pelo Método de Simulação de Rede (NSM), de modo que, a comparação entre os dois resultados valide o método proposto pelo estudo.

5.1 ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA

Segundo OLIVEIRA (2010) a solução do sistema de equações diferenciais através da GITT implica no truncamento de uma série infinita em um número finito de termos, de onde surge a necessidade da observação do potencial calculado no instante sugerido para efeito de análise de convergência dos resultados obtidos.

Para fins de análise, adotaremos os seguintes valores adimensionais: $r_0 = 0.1$, $l = 0.005$, uma discretização com 12 divisões, tanto para o raio quanto para o comprimento e consideraremos a posição radial $R = 0$ como ponto de observação, onde, segundo OLIVEIRA (2010), ocorre o pior caso, pois, fisicamente isto se deve ao fato de que esta posição sofre influência constante da condição de simetria e a maior distância possível da perturbação. Iremos confrontar os resultados obtidos com um valor de referência obtido pelos testes realizados por SILVA (2014), tendo em vista que o raio é muito maior que o comprimento do cilindro de forma que o resultado bidimensional pode

ser aproximado ao resultado unidimensional que foi validado experimentalmente, analiticamente e por simulação. Por se tratar de uma análise em regime permanente, será considerado para uma entrada senoidal um tempo suficientemente longo (30000s a 40000s), utilizaremos também o mesmo material utilizado por SILVA (2014), onde temos que, a condutividade térmica é ($k = 1,38$), massa específica ($\rho = 2203$) e o calor específico do meio ($c_p = 772$), suas unidades são respectivamente, $W/m.K$, kg/cm^3 , $J/kg.K$.

A convergência pode ser estudada através do aumento do número de termos da série, podendo-se verificar a sua influência nas Figuras 5.1-5.7. Percebe-se que com 50 termos na série, temos uma boa aproximação com a tensão de referência fornecida pelo experimento de SILVA (2014), percebe-se também que com o aumento do número de termos o resultado pouco se altera, de modo que adotaremos 50 termos para demais testes posteriores.

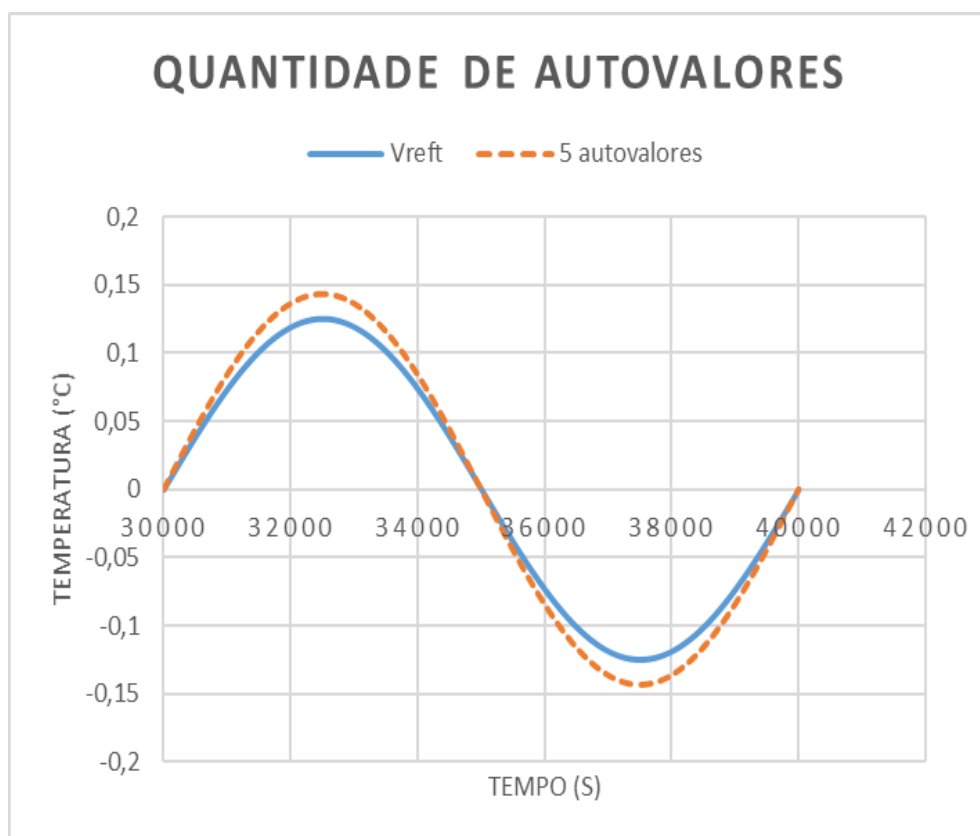


Figura 5.1: Gráfico com a solução contendo 5 autovalores

Percebe-se que ao aumentar a quantidade de autovalores da solução proposta para 10 autovalores, a solução ficou com uma amplitude menor que a temperatura de referência, conforme Figura 5.2.

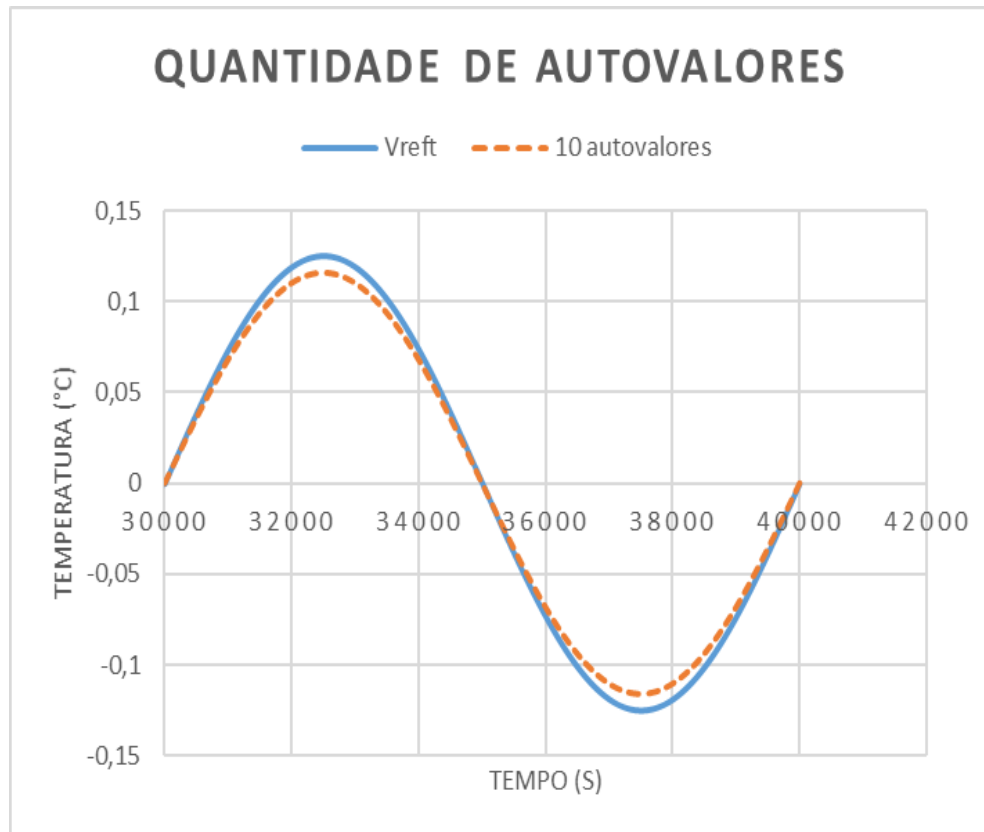


Figura 5.2: Gráfico com a solução contendo 10 autovalores

Ao dobrar a quantidade de autovalores da solução obtida pela Figura 5.1, percebe-se que a solução proposta começa a se aproximar da temperatura de referência, conforme a Figura 5.3.

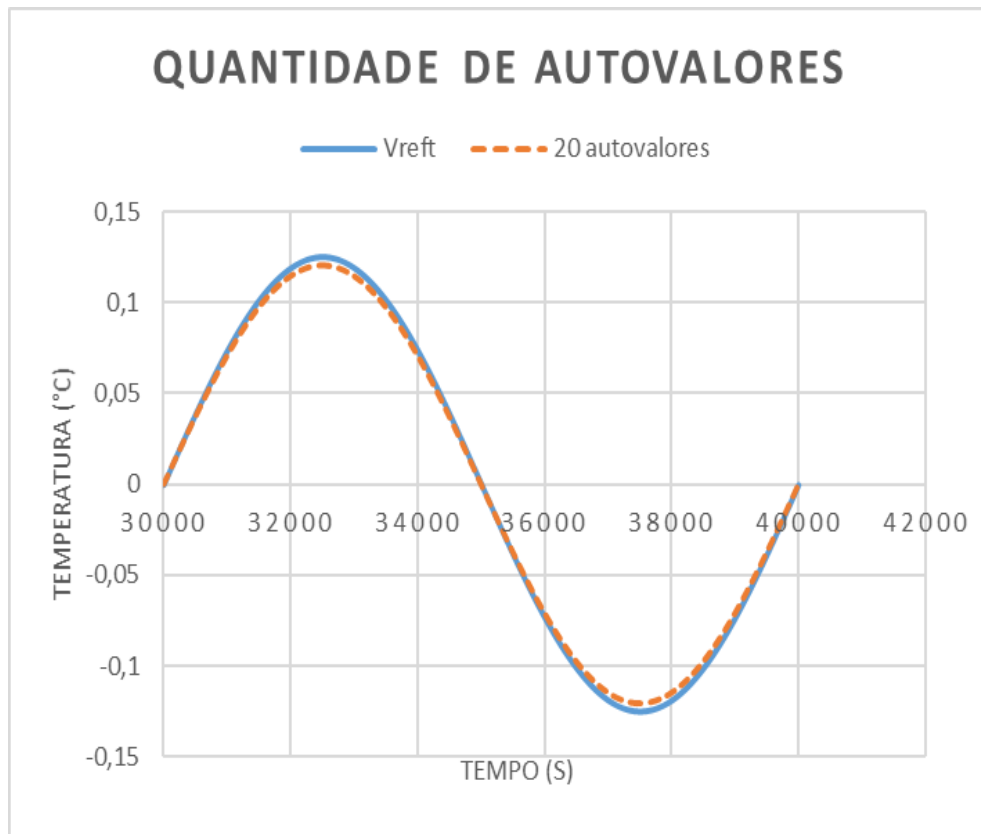


Figura 5.3: Gráfico com a solução contendo 20 autovalores

Dobrando mais uma vez a quantidade de autovalores da solução, iremos obter a resposta referente a 40 autovalores, onde, pode-se observar que a curva da solução proposta, se aproxima da temperatura de referência.

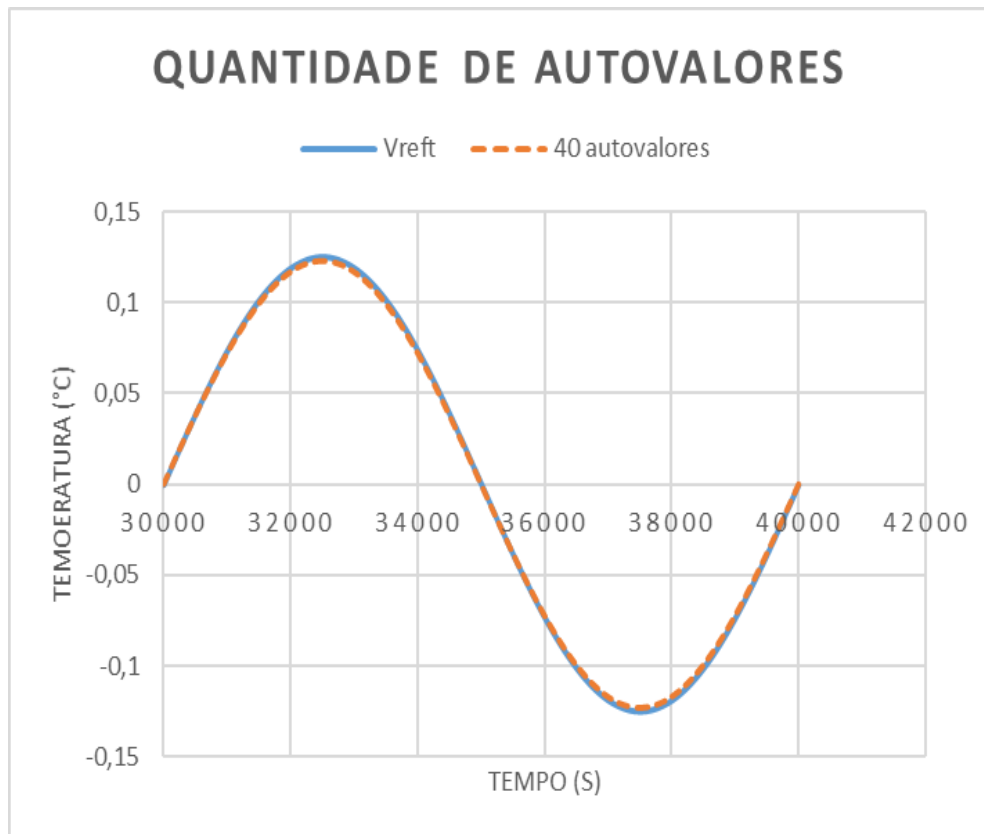


Figura 5.4: Gráfico com a solução contendo 40 autovalores

Aumentando a quantidade de autovalores para 50, pode-se observar que as curvas de temperatura estão sobrepostas, conforme a Figura 5.5.

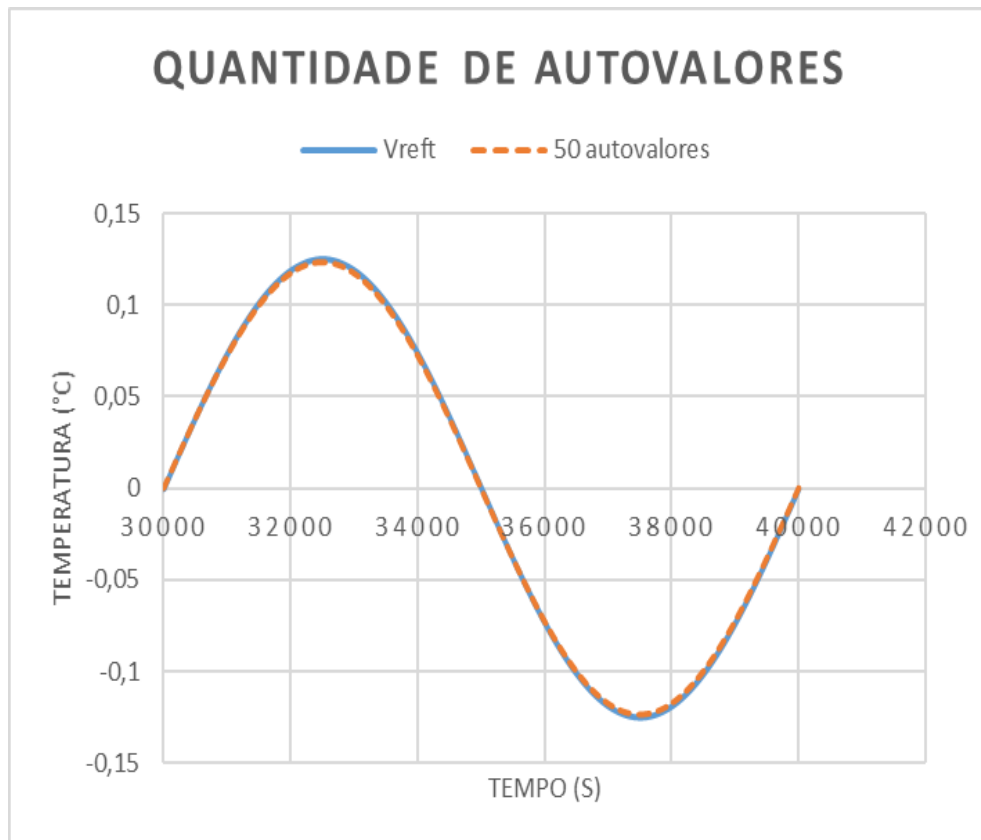


Figura 5.5: Gráfico com a solução contendo 50 autovalores

Dobrando a quantidade de autovalores de 50 para 100 autovalores, pode-se observar que as curvas de temperatura, continuam sobrepostas, conforme Figura 5.6.

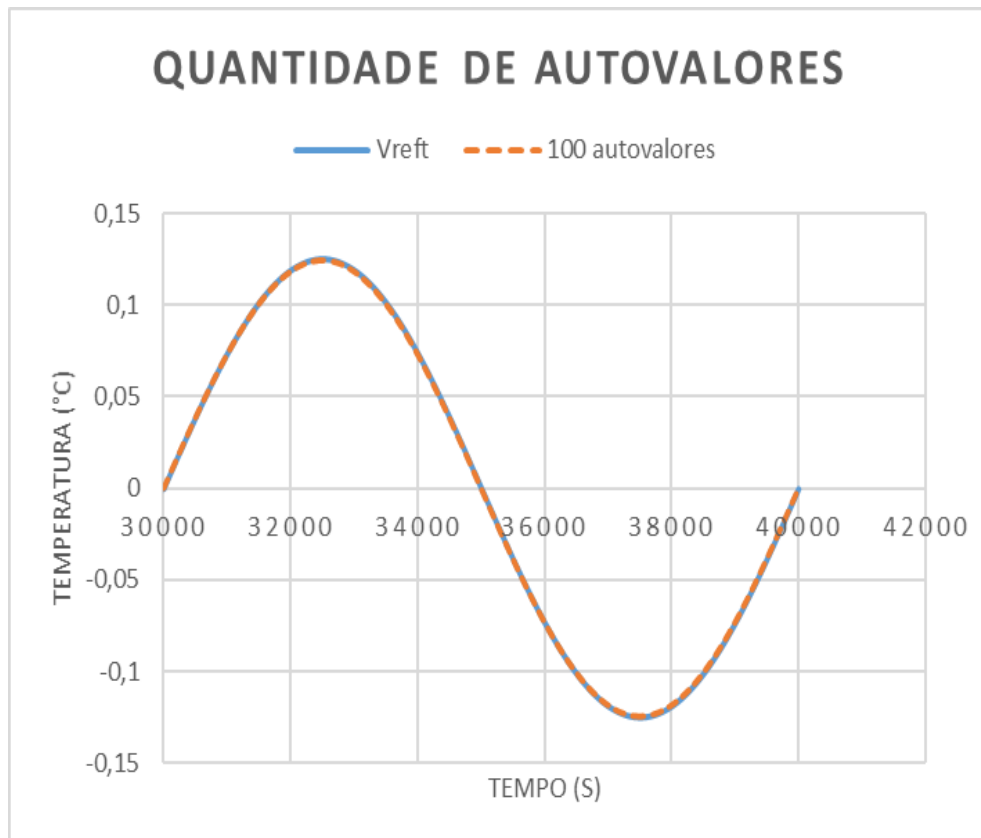


Figura 5.6: Gráfico com a solução contendo 100 autovalores

Aumentando a quantidade de autovalores de 100 para 200, pode-se perceber que as curvas de temperatura continuam sobrepostas, conforme a Figura 5.7, onde, pode-se adotar 50 autovalores para os demais experimentos, pois, percebe-se que a partir deste valor a solução pouco varia, de modo, que a solução já havia convergido.

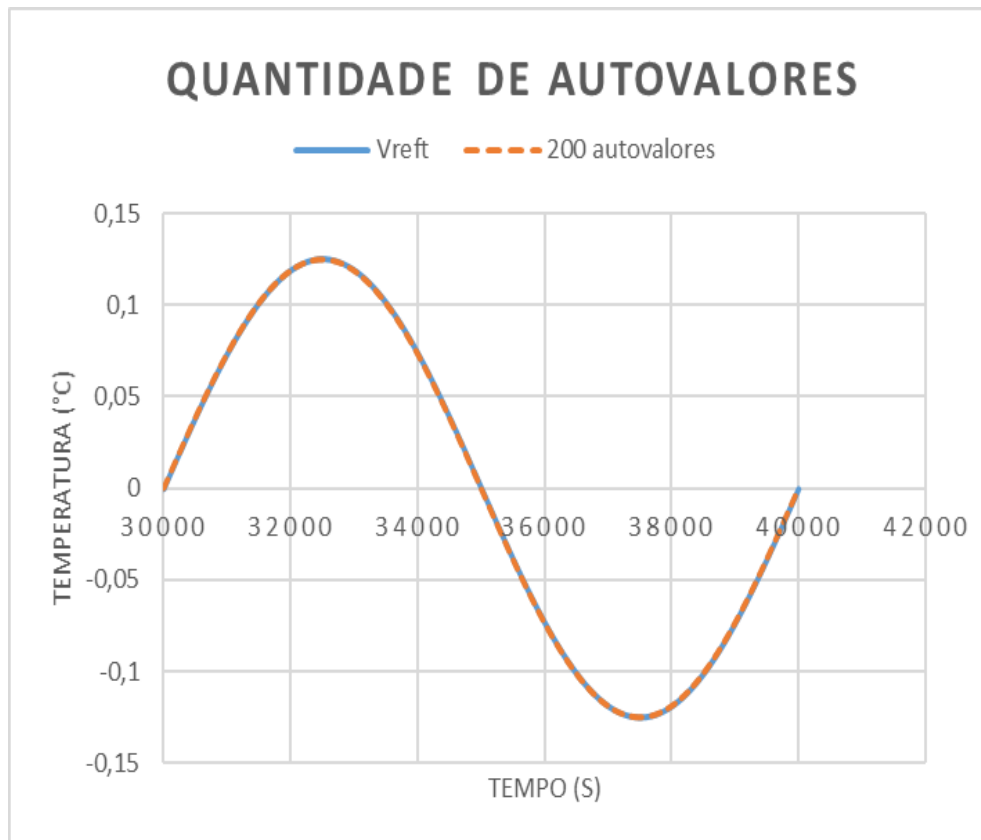


Figura 5.7: Gráfico com a solução contendo 200 autovalores

Na Figura 5.8, podemos comparar a influência da quantidade de autovalores na solução proposta.

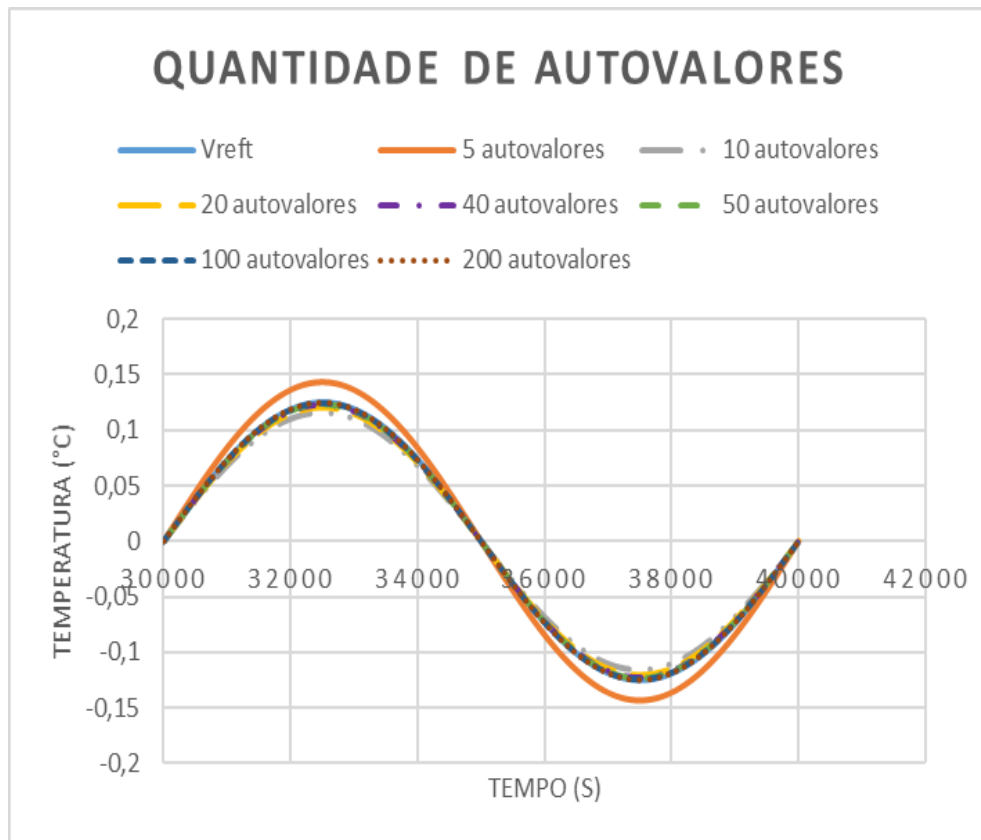


Figura 5.8: Gráfico de comparação para diferentes autovalores

5.2 VALIDAÇÃO DO MÉTODO

Para a validação do método iremos confrontar os resultados obtidos pelo Método de Simulação de Rede (NSM), com os resultados obtidos pela solução analítica via Técnica da Transformação Integral Generalizada (GITT), para tal análise iremos adotar a solução analítica com 50 autovalores, também iremos adotar $r_0 = 0.1$, $l = 0.005$, uma discretização de 12 divisões no raio e no comprimento, um tempo suficientemente longo (30000s a 40000s), desprezando os valores iniciais devido o problema proposto ser em regime permanente e utilizando um número de Biot próximo de zero devido ao problema ser de segunda espécie, isto é, com fluxo nulo ou imposto, para esse teste iremos considerar o $Biot = 0.15$, consideraremos de igual modo a posição radial $R = 0$, conforme foi realizado nos testes de convergência. Percebe-se conforme figura 5.9 que os valores obtidos pelo NSM equivalem aos valores obtidos pelo método analítico, de modo que o problema proposto é validado.

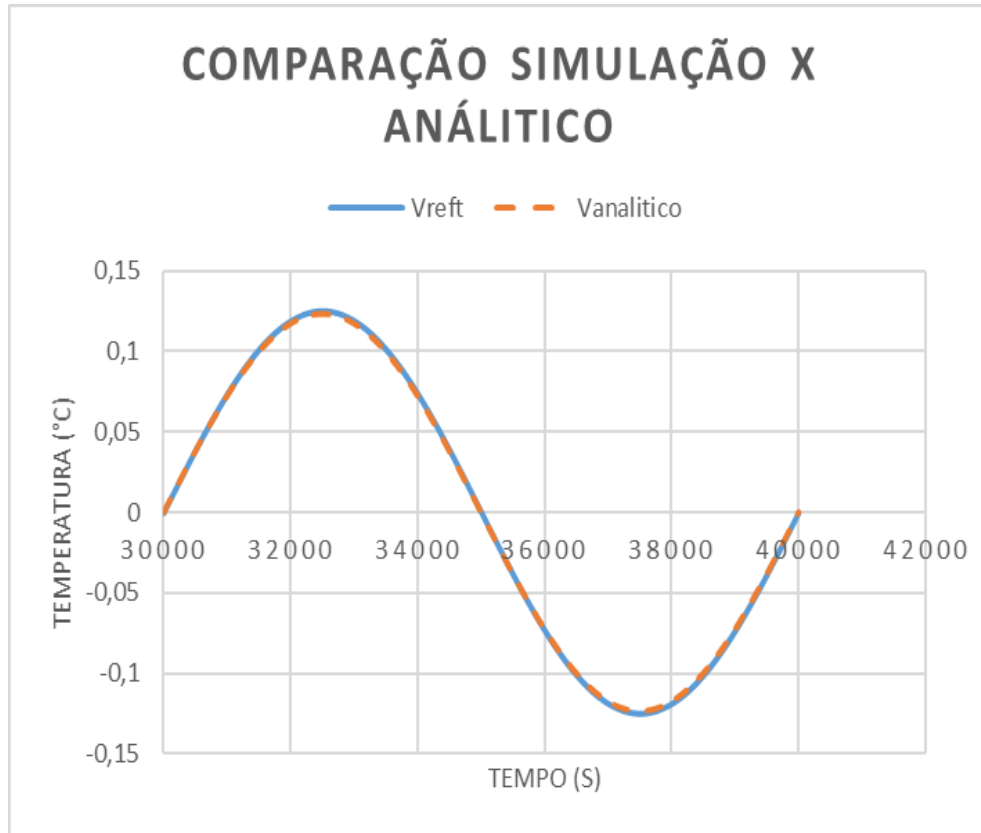


Figura 5.9: Comparação entre o resultado analítico e o resultado via NSM

5.3 ESTUDO DA RELAÇÃO RAIOS / COMPRIMENTO

Validados os resultados obtidos com a resolução do problema, iremos realizar diversos testes para analisarmos a influência da relação entre o tamanho do raio do e o comprimento do cilindro, de modo que, iremos verificar quando o modelo bidimensional irá se comportar como um modelo unidimensional. Para tanto, utilizaremos uma discretização com 12 divisões, para podermos comparar com o resultado do modelo unidimensional implementado por SILVA (2014), cuja modelagem foi validada tanto analiticamente, quanto experimentalmente. Neste teste, iremos utilizar $l = 0,005$, variando o r_0 em função do l , visualizando os resultados na posição radial $R = 0$, com posições longitudinais adimensionais $L = 0$ (base do cilindro) e $L = 1$ (topo do cilindro), a fim de observar a presença ou ausência de fluxo no cilindro.

Pode-se observar na Figura 5.10, que quando se tem um raio duas vezes maior que o comprimento do cilindro, há a presença de fluxo de calor, quando observamos que a temperatura medida no centro é diferente da temperatura na casca do cilindro.

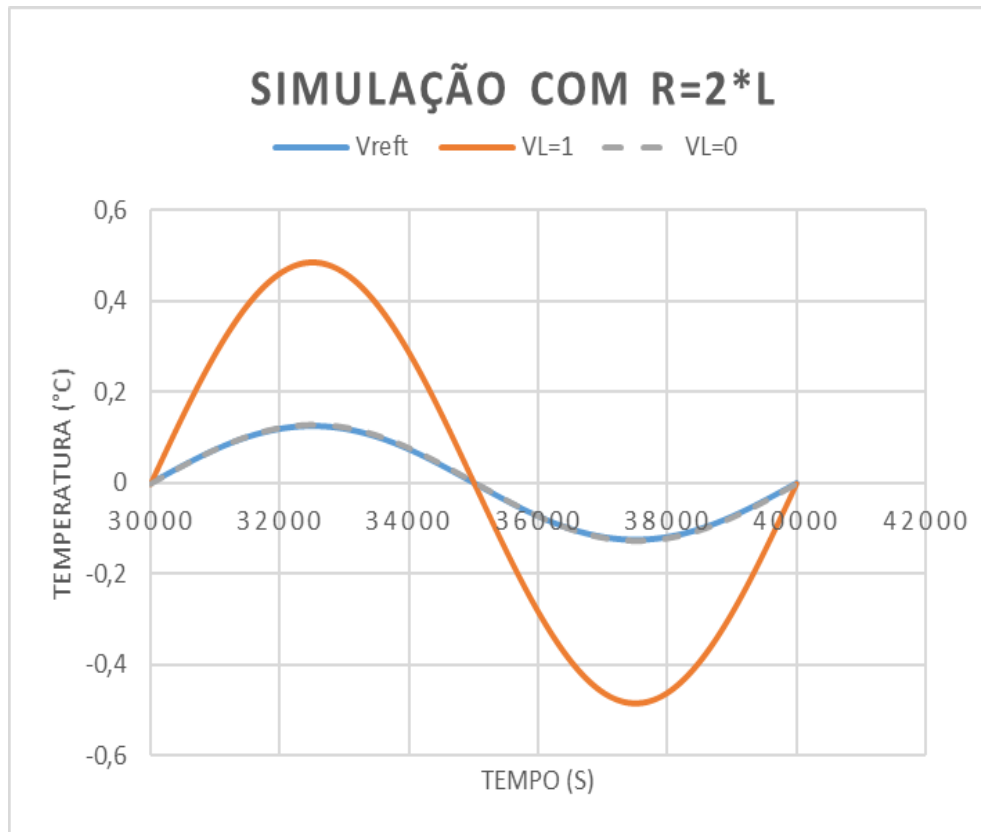


Figura 5.10: Comparação de resultados via NSM quando o raio é duas vezes maior que o comprimento do cilindro

Ao aumentar a diferença da relação raio / comprimento para um de raio 4 vezes maior que o comprimento, pode-se observar que o fluxo de calor diminui à medida que aumentamos a diferença da relação raio / comprimento, conforme Figuras 5.11.

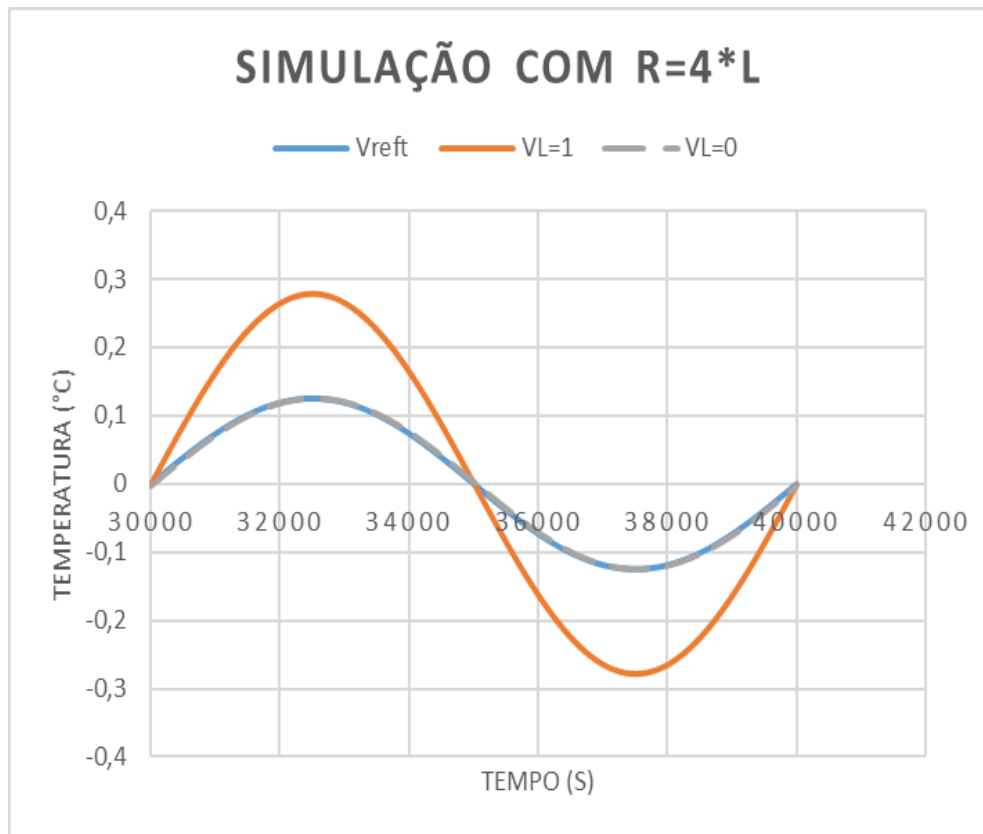


Figura 5.11: Comparação de resultados via NSM quando o raio é quatro vezes maior que o comprimento do cilindro

Aumentando a diferença para um raio 6 vezes maior que o comprimento do cilindro, percebe-se que o fluxo na casca é menor quando comparado a relações menores. Vide Figura 5.12.

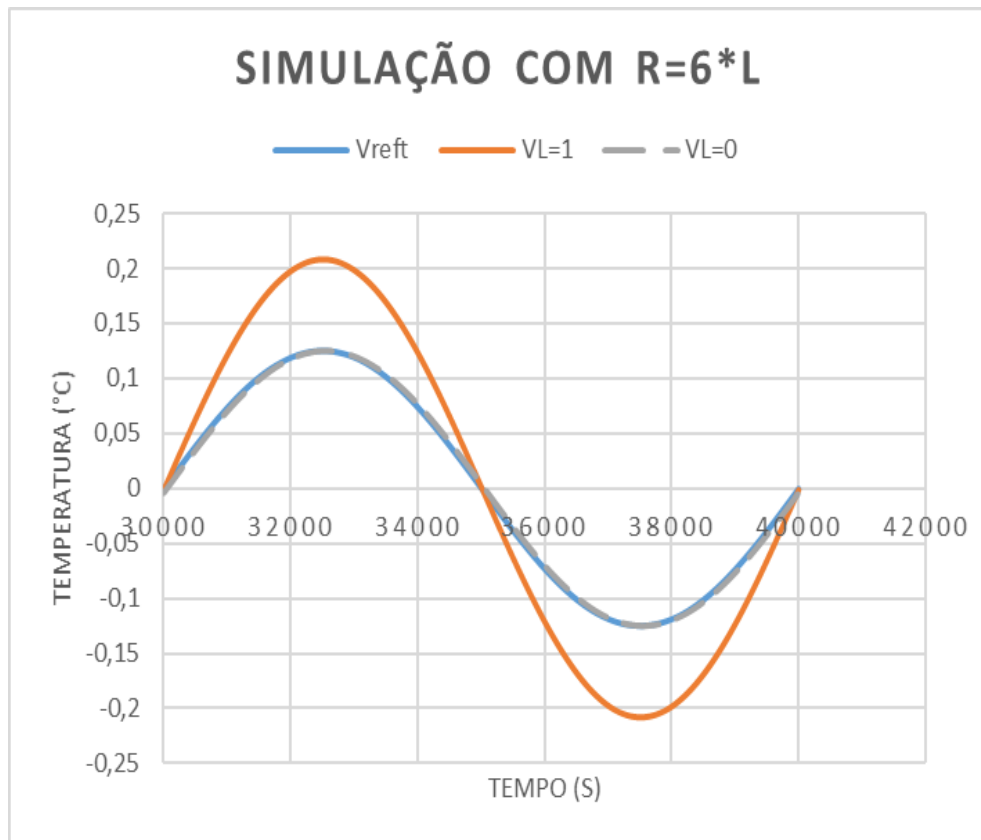


Figura 5.12: Comparação de resultados via NSM quando o raio é seis vezes maior que o comprimento do cilindro

Para o cilindro com um raio 8 vezes maior que o comprimento, pode-se perceber que o fluxo na casca continua diminuindo, o que, nos mostra que cada vez que aumentamos a relação raio / comprimento, o problema vai aproximando-se ao problema unidimensional com fluxo nulo. Vide Figura 5.13.

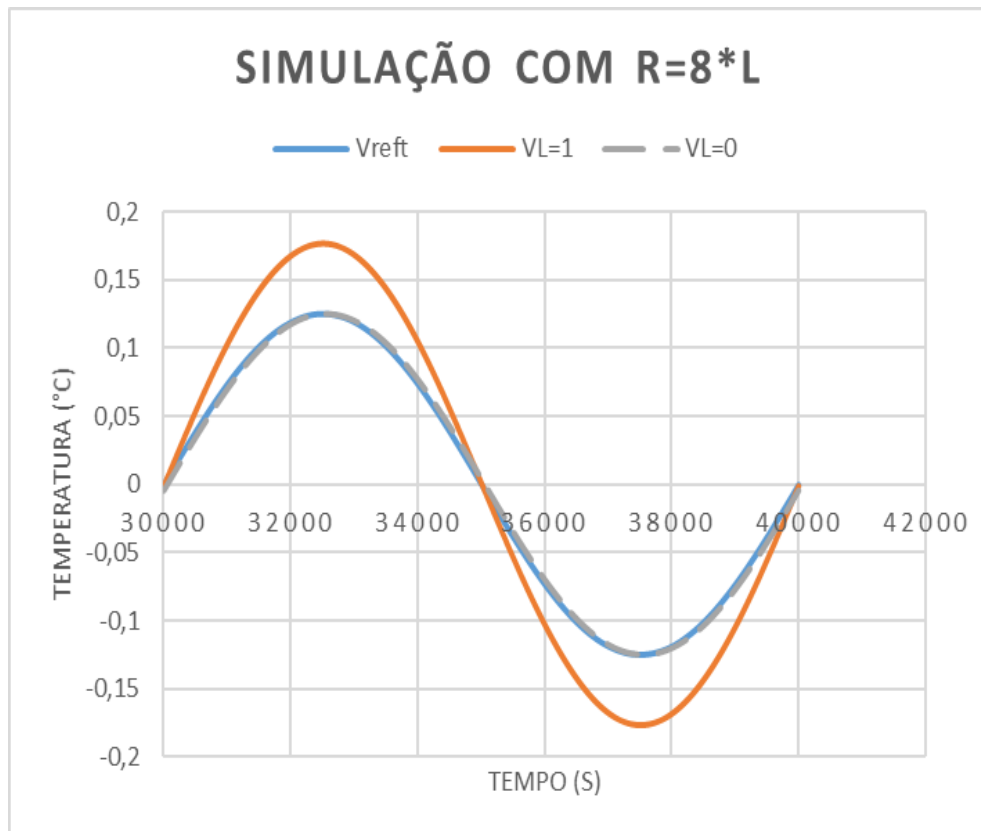


Figura 5.13: Comparação de resultados via NSM quando o raio é oito vezes maior que o comprimento do cilindro

Ao aumentar a relação raio / comprimento para um cilindro que possui um raio 10 vezes maior que o comprimento, percebe-se que a relação está convergindo para o problema unidimensional de segunda espécie. Conforme figura 5.14

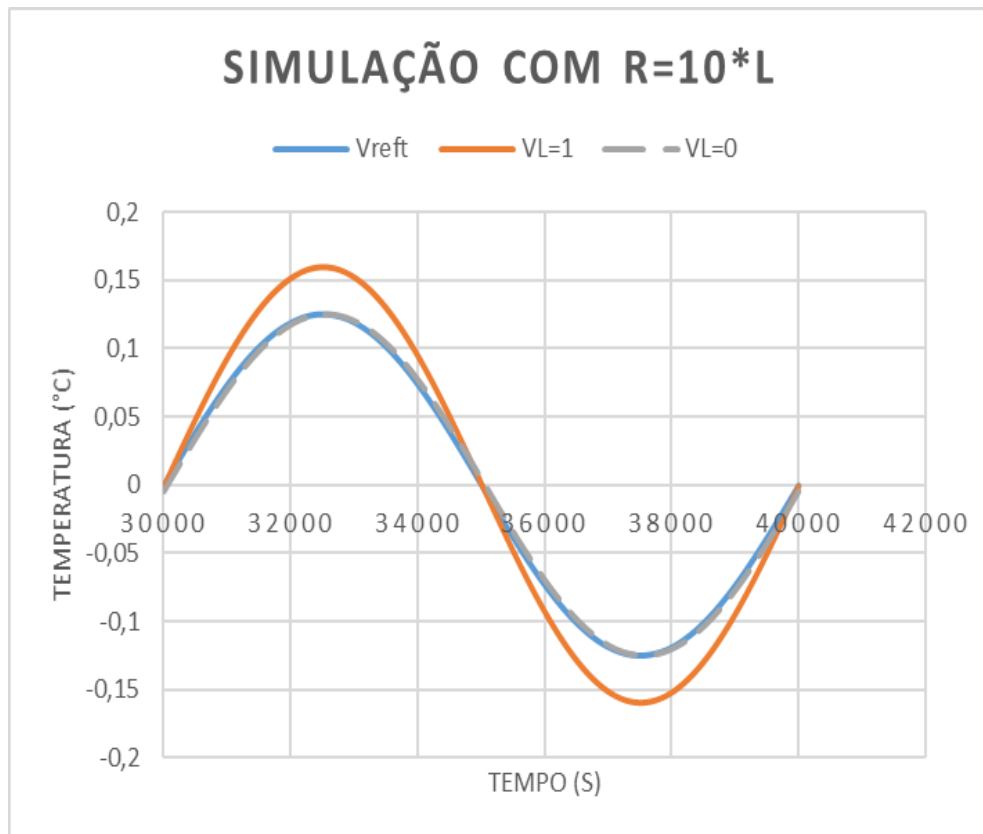


Figura 5.14: Comparação de resultados via NSM quando o raio é dez vezes maior que o comprimento do cilindro.

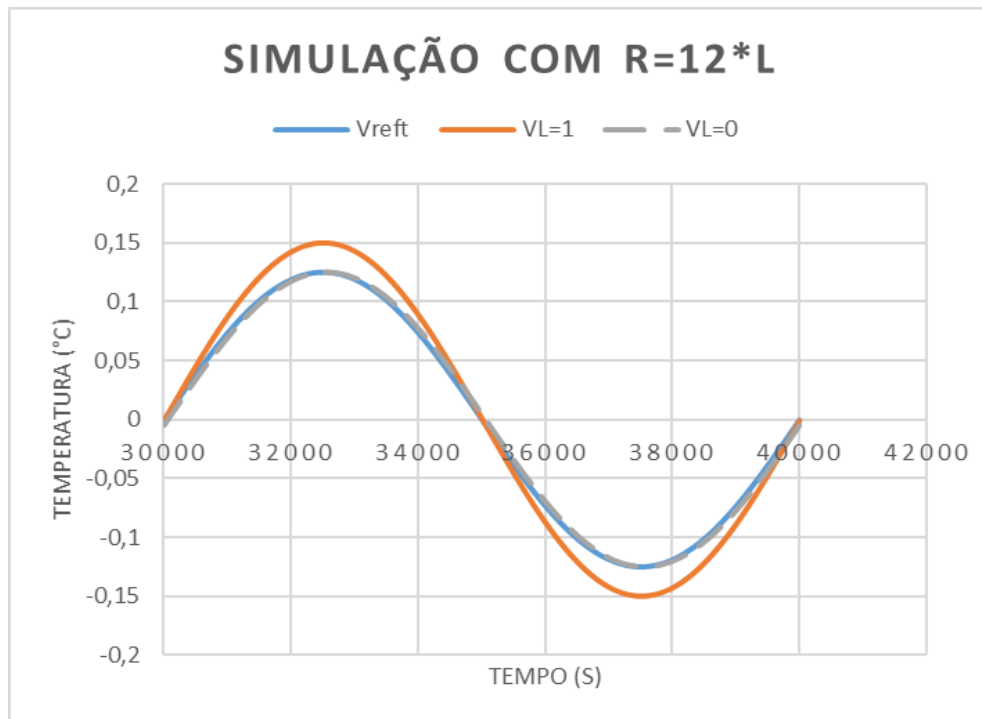


Figura 5.15: Comparação de resultados via NSM quando o raio é doze vezes maior que o comprimento do cilindro.

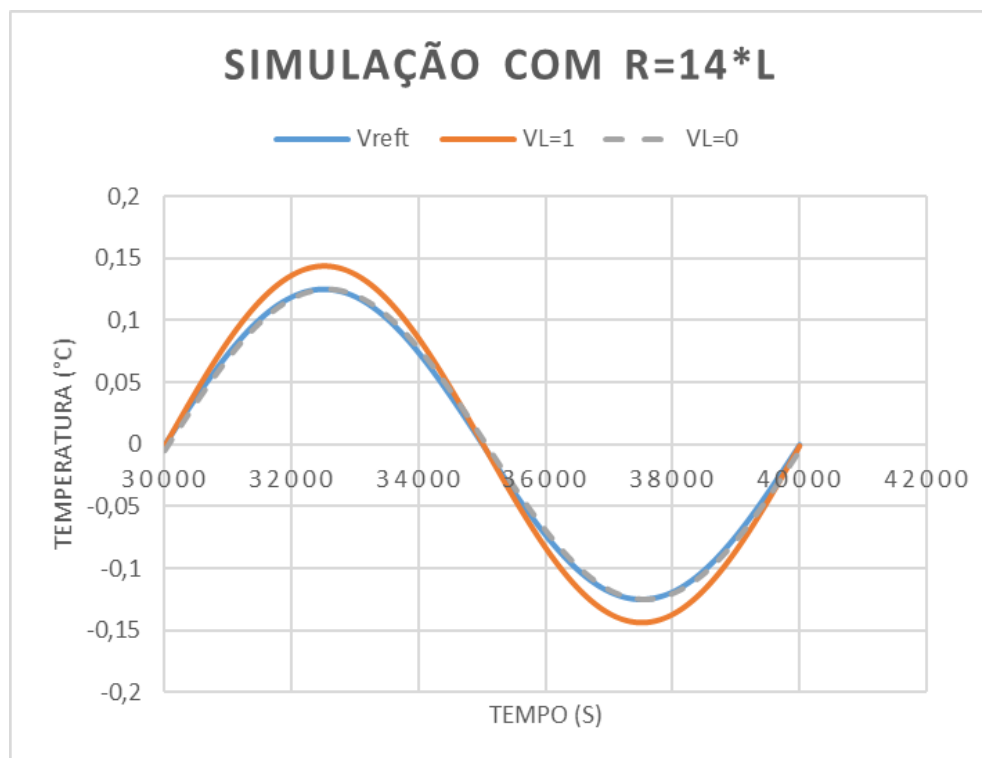


Figura 5.16: Comparação de resultados via NSM quando o raio é quatorze vezes maior que o comprimento do cilindro.

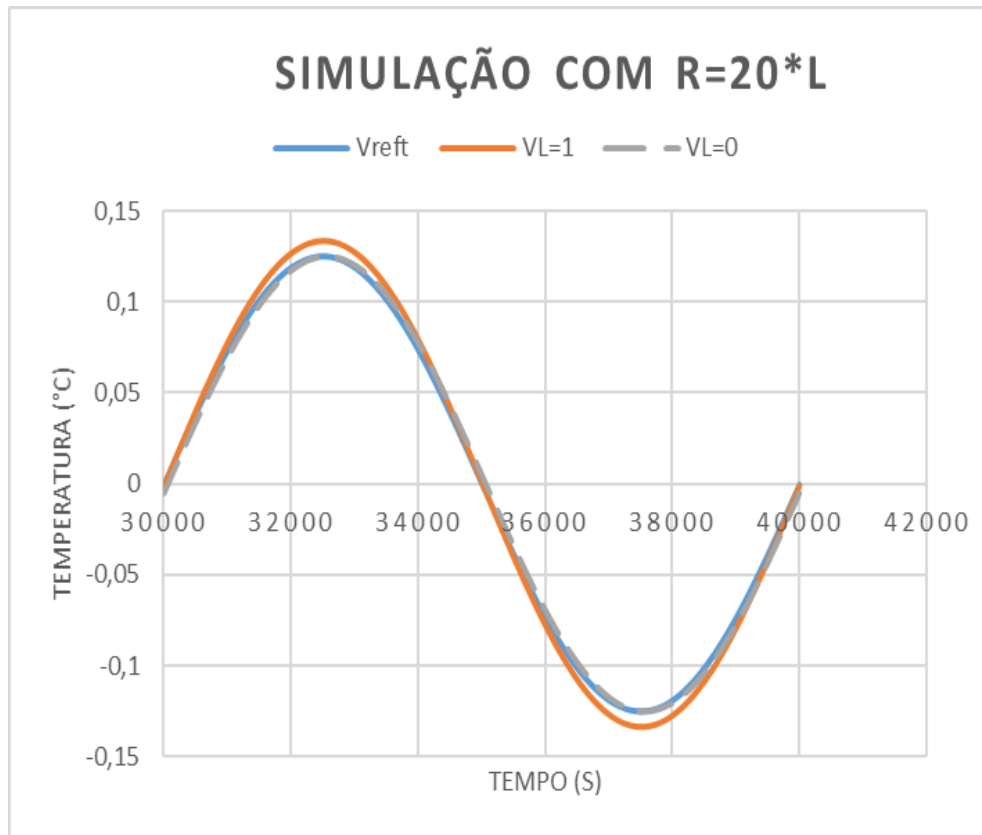


Figura 5.17: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte vezes maior que o comprimento do cilindro.

Pode-se observar, que, quando se tem um raio pelo menos 20 vezes maior que o comprimento, praticamente não há fluxo de calor quando comparamos as medições feitas na casca e no centro do cilindro, onde, podemos considerar o problema bidimensional como um problema unidimensional, conforme pode-se observar nas Figuras 5.17-5.20.

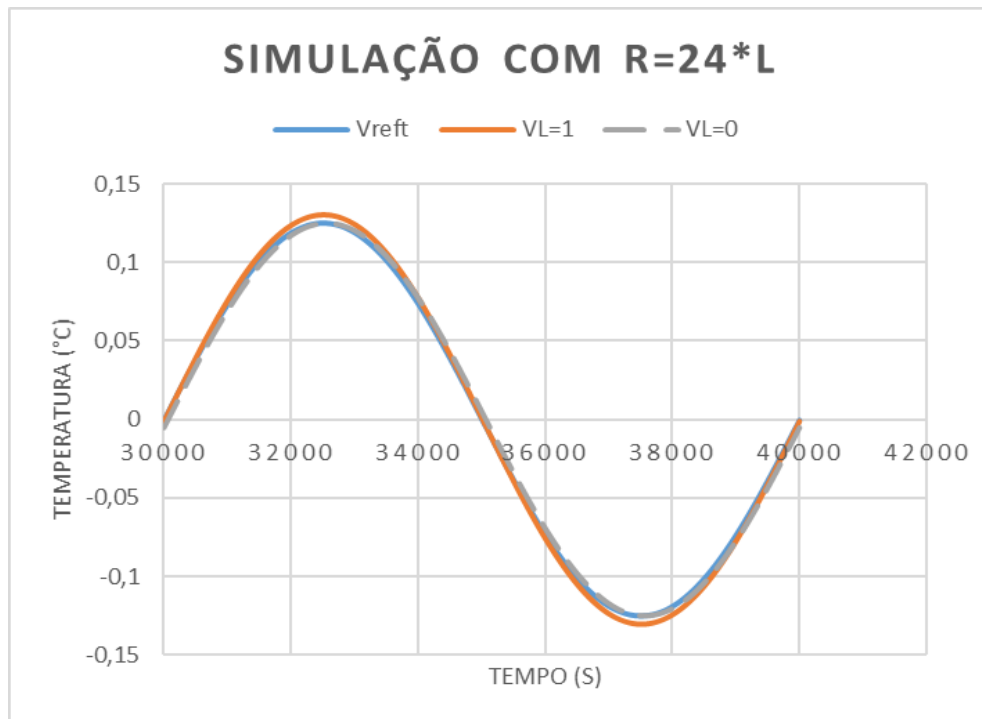


Figura 5.18: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte e quatro vezes maior que o comprimento do cilindro

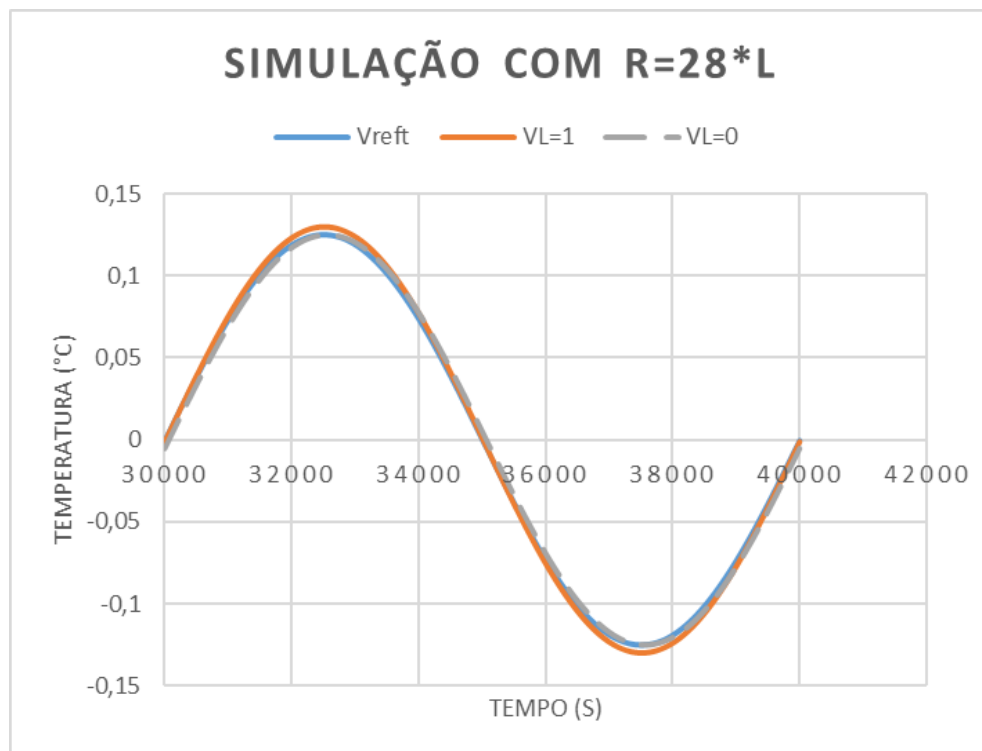


Figura 5.19: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte e oito vezes maior que o comprimento do cilindro

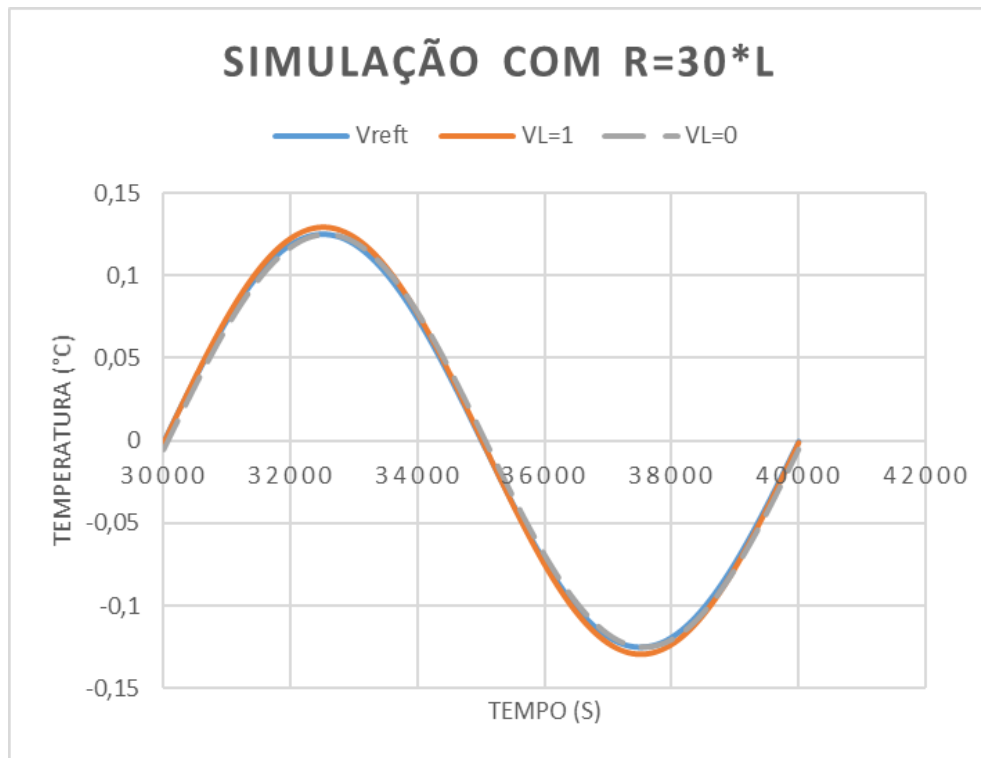


Figura 5.20: Comparação de resultados via NSM quando o raio é trinta vezes maior que o comprimento do cilindro.

5.4 ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA QUANTIDADE DE CÉLULAS

Analisaremos a influência do número de discretizações ou quantidade de divisões. Objetivando este estudo, iremos utilizar os valores adimensionais de $r_0 = 0.15$, $l = 0.005$ o que equivale a um raio 30 vezes maior que o comprimento, com um tempo suficientemente longo (30000s a 40000s), após ser atingido o estado estacionário. Da mesma maneira que os testes anteriores, analisaremos a resposta na posição radial $R = 0$ e nas posições longitudinais adimensionais $L = 0$ e $L = 1$, para diferentes configurações variando a quantidade de divisões. Pode-se observar que nas Figuras 5.21-5.26, tem-se uma discretização com menos divisões, onde os experimentos tiveram 2, 4, 6, 8 e 10 divisões, respectivamente, de modo que, não é possível observar o efeito do comprimento nos resultados obtidos, devido ao experimento ser uma aproximação do modelo unidimensional.

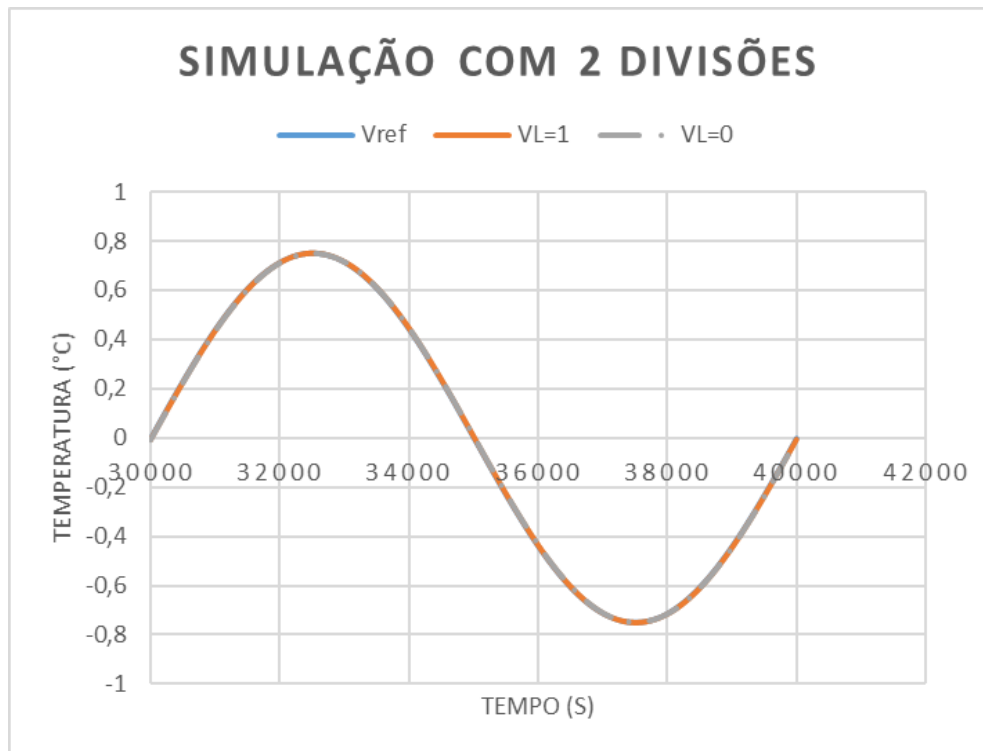


Figura 5.21: Comparação de resultados via NSM com 2 células.

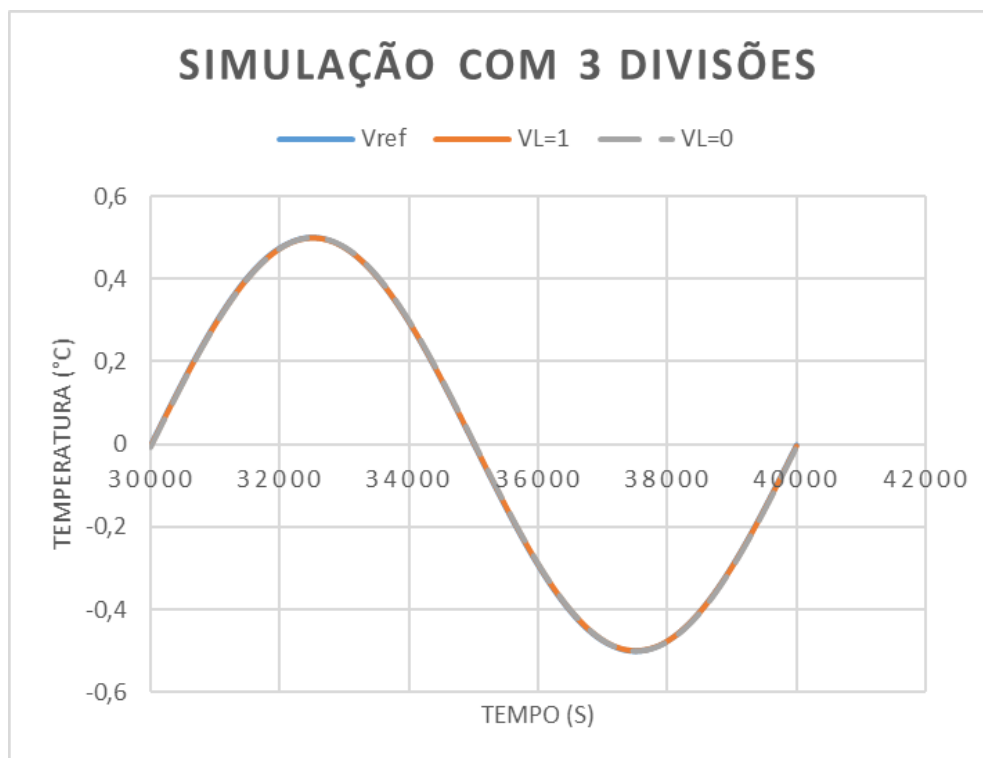


Figura 5.22: Comparação de resultados via NSM com 3 células.

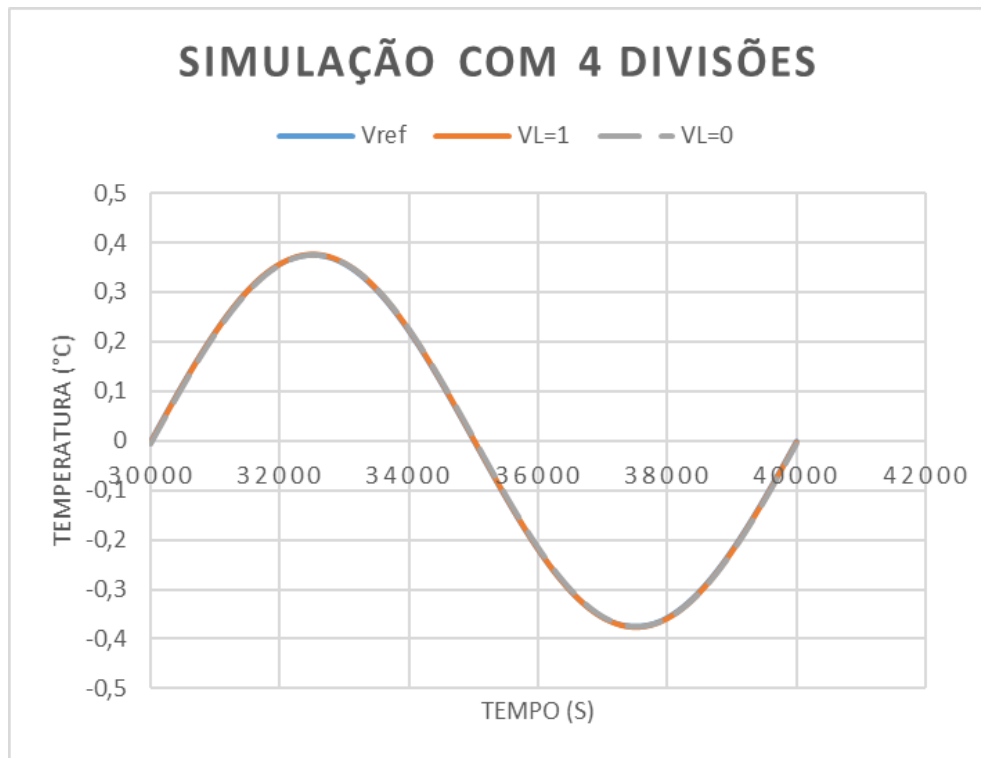


Figura 5.23: Comparação de resultados via NSM com 4 células.

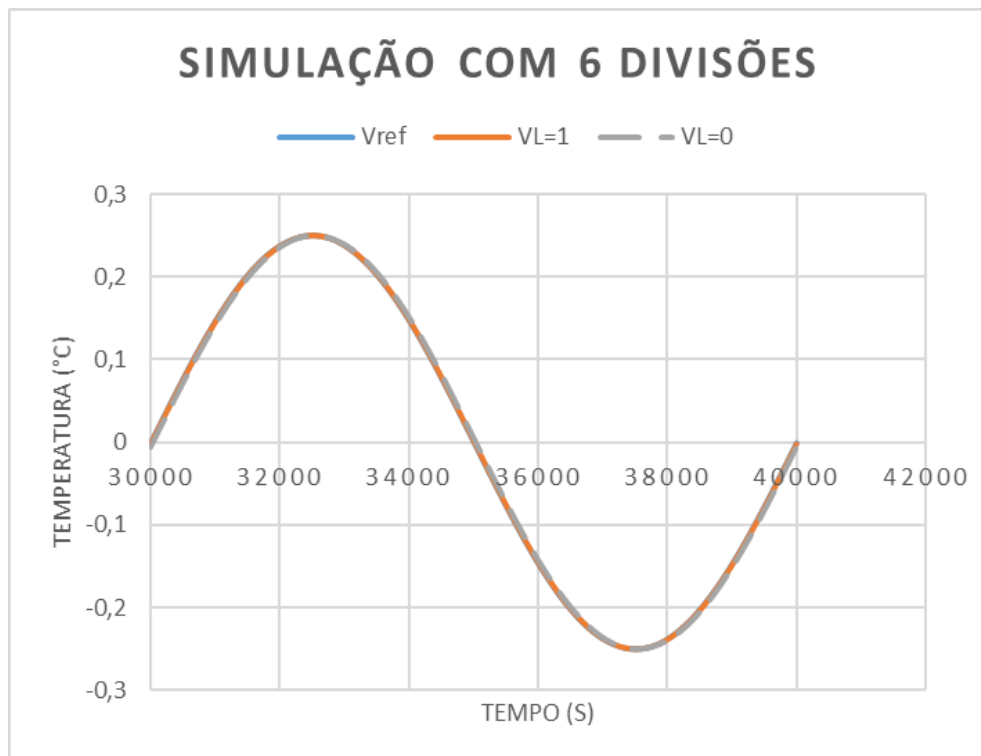


Figura 5.24: Comparação de resultados via NSM com 6 células.

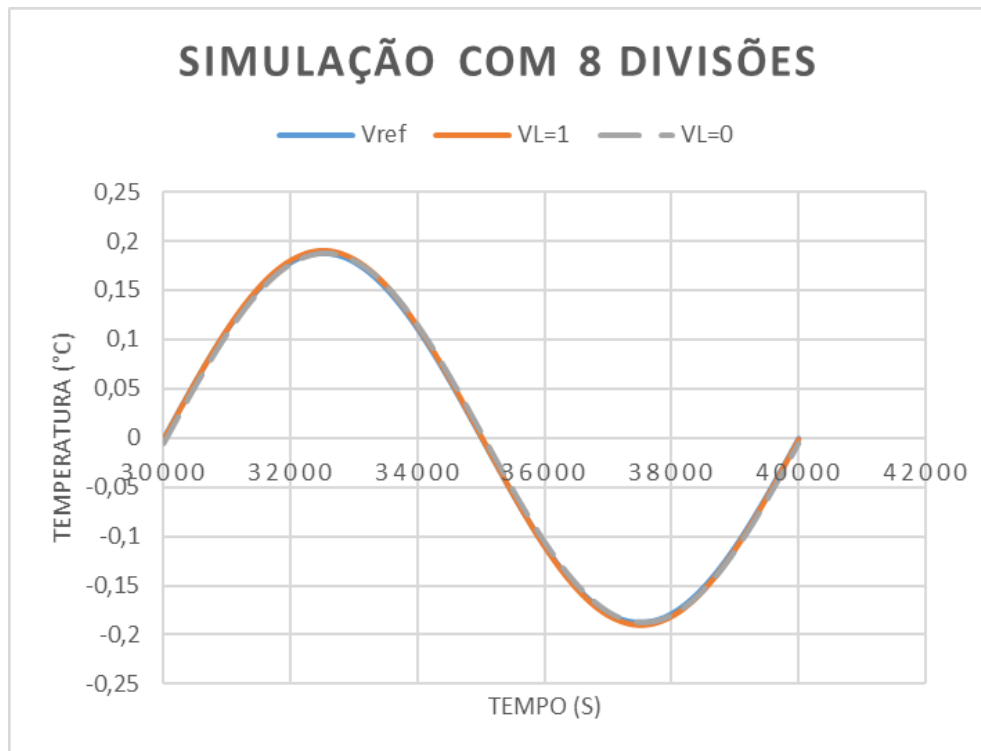


Figura 5.25: Comparação de resultados via NSM com 8 células.

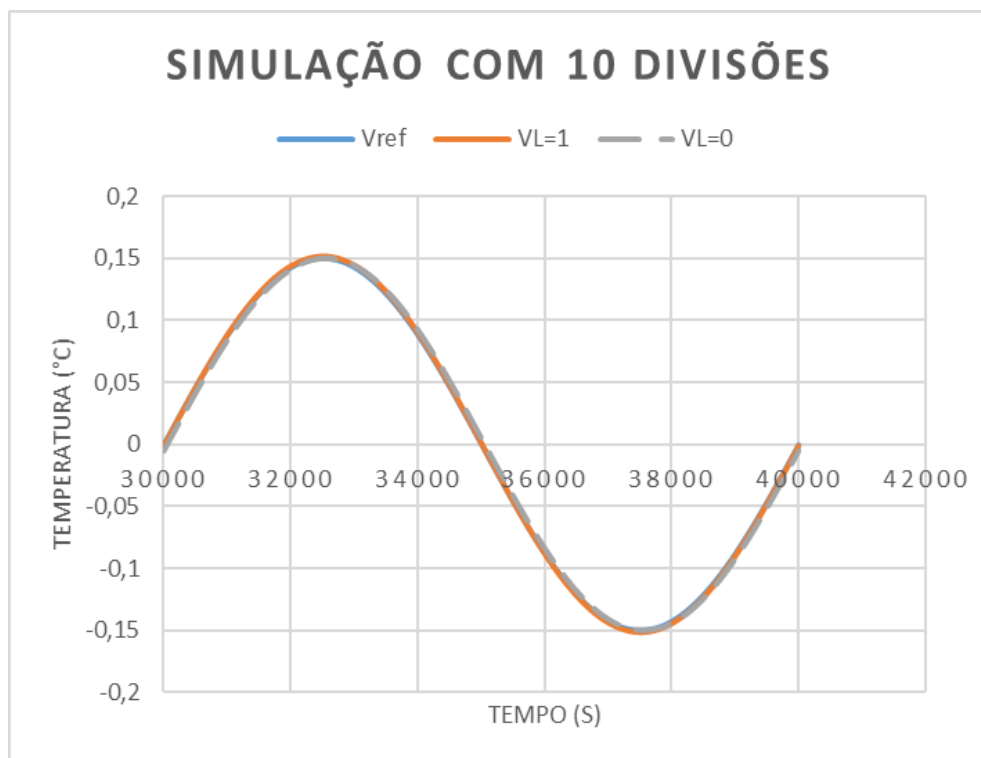


Figura 5.26: Comparação de resultados via NSM com 10 células.

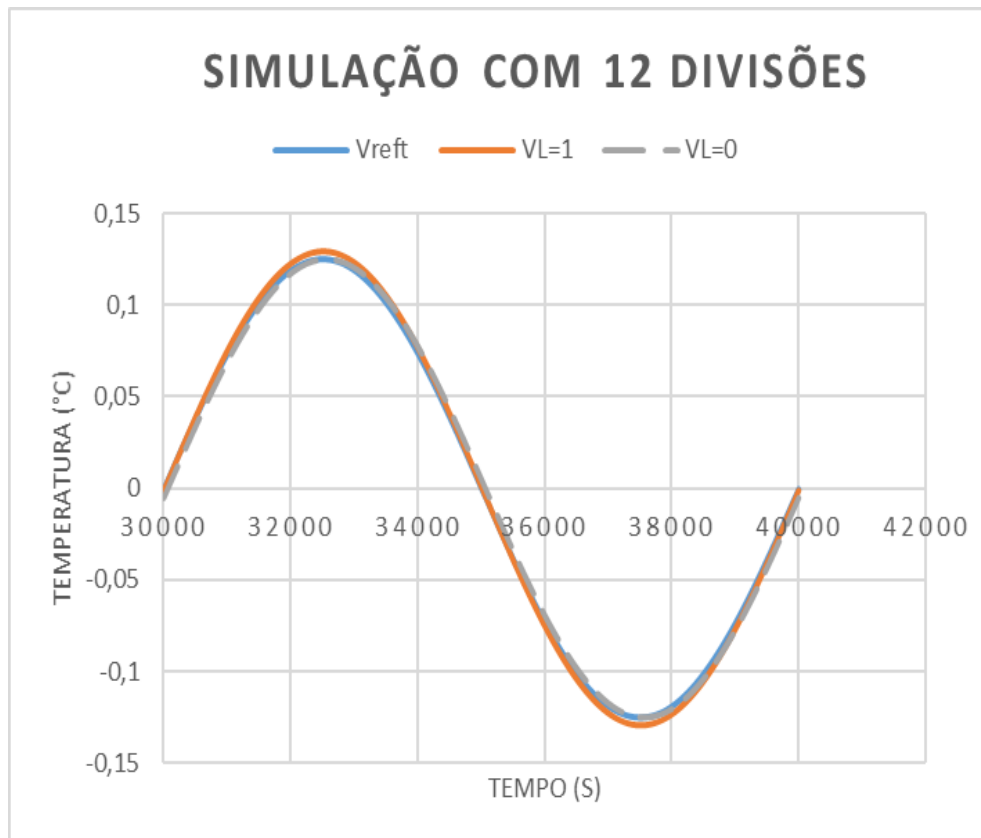


Figura 5.27: Comparação de resultados via NSM com 12 células.

Pode-se observar na Figura 5.27-5.30, que a medida em que a malha é refinada para 12, 14, 20 e 30 divisões, respectivamente, à presença do efeito do comprimento nos resultados, devido o experimento ser um modelo bidimensional aproximado ao um modelo unidimensional.

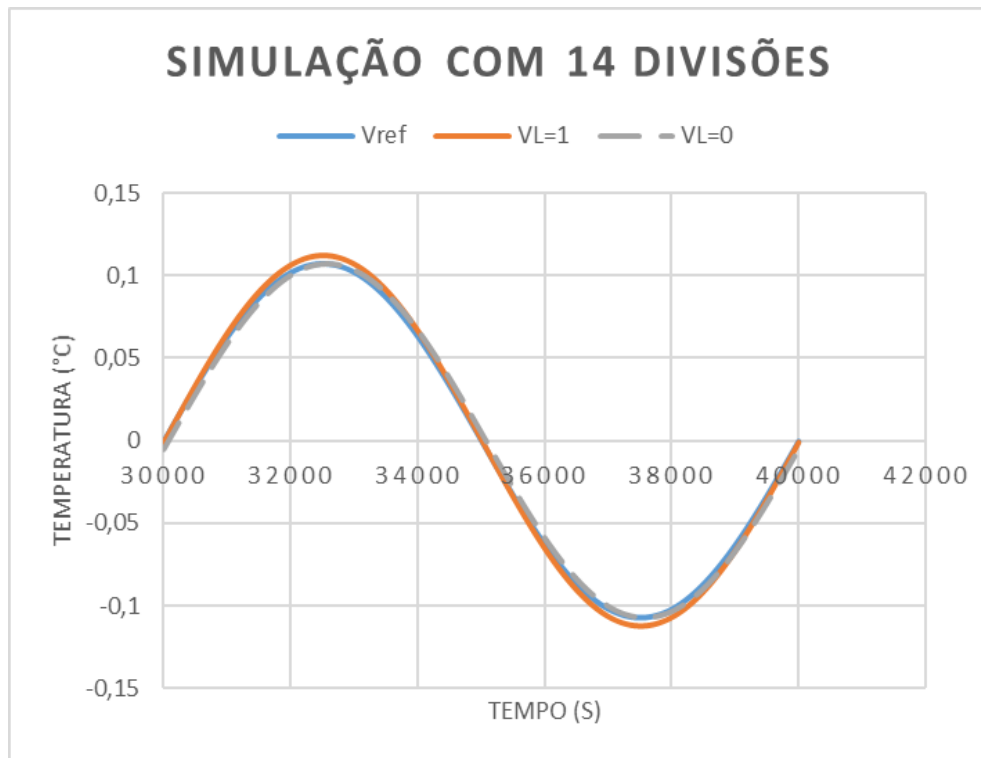


Figura 5.28: Comparação de resultados via NSM com 14 células.

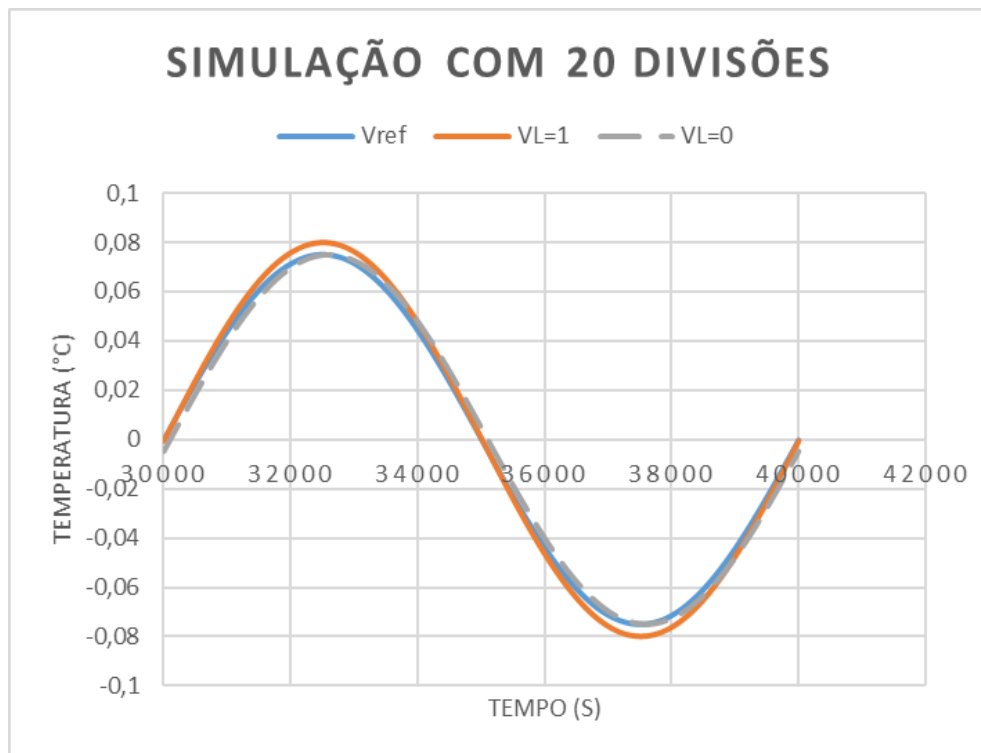


Figura 5.29: Comparação de resultados via NSM com 20 células.

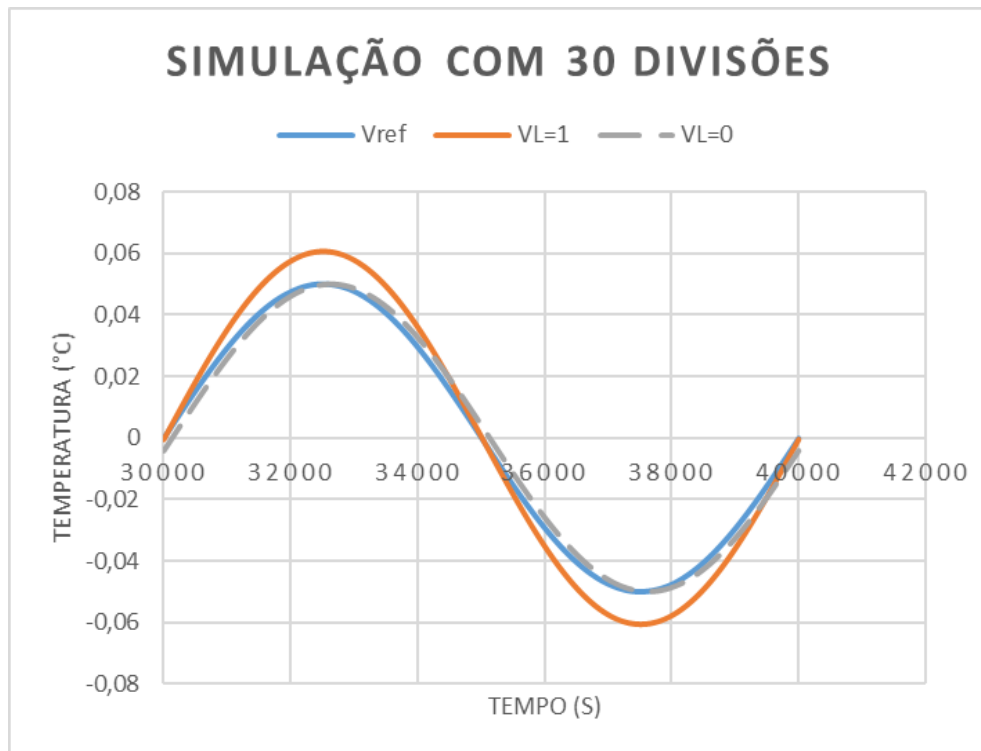


Figura 5.30: Comparação de resultados via NSM com 30 células.

5.5 ANÁLISE DURANTE TRANSIENTE

Inicialmente, para verificar que a malha proposta pelo Método de Simulação de Rede (NSM), é uma malha bidimensional genérica, isto é, a solução é válida para qualquer tipo de problema em coordenadas cilíndricas, utilizaremos o experimento realizado por OLIVEIRA (2010), o qual consiste em um problema unidimensional de primeira espécie transiente em geometria cilíndrica, em que a temperatura é imposta no contorno lateral. O problema que servirá como base para a análise da malha genérica, foi validado mediante a comparação entre o resultado analítico, os resultados obtidos via NSM e os resultados experimentais. Por se tratar de uma análise unidimensional radial, utilizaremos, inicialmente, um cilindro de raio não muito maior que o comprimento, $r_0 = 0.005 \text{ m}$ e iremos alterar o comprimento do cilindro, de modo a observar quando o modelo bidimensional poderá ser aproximado pelo unidimensional. Observa-se que nas Figuras 5.31 e 5.32, para um problema de temperatura prescrita, isto é, a temperatura não varia em

todo o cilindro para um cilindro de comprimento 2 e 4 vezes maiores que o raio, há uma diferença de temperatura nas extremidades do cilindro.

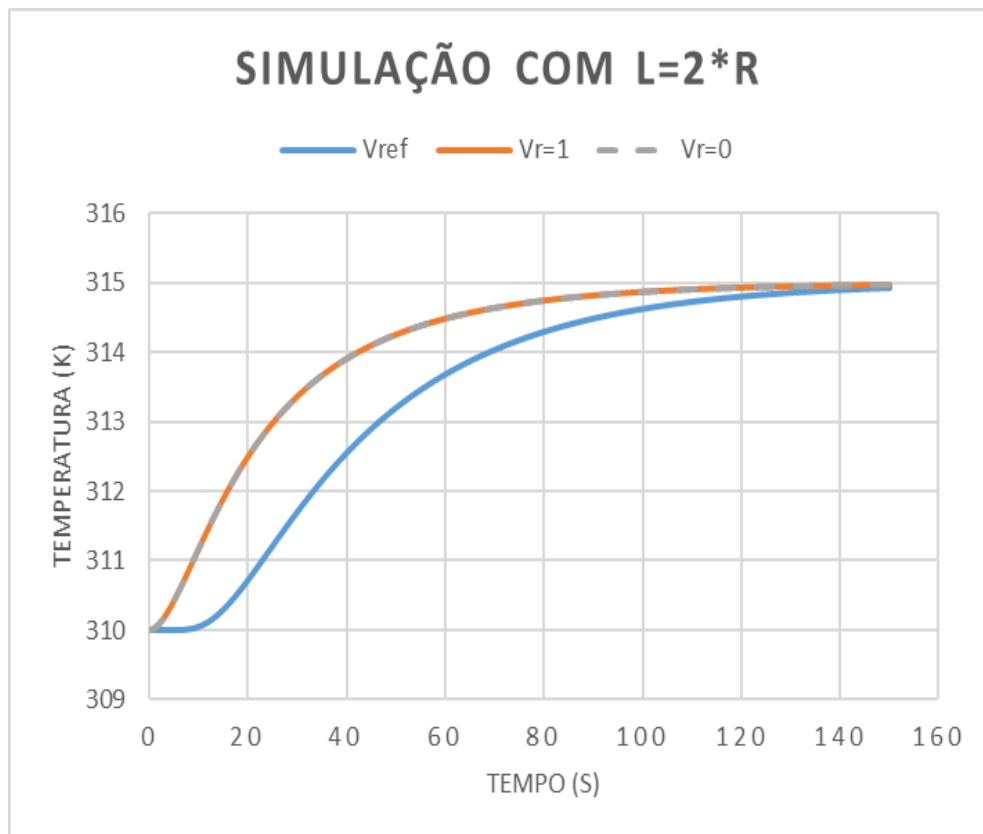


Figura 5.31: Análise transiente da influência da relação comprimento 2 vezes maior que o raio.

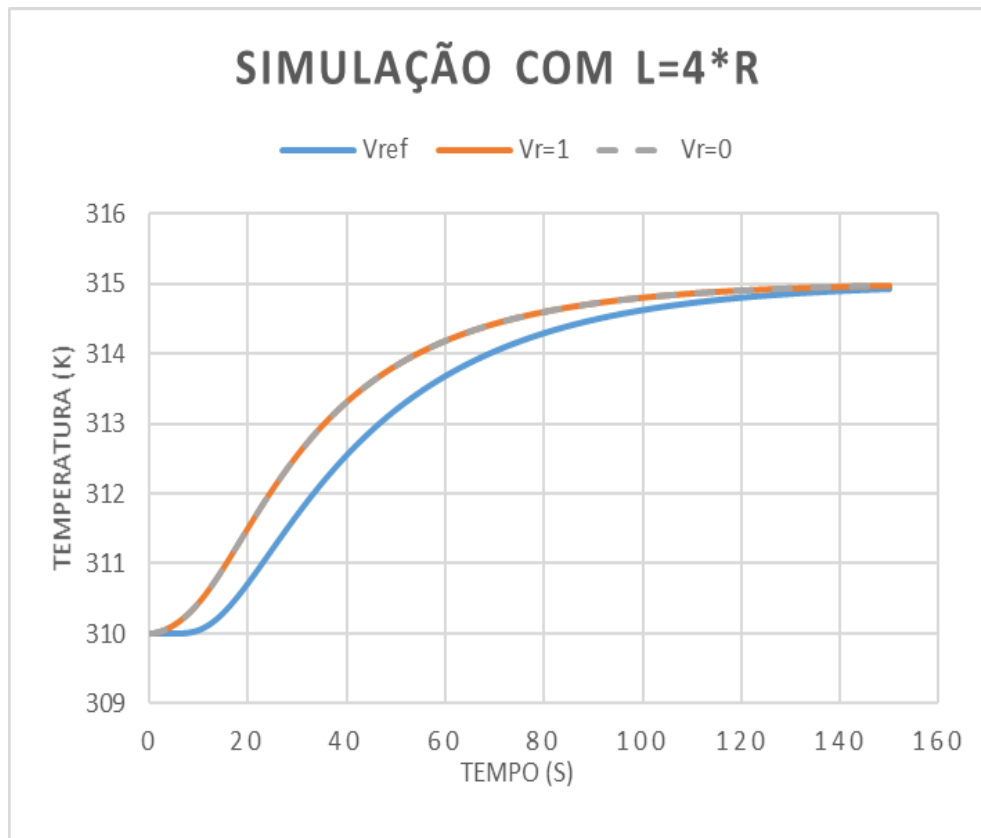


Figura 5.32: Análise transiente da influência da relação comprimento 4 vezes maior que o raio

Quando se utiliza uma diferença de comprimento 6 vezes maior que o raio do cilindro, pode-se observar que diminui a diferença de temperatura nas extremidades do cilindro, conforme Figura 5.33.

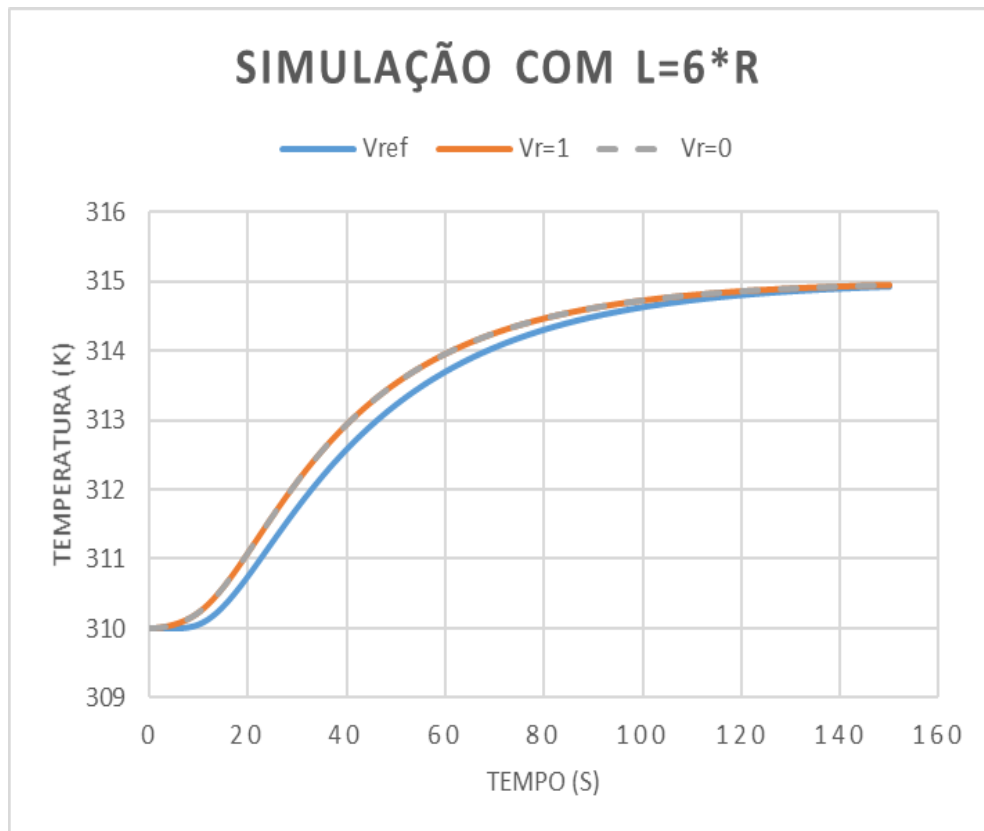


Figura 5.33: Análise transiente da influência da relação comprimento 6 vezes maior que o raio.

Ao utilizar um comprimento com no mínimo 8 vezes maior que o raio, pode-se observar que o problema bidimensional, se comporta como um problema unidimensional, onde, as temperaturas nas suas extremidades não variam. Vide Figuras 5.34-5.37.

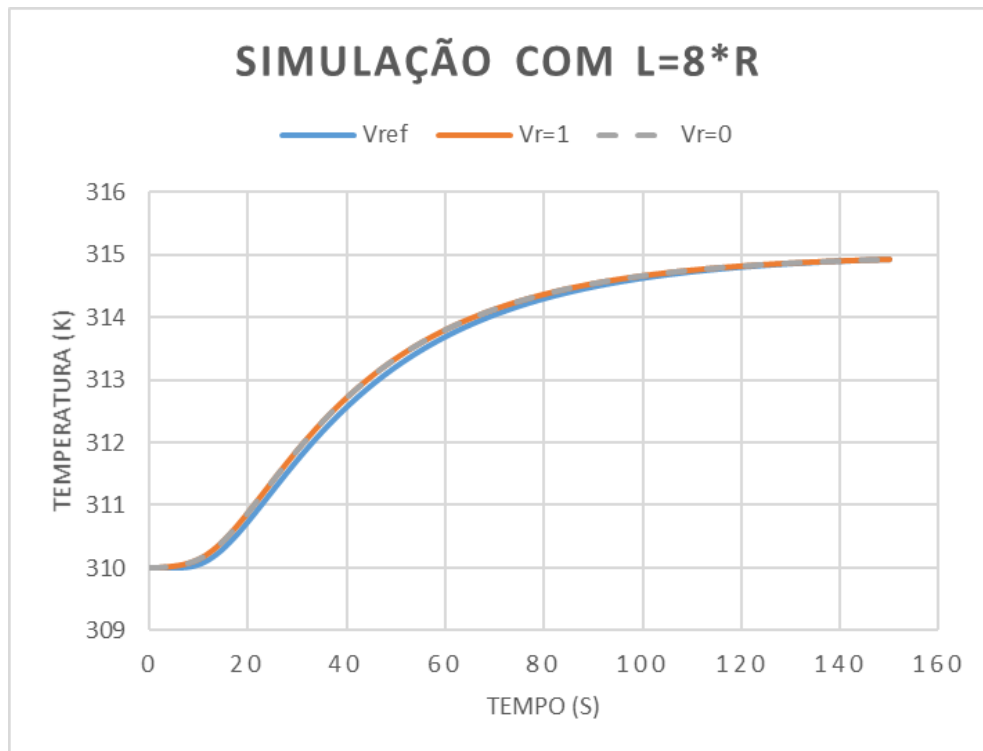


Figura 5.34: Análise transiente da influência da relação comprimento 8 vezes maior que o raio

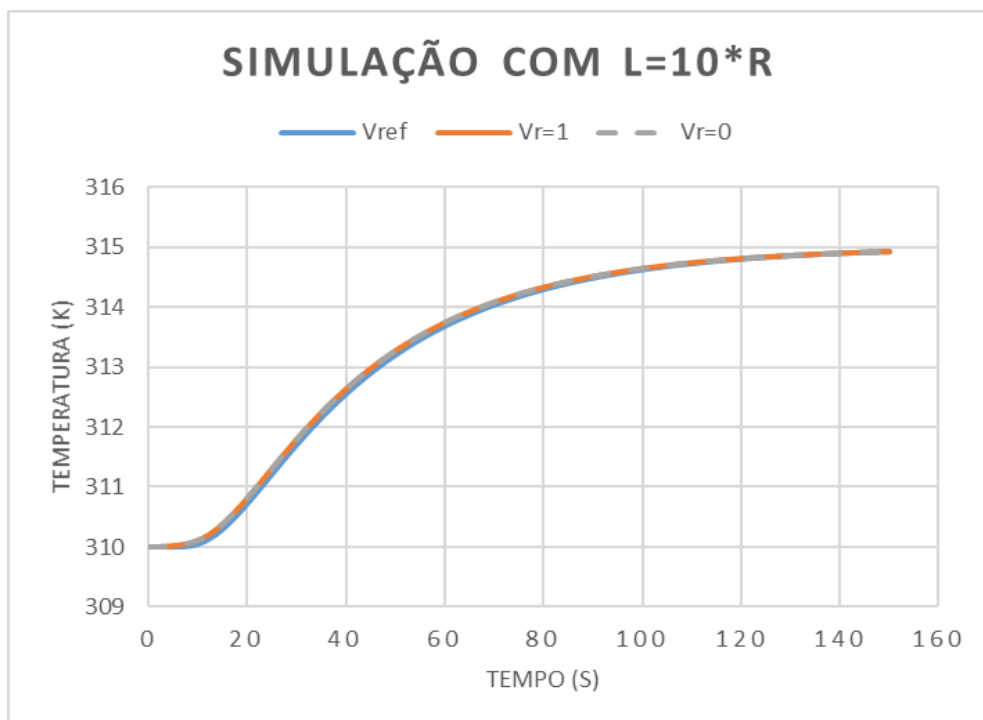


Figura 5.35: Análise transiente da influência da relação comprimento 10 vezes maior que o raio

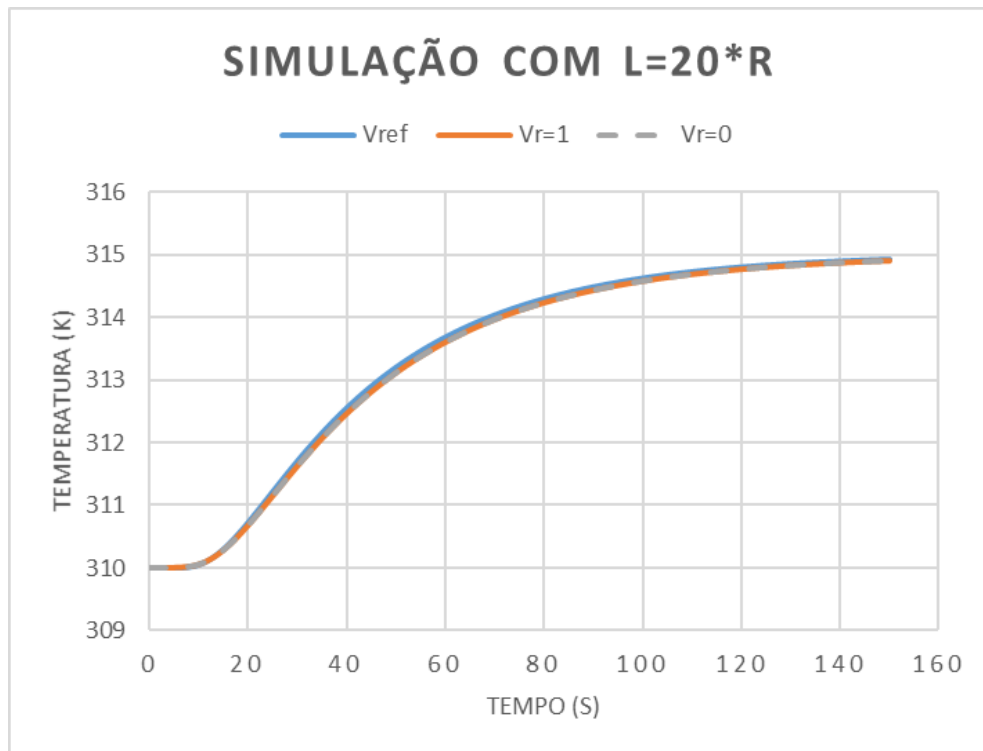


Figura 5.36: Análise transiente da influência da relação comprimento 20 vezes maior que o raio

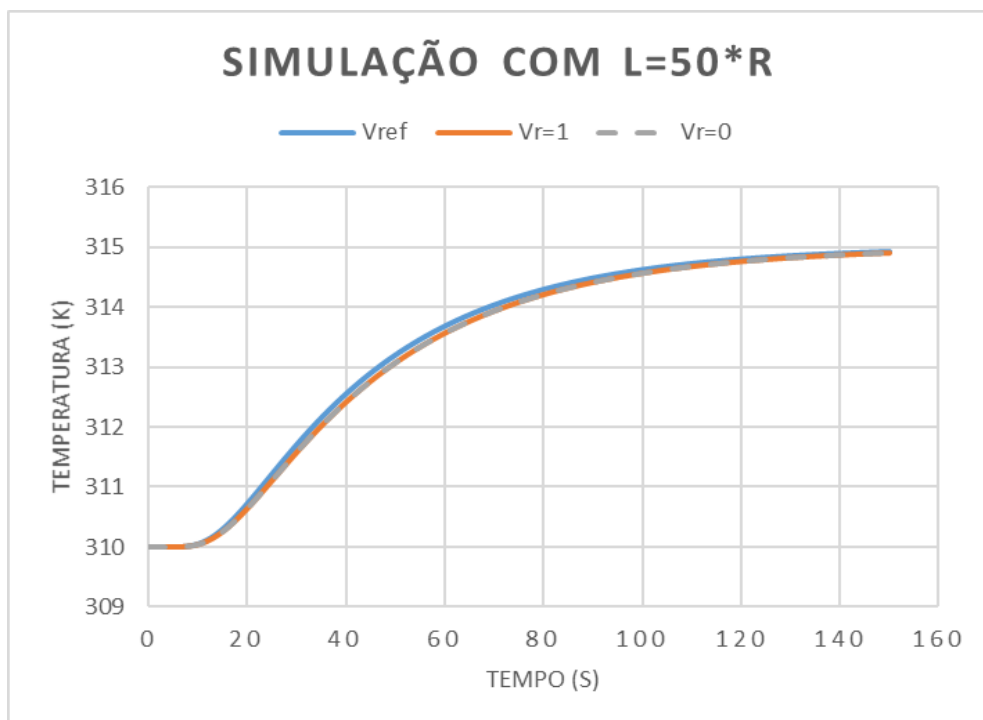


Figura 5.37: Análise transiente da influência da relação comprimento 50 vezes maior que o raio

5.5.1 Análise da Influência da Quantidade de Divisões Durante Transiente

De modo análogo aos testes realizados para o problema em regime permanente, iremos também observar a influência da discretização, ou seja, quantidade de divisões em que o raio e/ou o comprimento são fracionados no modelamento. Para realizar esta análise, adotaremos os valores $r_0 = 0.005 \text{ m}$ e $l = 0.25 \text{ m}$, de tal maneira que o problema proposto será, novamente, aproximado pelo modelo unidimensional, pois, a diferença entre o comprimento e o raio do cilindro é suficientemente grande. Como visto na seção anterior, quando um cilindro possui um comprimento de pelo menos 10 vezes maior que o raio, já se pode considerar o problema como unidimensional. Por se tratar de um problema transiente, iremos analisar o fenômeno durante um intervalo curto de tempo (150s iniciais), em seguida, variaremos a quantidade de células para obtermos a resposta. Pode-se perceber conforme aumenta-se o número de divisões, existe a aproximação das curvas de temperatura do modelo proposto com a curva de temperatura de referência.

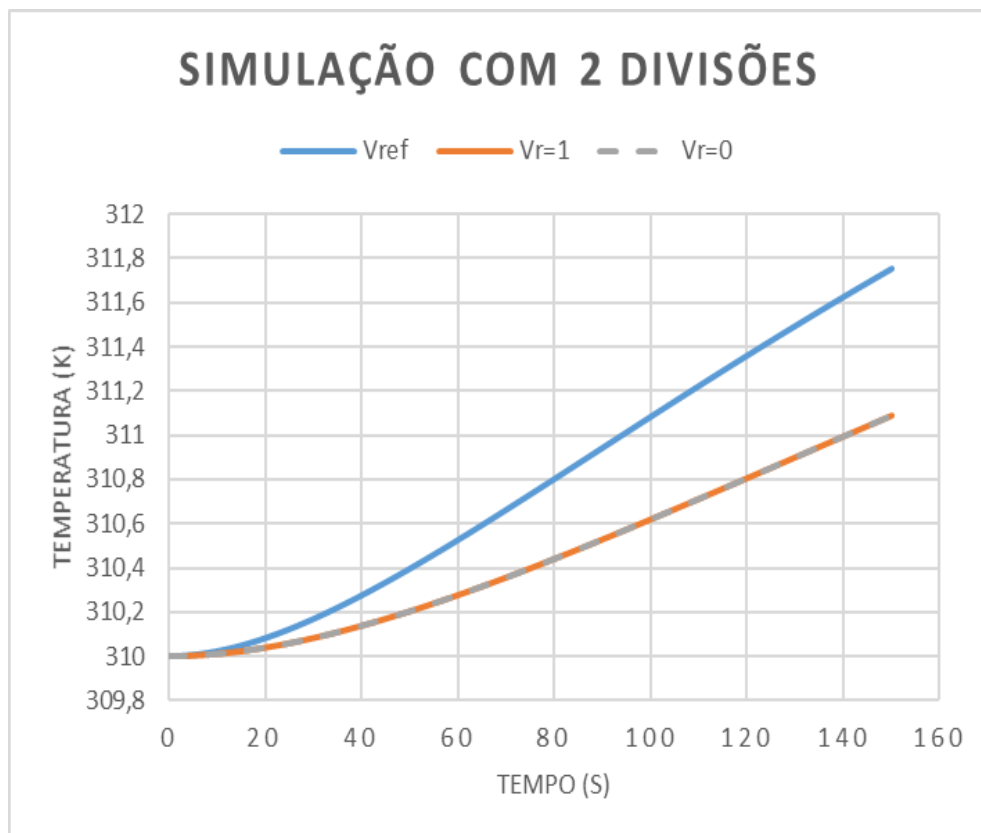


Figura 5.38: Análise transiente da malha com 2 células

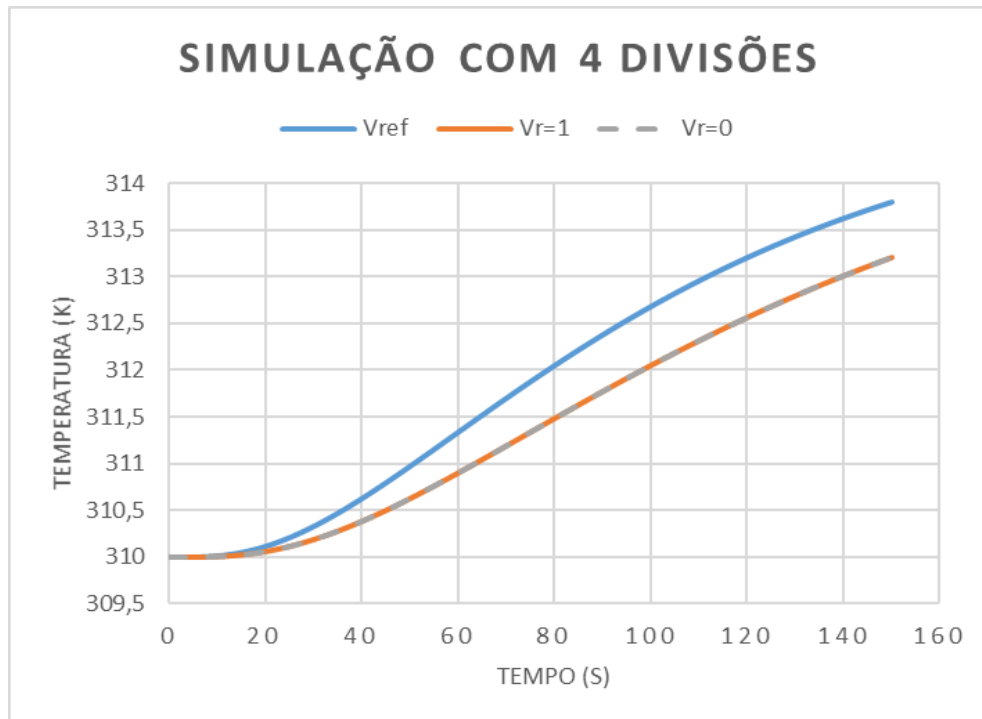


Figura 5.39: Análise transiente da malha com 4 células

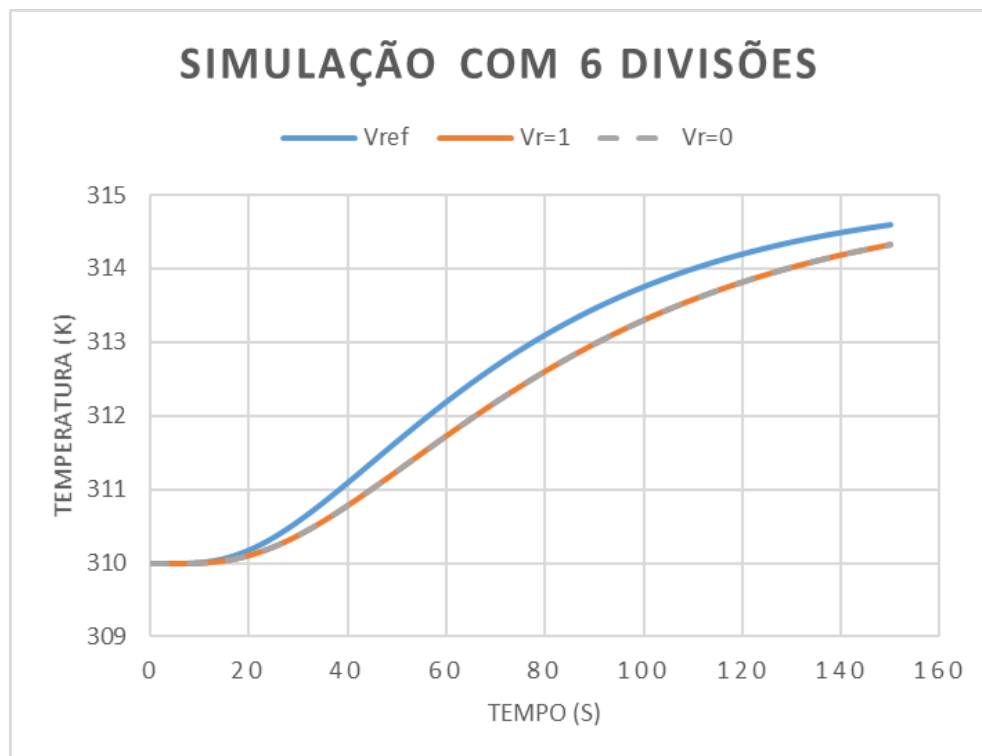


Figura 5.40: Análise transiente da malha com 6 células

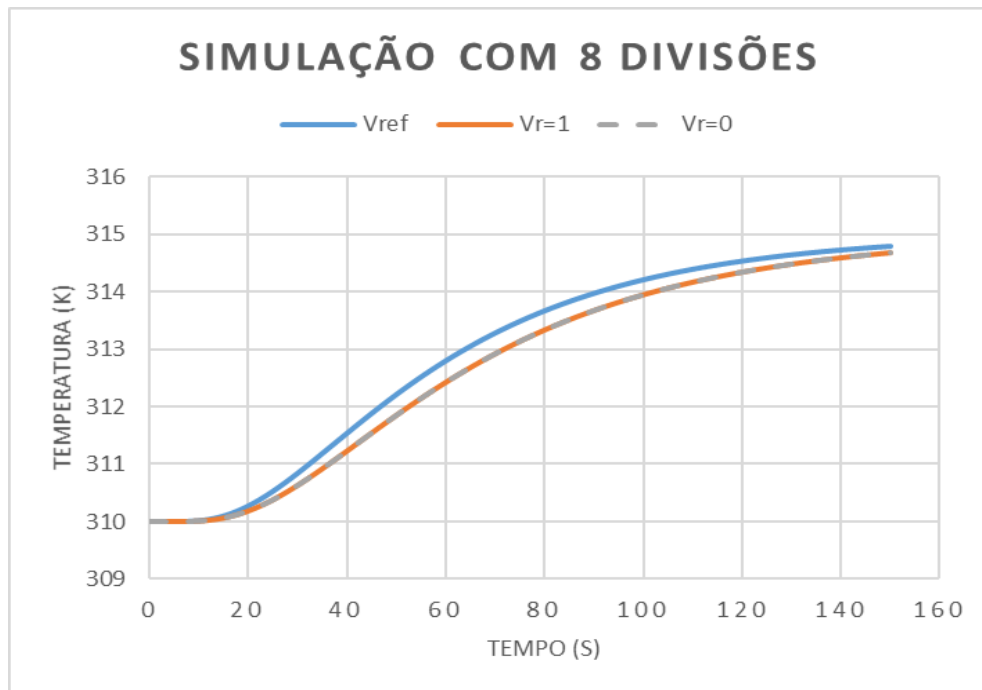


Figura 5.41: Análise transiente da malha com 8 células

É possível perceber que quando temos 8 divisões as curvas estão bastante próximas e a cada incremento na quantidade de divisões, as curvas tendem a se aproximarem cada vez mais. Vide Figuras 5.41-5.44

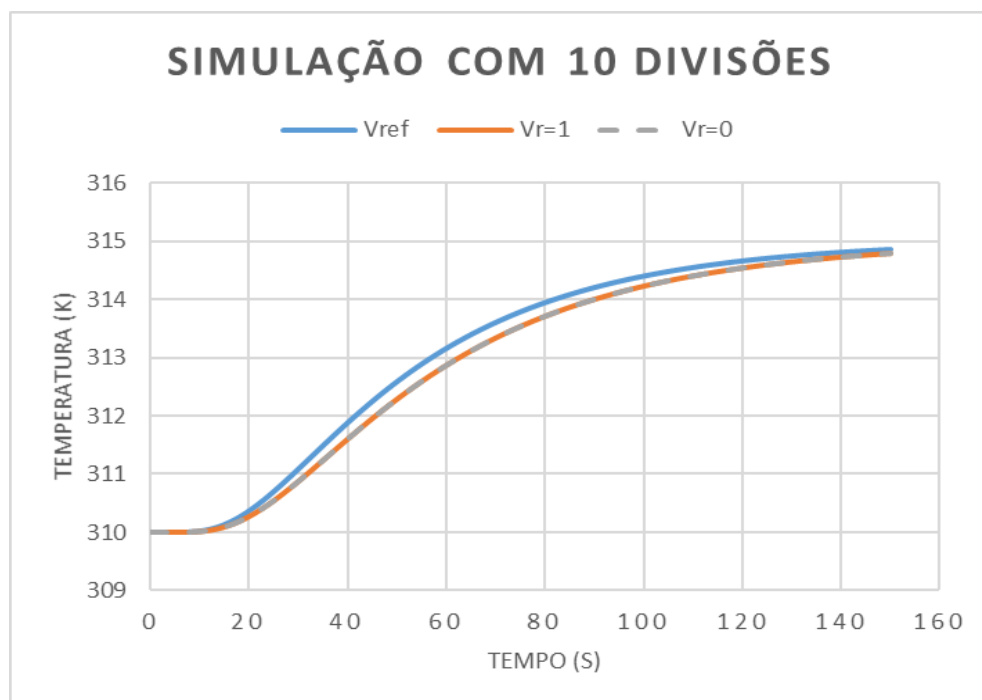


Figura 5.42: Análise transiente da malha com 10 células

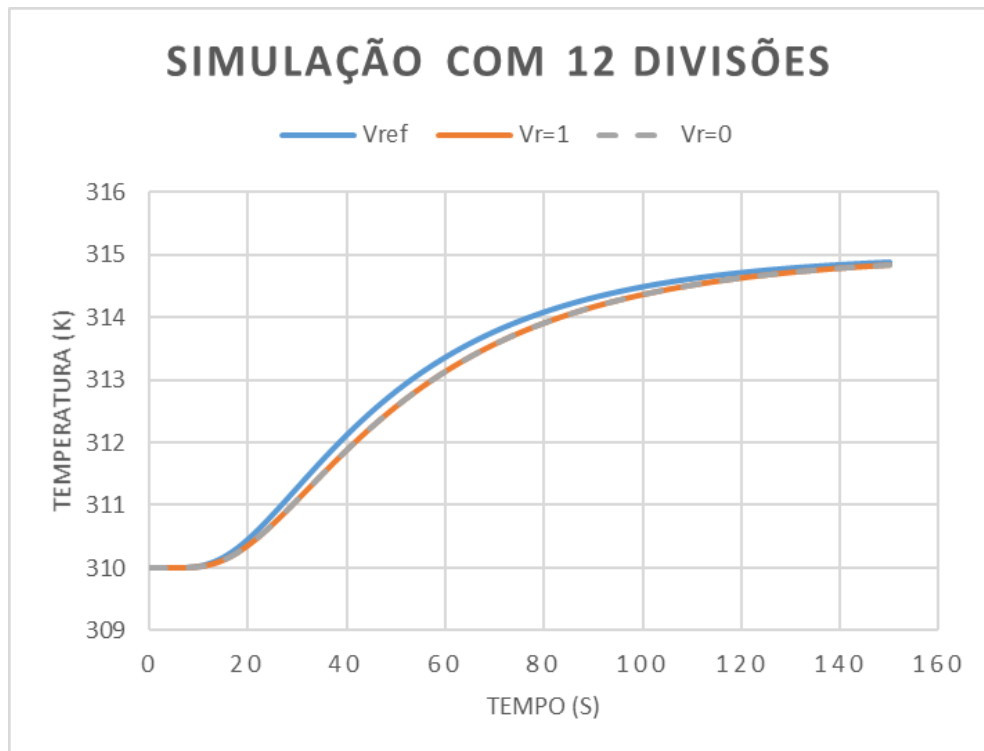


Figura 5.43: Análise transiente da malha com 12 células

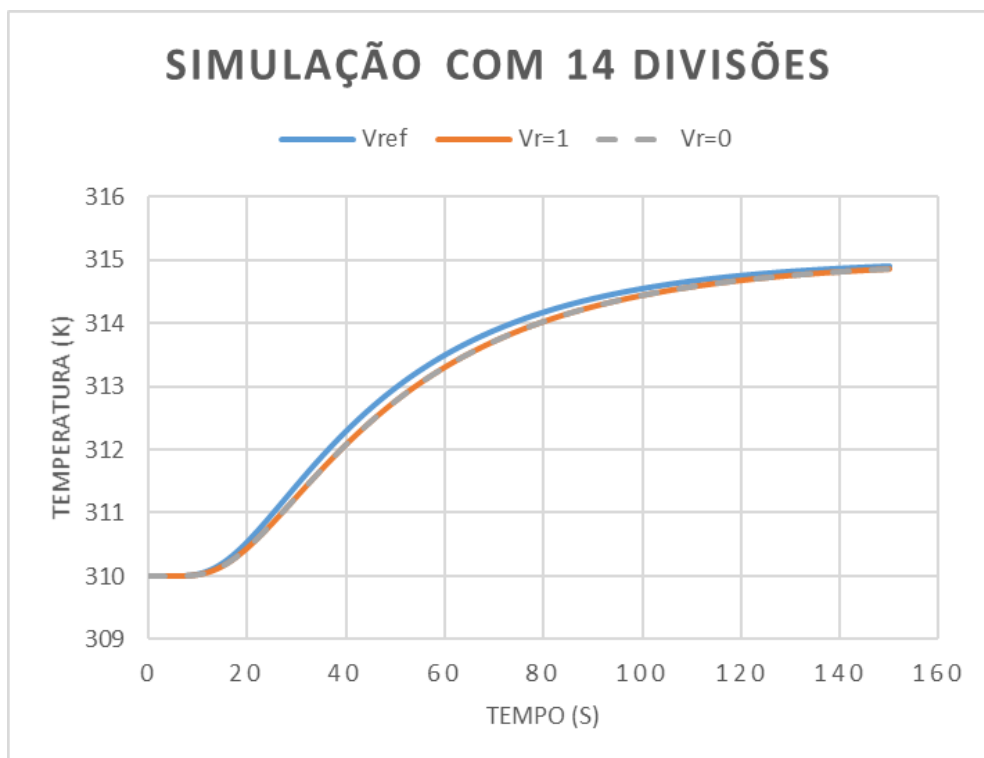


Figura 5.44: Análise transiente da malha com 14 células

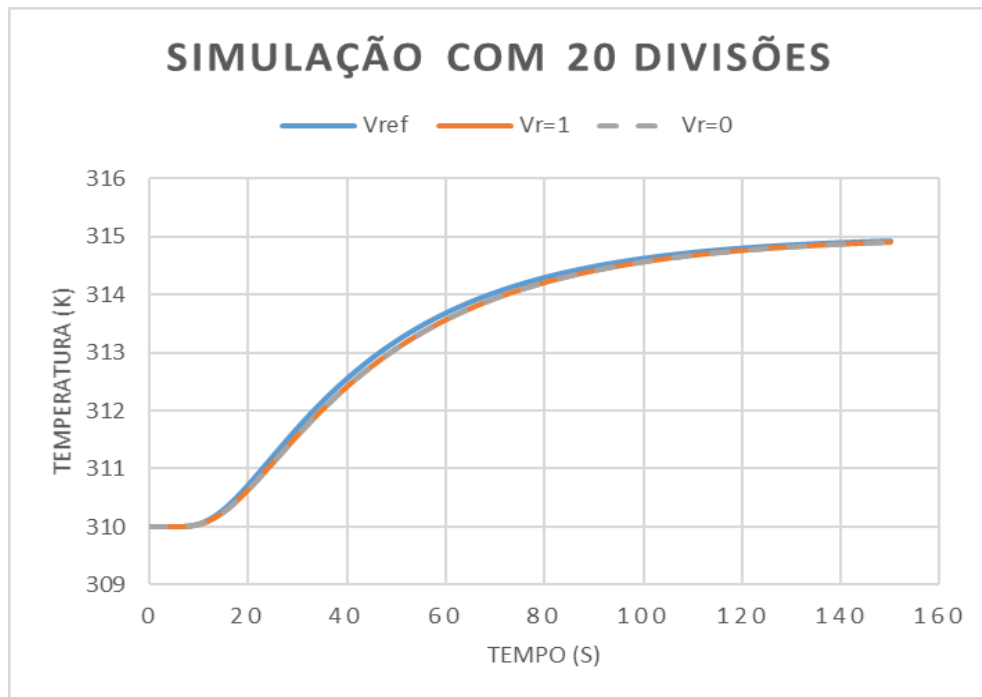


Figura 5.45: Análise transiente da malha com 20 células

Nas Figuras 5.45-5.47, pode-se observar que as curvas de referência e medida estão sobrepostas, onde, pode-se perceber que com 20 divisões, chega-se a um modelo próximo ao ideal.

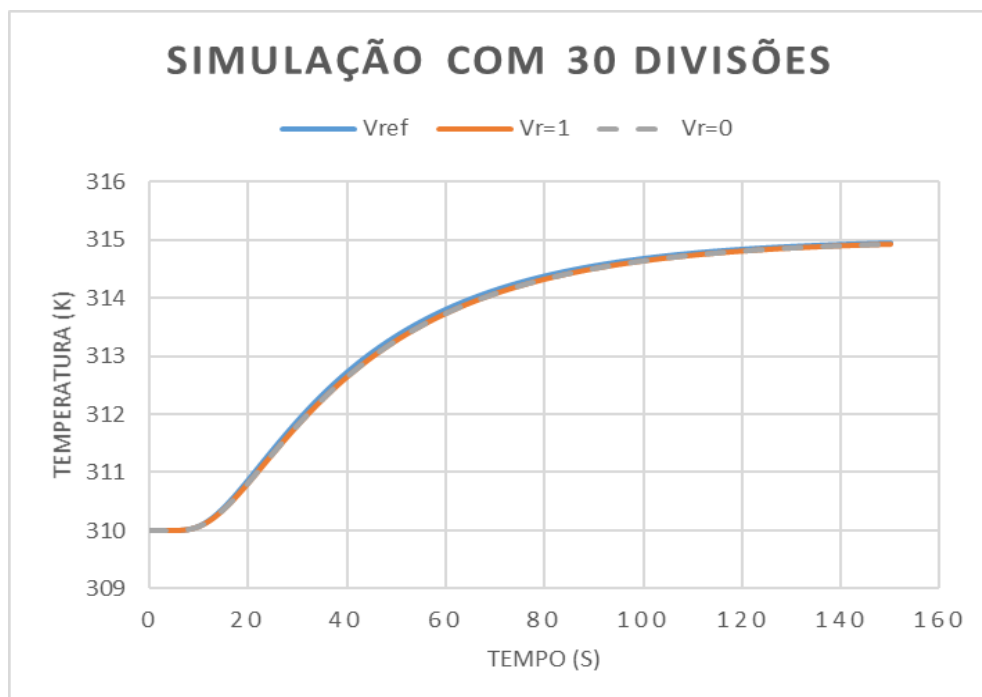


Figura 5.46: Análise transiente da malha com 30 células

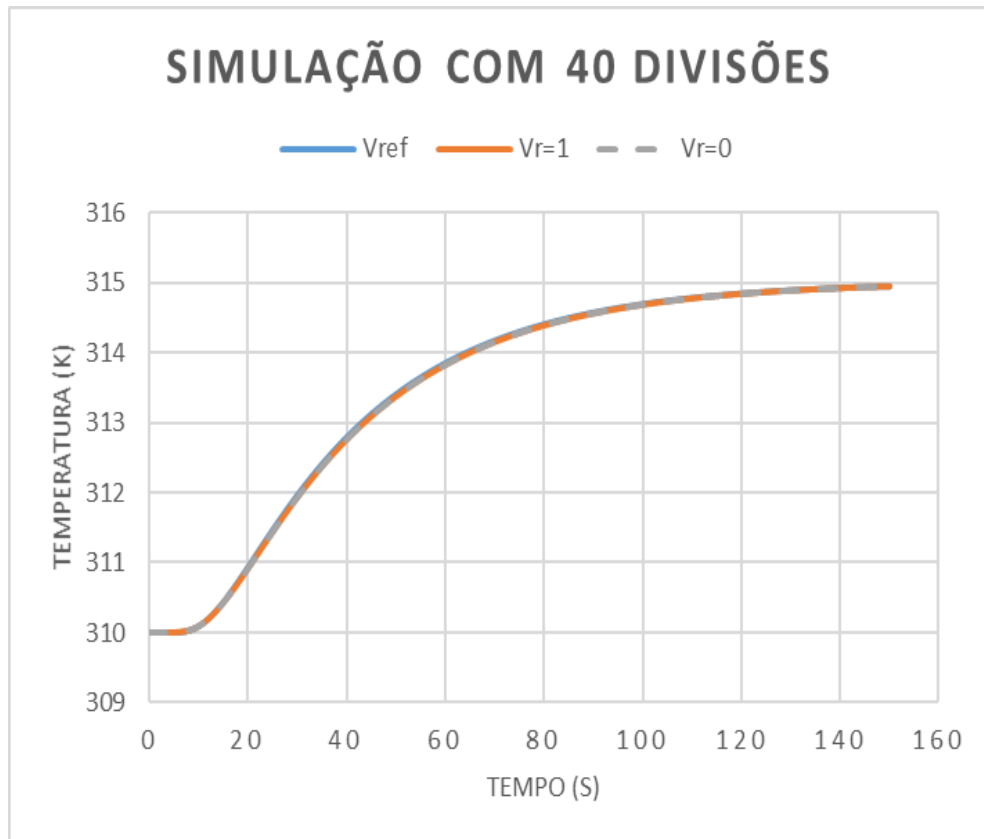


Figura 5.47: Análise transiente da malha com 40 células

CAPÍTULO VI

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

6.1 CONCLUSÕES

O estudo aqui apresentado tratou de um problema de condução de calor bidimensional em regime permanente. Para realização deste estudo foram propostas duas soluções, uma solução teórica e a outra solução numérica. A solução analítica realizada foi uma solução genérica que resolveria qualquer uma das três espécies de problemas bidimensionais existentes para corpos cilíndricos. A outra solução apresenta uma malha genérica, que leva em conta apenas a geometria cilíndrica.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) foi empregada na solução genérica (referência). Para efeito de validação, foi implementado um problema de condução de calor de segunda espécie no *software wolfram mathematica*, o que gerou um perfil de temperatura / tensão, que foi confrontado com os resultados obtidos pelo método numérico.

O método numérico escolhido foi o Método de Simulação de Rede (NSM), onde implementamos um circuito RC no *software PSPICE*, pelo qual foram coletados os resultados para o problema de segunda espécie, no qual como observamos no capítulo referente a análise de resultados, apresenta uma solução compatível com a solução teórica, apresentando a vantagem da velocidade e simplicidade na solução, por requerer apenas as características térmicas do material a ser utilizado para o cálculo dos parâmetros.

Além da validação pelo método analítico, utilizamos a aproximação do problema bidimensional com unidimensional, utilizando o princípio que para um raio muito maior que o comprimento podemos considerar o problema como sendo unidimensional, no

capítulo VI podemos verificar que com uma relação de um raio pelo menos 16 vezes maior que o comprimento, já podemos considerar o problema unidimensional. Para reforçar a validade do método proposto comparamos os resultados da malha proposta com o experimento realizado por SILVA (2014) que é um problema de condução de calor unidimensional em regime permanente que foi validado analiticamente, experimentalmente e via simulação, na comparação com esse experimento o método proposto apresenta a mesma solução do método realizado por SILVA (2014).

Para comprovar a generalidade do método proposto, foi realizada uma comparação com um problema de condução de calor de primeira espécie unidimensional em regime transitório realizado por OLIVEIRA (2010), para o método proposto também fizemos uma aproximação bidimensional para unidimensional, pois, assim como para um raio muito maior que o comprimento podemos considerar o problema sendo unidimensional, também é aceito o comprimento muito maior que raio, para tal experimento verificamos que para um comprimento de 8 vezes maior que o raio, o problema é aproximado ao unidimensional de modo que ao confrontarmos os resultados temos a mesma solução do experimento realizado por OLIVEIRA (2010).

6.2 SUGESTÕES E PERSPECTIVAS

Estudos posteriores podem ser estabelecidos visando os seguintes enfoques:

- Quanto a validação analítica do problema bidimensional transiente, tendo em vista que a solução via método de simulação de rede, demonstrou ser bastante promissora com relação a esse problema.
- Solução do problema bidimensional permanente pelo método de separação de variáveis.
- Desenvolvimento da malha via Método de Simulação de Rede do problema de condução de calor de terceira espécie, que é bem mais complexo, pois, trata-se de um problema que envolve convecção.

REFERÊNCIAS

- ALAWADHI, E. M., and AMON, C. H., 2003, “PCM thermal control unit for portable electronic devices: experimental and numerical studies”. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 26(1), 116–125.
- ALHAMA, F. e CAMPO, A., 2003, “Network Simulation of the Rapid Temperature Changes in the Composite Nozzle Wall of an Experimental Rocket Engine During a Ground Firing Test”, *Applied Thermal Engineering*, 23, 37–47.
- ALHAMA, F., CAMPO, A., & ZUECO, J., 2005, “Numerical solution of the heat conduction equation with the electro-thermal analogy and the code PSPICE”. *Applied Mathematics and Computation*, 162(1), 103–113.
- ALHAMA, I., ALHAMA, F., & SOTO MECA, A., 2012, “The network method for a fast and reliable solution of ordinary differential equations: Applications to non-linear oscillators”. *Computers & Electrical Engineering*, 38(6), 1524–1533.
- ANGSTROM, A. J., 1863. “A new method of determining the thermal conductivity of bodies”. *Phil. Mag.*, 25, pp. 130 – 142.
- BABA, T., & ONO, A., 2001, “Improvement of the laser flash method to reduce uncertainty in thermal diffusivity measurements”, *Measurement Science and Technology*, 12(12), 2046–2057.
- BHATTACHARYA, P., NARA, S., VIJAYAN, P., TANG, T., LAI, W., PHELAN, P. E., WANG, J., 2006, “Characterization of the temperature oscillation technique to measure the thermal conductivity of fluids”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(17-18), 2950–2956.

- BLACKWELL, J. H., 1954, “A Transient-Flow Method for Determination of Thermal Constants of Insulating Materials in Bulk Part I—Theory”, *Journal of Applied Physics*, 25(2), 137.
- BOGLIETTI, A., CAVAGNINO, A., STATON, D., SHANEL, M., MUELLER, M., and MEJUTO, C., 2009. “Evolution and modern approaches for thermal analysis of electrical machines”. *IEEE Trans. Ind. Electron*, 56(3), pp. 871–882.
- BOUTINGUIZA, M., LUSQUÍÑOS, F., POU, J., SOTO, R., QUINTERO, F., & COMESAÑA, R., 2012, “Thermal properties measurement of slate using laser flash method”, *Optics and Lasers in Engineering*, 50(5), 727–730.
- ÇENGEL, Y., BOLES, M., 2007. *Termodinâmica*, 5^aed., McGrall-Hill.
- FRAISSE, G., VIARDOT, C., LAFABRIE, O., & ACHARD, G., 2002, “Development of a simplified and accurate building model based on electrical analogy”. *Energy and Buildings*, 34(10), 1017–1031.
- GALLOY, L., BERQUEZ, L., BAUDOIN, F., PAYAN, D., 2013. “PSpice modeling of the acoustic detector for a pulsed electro-acoustic cell”. *IEEE International Conference on Solid Dielectrics (ICSD)*, pp. 468-471.
- HEALY, J.J., DE GROOT J.J., KESTIN, J., 1976, “The theory of the transient hot-wire method for measuring thermal conductivity”, *Physica B+C*, Volume 82, Issue 2, Pages 392-408.
- ISMAIL, B., DARWISH, M. K., ALHAMROUNI, I., 2015, “Modelling photovoltaic and UPS system in OrCAD PSpice with reliability estimation test”. *IEEE Conference on Energy Conversion (CENCON)*, pp. 424-429.
- JANNOT, Y., DEGIOVANNI, A., and PAYET, G., 2009, “Thermal conductivity measurement of insulating materials with a three layers device”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(56), pp. 1105 – 1111.

- JUMIKIS, A. R., 1996, *THERMAL SOIL MECHANICS*, Rutgers University Press (New Jersey).
- KEATING, J. F., WEST, J. B. AND JENNINGS, J. W., 1991. “Lifting Cost Reduction form Dynamic Balancing.” *38th Annual Sourthwestern Petroleum Short Course. Proceedings*, pp 324-37.
- KUNTNER, J., CHABICOVSKY, R., & JAKOBY, B., 2010, “Oil Condition Monitoring Using a Thermal Conductivity Sensor”, In: GMe Forum Proceedings, 203-209, Viena.
- KUROSAWA, S., 2013, “Análise de Circuiros Alimentados por Fontes Constantes”.
- LAU, G.-K., GOOSEN, J. F. L., and VAN KEULEN, F., 2010. “Optimum design of polymeric thermal microactuator with embedded silicon skeleton”. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 19(4), pp. 992–1001.
- LOPEZ-BAEZA, E., DE LA RUBIA, J., and GOLDSMID, H. J., 1987. “Angstrom’s thermal diffusivity method for short samples”. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 20(9), p. 1156.
- MARANO, D., BONANNO, G., GAROZZO, S., ROMEO, G., GRASSO, A. D., PALUMBO, G., PENNISI, S., 2015 “A new enhanced PSPICE implementation of the equivalente circuit model os SiPM detectors”. *New Circuits an System Conference. IEEE 13th Intenational*, pp. 1-4.
- NAGEL, L. W. e PEDERSON, D. O., 1973, SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis), Technical Report No. UCB/ERL M382, University of California, Berkeley.
- OLIVEIRA, A. S. S., 2010, *Estudo Teórico Experimental da Dinâmica de Temperatura no Interior de Uma Cavidade Cilíndrica*, Tese de Doutorado, PPGEM/UFPB, João Pessoa – Paraíba, Brasil.

- OUYANG, J., and ZHU, Y., 2012. “Z-shaped mems thermal actuators: Piezoresistive self-sensing and preliminary results for feedback control”. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 21(3), pp. 596–604.
- ÖZISIK, M. N., 1989, *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, 1^a Ed. Dover phoenix editions, EUA.
- PARKER, W. J., JENKINS, R. J., BUTLER, C. P., & ABBOTT, G. L., 1961, “Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity”, *Journal of Applied Physics*, 1679
- PSPICE, v. 6.0, 1994, *Microsin Corporation*, 20 Fairbanks, Irvine, California 92718.
- RACITI, A., CRISTALDI, D., GRECO, G., VINCI, G., BAZZANO, G., 2015. “Electrothermal PSpice Modeling and Simulation of Power Modules”. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, pp. 6260-6271.
- ROETZEL, W., PRINZEN, S., ZUAN, Y., 1990. “Measurement of thermal diffusivity using temperature oscillations”, *Therm. Conduct.* 21, 201–207.
- SAHA, A., NIPU, N. N., KHAN, F., 2016, “ PSpice based study of environmental effect on the performance of the solar PV module”. *4th International Conference on the Development in the in Renewable Energy Technology*, pp. 1-6.
- SALAZAR, A., GARRIDO, F., & CELORRIO, R., 2006, “Thermal diffusivity of rods, tubes, and spheres by the flash method”, *Journal of Applied Physics*, 99(6), 066116.
- SÁNCHEZ, J. F., ALHAMA, F., & MORENO, J. A., 2012. “An efficient and reliable model based on network method to simulate CO₂ corrosion with protective iron carbonate films”. *Computers & Chemical Engineering*, 39, 57–64.
- SANTOS, W. N., 2007, “Thermal properties of polymers by non-steady-state techniques”. *Polymer Testing*, 26(4), pp. 556 – 566

- SANTOS, W. N., AGNELLI, J. A. M., MUMMERY, P. and WALLWORK, A., 2007b, "Effect of recycling on the thermal properties of polymers". *Polymer Testing*, 26(2), 216-221.
- SANTOS, Wilson N. *et al.*, 2004, "Método de fio quente na determinação das propriedades térmicas de polímeros. Polímeros", *Polímeros: Ciência e Tecnologia*, São Carlos , v. 14, n. 5, dez.
- SANTUCCI, A., VERDINI, L., VERDINI, P.G., 1986, "Data acquisition system for measurement of thermal diffusivity and propagation properties of thermal waves by a non-steady-state method", *Rev. Sci. Instrum.* 57 1627–1632.
- SHEIKH, M. a, TAYLOR, S. C., HAYHURST, D. R., & TAYLOR, R., 2000, "Measurement of thermal diffusivity of isotropic materials using a laser flash method and its validation by finite element analysis", *Journal of Physics D: Applied Physics*, 33(12), 1536–1550.
- SILVA, T. A. B., 2014, *O Gerador Térmico como Analisador de Propriedades Térmicas a Partir da Harmônica Pura*, Dissertação de Mestrado, PPGEM/UFPB, João Pessoa – Paraíba, Brasil.
- SILVEIRA, I. C., 2012, *Análise da Condução de Calor Transiente Uni e Bidimensional Submetida a Variações Harmônicas na Condição de Contorno*, Dissertação de Mestrado, PPGEM/UFPB, João Pessoa – Paraíba, Brasil.
- TANG, W. H., WU, Q. H., & RICHARDSON, Z. J., 2004, "A simplified transformer thermal model based on thermal-electric analogy", *IEEE Transactions on Power Delivery*, 19(3), 1112–1119.
- TENG, M., HU, J., 2013, "PSPICE Analyses of vibration energy harvester systems with multiple piezoelectric components". *IEEE Conference Publications*, pp. 1-4

- TILLMANN, A. R., 2005, “Determinação Simultânea da Condutividade Térmica e da Difusividade Térmica Variando com a Temperatura”. Dissertação de Mestrado. UFU, Uberlândia, Brasil.
- VERMEULEN, F. E. and CHUTE F. S., 1983, “Electromagnetic Techniques in the In-Situ Recovery of Heavy Oils”, *Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy*, 18(1), 15-30, 1983.
- VLADIMIRESCU, A., 1994, *The spice book*. J. Wiley, EUA.
- WANG, D.-B., LIAO, X.-P., and LIU, T., 2012. “A thermoelectric power sensor and its package based on mems technology”. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 21(1), pp. 121–131.
- WEIGEN, C., CHONG, P., & YUXIN, Y., 2009, “Power transformer top-oil temperature model based on thermal – electric analogy theory”, *EUROPEAN TRANSACTIONS ON ELECTRICAL POWER*, 19, 341–354.
- ZHANG, Y., HU, X., ZHAO, J., SHENG, K., CANNON, W., WANG, X., and FURSIN, L., 2009. “Rheology and thermal conductivity of diamond powder-filled liquid epoxy encapsulants for electronic packaging”. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 32(4), pp. 716–723.
- ZHAO, W., WEI, P., 2013, “PSpice system simulation application in electronic circuit design” *IEEE Conference Publications*, pp. 8634-8636.
- ZUECO, J., & ALHAMA, F., 2006, “Inverse estimation of temperature dependent emissivity of solid metals”, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 101(1), 73–86.
- ZUECO, J., & ALHAMA, F., 2007, “Simultaneous inverse determination of temperature-dependent thermophysical properties in fluids using the network simulation method”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(15-16), 3234–3243.

- ZUECO, J., 2009, “Network modelling of unsteady natural convection flow over a vertical plate submitted to surface temperature oscillation”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 19(3/4), 285–302.
- ZUECO, J., ALHAMA, F. e GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, C.F., 2004, “Analysis of Laminar Forced Convection With Network SimulationiIn Thermal Entrance Region of Ducts”, *International Journal of Thermal Science* 43, 443–451.

APÊNDICE A – TABELA DE AUTOVALORES CÁLCULADOS PELO *WOLFRAM MATHEMATICA*

Para a solução do problema analítico foi utilizado a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) conforme visto no capítulo III, e um dos passos da resolução é o cálculo dos autovalores que pode ser calculado pela autofunção dada pela Equação 3.58. Utilizando o *software Wolfram Mathematica*, temos solução para o problema de segunda espécie, utilizando $Bi_2 = 0,45$, onde N é quantidade de termos, conforme a tabela A.1:

$$\mu_i J'_0(\mu_i) + Bi_2 J_0(\mu_i) = 0 \quad (3.58)$$

Tabela A.1 – Autovalores utilizados na solução analítica de segunda espécie

N	Autovalor	N	Autovalor	N	Autovalor	N	Autovalor
1	3,430873408	21	66,33163451	41	129,1655992	61	191,9981849
2	6,604757079	22	69,47342289	42	132,3072449	62	195,1398018
3	9,758902834	23	72,61519443	43	135,4488882	63	198,281418
4	12,90716514	24	75,75695122	44	138,5905292	64	201,4230334
5	16,05289339	25	78,89869501	45	141,7321681	65	204,5646481
6	19,19730073	26	82,04042729	46	144,873805	66	207,7062622
7	22,34093271	27	85,18214932	47	148,01544	67	210,8478756
8	25,48407085	28	88,32386219	48	151,1570733	68	213,9894885
9	28,62687513	29	91,46556685	49	154,2987049	69	217,1311007
10	31,76944317	30	94,6072641	50	157,4403349	70	220,2727124
11	34,91183791	31	97,74895465	51	160,5819635	71	223,4143235
12	38,05410177	32	100,8906391	52	163,7235907	72	226,5559342
13	41,19626437	33	104,0323181	53	166,8652166	73	229,6975443
14	44,338347	34	107,173992	54	170,0068413	74	232,839154
15	47,4803654	35	110,3156613	55	173,1484649	75	235,9807632
16	50,62233141	36	113,4573264	56	176,2900873	76	239,122372
17	53,76425415	37	116,5989876	57	179,4317087	77	242,2639803
18	56,90614073	38	119,7406452	58	182,5733291	78	245,4055883
19	60,04799678	39	122,8822995	59	185,7149486	79	248,5471959
20	63,18982681	40	126,0239508	60	188,8565672	80	251,6888031

Continuação Tabela A.1 – Autovalores utilizados na solução analítica de segunda espécie

N	Autovalor	N	Autovalor	N	Autovalor	N	Autovalor
81	254,8304099	101	317,662488	121	380,4944919	141	443,3264531
82	257,9720165	102	320,8040896	122	383,6360908	142	446,4680503
83	261,1136226	103	323,9456911	123	386,7776896	143	449,6096475
84	264,2552285	104	327,0872923	124	389,9192883	144	452,7512447
85	267,396834	105	330,2288934	125	393,0608869	145	455,8928417
86	270,5384393	106	333,3704943	126	396,2024854	146	459,0344387
87	273,6800442	107	336,5120951	127	399,3440838	147	462,1760357
88	276,8216489	108	339,6536957	128	402,4856822	148	465,3176326
89	279,9632533	109	342,7952962	129	405,6272804	149	468,4592294
90	283,1048574	110	345,9368966	130	408,7688785	150	471,6008262
91	286,2464613	111	349,0784968	131	411,9104766	151	474,7424229
92	289,388065	112	352,2200968	132	415,0520746	152	477,8840196
93	292,5296684	113	355,3616968	133	418,1936725	153	481,0256162
94	295,6712716	114	358,5032966	134	421,3352703	154	484,1672128
95	298,8128745	115	361,6448962	135	424,4768681	155	487,3088093
96	301,9544773	116	364,7864958	136	427,6184658	156	490,4504058
97	305,0960798	117	367,9280953	137	430,7600634	157	493,5920022
98	308,2376822	118	371,0696946	138	433,9016609	158	496,7335986
99	311,3792843	119	374,2112938	139	437,0432584	159	499,8751949
100	314,5208863	120	377,3528929	140	440,1848558	160	503,0167912

Continuação Tabela A.1 – Autovalores utilizados na solução analítica de segunda espécie

N	Autovalor	N	Autovalor
161	506,1583874	181	568,9903038
162	509,2999836	182	572,1318993
163	512,4415798	183	575,2734947
164	515,5831759	184	578,4150901
165	518,7247719	185	581,5566855
166	521,866368	186	584,6982808
167	525,0079639	187	587,8398761
168	528,1495599	188	590,9814714
169	531,2911558	189	594,1230667
170	534,4327517	190	597,2646619
171	537,5743475	191	600,4062571
172	540,7159433	192	603,5478523
173	543,857539	193	606,6894474
174	546,9991348	194	609,8310425
175	550,1407304	195	612,9726376
176	553,2823261	196	616,1142327
177	556,4239217	197	619,2558277
178	559,5655173	198	622,3974227
179	562,7071128	199	625,5390177
180	565,8487084	200	628,6806127

APÊNDICE B – ROTINAS UTILIZADAS PARA AS SOLUÇÕES ANÁLITICA E CÁLCULO DOS PARAMETROS

Para a solução do problema analítico foi utilizado a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) conforme visto no capítulo III. Utilizando o *software Wolfram Mathematica*, temos solução para o problema de segunda espécie, utilizando $Bt_2 = 0,45$.

Conforme algoritmo, a seguir:

Características do material e dados de entrada

$$k = 1.38$$

$$dens = 2203$$

$$cp = 772$$

$$a = \frac{k}{dens * cp}$$

$$H1 = 0.45$$

$$H2 = H1$$

$$w = \left(\frac{1}{1000} \right) * 2 * Pi$$

$$L = 5 * 10^{-3}$$

$$r0 = 5 * 10^{-2}$$

$$\Delta\theta = 1$$

$$nf = 100$$

$$tal[t_] := \frac{a * t}{r0^2}$$

```
tabt = Table[tal[t], {t, 30000, 40000}]
```

```
vtabt[t_] := Part[tabt, t]
```

Primeiro passo (Calculando os autovalores)

```
 $\mu[i\_]$  := FindRoot[BesselJ[1, x] + H2 * BesselJ[0, x], {x, i * Pi}]
```

```
tabj0 = Table[Part[ $\mu$ [i], 1, 2], {i, 1, 200}]
```

Segundo passo (Calculando a norma)

```
ab[n_] := Part[tabj0, n]
```

```
dni[n_] := 2 * (ab[n])2
```

```
nni1[n_] := (BesselJ[0, ab[n]])2
```

```
nni2[n_] := (H22 + (ab[n])2)
```

```
Ni[n_] :=  $\frac{nni1[n] * nni2[n]}{dni[n]}$ 
```

```
tn = Table[Part[Ni[n], {n, 1, nf}]
```

Terceiro passo (Calculando as autofunções normalizadas)

```
vn[n_] := Part[tn, n]
```

```
rvn[n_] :=  $\sqrt{vn[n]}$ 
```

```
 $\varphi[r\_n\_]$  :=  $\frac{BesselJ[0, r * ab[n]]}{rvn[n]}$ 
```

```
tfn = Table[Part[ $\varphi$ [r, n], {r, 0, r0,  $\frac{r0}{12}$ }]
```

```
vfn[r_, n_] := Part[tfn, r, n]
```

Quarto passo (Calculando as constantes C1 e C2)

$$\theta[n_] := \frac{BesselJ[1, ab[n]]}{ab[n]}$$

$$\xi[n_] := \sqrt{(ab[n])^2 + (I * w)}$$

$$c1[n_] := (\theta[n] * (\xi[n] - H1)) / (-H1 + (H1 * E^{2*\xi[n]}) + \xi[n] + (\xi[n] * E^{2*\xi[n]}))$$

$$tc1 = Table[Part[c1[n]], \{n, 1, nf\}]$$

$$vc1[n_] := Part[tc1, n]$$

$$c2[n_] := (\theta[n]) - c1[n]$$

$$tc2 = Table[Part[c2[n]], \{n, 1, nf\}]$$

$$vc2[n_] := Part[tc2, n]$$

$$\theta i[n_ , z_] := (vc1 * E^{\xi[n]*z}) + (vc2 * E^{-\xi[n]*z})$$

$$t\theta i = Table\left[Part[\theta i[n, z]], \{n, 1, nf\}, \left\{z, 0, L, \frac{L}{12}\right\}\right]$$

$$vt\theta i[n_ , z_] := Part[t\theta i, n, z]$$

Quinto Passo (Calculando solução final)

$$Tf[r, z, t] := \sum_{n=1}^{nf} (vf n[r, n] * vt\theta i[n, z] * \Delta\theta * E^{I*w*vtat[t]})$$

Para o cálculo das resistências e capacitâncias foi utilizado o *software MATLAB*, conforme algoritmo, a seguir:

Cálculo da resistência e capacitância

Setando as posições

$$posi = 0.0:0.0333:1$$

$$posi(1) = 0.0000001$$

$$r0 = 0.15$$

$$r = r0 * posi$$

$$L = 0.005$$

Características do material

$$kt = 1.38$$

$$dens = 2203$$

$$cp = 772$$

Discretização do cilindro

$$nd = 30$$

$$deltaL = \frac{L}{nd}$$

Calculando as resistências e capacitâncias sentido radial

$$for\ n = length(r) - 1 : -1 : 1$$

$$Rr(n) = \left(\log \left(\frac{r(n+1)}{r(n)} \right) / (2 * pi * kt * L) \right)$$

$$Cr(n) = (pi * dens * cp * L * ((r(n+1))^2 - (r(n))^2))$$

end

Calculando as resistências e capacitâncias sentido longitudinal

$$for\ n = length(r) - 1 : -1 : 1$$

$$Rl(n) = \left(\frac{1}{kt} \right) * \left(\frac{deltaL}{(pi * ((r(n+1))^2 - (r(n))^2))} \right)$$

$$Cl(n) = (pi * dens * cp * deltaL * ((r(n+1))^2 - (r(n))^2))$$

end



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
- Mestrado - Doutorado



ESTUDOS ANALÍTICOS E EM PSPICE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CORPOS CILÍNDRICOS

Por

Adson Íkaro Silva Leite de Andrade

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba
para obtenção do grau de Doutor.*

ADSON ÍKARO SILVA LEITE DE ANDRADE

**ESTUDOS ANALÍTICOS E EM PSPICE DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CORPOS
CILÍNDRICOS**

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Antônio Belo

João Pessoa - Paraíba

Agosto, 2016

A553e Andrade, Adson Íkaro Silva Leite de.
 Estudos analíticos e em PSPICE de transferência de calor
 em corpos cilíndricos / Adson Íkaro Silva Leite de Andrade.-
 João Pessoa, 2016.
 113f. : il.
 Orientador: Francisco Antônio Belo
 Tese (Doutorado) - UFPB/CT
 1. Engenharia mecânica. 2. Método de simulação de rede
 (NSM). 3. Condução de calor. 4. Técnica da Transformada
 Integral Generalizada (GITT).

UFPB/BC

CDU: 621(043)

ESTUDOS ANALÍTICOS E EM PSPICE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CORPOS CILÍNDRICOS

por

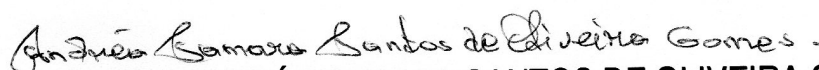
ADSON ÍKARO SILVA LEITE DE ANDRADE

Tese aprovada em 31 de agosto de 2016


Prof. Dr. FRANCISCO ANTÔNIO BELO
Orientador - UFPB


Prof. Dr. ABEL CAVALCANTE LIMA FILHO
Examinador Interno - UFPB


Prof. Dr. CARLOS ANTÔNIO CABRAL DOS SANTOS
Examinador Interno - UFPB


Profa. Dra. ANDRÉA SAMARA SANTOS DE OLIVEIRA GOMES
Examinador Externo - IFPB


Prof. Dr. HAMILTON SOARES DA SILVA
Examinador Externo - UFPB

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família e amigos, e especialmente às minhas mães, Márcia Jocélia e Maria Jocilda, a minha esposa, Roselany Bernardino, aos meus pais José Jocerlan e Erivaldo Leite, e a meus irmãos, Alexandre Ítalo, Aline Isis, Anderson Igor e Ingrid, pelo apoio e suporte dado durante o trabalho e principalmente nos momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus por ter me dado a oportunidade de dar mais um passo importante nos meus estudos e na minha vida.

Ao meu orientador Professor Francisco Antônio Belo pela sua dedicação, suporte e atenção. A Professora Andréa Samara Santos de Oliveira Gomes, por sua orientação, dedicação, suporte e atenção. Aos Professores Abel, Laurivan e Cabral pelo seu suporte e atenção.

Aos meus companheiros de pesquisa e laboratório, Tássio Borges, Hugo, Jobson. A todos os alunos companheiros de laboratório pela disposição em ajudar sempre que preciso.

A todos os amigos que contribuíram de forma direta e indireta na realização desse trabalho.

Agradeço à cada um dos meus familiares que me apoiaram durante toda a minha jornada, agradeço aqueles que mesmo estando longe me deram seu apoio. Agradeço especialmente as minhas mães, Márcia Jocélia e Maria Jocilda, a minha esposa, Roselany Bernardino, aos meus pais José Jocerlan e Erivaldo Leite, e a meus irmãos, Alexandre Ítalo, Aline Isis, Anderson Igor e Ingrid, aos meus sobrinhos Bruno Filho, Lucas, Mateus e Isabela que me deram todo o carinho e força necessário para superar as adversidades encontradas no caminho.

ESTUDOS ANALÍTICOS E EM PSPICE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CORPOS CILÍNDRICOS

RESUMO

É apresentada neste trabalho de tese, uma proposta para solução de problemas de engenharia na área de transferência de calor utilizando o método de simulação de rede (NSM – *Network Simulation Method*), que consiste na resolução destes problemas pela analogia existente entre os circuitos térmicos e os circuitos elétricos. Nele será apresentada a validação do problema bidimensional de condução de calor em um cilindro, no qual, serão confrontadas as soluções obtidas por simulação com a solução obtida analiticamente via Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Nas simulações realizadas faz-se a discretização do corpo em estudo, com o objetivo de se estabelecer uma correlação entre a quantidade de células (refinamento da malha) e a relação entre o tamanho do raio e comprimento do cilindro para que a solução do problema de transferência de calor no corpo possa ser considerada unidimensional. A comparação se dará entre a resposta analítica e a obtida por simulação, variando o número de divisões e as diferentes relações entre as dimensões raio e comprimento do cilindro. A partir da solução validada pela metodologia proposta, o trabalho apresenta como aplicação, uma malha genérica elaborada através do NSM e implementação no PSPICE, a qual serve para resolução de diversos problemas de condução de calor em geometria cilíndrica.

Palavras-chave: Método de simulação de rede (NSM), Condução de calor, Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)

ANALYTICAL STUDIES AND PSPICE STUDIES OF BODIES IN CYLINDRICAL HEAT TRANSFER

ABSTRACT

It is presented in this thesis, a proposal for solution of engineering problems in heat transfer area using the network simulation method (NSM - Network Simulation Method), which is to solve these problems by analogy between the thermal circuits and electrical circuits. It will be presented to validate the two-dimensional problem of heat conduction in a cylinder in which the solutions obtained by simulation with the solution analytically obtained via Technical Generalized Integral Transform will face (GITT). In the simulations makes up the body discretization study with the aim of establishing a correlation between the amount of cells (the mesh refinement) and the relationship between the radius of the size and length of the cylinder so that the problem solution of heat transfer in the body can be considered one-dimensional. A comparison will be made between the analytical response and obtained by simulation, varying the number of divisions and different relationships between beam dimensions and length of the cylinder. From the solution validated the proposed method, applying the work presented as a generic fabric prepared by the NSM and implementation PSPICE, which serves for solving many problems of heat conduction in a cylindrical geometry.

Keywords: Network Simulation Method (NSM), heat conduction, Technical Generalized Integral Transform (GITT)

SUMÁRIO

CAPÍTULO I.....	1
INTRODUÇÃO.....	1
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2 OBJETIVOS	5
1.2.1 Objetivo Geral	5
1.2.2 Objetivos Específicos	5
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	5
CAPÍTULO II.....	7
ESTADO DA ARTE	7
2.1 CONDUÇÃO DE CALOR	7
2.1.1 Equacionamento da Difusão de Calor	10
2.2 O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE REDE.....	13
2.3 A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	16
CAPÍTULO III	19
MODELAGEM MATEMÁTICA	19
3.1 ESCOLHA DO MÉTODO	19
3.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO	19
3.2.1 Adimensionalizando	22
3.2.2 Escolha do problema de autovalor.....	29
3.2.3 Desenvolvimento do par de fórmula transformada-inversa	30
3.2.4 Transformação Integral do problema original	30
3.2.5 Solução do problema transformado	33
3.2.6 Recuperação do Potencial Original	36
CAPÍTULO IV	37

MÉTODO DA SIMULAÇÃO DE REDES	37
4.1 METODOLOGIA DAS SIMULAÇÕES.....	37
4.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA BIDIMENSIONAL PELO NSM	39
CAPÍTULO V	46
ANÁLISE DE RESULTADOS.....	46
5.1 ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA	46
5.2 VALIDAÇÃO DO MÉTODO	54
5.3 ESTUDO DA RELAÇÃO RAIO / COMPRIMENTO.....	55
5.4 ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA QUANTIDADE DE CÉLULAS.....	64
5.5 ANÁLISE DURANTE TRANSIENTE	70
5.5.1 Análise da Influência da Quantidade de Divisões Durante Transiente	76
CAPÍTULO VI.....	82
COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....	82
6.1 CONCLUSÕES	82
6.2 SUGESTÕES E PERSPECTIVAS	83
REFERÊNCIAS	84
APÊNDICE A – TABELA DE AUTOVALORES CÁLCULADOS PELO <i>WOLFRAM MATHEMATICA</i>	91
APÊNDICE B – ROTINAS UTILIZADAS PARA AS SOLUÇÕES ANÁLITICA E CÁLCULO DOS PARAMETROS	94

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Volume de controle diferencial, $dr \cdot r d\phi \cdot dz$, para a análise da condução de calor em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) . Fonte: INCROPERA e DEWITT (2008).	11
Figura 2.2: Condições de contorno para a equação da difusão de calor na superfície $(x=0)$ Fonte: INCROPERA e DEWITT (2008)	13
Figura 3.1 Representação da amostra no equacionamento de segunda espécie	20
Figura 4.1: Circuito no PSPICE da célula unitária unidimensional transversal.....	40
Figura 4.2: Circuito no PSPICE da célula unitária unidimensional radial	40
Figura 4.3: Circuito no PSPICE da célula unitária bidimensional	41
Figura 4.4: Célula, ou volume elementar do circuito elétrico em rede RC. Fonte: OLIVEIRA 2010	42
Figura 4.5: Definição do tipo de análise e definição dos valores desejados no <i>PSPICE</i>	42
Figura 4.6: Diagrama esquemático de um circuito RC radial no <i>PSPICE</i>	43
Figura 4.7: Diagrama esquemático de um circuito RC transversal no <i>PSPICE</i>	44
Figura 4.8: Diagrama esquemático de um circuito RC bidimensional no <i>PSPICE</i>	44
Figura 4.9: Tela para visualização do resultado da simulação de um circuito em rede RC bidimensional no <i>PSIPCE</i>	45
Figura 5.1: Gráfico com a solução contendo 5 autovalores	47
Figura 5.2: Gráfico com a solução contendo 10 autovalores	48
Figura 5.3: Gráfico com a solução contendo 20 autovalores	49
Figura 5.4: Gráfico com a solução contendo 40 autovalores	50
Figura 5.5: Gráfico com a solução contendo 50 autovalores	51
Figura 5.6: Gráfico com a solução contendo 100 autovalores	52
Figura 5.7: Gráfico com a solução contendo 200 autovalores	53
Figura 5.8: Gráfico de comparação para diferentes autovalores	54
Figura 5.9: Comparação entre o resultado analítico e o resultado via NSM.....	55

Figura 5.10: Comparação de resultados via NSM quando o raio é duas vezes maior que o comprimento do cilindro	56
Figura 5.11: Comparação de resultados via NSM quando o raio é quatro vezes maior que o comprimento do cilindro	57
Figura 5.12: Comparação de resultados via NSM quando o raio é seis vezes maior que o comprimento do cilindro	58
Figura 5.13: Comparação de resultados via NSM quando o raio é oito vezes maior que o comprimento do cilindro	59
Figura 5.14: Comparação de resultados via NSM quando o raio é dez vezes maior que o comprimento do cilindro.	60
Figura 5.15: Comparação de resultados via NSM quando o raio é doze vezes maior que o comprimento do cilindro.	61
Figura 5.16: Comparação de resultados via NSM quando o raio é quatorze vezes maior que o comprimento do cilindro.	61
Figura 5.17: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte vezes maior que o comprimento do cilindro.	62
Figura 5.18: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte e quatro vezes maior que o comprimento do cilindro	63
Figura 5.19: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte e oito vezes maior que o comprimento do cilindro.....	63
Figura 5.20: Comparação de resultados via NSM quando o raio é trinta vezes maior que o comprimento do cilindro.	64
Figura 5.21: Comparação de resultados via NSM com 2 células.....	65
Figura 5.22: Comparação de resultados via NSM com 3 células.....	65
Figura 5.23: Comparação de resultados via NSM com 4 células.....	66
Figura 5.24: Comparação de resultados via NSM com 6 células.....	66
Figura 5.25: Comparação de resultados via NSM com 8 células.....	67
Figura 5.26: Comparação de resultados via NSM com 10 células.....	67
Figura 5.27: Comparação de resultados via NSM com 12 células.....	68
Figura 5.28: Comparação de resultados via NSM com 14 células.....	69
Figura 5.29: Comparação de resultados via NSM com 20 células.....	69
Figura 5.30: Comparação de resultados via NSM com 30 células.....	70

Figura 5.31: Análise transiente da influência da relação comprimento 2 vezes maior que o raio.....	71
Figura 5.32: Análise transiente da influência da relação comprimento 4 vezes maior que o raio.....	72
Figura 5.33: Análise transiente da influência da relação comprimento 6 vezes maior que o raio.....	73
Figura 5.34: Análise transiente da influência da relação comprimento 8 vezes maior que o raio.....	74
Figura 5.35: Análise transiente da influência da relação comprimento 10 vezes maior que o raio.....	74
Figura 5.36: Análise transiente da influência da relação comprimento 20 vezes maior que o raio.....	75
Figura 5.37: Análise transiente da influência da relação comprimento 50 vezes maior que o raio.....	75
Figura 5.38: Análise transiente da malha com 2 células	76
Figura 5.39: Análise transiente da malha com 4 células	77
Figura 5.40: Análise transiente da malha com 6 células	77
Figura 5.41: Análise transiente da malha com 8 células	78
Figura 5.42: Análise transiente da malha com 10 células	78
Figura 5.43: Análise transiente da malha com 12 células	79
Figura 5.44: Análise transiente da malha com 14 células	79
Figura 5.45: Análise transiente da malha com 20 células	80
Figura 5.46: Análise transiente da malha com 30 células	80
Figura 5.47: Análise transiente da malha com 40 células	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Analogia entre grandezas nos circuitos elétricos e térmicos	38
Tabela A.1 – Autovalores utilizados na solução analítica de segunda espécie	91

LISTA DE SÍMBOLOS

$C \rightarrow$ Capacitância elétrica (F)

$C_p \rightarrow$ Calor específico (J/(kg·K))

$q \rightarrow$ taxa de transferência de calor (W)

$q'' \rightarrow$ fluxo de calor (Wm²)

$F \rightarrow$ Frequência (Hz)

$T \rightarrow$ Temperatura

$T_0 \rightarrow$ Temperatura Inicial

$T_{\infty} \rightarrow$ Temperatura Ambiente

$i \rightarrow$ Número complexo ($i = \sqrt{-1}$)

$h \rightarrow$ Coeficiente de transferência de calor por convecção (W m² K⁻¹)

$J_0 \rightarrow$ Função Bessel do primeiro tipo e ordem zero

$J_1 \rightarrow$ Função Bessel do primeiro tipo e ordem um

$L \rightarrow$ Comprimento do Cilindro (m)

$r \rightarrow$ Posição radial (m)

$R \rightarrow$ Posição radial adimensional

$R \rightarrow$ Resistência elétrica (Ω)

$R_r \rightarrow$ Resistência Elétrica Radial

$R_l \rightarrow$ Resistência Elétrica Longitudinal

$R_{tn} \rightarrow$ Resistência Elétrica Longitudinal Total

$C_{tn} \rightarrow$ Capacitância Elétrica Longitudinal Total

$C_r \rightarrow$ Capacitância Elétrica Radial

$C_l \rightarrow$ Capacitância Elétrica Longitudinal

$n \rightarrow$ Índice do nó

$nd \rightarrow$ Número de divisões

$t \rightarrow$ Tempo (s)

$z \rightarrow$ Posição longitudinal adimensional

$Z \rightarrow$ Posição longitudinal (m)

$\tau \rightarrow$ Tempo adimensional

$\alpha \rightarrow$ Difusividade Térmica (m²/s)

$\Delta T_r \rightarrow$ Variação de Temperatura

$\kappa \rightarrow$ Condutividade Térmica (W/(mK))

$\rho \rightarrow$ Densidade (kg/m³)

$\sigma \rightarrow$ Condutividade elétrica do material

$\theta \rightarrow$ temperatura adimensional

$\theta^* \rightarrow$ temperatura adimensional para um tempo longo

$\omega \rightarrow$ Frequência Angular (rad/s)

$\Omega \rightarrow$ Frequência Angular Adimensional

$Bi_1 \rightarrow$ Número de Biot

$Bi_2 \rightarrow$ Número de Biot

$\varphi_i \rightarrow$ Autofunção

$\mu_i \rightarrow$ Autovalor

$N_i \rightarrow$ Norma

$\tilde{\varphi}_i \rightarrow$ Autofunção Normalizada

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este capítulo de introdução trata da importância deste estudo nas mais variadas áreas da tecnologia, das motivações que nos levaram ao desenvolvimento deste estudo, como também, apresenta uma visão geral do trabalho e a organização do mesmo.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Os estudos no campo da temperatura são de extrema importância, pois, segundo OLIVEIRA (2010) um grande número de processos físicos e químicos, espontâneos ou não, estão intimamente relacionados à temperatura, tendo as suas realizações em conformidade com as condições térmicas às quais estão sendo submetidos. Tais processos incluem fenômenos de transporte de calor e/ou de massa, o que torna necessário o conhecimento das propriedades térmicas dos materiais envolvidos visando o seu gerenciamento e otimização. O desenvolvimento de soluções de sistemas de equações diferenciais parciais que governam os fenômenos de difusão de calor, é um campo de pesquisa bem definido e atrativo, pois, trata-se de uma área de grande interesse tanto no contexto da matemática aplicada quanto das ciências térmicas.

Historicamente, as soluções de problemas envolvendo sistemas térmicos eram obtidas analiticamente, muitas vezes eram de difícil solução dependendo da complexidade do

problema a ser resolvido. Com o avanço tecnológico e o surgimento de computadores com maiores capacidades de armazenamento e processamento houve também a evolução dos métodos numéricos de solução dentre os quais se destacam os métodos das diferenças finitas e o método dos elementos finitos que são os métodos mais utilizados. Porém existe um outro método que vem se tornando popular na resolução de problemas envolvendo fenômenos de transporte, que é o Método de Simulação de Rede que segundo KARPLUS (1958) é um procedimento considerado numérico, o qual tem base na analogia existente entre sistemas elétricos e térmicos. Inicialmente implementado através de elementos reais de circuito. A popularização deste método se deu com o aparecimento da ferramenta computacional de simulação de circuitos elétricos, proporcionada com o surgimento do *software* PSPICE.

O presente trabalho apresenta uma solução analítica da equação da condução de calor para o problema de condução bidimensional em coordenadas cilíndricas, onde tal solução analítica será confrontada com a solução discreta obtida pela simulação do circuito elétrico equivalente no *software* PSIPCE a fim de validar tal solução proposta.

Pode-se observar em trabalhos anteriores que as soluções do problema de condução de calor unidimensional em corpos de geometria cilíndrica, tanto na dimensão radial quanto na longitudinal, têm soluções satisfatórias utilizando o método proposto no presente estudo. A solução do problema unidimensional da equação da condução de calor no sentido radial é apresentada por OLIVEIRA (2010), trabalho no qual foi efetuado o confronto entre os resultados obtidos através da solução analítica via técnica da transformada integral generalizada GITT, aqueles alcançados na solução pelo método de simulação de rede e os dados experimentais, onde foi possível verificar a proximidade entre os perfis das curvas de temperatura. O que possibilitou a percepção das vantagens do método de simulação de rede em relação ao método analítico, tais como a velocidade e precisão na obtenção dos resultados, além de, dispensar o trabalho algébrico na resolução do sistema de equações diferenciais parciais.

A solução para o problema unidimensional da equação da condução de calor no sentido longitudinal é apresentada por SILVA (2014), estudo no qual também foi realizado o confronto da solução analítica com a solução via método de simulação de rede, para a comparação entre os campos de temperatura encontrados, os quais estavam muito próximos, mostrando a eficiência do método proposto. Permitindo, também, observar-se a

vantagem deste, por apresentar maior velocidade de resolução quando comparado ao método analítico.

A solução proposta pode ser utilizada para a determinação das propriedades térmicas dos materiais a partir dos dados de temperatura obtidos, pela aplicação da resolução do problema inverso. OLIVEIRA (2010) e SILVA (2014), aplicam o método inverso para obtenção das propriedades térmicas dos materiais utilizados em seus respectivos trabalhos.

Existem vários métodos de estimativa das propriedades térmicas na literatura, onde, é possível classificá-los em duas categorias, a primeira baseia-se no fluxo de calor em regime estacionário. Tais métodos, geralmente, são utilizados em geometria de placas planas paralelas ou cilindros coaxiais contendo uma amostra de fluido ou sólido no interior da cavidade. A segunda categoria de métodos para estimativa de parâmetros térmicos possibilita estimar simultaneamente mais de uma das propriedades térmicas do material, fazendo uso de alguns intervalos transientes ou estados periódicos estacionários. Nesta categoria encontram-se dois dos métodos de estimativa de parâmetros mais referenciados na literatura, são eles: o método *flash* e o método da sonda.

O método *flash*, inicialmente proposto por PARKER *et al* (1961) consiste em irradiar uma amostra cilíndrica opaca de tamanho reduzido em sua superfície frontal e medir a elevação da temperatura na face oposta. Apenas a transferência de calor axial é considerada no modelo matemático com a hipótese restritiva de que não ocorrem perdas de calor para o meio externo. O método *flash* possui a vantagem de evitar o problema da resistência térmica de contato entre a amostra a ser estudada e a fonte de calor ou o detector, uma vez que se utiliza um pulso de *laser* como fonte de calor e a elevação de temperatura na superfície oposta é detectada por um sensor infravermelho. Porém o método flash muitas vezes apresenta dificuldades de uso devido:

- Os materiais isolantes são muitas vezes semi-transparentes para as frequências de radiações da lâmpada flash;
- É muito difícil medir com precisão a temperatura de uma superfície em um material de baixa densidade;
- A transferência de calor sobre a face aquecida é frequentemente muito diferente da transferência de calor sobre as outras faces (diferenças de temperatura muito importantes) (JANNOT *et al*, 2009).

A técnica da sonda, ou do fio-quente, encontra larga aplicação na estimativa das propriedades térmicas, pois, se adéqua ao estudo térmico de diversos tipos de materiais. Segundo SASSI *et al* (2009), a técnica consiste no uso de uma delgada resistência cilíndrica fornecendo um fluxo de calor constante para um meio “infinito”. A medição da temperatura pode ser feita na superfície da resistência, ou em qualquer outro ponto de coordenada r pertencente ao meio em estudo. Normalmente, um modelo assintótico é aplicado na solução matemática no problema de condução de calor. O perfil de temperatura obtido é logarítmico e, em termos do número de Fourier, é válido apenas no intervalo de tempo em que este é inferior a um. Consequentemente, somente medições de temperatura para tempos maiores são utilizadas para estimar as propriedades térmicas e a eficiência do método está limitada a uma estreita faixa de valores para a difusividade.

Outras metodologias associadas à caracterização térmica de líquidos são as chamadas técnicas fototérmicas. Com o surgimento da cavidade ressonante de ondas térmicas, várias técnicas experimentais foram desenvolvidas para determinar a difusividade térmica de fluidos (gases e líquidos) fornecendo resultados de alta precisão. BALDERAS-LÓPEZ (2003) propõe a medição da efusividade térmica de líquidos transparentes por meio da técnica fotopiroelétrica. DELENCIOS *et al* (2007) propuseram um método avançado de medição da difusividade térmica de líquidos pela varredura da espessura da amostra analisando a fase do sinal fotopiroelétrico. Fazendo uso dos valores absolutos da fase e da espessura da amostra, o método produz resultados precisos para medidas de difusividade térmica, porém sua aplicação está associada a uma estreita faixa de variação nos parâmetros térmicos.

TILLMAN (2005) cita que as restrições dos métodos apresentados, tais como, as características destrutivas do método do Fio Quente e o alto custo do método Flash, indicam a necessidade do desenvolvimento de métodos alternativos que possam contornar esses problemas. Diante da citação de TILLMAN (2005) o estudo proposto para solução de problemas de condução de calor e estimativa de parâmetros via o método de simulação de rede, constitui um campo de pesquisa importante e atrativo.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Solução do problema de condução de calor bidimensional em corpos cilíndricos pelo Método de Simulação de Rede (NSM), utilizando o *software PSPICE*.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Resolver a equação de calor bidimensional analiticamente;
- Criação de uma malha genérica utilizando o método de simulação de rede;
- Comparar os resultados obtidos pela solução analítica com os resultados obtidos pelo método de simulação de rede através do *software PSPICE*;
- Verificar a relação entre tamanho do raio e do comprimento, afim de, determinar quando um problema bidimensional, pode ser aproximado ao caso unidimensional.
- Comparar os resultados do problema de condução de calor unidimensional longitudinal em regime estacionário em um corpo cilíndrico obtidos por SILVA (2014) com os resultados obtidos pelo presente estudo via NSM.
- Comparar os resultados do problema de condução de calor unidimensional radial em regime transitório em um corpo cilíndrico obtidos por OLIVEIRA (2012) com os resultados obtidos pelo presente estudo via NSM, para verificar a generalidade da malha proposta.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho de tese encontra-se dividido em 6 capítulos, organizados da seguinte forma:

No Capítulo I faz-se uma introdução ao assunto com a temática da pesquisa proposta, assim como a apresentação dos objetivos a serem atingidos e a descrição da organização deste relatório.

No Capítulo II é apresentada uma revisão do estado da arte das técnicas que serão aplicadas no sistema proposto.

O Capítulo III trata da modelagem matemática utilizada para solução do problema em estudo.

No Capítulo IV faz-se uma explanação da metodologia utilizada e apresentação da solução do problema de condução bidimensional pelo método de simulação de rede (NSM).

O Capítulo V é dedicado à exposição dos resultados obtidos pela solução analítica via Técnica da Transformada Integral Generalizada (implementada através do *software Wolfram Mathematica*) e daqueles resultantes das simulações via Método de Simulação de Rede – NSM (implementado pelo programa PSPICE).

No Capítulo VI expõem-se as conclusões alcançadas e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

ESTADO DA ARTE

O objetivo deste capítulo é apresentar as leis básicas que regem os fenômenos físicos envolvidos no problema em questão, como também, discorrer sobre as contribuições existentes na literatura sobre a resolução de problemas de transferência de calor com métodos semelhantes ao proposto.

2.1 CONDUÇÃO DE CALOR

Para falarmos de condução de calor primeiramente temos que entender o que seria calor, ÖZİŞİK (1993) definiu calor como a energia transferida pelas partículas constituintes da matéria como os átomos, moléculas ou elétrons livres a partir das regiões com maiores níveis de agitação (regiões mais quentes) para regiões de menores níveis de agitação (regiões mais frias), para INCROPERA e DEWITT (2008) calor é a energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperatura no espaço. Portanto, conforme SONNTAG *et al* (2008) calor é um fenômeno transitório.

Após entender-se o que é calor, precisa-se entender o que vem a ser condução de calor, ÖZİŞİK (1985) define condução de calor como o modo de transferência de calor na qual a troca de energia ocorre a partir da região de alta temperatura para a de baixa temperatura pelo movimento cinético ou impacto direto de moléculas. O fenômeno da transferência de calor por condução é regido pelo mecanismo físico da difusão de energia que é promovido pelo movimento molecular aleatório.

Sabe-se que todo processo físico é regido por uma lei, ÖZİŞİK (1985) cita que a lei de Fourier é uma lei empírica de condução de calor, baseada em observações experimentais originadas por Biot, usada na teoria analítica de calor por Fourier. ÖZİŞİK (1985) define

que esta lei estabelece que a taxa de fluxo de calor por condução numa dada direção é proporcional à área normal à direção do fluxo de calor e para o gradiente de temperatura naquela direção. Para um sólido isotrópico e homogêneo (isto é, um material no qual a condutividade térmica seja independente da direção), e reconhecendo que o fluxo térmico é uma grandeza vetorial, podemos escrever a equação da taxa da condução (lei de Fourier) em enunciado geral da seguinte forma:

$$\mathbf{q}_n = -k\nabla T \quad (2.1)$$

Onde, ∇ é o operador gradiente de temperatura tridimensional e $T(x,y,z)$ é o campo escalar de temperatura, o vetor $\mathbf{q}_n$ é o fluxo térmico em uma direção n , que é normal a uma isoterma na direção de valores decrescentes de temperatura e k é uma grandeza escalar positiva, denominada condutividade térmica do material. O sinal negativo presente no lado direito da equação 2.1 é justificado devido a propagação de energia ocorrer no sentido decrescente como já foi mencionado.

Para o estudo da transferência de calor precisamos conhecer algumas propriedades dos materiais, pois, algumas destas propriedades são bastante relevantes, tais como as propriedades termofísicas, nas quais se englobam as propriedades de transporte e propriedades termodinâmicas. OLIVEIRA (2010) cita que as propriedades de transporte incluem os coeficientes de taxa de difusão, como a condutividade térmica k (para transporte de calor) e a viscosidade cinemática ν (para transferência de momento), as propriedades termodinâmicas, referem-se ao estado de equilíbrio de um sistema, onde pode-se citar a massa específica (ρ) e o calor específico (c_p).

Entre as propriedades pertinentes ao fenômeno condução de calor, OLIVEIRA (2010) chama a atenção para a propriedade de condutividade térmica. ÇENGEL (2006) define a condutividade térmica como a taxa de calor que é transferida através de unidade de espessura do material, por unidade de área e por unidade de diferença de temperatura. A condutividade térmica é uma propriedade intrínseca do material que nos traz informações da capacidade que o material possui em conduzir o calor, essa propriedade precisa ser conhecida para que se possa aplicar a lei de Fourier. Como esta propriedade vem da lei de Fourier, tal grandeza depende da direção, portanto como ela depende da direção existe a

possibilidade de ela assumir valores diferentes para cada direção. Quando a uma igualdade do seu valor nas diferentes direções, definimos que o meio é isotrópico.

Como esta propriedade controla a taxa de transferência de calor para um dado gradiente de temperatura existente no meio em análise, podemos classificar os materiais de acordo com sua propriedade de condutividade térmica, assim podemos classifica-los em materiais isolantes (que são os materiais que possuem baixa condutividade térmica) e os condutores térmicos (que são os materiais que possuem alta condutividade térmica).

INCROPERA E DEWITT (2008) definem que em geral a condutividade térmica de um sólido é maior que a de um líquido, que, por sua vez, é maior do que a de um gás, define-se também que a condutividade térmica de um sólido pode ser mais do que quatro ordens de grandeza superior à de um gás. Essa tendência se deve, em grande parte, à diferença no espaçamento intermolecular nos dois estados.

OLIVEIRA (2010) define ainda que a condutividade térmica de líquidos não-metálicos, tem a característica de diminuir com o aumento da temperatura, tendo algumas exceções, onde as mais conhecidas são a glicerina e a água, pois, para ambas há uma independência da pressão, exceto próximo ao ponto crítico. Outra característica da condutividade térmica é que geralmente ela diminui com o aumento do peso molecular. Pode-se encontrar inúmeras tabelas que relacionam a condutividade térmica com a temperatura do líquido no estado de saturação.

INCROPERA E DEWITT (2008) definem que o produto das propriedades termodinâmicas densidade (ρ) e o calor específico (c_p) é chamado de capacidade calorífica volumétrica, que representa a capacidade de um material armazenar energia térmica. Observa-se que em geral substâncias com grande massa específica, possuem baixo calor específico, essa característica é encontrada em vários sólidos e líquidos, tornando-os tipicamente bons meios de armazenamento de energia ($\rho c_p > 1 \text{ MJ/m}^3 \cdot \text{K}$) o que não ocorre com substâncias gasosas, devido aos seus baixíssimos valores de suas massas específicas.

ÇENGEL (2012) define a difusividade térmica (α) como a razão entre calor conduzido por meio do material e o calor armazenado por unidade de volume, ou seja, a difusividade térmica representa a velocidade com que o calor se difunde por meio de um material e pode ser expressa na forma:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (2.2)$$

Pode-se observar a partir da equação 2.2 que materiais com elevados valores de α responderão rapidamente a mudanças nas condições térmicas a eles impostas, enquanto materiais com menores valores de α responderão mais lentamente, levando mais tempo para atingir uma nova condição de equilíbrio.

De acordo com INCROPERA e DEWITT (2003), inúmeros exemplos de falhas de equipamentos ou no projeto de processos poderiam ser citados, além do não-entendimento das especificações de desempenho, que poderiam ser atribuídos à falta de informações quando da seleção dos valores das propriedades chaves usadas na análise inicial dos sistemas. Portanto, o conhecimento dos valores mais precisos das propriedades termofísicas dos materiais é imprescindível para a engenharia de processos. Deve-se evitar o uso de dados obtidos na literatura ou em manuais, os quais não tenham sido bem caracterizados ou avaliados.

2.1.1 Equacionamento da Difusão de Calor

O principal objetivo de se estudar a condução de calor para INCROPERA e DEWITT (2008) é determinar o campo das temperaturas em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras, ou seja, desejamos conhecer a distribuição de temperaturas, que representa como a temperatura varia com a posição no meio, que também pode ser representado pela obtenção do perfil de temperatura dentro do meio, variando suas posições e o tempo.

Conhecendo o perfil de temperatura no meio, pode-se aplicar a lei de Fourier diretamente para se obter o fluxo de calor em qualquer ponto do meio ou na superfície. A partir do conhecimento do perfil de temperatura de um sólido, pode-se verificar a sua integridade estrutural por meio da determinação de tensões, expansões e deflexões térmicas. INCROPERA e DEWITT (2008) citam outras aplicações importantes a partir do conhecimento do perfil de temperatura, tais como, a otimização da espessura de um material isolante ou para determinar a compatibilidade entre revestimentos especiais ou adesivos usados como o material.

O procedimento para se obter o perfil de temperatura deve obedecer à lei da conservação de energia, independentemente de qual seja a aplicação, isto é, a lei pode ser

aplicada a um volume finito, resultando em uma expressão que rege todo o comportamento do sistema, pode ser aplicada também a um volume infinitesimal, o qual resulta em uma equação diferencial, a qual pode ser resolvida para condições pontuais do sistema. INCROPERA E DEWITT (2008) sumariza em uma sequência simples a metodologia para determinar a distribuição de temperatura:

- Inicialmente, define-se um volume de controle, delimitando-se a superfície de controle com uma linha tracejada;
- Define-se uma base de tempo;
- Identificam-se os processos relevantes de troca de energia e faz-se uma representação gráfica dos mesmos em um diagrama;
- Finalmente, escreve-se a equação de conservação de energia, bem como as expressões apropriadas para as taxas de transferência de calor que devem substituir os respectivos termos na equação de balanço energético.

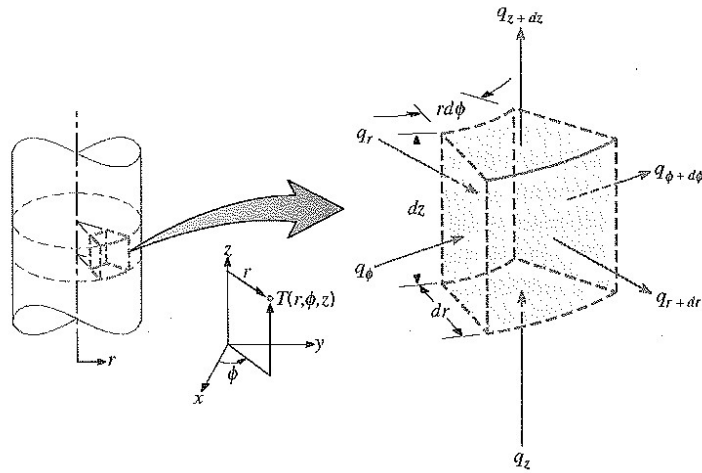


Figura 2.1: Volume de controle diferencial, $dr \cdot r d\phi \cdot dz$, para a análise da condução de calor em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) . Fonte: INCROPERA e DEWITT (2008).

Para um sistema de coordenadas cilíndricas, aplica-se o balanço de energia ao volume de controle diferencial conforme a Figura 2.1, a partir da qual pode-se chegar a equação geral do fluxo de calor para um cilindro:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(kr \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

Segundo OLIVEIRA (2010) esta expressão estabelece que em qualquer ponto do meio físico, a taxa líquida de energia transferida por condução para o interior de um volume unitário somado à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica armazenada no interior desse volume. Conforme hipóteses sejam admitidas, mediante análise do problema em questão, a equação deverá assumir uma forma simplificada.

Para a resolução da equação diferencial parcial (EDP), que para as coordenadas espaciais é de segunda ordem, faz-se necessária a especificação de duas condições de contorno. Já com relação ao tempo a EDP é de primeira ordem, fazendo-se necessária apenas a especificação da condição inicial. Conforme observado nas literaturas, existem três tipos diferentes de condições de contorno lineares para a solução analítica de problemas de condução de calor, o que está representado na Figura 2.2:

1. Primeiro tipo (condição de contorno de Dirichlet) – quando a distribuição de temperatura é prescrita na superfície de contorno: $T(0, t) = T_s$,

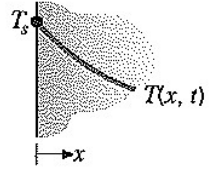
2. Segundo tipo (condição de contorno de Neumann) – quando o fluxo de calor na superfície é prescrito, $-k \frac{\partial T}{\partial r} = q''_s$. Um caso particular ocorre para uma superfície adiabática ou isolada, quando o fluxo é nulo, $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$.

3. Condição de contorno do terceiro tipo – situação em que ocorre convecção na superfície de contorno, $-k \frac{\partial T}{\partial r} = h[T_\infty - T(0, t)]$.

Segundo OLIVEIRA (2010) solucionar a equação de difusão de calor muitas vezes incorre em uma árdua tarefa de manipulação algébrica e, para certas condições não existe solução exata.

1. Temperatura da superfície constante

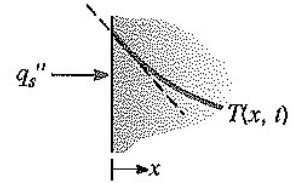
$$T(0, t) = T_s$$



2. Fluxo térmico na superfície constante

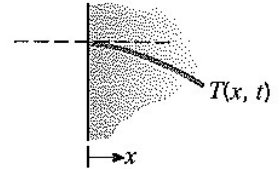
(a) Fluxo térmico diferente de zero

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s''$$



(b) Superfície isolada termicamente ou adiabática

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$



3. Condição de convecção na superfície

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$

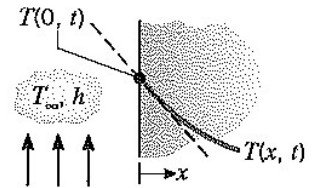


Figura 2.2: Condições de contorno para a equação da difusão de calor na superfície ($x=0$) Fonte: INCROPERA e DEWITT (2008)

2.2 O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE REDE

Este trabalho de pesquisa tem como proposta a aplicação da analogia entre sistemas elétricos e térmicos, auxiliado pelo *software* PSPICE, para solucionar o problema de transferência de calor bidimensional em um cilindro. A técnica é denominada Método de Simulação de Rede, do inglês, *Network Simulation Method (NSM)*, que é um procedimento numérico que tem como base a analogia física entre a condução de calor unidimensional transiente e o fluxo de corrente elétrica. A analogia entre sistemas térmicos e elétricos também é conhecida por analogia Resistência-Capacitância, ou analogia RC.

O SPICE (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*) é um *software* desenvolvido para checar a integridade de circuitos eletrônicos através de simulações, a fim de prever seu comportamento. A partir da entrada gráfica do usuário, o *software* cria

uma lista que descreve todos os elementos do circuito (resistores, capacitores, indutores, fontes de tensão, fontes de corrente, transistores e circuitos integrados), e suas respectivas conexões, dessa lista serão deduzidas as equações para serem resolvidas com o intuito de preverem o comportamento do sistema. Geralmente o equacionamento é dado por equações diferenciais, solucionadas por métodos implícitos, tais como o método de Newton e a técnica das matrizes. NAGEL e PEDERSON (1973) citam que o SPICE foi desenvolvido pelo *Electronics Research Laboratory* da Universidade da Califórnia (EUA).

VLADIMIRESCU (1994) faz um breve histórico sobre o SPICE, onde cita que inicialmente o programa SPICE foi escrito originalmente em linguagem FORTRAN IV, totalizando cerca de 10.000 comandos. Para melhorar a velocidade de processamento, algumas sub-rotinas de manipulação de matrizes foram codificadas em linguagem ASSEMBLY. A sintaxe de entrada de dados possui razoável grau de liberdade, sendo que o programa efetua nos passos iniciais uma verificação dos dados fornecidos, de modo a assegurar a correta descrição do circuito. Diversos parâmetros do circuito podem ser omitidos, adotando-se neste caso valores-padrões (default) previamente definidos. A partir de 1980 tornou-se disponível, a versão SPICE3, cujo programa-fonte pode ser fornecido e codificado em linguagem C para Universidades e Centros de Pesquisa. Uma vez que existem compiladores C para a maioria dos sistemas computacionais, este programa está sendo extensivamente utilizado desde então e tem servido como base de diversos programas comerciais.

VLADIMIRESCU (1994) também cita que o SPICE se tornou o programa padrão para simulação de circuitos elétricos de propósito geral, tanto para análise em corrente contínua quanto corrente alternada, sendo adequado tanto para circuitos elétricos lineares quanto não lineares. O SPICE utilizado no presente trabalho é o PSPICE, fabricado pela *Orcad*.

PSPICE (1994) cita que devido à complexidade dos modelos matemáticos que envolvem os processos de difusão de calor, a analogia entre circuitos térmicos e elétricos tem sido aplicada como uma ferramenta rápida, precisa e simples, dado que os problemas podem ser resolvidos através de um programa de simulação para circuitos elétricos.

O uso da ferramenta PSPICE no âmbito da resolução de problemas complexos da área de engenharia térmica permite que se alcance os resultados desejados de maneira mais direta e simples, possibilitando a solução até mesmo para aqueles que não possuem muita habilidade com as tradicionais modelagens matemáticas.

ZUECO e ALHAMA (2006) definem que este método não requer o estabelecimento de um critério de convergência para solucionar as equações diferenciais infinitas que têm origem na discretização das equações diferenciais parciais do modelo matemático. ALHAMA e CAMPO (2003) citam que o SPICE apresenta uma rápida convergência para análise de transientes, quando comparado com outros métodos de análise de transporte de energia por séries infinitas.

Atualmente o NSM tem sido bastante empregado na resolução de problemas de engenharia na área de transferência de calor. Em ACHARD *et al* (2002) a técnica é utilizada para modelar o comportamento térmico em construções. ALHAMA e CAMPO (2003) utilizaram este método para realizar previsão numérica de temperaturas, com um modelo espaço-temporal aplicado em paredes multicamadas (compostas) para um bocal de um motor de foguete experimental. Em TANG *et al* (2004) e WEIGEN *et al* (2009) a resolução do modelo térmico do transformador é feita através da analogia térmico-elétrica. ZUECO *et al* (2004) usa o método para estudar o comportamento transiente de transferência de calor bidirecional relativo a escoamento laminar em tubos submetidos a um degrau de temperatura. Em ALHAMA *et al* (2005) é apresentada o NSM e estudado a condução de calor para uma grande placa com a temperatura simétrica nas superfícies. ZUECO *et al* (2005) aplicaram o método de especificação da função sequencial, através do NSM, a fim de realizar a estimativa do coeficiente de difusão de calor dependente do tempo via solução de problema inverso em uma placa. ZUECO (2006) resolve um problema de convecção livre (regime transiente), onde um fluido dissipativo escoar ao longo de uma placa vertical semi-infinita com transferência de massa quando a superfície é exposta a um fluxo de calor constante. Já em ZUECO e ALHAMA (2006) são resolvidos, através desse método, os problemas direto e inverso da emissividade da superfície em função da temperatura de sólidos de propriedades térmicas variáveis. ZUECO e CAMPO (2006) aplicaram o NSM para analisar o transiente de transferência de calor por radiação entre as paredes espessas de uma cavidade, utilizando a ideia de Oppenheim. ZUECO e ALHAMA (2007) faz uso da técnica para a estimativa simultânea inversa das propriedades térmicas dependentes da temperatura (condutividade térmica e capacidade volumétrica de calor) de fluidos completamente desenvolvidos fluindo através de um duto circular. BÉG *et al* (2008) apresentam um modelo matemático bidimensional para convecção livre, em meios porosos, através do uso do NSM. YANG e ZHOU (2008) analisa as propriedades de

transferência de calor do diodo laser (LDM) pelo método da equivalência elétrica. Em PENG e WU (2008) é calculada a transferência de calor periódica que ocorre entre edificações e o ambiente externo a fim de simular climatização ambiente e melhorar o conforto térmico, auxiliados pela analogia entre sistemas térmicos e elétricos. Em ZUECO (2009) o fluxo de convecção natural não estacionário de um fluido dissipativo viscoso ao longo de uma placa vertical semi-infinita submetido a uma oscilação periódica da temperatura na superfície é investigado através do NSM. Recentemente SÁNCHEZ *et al* (2012) resolve equações diferenciais acopladas não-lineares para a corrosão por CO₂ com proteção filmes de carbonato de ferro. ALHAMA *et al* (2012) apresenta o NSM como ferramenta para solução de equações diferenciais ordinárias lineares ou não, de qualquer grau e ordem. ZHAO e WEI (2013) apresentam tipos de análises de simulação e os passos detalhados do *software* de simulação *PSPICE* aplicados no projeto de circuitos eletrônicos, onde, eles obtêm os resultados simulados estão de acordo com os resultados teóricos, para análises no domínio do tempo e frequência. TENG e HU (2013) apresentam uma análise de um sistema de uma colhedora de energia de vibração com vários componentes piezelétricos utilizando o *PSPICE*. GALLOY *et al* (2014) utilizam o um modelo elétrico desenvolvido no *PSPICE* para compreender os mecanismos físicos ligados a melhoria da resolução espacial. SILVA (2014) apresenta a solução para o problema unidimensional da equação da condução de calor no sentido longitudinal. RACITI *et al* (2015) apresentam um modelo eletro termal no *PSPICE* com base em camadas de um modulo de eletrônica de potência integrados. MARANO *et al* (2015) apresentam a implementação do modelo elétrico equivalente de silício fotomultiplicadores no *PSPICE* para prever a resposta transitória de eventos de disparo. ISMAIL *et al* (2015) apresentam um método de modelagem de uma planta fotovoltaica e de sistemas de alimentação ininterrupta utilizando o *PSPICE*. SAHA *et al* (2016) apresentam um estudo sobre os efeitos ambientais sobre o desempenho de um módulo de energia solar fotovoltaica através de simulação pelo *PSPICE* com base em dados experimentais.

2.3 A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é um método consolidado na resolução de complexos sistemas de equações diferenciais e que tem encontrado suporte no

desenvolvimento da capacidade de processamento e memória dos computadores atuais, bem como na evolução das linguagens computacionais.

Esta técnica espectral é definida como um método híbrido, devido à combinação entre ferramentas analíticas associadas a procedimentos numéricos que lhes são inerentes. Ela encontra vasto campo de aplicação na solução de problemas típicos de engenharia que envolvem acoplamento, oferecendo controle automático de erro global e significativa redução nos custos computacionais, quando comparada a métodos puramente numéricos.

Inicialmente, ÖZİŞIK e MURRAY (1974) propuseram a ideia da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) aplicada à resolução de sistemas de equações diferenciais parciais, que a princípio não poderiam ser solucionados pela abordagem da separação de variáveis, evitando, assim, a restrição da separação a priori.

Na década de oitenta, a CITT é estendida a aplicações em que tipicamente empregavam-se os métodos numéricos como diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos e seus variantes. Efetuando-se uma avaliação entre os métodos numéricos e a, então, recente técnica observou-se em favor desta as seguintes vantagens:

- Metodologia sistemática de solução;
- Redução do tempo de processamento;
- Controle prescrito de erro;
- Aceleração da taxa de convergência numérica;
- Não utilização de malhas;
- Obtenção de resultados *benchmark*;
- Determinação direta da função no ponto, sem necessidade de cálculos para instantes anteriores ou para outras posições espaciais;
- Possibilidade de integração com outros métodos.

MIKHAILOV e ÖZİŞIK (1984) apresentaram um trabalho formalizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), nele é feita uma classificação dos problemas lineares de valor de contorno (de difusão de calor e massa) a fim de tratar tais problemas através de uma abordagem sistemática e unificada, para tanto foram identificadas sete classes. O objetivo da nova técnica era reduzir as limitações impostas pela transformada clássica. A GITT proporciona soluções numérico-analíticas para problemas de convecção-

difusão, cuja transformação integral resulta em sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas.

A técnica de transformação integral continuou avançando na solução de um número cada vez maior de problemas, sendo eles lineares ou não. COTTA (1993) publicou o trabalho mais completo e sistematizado sobre o tema. O próprio COTTA realizou uma revisão sobre a evolução da técnica posteriormente, em 1998.

São diversas as aplicações desta técnica em modelagens avançadas, ciência e tecnologia, com contribuições nas engenharias aeroespacial, nuclear, de controle de processos, civil e alimentos. Como exemplos mais recentes de estudos publicados: SANTOS (2001) realizou um estudo sobre convecção forçada laminar de fluidos não newtonianos em tubos externamente aletados aplicando GITT, NASCIMENTO *et al* (2006) propuseram uma solução via transformada integral para o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido de fluidos não newtonianos em dutos circulares, VERONESE (2008) analisou o escoamento bidimensional de fluidos não newtonianos com formulação em variáveis primitivas, SILVA *et al* (2009) resolveram um problema de determinação do perfil de temperatura em solos utilizando esta técnica, Da SILVA *et al* (2009) em estudo sobre secagem de alimentos aplicaram a transformação integral na solução de um problema de transferência de massa e OLIVEIRA *et al* (2009) utilizaram GITT no dimensionamento de um sistema de controle térmico.

CAPÍTULO III

MODELAGEM MATEMÁTICA

O objetivo deste capítulo é mostrar a formulação matemática proposta para a resolução do problema físico em estudo. Nele iremos discorrer sobre o método analítico de solução utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), que servirá para a validação dos resultados obtidos através da solução via método de simulação de rede (NSM).

3.1 ESCOLHA DO MÉTODO

O método escolhido para a solução analítica do problema proposto que é um problema linear, foi o método da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), afim de, padronizar os estudos referentes a transferência de calor, pois, OLIVEIRA (2010) utiliza a GITT, para validar o problema de transferência de calor unidimensional radial em um cilindro.

3.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

O que está em análise, como objeto de estudo no presente trabalho, é um problema de condução de calor bidimensional em coordenadas cilíndricas conforme a Figura 4.1. A solução deste problema de temperatura foi desenvolvida utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) que segundo OLIVEIRA (2010), a classificação das equações diferenciais parciais, o número de dimensões físicas consideradas, o tipo de sistema de coordenadas envolvido, a forma das equações principais

e condições de contorno, o modo com o qual o problema se apresenta, se em regime permanente ou em transiente são fatores que afetam na formulação de um modelo matemático e na escolha do método de resolução.

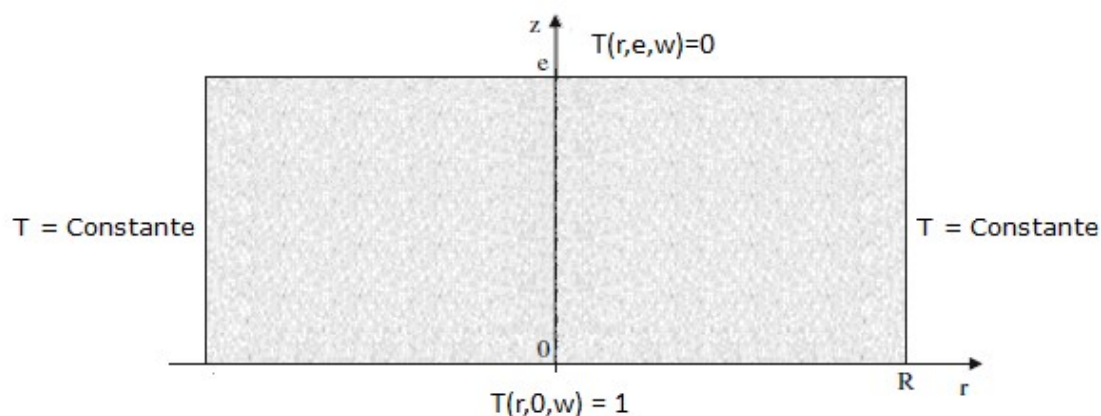


Figura 3.1 Representação da amostra no equacionamento de segunda espécie

Para o problema proposto são consideradas hipóteses simplificadoras para se efetuar a resolução do problema direto, difusão de calor:

- Sistema de coordenadas cilíndricas com simetria radial;
- Desprezam-se os efeitos de convecção e radiação;
- Condução bidimensional em regime permanente;

Segundo SILVEIRA (2012), geralmente, para a aplicação da Técnica Transformada Integral Generalizada é realizado um procedimento com passos sequenciais sistematizados, que dependendo de alguns tipos de problemas, pode haver algumas etapas intermediárias, como por exemplo, a utilização de filtros para otimização e aceleração da convergência.

As cinco etapas básicas são descritas sequencialmente (COTTA, 1997).

- Escolha de um problema auxiliar de autovalor, que contenha o maior número de informações possível acerca do problema original;
- Desenvolvimento do par Transformada–Inversa adequado;
- Transformação integral do problema original pela substituição da fórmula da inversa nos termos não transformáveis ou utilizando a abordagem do balanço integral;

- Resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, através do truncamento da série em uma ordem suficientemente grande para a precisão desejada, obtendo-se os potenciais transformados;

- Aplicação da fórmula inversa ao campo transformado para obter a solução do problema original.

As cinco etapas descritas acima serão observadas no procedimento de solução do problema.

A equação da energia que representa adequadamente o problema bidimensional é dada por:

$$k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

Rearranjando a equação 3.1, temos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2)$$

Para condição de contorno de simetria no eixo central do cilindro ($r = 0$):

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, z, t) = 0 \quad \text{em } r = 0 \quad (3.3)$$

Demais condições de contorno:

$$T(r, 0, t) = T_{\infty} + \Delta T(r) e^{i\omega t} \quad \text{para } z = 0 \quad (3.4)$$

$$h_1(T - T_{\infty}) + k \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{para } z = 1 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, z, t) = 0 \quad \text{para } r = 0 \quad (3.6)$$

$$h_2(T - T_\infty) + k \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ para } r = r_0 \quad (3.7)$$

Condição Inicial:

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (3.8)$$

3.2.1 Adimensionalizando

Segundo SILVEIRA (2012), a prática da adimensionalização para solução de problemas de equações diferenciais parciais fornece subsídios para minimizar os erros, pois reduz o número de parâmetros das equações, evitando trabalhar com ordens de grandezas, melhorando o comportamento numérico da solução, além de que os grupos adimensionais facilitam a interpretação do comportamento físico e generalizam os resultados obtidos.

Serão admitidos os seguintes grupos adimensionais:

- $R = \frac{r}{r_0}$;
- $Z = \frac{z}{r_0}$;
- $\theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T_r}$
- $\tau = \frac{r_0^2 t}{\alpha}$
- $\Omega = \frac{\omega \cdot r_0^2}{\alpha}$
- $Bi_1 = \frac{h_1 \cdot r_0}{k}$

Iremos, inicialmente, trabalhar em cada termo da Equação 3.9 separadamente, onde resolver cada termo separadamente da Equação 3.9, onde substituiremos a temperatura dimensional (T) pelo termo adimensional θ , de modo que a solução da derivada $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ é:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.9)$$

Substituindo o raio dimensional r pelo adimensional R , temos que a derivada $\frac{\partial \theta}{\partial R}$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial r} R_0 \quad (3.10)$$

Logo:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\Delta T_r}{R_0} \frac{\partial \theta}{\partial R} \quad (3.11)$$

Analogamente, substituindo o termo z por Z , temos que a solução da derivada primeira

$\frac{\partial \theta}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial z} R_0 \quad (3.12)$$

Logo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{r_0}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.13)$$

Onde a derivada segunda, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}$ tem como solução a equação (3.14):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{r_0}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{r_0}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (3.14)$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{r_0^2}{\Delta T_r} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\Delta T_r}{r_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \quad (3.15)$$

Substituindo-se os valores obtidos nas Equações (3.11) e (3.15) na Equação 3.2, temos:

$$\frac{1}{R \cdot r_0} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta T_r}{r_0} \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\Delta T_r}{r_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.16)$$

Reorganizando a Equação 3.16, temos:

$$\frac{\Delta T_r}{r_0^2} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\Delta T_r}{r_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.17)$$

Dividindo-se a Equação 3.17 por $\left(\frac{\Delta T_r}{r_0^2}\right)$ resulta na Equação 3.18:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{r_0^2}{\alpha \Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.18)$$

Substituindo mais uma vez o termo T pelo termo adimensional θ , temos como resultado da derivada $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, a Equação 3.19:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.19)$$

Substituindo o tempo adimensional (t) pelo termo adimensional τ , temos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{\Delta T_r} \frac{\partial T}{\partial t} \frac{r_0^2}{\alpha} \quad (3.20)$$

Logo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha \Delta T_r}{r_0^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (3.21)$$

Substituindo a Equação 3.21 na Equação 3.18, temos:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{r_0^2}{\alpha \Delta T_r} \frac{\alpha \Delta T_r}{r_0^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (3.22)$$

Assim, a equação principal adimensionalizada é dada pela Equação 3.23:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (3.23)$$

Adimensionalizando-se as condições de contorno:

$$T(r, z, t) = T_\infty + \Delta T(r) e^{i\omega t} \quad (3.24)$$

Logo:

$$\Delta T_r \cdot \theta(R, Z, \tau) + T_\infty = T_\infty + \Delta T(r) e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

Onde:

$$\theta(R, Z, \tau) = \frac{\Delta T(r)}{\Delta T_r} e^{i\omega t} \quad (3.26)$$

Desta maneira:

$$\theta(R, Z, \tau) = \Delta \theta \cdot e^{i\omega t} \quad (3.27)$$

Substituindo-se os termos t e ω pelos seus respectivos termos adimensionais, temos:

$$\theta(R, Z, \tau) = \Delta\theta e^{i\Omega\tau} \text{ para } Z = 0 \quad (3.28)$$

Para condição de contorno em $Z = Z_0$, temos:

$$h_1(\theta \cdot \Delta T_r + T_\infty - T_\infty) + k \frac{\Delta T_r}{r_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad \text{para } Z = Z_0 \quad (3.29)$$

Substituindo a Equação 3.11 na Equação 3.29, temos a Equação 3.30:

$$h_1(\theta \cdot \Delta T_r + T_\infty - T_\infty) + k \frac{\Delta T_r}{r_0} \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad (3.30)$$

Após certa manipulação algébrica da Equação 3.30 e dividindo-a por h_1 , temos:

$$\theta + \frac{k}{h_1 \cdot r_0} \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad (3.31)$$

Reorganizado a Equação 3.31, temos:

$$\theta \frac{h_1 \cdot r_0}{k} + \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad (3.32)$$

Assumindo-se o termo que multiplica o θ igual a Bi_1 :

$$Bi_1 \theta + \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \text{para } Z = 1 \quad (3.33)$$

Por analogia:

$$Bi_2 \theta + \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \text{para } R = 1 \quad (3.34)$$

Substituindo o termo adimensional na Equação 3.6 temos:

$$\frac{\Delta T_r}{r_0} \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \text{para } R = 0 \quad (3.35)$$

Desta maneira:

$$\Delta T_r \cdot \theta + T_\infty = T_0 \quad (3.36)$$

Logo:

$$\theta = \frac{T_0 - T_\infty}{\Delta T_r} \rightarrow \theta = \Delta \theta \quad (3.37)$$

$$\theta(R, Z, \tau) = \theta_0 \quad \text{para } \tau = 0 \quad (3.38)$$

Após a adimensionalização o problema proposto é regido pela Equação 3.23 (principal) e pelas condições de contorno e inicial dadas respectivamente pelas Equações 3.27, 3.33, 3.34, 3.35 e 3.38. O problema para um tempo suficientemente longo pode ser reescrever conforme as equações a seguir:

$$\theta(R, Z, \tau) = \theta^*(R, Z) \Delta \theta e^{i\Omega \tau} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = \Delta \theta e^{i\Omega \tau} \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \Delta \theta e^{i\Omega \tau} \frac{\partial^2 \theta^*(R, Z)}{\partial Z^2} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \Delta \theta \cdot i \cdot \Omega \cdot e^{i\Omega \tau} \theta^*(R, Z) \quad (3.42)$$

Substituindo as Equações 3.39-3.42 na Equação 3.23, temos respectivamente a Equação geral, condições de contorno e inicial:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \cdot \Delta \theta e^{i\Omega\tau} \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} \right] + \Delta \theta e^{i\Omega\tau} \frac{\partial^2 \theta^*(R, Z)}{\partial Z^2} - \Delta \theta \cdot i \cdot \Omega \cdot e^{i\Omega\tau} \theta^*(R, Z) \quad (3.43)$$

Manipulando a Equação 3.43, temos:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \theta^*(R, Z)}{\partial Z^2} = i \cdot \Omega \cdot \theta^*(R, Z) \quad (3.44)$$

Para condição de contorno em $Z = 0$

$$\theta^*(R, Z) \Delta \theta e^{i\Omega\tau} = \Delta \theta e^{i\Omega\tau} \quad (3.45)$$

Logo:

$$\theta^*(R, Z) = 1 \quad (3.46)$$

Para condição de contorno em $Z = 1$

$$Bi_1 \cdot \theta^*(R, Z) \cdot \Delta \theta e^{i\Omega\tau} + \Delta \theta e^{i\Omega\tau} \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} = 0 \quad (3.47)$$

Manipulando a Equação 3.47, temos:

$$Bi_1 \cdot \theta^*(R, Z) + \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} = 0 \quad (3.48)$$

De modo análogo temos que a condição de contorno para $R = 1$

$$Bi_2 \cdot \theta^*(R, Z) + \frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} = 0 \quad (3.49)$$

Para a condição de contorno $R = 0$

$$\frac{\partial \theta^*(R, Z)}{\partial R} = 0 \quad (3.50)$$

Para condição inicial, $\tau = 0$, temos:

$$\theta^*(R, Z) \Delta \theta e^{i\Omega \tau} = \Delta \theta \quad (3.51)$$

Logo:

$$\theta^*(R, Z) = \frac{1}{e^{i\Omega \tau}} \quad (3.52)$$

Onde $\theta^*(R, Z, 0) = 0$ para um tempo muito longo.

Como consequência, o novo problema é regido pela Equação 3.44, e as condições de contorno e inicial, expressas, respectivamente pelas Equações 3.46, 3.48-3.50 e 3.52.

Após todo o problema ter sido adimensionalizado iremos aplicar a técnica da transformada integral generalizada, seguindo o seu passo a passo:

3.2.2 Escolha do problema de autovalor

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d\varphi_i(\mu_i R)}{dR} \right] + \mu_i^2 \varphi_i(\mu_i R) = 0 \quad (3.53)$$

$$\frac{d\varphi_i(\mu_i R)}{dR} = 0 \quad \text{para } R = 0 \quad (3.54)$$

$$Bi_2 \cdot \varphi_i(\mu_i R) + \frac{d\varphi_i(\mu_i R)}{dR} = 0 \quad (3.55)$$

O problema representado pelas Equações 3.53-3.55 têm solução do tipo:

Onde a autofunção é dada pela Equação:

$$\varphi_i(\mu_i, R) = J_0(\mu_i, R) \quad (3.56)$$

A norma é definida pela Equação:

$$N_i(\mu_i) = \frac{J_0^2(\mu_i) (B i_2^2 + \mu_i^2)}{2 \mu_i^2} \quad (3.57)$$

Assim, os autovalores são obtidos da Equação:

$$\mu_i \cdot J_0'(\mu_i) + B i_2 \cdot J_0(\mu_i) = 0 \quad (3.58)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\bar{\varphi}_i(\mu_i, R) = \frac{\varphi_i(\mu_i, R)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \quad (3.59)$$

3.2.3 Desenvolvimento do par de fórmula transformada-inversa

$$\begin{cases} \theta^*(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\mu_i, R) \cdot \bar{\theta}_i(Z) & \text{Inversa} \\ \bar{\theta}_i(Z) = \int_0^1 R \cdot \theta^*(R, Z) \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) dR & \text{Transformada} \end{cases} \quad (3.60) \quad (3.61)$$

3.2.4 Transformação Integral do problema original

Operando os dois lados da Equação 3.44 com o operador $\int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) dR$ resulta:

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R. \frac{\partial}{\partial R} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \bar{\theta}_j(Z) \right) \right] dR +$$

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R) \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \bar{\theta}_j(Z) \right) dR = \int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R). \bar{\theta}_j(Z) dR$$

(3.62)

Resolvendo separadamente cada termo da Equação 3.62, temos:

A solução do primeiro termo, é dada por:

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R. \frac{\partial}{\partial R} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R). \bar{\theta}_j(Z) \right) \right] dR$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\theta}_j(Z) \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R. \frac{\partial \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R)}{\partial R} \right] dR$$

(3.62a)

Para o segundo termo, temos:

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R) \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \bar{\theta}_j(Z) \right) dR$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_j(Z)}{\partial Z^2} \int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R) dR$$

(3.62b)

Para o terceiro termo que é o termo depois da igualdade, temos:

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R) \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R). \bar{\theta}_j(Z) dR$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\theta}_j(Z) \int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R) dR \quad (3.62c)$$

Devido à condição de ortogonalidade das autofunções tem-se:

$$\int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R) dR = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Das equações (3.62a) e (3.53), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\theta}_j(Z) \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R. \frac{\partial \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R)}{\partial R} \right] dR = \\ \sum_{j=1}^{\infty} -\mu_j^2. \bar{\theta}_j(Z) \int_0^1 R. \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R). \tilde{\varphi}_j(\mu_j, R) dR \end{aligned} \quad (3.63)$$

Aplicando-se, agora, a condição de ortogonalidade nas equações (3.63), (3.62b) e (3.62c), temos como soluções as respectivas equações:

$$(3.63) \rightarrow -\mu_i^2. \bar{\theta}_i(Z)$$

$$(3.62b) \rightarrow \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Z)}{\partial Z^2}$$

$$(3.62c) \rightarrow \bar{\theta}_i(Z)$$

Portanto, a solução do problema representado pela Equação 3.44, é dada por:

$$-\mu_i^2. \bar{\theta}_i(Z) + \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Z)}{\partial Z^2} = \bar{\theta}_i(Z). i\Omega \quad (3.64)$$

Reorganizando os termos da Equação 3.64, temos:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Z)}{\partial Z^2} - \mu_i^2 \cdot \bar{\theta}_i(Z) - \bar{\theta}_i(Z) \cdot i\Omega = 0 \quad (3.65)$$

Logo, após nova reorganização, temos:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Z)}{\partial Z^2} - \bar{\theta}_i(Z) (\mu_i^2 + i\Omega) = 0 \quad (3.66)$$

Fazendo $\xi_i^2 = \mu_i^2 + i\Omega$, e substituindo na Equação 3.66, temos:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Z)}{\partial Z^2} - \xi_i^2 \bar{\theta}_i(Z) = 0 \quad (3.67)$$

3.2.5 Solução do problema transformado

A Equação 3.67 tem solução do tipo:

$$\bar{\theta}_i(Z) = C_1 e^{\xi_i Z} + C_2 e^{-\xi_i Z} \quad (3.68)$$

Onde as constantes C_1 e C_2 são obtidas a partir das condições de contorno (3.46) e (3.48) transformando:

Da equação (3.46), temos:

$$\int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_\nu, R) \cdot \theta^*(R, Z) dR - \int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_\nu, R) dR \quad (3.69)$$

Logo,

$$\bar{\theta}_i(0) = \int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_\nu, R) dR \quad (3.70)$$

A Equação 3.70 tem como solução:

$$\bar{\theta}_i(0) = \frac{I_1(\mu_i)}{\mu_i} \quad (3.71)$$

Da equação (3.48), resulta:

$$\int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) \cdot \theta^*(R, Z) \cdot Bi_1 \, dR + \int_0^1 \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) \frac{\partial}{\partial Z} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varphi}_j(\mu_j, R) \bar{\theta}_j(Z) \, dR \quad (3.72)$$

Reorganizando a Equação 3.72, temos:

$$Bi_1 \int_0^1 R \cdot \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) \cdot \theta^*(R, Z) \cdot + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\bar{\theta}_j(Z)}{dZ} \int_0^1 \bar{\varphi}_i(\mu_i, R) \cdot \bar{\varphi}_j(\mu_j, R) \, dR = 0 \quad (3.73)$$

Que tem como solução:

$$Bi_1 \cdot \bar{\theta}_i(Z) + \frac{d\bar{\theta}_i(Z)}{dZ} = 0 \quad (3.74)$$

Para $Z = 0$, temos como solução da Equação:

$$\bar{\theta}_i(Z) = C_1 e^{\xi_i Z} + C_2 e^{-\xi_i Z} \quad (3.75)$$

Onde:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \bar{\theta}_i(0) \\ C_1 + C_2 = \frac{I_1(\mu_i)}{\mu_i} \end{cases}$$

Fazendo:

$$\frac{d\theta_i(z)}{dz} = C_1 \xi_i e^{\xi_i z} - C_2 \xi_i e^{-\xi_i z} \quad (3.76)$$

Substituindo as equações 3.75 e 3.76 na Equação 3.74, temos:

$$C_1 \xi_i e^{\xi_i} - C_2 \xi_i e^{-\xi_i} + B i_1 [C_1 e^{\xi_i} + C_2 e^{-\xi_i}] = 0 \quad (3.77)$$

Reorganizando a Equação 3.77, temos:

$$C_1 [\xi_i e^{\xi_i} + B i_1 e^{\xi_i}] + C_2 [B i_1 e^{-\xi_i} - \xi_i e^{-\xi_i}] = 0 \quad (3.78)$$

Substituindo $C_2 = \bar{\theta}_i(0) - C_1$, temos:

$$C_1 \xi_i e^{\xi_i} + C_1 B i_1 e^{\xi_i} + (\bar{\theta}_i(0) - C_1) [B i_1 e^{-\xi_i} - \xi_i e^{-\xi_i}] = 0 \quad (3.79)$$

Rearranjando a Equação 3.79 temos a Equação 3.80:

$$C_1 \xi_i e^{\xi_i} + C_1 B i_1 e^{\xi_i} + \bar{\theta}_i(0) B i_1 e^{-\xi_i} - \bar{\theta}_i(0) \xi_i e^{-\xi_i} - C_1 B i_1 e^{-\xi_i} + C_1 \xi_i e^{-\xi_i} = 0 \quad (3.80)$$

Rearranjando novamente, temos:

$$C_1 [\xi_i e^{\xi_i} + B i_1 e^{\xi_i} - B i_1 e^{-\xi_i} + \xi_i e^{-\xi_i}] + \bar{\theta}_i(0) [B i_1 e^{-\xi_i} - \xi_i e^{-\xi_i}] = 0 \quad (3.81)$$

Logo,

$$C_1 = \frac{-\bar{\theta}_i(0) [B i_1 e^{-\xi_i} - \xi_i e^{-\xi_i}]}{\xi_i e^{\xi_i} + B i_1 e^{\xi_i} - B i_1 e^{-\xi_i} + \xi_i e^{-\xi_i}} \quad (3.82)$$

Reorganizando a Equação 3.82, temos:

$$C_1 = \frac{\bar{\theta}_i(0)e^{-\xi_i[Bi_1]}}{e^{-\xi_i[\xi_i e^{2\xi_i} + \xi_i + Bi_1 e^{2\xi_i} - Bi_1]}} \quad (3.83)$$

Reorganizando novamente, temos:

$$C_1 = \frac{\bar{\theta}_i(0)[\xi_i - Bi_1]}{-Bi_1 + Bi_1 e^{2\xi_i} + \xi_i + \xi_i e^{2\xi_i}} \quad (3.84)$$

Logo, $C_2 = \bar{\theta}_i(0) - C_1$ onde iremos substituir a Equação 3.71:

$$C_2 = \frac{J_1(\mu_i)}{\mu_i} - C_1 \quad (3.85)$$

3.2.6 Recuperação do Potencial Original

Por fim, para a obtenção da solução que representa o campo de temperatura do problema proposto, teremos que substituir a Equação 3.61 na Equação 3.51, para explicitar a expressão que representa o comportamento da temperatura para tal problema.

$$\theta(R, Z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\mu_i, R) \cdot \bar{\theta}_i(Z) \cdot \Delta\theta e^{i\lambda_i \tau} \quad (3.86)$$

CAPÍTULO IV

MÉTODO DA SIMULAÇÃO DE REDES

O objetivo central deste capítulo é mostrar a solução do problema de condução de calor bidimensional pelo Método da Simulação de Redes (NSM), e toda a metodologia envolvida para obter a malha que representa o sistema proposto.

4.1 METODOLOGIA DAS SIMULAÇÕES

Para as simulações dos problemas de condução de calor bidimensional nas dimensões radial e longitudinal fez-se o uso da analogia existente entre as grandezas térmicas e as grandezas elétricas, vide tabela 4.1.

O diagrama esquemático do circuito elétrico é feito dividindo-se o meio físico em um determinado número de células (discretização espacial), ou seja, para cada malha mínima no circuito elétrico projetado, tipo rede de Resistores-Capacitores (rede RC), o *software* gera um arquivo lista (*netlist*) descrevendo a composição e organização do sistema, então cria um conjunto de equações diferenciais, uma para cada volume de controle, obtida através da discretização espacial das equações definidas pelo modelo matemático no processo físico.

Para o dimensionamento dos componentes do circuito é necessário considerar a geometria cilíndrica do sistema, as propriedades térmicas (ρ , C_p e κ) dos materiais, o comprimento e raio do cilindro. Para um sistema bidimensional iremos considerar uma aproximação pelo teorema da superposição, o qual segundo KURUKAWA (2013) princípio da superposição estabelece que a resposta (a corrente e/ou a tensão) em qualquer parte de um circuito linear que tenha mais de uma fonte independente pode ser obtida a partir da soma das respostas

originadas pela ação de cada fonte independente agindo sozinha. Assim o teorema da superposição garante que em qualquer circuito, que contenha mais de uma fonte, a corrente ou a tensão pode ser obtida somando-se algebricamente todas as correntes ou tensões causadas pela ação individual de cada fonte, que exista no circuito, sendo todas as outras fontes de tensão substituídas por curto-circuitos e as fontes de corrente substituídas por circuitos abertos. Com base no teorema da superposição criaremos uma configuração que consiste na soma (composição) das células obtidas durante a resolução dos problemas, assumidos, como unidimensionais nos sentidos radial e longitudinal.

Tabela 4.1 - Analogia entre Grandezas nos Circuitos Elétricos e Térmicos. Fonte: Oliveira 2010

ELÉTRICAS			TÉRMICAS		
Descrição	Símbolo	Unidade	Descrição	Símbolo	Unidade
Diferença de potencial (voltagem)	Δv	V	Diferença de temperatura	Δt	K
Corrente	I	A	Taxa de transferência de calor	$\dot{q}$	W
Carga	Q_e	C	Energia térmica	Q	J
Tempo	T_e	S	Tempo	T_t	S
Resistência	R	Ω	Resistência térmica	R	K/W
Capacitância	C	F	Capacitância térmica	C	J/K

4.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA BIDIMENSIONAL PELO NSM

O estudo propõe a criação de uma malha genérica, baseada no teorema da superposição, a proposta consiste na criação de uma malha que englobe uma gama de condições de contorno diferentes em uma superfície cilíndrica, independente do problema ser em regime transitório ou permanente, para a resolução iremos sobrepor as resistências radiais e longitudinais e superpor (somar) o volume representado pela capacitância das células unidimensionais nos dois sentidos.

Para a determinação dos parâmetros da malha bidimensional, iremos calcular os parâmetros nos sentidos radial e longitudinal, separadamente. Onde para os cálculos no sentido radial, segundo KARPLUS (1958) pode-se, simplesmente, utilizar as equações (4.2.1) e (4.2.2). Por outro lado, os parâmetros no sentido longitudinal, podem ser encontrados as equações (4.2.3) e (4.2.4)

$$R_r = \frac{\ln\left(\frac{r_{n+\Delta}}{r_n}\right)}{2\pi kL} \quad (4.2.1)$$

$$C_r = \pi \rho c_p (r_{n+\Delta}^2 - r_n^2) L \quad (4.2.2)$$

$$R_t = \frac{1}{k} \frac{\Delta L}{2\pi(r_{n+\Delta}^2 - r_n^2)} \quad (4.2.3)$$

$$C_t = \Delta L \cdot \pi \cdot (r_{n+\Delta}^2 - r_n^2) \cdot \rho \cdot c_p \quad (4.2.4)$$

$$\Delta L = \frac{L}{nd} \quad (4.2.5)$$

Onde R_r e R_t são os valores das resistências elétricas que representam o efeito dissipativo do volume, considerando que r é a posição radial, k é condutividade térmica do material, L é o comprimento do cilindro, ρ e c_p são, respectivamente a massa específica e o calor específico do meio, o índice n indica o número do nó no circuito, ΔL é o valor do

comprimento dividido pela quantidade de divisões ou discretizações (nd). É importante lembrar que o valor da resistência no sentido longitudinal utilizada no circuito deve ser a metade do valor calculado, devido à necessidade de evitar que a última célula tenha seu capacitor anulado ao ligar em paralelo com o terra do circuito elétrico.

Obtidos os valores dos parâmetros, faremos a soma (superposição) da célula unitária unidimensional radial proposta por OLIVEIRA (2010) vide figura 4.2.1 com a célula unitária unidimensional longitudinal proposta por SILVA (2014) vide figura 4.2.2, a célula bidimensional resultante da aproximação pelo teorema da superposição é apresentada na figura 4.2.3.

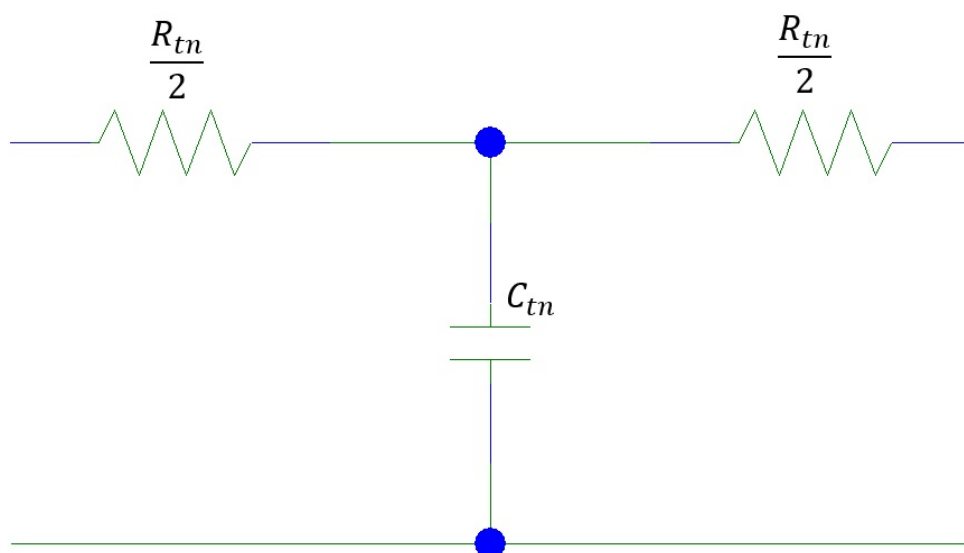


Figura 4.1: Circuito no PSPICE da célula unitária unidimensional transversal

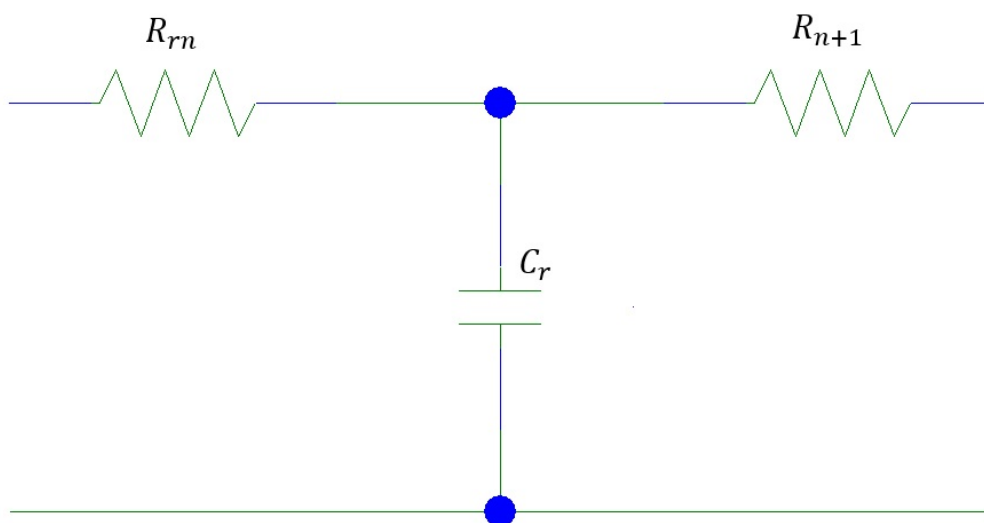


Figura 4.2: Circuito no PSPICE da célula unitária unidimensional radial

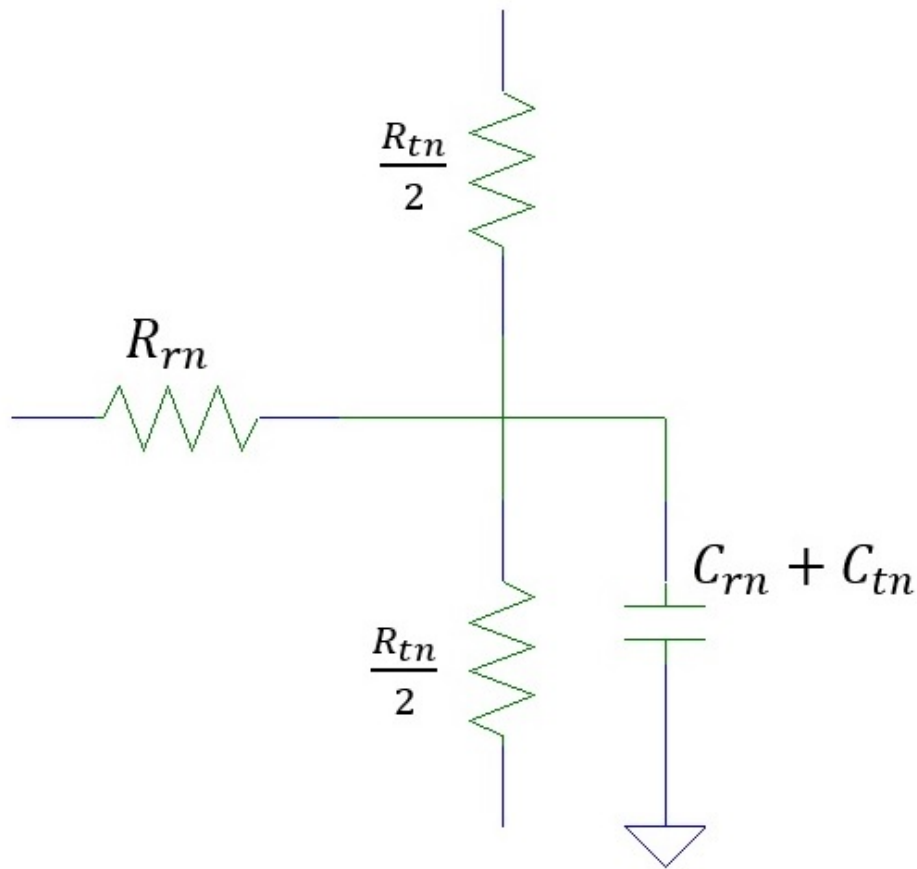


Figura 4.3: Circuito no PSPICE da célula unitária bidimensional

Com base na célula unitária radial OLIVEIRA (2010) explica a dinâmica do circuito conforme na Figura 4.4, onde T é o potencial do nó em Volts (V), i representa a corrente elétrica em Amperes (A), R resistência em Ohms (Ω), C representa a capacitância em Faraday (F), r a posição radial em metros (m), os índices n e Δ , referem-se ao número do nó e ao incremento, respectivamente. As condições de contorno são implementadas por dispositivos elétricos adicionais nas localizações requeridas. Podemos considerar um circuito alimentado por uma fonte de tensão, a seguir medimos a evolução da tensão elétrica em pontos específicos para estudar o comportamento do sistema. Calculados os valores dos componentes do circuito, faz-se um diagrama esquemático no *software* *PSPICE* e procede-se uma simulação, na qual especificamos o tipo de análise que iremos realizar e logo após a seleção especificamos o tempo total de observação, determinando, também, os intervalos de tempo em que serão feitas as tomadas (aquisições) dos valores de

tensão elétrica, vide Figura 4.5. O próprio programa fornece um gráfico de saída dos dados, as tensões nos pontos ao longo do tempo, equivalendo às medidas de temperatura nas posições especificadas em função do tempo. Numa primeira abordagem de solução, ao supor que os valores de R e C são constantes, temos que solucionar um problema linear de difusão de calor, ou seja, tomam-se as propriedades do meio como sendo independentes da temperatura.

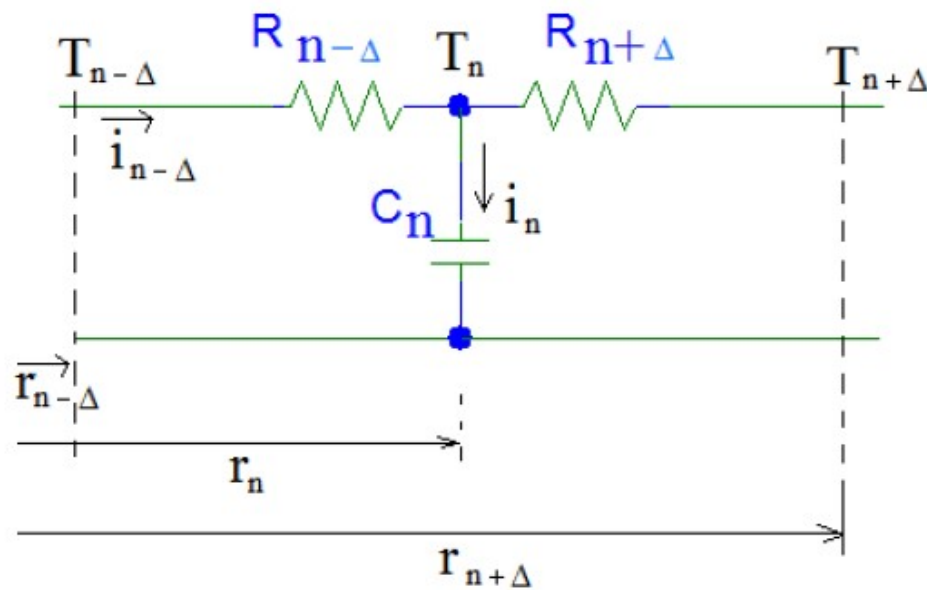


Figura 4.4: Célula, ou volume elementar do circuito elétrico em rede RC. Fonte: OLIVEIRA 2010

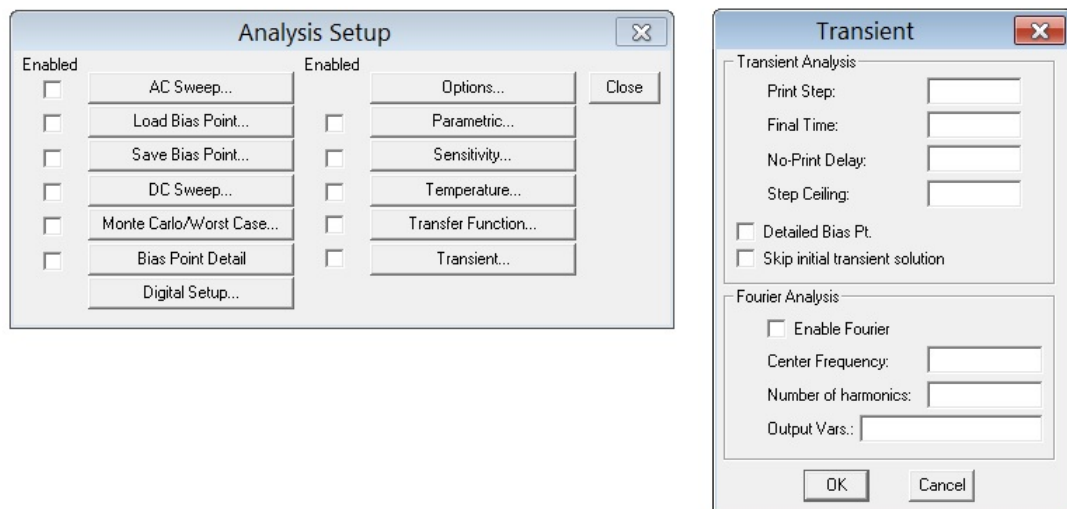


Figura 4.5: Definição do tipo de análise e definição dos valores desejados no *PSpice*

Utilizaremos, para efeito de comparação exemplos de circuitos elétricos em rede RC com quatro células, isto é, os sistemas divididos em quatro volumes elementares (células) representados nas Figura 4.6, 4.7 e 4.8, as quais nos permitem observar os diagramas esquemáticos no *PSPICE* dos respectivos circuitos unidimensional radial, longitudinal e bidimensional, com a ilustração dos componentes e a visão geral da tela de diagramação do *software*. O circuito, basicamente, consiste numa rede de resistores e capacitores e o número de nós faz um ajuste na precisão de localização de um ponto, o aumento do número de nós implica no refinamento da malha de discretização espacial. Para a Figura 4.8 os resistores R_t e os capacitores C iremos considerar os valores obtidos pelas Equações 4.2.6 e 4.2.7.

$$R_{tn} = \frac{R_{tn}}{2} + \frac{R_{tn}}{2} \quad (4.2.6)$$

$$C_n = C_{vn} + C_{tn} \quad (4.2.7)$$

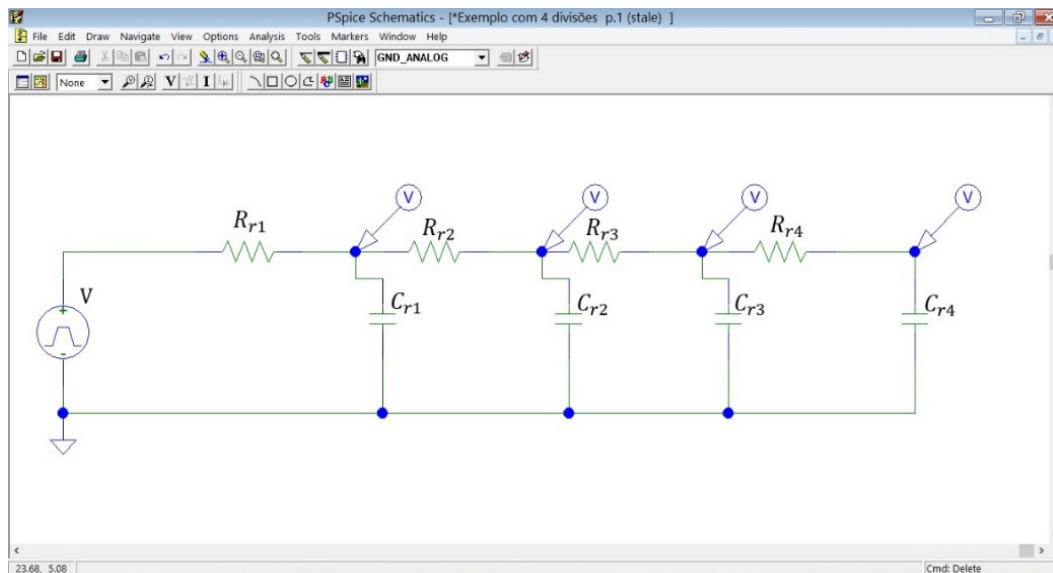


Figura 4.6: Diagrama esquemático de um circuito RC radial no *PSPICE*

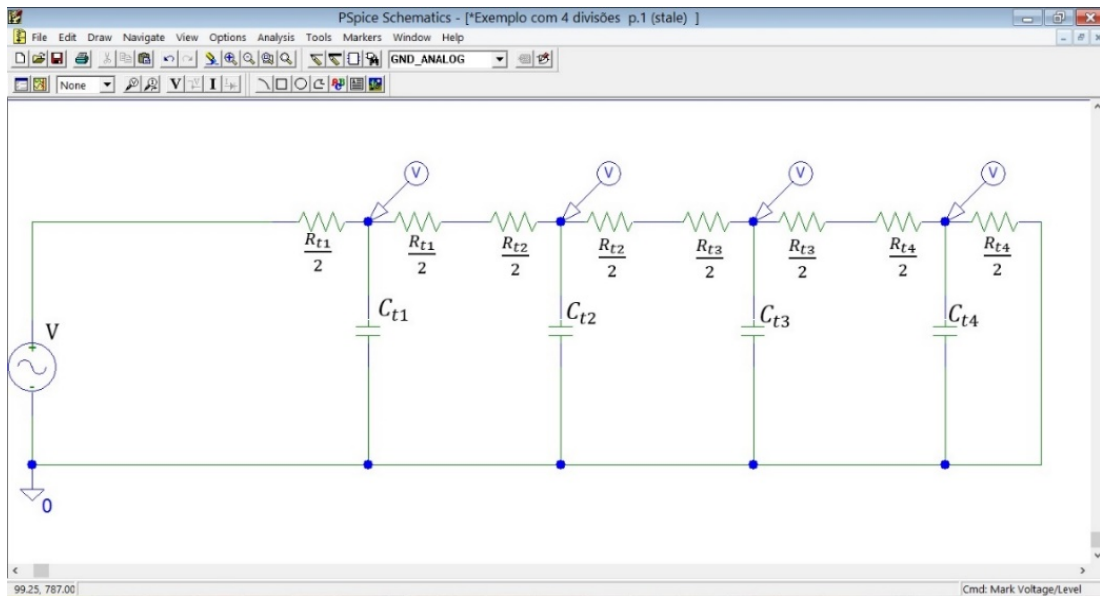


Figura 4.7: Diagrama esquemático de um circuito RC transversal no *PSPICE*

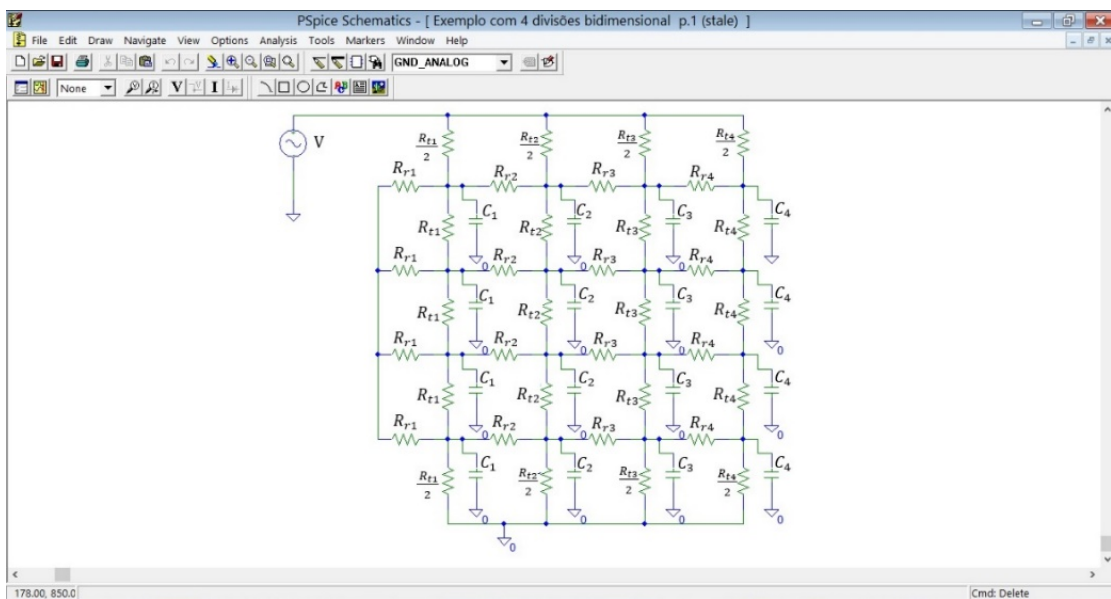


Figura 4.8: Diagrama esquemático de um circuito RC bidimensional no *PSPICE*

Após a simulação, o programa fornece uma saída de dados que pode ser diretamente analisada, como se pode verificar pela Figura 4.9 e, outra opção, é um arquivo com os resultados numericamente expressos (com extensão *.out*), o qual pode ser manipulado em editores de texto e planilhas eletrônicas.

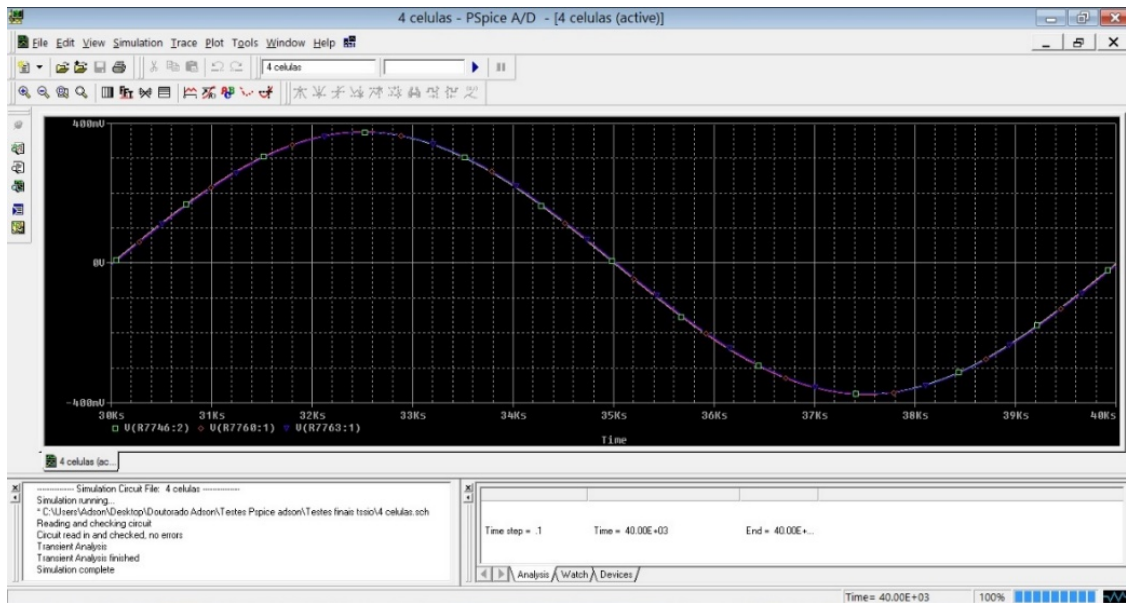


Figura 4.9: Tela para visualização do resultado da simulação de um circuito em rede RC bidimensional no *PSIPCE*

As principais vantagens deste método são: solução em verdadeiro tempo real, velocidade de processamento, ausência de sofisticada modelagem matemática e análise de convergência. Suas desvantagens residem na precisão, devido à discretização espacial e no projeto das células elementares, principalmente em sistemas multidimensionais.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DE RESULTADOS

No presente capítulo apresentam-se os resultados adquiridos ao longo do desenvolvimento deste estudo. Inicialmente, foram obtidos os resultados pela solução do alcançada através do método analítico, via Técnica da Transformação Integral Generalizada (GITT), posteriormente tem-se os resultados da solução pelo Método de Simulação de Rede (NSM), de modo que, a comparação entre os dois resultados valide o método proposto pelo estudo.

5.1 ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA

Segundo OLIVEIRA (2010) a solução do sistema de equações diferenciais através da GITT implica no truncamento de uma série infinita em um número finito de termos, de onde surge a necessidade da observação do potencial calculado no instante sugerido para efeito de análise de convergência dos resultados obtidos.

Para fins de análise, adotaremos os seguintes valores adimensionais: $r_0 = 0.1$, $l = 0.005$, uma discretização com 12 divisões, tanto para o raio quanto para o comprimento e consideraremos a posição radial $R = 0$ como ponto de observação, onde, segundo OLIVEIRA (2010), ocorre o pior caso, pois, fisicamente isto se deve ao fato de que esta posição sofre influência constante da condição de simetria e a maior distância possível da perturbação. Iremos confrontar os resultados obtidos com um valor de referência obtido pelos testes realizados por SILVA (2014), tendo em vista que o raio é muito maior que o comprimento do cilindro de forma que o resultado bidimensional pode

ser aproximado ao resultado unidimensional que foi validado experimentalmente, analiticamente e por simulação. Por se tratar de uma análise em regime permanente, será considerado para uma entrada senoidal um tempo suficientemente longo (30000s a 40000s), utilizaremos também o mesmo material utilizado por SILVA (2014), onde temos que, a condutividade térmica é ($k = 1,38$), massa específica ($\rho = 2203$) e o calor específico do meio ($c_p = 772$), suas unidades são respectivamente, $W/m.K$, kg/cm^3 , $J/kg.K$.

A convergência pode ser estudada através do aumento do número de termos da série, podendo-se verificar a sua influência nas Figuras 5.1-5.7. Percebe-se que com 50 termos na série, temos uma boa aproximação com a tensão de referência fornecida pelo experimento de SILVA (2014), percebe-se também que com o aumento do número de termos o resultado pouco se altera, de modo que adotaremos 50 termos para demais testes posteriores.

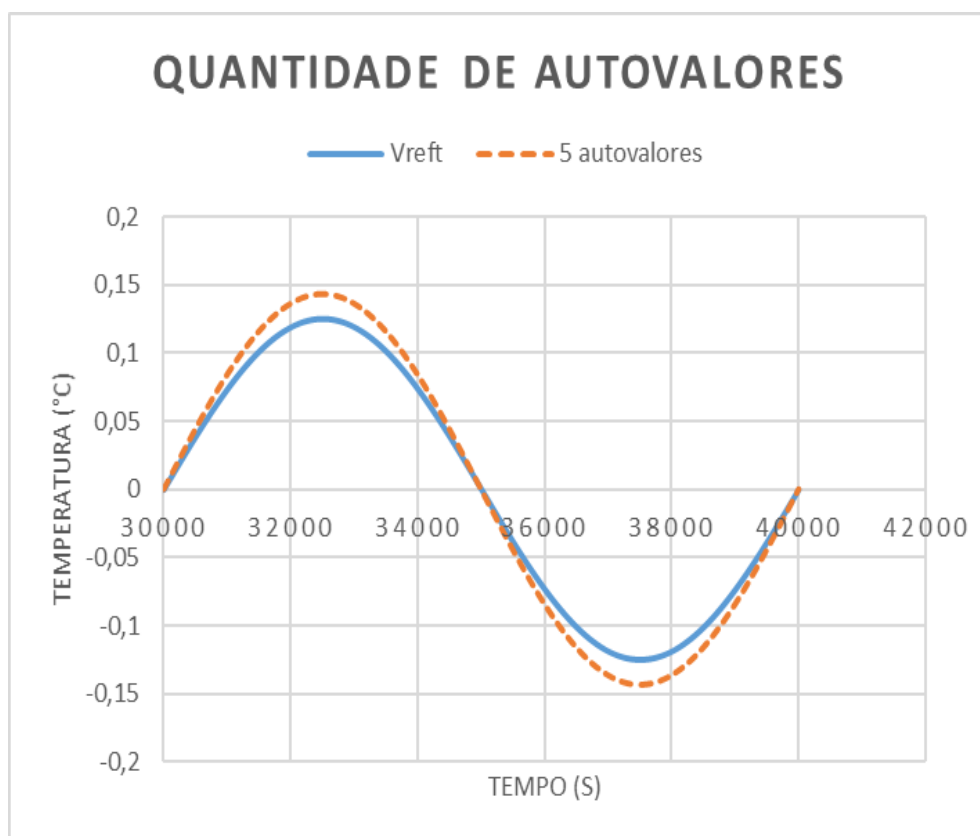


Figura 5.1: Gráfico com a solução contendo 5 autovalores

Percebe-se que ao aumentar a quantidade de autovalores da solução proposta para 10 autovalores, a solução ficou com uma amplitude menor que a temperatura de referência, conforme Figura 5.2.

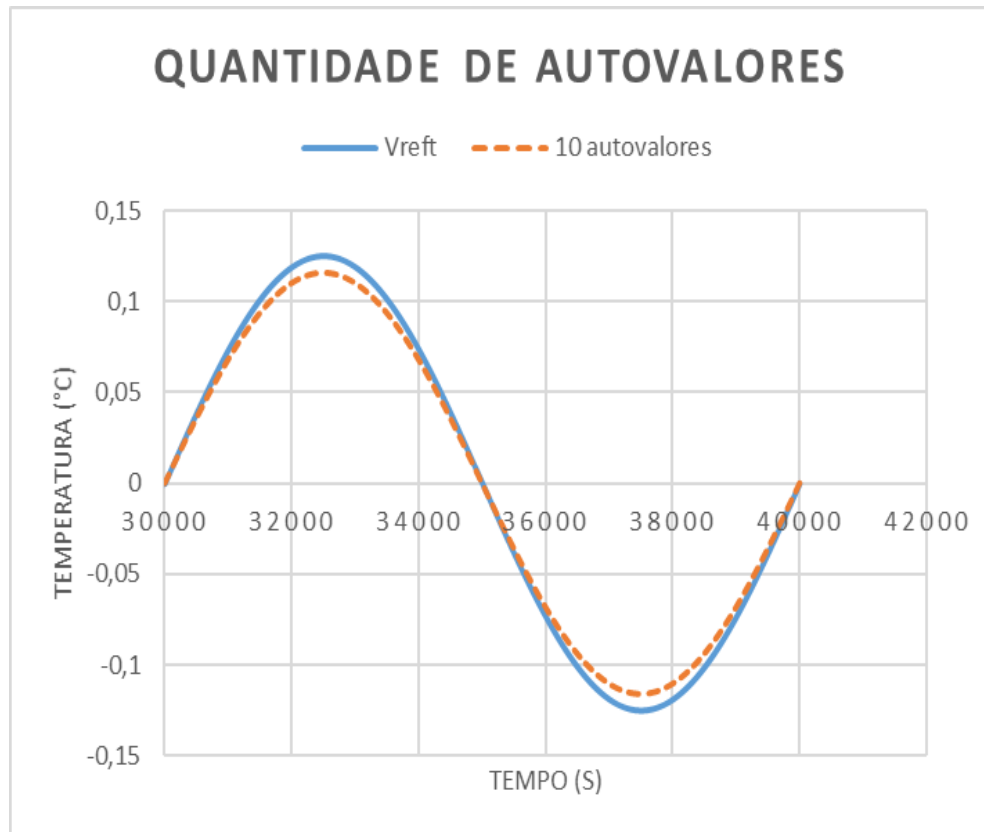


Figura 5.2: Gráfico com a solução contendo 10 autovalores

Ao dobrar a quantidade de autovalores da solução obtida pela Figura 5.1, percebe-se que a solução proposta começa a se aproximar da temperatura de referência, conforme a Figura 5.3.

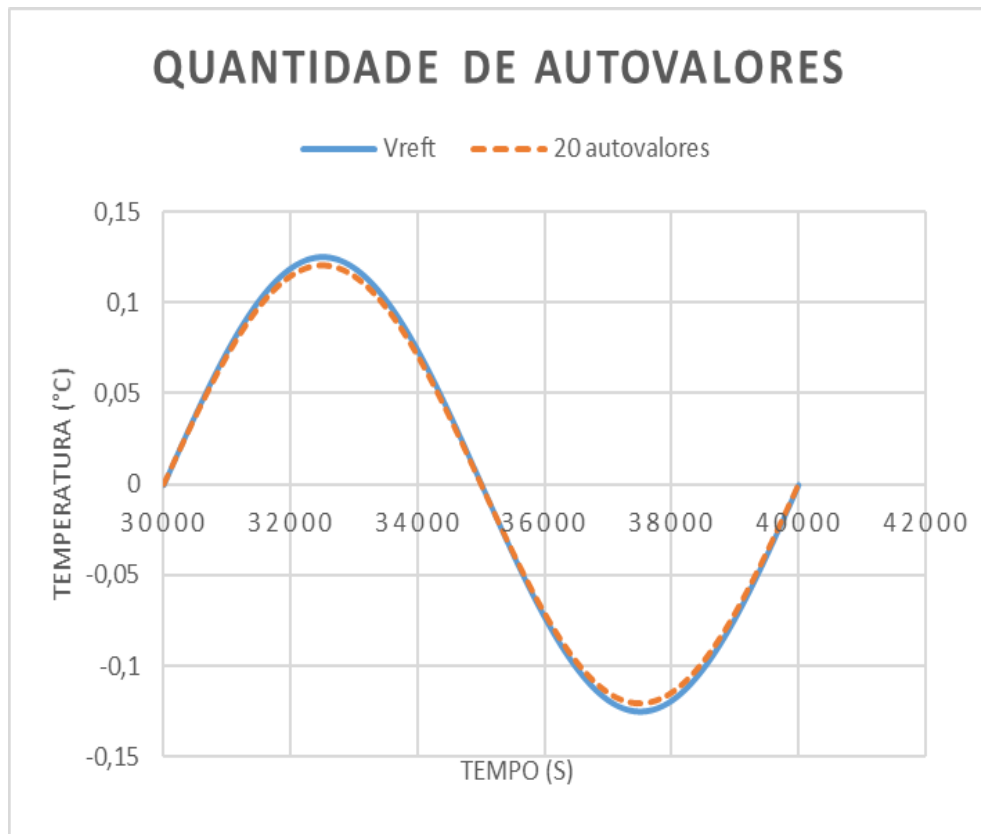


Figura 5.3: Gráfico com a solução contendo 20 autovalores

Dobrando mais uma vez a quantidade de autovalores da solução, iremos obter a resposta referente a 40 autovalores, onde, pode-se observar que a curva da solução proposta, se aproxima da temperatura de referência.

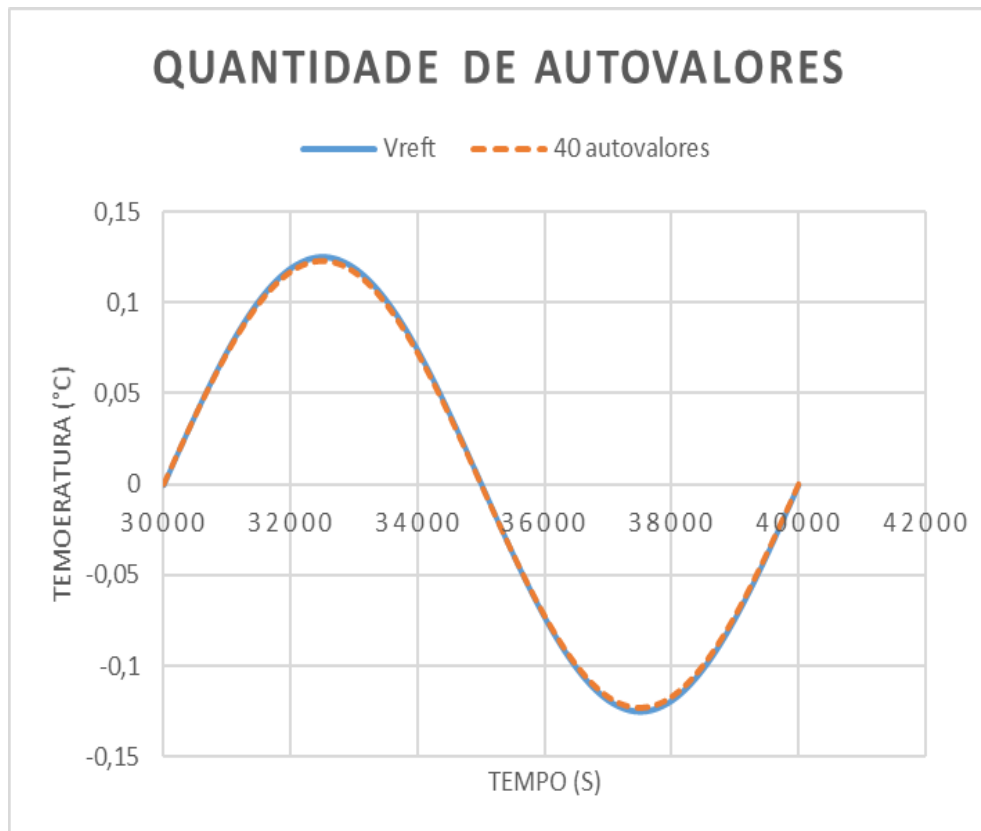


Figura 5.4: Gráfico com a solução contendo 40 autovalores

Aumentando a quantidade de autovalores para 50, pode-se observar que as curvas de temperatura estão sobrepostas, conforme a Figura 5.5.

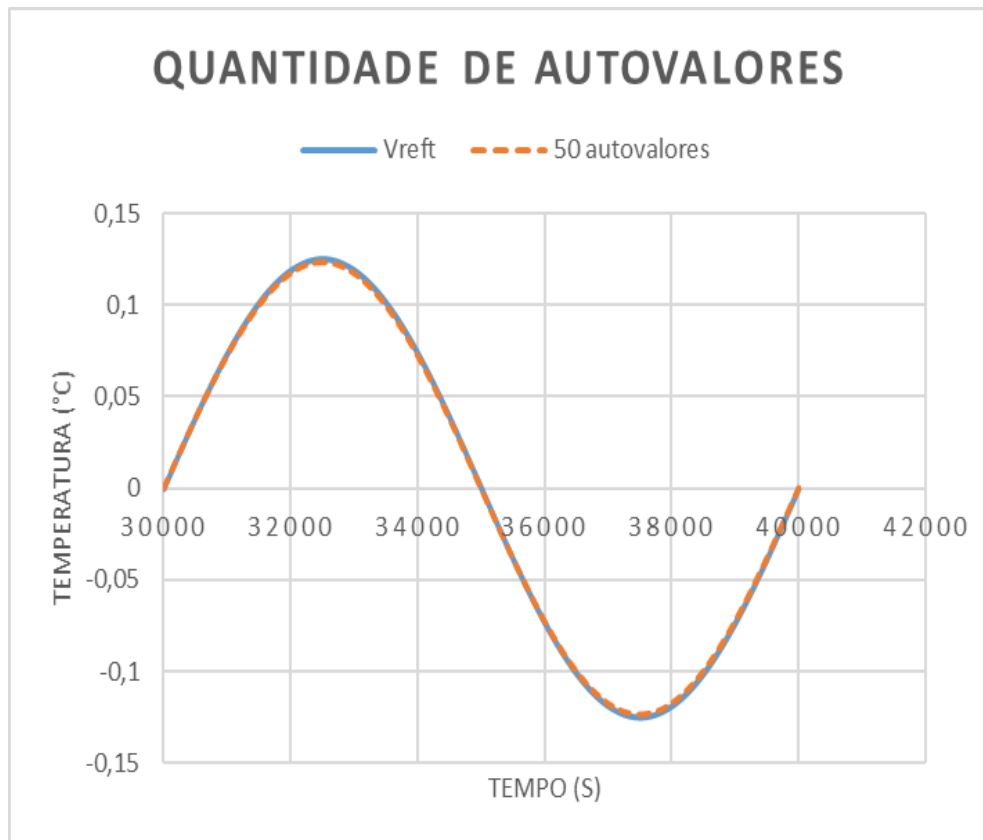


Figura 5.5: Gráfico com a solução contendo 50 autovalores

Dobrando a quantidade de autovalores de 50 para 100 autovalores, pode-se observar que as curvas de temperatura, continuam sobrepostas, conforme Figura 5.6.

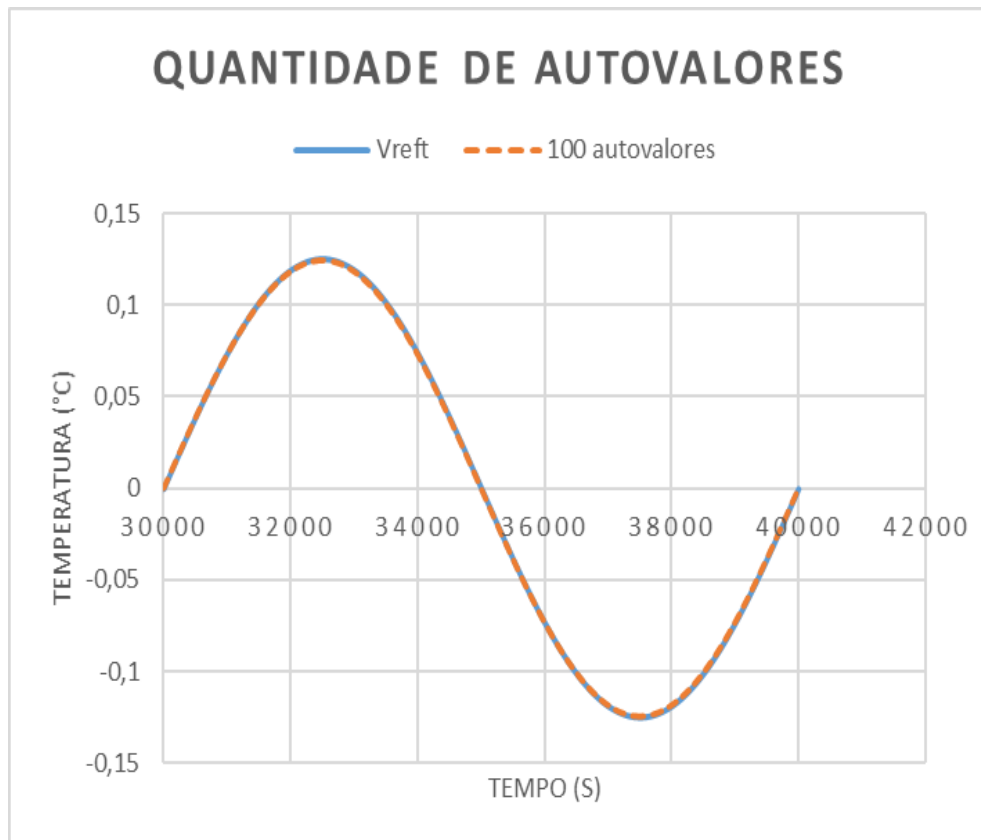


Figura 5.6: Gráfico com a solução contendo 100 autovalores

Aumentando a quantidade de autovalores de 100 para 200, pode-se perceber que as curvas de temperatura continuam sobrepostas, conforme a Figura 5.7, onde, pode-se adotar 50 autovalores para os demais experimentos, pois, percebe-se que a partir deste valor a solução pouco varia, de modo, que a solução já havia convergido.

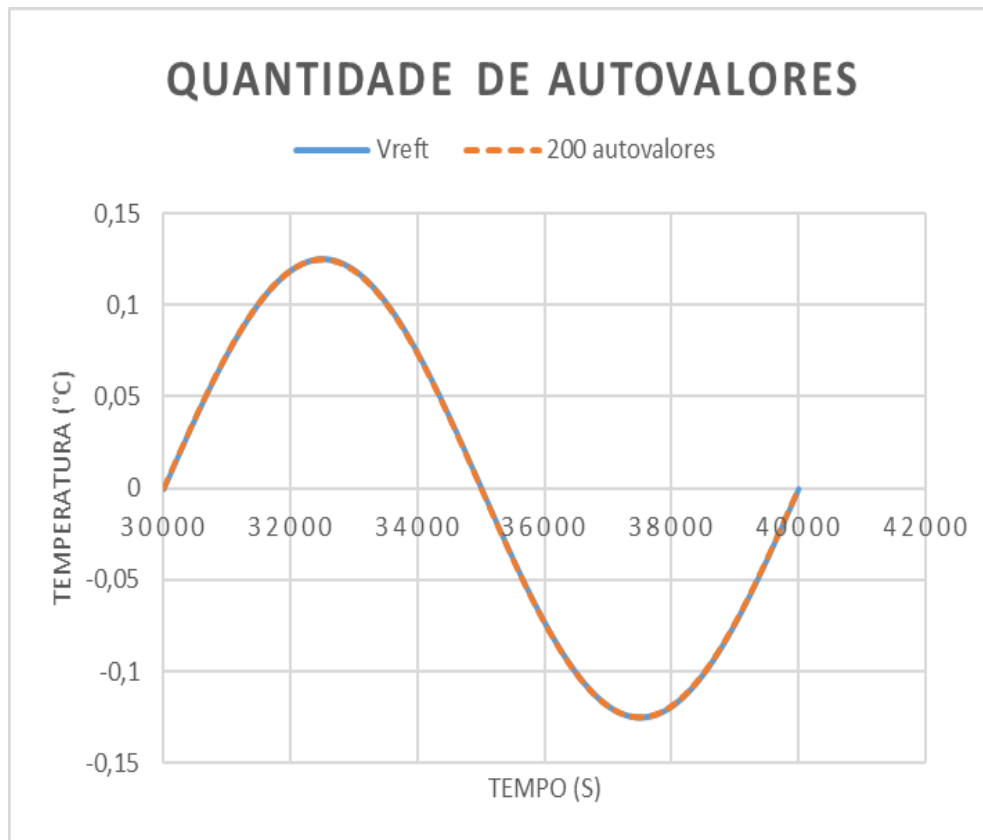


Figura 5.7: Gráfico com a solução contendo 200 autovalores

Na Figura 5.8, podemos comparar a influência da quantidade de autovalores na solução proposta.

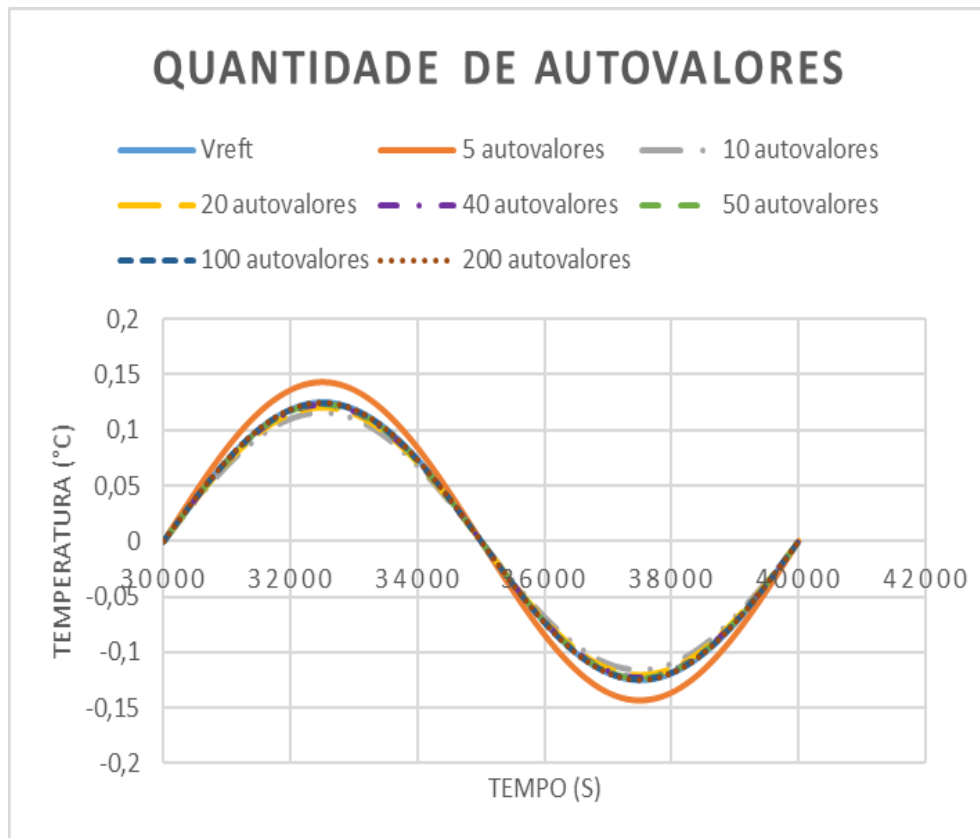


Figura 5.8: Gráfico de comparação para diferentes autovalores

5.2 VALIDAÇÃO DO MÉTODO

Para a validação do método iremos confrontar os resultados obtidos pelo Método de Simulação de Rede (NSM), com os resultados obtidos pela solução analítica via Técnica da Transformação Integral Generalizada (GITT), para tal análise iremos adotar a solução analítica com 50 autovalores, também iremos adotar $r_0 = 0.1$, $l = 0.005$, uma discretização de 12 divisões no raio e no comprimento, um tempo suficientemente longo (30000s a 40000s), desprezando os valores iniciais devido o problema proposto ser em regime permanente e utilizando um número de Biot próximo de zero devido ao problema ser de segunda espécie, isto é, com fluxo nulo ou imposto, para esse teste iremos considerar o $Biot = 0.15$, consideraremos de igual modo a posição radial $R = 0$, conforme foi realizado nos testes de convergência. Percebe-se conforme figura 5.9 que os valores obtidos pelo NSM equivalem aos valores obtidos pelo método analítico, de modo que o problema proposto é validado.

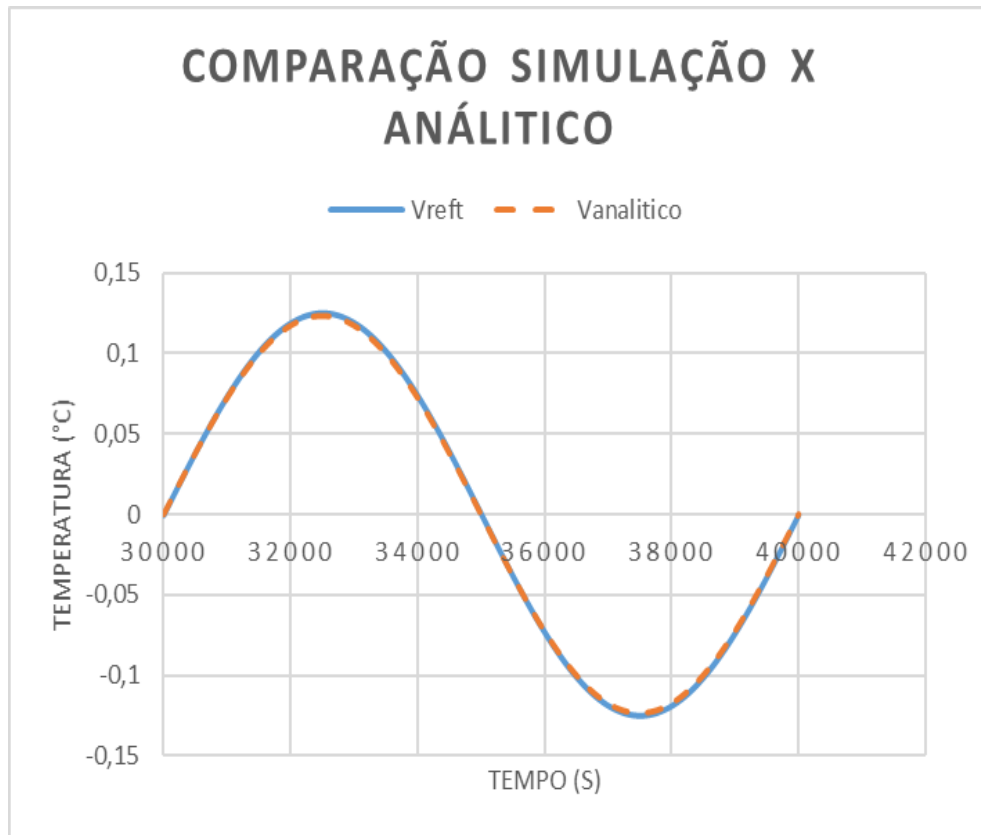


Figura 5.9: Comparação entre o resultado analítico e o resultado via NSM

5.3 ESTUDO DA RELAÇÃO RAIÃO / COMPRIMENTO

Validados os resultados obtidos com a resolução do problema, iremos realizar diversos testes para analisarmos a influência da relação entre o tamanho do raio do e o comprimento do cilindro, de modo que, iremos verificar quando o modelo bidimensional irá se comportar como um modelo unidimensional. Para tanto, utilizaremos uma discretização com 12 divisões, para podermos comparar com o resultado do modelo unidimensional implementado por SILVA (2014), cuja modelagem foi validada tanto analiticamente, quanto experimentalmente. Neste teste, iremos utilizar $l = 0,005$, variando o r_0 em função do l , visualizando os resultados na posição radial $R = 0$, com posições longitudinais adimensionais $L = 0$ (base do cilindro) e $L = 1$ (topo do cilindro), a fim de observar a presença ou ausência de fluxo no cilindro.

Pode-se observar na Figura 5.10, que quando se tem um raio duas vezes maior que o comprimento do cilindro, há a presença de fluxo de calor, quando observamos que a temperatura medida no centro é diferente da temperatura na casca do cilindro.

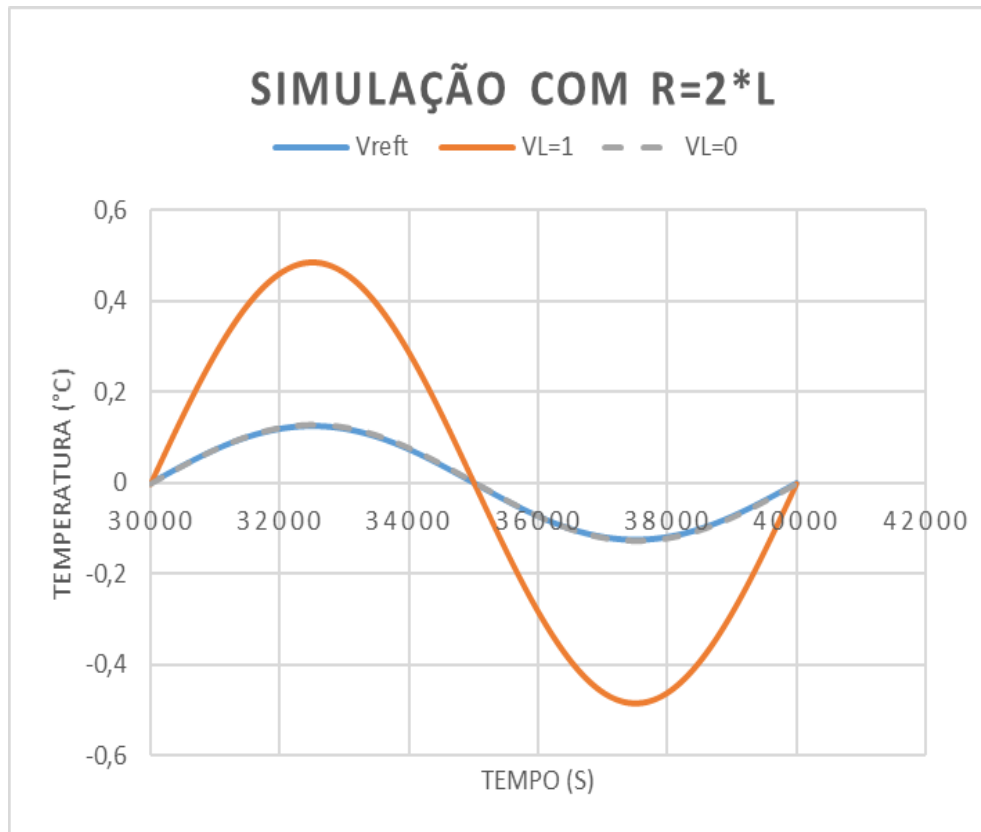


Figura 5.10: Comparação de resultados via NSM quando o raio é duas vezes maior que o comprimento do cilindro

Ao aumentar a diferença da relação raio / comprimento para um de raio 4 vezes maior que o comprimento, pode-se observar que o fluxo de calor diminui à medida que aumentamos a diferença da relação raio / comprimento, conforme Figuras 5.11.

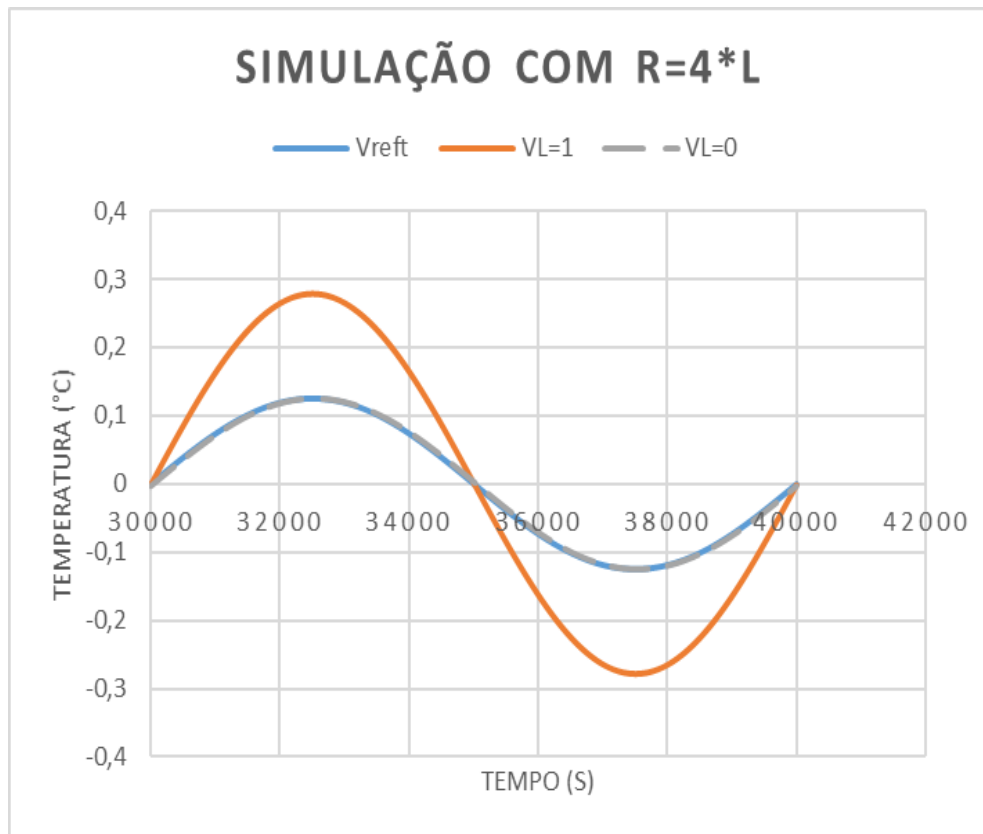


Figura 5.11: Comparação de resultados via NSM quando o raio é quatro vezes maior que o comprimento do cilindro

Aumentando a diferença para um raio 6 vezes maior que o comprimento do cilindro, percebe-se que o fluxo na casca é menor quando comparado a relações menores. Vide Figura 5.12.

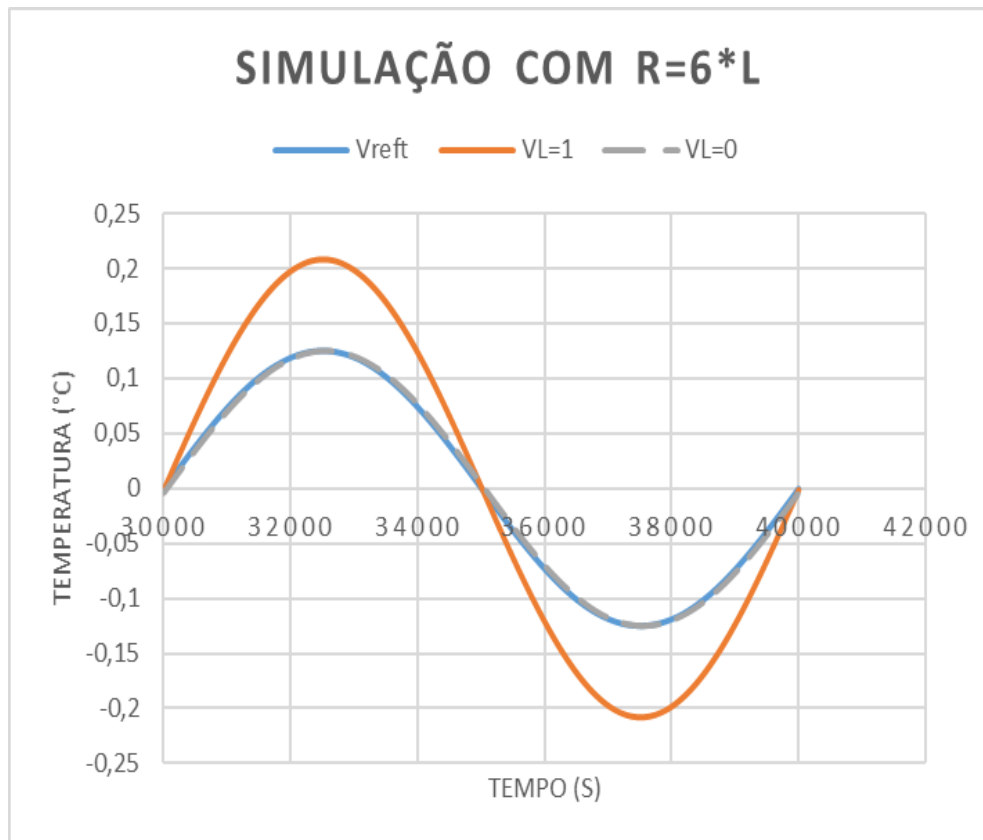


Figura 5.12: Comparação de resultados via NSM quando o raio é seis vezes maior que o comprimento do cilindro

Para o cilindro com um raio 8 vezes maior que o comprimento, pode-se perceber que o fluxo na casca continua diminuindo, o que, nos mostra que cada vez que aumentamos a relação raio / comprimento, o problema vai aproximando-se ao problema unidimensional com fluxo nulo. Vide Figura 5.13.

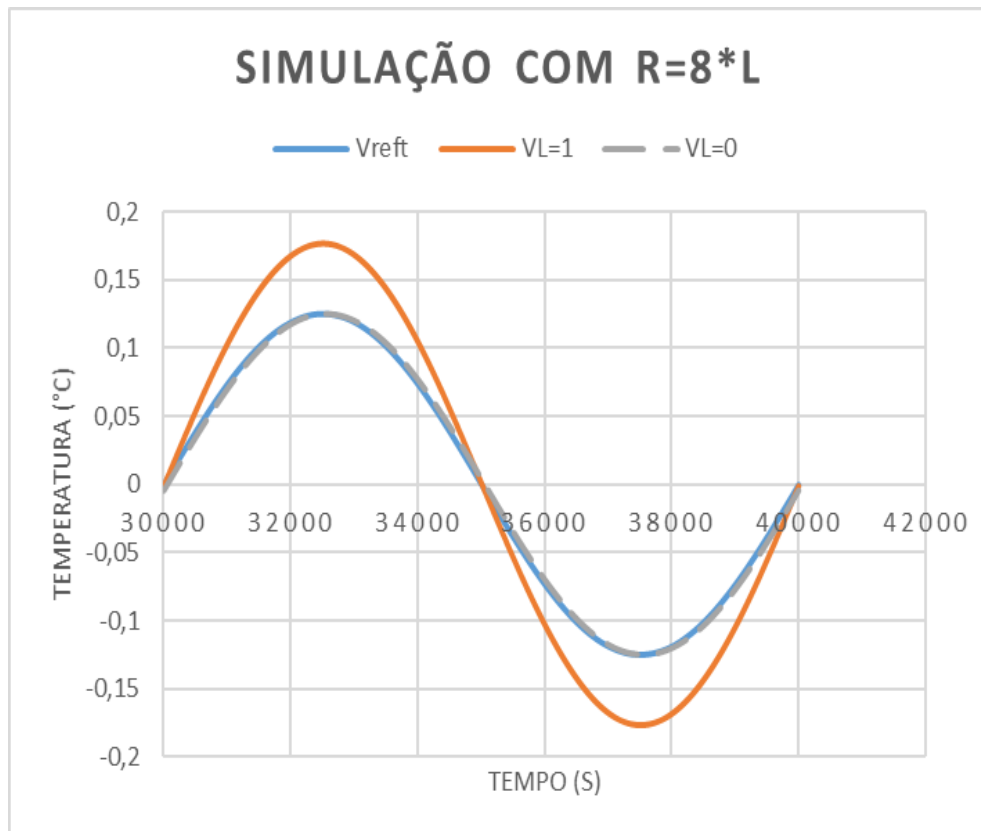


Figura 5.13: Comparação de resultados via NSM quando o raio é oito vezes maior que o comprimento do cilindro

Ao aumentar a relação raio / comprimento para um cilindro que possui um raio 10 vezes maior que o comprimento, percebe-se que a relação está convergindo para o problema unidimensional de segunda espécie. Conforme figura 5.14

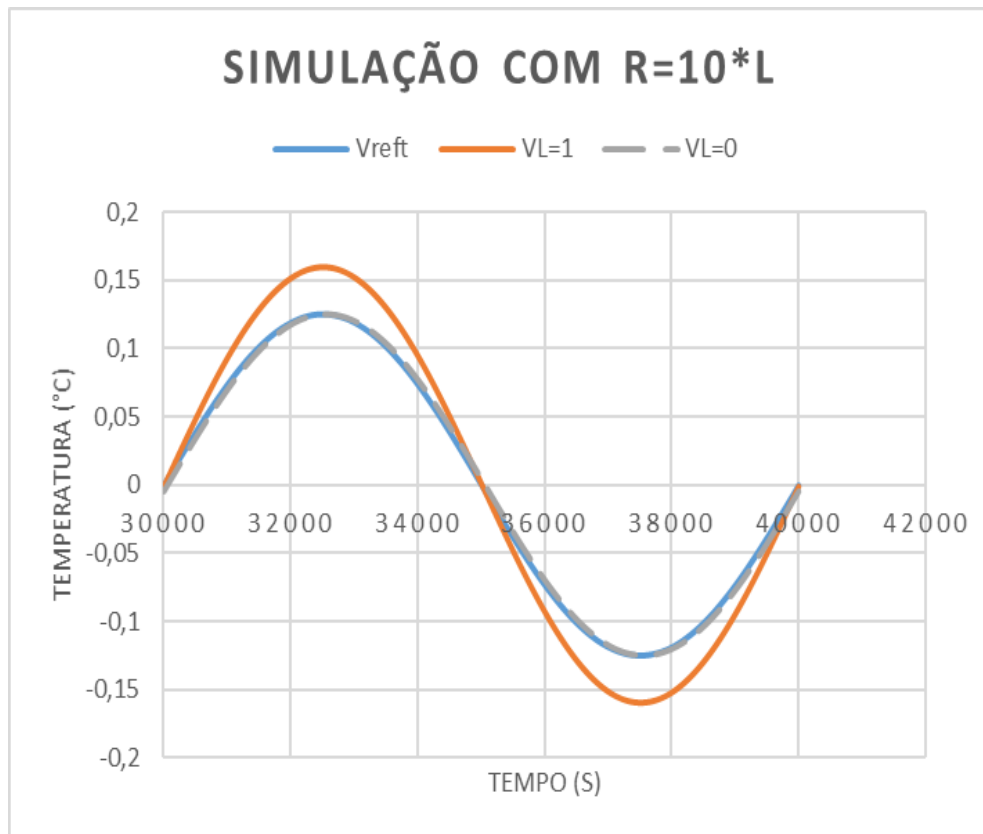


Figura 5.14: Comparação de resultados via NSM quando o raio é dez vezes maior que o comprimento do cilindro.

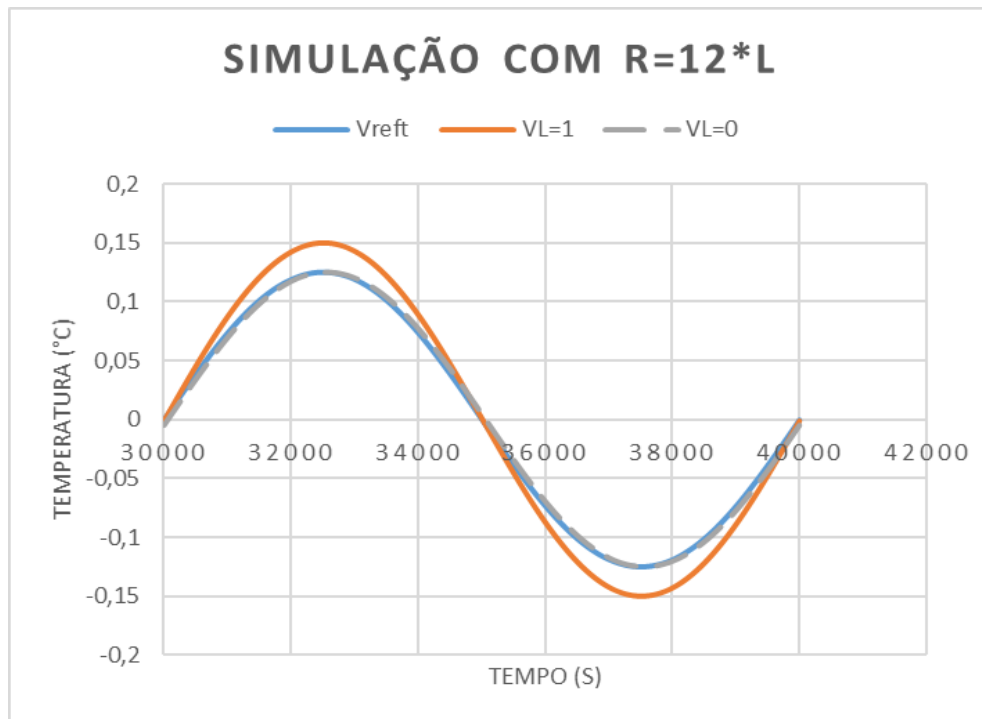


Figura 5.15: Comparação de resultados via NSM quando o raio é doze vezes maior que o comprimento do cilindro.

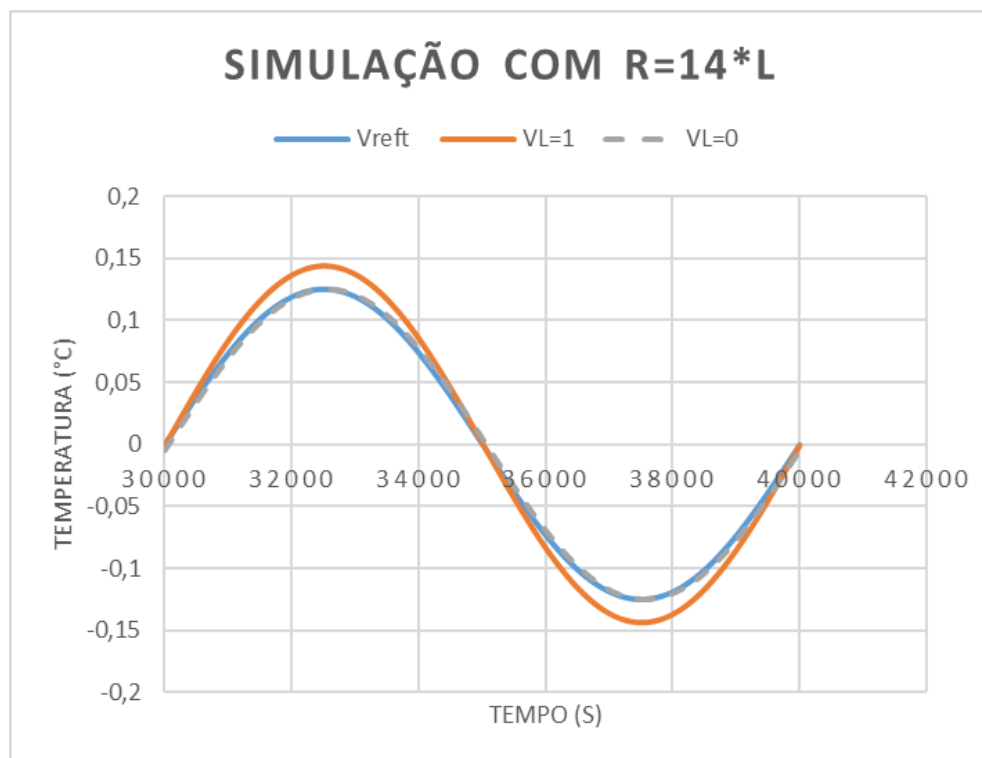


Figura 5.16: Comparação de resultados via NSM quando o raio é quatorze vezes maior que o comprimento do cilindro.

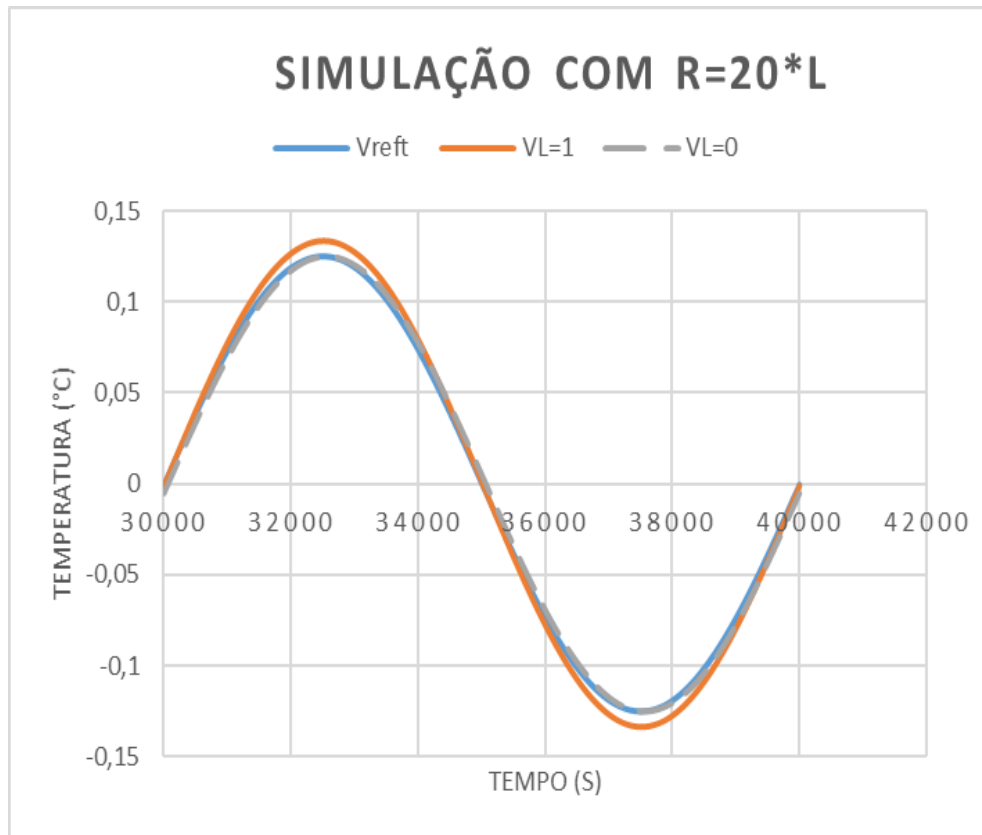


Figura 5.17: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte vezes maior que o comprimento do cilindro.

Pode-se observar, que, quando se tem um raio pelo menos 20 vezes maior que o comprimento, praticamente não há fluxo de calor quando comparamos as medições feitas na casca e no centro do cilindro, onde, podemos considerar o problema bidimensional como um problema unidimensional, conforme pode-se observar nas Figuras 5.17-5.20.

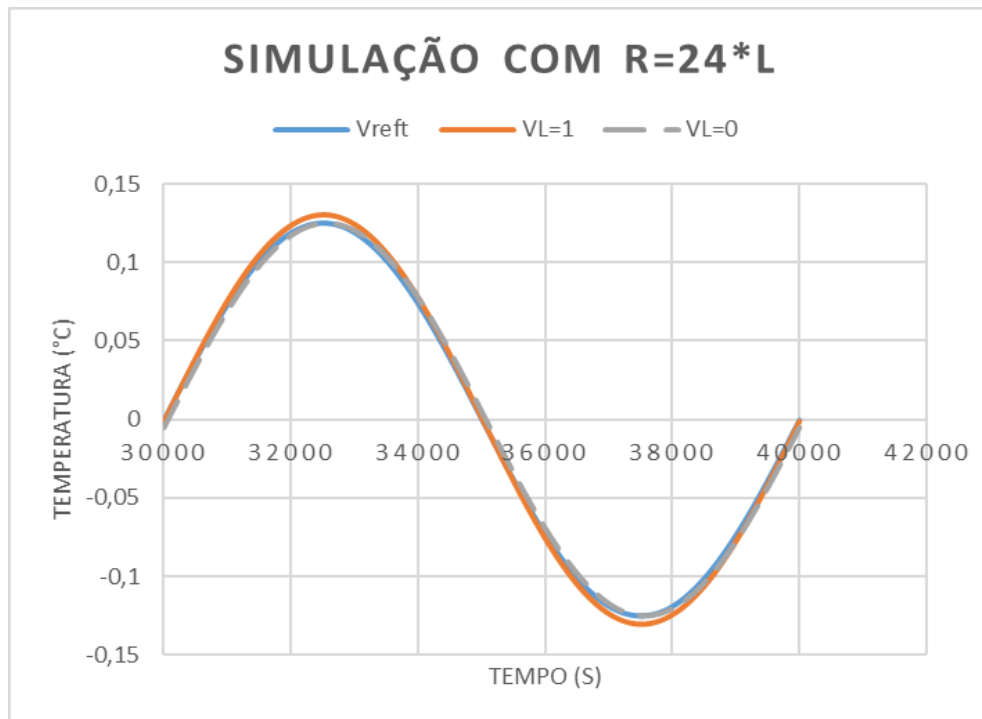


Figura 5.18: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte e quatro vezes maior que o comprimento do cilindro

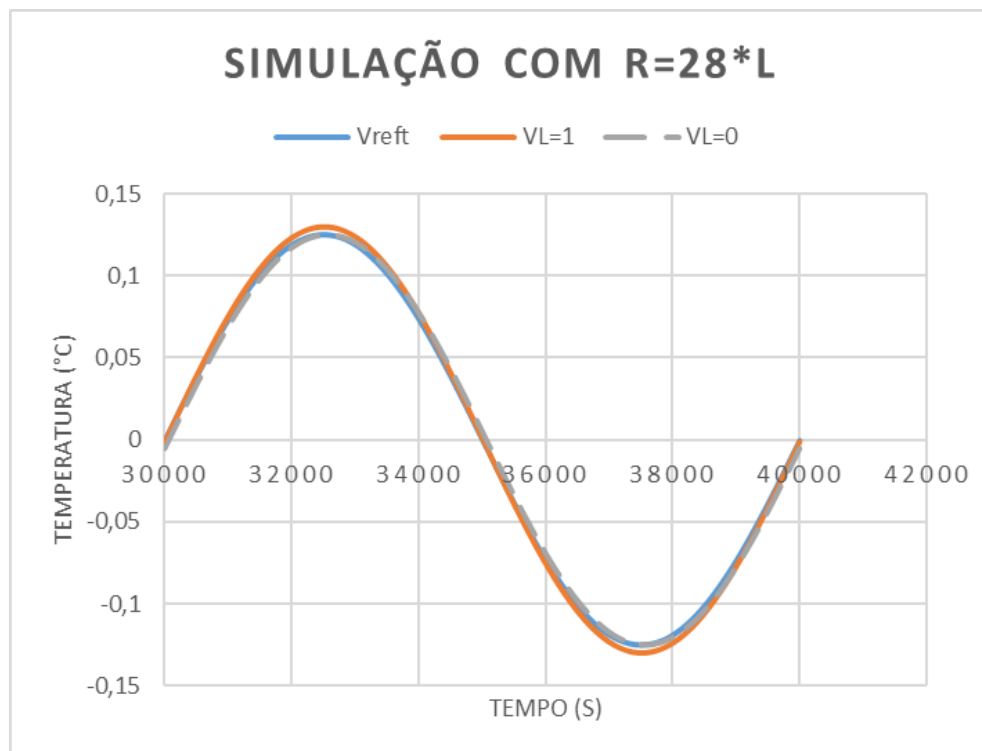


Figura 5.19: Comparação de resultados via NSM quando o raio é vinte e oito vezes maior que o comprimento do cilindro

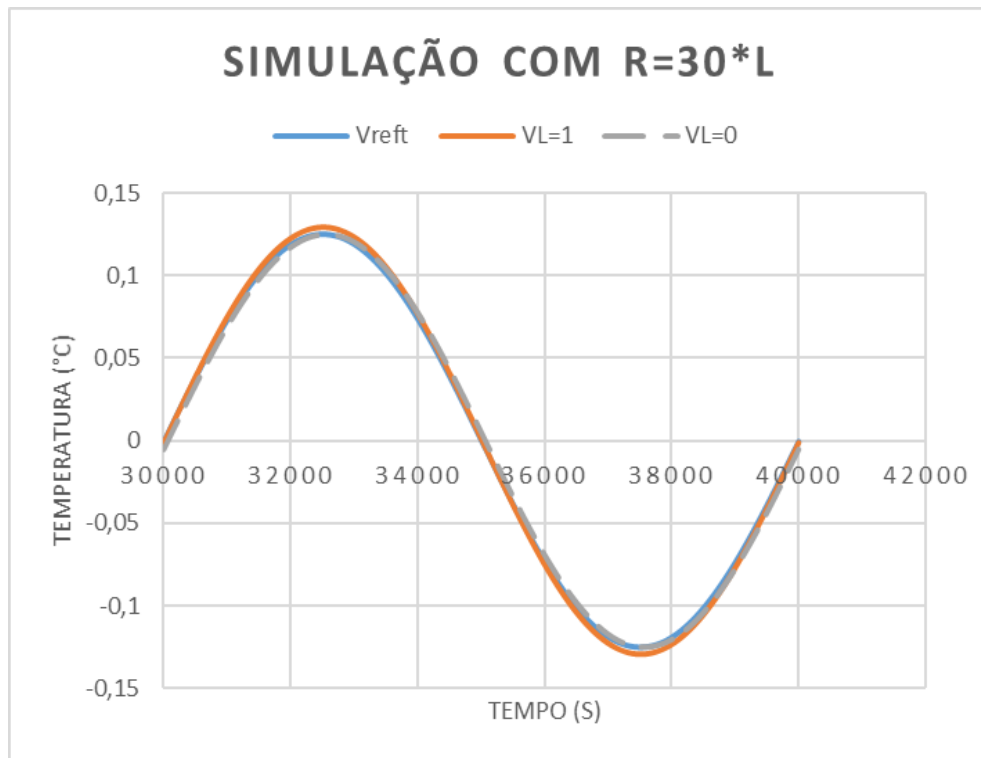


Figura 5.20: Comparação de resultados via NSM quando o raio é trinta vezes maior que o comprimento do cilindro.

5.4 ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA QUANTIDADE DE CÉLULAS

Analisaremos a influência do número de discretizações ou quantidade de divisões. Objetivando este estudo, iremos utilizar os valores adimensionais de $r_0 = 0.15$, $l = 0.005$ o que equivale a um raio 30 vezes maior que o comprimento, com um tempo suficientemente longo (30000s a 40000s), após ser atingido o estado estacionário. Da mesma maneira que os testes anteriores, analisaremos a resposta na posição radial $R = 0$ e nas posições longitudinais adimensionais $L = 0$ e $L = 1$, para diferentes configurações variando a quantidade de divisões. Pode-se observar que nas Figuras 5.21-5.26, tem-se uma discretização com menos divisões, onde os experimentos tiveram 2, 4, 6, 8 e 10 divisões, respectivamente, de modo que, não é possível observar o efeito do comprimento nos resultados obtidos, devido ao experimento ser uma aproximação do modelo unidimensional.

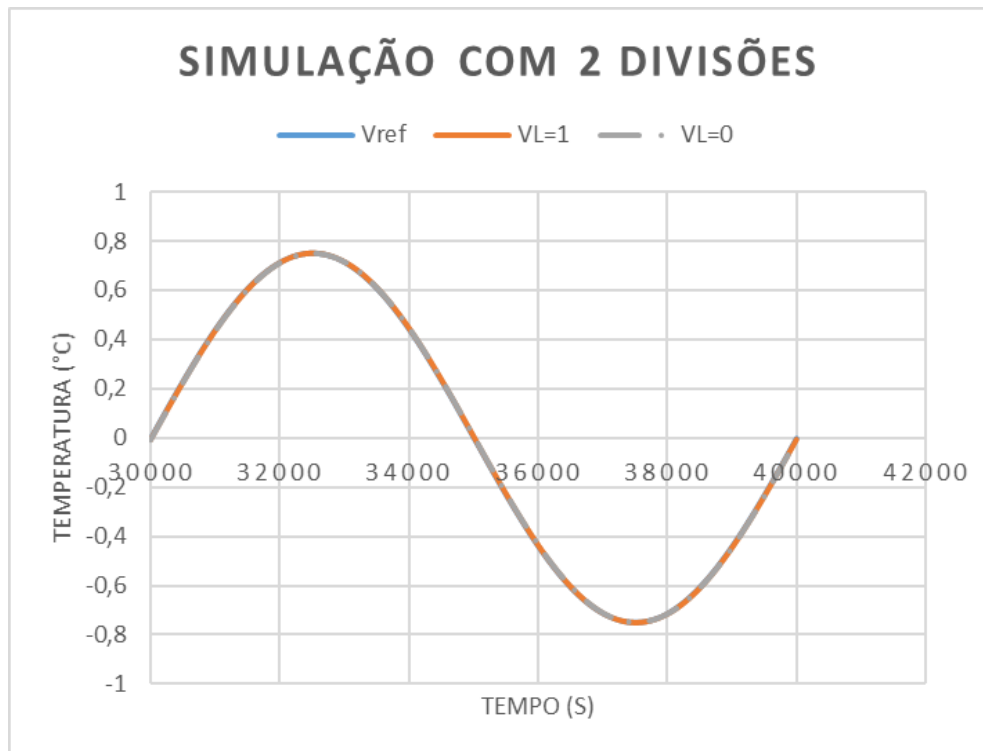


Figura 5.21: Comparação de resultados via NSM com 2 células.

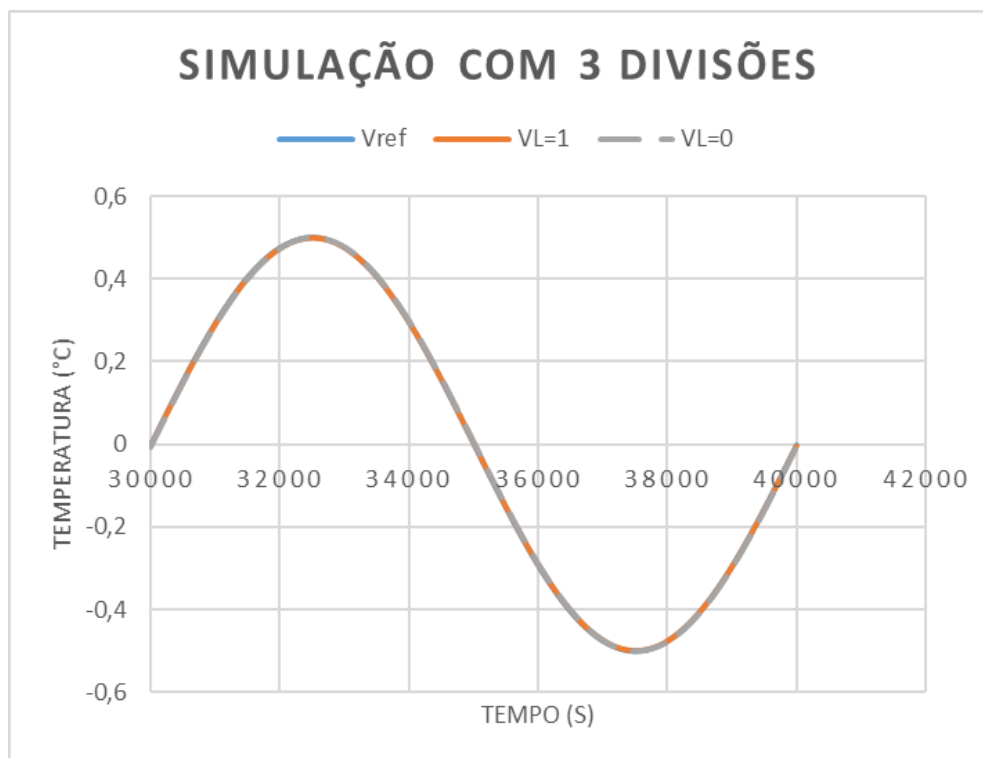


Figura 5.22: Comparação de resultados via NSM com 3 células.

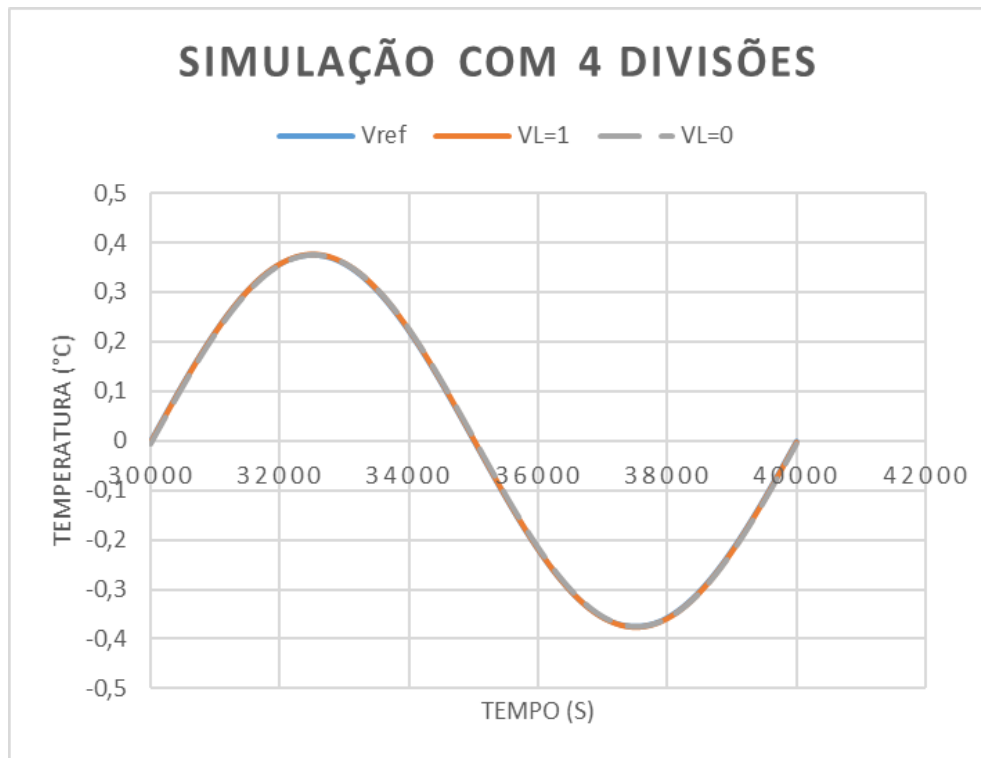


Figura 5.23: Comparação de resultados via NSM com 4 células.

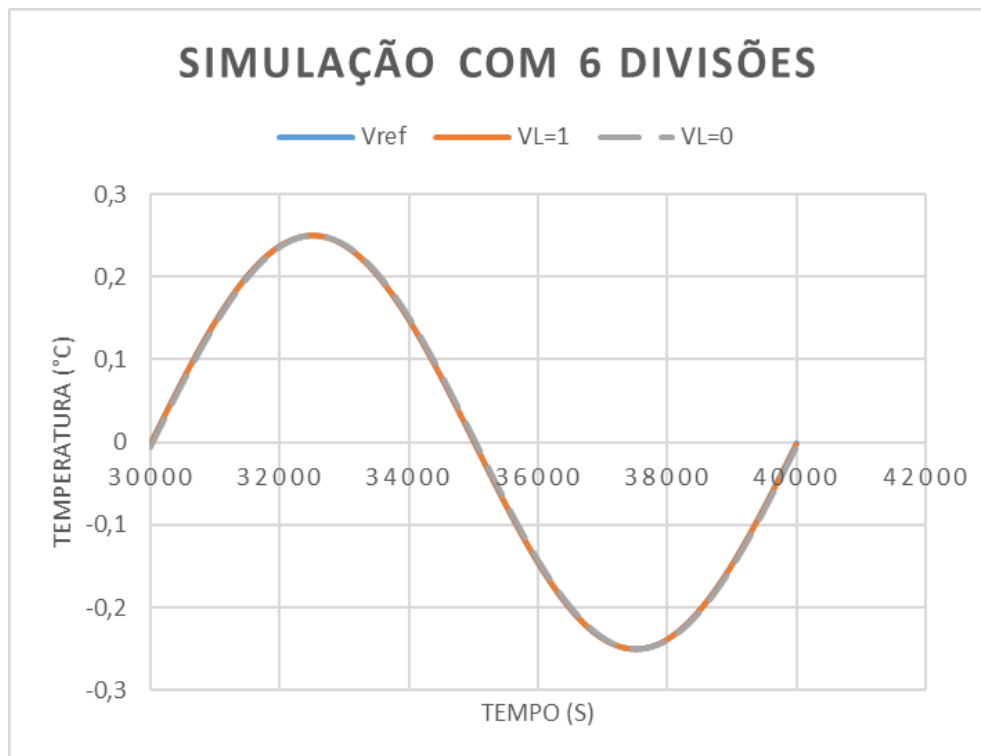


Figura 5.24: Comparação de resultados via NSM com 6 células.

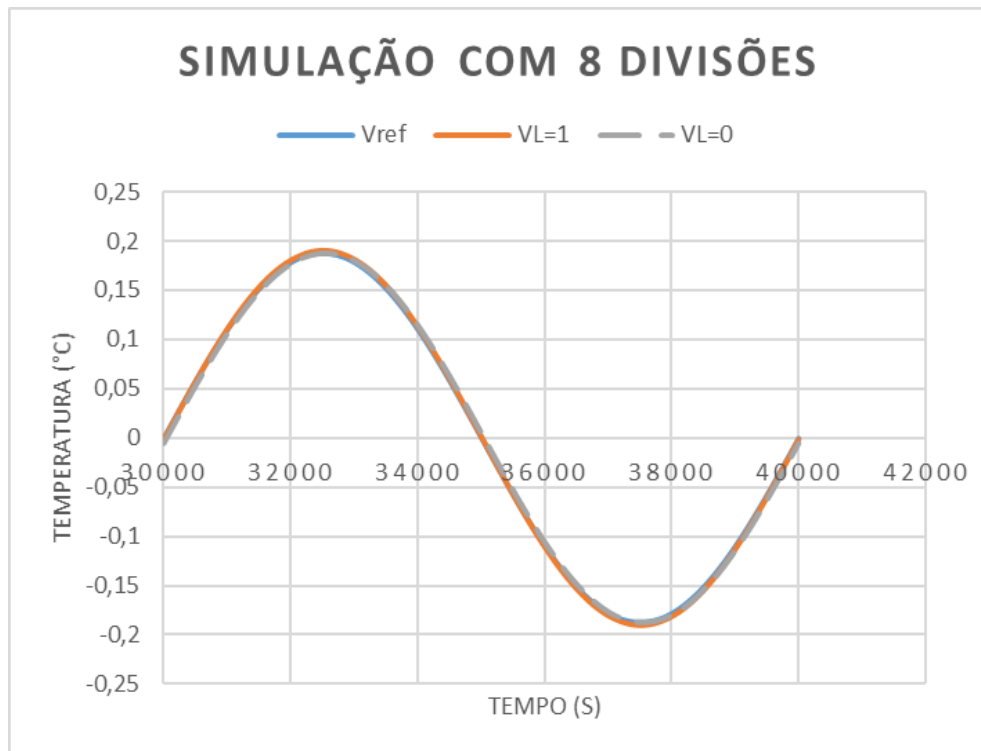


Figura 5.25: Comparação de resultados via NSM com 8 células.

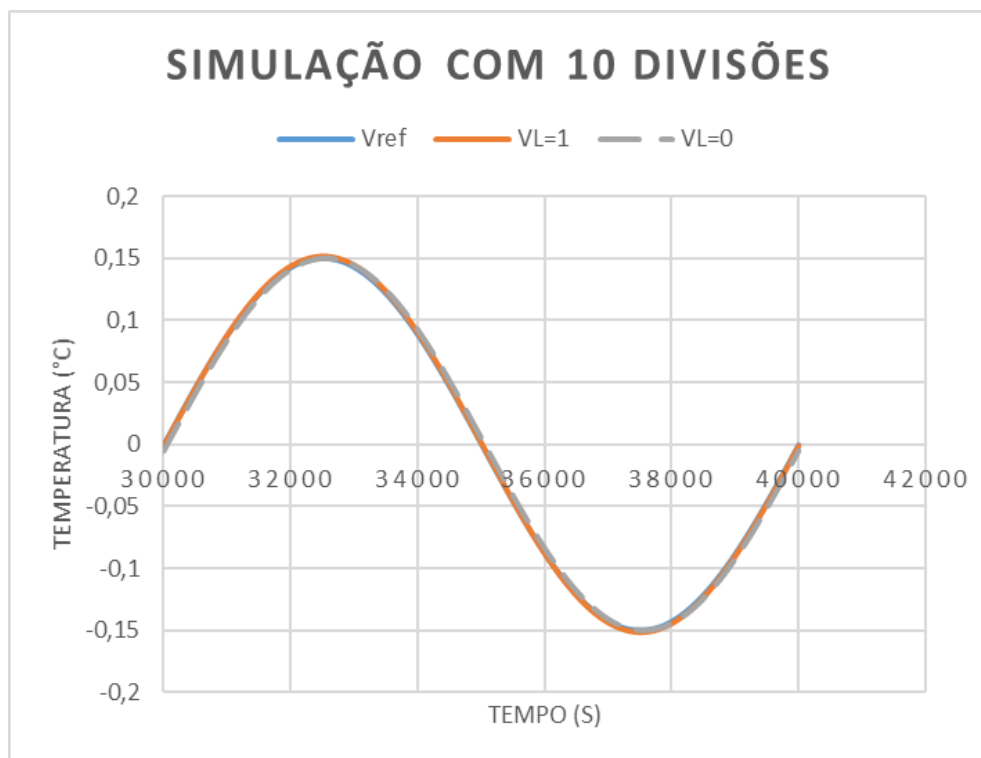


Figura 5.26: Comparação de resultados via NSM com 10 células.

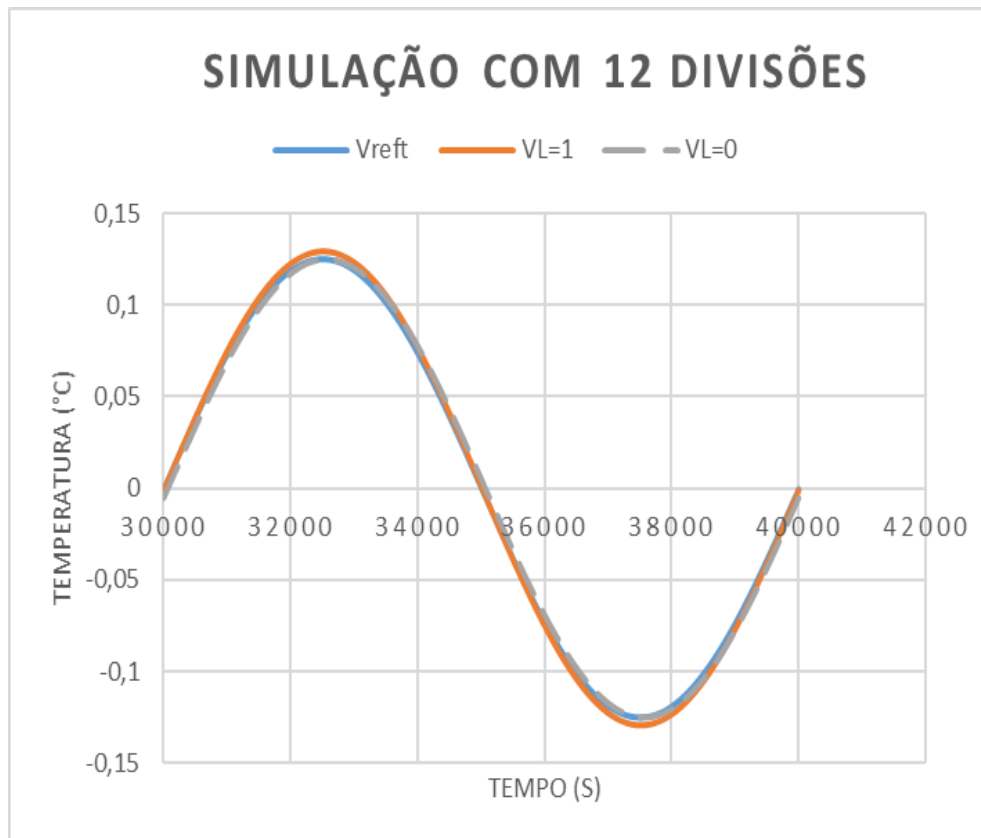


Figura 5.27: Comparação de resultados via NSM com 12 células.

Pode-se observar na Figura 5.27-5.30, que a medida em que a malha é refinada para 12, 14, 20 e 30 divisões, respectivamente, à presença do efeito do comprimento nos resultados, devido o experimento ser um modelo bidimensional aproximado ao um modelo unidimensional.

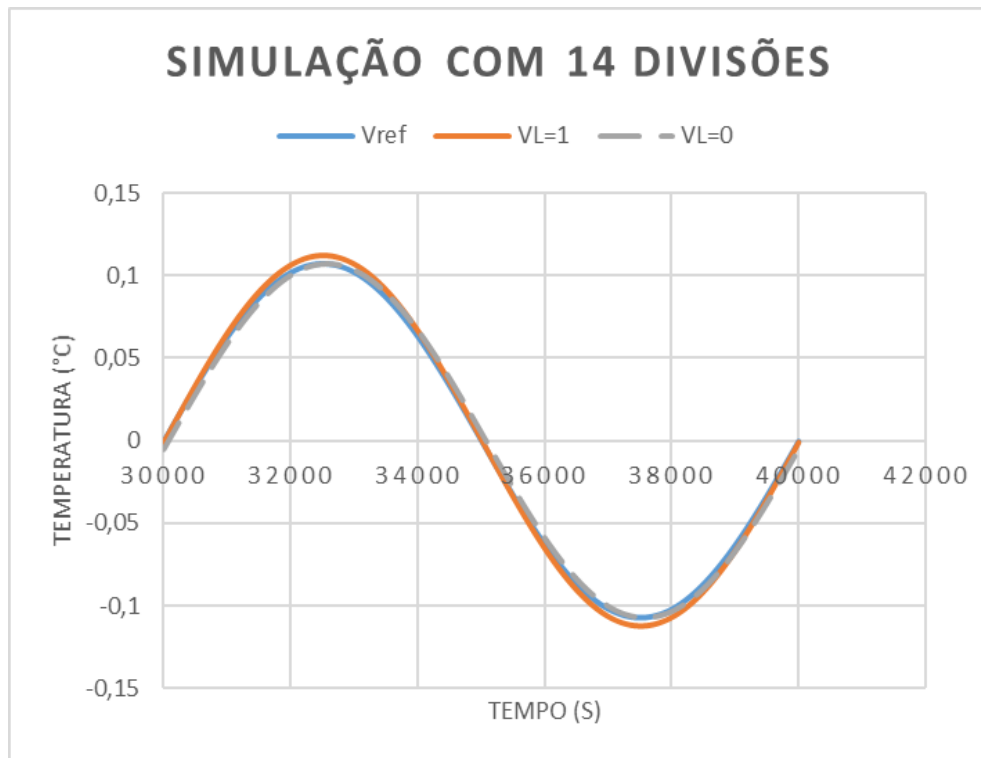


Figura 5.28: Comparação de resultados via NSM com 14 células.

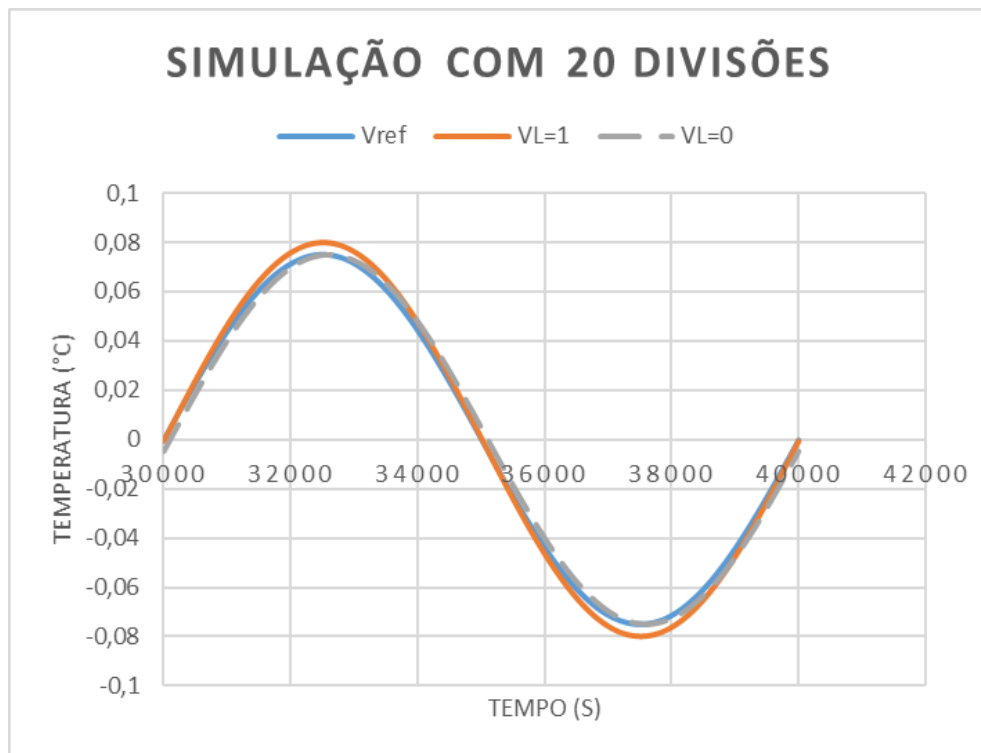


Figura 5.29: Comparação de resultados via NSM com 20 células.

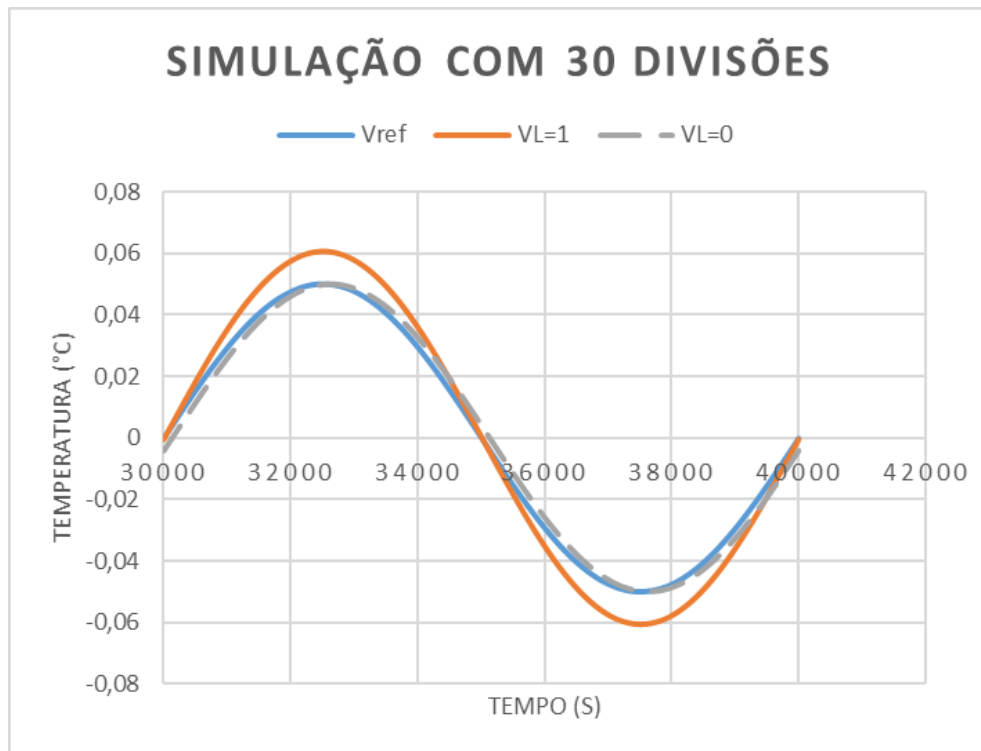


Figura 5.30: Comparação de resultados via NSM com 30 células.

5.5 ANÁLISE DURANTE TRANSIENTE

Inicialmente, para verificar que a malha proposta pelo Método de Simulação de Rede (NSM), é uma malha bidimensional genérica, isto é, a solução é válida para qualquer tipo de problema em coordenadas cilíndricas, utilizaremos o experimento realizado por OLIVEIRA (2010), o qual consiste em um problema unidimensional de primeira espécie transiente em geometria cilíndrica, em que a temperatura é imposta no contorno lateral. O problema que servirá como base para a análise da malha genérica, foi validado mediante a comparação entre o resultado analítico, os resultados obtidos via NSM e os resultados experimentais. Por se tratar de uma análise unidimensional radial, utilizaremos, inicialmente, um cilindro de raio não muito maior que o comprimento, $r_0 = 0.005 \text{ m}$ e iremos alterar o comprimento do cilindro, de modo a observar quando o modelo bidimensional poderá ser aproximado pelo unidimensional. Observa-se que nas Figuras 5.31 e 5.32, para um problema de temperatura prescrita, isto é, a temperatura não varia em

todo o cilindro para um cilindro de comprimento 2 e 4 vezes maiores que o raio, há uma diferença de temperatura nas extremidades do cilindro.

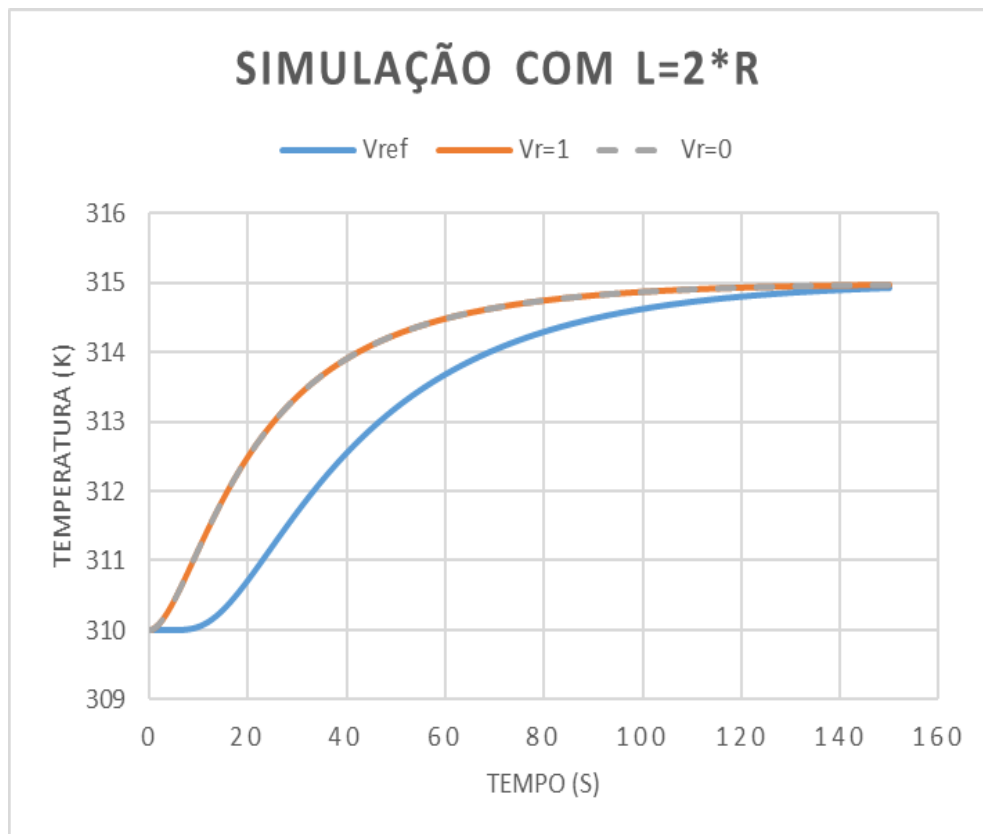


Figura 5.31: Análise transiente da influência da relação comprimento 2 vezes maior que o raio.

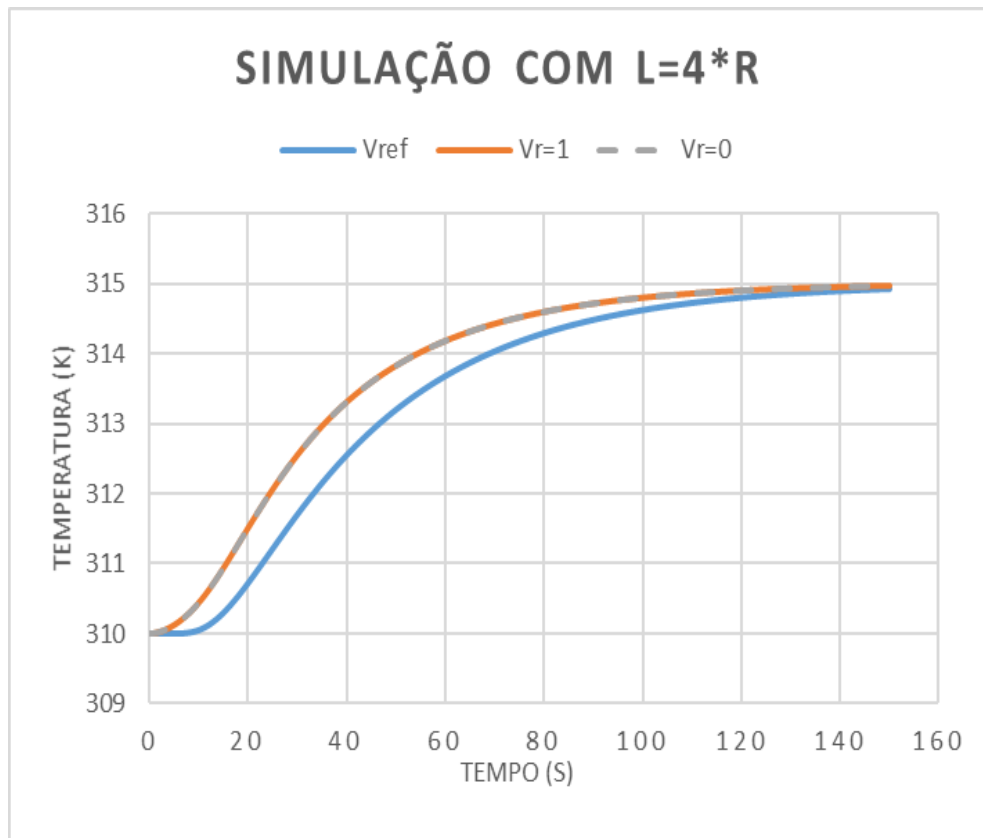


Figura 5.32: Análise transiente da influência da relação comprimento 4 vezes maior que o raio

Quando se utiliza uma diferença de comprimento 6 vezes maior que o raio do cilindro, pode-se observar que diminui a diferença de temperatura nas extremidades do cilindro, conforme Figura 5.33.

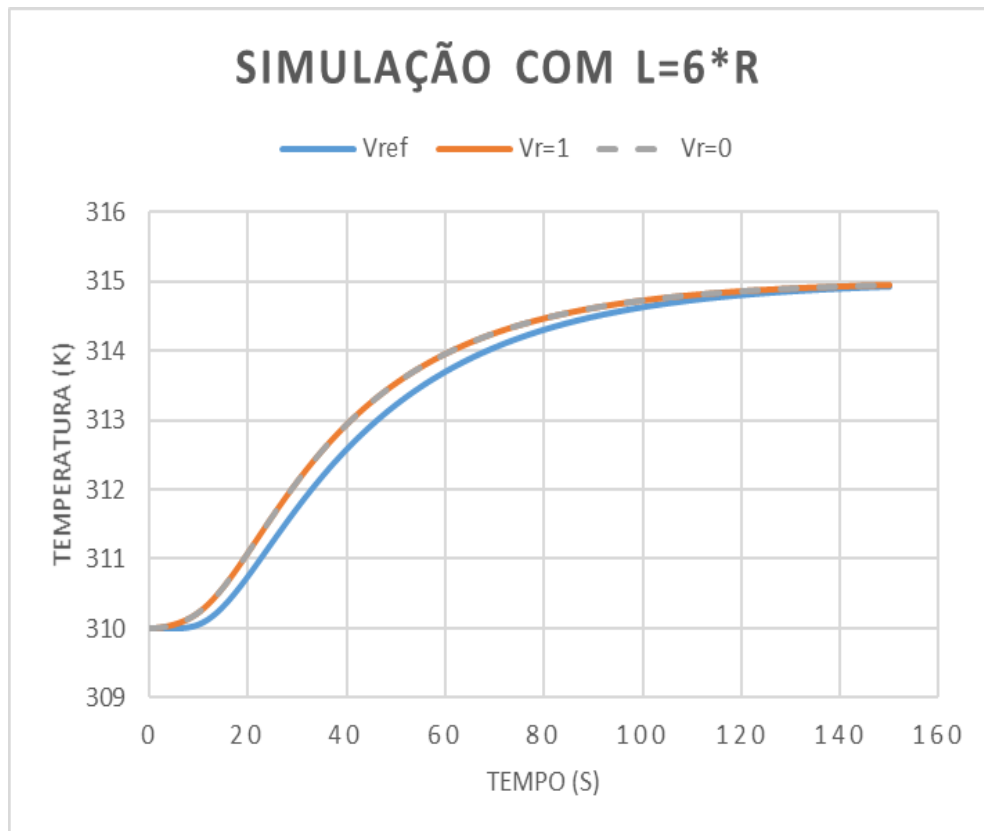


Figura 5.33: Análise transiente da influência da relação comprimento 6 vezes maior que o raio.

Ao utilizar um comprimento com no mínimo 8 vezes maior que o raio, pode-se observar que o problema bidimensional, se comporta como um problema unidimensional, onde, as temperaturas nas suas extremidades não variam. Vide Figuras 5.34-5.37.

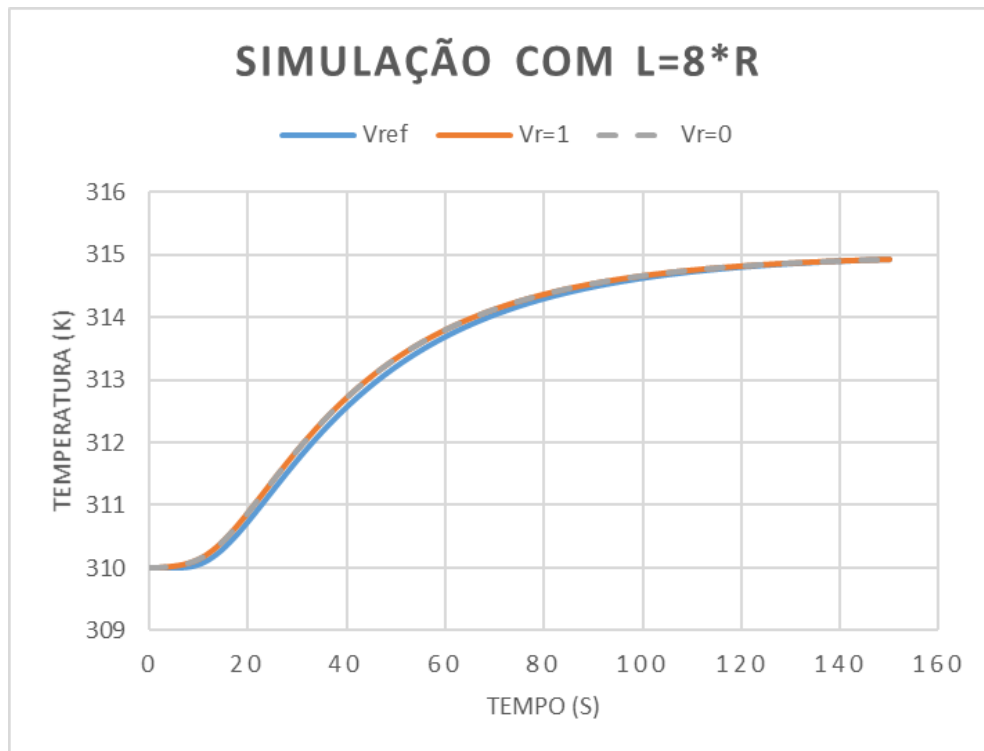


Figura 5.34: Análise transiente da influência da relação comprimento 8 vezes maior que o raio

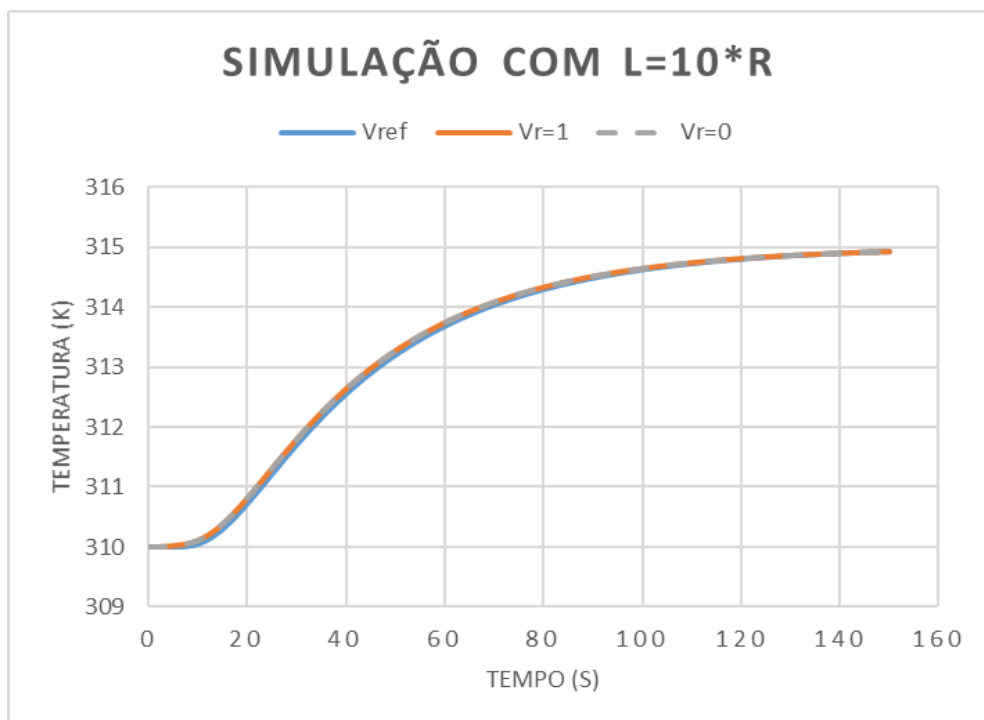


Figura 5.35: Análise transiente da influência da relação comprimento 10 vezes maior que o raio

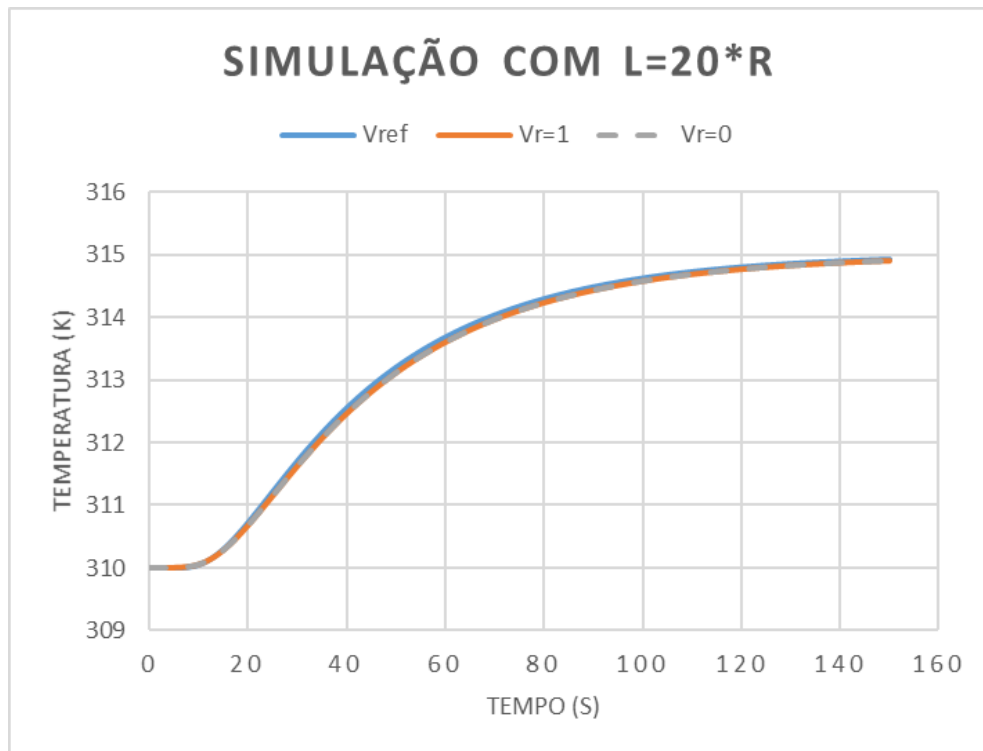


Figura 5.36: Análise transiente da influência da relação comprimento 20 vezes maior que o raio

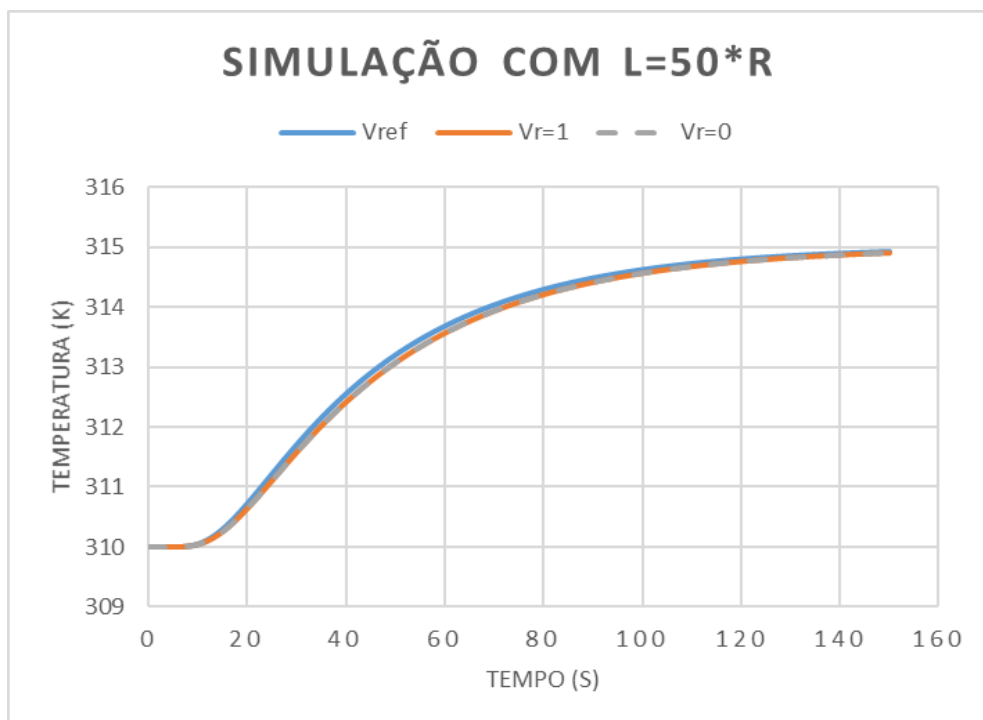


Figura 5.37: Análise transiente da influência da relação comprimento 50 vezes maior que o raio

5.5.1 Análise da Influência da Quantidade de Divisões Durante Transiente

De modo análogo aos testes realizados para o problema em regime permanente, iremos também observar a influência da discretização, ou seja, quantidade de divisões em que o raio e/ou o comprimento são fracionados no modelamento. Para realizar esta análise, adotaremos os valores $r_0 = 0.005 \text{ m}$ e $l = 0.25 \text{ m}$, de tal maneira que o problema proposto será, novamente, aproximado pelo modelo unidimensional, pois, a diferença entre o comprimento e o raio do cilindro é suficientemente grande. Como visto na seção anterior, quando um cilindro possui um comprimento de pelo menos 10 vezes maior que o raio, já se pode considerar o problema como unidimensional. Por se tratar de um problema transiente, iremos analisar o fenômeno durante um intervalo curto de tempo (150s iniciais), em seguida, variaremos a quantidade de células para obtermos a resposta. Pode-se perceber conforme aumenta-se o número de divisões, existe a aproximação das curvas de temperatura do modelo proposto com a curva de temperatura de referência.

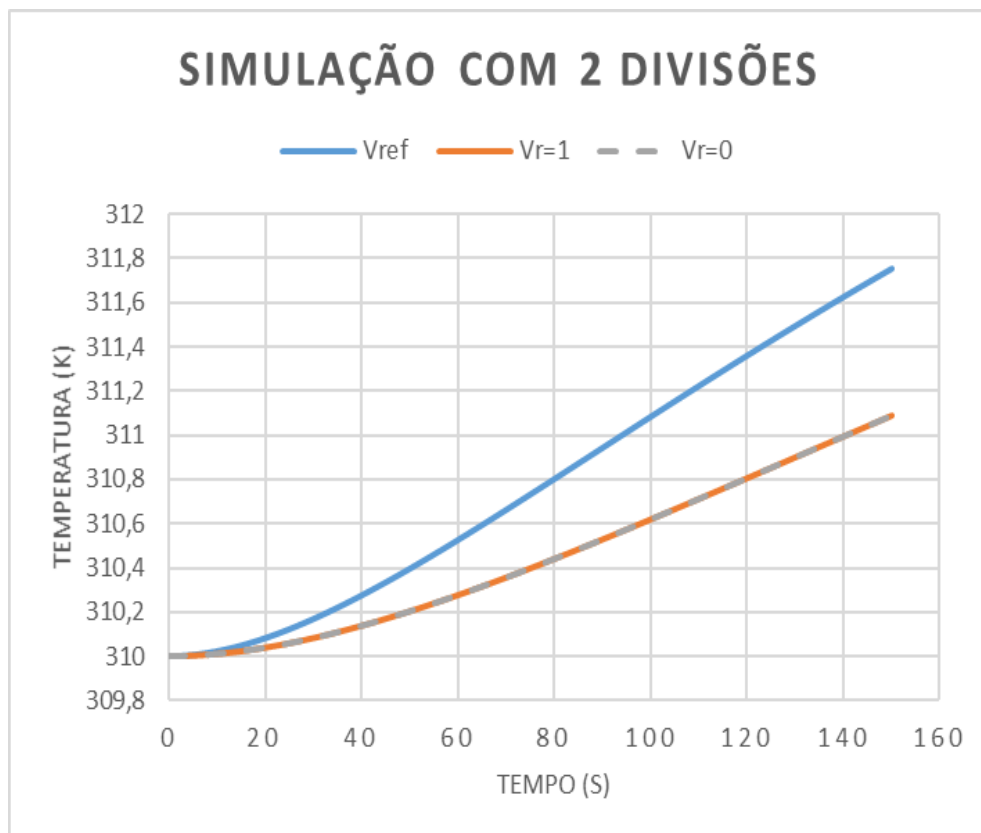


Figura 5.38: Análise transiente da malha com 2 células

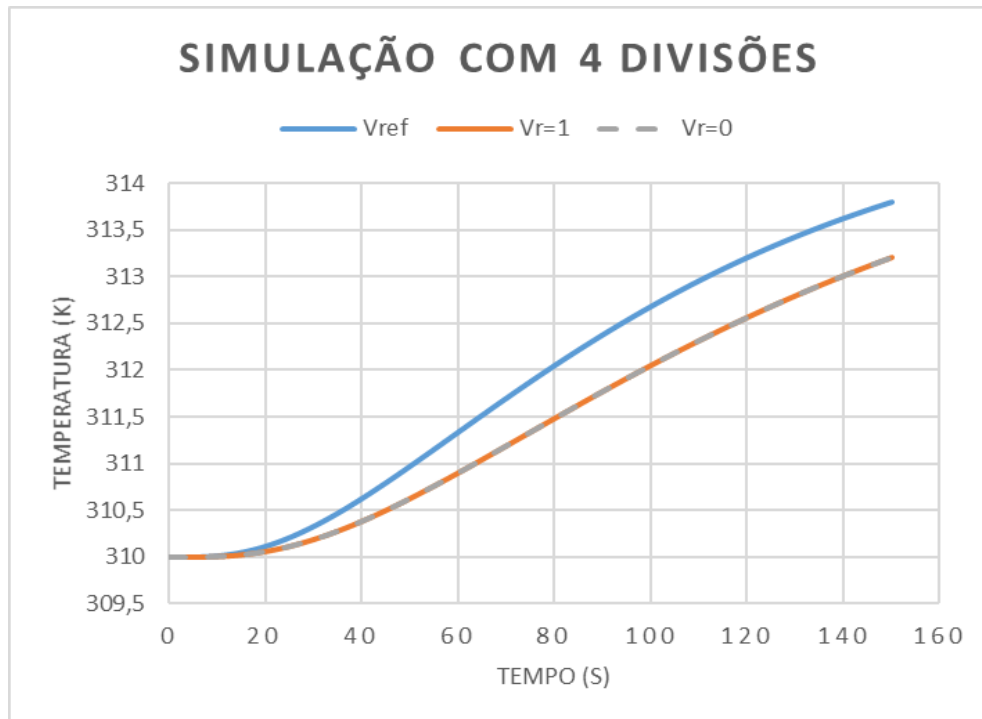


Figura 5.39: Análise transiente da malha com 4 células

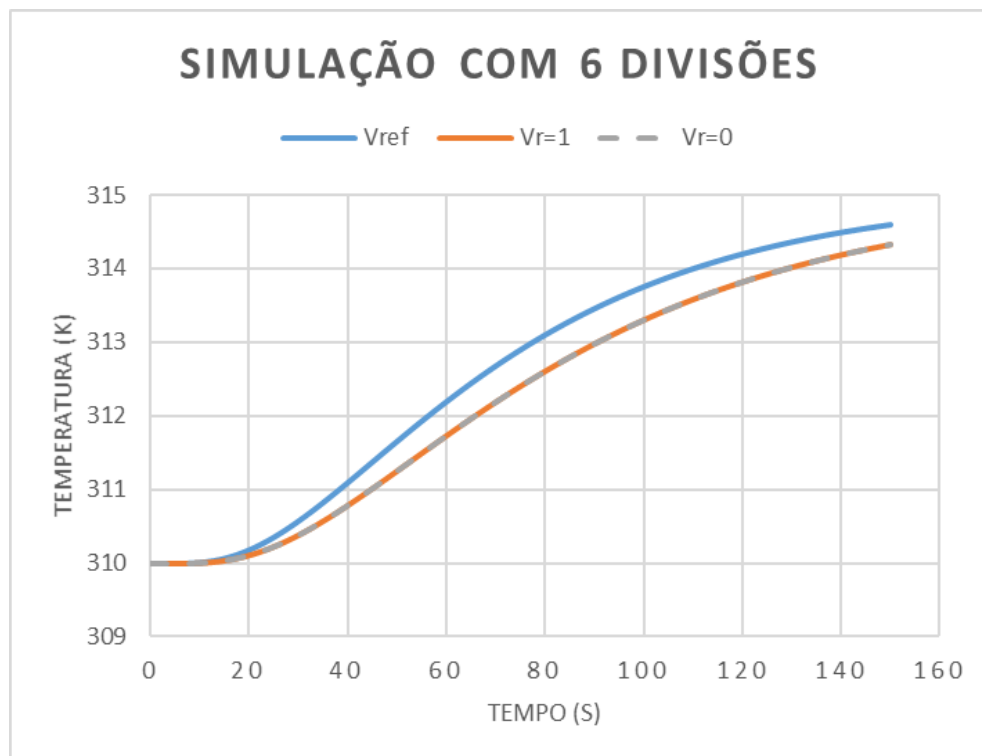


Figura 5.40: Análise transiente da malha com 6 células

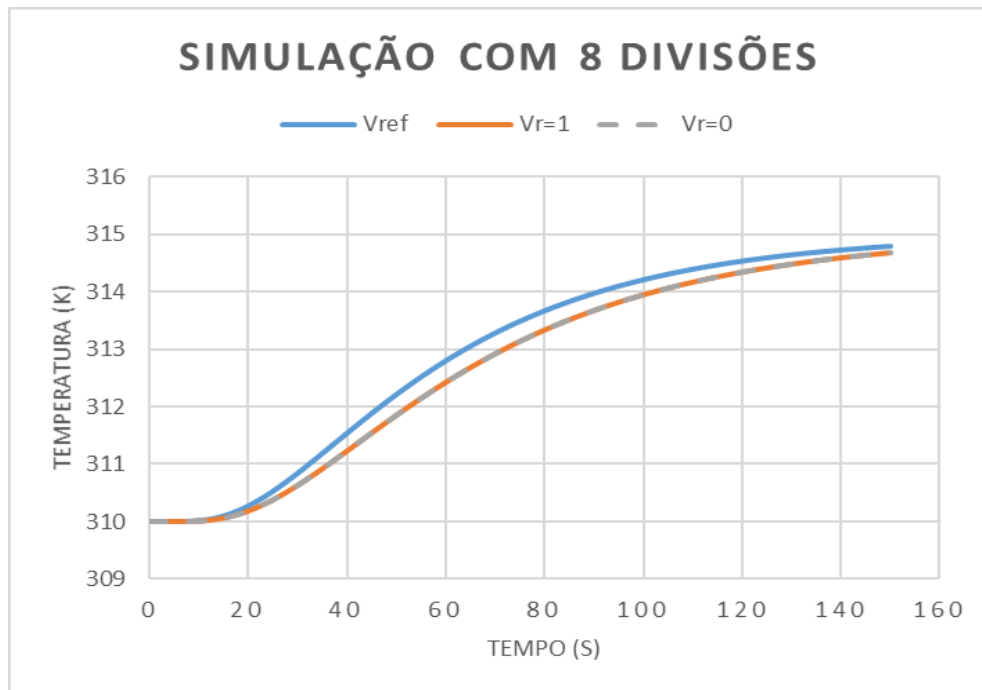


Figura 5.41: Análise transiente da malha com 8 células

É possível perceber que quando temos 8 divisões as curvas estão bastante próximas e a cada incremento na quantidade de divisões, as curvas tendem a se aproximarem cada vez mais. Vide Figuras 5.41-5.44

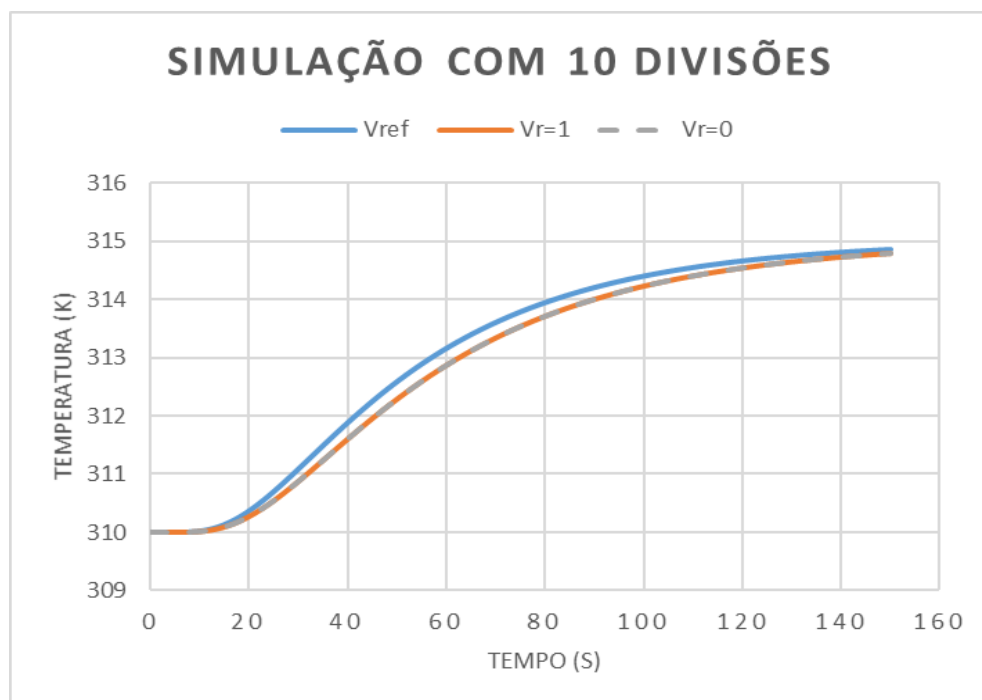


Figura 5.42: Análise transiente da malha com 10 células

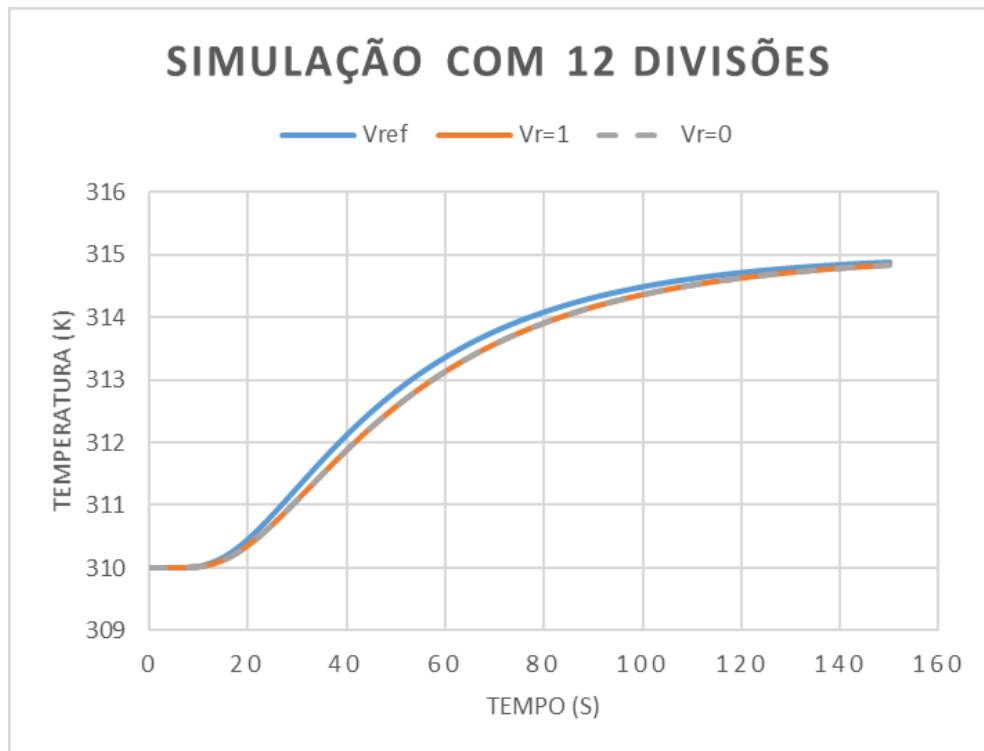


Figura 5.43: Análise transiente da malha com 12 células

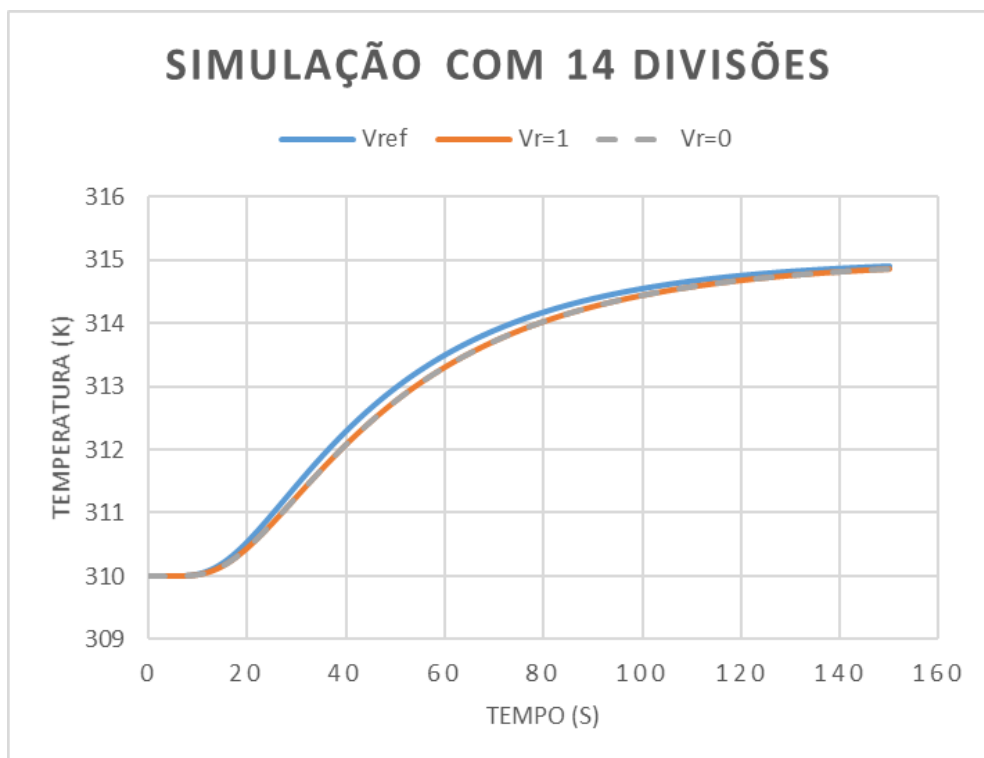


Figura 5.44: Análise transiente da malha com 14 células

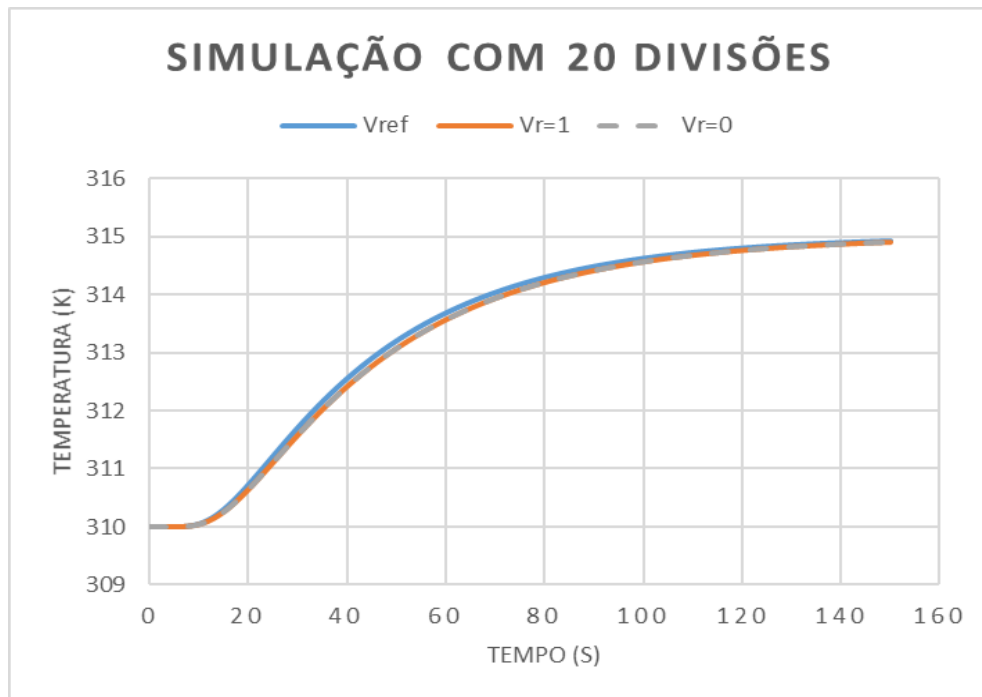


Figura 5.45: Análise transiente da malha com 20 células

Nas Figuras 5.45-5.47, pode-se observar que as curvas de referência e medida estão sobrepostas, onde, pode-se perceber que com 20 divisões, chega-se ao um modelo próximo ao ideal.

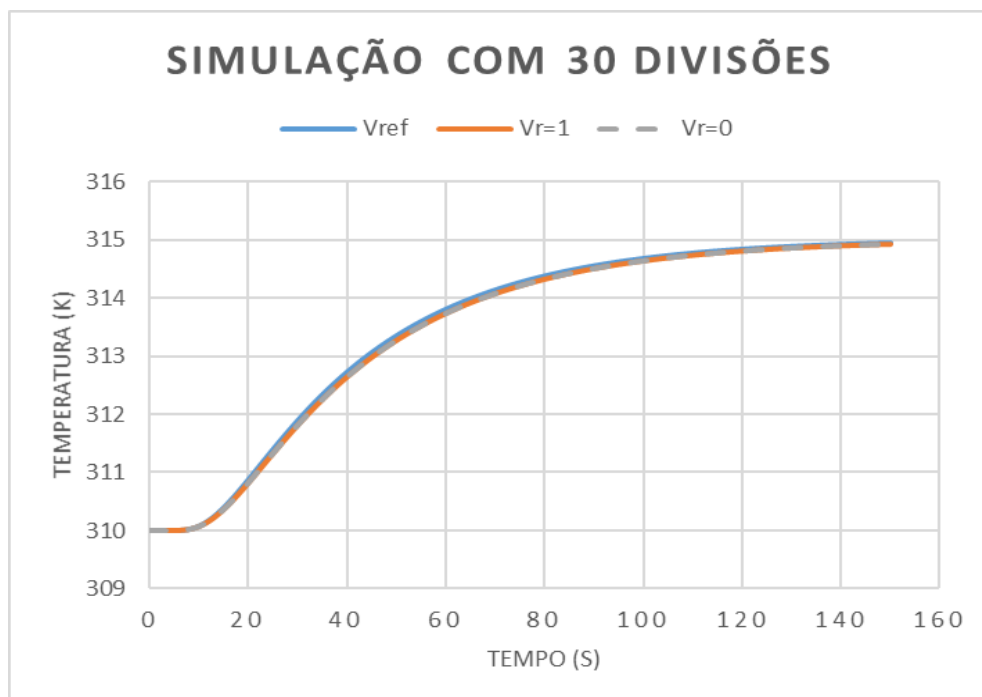


Figura 5.46: Análise transiente da malha com 30 células

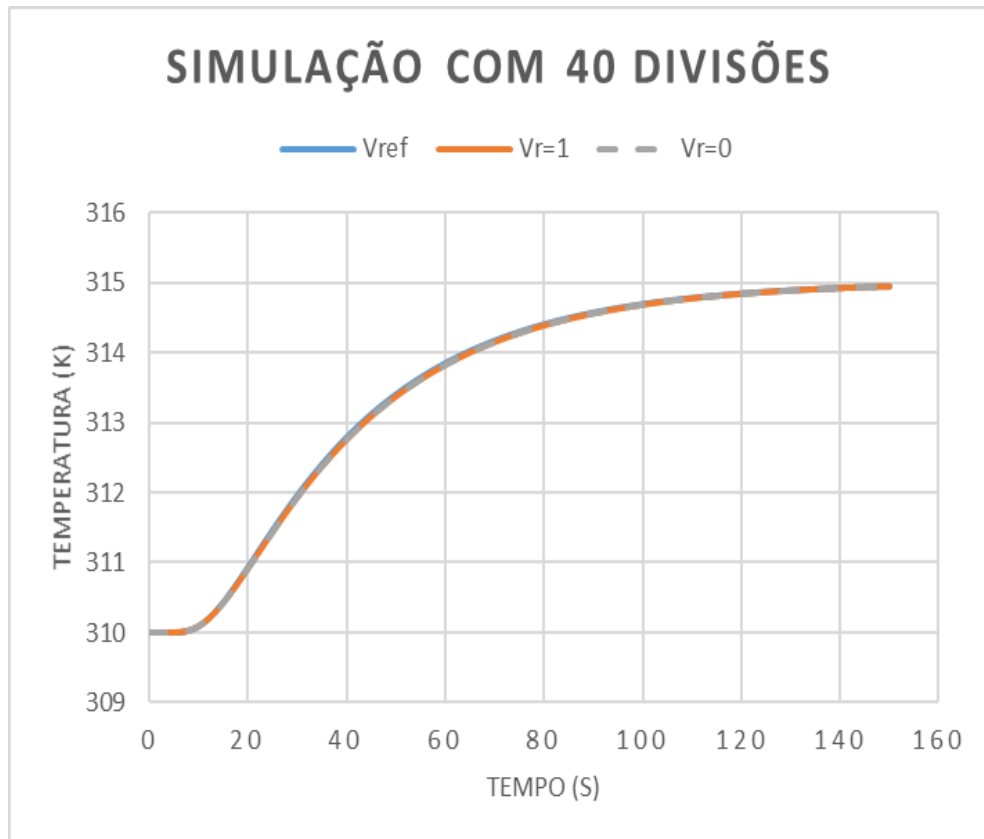


Figura 5.47: Análise transiente da malha com 40 células

CAPÍTULO VI

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

6.1 CONCLUSÕES

O estudo aqui apresentado tratou de um problema de condução de calor bidimensional em regime permanente. Para realização deste estudo foram propostas duas soluções, uma solução teórica e a outra solução numérica. A solução analítica realizada foi uma solução genérica que resolveria qualquer uma das três espécies de problemas bidimensionais existentes para corpos cilíndricos. A outra solução apresenta uma malha genérica, que leva em conta apenas a geometria cilíndrica.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) foi empregada na solução genérica (referência). Para efeito de validação, foi implementado um problema de condução de calor de segunda espécie no *software wolfram mathematica*, o que gerou um perfil de temperatura / tensão, que foi confrontado com os resultados obtidos pelo método numérico.

O método numérico escolhido foi o Método de Simulação de Rede (NSM), onde implementamos um circuito RC no *software PSPICE*, pelo qual foram coletados os resultados para o problema de segunda espécie, no qual como observamos no capítulo referente a análise de resultados, apresenta uma solução compatível com a solução teórica, apresentando a vantagem da velocidade e simplicidade na solução, por requerer apenas as características térmicas do material a ser utilizado para o cálculo dos parâmetros.

Além da validação pelo método analítico, utilizamos a aproximação do problema bidimensional com unidimensional, utilizando o princípio que para um raio muito maior que o comprimento podemos considerar o problema como sendo unidimensional, no

capítulo VI podemos verificar que com uma relação de um raio pelo menos 16 vezes maior que o comprimento, já podemos considerar o problema unidimensional. Para reforçar a validade do método proposto comparamos os resultados da malha proposta com o experimento realizado por SILVA (2014) que é um problema de condução de calor unidimensional em regime permanente que foi validado analiticamente, experimentalmente e via simulação, na comparação com esse experimento o método proposto apresenta a mesma solução do método realizado por SILVA (2014).

Para comprovar a generalidade do método proposto, foi realizada uma comparação com um problema de condução de calor de primeira espécie unidimensional em regime transitório realizado por OLIVEIRA (2010), para o método proposto também fizemos uma aproximação bidimensional para unidimensional, pois, assim como para um raio muito maior que o comprimento podemos considerar o problema sendo unidimensional, também é aceito o comprimento muito maior que raio, para tal experimento verificamos que para um comprimento de 8 vezes maior que o raio, o problema é aproximado ao unidimensional de modo que ao confrontarmos os resultados temos a mesma solução do experimento realizado por OLIVEIRA (2010).

6.2 SUGESTÕES E PERSPECTIVAS

Estudos posteriores podem ser estabelecidos visando os seguintes enfoques:

- Quanto a validação analítica do problema bidimensional transiente, tendo em vista que a solução via método de simulação de rede, demonstrou ser bastante promissora com relação a esse problema.
- Solução do problema bidimensional permanente pelo método de separação de variáveis.
- Desenvolvimento da malha via Método de Simulação de Rede do problema de condução de calor de terceira espécie, que é bem mais complexo, pois, trata-se de um problema que envolve convecção.

REFERÊNCIAS

- ALAWADHI, E. M., and AMON, C. H., 2003, “PCM thermal control unit for portable electronic devices: experimental and numerical studies”. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 26(1), 116–125.
- ALHAMA, F. e CAMPO, A., 2003, “Network Simulation of the Rapid Temperature Changes in the Composite Nozzle Wall of an Experimental Rocket Engine During a Ground Firing Test”, *Applied Thermal Engineering*, 23, 37–47.
- ALHAMA, F., CAMPO, A., & ZUECO, J., 2005, “Numerical solution of the heat conduction equation with the electro-thermal analogy and the code PSPICE”. *Applied Mathematics and Computation*, 162(1), 103–113.
- ALHAMA, I., ALHAMA, F., & SOTO MECA, A., 2012, “The network method for a fast and reliable solution of ordinary differential equations: Applications to non-linear oscillators”. *Computers & Electrical Engineering*, 38(6), 1524–1533.
- ANGSTROM, A. J., 1863. “A new method of determining the thermal conductivity of bodies”. *Phil. Mag.*, 25, pp. 130 – 142.
- BABA, T., & ONO, A., 2001, “Improvement of the laser flash method to reduce uncertainty in thermal diffusivity measurements”, *Measurement Science and Technology*, 12(12), 2046–2057.
- BHATTACHARYA, P., NARA, S., VIJAYAN, P., TANG, T., LAI, W., PHELAN, P. E., WANG, J., 2006, “Characterization of the temperature oscillation technique to measure the thermal conductivity of fluids”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(17-18), 2950–2956.

- BLACKWELL, J. H., 1954, “A Transient-Flow Method for Determination of Thermal Constants of Insulating Materials in Bulk Part I—Theory”, *Journal of Applied Physics*, 25(2), 137.
- BOGLIETTI, A., CAVAGNINO, A., STATON, D., SHANEL, M., MUELLER, M., and MEJUTO, C., 2009. “Evolution and modern approaches for thermal analysis of electrical machines”. *IEEE Trans. Ind. Electron*, 56(3), pp. 871–882.
- BOUTINGUIZA, M., LUSQUÍÑOS, F., POU, J., SOTO, R., QUINTERO, F., & COMESAÑA, R., 2012, “Thermal properties measurement of slate using laser flash method”, *Optics and Lasers in Engineering*, 50(5), 727–730.
- ÇENGEL, Y., BOLES, M., 2007. *Termodinâmica*, 5^aed., McGrall-Hill.
- FRAISSE, G., VIARDOT, C., LAFABRIE, O., & ACHARD, G., 2002, “Development of a simplified and accurate building model based on electrical analogy”. *Energy and Buildings*, 34(10), 1017–1031.
- GALLOY, L., BERQUEZ, L., BAUDOIN, F., PAYAN, D., 2013. “PSpice modeling of the acoustic detector for a pulsed electro-acoustic cell”. *IEEE International Conference on Solid Dielectrics (ICSD)*, pp. 468-471.
- HEALY, J.J., DE GROOT J.J., KESTIN, J., 1976, “The theory of the transient hot-wire method for measuring thermal conductivity”, *Physica B+C*, Volume 82, Issue 2, Pages 392-408.
- ISMAIL, B., DARWISH, M. K., ALHAMROUNI, I., 2015, “Modelling photovoltaic and UPS system in OrCAD PSpice with reliability estimation test”. *IEEE Conference on Energy Conversion (CENCON)*, pp. 424-429.
- JANNOT, Y., DEGIOVANNI, A., and PAYET, G., 2009, “Thermal conductivity measurement of insulating materials with a three layers device”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(56), pp. 1105 – 1111.

- JUMIKIS, A. R., 1996, *THERMAL SOIL MECHANICS*, Rutgers University Press (New Jersey).
- KEATING, J. F., WEST, J. B. AND JENNINGS, J. W., 1991. “Lifting Cost Reduction form Dynamic Balancing.” *38th Annual Sourthwestern Petroleum Short Course. Proceedings*, pp 324-37.
- KUNTNER, J., CHABICOVSKY, R., & JAKOBY, B., 2010, “Oil Condition Monitoring Using a Thermal Conductivity Sensor”, In: GMe Forum Proceedings, 203-209, Viena.
- KUROSAWA, S., 2013, “Análise de Circuiros Alimentados por Fontes Constantes”.
- LAU, G.-K., GOOSEN, J. F. L., and VAN KEULEN, F., 2010. “Optimum design of polymeric thermal microactuator with embedded silicon skeleton”. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 19(4), pp. 992–1001.
- LOPEZ-BAEZA, E., DE LA RUBIA, J., and GOLDSMID, H. J., 1987. “Angstrom’s thermal diffusivity method for short samples”. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 20(9), p. 1156.
- MARANO, D., BONANNO, G., GAROZZO, S., ROMEO, G., GRASSO, A. D., PALUMBO, G., PENNISI, S., 2015 “A new enhanced PSPICE implementation of the equivalente circuit model os SiPM detectors”. *New Circuits an System Conference. IEEE 13th Intenational*, pp. 1-4.
- NAGEL, L. W. e PEDERSON, D. O., 1973, SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis), Technical Report No. UCB/ERL M382, University of California, Berkeley.
- OLIVEIRA, A. S. S., 2010, *Estudo Teórico Experimental da Dinâmica de Temperatura no Interior de Uma Cavidade Cilíndrica*, Tese de Doutorado, PPGEM/UFPB, João Pessoa – Paraíba, Brasil.

- OUYANG, J., and ZHU, Y., 2012. “Z-shaped mems thermal actuators: Piezoresistive self-sensing and preliminary results for feedback control”. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 21(3), pp. 596–604.
- ÖZISIK, M. N., 1989, *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, 1^a Ed. Dover phoenix editions, EUA.
- PARKER, W. J., JENKINS, R. J., BUTLER, C. P., & ABBOTT, G. L., 1961, “Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity”, *Journal of Applied Physics*, 1679
- PSPICE, v. 6.0, 1994, *Microsin Corporation*, 20 Fairbanks, Irvine, California 92718.
- RACITI, A., CRISTALDI, D., GRECO, G., VINCI, G., BAZZANO, G., 2015. “Electrothermal PSpice Modeling and Simulation of Power Modules”. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, pp. 6260-6271.
- ROETZEL, W., PRINZEN, S., ZUAN, Y., 1990. “Measurement of thermal diffusivity using temperature oscillations”, *Therm. Conduct.* 21, 201–207.
- SAHA, A., NIPU, N. N., KHAN, F., 2016, “ PSpice based study of environmental effect on the performance of the solar PV module”. *4th International Conference on the Development in the in Renewable Energy Technology*, pp. 1-6.
- SALAZAR, A., GARRIDO, F., & CELORRIO, R., 2006, “Thermal diffusivity of rods, tubes, and spheres by the flash method”, *Journal of Applied Physics*, 99(6), 066116.
- SÁNCHEZ, J. F., ALHAMA, F., & MORENO, J. A., 2012. “An efficient and reliable model based on network method to simulate CO₂ corrosion with protective iron carbonate films”. *Computers & Chemical Engineering*, 39, 57–64.
- SANTOS, W. N., 2007, “Thermal properties of polymers by non-steady-state techniques”. *Polymer Testing*, 26(4), pp. 556 – 566

- SANTOS, W. N., AGNELLI, J. A. M., MUMMERY, P. and WALLWORK, A., 2007b, "Effect of recycling on the thermal properties of polymers". *Polymer Testing*, 26(2), 216-221.
- SANTOS, Wilson N. *et al.*, 2004, "Método de fio quente na determinação das propriedades térmicas de polímeros. Polímeros", *Polímeros: Ciência e Tecnologia*, São Carlos , v. 14, n. 5, dez.
- SANTUCCI, A., VERDINI, L., VERDINI, P.G., 1986, "Data acquisition system for measurement of thermal diffusivity and propagation properties of thermal waves by a non-steady-state method", *Rev. Sci. Instrum.* 57 1627–1632.
- SHEIKH, M. a, TAYLOR, S. C., HAYHURST, D. R., & TAYLOR, R., 2000, "Measurement of thermal diffusivity of isotropic materials using a laser flash method and its validation by finite element analysis", *Journal of Physics D: Applied Physics*, 33(12), 1536–1550.
- SILVA, T. A. B., 2014, *O Gerador Térmico como Analisador de Propriedades Térmicas a Partir da Harmônica Pura*, Dissertação de Mestrado, PPGEM/UFPB, João Pessoa – Paraíba, Brasil.
- SILVEIRA, I. C., 2012, *Análise da Condução de Calor Transiente Uni e Bidimensional Submetida a Variações Harmônicas na Condição de Contorno*, Dissertação de Mestrado, PPGEM/UFPB, João Pessoa – Paraíba, Brasil.
- TANG, W. H., WU, Q. H., & RICHARDSON, Z. J., 2004, "A simplified transformer thermal model based on thermal-electric analogy", *IEEE Transactions on Power Delivery*, 19(3), 1112–1119.
- TENG, M., HU, J., 2013, "PSPICE Analyses of vibration energy harvester systems with multiple piezoelectric components". *IEEE Conference Publications*, pp. 1-4

- TILLMANN, A. R., 2005, “Determinação Simultânea da Condutividade Térmica e da Difusividade Térmica Variando com a Temperatura”. Dissertação de Mestrado. UFU, Uberlândia, Brasil.
- VERMEULEN, F. E. and CHUTE F. S., 1983, “Electromagnetic Techniques in the In-Situ Recovery of Heavy Oils”, *Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy*, 18(1), 15-30, 1983.
- VLADIMIRESCU, A., 1994, *The spice book*. J. Wiley, EUA.
- WANG, D.-B., LIAO, X.-P., and LIU, T., 2012. “A thermoelectric power sensor and its package based on mems technology”. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 21(1), pp. 121–131.
- WEIGEN, C., CHONG, P., & YUXIN, Y., 2009, “Power transformer top-oil temperature model based on thermal – electric analogy theory”, *EUROPEAN TRANSACTIONS ON ELECTRICAL POWER*, 19, 341–354.
- ZHANG, Y., HU, X., ZHAO, J., SHENG, K., CANNON, W., WANG, X., and FURSIN, L., 2009. “Rheology and thermal conductivity of diamond powder-filled liquid epoxy encapsulants for electronic packaging”. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 32(4), pp. 716–723.
- ZHAO, W., WEI, P., 2013, “PSpice system simulation application in electronic circuit design” *IEEE Conference Publications*, pp. 8634-8636.
- ZUECO, J., & ALHAMA, F., 2006, “Inverse estimation of temperature dependent emissivity of solid metals”, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 101(1), 73–86.
- ZUECO, J., & ALHAMA, F., 2007, “Simultaneous inverse determination of temperature-dependent thermophysical properties in fluids using the network simulation method”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(15-16), 3234–3243.

- ZUECO, J., 2009, “Network modelling of unsteady natural convection flow over a vertical plate submitted to surface temperature oscillation”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 19(3/4), 285–302.
- ZUECO, J., ALHAMA, F. e GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, C.F., 2004, “Analysis of Laminar Forced Convection With Network SimulationiIn Thermal Entrance Region of Ducts”, *International Journal of Thermal Science* 43, 443–451.

APÊNDICE A – TABELA DE AUTOVALORES CÁLCULADOS PELO *WOLFRAM MATHEMATICA*

Para a solução do problema analítico foi utilizado a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) conforme visto no capítulo III, e um dos passos da resolução é o cálculo dos autovalores que pode ser calculado pela autofunção dada pela Equação 3.58. Utilizando o *software Wolfram Mathematica*, temos solução para o problema de segunda espécie, utilizando $Bi_2 = 0,45$, onde N é quantidade de termos, conforme a tabela A.1:

$$\mu_i J'_0(\mu_i) + Bi_2 J_0(\mu_i) = 0 \quad (3.58)$$

Tabela A.1 – Autovalores utilizados na solução analítica de segunda espécie

N	Autovalor	N	Autovalor	N	Autovalor	N	Autovalor
1	3,430873408	21	66,33163451	41	129,1655992	61	191,9981849
2	6,604757079	22	69,47342289	42	132,3072449	62	195,1398018
3	9,758902834	23	72,61519443	43	135,4488882	63	198,281418
4	12,90716514	24	75,75695122	44	138,5905292	64	201,4230334
5	16,05289339	25	78,89869501	45	141,7321681	65	204,5646481
6	19,19730073	26	82,04042729	46	144,873805	66	207,7062622
7	22,34093271	27	85,18214932	47	148,01544	67	210,8478756
8	25,48407085	28	88,32386219	48	151,1570733	68	213,9894885
9	28,62687513	29	91,46556685	49	154,2987049	69	217,1311007
10	31,76944317	30	94,6072641	50	157,4403349	70	220,2727124
11	34,91183791	31	97,74895465	51	160,5819635	71	223,4143235
12	38,05410177	32	100,8906391	52	163,7235907	72	226,5559342
13	41,19626437	33	104,0323181	53	166,8652166	73	229,6975443
14	44,338347	34	107,173992	54	170,0068413	74	232,839154
15	47,4803654	35	110,3156613	55	173,1484649	75	235,9807632
16	50,62233141	36	113,4573264	56	176,2900873	76	239,122372
17	53,76425415	37	116,5989876	57	179,4317087	77	242,2639803
18	56,90614073	38	119,7406452	58	182,5733291	78	245,4055883
19	60,04799678	39	122,8822995	59	185,7149486	79	248,5471959
20	63,18982681	40	126,0239508	60	188,8565672	80	251,6888031

Continuação Tabela A.1 – Autovalores utilizados na solução analítica de segunda espécie

N	Autovalor	N	Autovalor	N	Autovalor	N	Autovalor
81	254,8304099	101	317,662488	121	380,4944919	141	443,3264531
82	257,9720165	102	320,8040896	122	383,6360908	142	446,4680503
83	261,1136226	103	323,9456911	123	386,7776896	143	449,6096475
84	264,2552285	104	327,0872923	124	389,9192883	144	452,7512447
85	267,396834	105	330,2288934	125	393,0608869	145	455,8928417
86	270,5384393	106	333,3704943	126	396,2024854	146	459,0344387
87	273,6800442	107	336,5120951	127	399,3440838	147	462,1760357
88	276,8216489	108	339,6536957	128	402,4856822	148	465,3176326
89	279,9632533	109	342,7952962	129	405,6272804	149	468,4592294
90	283,1048574	110	345,9368966	130	408,7688785	150	471,6008262
91	286,2464613	111	349,0784968	131	411,9104766	151	474,7424229
92	289,388065	112	352,2200968	132	415,0520746	152	477,8840196
93	292,5296684	113	355,3616968	133	418,1936725	153	481,0256162
94	295,6712716	114	358,5032966	134	421,3352703	154	484,1672128
95	298,8128745	115	361,6448962	135	424,4768681	155	487,3088093
96	301,9544773	116	364,7864958	136	427,6184658	156	490,4504058
97	305,0960798	117	367,9280953	137	430,7600634	157	493,5920022
98	308,2376822	118	371,0696946	138	433,9016609	158	496,7335986
99	311,3792843	119	374,2112938	139	437,0432584	159	499,8751949
100	314,5208863	120	377,3528929	140	440,1848558	160	503,0167912

Continuação Tabela A.1 – Autovalores utilizados na solução analítica de segunda espécie

N	Autovalor	N	Autovalor
161	506,1583874	181	568,9903038
162	509,2999836	182	572,1318993
163	512,4415798	183	575,2734947
164	515,5831759	184	578,4150901
165	518,7247719	185	581,5566855
166	521,866368	186	584,6982808
167	525,0079639	187	587,8398761
168	528,1495599	188	590,9814714
169	531,2911558	189	594,1230667
170	534,4327517	190	597,2646619
171	537,5743475	191	600,4062571
172	540,7159433	192	603,5478523
173	543,857539	193	606,6894474
174	546,9991348	194	609,8310425
175	550,1407304	195	612,9726376
176	553,2823261	196	616,1142327
177	556,4239217	197	619,2558277
178	559,5655173	198	622,3974227
179	562,7071128	199	625,5390177
180	565,8487084	200	628,6806127

APÊNDICE B – ROTINAS UTILIZADAS PARA AS SOLUÇÕES ANÁLITICA E CÁLCULO DOS PARAMETROS

Para a solução do problema analítico foi utilizado a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) conforme visto no capítulo III. Utilizando o *software Wolfram Mathematica*, temos solução para o problema de segunda espécie, utilizando $Bt_2 = 0,45$.

Conforme algoritmo, a seguir:

Características do material e dados de entrada

$$k = 1.38$$

$$dens = 2203$$

$$cp = 772$$

$$a = \frac{k}{dens * cp}$$

$$H1 = 0.45$$

$$H2 = H1$$

$$w = \left(\frac{1}{1000}\right) * 2 * Pi$$

$$L = 5 * 10^{-3}$$

$$r0 = 5 * 10^{-2}$$

$$\Delta\theta = 1$$

$$nf = 100$$

$$tal[t_] := \frac{a * t}{r0^2}$$

```
tabt = Table[tal[t], {t, 30000, 40000}]
```

```
vtabt[t_] := Part[tabt, t]
```

Primeiro passo (Calculando os autovalores)

```
 $\mu[i\_]$  := FindRoot[BesselJ[1, x] + H2 * BesselJ[0, x], {x, i * Pi}]
```

```
tabj0 = Table[Part[ $\mu$ [i], 1, 2], {i, 1, 200}]
```

Segundo passo (Calculando a norma)

```
ab[n_] := Part[tabj0, n]
```

```
dni[n_] := 2 * (ab[n])2
```

```
nni1[n_] := (BesselJ[0, ab[n]])2
```

```
nni2[n_] := (H22 + (ab[n])2)
```

```
Ni[n_] :=  $\frac{nni1[n] * nni2[n]}{dni[n]}$ 
```

```
tn = Table[Part[Ni[n], {n, 1, nf}]
```

Terceiro passo (Calculando as autofunções normalizadas)

```
vn[n_] := Part[tn, n]
```

```
rvn[n_] :=  $\sqrt{vn[n]}$ 
```

```
 $\varphi[r\_n\_]$  :=  $\frac{BesselJ[0, r * ab[n]]}{rvn[n]}$ 
```

```
tfn = Table[Part[ $\varphi$ [r, n], {r, 0, r0,  $\frac{r0}{12}$ }]
```

```
vfn[r_, n_] := Part[tfn, r, n]
```

Quarto passo (Calculando as constantes C1 e C2)

$$\theta[n_] := \frac{BesselJ[1, ab[n]]}{ab[n]}$$

$$\xi[n_] := \sqrt{(ab[n])^2 + (I * w)}$$

$$c1[n_] := (\theta[n] * (\xi[n] - H1)) / (-H1 + (H1 * E^{2*\xi[n]}) + \xi[n] + (\xi[n] * E^{2*\xi[n]}))$$

$$tc1 = Table[Part[c1[n]], \{n, 1, nf\}]$$

$$vc1[n_] := Part[tc1, n]$$

$$c2[n_] := (\theta[n]) - c1[n]$$

$$tc2 = Table[Part[c2[n]], \{n, 1, nf\}]$$

$$vc2[n_] := Part[tc2, n]$$

$$\theta i[n_ , z_] := (vc1 * E^{\xi[n]*z}) + (vc2 * E^{-\xi[n]*z})$$

$$t\theta i = Table\left[Part[\theta i[n, z]], \{n, 1, nf\}, \left\{z, 0, L, \frac{L}{12}\right\}\right]$$

$$vt\theta i[n_ , z_] := Part[t\theta i, n, z]$$

Quinto Passo (Calculando solução final)

$$Tf[r, z, t] := \sum_{n=1}^{nf} (vf n[r, n] * vt\theta i[n, z] * \Delta\theta * E^{I*w*vtat[t]})$$

Para o cálculo das resistências e capacitâncias foi utilizado o *software MATLAB*, conforme algoritmo, a seguir:

Cálculo da resistência e capacitância

Setando as posições

$$posi = 0.0:0.0333:1$$

$$posi(1) = 0.0000001$$

$$r0 = 0.15$$

$$r = r0 * posi$$

$$L = 0.005$$

Características do material

$$kt = 1.38$$

$$dens = 2203$$

$$cp = 772$$

Discretização do cilindro

$$nd = 30$$

$$deltaL = \frac{L}{nd}$$

Calculando as resistências e capacitâncias sentido radial

$$for\ n = length(r) - 1 : -1 : 1$$

$$Rr(n) = \left(\log \left(\frac{r(n+1)}{r(n)} \right) / (2 * pi * kt * L) \right)$$

$$Cr(n) = (pi * dens * cp * L * ((r(n+1))^2 - (r(n))^2))$$

end

Calculando as resistências e capacitâncias sentido longitudinal

$$for\ n = length(r) - 1 : -1 : 1$$

$$Rl(n) = \left(\frac{1}{kt} \right) * \left(\frac{deltaL}{(pi * ((r(n+1))^2 - (r(n))^2))} \right)$$

$$Cl(n) = (pi * dens * cp * deltaL * ((r(n+1))^2 - (r(n))^2))$$

end