



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Efeitos da Torção em Matéria Condensada

Anderson Alves de Lima

JOÃO PESSOA

- Março 2017 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
TESE DE DOUTORADO

Efeitos da Torção em Matéria Condensada

Anderson Alves de Lima

Tese realizada sob a orientação do Prof.
Dr. Fernando Moraes, apresentada ao
programa de Pós-Graduação em Física,
como complementação aos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Física.

JOÃO PESSOA

- Março 2017 -

L732e Lima, Anderson Alves de.
Efeitos da torção em matéria condensada / Anderson Alves
de Lima - João Pessoa, 2017.
65 f.: il. -

Orientador: Fernando Moraes.
Tese (Doutorado) - UFPB/ CCEN

1. Física. 2. Defeitos topológicos. 3. Níveis de Landau.
4. Spin. 5. Condutividade Hall quantizada. I. Título.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Doutorado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 17 de março de 2017, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA **Anderson Alves de Lima** na defesa de sua tese intitulada "*Efeitos da torção em matéria condensada*".

João Pessoa, 17 de março de 2017.

Orientador:


Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes
(DF/UFPB)

Coorientador:

Prof. Dr. Cleverson Filgueiras
(UFLA)

1º Examinador:


Prof. Dr. Sérgio André Pontes Azevedo
(DF/UFPB)

2º Examinador:


Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e
Barbosa
(UFRPE)

3º Examinador:


Prof. Dr. João Antônio Plascak
(DF/UFPB)

4º Examinador:


Prof. Dr. Fernando Antônio Nóbrega
Santos
(UFPE)



Campus I – Jardim Universitário
Fone: 083-3216-7422

João Pessoa-PB, Brasil
<http://www.fisica.ufpb.br>

CEP: 58051-900
secpos@fisica.ufpb.br

Dedico ao meu filho Juan, à minha eterna companheira Jaqueline e aos meus pais Orlando e Maria José.

AGRADECIMENTOS

A Deus.

Ao meu filho, Juan.

Aos meus pais.

À minha esposa, Jaqueline que tanto enriqueceu e enriquece minha história.

Ao professor, orientador e amigo, Dr. Fernando Moraes que me orientou nestes quatro anos e é para mim um referencial de profissional que quero seguir.

Ao professor Dr. Cleverson que me aceitou orientar desde o mestrado e me abriu as portas da matéria condensada.

À professora Maria Vozmediano e amigos do Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid.

Aos professores Dr. Sergio Azevedo, Dr. João Antonio Plascak, Dr. Anderson Barbosa e Dr. Fernando Nóbrega Santos por se disporem a participar da banca examinadora e pelas valiosas contribuições prestadas na melhoria desse trabalho.

Aos professores Dr. Eugênio Mello e Dr. João Antonio Plascak, pela dedicação e conhecimentos preciosos ministrados em suas disciplinas.

Aos colegas de curso que são verdadeiros amigos, pois sem essa parceria de estudo não conseguiria passar dessa etapa acadêmica.

À Universidade Federal da Paraíba representada pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

À Capes e ao CNPq, pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos os efeitos da torção devido a uma distribuição de defeitos topológicos (deslocações parafuso) na dinâmica de uma partícula livre com spin em um sólido elástico. Quando uma partícula se movimenta neste meio, o efeito da torção associado à distribuição de defeitos é análogo ao de um campo magnético aplicado, porém com algumas sutis diferenças. Para entendermos o comportamento quântico da partícula neste sistema, primeiramente nos voltamos para a parte clássica, calculando suas equações de movimento e traçando sua trajetória através das geodésicas, afirmando o comportamento análogo ao de um campo magnético aplicado gerando os níveis de Landau elásticos, porém tal partícula não pode ser confinada em duas dimensões. Partículas com spin estão sujeitas ao acoplamento entre spin e torção semelhante ao efeito Zeeman, com a característica de serem insensíveis ao sinal da carga. Uma possível aplicação, abordada neste trabalho, para esta densidade de defeitos, está na condutividade Hall do efeito Hall quântico inteiro, a qual chamamos de condutividade Hall elástica. Para termos uma melhor intuição física do problema, traçamos alguns gráficos da condutividade Hall elástica em relação à temperatura e ao potencial químico.

Palavras Chaves: Defeitos topológicos, níveis de Landau, spin, condutividade Hall quantizada.

ABSTRACT

In this work, we study the effects of torsion due a topological defect distribution (screw dislocations) in the dynamics of a free particle with spin in an elastic solid. When a particle moves in this medium, the effect of the torsion associated with the distribution of defects is analogous to that of an applied magnetic field, but with some subtle differences. In order to understand the quantum behavior of the particle in this system, we first turn to the classical part, calculating its equations of motion and tracing its trajectory through the geodesics, proving the behavior analogous to that of an applied magnetic field generating the elastic Landau levels, nevertheless such particle can not be confined to two dimensions. Spinning particles are subjected to the spin-torsion coupling similar to the Zeeman effect, with the characteristic of being insensitive to the charge signal. A possible application, treated in this study, for this defect density, is in the Hall conductivity of the Integer Quantum Hall Effect, which we call elastic Hall-like conductivity. In order to have a better physical intuition of this problem, we plot some graphs of the elastic Hall-like conductivity as a function of temperature and chemical potential.

Key Words: Topological defects, Landau levels, spin, quantum Hall conductivity.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Desclinação, deslocação e torção	5
2.1	Desclinação e deslocação	5
2.2	Uma introdução matemática sobre torção	9
3	Níveis de Landau e Efeito Hall Quântico Inteiro	15
3.1	Níveis de Landau	17
3.2	Calculando a condutividade Hall clássica	19
3.3	Condutividade Hall para o Efeito Hall Quântico Inteiro	24
4	Efeitos da torção em matéria condensada: o análogo do campo magnético	32
4.1	Analisando o comportamento clássico	32
4.2	O comportamento quântico	37
5	Condutividade elástica tipo-Hall	42
6	Considerações finais	48
	Bibliografia	50

Lista de Figuras

2.1	Tipos de deslocações classificados por Volterra [33] que dividiu em seis tipos mais gerais de defeitos, chamando de "distorsione" e mais tarde, em 1920, o pesquisador A.E.H. Love chamou b, c e d de <i>deslocação</i> (do inglês <i>dislocation</i>) e chamou e, f e g de <i>desclinação</i> (do inglês <i>disclination</i>).	7
2.2	Em <i>a</i> , uma fatia de 60° foi retirada da rede hexagonal e observamos um pentágono no centro da imagem. Em <i>b</i> , uma fatia de 60° foi adicionada, gerando um heptágono [34].	8
2.3	Formas de se visualizar a produção de desclinações. Na primeira e segunda imagem, retira-se material. Na última imagem, insere-se material [36].	9
2.4	Configurações iniciais para deslocações Volterra de primeiro tipo. As movimentações indicadas na estrutura cristalina conduzem a estados de deslocações tipo de borda no caso acima e tipo parafuso no caso abaixo [37].	10
2.5	Representação de um meio elástico contínuo com uma única deslocação parafuso e seu vetor de Burgers $\vec{b}$	10
3.1	Energia em função do campo magnético para cada nível de Landau <i>n</i>	19
3.2	Nesta imagem observamos uma diferença de potencial V_H nas bordas da placa. Devido ao campo magnético perpendicular $\vec{B}$, as partículas carregadas desviam a sua trajetória para a borda quando estas estão sendo movidas devido ao campo elétrico longitudinal em <i>x</i> com densidade de corrente J_x	20
3.3	Resistência Hall variando linearmente com o campo magnético, observada no caso clássico.	23

3.4	Temos a densidade de estados em função da energia e a resistividade em função do campo magnético, lado a lado, para as imagens <i>a, b, c</i> e <i>d</i> . Na segunda imagem em <i>a</i> , note que temos dois pontos vermelhos indicando a resistência longitudinal (ρ_{xx}) e a resistência transversal (ρ_{xy}) (ou resistência Hall). Para um campo magnético pequeno, notemos que a resistência longitudinal (linha verde) se torna constante enquanto a resistência Hall (linha azul) varia linearmente. Neste caso, os estados estão completamente preenchidos abaixo da energia de Fermi. Em <i>b</i> , quando o campo magnético aumenta, estes estados ficam degenerados e distribuídos conforme os níveis de Landau e o espaçamento entre um pico e outro corresponde a $\hbar\omega_c$. A resistência Hall é quantizada e se mantém constante enquanto que a resistência longitudinal se mantém nula, tornando-se um condutor perfeito nas bordas, conforme podemos observar na figura direita. Com o aumento do campo magnético, o espaçamento entre os picos aumenta e, quando tais estados degenerados entram em contato com o nível de Fermi, a resistência Hall salta para outro valor e a resistência transversal tem um pico neste momento de transição, voltando a ser nula quando a resistência Hall se mantém constante em um dado platô, como mostrado em <i>d</i> . [45].	29
3.5	Gráfico que descreve o comportamento clássico de um elétron em uma amostra com um campo magnético aplicado perpendicularmente. Percebemos nas bordas a movimentação dos elétrons em semicírculos e, no centro da amostra, os elétrons confinados em círculos completos em torno de impurezas da amostra [46].	30
3.6	Função de distribuição de Fermi-Dirac para $T = 0$	30
3.7	Função de distribuição de Fermi-Dirac para $T \neq 0$, porém $T \ll T_F$	31
4.1	Trajetória clássica para uma partícula se movendo na presença de uma distribuição contínua de deslocações parafuso.	34
4.2	Campo de torção associado à distribuição de deslocações parafuso, como representa o vetor axial (Eq. (2.19)). O campo é orientado paralelamente à direção z	35

4.3	Representação do campo vetorial ($\hat{z} + \Omega\rho\hat{\varphi}$) que nos dá a cada ponto, a direção de uma translação infinitesimal que leva às equações de movimento invariantes. a) vista lateral e b) vista de cima.	36
4.4	A energia como função do vetor de onda (conforme a Eq. (4.25)) para uma densidade de deslocações $N = 10^8$ disl./cm ² . Consideramos $s = 0$ para uma partícula sem spin e $s = \pm\frac{\hbar}{2}$ para o caso com spin. Usamos $\eta = -\frac{1}{8}\hbar c$ e valores para o GaAs (massa efetiva do elétron, magnitude do vetor de Burguers e valores típicos de densidade de deslocação).	40
4.5	A magnitude do espaçamento na energia provocado pelo spin, como uma função da densidade de deslocação.	41
5.1	Condutividade Hall versus o potencial químico para diferentes valores de densidade de deslocações e $T = 3K$	45
5.2	Condutividade Hall versus o potencial químico para diferentes valores de temperatura.	46
5.3	Condutividade Hall versus a densidade de deslocações para diferentes valores de potenciais químicos e $T = 3K$	47
5.4	Condutividade Hall versus a densidade de deslocações para diferentes valores de temperatura.	47

Capítulo 1

Introdução

A curvatura, de fato, está em toda parte. Entre outras coisas, ela é o principal ingrediente da relatividade geral e recentemente apareceu como uma ferramenta que manipula propriedades eletrônicas de sistemas de baixa dimensão [1]. Talvez devido à torção não desempenhar um papel tão importante quanto à curvatura em Gravitação, ela tenha recebido pouca atenção da comunidade Física, em geral. Este é o objetivo deste trabalho, chamar a atenção para a manifestação de torção associada à defeitos topológicos e algumas possíveis aplicações em Matéria Condensada.

Defeitos topológicos podem estar presentes em qualquer tipo de material cristalino. Eles são um resultado da quebra de simetria local discreta. Seu modo de ser visualizado como um processo de “cortar e colar”, foi primeiramente descrito por Vito Volterra em 1907 [2] que se tornou conhecido como processo Volterra. A descrição geométrica de meios elásticos com defeitos topológicos começou nos anos 1950 com Kondo e Bilby [3], Bullough e Smith [4] que, de maneira independente produziram uma elegante teoria geométrica diferencial de deslocamentos. A teoria contínua de defeitos teve então importantes contribuições nos seguintes anos a partir de Eshelby [5], Kröner [6] e Zorawski [7]. Uma ótima revisão acerca deste tema pode ser encontrada em [8], incluindo deslocamentos, desclinações e defeitos pontuais. Deslocamentos, em particular, possuem uma forte influência nas propriedades elásticas e eletrônicas do meio que as apresenta. Espalhamentos devido a estes defeitos possuem uma forte influência em ondas elásticas [9], magnons [10] e elétrons [53]. Para os desenvolvedores de equipamentos industriais, estes defeitos são um problema pois interferem nas propriedades

eletrônicas dos materiais através do espalhamento ou confinando elétrons. Por outro lado, defeitos lineares podem ser usados na estrutura dos aparelhos eletrônicos pois eles podem agir como canais de condução unidimensional [12–14]. Existem largas evidências da similaridade entre linhas de deslocação e tubos de fluxo magnético. Pesquisas recentes sobre os efeitos das deslocações indicam que elas agem como fontes de um campo magnético fictício em um semimetal de Weyl [15]. Por outro lado, embora causem fases do tipo Aharonov-Bohm [16–18] e induzam modos transversais no efeito Hall quântico [19], foi mostrado recentemente, em um estudo da condutividade óptica na presença da deslocação parafuso [20], que elas agem qualitativamente diferentes do campo magnético. Portanto, a pesquisa sobre defeitos e como eles podem influenciar a dinâmica dos portadores é importante para o fornecimento da tecnologia na eletrônica, o descobrimento de novos fenômenos e um melhor controle nos processos de transmissão.

Sabemos que toda nossa eletrônica está fundamentada em um processo binário (0 e 1) que representa o fluxo do elétron. Se além do fluxo do elétron, considerarmos também o seu spin (up ou down), podemos ter um fluxo de informações mais rápido, gerando assim uma nova eletrônica que se baseia no spin da partícula, ou seja, spintrônica [21]. Tal advento, aumentou o interesse dos efeitos dos defeitos topológicos na dinâmica dos portadores com spin. Uma vez que torção acopla com spin, a compreensão destes efeitos na dinâmica de spin pode ser extremamente útil no desenvolvimento de aparelhos de spintrônica através das aplicações de engenharia envolvendo deslocações.

A teoria geométrica de defeitos de Katanaev e Volovich [22, 23] demonstra a equivalência entre a gravidade tridimensional com a torção e a teoria geométrica de defeitos em sólidos. Em um limite contínuo esta abordagem descreve o sólido usando uma variedade de Riemann-Cartan onde curvatura e torção são associadas à desclinação e deslocação, respectivamente. O vetor de Burgers da deslocação está associado com a torção e o ângulo de Frank da desclinação está associado com a curvatura. Nesta teoria, as deformações elásticas introduzidas pelos defeitos no meio são incorporados na métrica da variedade. Deste modo, todo um ferramental matemático que envolve a geometria da relatividade geral pode ser usado no estudo de propriedades físicas do meio material que contém defeitos topológicos. Então, este meio com

defeitos topológicos pode fornecer testes experimentais de hipóteses de teoria de Gravitação, servindo como um laboratório onde é possível visualizar, experimentalmente, tais teorias [24].

Usando a teoria geométrica de defeitos, os autores da Ref. [25] estudaram a dinâmica quântica da partícula movendo-se em uma densidade de deslocações parafuso, homogeneamente distribuídas e paralelas umas às outras. Mesmo sem um campo magnético externo aplicado, obtêm-se autovalores de energia muito similares aos bem conhecidos níveis de Landau devido ao campo de torção associado à distribuição de defeitos. O acoplamento da torção à função de onda vem da distorção do meio com os defeitos que efetivamente aparecem como uma modificação da energia cinética devido à distorção das trajetórias. O operador Laplaciano é substituído por sua versão mais geral, o operador Laplace-Beltrami, que incorpora a geometria efetiva do meio no contexto da teoria geométrica de defeitos. No presente trabalho, damos a contribuição de incluir o acoplamento entre o campo de torção e o momento magnético da partícula, um fenômeno bem conhecido da teoria da magnetoelasticidade, teoria esta que nos fornece o comportamento magnético de materiais não-ferrosos devido à deformação [26]. Em materiais elásticos, a distorção do meio em torno das deslocações tendem a se alinhar ao momento magnético criando padrões magnéticos em nanoescalas que tem sido amplamente estudados pelo ponto de vista teórico [27] assim como experimental [28]. Apresentamos uma abordagem simplificada, inspirada na teoria geométrica de defeitos, adicionando no Hamiltoniano estudado na referência [25], um termo de acoplamento entre campo de torção produzido pelos defeitos ao spin (e, portanto, ao momento magnético) de uma partícula quântica. Este acoplamento é bem conhecido na teoria quântica de campos na presença de torção [29] e, naturalmente, não inclui todos os detalhes da teoria da magnetoelasticidade, porém nos fornece uma base geométrica para estudarmos partículas com spin em um meio com defeito.

Sabendo que a densidade de deslocações parafuso gera algo análogo aos níveis de Landau sem a necessidade de campo magnético aplicado, este trabalho sugere uma possível aplicação desse fenômeno gerando uma condutividade Hall quantizada pela influência do campo de torção gerado por essa distribuição de defeitos, na qual chamamos condutividade elástica tipo-Hall.

Este trabalho está apresentado da seguinte maneira: No Capítulo 2, faremos uma introdução aos defeitos topológicos (deslocações e desclinações) e à teoria geométrica de defeitos. No Capítulo 3, discutiremos os níveis de Landau e o cálculo da condutividade Hall para os casos clássico e quântico. No Capítulo 4 trataremos do comportamento clássico e resolveremos a equação tipo Schrödinger-Pauli para uma partícula com spin interagindo com uma distribuição homogênea de deslocações parafuso. Apresentaremos também o resultado destas implicações em sistemas reais como o Arseneto de Gálio, por exemplo. No Capítulo 5, iremos propor uma aplicação que nos fornece o análogo à condutividade Hall quantizada, na qual chamamos condutividade elástica tipo-Hall.

Capítulo 2

Desclinação, deslocação e torção

2.1 Desclinação e deslocação

Defeitos estão presentes em quase todas as coisas na natureza. É improvável encontrar uma amostra de cristal que tenha um arranjo perfeitamente ordenado, pois elas apresentam naturalmente defeitos nas suas mais variadas combinações. Um dos focos da Física do Estado Sólido é entender estas estruturas cristalinas e as suas propriedades físicas que são definidas por defeitos na estrutura da rede [30].

Tendo em vista que a matéria condensada é composta por blocos elementares chamados partículas, ou seja, os átomos e moléculas, e que a forma das partículas tem uma importante influência nas propriedades dos materiais, elas podem se assemelhar a pontos, linhas, folhas, ou objetos de formas bastantes complexas. Por exemplo, moléculas em cristais líquidos frequentemente têm a forma de um bastão. Muitos polímeros, onde a dimensão de comprimento é muito maior em relação à sua espessura, têm forma linear. Então estes materiais possuem inúmeras possibilidades de adquirir as mais diferentes formas [23]. Produzindo defeitos que podem ser pontuais, lineares ou de superfície de acordo com o fato de sua região ser ligada na escala atômica em uma, duas ou três dimensões [31].

Não apenas a forma mas também o arranjo das partículas é muito importante para as propriedades físicas dos materiais que eles compreendem. Existe uma variedade imensa

de materiais, desde o mais ordenado ao completamente desordenado e, neste trabalho, consideraremos materiais que possuam defeitos mas com um certo padrão de distribuição na amostra.

Em física, existem muitas pesquisas a respeito de defeitos topológicos de modo a estudar sua influência na dinâmica quântica relativística e não-relativística. Na mecânica quântica não-relativística, uma série de problemas têm sido investigados como espalhamento de partículas por defeitos topológicos, os próprios níveis de Landau elásticos já citados, fontes de campo magnético fictício em semimetais de Weyl, etc.

Em diferentes áreas da física como, por exemplo, gravitação e física da matéria condensada, o estudo da topologia dos sistemas tem sido de grande importância. Defeitos topológicos aparecem em gravitação como monopólos, cordas cósmicas e paredes de domínio. Em física da matéria condensada eles são vórtices em supercondutores ou superfluidos, paredes de domínio em materiais magnéticos, sólitons em polímeros quase unidimensionais e deslocações ou desclinações em sólidos cristalinos ou cristais líquidos [32].

Faremos uma abordagem da teoria topológica de desclinação e deslocação, apresentada de uma maneira geral, podendo estes conceitos fundamentais serem aplicados a vários tipos diferentes de materiais.

Vito Volterra em 1907 [35] foi o pioneiro nas contribuições das propriedades elásticas deste estudo, dividindo em seis tipos mais gerais de defeitos, mostrados na Figura 2.1 [33]. Volterra chamou estes defeitos de "distorsione" e mais tarde, em 1920, o pesquisador A.E.H. Love chamou b, c e d de *deslocação* (do inglês *dislocation*) e chamou e, f e g de *desclinação* (do inglês *disclination*).

Temos na Figura 2.2, outra imagem de desclinação que, em duas dimensões, é um tipo de defeito pontual. Na referida figura, podemos observar uma rede hexagonal, sendo o tipo de rede do grafeno. Retirando ou colocando um átomo nessa rede, retiramos ou acrescentamos um ângulo de 60° nessa amostra. O grafeno é bidimensional e para meios tridimensionais, o defeito que era pontual se torna uma linha de defeitos.

Podemos observar na Figura 2.3, três formas de visualizar a obtenção de uma desclinação. No primeiro e segundo caso, retira-se uma fatia com determinado ângulo Ω (chamado ângulo

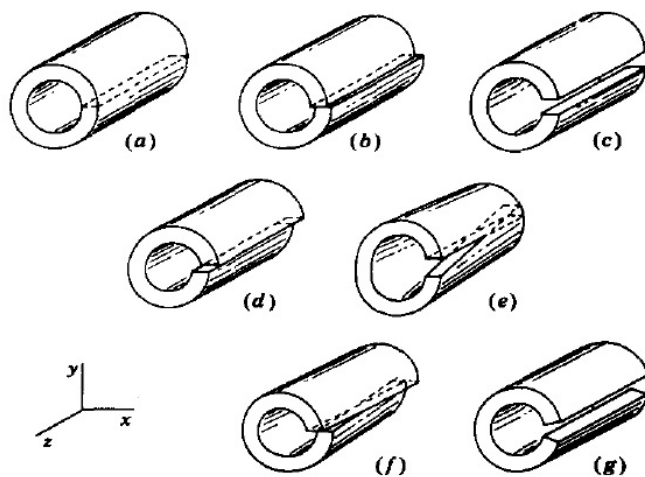


Figura 2.1: Tipos de deslocações classificados por Volterra [33] que dividiu em seis tipos mais gerais de defeitos, chamando de "distorsione" e mais tarde, em 1920, o pesquisador A.E.H. Love chamou b, c e d de *deslocação* (do inglês *dislocation*) e chamou e, f e g de *desclinação* (do inglês *disclination*).

de Frank) e, em seguida, cola-se as bordas restantes, como indica a figura. No último caso, acrescenta-se uma fatia com ângulo Ω . A desclinação faz gerar uma conicidade na origem do defeito. Como já foi dito, pontual para duas dimensões e linear quando tratamos de um sólido tridimensional.

A deslocação é um tipo de defeito que ocorre em três dimensões e podemos entendê-lo, em matéria condensada, como um defeito cristalográfico, ou seja, uma irregularidade dentro de uma estrutura cristalina. A presença de deslocações influencia fortemente muitas das propriedades dos materiais.

Existem dois tipos principais de deslocações: a de borda (ou aresta) e de parafuso (ver Figura 2.4). Nas deslocações mistas ocorrem os dois casos.

Partículas que contribuem para a condução são tratadas no limite contínuo como partículas livres, onde a sua massa passa a ser a massa efetiva que carrega consigo as características da estrutura cristalina na qual ela se movimenta. Segundo Katanaev [23] quando o meio possui defeitos, isto induz uma curvatura ou torção que afetam o movimento das partículas.

Sabemos que a maioria dos cristais não apresentam uma simetria translacional discreta. No nosso trabalho utilizamos a deslocação parafuso que é um tipo de defeito que comumente

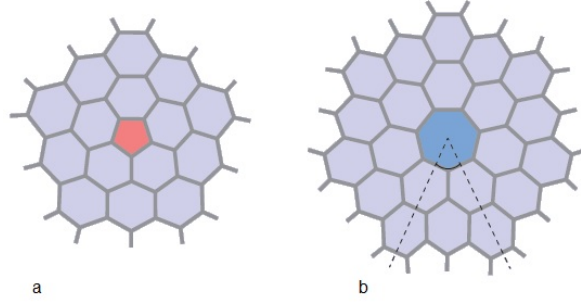


Figura 2.2: Em *a*, uma fatia de 60° foi retirada da rede hexagonal e observamos um pentágono no centro da imagem. Em *b*, uma fatia de 60° foi adicionada, gerando um heptágono [34].

aparece em metais e semicondutores, apresentando tal quebra de simetria. Tais defeitos aparecem naturalmente nos processos de fabricação de materiais, mas são geralmente eliminados por recozimento [38], uma vez que eles prejudicam o desempenho dos aparelhos eletrônicos, como mencionado na introdução deste trabalho. Uma única deslocação pode ser visualizada através do processo Volterra [2]: faça um corte e mova as partes separadas pelo corte uma em relação à outra, como mostrado na Figura 2.5. Tal deslocação produz o que conhecemos como vetor de Burgers, representado por $\vec{b}$ na figura. Em cristais reais, tal deslocação deverá ser um vetor de translação da rede de modo que as camadas das diferentes superfícies cortadas se encaixem perfeitamente, exceto próximo ao eixo do defeito que é definido pelo fim do corte.

Fica claro então que em um meio com uma deslocação parafuso apresentando vetor de Burgers $\vec{b} = b\hat{z}$, em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) , com $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ devemos ter $z \rightarrow z + b$. Estas são as condições de fronteira que são naturalmente codificadas em uma base geométrica no âmbito da teoria geométrica de defeitos [22, 23]. Para este caso particular de uma única deslocação, a geometria efetiva correspondente é descrita, em coordenadas cilíndricas, pelo elemento de linha [18]

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \left(dz + \frac{b}{2\pi} d\varphi \right)^2. \quad (2.1)$$

A generalização da Eq. (2.1) para uma distribuição contínua de deslocações parafuso

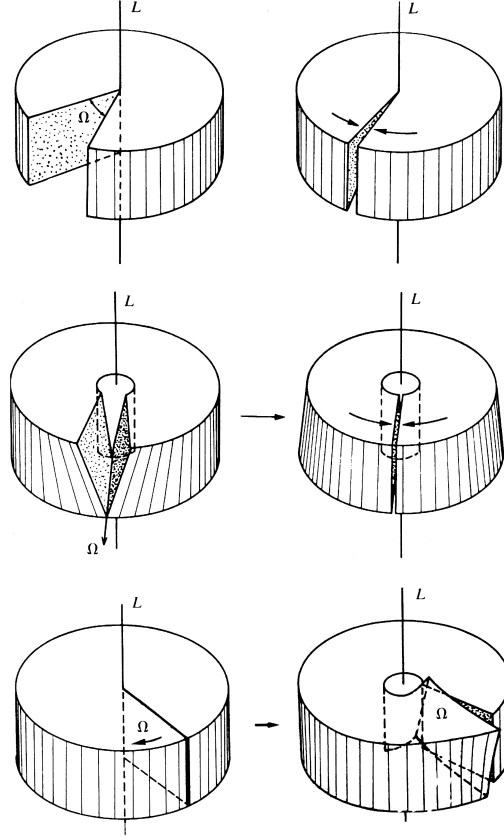


Figura 2.3: Formas de se visualizar a produção de desclinações. Na primeira e segunda imagem, retira-se material. Na última imagem, insere-se material [36].

uniformemente orientadas ao longo do eixo z é definida por [25]

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + (dz + \Omega \rho^2 d\varphi)^2, \quad (2.2)$$

com a seguinte densidade de vetor de Burgers $\Omega = bA/2$, onde b é o vetor de Burgers e A é a densidade superficial de deslocações. Esta métrica descreve uma distribuição contínua de deslocações parafuso, com torção distribuída uniformemente em todo o espaço e define a base para os nossos estudos clássico e quântico a seguir.

2.2 Uma introdução matemática sobre torção

Nesta seção, introduzimos a torção como uma entidade geométrica e seu acoplamento com a matéria devido ao spin da partícula. Mesmo que estejamos interessados em partículas

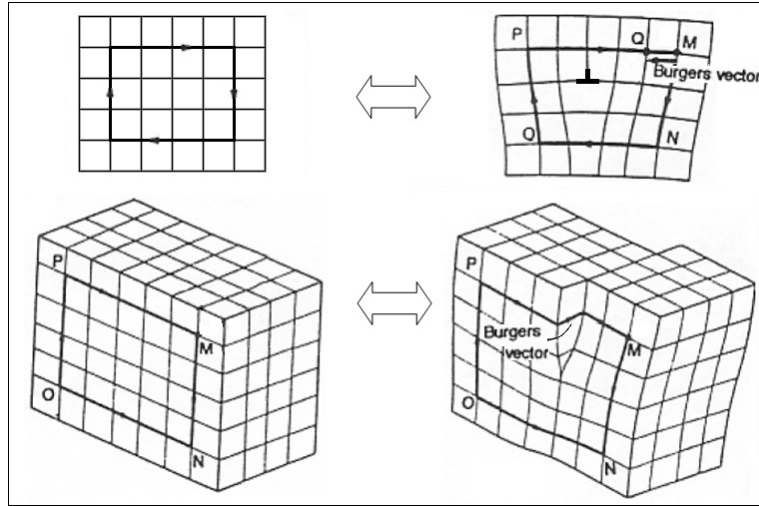


Figura 2.4: Configurações iniciais para deslocações Volterra de primeiro tipo. As movimentações indicadas na estrutura cristalina conduzem a estados de deslocações tipo de borda no caso acima e tipo parafuso no caso abaixo [37].

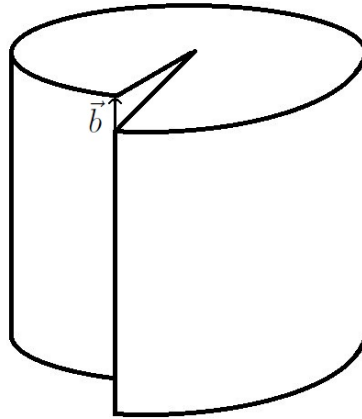


Figura 2.5: Representação de um meio elástico contínuo com uma única deslocação parafuso e seu vetor de Burgers $\vec{b}$.

não relativísticas com spin, por razões pedagógicas começamos com a equação de Dirac para, posteriormente, tomarmos o seu limite não-relativístico, que é de fato o que utilizamos em nossos cálculos.

A geometria Riemanniana (e pseudo-Riemanniana como na Relatividade Geral) é livre

de torção devido ao requisito que o tensor métrico seja simétrico:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad (2.3)$$

onde os índices gregos μ, ν se referem às quatro dimensões nas coordenadas do espaço-tempo. Atenuar esta regra nos leva à geometria de Riemann-Cartan que naturalmente inclui torção e curvatura como suas principais entidades geométricas, sendo portanto, uma generalização da geometria Riemanniana. Torção aparece naturalmente no formalismo de formas diferenciais [39]. Neste formalismo, o tensor métrico g é escrito em termos da base de 2-forma $dx^\mu \wedge dx^\nu$ como $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$.

Em uma variedade plana, pode-se ter uma configuração cartesiana universal de modo que $g_{\mu\nu}$ seja diagonal. Embora isto não seja possível em uma variedade mais geral com curvatura e/ou torção, ainda se pode tê-lo localmente pois o espaço (de Lorentz) tangente em cada ponto é plano. Portanto, isto se torna interessante para realizar a transformação entre as coordenadas da variedade e as coordenadas cartesianas locais no espaço tangente visto que o tensor métrico é apresentado diagonal (localmente). Denotando as transformações entre a 1-forma θ^a da variedade e a base da 1-forma de Lorentz dx^μ por

$$\theta^a = e_\mu^a dx^\mu, \quad (2.4)$$

temos, para o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} \theta^a \theta^b, \quad (2.5)$$

onde η_{ab} é $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ já que o espaço tangente é plano. A matriz de transformação e_μ^a é entendida como tetrada e dá origem à conexão de Cartan, conforme veremos abaixo.

A conexão de Cartan é definida como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = e_\mu^\sigma \partial_\nu e_\mu^a, \quad (2.6)$$

onde e_μ^a é tal que $e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu$. Esta é a conexão que transporta paralelamente o campo de tetradas via derivada covariante

$$\nabla_\nu e_\mu^a = \partial_\nu e_\mu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^a = 0. \quad (2.7)$$

A 2-forma de torção T é dada pela equação estrutural

$$T = d\theta + \omega \wedge \theta, \quad (2.8)$$

onde ω é a 1-forma da conexão de spin. Em termos de componentes, temos

$$T^\sigma = d\theta^\sigma + \omega_\nu^\sigma \wedge \theta^\nu = T_{\mu\nu}^\sigma \theta^\mu \wedge \theta^\nu, \quad (2.9)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma, \quad (2.10)$$

que naturalmente é nula para a conexão de Levi-Civita livre de torção, que é simétrica perante $\mu \leftrightarrow \nu$.

A geometria de Riemann-Cartan aplica-se naturalmente à Física de um meio contínuo elástico com defeitos topológicos. Tais defeitos aparecem como um resultado da quebra de simetria translacional e/ou rotacional do meio contínuo. Especificando melhor, defeitos lineares como desclinações, que carregam curvatura mas não torção, são associados à quebra de simetria rotacional. Deslocações, por outro lado, carregam torção mas não curvatura e estão associados à quebra de simetria translacional.

Conforme a métrica (2.2) podemos escolher a base de 1-forma

$$\begin{aligned} \theta^1 &= d\rho \\ \theta^2 &= \rho d\varphi \\ \theta^3 &= dz + \Omega \rho^2 d\varphi \end{aligned} \quad (2.11)$$

sendo o elemento de linha $ds^2 = \delta_{ab}\theta^a\theta^b$, com $a, b = 1, 2, 3$.

A 2-forma da torção é dada pela equação estrutural (2.8) onde ω agora é zero desde que não se tenha curvatura. Segue-se que

$$T = d\theta^3 = 2\Omega d\rho \wedge \rho d\varphi. \quad (2.12)$$

Torção faz seu aparecimento em mecânica quântica através do vetor axial

$$S^\nu = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\alpha\beta\mu}, \quad (2.13)$$

onde $T_{\alpha\beta\mu} = g_{\alpha\sigma}T_{\beta\mu}^{\sigma}$. De fato, o operador de Dirac em um espaço tempo com torção pode ser escrito como [29]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \eta\vec{\alpha} \cdot \vec{S}\gamma_5 + \eta\gamma_5 S_0 + mc^2\beta, \quad (2.14)$$

onde η é a constante de acoplamento entre os campos de torção e matéria e $\vec{\alpha}$, γ_5 e β são as convencionais matrizes de Dirac. Enquanto S_0 é a componente temporal do quadrivetor axial, $\vec{S}$ representa a sua parte espacial. No limite não relativístico, isto resulta no Hamiltoniano para baixas energias tipo-Pauli [29]

$$H = \frac{1}{2m}\vec{\pi}^2 + B_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{Q}, \quad (2.15)$$

onde

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{\eta_1}{c}\vec{\sigma}S_0, \quad (2.16)$$

$$\vec{Q} = \eta\vec{S} \quad (2.17)$$

e

$$B_0 = -\frac{1}{mc^2}\eta^2 S_0^2. \quad (2.18)$$

Nas Eqs. (2.15) e (2.16), $\vec{\sigma}$ é o vetor de Pauli.

A versão tridimensional do vetor axial de torção (2.13) é $S^\nu = \epsilon^{\alpha\beta\nu}T_{\alpha\beta}$ e seu único componente não nulo é, partindo de (2.12),

$$S^3 = 2\Omega. \quad (2.19)$$

Resulta das Eqs. (2.16)-(2.18) que $\vec{\pi} = \vec{p}$, $\vec{Q} = \eta\vec{S}$, $B_0 = 0$ e, portanto, que

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + \eta\vec{\sigma} \cdot \vec{S}, \quad (2.20)$$

vindo da Eq. (2.15). Partindo da Eq.(2.20), temos que

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_{LB}^2 + 2\Omega\eta\sigma^3, \quad (2.21)$$

sendo ∇_{LB}^2 o operador Laplace-Beltrami que incorpora as condições de fronteira associadas à distribuição de defeitos. Sabendo que o Hamiltoniano dado pela Eq.(2.21) é diagonal nos graus de liberdade de spin, podemos escrever

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + 2\Omega\eta\lambda \right] \Psi = E\Psi,$$

onde $\lambda = \pm 1$ são os autovalores da matriz de Pauli σ^3 . Isto resulta na seguinte equação:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\Omega \frac{\partial^2}{\partial z \partial \varphi} + (1 + \Omega^2 \rho^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{4\mu\Omega\eta\lambda}{\hbar^2} \right] \Psi = 0,$$

que mais adiante, no Capítulo 4, abordaremos com mais detalhes em nossos estudos.

Na Eq. (2.22), podemos perceber que para o caso plano, ou seja, o caso sem a densidade de defeito ($\Omega = 0$), obtemos o caso convencional da equação de Schrödinger em coordenadas cilíndricas, logo

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \right] \Psi = 0. \quad (2.22)$$

Neste capítulo, fizemos uma introdução acerca dos defeitos topológicos chamados desclinações e deslocações. Fizemos também alguns passos matemáticos que representam o efeito da torção provocado pela deslocação e o acoplamento spin-torção vinda da equação não-relativística tipo-Pauli. Esta compreensão matemática de como uma partícula pode se movimentar em um meio com defeito, nos permite moldar e prever a movimentação dessas partículas e como deve ser a amostra que produza o efeito desejado. Esta abordagem nos facilitará a compreensão dos Capítulos 4 e 5.

Capítulo 3

Níveis de Landau e Efeito Hall Quântico Inteiro

O Efeito Hall é um importante fenômeno estudado na física e muito contribuiu para o avanço da nossa tecnologia. Seu estudo se deu a partir de 1879 quando Edwin H. Hall, utilizando-se de uma placa condutora de ouro percorrida por uma corrente elétrica na presença de um campo magnético perpendicular, observou uma pequena diferença de potencial elétrico nas extremidades da placa sendo perpendicular à corrente elétrica e ao campo magnético. Esta tensão transversal descoberta denominou-se tensão Hall.

A descoberta do Efeito Hall teve um papel importante na Física, possibilitando o reconhecimento do sinal dos portadores de carga. Tal efeito encontra aplicabilidade nos mais diversos dispositivos eletrônicos devido à sua capacidade de medir com precisão valores e variações de campo magnético.

Em 1985, Klaus von Klitzing ganhou o prêmio Nobel em Física devido a descoberta do Efeito Hall Quântico [40]. Utilizando-se de um campo magnético alto e amostras próximas à temperatura do zero absoluto, encontrando platôs de resistividade, cujos valores representam a quantização do Efeito Hall em contraste com a teoria clássica, pois para o caso clássico, o campo magnético varia linearmente com a resistência transversal. Essa quantização pode ser observada em um sistema de elétrons bidimensional, sistema este que se tornou possível devido ao desenvolvimento da tecnologia de semicondutores. Este pesquisador utilizou o dispositivo

MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor), ou TECMOS (Transistor de Efeito de Campo Metal - Óxido - Semicondutor) obtendo um sistema muito próximo de ser bidimensional, devido ao movimento dos elétrons no eixo perpendicular à placa ser limitado, restando apenas dois graus de liberdade para as partículas que então se movimentam no plano bidimensional [41].

Estes valores discretos de energia são explicados pelos níveis de Landau propostos em 1930, por Lev Davidovich Landau, em trabalho que tratava do comportamento dos elétrons livres em um campo magnético.

Após o efeito Hall quântico já estar bem definido e entendido, Robert B. Laughlin, Horst L. Störmer and Daniel C. Tsui, em 1982-83, descobriram valores fracionários para tal efeito através de melhorias na qualidade do experimento, que lhes rendeu o prêmio Nobel em Física em 1998. Tal efeito leva em consideração interações elétron-elétron em sistemas fortemente correlacionados.

Vale salientar também que a descoberta do grafeno [42] onde Andre Geim e Konstantin Novoselov produziram, isolaram, identificaram e caracterizaram esta monocamada de grafite, denominada grafeno, utiliza em seus experimentos o que chamamos de Efeito Hall Quântico Anômalo. As propriedades do grafeno, que são muito intrigantes atualmente para a física, rendeu a estes dois cientistas o prêmio Nobel em 2010.

Nosso trabalho se torna bastante atual visto que o Prêmio Nobel de Física de 2016 foi dado aos três cientistas David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane e J. Michael Kosterlitz, em suas pesquisas em fases topológicas da matéria e transições de fase topológica. Tais estudos, através de um formalismo que utiliza a topologia, ajudaram a compreender as interações produzidas a baixas temperaturas onde ocorrem os fenômenos como o Efeito Hall Quântico, a supercondutividade, a superfluidez, etc [43].

Por causa da sua alta precisão na medida da resistência Hall (tipicamente na ordem de $10^{-9}\Omega$), o Efeito Hall Quântico pode ser utilizado para definir um padrão internacional de resistência elétrica pois, independente de propriedades particulares da amostra (geometria, impurezas, concentração/distribuição, etc.) a resistência é conservada nos platôs de resistividade gerados.

Neste capítulo, faremos algumas considerações acerca do Efeito Hall Quântico, sendo dividido da seguinte maneira: na Seção 3.1, discutiremos os Níveis de Landau. Na Seção 3.2, calcularemos a condutividade Hall clássica e na Seção 3.3, apresentaremos o cálculo da condutividade Hall quantizada. Trataremos também da influência da temperatura no nível de Fermi.

3.1 Níveis de Landau

Quando partículas carregadas interagem com um campo magnético, este desvia a trajetória das mesmas pois o campo magnético não realiza trabalho, agindo perpendicularmente ao movimento delas. Neste cenário, tais partículas carregadas ocupam órbitas ciclotrônicas com valores discretos de energia, chamados Níveis de Landau.

Em uma abordagem no sistema de coordenadas cartesianas, consideramos uma partícula de massa m^* e carga q movimentando-se através de um campo magnético estático $\vec{B}$ apontado na direção z e sentido positivo. Tal campo é produzido por um potencial vetor $\vec{A}$, de modo que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.1)$$

Para a configuração descrita acima, onde a partícula se encontra em um campo estático o potencial vetor pode ser escrito como

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}. \quad (3.2)$$

Na teoria clássica, a função Hamiltoniana de uma partícula carregada em um campo eletromagnético é dada por

$$H = \frac{1}{2m^*} \left(\vec{p} - q\vec{A} \right)^2. \quad (3.3)$$

Logo, a equação acima terá a seguinte forma

$$H = \frac{p^2}{2m^*} - \frac{q}{2m^*} \left[\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p} \right] + \frac{q^2 A^2}{2m^*}. \quad (3.4)$$

Substituindo a Eq.(3.2), que nos define o potencial vetor, no Hamiltoniano da Eq.(3.4), temos

$$H = \frac{p^2}{2m^*} - \frac{qB}{2m^*} (r_x p_y - r_y p_x) + \frac{q^2 B^2}{8m^*} (r_x^2 + r_y^2). \quad (3.5)$$

Analogamente ao oscilador harmônico clássico, notamos que a componente do momento angular na direção z é dada por $L_z = r_x p_y - r_y p_x$ e, a frequência ciclotron (que definiremos mais adiante) é dada por $\omega_c = \frac{qB}{m}$. Deste modo, a Eq. (3.5) terá a seguinte forma

$$H = \frac{p^2}{2m^*} - \frac{\omega_c}{2} L_z + \frac{m^* \omega_c^2}{8} (r_x^2 + r_y^2). \quad (3.6)$$

Separando as componentes do momento angular e deixando todas as componentes referentes ao eixo z para o lado direito da equação, temos que a Eq.(3.6) se torna

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m^*} + \frac{m^*}{8} \omega_c^2 (r_x^2 + r_y^2) - \frac{\omega_c}{2} L_z + \frac{p_z^2}{2m^*}. \quad (3.7)$$

Percebemos que os dois primeiros termos depois da igualdade correspondem ao hamiltoniano de um oscilador harmônico em duas dimensões. Deste modo, sua constante elástica será dada por

$$\frac{k}{2} = \frac{m^* \omega_c^2}{8}, \quad (3.8)$$

então, temos os seguintes autovalores para o hamiltoniano

$$E_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.9)$$

onde, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Não havendo nenhum termo de potencial em z , a partícula comporta-se como uma partícula livre nesta direção. Logo, para a Eq.(3.7) obtemos as seguintes autoenergias

$$E_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}. \quad (3.10)$$

De acordo com a Eq. (3.10) podemos obter a Figura 3.1, que trata da energia em função da variação do campo magnético para cada valor de nível de Landau n .

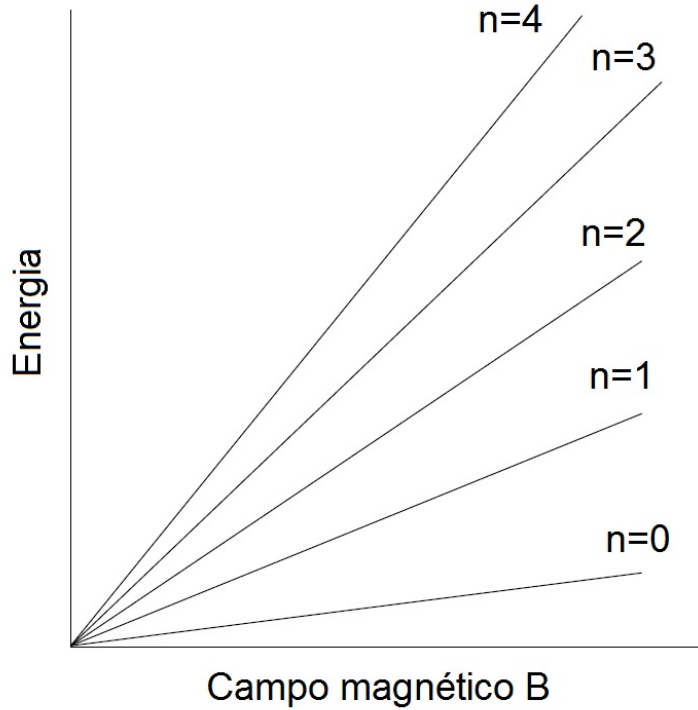


Figura 3.1: Energia em função do campo magnético para cada nível de Landau n .

3.2 Calculando a condutividade Hall clássica

Para a compreensão do Efeito Hall Quântico, faz-se necessário primeiro, tratarmos do Efeito Hall Clássico. Nesta seção, calcularemos a condutividade Hall para o caso clássico.

Consideremos o sistema onde partículas carregadas movimentam-se através de uma placa condutora devido a uma diferença de potencial longitudinal aplicada à placa. Quando aplicamos um campo magnético perpendicular ao plano, estas cargas em movimento sofrem um desvio para uma das bordas da placa. Consequentemente, o outro lado terá a mesma quantidade de carga com o sinal oposto, gerando assim uma diferença de potencial chamada tensão Hall (Veja Figura 3.2). A resistência elétrica relacionada ao movimento transversal das partículas, varia linearmente com o aumento do campo magnético e é chamada resistência transversal ou resistência Hall.

As cargas em movimento nesse sistema sentirão a presença do campo magnético $\vec{B}$ e do

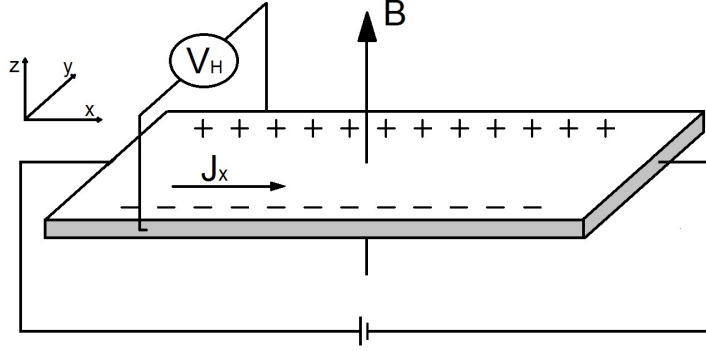


Figura 3.2: Nesta imagem observamos uma diferença de potencial V_H nas bordas da placa. Devido ao campo magnético perpendicular $\vec{B}$, as partículas carregadas desviam a sua trajetória para a borda quando estas estão sendo movidas devido ao campo elétrico longitudinal em x com densidade de corrente J_x .

campo elétrico $\vec{E}$. Neste caso, a força resultante ($\vec{F}_r$), resultado das forças elétrica e magnética, pode ser calculada usando o modelo de Drude para transporte difusivo no metal:

$$\vec{F}_r = \frac{d\vec{p}}{dt} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{m^*} \times \vec{B} \right) - \frac{\vec{p}}{\tau} \quad (3.11)$$

onde m e e são a massa e carga da partícula e $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são os campos elétrico e magnético, respectivamente. A letra τ representa o tempo de relaxação dado pelo modelo de Drude que é um modelo que trata da explicação do transporte de elétrons nos metais. O tempo de relaxação é justamente o tempo entre uma colisão e outra que o elétron realiza movimentando-se no meio, como se os átomos fossem esferas fixas e os elétrons movimentando-se livres por eles, colidem contra essas esferas.

Estas partículas estão em um meio bidimensional e o momento total é a soma dos momentos das partículas nos eixos x e y , isto é $\vec{p} = (p_x, p_y)$. A partícula carregada também sente o campo elétrico longitudinal e transversal $E_x \hat{x}$ e $E_y \hat{y}$ assim como o campo magnético na direção z ($B \hat{z}$)

$$eE_x = -\frac{eB}{m^*} p_y - \frac{p_x}{\tau}, \quad (3.12)$$

$$eE_y = -\frac{eB}{m^*}p_y - \frac{p_y}{\tau}. \quad (3.13)$$

Da força de Lorentz e de Coulomb, a equação de movimento para o sistema será

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \vec{v} = -e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (3.14)$$

Sabemos que o campo magnético está na direção z e que o campo elétrico está no plano xy , logo, da Eq. (3.14), temos

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_x = -e (E_x + Bv_y) \quad (3.15)$$

e

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_y = -e (E_y - Bv_x) \quad (3.16)$$

e, quando as forças do sistema estão em equilíbrio, temos que $\frac{d}{dt}v = 0$, sendo portanto, um estado estacionário, então

$$v_x = -\frac{e\tau}{m}E_x - \omega_c\tau v_y \quad (3.17)$$

e

$$v_y = -\frac{e\tau}{m}E_y - \omega_c\tau v_x. \quad (3.18)$$

Para definirmos a frequência ciclotron, ω_c , igualamos a força magnética $\vec{F}_M = e\vec{v} \times \vec{B}$ à força centrípeta $F_c = m\frac{v}{R}$ de uma partícula carregada em movimento circular, logo

$$\omega_c = \frac{eB}{m}. \quad (3.19)$$

Das Eqs. (3.17) e (3.18), podemos escrever

$$v_x = \frac{e\tau/m}{1 + (\omega_c\tau)^2} (E_x - \omega_c\tau E_y) \quad (3.20)$$

e

$$v_y = -\frac{e\tau/m}{1 + (\omega_c\tau)^2} (\omega_c\tau E_x + E_y). \quad (3.21)$$

Sabemos que a condutividade elétrica de Drude é definida como

$$\sigma_0 = \frac{e^2 n_s \tau}{m} \quad (3.22)$$

onde n_s é o número de cargas por unidade de área.

Sabendo que a densidade de corrente elétrica é definida como

$$J_i = -en_s v_i \quad (3.23)$$

e, usando a condutividade de Drude da Eq. (3.22) e as Eqs. (3.20) e (3.21), podemos escrever

$$J_x = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} (E_x - \omega_c \tau E_y) \quad (3.24)$$

e

$$J_y = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} (\omega_c \tau E_x + E_y). \quad (3.25)$$

Podemos usar a relação acima para representar o tensor condutividade elétrica

$$\begin{vmatrix} J_x \\ J_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix}. \quad (3.26)$$

Deste modo, as relações entre as Eqs. (3.43), (3.25) e (3.26) se tornam

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \quad (3.27)$$

e

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad (3.28)$$

sendo σ_{xy} , a condutividade transversal (ou condutividade Hall) e σ_{xx} , a condutividade longitudinal.

Para σ_{xy} , podemos escrever

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{-\frac{\sigma_0}{\omega_c \tau (1 + (\omega_c \tau)^2)} + \frac{\sigma_0}{\omega_c \tau}}{1 + (\omega_c \tau)^2} = \frac{e N_s}{B} + \frac{\sigma_{xx}}{\omega_c \tau} \quad (3.29)$$

Sabemos que o tensor condutividade é a matriz inversa do tensor resistividade, de modo que $\rho\sigma = 1$. Logo, podemos escrever

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (3.30)$$

e

$$\rho_{xy} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad (3.31)$$

de modo que, para a resistência longitudinal ρ_{xx} temos (sabendo que em duas dimensões a resistência e resistividade elétrica são equivalentes)

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{\sigma_0} \quad (3.32)$$

e

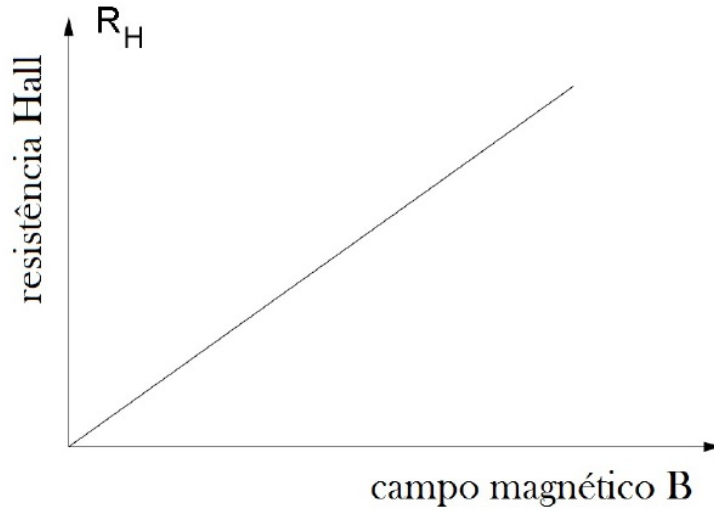


Figura 3.3: Resistência Hall variando linearmente com o campo magnético, observada no caso clássico.

$$R_H = \rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{eN_s}, \quad (3.33)$$

onde e representa a carga e N_s é a densidade de carga bidimensional pois, devido ao acúmulo dessas cargas nas duas bordas (as bordas com sinais opostos), gera-se um gradiente de densidade de carga. Através da Eq. (3.33), notamos que a resistência Hall varia linearmente com a variação do campo magnético, conforme Figura 3.3.

3.3 Condutividade Hall para o Efeito Hall Quântico Inteiro

O modelo de Sommerfeld obteve maior êxito em relação ao modelo de Drude, considerando as propriedades quânticas dos elétrons no metal, tratando-os como um gás ideal quântico, ou seja, um gás de férmions. Para Sommerfeld os elétrons estão em uma caixa de volume V como partículas livres, sem colidirem e sem interação com os íons [44].

Consideremos a equação de Schrödinger para um meio bidimensional:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_n(r) = E_n \psi_n(r). \quad (3.34)$$

Determinando que o gás está em um quadrado de lado L , para definirmos as condições de contorno, faz-se necessário que a função de onda satisfaça a periodicidade da mesma, ou seja,

$$\psi(x + L, y) = \psi(x, y),$$

$$\psi(x, y + L) = \psi(x, y).$$

A função de onda normalizada para a Eq. (3.34) será

$$\psi(x, y) = \frac{1}{L} e^{ik_x x} e^{ik_y y} = \frac{1}{L} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (3.35)$$

cujas autoenergias são

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2). \quad (3.36)$$

Logo, pelas condições de contorno impostas, temos:

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x$$

e

$$k_y = \frac{2\pi}{L} n_y,$$

sendo n_x e n_y inteiros ($n_x, n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Podemos ver que k_x e k_y são quantizados, possuindo o valor mínimo de $2\pi/L$.

Para tentarmos visualizar os estados eletrônicos, nas diversas possibilidades para k_x e k_y em eixos de coordenadas bidimensionais, percebemos um conjunto regular de pontos cuja área elementar será

$$\Delta S_k = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{L^2}. \quad (3.37)$$

Em um sistema quântico fermiônico, a energia do nível mais alto ocupado (em $T = 0K$) é chamada energia de Fermi. Usando o número de onda de Fermi k_F , a energia de Fermi pode ser expressa como

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*}. \quad (3.38)$$

Vamos agora tentar visualizar um círculo, definido no espaço dos momentos por πk_F^2 , onde todos os estados permitidos no sistema estão dentro dele, chamado círculo de Fermi. Então, considerando a Eq. (3.37), o número de estados permitidos será

$$N_s = \frac{\pi k_F^2}{\frac{4\pi^2}{L^2}} = \frac{L^2 k_F^2}{4\pi}. \quad (3.39)$$

Se quisermos determinar o número de elétrons no círculo de Fermi, basta multiplicar a expressão acima por dois, pois dois elétrons podem ocupar o mesmo estado desde que estejam com spins diferentes, devido ao princípio da exclusão de Pauli.

O número de estados em função do k e da área, será

$$n_s = \frac{k^2}{4\pi} = \frac{m^*}{2\pi\hbar^2} \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} = \frac{m^*}{2\pi\hbar^2} E = \nu \frac{eB}{h}, \quad (3.40)$$

onde podemos determinar o valor da energia através da expressão $E = \nu\hbar\omega_c$, sendo ν um número inteiro que nos fornece a quantidade de níveis de Landau completamente preenchidos ($\nu = 1, 2, \dots, n$), sendo conhecido também por fator de preenchimento (do inglês, filling factor) e $\hbar\omega_c$ corresponde à distância entre um nível de Landau e outro.

Através das expressões obtidas acima, podemos obter importantes grandezas na dinâmica de elétrons nos metais. Notamos que através da Eq. (3.38) podemos determinar a velocidade de Fermi $v_F = \hbar k_F/m^*$, assim como a temperatura de Fermi $T_F = E_F/k_B$, sendo k_B a

constante de Boltzmann. Para definirmos a energia total do sistema, basta somar todas as energias com os vetores de onda de 0 à k_F .

Olhando para as Eqs. (3.38) e (3.39), podemos perceber como a energia e o número de estados varia em relação ao vetor de onda k . Porém, se quisermos estabelecer uma relação entre E e k , temos que definir uma grandeza física bastante importante em Matéria Condensada, chamada densidade de estados ($n(E)$), que nos mostra como estes estados estão distribuídos nos níveis de energia em sistemas quânticos. Logo,

$$n(E) = \frac{\partial N(E)}{\partial E}. \quad (3.41)$$

Substituindo a Eq. (3.40) na Eq. (3.41), temos

$$n(E) = \frac{m^*}{2\pi\hbar^2}, \quad (3.42)$$

mostrando-nos que a densidade de estados em função da energia e da área, não depende da energia para um sistema bidimensional.

Para o cálculo da condutividade Hall quantizada, sabemos através da Eq. (3.26) que

$$J_x = \sigma_{xy} E_y, \quad (3.43)$$

sendo σ_{xy} , a condutividade Hall. Quando uma partícula carregada, inserida nesta configuração, movimenta-se na direção x , significa que as forças elétrica e magnética, estão em equilíbrio na coordenada y . Neste caso,

$$-eE_y = -ev_x B \rightarrow v_x = \frac{E_y}{B}. \quad (3.44)$$

Através das Eqs. (3.23) e (3.44), temos

$$J_x = -ev_x n_s = -en_s \frac{E_y}{B}. \quad (3.45)$$

Agora, substituindo as Eqs. (3.44) e (3.40) em (3.45), encontramos

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}. \quad (3.46)$$

que é a equação para a condutividade Hall quantizada, pois para o Efeito Hall Quântico Inteiro, o fator de preenchimento ν adquire valores inteiros e para o Efeito Hall Quântico Fracionário, o fator de preenchimento possui valores fracionários.

O Efeito Hall Quântico foi o primeiro fenômeno que chamou a atenção da comunidade científica para o estudo dos isolantes topológicos, pois tal efeito possui características bastante peculiares. Consideremos uma amostra bidimensional, nesta configuração de temperaturas baixas e campo magnético intenso. Em seu interior, a amostra é isolante e nas bordas, ocorre o comportamento de um condutor perfeito e, no momento da transição entre um platô de resistividade e outro, ocorrem peculiaridades que analisaremos na Figura 3.4 onde temos a densidade de estados em função da energia e a resistividade em função do campo magnético, lado a lado, para as imagens *a*, *b*, *c* e *d*. Observemos, na segunda imagem em *a*, que temos dois pontos vermelhos. Um ponto indica a resistência longitudinal e o outro indica a resistência transversal (ou resistência Hall). Para um campo magnético pequeno, notemos que a resistência longitudinal se torna constante enquanto a resistência Hall varia linearmente. Neste caso, os estados estão completamente preenchidos abaixo da energia de Fermi. Porém, em *b*, quando o campo magnético aumenta, para o Efeito Hall Quântico Inteiro, estes estados ficam localizados e distribuídos conforme os níveis de Landau e o espaçamento entre um pico e outro corresponde a $\hbar\omega_c$. A resistência Hall é quantizada e se mantém constante enquanto que a resistência longitudinal se mantém nula, tornando-se um condutor perfeito nas bordas. Com o aumento do campo magnético, o espaçamento entre os picos aumenta e, quando tais estados localizados entram em contato com o nível de Fermi, a resistência Hall salta para outro valor e a resistência transversal tem um pico neste momento de transição, voltando a ser nula quando a resistência Hall se mantém constante em um dado platô, como mostrado em *d*.

Podemos perceber, a grosso modo e analisando a Figura 3.5 que, devido ao campo magnético aplicado, as partículas carregadas movimentam-se de maneira ciclotrônica, mantendo seu movimento no centro da amostra, porém nas bordas da amostra este movimento não é possível fazendo com que tais partículas se movam sem resistência elétrica nas bordas do material.

O princípio da exclusão de Pauli afirma que um férmion só pode ocupar um estado quântico. Isso nos leva a entender a dinâmica de um sistema fermiônico como o gás de elétrons bidimensional que ocupa a partir dos primeiros estados de energia possíveis, distribuindo os elétrons nestes estados até o nível de Fermi que, a uma temperatura de $T = 0K$, possui todos os estados preenchidos abaixo dele. Ou seja, a probabilidade de encontrarmos um estado preenchido abaixo da energia de Fermi é $P(E) = 1$ e acima será $P(E) = 0$, conforme Figura 3.6.

Porém, quando $T \neq 0$, não percebemos a transição repentina de probabilidade mostrada na Figura 3.6 e sim, uma suavidade mostrada na Figura 3.7 (a depender da intensidade da temperatura), neste caso, uma probabilidade dada pela distribuição de Fermi-Dirac. Neste caso, quando a temperatura passa a ser diferente de zero e $T \ll T_F$, as partículas do sistema têm a probabilidade de ocuparem estados acima da energia de Fermi (com a probabilidade maior de ocuparem os estados menos energéticos primeiro). Logo, acerca de E_F , os elétrons possuem uma faixa de energia em torno de $k_B T$. Isto nos explica a suavidade na transição de cada platô de resistividade na Figura 3.4. De acordo com o aumento da temperatura, os platôs de resistividade transformam-se em uma reta e voltamos ao caso clássico.

Neste capítulo fizemos uma introdução aos níveis de Landau, ao Efeito Hall Quântico Inteiro e a alguns importantes tópicos em matéria condensada como densidade de estados, nível de Fermi, etc. Tais tópicos nos servirão de base para a compreensão dos próximos capítulos.

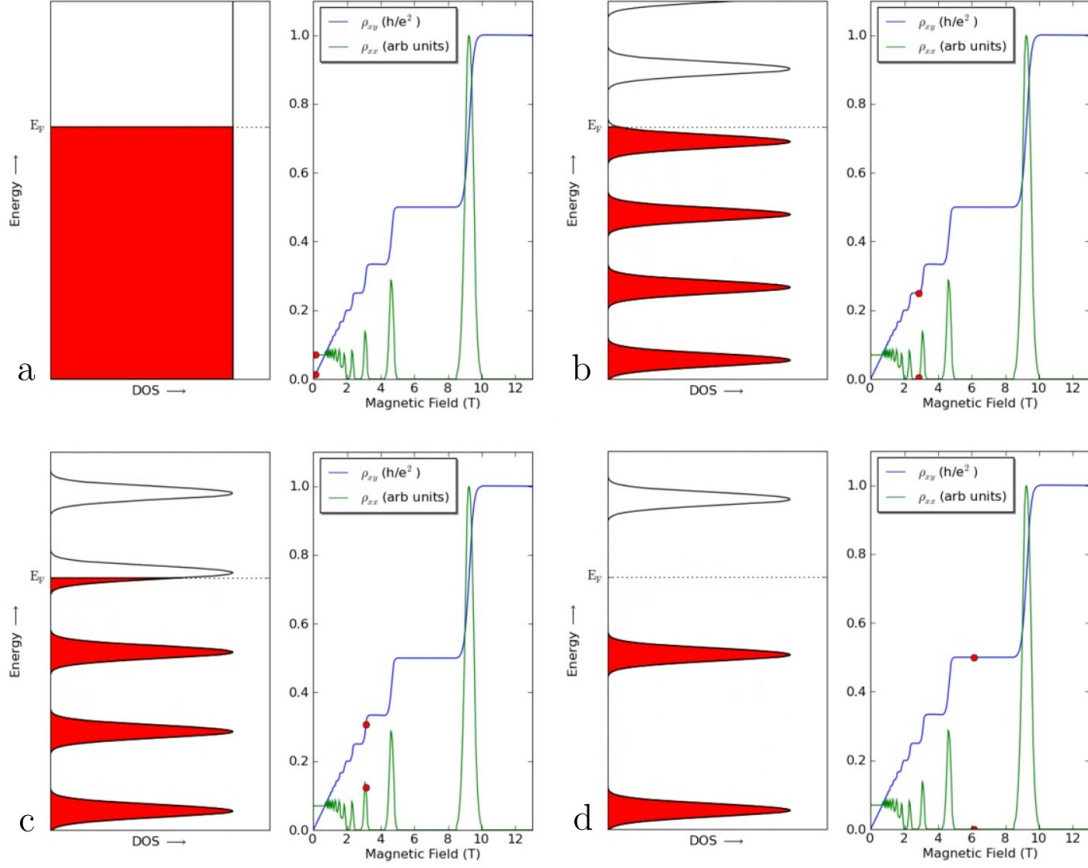


Figura 3.4: Temos a densidade de estados em função da energia e a resistividade em função do campo magnético, lado a lado, para as imagens *a*, *b*, *c* e *d*. Na segunda imagem em *a*, note que temos dois pontos vermelhos indicando a resistência longitudinal (ρ_{xx}) e a resistência transversal (ρ_{xy}) (ou resistência Hall). Para um campo magnético pequeno, notemos que a resistência longitudinal (linha verde) se torna constante enquanto a resistência Hall (linha azul) varia linearmente. Neste caso, os estados estão completamente preenchidos abaixo da energia de Fermi. Em *b*, quando o campo magnético aumenta, estes estados ficam degenerados e distribuídos conforme os níveis de Landau e o espaçamento entre um pico e outro corresponde a $\hbar\omega_c$. A resistência Hall é quantizada e se mantém constante enquanto que a resistência longitudinal se mantém nula, tornando-se um condutor perfeito nas bordas, conforme podemos observar na figura direita. Com o aumento do campo magnético, o espaçamento entre os picos aumenta e, quando tais estados degenerados entram em contato com o nível de Fermi, a resistência Hall salta para outro valor e a resistência transversal tem um pico neste momento de transição, voltando a ser nula quando a resistência Hall se mantém constante em um dado platô, como mostrado em *d*. [45].

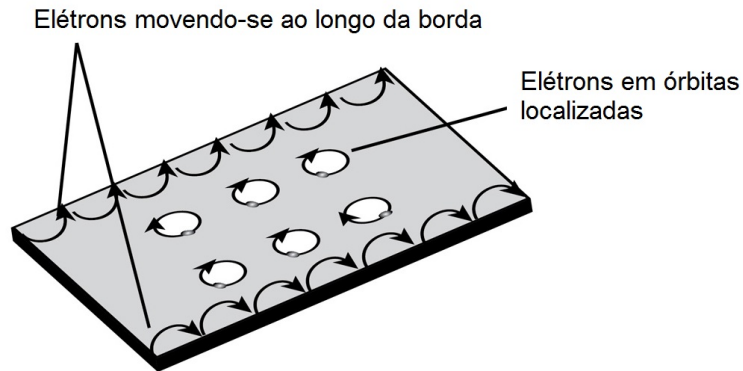


Figura 3.5: Gráfico que descreve o comportamento clássico de um elétron em uma amostra com um campo magnético aplicado perpendicularmente. Percebemos nas bordas a movimentação dos elétrons em semicírculos e, no centro da amostra, os elétrons confinados em círculos completos em torno de impurezas da amostra [46].

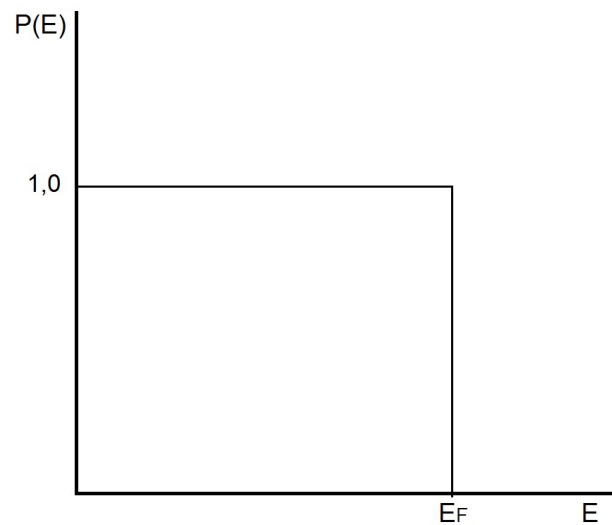


Figura 3.6: Função de distribuição de Fermi-Dirac para $T = 0$.

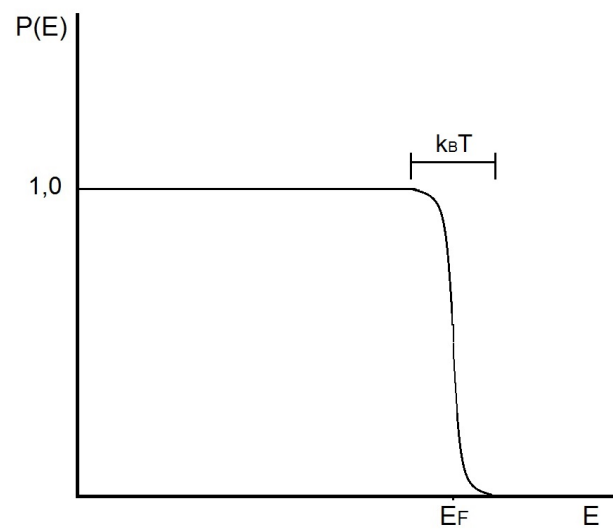


Figura 3.7: Função de distribuição de Fermi-Dirac para $T \neq 0$, porém $T \ll T_F$.

Capítulo 4

Efeitos da torção em matéria condensada: o análogo do campo magnético

Neste Capítulo, tratamos do comportamento clássico de uma partícula em uma densidade de deslocamentos parafuso, através das equações de movimento e do gráfico da geodésica. Posteriormente, abordamos o comportamento quântico incluindo o acoplamento do spin com a torção e verificando a influência do spin nos níveis de Landau elásticos. Estes resultados foram publicados em [47].

4.1 Analisando o comportamento clássico

Para termos uma intuição da dinâmica de uma partícula na presença de uma densidade de deslocamentos parafuso, se faz necessário descrever seu comportamento clássico. Começaremos com o elemento de linha, visto na Eq.(2.2) do Capítulo 2, do qual obtemos o quadrado da velocidade da partícula de massa m e, conseqüentemente, a seguinte Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{z} + \Omega \rho^2 \dot{\varphi})^2). \quad (4.1)$$

Por outro lado, a Lagrangeana análoga para uma partícula de carga q em um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ é [48]

$$L^{mag} = \frac{1}{2}m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}q\rho^2 \dot{\varphi} B. \quad (4.2)$$

Podemos perceber que z e φ são coordenadas cíclicas para a Lagrangeana (4.1) e, portanto, que os correspondentes momentos são conservados. Ou seja,

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + m\Omega\rho^2\dot{\varphi} \quad (4.3)$$

e

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} + \Omega\rho^2p_z, \quad (4.4)$$

onde p_φ e p_z são constantes de movimento. Os momentos correspondentes para o caso magnético são [48]

$$p_z^{mag} = m\dot{z} \quad (4.5)$$

e

$$p_\varphi^{mag} = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}q\rho^2B. \quad (4.6)$$

A terceira constante de movimento, a energia E , é dada pelo Hamiltoniano $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$, que se torna

$$H = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m(1 + \Omega^2\rho^2)\rho^2\dot{\varphi}^2 + m\Omega\rho^2\dot{\varphi}\dot{z} \quad (4.7)$$

e, portanto

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \Omega\rho p_z \right)^2, \quad (4.8)$$

após o uso das Eqs.(4.3) e (4.4). A expressão correspondente para o caso magnético tem exatamente a mesma forma da expressão acima [48]:

$$E^{mag} = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{(p_z^{mag})^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\varphi^{mag}}{\rho} - \frac{1}{2}q\rho B \right)^2. \quad (4.9)$$

As órbitas que são estáveis, são obtidas com um potencial efetivo mínimo $\frac{1}{2m} \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \Omega\rho p_z \right)^2$. Este requisito, mais as Eqs. (4.3) e (4.4) nos levam à frequência angular,

$$\dot{\varphi} = -\frac{2\Omega p_z}{m}, \quad (4.10)$$

e ao raio

$$\rho = \sqrt{\frac{|p_\varphi|}{\Omega|p_z|}}, \quad (4.11)$$

para ser comparado com o caso magnético

$$\dot{\varphi}^{mag} = -\frac{qB}{m}, \quad (4.12)$$

e

$$\rho^{mag} = \sqrt{\frac{2|p_\varphi|}{q|B|}}, \quad (4.13)$$

respectivamente. Note que $p_\varphi = -\Omega\rho^2 p_z$ e, portanto, que p_z e p_φ possuem sinais opostos. Claramente as órbitas são espirais como as mostradas na Figura 4.1, como no caso magnético.

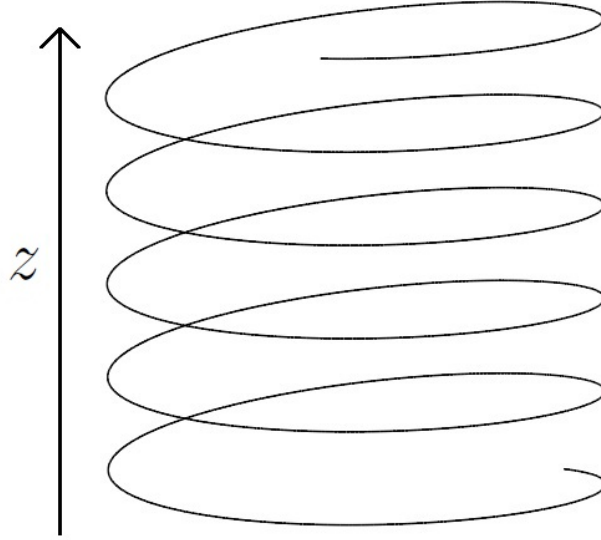


Figura 4.1: Trajetória clássica para uma partícula se movendo na presença de uma distribuição contínua de deslocamentos parafuso.

Ao fazermos uma análise das equações acima, percebemos que $2\Omega p_z$ é o análogo de qB na distribuição de defeitos. Isto indica que a ausência de movimento ao longo da direção z é equivalente a não ter campo magnético. Órbitas circulares em um plano não são possíveis na distribuição de defeitos, em contraste com as órbitas ciclotrônicas de partículas carregadas movimentando-se em um campo magnético. Outra observação importante é que o campo magnético acopla com a carga e a densidade de defeito acopla com a massa da partícula

modificando as suas propriedades inerciais. Deste modo, a existência de um efeito tipo-Hall clássico devido à uma densidade de deslocações parafuso é incapaz de determinar a carga dos portadores.

Além disso, enquanto o campo magnético acopla com a carga, a densidade de defeitos acopla com a massa da partícula modificando suas propriedades inerciais. Deste modo, um efeito tipo-Hall, produzido por uma densidade de deslocações, não é capaz de determinar a carga do portador. Em outras palavras, quando tratamos do efeito Hall, se tivermos um campo magnético aplicado em uma placa condutora (conforme nos foi mostrado na Figura 3.2) o sinal na carga em movimento define em qual lado da borda esta partícula carregada irá se encontrar. Para o nosso caso em que temos uma densidade de deslocações parafuso gerando um campo de torção análogo ao campo magnético, não podemos identificar o sinal da carga pois a densidade de defeitos acopla com a massa dessa partícula.

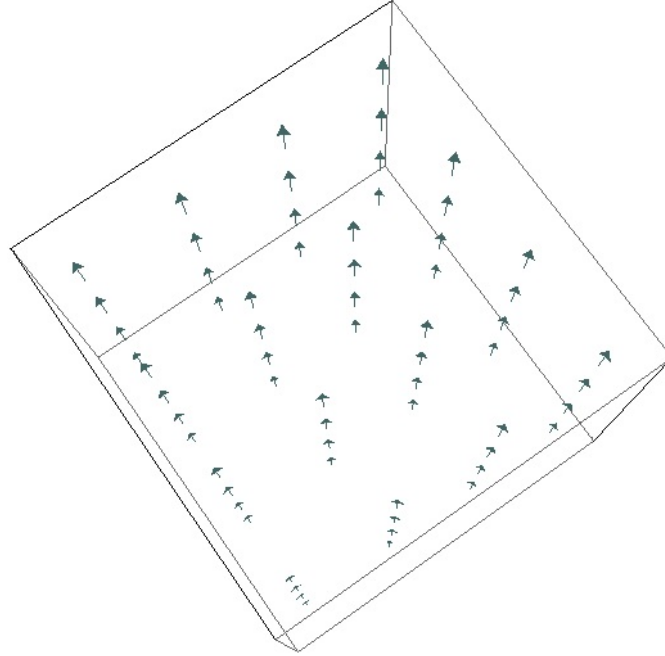


Figura 4.2: Campo de torção associado à distribuição de deslocações parafuso, como representa o vetor axial (Eq. (2.19)). O campo é orientado paralelamente à direção z

O problema considerado aqui envolve um campo de torção uniforme, que é representado pelo seu vetor axial (Eq. (2.19)), como foi descrito no Capítulo 2. Uma representação deste

campo vetorial é mostrada na Figura 4.2, mas uma visão mais intuitiva deste efeito pode ser obtida explorando as isometrias associadas a este campo. De acordo com o conhecido teorema de Noether, as leis de conservação são associadas a operações de simetria que levam à Lagrangeana invariante. As quantidades conservadas são geradas por essas operações de simetria. Deste modo, a combinação da conservação do momento dado pelas Eqs. (4.3) e (4.4) geram um movimento combinado ao longo de z e φ . Em outras palavras, enquanto o momento p_φ gera uma rotação infinitesimal em torno do eixo z , o momento p_z gera simultaneamente um deslocamento ao longo de z , devido ao acoplamento entre as Eqs. (4.3) e (4.4).

Através dessas Eqs. (4.3) e (4.4), podemos ver durante um intervalo infinitesimal de tempo dt que haverá translações simultâneas de dz ao longo da direção $\hat{z}$ e $\Omega\rho(p d\varphi)$ ao longo da direção $\hat{\varphi}$ que leva à Lagrangeana invariante. Portanto, para termos uma visão intuitiva das isometrias introduzidas pelo campo de torção, mostramos na Figura 4.3 uma representação do campo vetorial $(\hat{z} + \Omega\rho\hat{\varphi})$ que representa um deslocamento infinitesimal, como mencionado anteriormente.

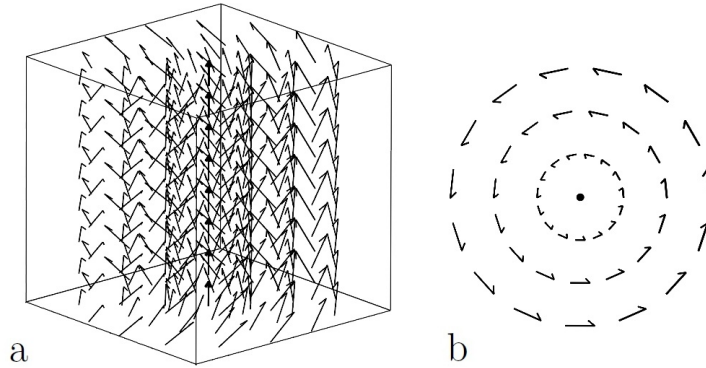


Figura 4.3: Representação do campo vetorial $(\hat{z} + \Omega\rho\hat{\varphi})$ que nos dá a cada ponto, a direção de uma translação infinitesimal que leva às equações de movimento invariantes. a) vista lateral e b) vista de cima.

4.2 O comportamento quântico

A dinâmica de uma partícula em uma distribuição de deslocamentos parafuso é dada por uma expressão análoga ao Hamiltoniano de Schrödinger-Pauli, que foi deduzido na Eq. (2.20):

$$H = \frac{1}{2m^*} \vec{p}^2 + \eta \vec{\sigma} \cdot \vec{S}, \quad (4.14)$$

onde m^* é a massa efetiva da partícula em um meio com defeitos, $\vec{\sigma}$ é o spin da partícula e $\vec{S}$ é o campo de torção associado à distribuição de defeitos. O segundo termo do lado direito desta equação é análogo ao termo do efeito Zeeman $\left(\frac{e\hbar}{2m}\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ que acopla momento angular de spin e campo magnético. A constante de acoplamento dependente do material, η , expressa a interação magnetoelástica; ou seja, ela descreve quão forte é o efeito da torção elástica, devido à distribuição de defeitos, no momento angular de spin da partícula e pode ser determinada experimentalmente para cada material. Note que η tem as dimensões de energia *versus* distância. Shapiro e co-autores mostraram que $\eta = -(1/8)\hbar c$ e eles também consideraram a possível generalização para outras situações [49, 50]. Usando o mesmo valor, obtemos o espaçamento provocado pelo spin na mesma ordem de grandeza dos observados experimentalmente [51] e teoricamente preditos [56] para GaAs, como mostraremos a seguir.

A Eq. (4.14) nos leva às seguintes equações diferenciais em coordenadas cilíndricas:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\Omega \frac{\partial^2}{\partial z \partial \varphi} + (1 + \Omega^2 \rho^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2m^* E}{\hbar^2} - \frac{4m^* \Omega \eta \lambda}{\hbar^2} \right] \Psi = 0, \quad (4.15)$$

onde $\lambda = \pm 1$ é o autovalor da matriz de Pauli σ^3 . (Lembrando que a dedução para esta equação foi mostrada no Capítulo 2) Para resolver esta equação, usamos o seguinte *ansatz*

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) e^{il\varphi} e^{ikz}, \quad (4.16)$$

onde l é representado por números inteiros. Substituindo a Eq.(4.16) em Eq.(4.15), a equação

tipo-Schrödinger-Pauli adquire a seguinte forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{l^2}{\rho^2} R - k^2 \Omega^2 \rho^2 R + \\ & \left[\frac{2m^* E}{\hbar^2} + 2lk\Omega - k^2 - \frac{4m^* \Omega \eta \lambda}{\hbar^2} \right] R = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Comparando a equação acima à sua versão clássica, Eq. (4.8), identificamos que o potencial efetivo clássico $\frac{1}{2m^*} \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \Omega \rho p_z \right)^2$ é devidamente mapeado por $\frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar l}{\rho} - \Omega \rho \hbar k \right)^2$.

Através da Referência [25], consideramos a seguinte mudança de variáveis

$$\xi \equiv k\Omega\rho^2, \quad (4.18)$$

e, substituindo a Eq.(4.18) na Eq.(4.17), temos a seguinte equação

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} - \frac{l^2}{4\xi} R - \frac{\xi}{4} R + \beta R = 0, \quad (4.19)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{4k\Omega} \left(\frac{2m^* E}{\hbar^2} + 2lk\Omega - k^2 - \frac{4m^* \Omega \eta \lambda}{\hbar^2} \right). \quad (4.20)$$

O comportamento assintótico da Eq. (4.19) sugere que escrevamos

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}} u(\xi). \quad (4.21)$$

A equação para $u(\xi)$ é portanto

$$\xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + (1 + |l| - \xi) \frac{du}{d\xi} + \left(\beta - \frac{|l| + 1}{2} \right) u = 0. \quad (4.22)$$

Esta equação diferencial ordinária de segunda ordem, que tem como coeficientes funções lineares de ξ , tem como solução uma função hipergeométrica confluyente, dada por

$$u(\xi) = F \left(-\beta + \frac{|l| + 1}{2}, 1 + |l|, \xi \right). \quad (4.23)$$

Para uma função de onda normalizável, a série (4.23) deve terminar, tornando um polinômio de grau n_ρ de modo que

$$-\beta + \frac{|l| + 1}{2} = -n_\rho. \quad (4.24)$$

Combinando as Eqs. (4.24) e (4.20), encontramos os valores discretos de energia com a contribuição do termo de spin

$$E = \hbar\omega_{el} \left(n + \frac{1}{2} \right) + 2\Omega\eta\lambda + \frac{k^2\hbar^2}{2m^*}, \quad (4.25)$$

onde,

$$\omega_{el} = \frac{2\hbar k\Omega}{m^*} \quad (4.26)$$

é a frequência elástica que corresponde à frequência ciclotron e $n = n_\rho + \frac{|l|}{2} + \frac{l}{2}$. Note que a Eq. (4.26) é consistente com seu caso clássico (4.10) com a identificação de $\hbar k$ com p_z . Note também que os números quânticos n_ρ , l e k correspondem aos graus de liberdade radial, angular e linear, respectivamente. A densidade do vetor de Burgers, como mencionado previamente, é $\Omega = bN/2$, onde b é o vetor de Burgers e N é a densidade superficial de deslocamentos parafuso. Assim como no caso dos níveis de Landau magnéticos, E é degenerado em relação à n , uma vez que $n_\rho \in \mathbb{N}$ e $l \in \mathbb{Z}$. O termo de spin quebra parcialmente a degenerescência, como visto na Figura 4.4. O fato de que a frequência elástica depende de k expressa a tridimensionalidade do movimento. Uma vez que os defeitos acoplam z e φ , seus efeitos não aparecem sem movimento ao longo da direção z , como mencionado no Capítulo 2. O fato de que $k \in \mathbb{R}$ dá a possibilidade de modos zero para partículas sem spin, quando $k = -(2n+1)2\Omega = -(2n+1)S$ e $k = 0$.

A Figura 4.4 apresenta a energia como função do vetor de onda k mostrando um deslocamento da banda parabólica devido ao espaçamento provocado pelo spin. O modo zero mencionado acima com $k = -(2n+1)2\Omega = -(2n+1)S$, corresponde ao valor de k muito pequeno para ser visto em escala usual.

Partindo da Eq. (4.25) temos a magnitude do espaçamento provocado pelo spin, $|\Delta E| = 4\Omega|\eta|$, que é plotado na Figura 4.5 como função da densidade de deslocamentos. Podemos observar que, do ponto de vista experimental, tal feito requer amostras diferentes para cada densidade de defeito diferente. A fim de plotarmos os gráficos mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5, usamos parâmetros para o GaAs encontrados na literatura [53] (a densidade de deslocamentos parafuso $N \sim 10^8$ disl./cm² a magnitude do vetor de Burgers $b = 4 \times 10^{-10}m$ e a massa efetiva do elétron, $m^* = 0.61 \times 10^{-31}kg$).

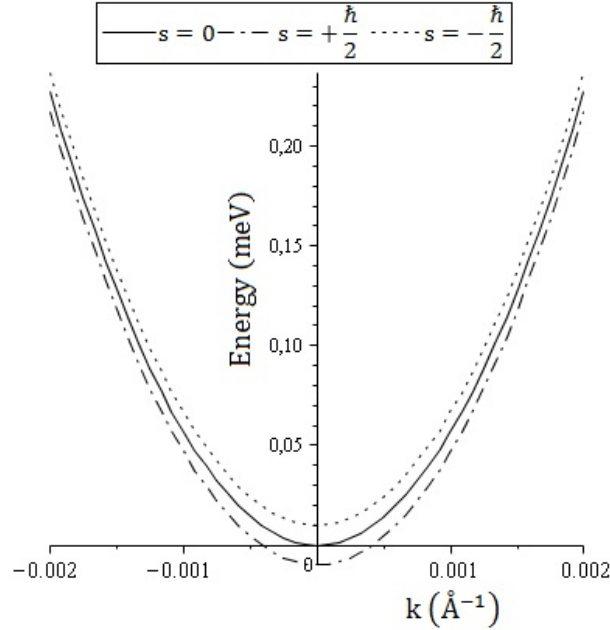


Figura 4.4: A energia como função do vetor de onda (conforme a Eq. (4.25)) para uma densidade de deslocções $N = 10^8$ disl./cm². Consideramos $s = 0$ para uma partícula sem spin e $s = \pm \frac{\hbar}{2}$ para o caso com spin. Usamos $\eta = -\frac{1}{8}\hbar c$ e valores para o GaAs (massa efetiva do elétron, magnitude do vetor de Burguers e valores típicos de densidade de deslocção).

O que observamos na Figura 4.5 é o mesmo tipo de espaçamento que se espera no efeito Zeeman, que leva ao fenômeno da ressonância eletrônica de spin [54], sugerindo a possibilidade de experimentos nesse fenômeno citado usando torção elástica ao invés do campo magnético. Além disso, como mencionado em [51] e [55], defeitos podem ser usados para manipular spins, transformando defeitos topológicos como deslocções, com seu campo de torção associado, em possíveis ferramentas para esta manipulação.

Os resultados aqui obtidos podem ser comparados àqueles das referências [51] e [56], por exemplo, que estudam o espaçamento de spin em amostras de GaAs deformadas. Os parâmetros relevantes para o espaçamento de spin nestes trabalhos são a velocidade de deriva [51] e a amplitude do vetor de onda [56]. No nosso trabalho, o parâmetro relevante é a densidade de deslocção, ou seja, o próprio defeito. Para os valores da velocidade de deriva estudados experimentalmente na Ref. [51], os autores definem $|\Delta E| \sim 0.1 \mu\text{eV}$. Para os valores da amplitude do vetor de onda estudados teoricamente na Ref. [56], é dado por $|\Delta E| \sim 0.1$

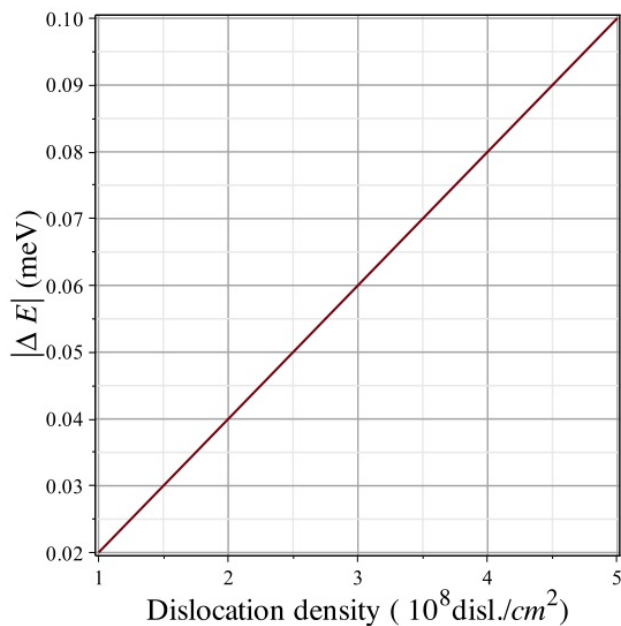


Figura 4.5: A magnitude do espaçamento na energia provocado pelo spin, como uma função da densidade de deslocação.

meV. Nossos resultados para uma densidade de deslocações, está entre estes valores, sendo $|\Delta E| \sim 0.01 \text{ meV}$, tornando possível a sua observação experimental

Capítulo 5

Condutividade elástica tipo-Hall

Consideremos um meio (conforme descrito nos capítulos anteriores) com uma distribuição uniforme de deslocações parafuso paralelas entre si, orientadas ao longo do eixo z . Repetimos abaixo o elemento de linha da Eq. (2.2) que corresponde à este conjunto de deslocações parafuso em coordenadas cilíndricas. Logo,

$$ds^2 = (dz + \Omega \rho^2 d\varphi)^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad (5.1)$$

com a seguinte densidade de vetor de Burgers $\Omega = bs/2$, onde b é o vetor de Burgers e s é a densidade superficial de deslocações. Esta métrica descreve uma distribuição de deslocações parafuso com uma distribuição de torção uniforme através do espaço.

Começaremos esta seção obtendo o análogo à condutividade Hall quântica, em uma aproximação linear a temperatura zero [57], dada por

$$\sigma_H(E_F, 0) = \frac{e}{S} \frac{\partial N}{\partial B_{el}}, \quad (5.2)$$

onde E_F é a energia de Fermi, N é o número de estados abaixo da E_F , S é a área da superfície e $D(E)$ é a densidade de estados. Em nosso caso, representamos o campo magnético pelo seu análogo, o campo elástico efetivo $B_{el} = \frac{hbs}{ed}$. A densidade de estados pode ser descrita como

$$D(E) = \frac{|eB_{el}|}{2\pi\hbar} \sum_n \delta(E - E_n). \quad (5.3)$$

A partir de (5.3), o número de estados é dado por

$$N = S \int_{-\infty}^{E_F} D(E) dE = \frac{S |eB_{el}|}{h} \nu, \quad (5.4)$$

onde ν é o fator de preenchimento, que conta o número de níveis de Landau totalmente preenchidos abaixo da energia de Fermi. Ele é dado por $\nu = n + 1$. Substituindo (5.4) em (5.2), o análogo da condutividade Hall, que vimos na Eq. (3.46) do Capítulo 3, em uma interface atravessada por uma densidade de defeitos, a temperatura zero, é

$$\sigma_H(E, 0) = \frac{e^2}{h} (n + 1) . \quad (5.5)$$

Note que ela não depende do sinal dos portadores de carga, em contraste com o efeito Hall quântico usual. Isto ocorre devido ao fato da energia (4.25) não depender da carga elétrica e . No caso onde ω_{el} é representado por ω_c , a frequência ciclotron, o espectro (4.25) mudará o sinal de m da seguinte maneira: m para buracos e $-m$ para elétrons.

Procederemos agora para investigar o análogo à condutividade Hall como função do potencial químico μ assim como em termos da densidade de deslocções parafuso para uma temperatura não nula, $T \neq 0$.

Note que encontramos os níveis de energia usando coordenadas polares, porém não precisamos considerar a amostra como um disco, ela pode ser, por exemplo, uma chapa retangular. Note que os níveis de energia (4.25) tem a mesma forma dos níveis de Landau obtidos em coordenadas cartesianas se ω_{el} for escrito como ω_c . Deste modo, para $T \neq 0$, consideramos a expressão para a condutividade Hall obtida a partir da expressão [58]:

$$\sigma_H(\mu, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial f_0(E)}{\partial E} \right) \sigma_H(E, 0) dE, \quad (5.6)$$

onde $f_0(E)$ é a função de Fermi e $\sigma_H(E, 0)$ é a condutividade Hall para $T = 0$, vista na Eq. (5.5).

Utilizando a expressão acima, para encontrarmos o tamanho do primeiro platô de condutividade Hall, temos que integrar os valores entre os níveis de Landau E_0 e E_1 ,

$$\begin{aligned} \sigma_{H_1}(\mu, T) &= \int_{E_0}^{E_1} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \left(-\frac{e^2}{h} (0 + 1) \right) dE \\ &= \frac{e^2}{h} \int_{E_0}^{E_1} \frac{\partial f_0}{\partial E} dE = \frac{e^2}{h} f_0(E) \Big|_{E_0}^{E_1} = \frac{e^2}{h} [f_0(E_1) - f_0(E_0)] \end{aligned}$$

encontramos então o valor da condutividade entre este intervalo de energia

$$\sigma_{H_1}(\mu, T) = -\frac{e^2}{h} [f_0(E_0) - f_0(E_1)]. \quad (5.7)$$

Agora, tentaremos escrever a condutividade de uma forma mais geral, para podermos ter seu valor entre os níveis de energia discretos.

$$\begin{aligned} \sigma_H(\mu, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \left(-\frac{e^2}{h} (n+1) \right) dE \\ &= \frac{e^2}{h} \left[\int_{E_0}^{E_1} \frac{\partial f_0}{\partial E} (0+1) dE + \int_{E_1}^{E_2} \frac{\partial f_0}{\partial E} (1+1) dE + \int_{E_2}^{E_3} \frac{\partial f_0}{\partial E} (2+1) dE + \dots \right. \\ &\quad \left. + \int_{E_j}^{E_{j+1}} \frac{\partial f_0}{\partial E} (j+1) dE \right] \\ &= \frac{e^2}{h} [(f_0(E_1) - f_0(E_0)) + 2(f_0(E_2) - f_0(E_1)) + 3(f_0(E_3) - f_0(E_2)) + \dots \\ &\quad + (j+1)(f_0(E_{j+1}) - f_0(E_j))] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Podemos notar que por estarmos tratando de uma situação em que a condutividade é quantizada, seu valor nas integrais entre estes intervalos de energia bem definidos, adquire o seguinte somatório:

$$\sigma_H(\mu, T) = -\frac{e^2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} [(f_0(E_n) - f_0(E_{n+1}))(n+1)] \quad (5.9)$$

ou seja,

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_0} = \sum_{n=0}^{\infty} [(f_0(E_n) - f_0(E_{n+1}))(n+1)] \quad (5.10)$$

onde o quantum de condutividade é $\sigma_0 \equiv e^2/h$, a distribuição de Fermi-Dirac é dada por $f_0(E_n) = 1/e^{\frac{E_n - E_F}{k_B T}}$, T é a temperatura e k_B é a constante de Boltzmann. A escala de energia é expressa nas unidades de temperatura. Consideramos os parâmetros de GaAs: constante de rede $a = 565,35 \text{ pm}$ e $\mu = 0,067 m_e$, onde $m_e = 9,11 \times 10^{-28} \text{ g}$ é a massa inercial do elétron. Também consideramos a espessura da amostra como $d = 15 \text{ nm}$.

Na Figura 5.1 temos a condutividade versus o potencial químico para diferentes valores de densidade de deslocções parafuso. A densidade de deslocções desempenha o papel do campo

magnético e a mudança na condutividade ocorre devido a mudança do fator de preenchimento ν para $T \neq 0$. Além disso, quando aumentamos a densidade de deslocações, os platôs mudam para valores mais elevados de potencial químico.

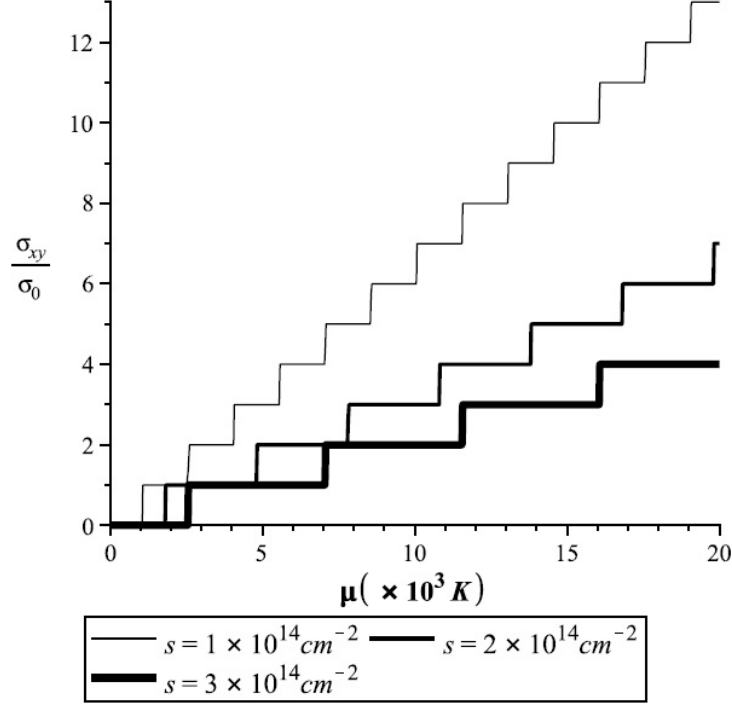


Figura 5.1: Condutividade Hall versus o potencial químico para diferentes valores de densidade de deslocações e $T = 3K$.

Na Figura 5.2, plotamos algo análogo à condutividade Hall à temperatura ambiente, que é linear com o potencial químico assim como no caso conhecido para o efeito Hall quântico. Ao contrário do caso em que o campo magnético está presente, a densidade de deslocações não acopla com a carga. Isto significa que sua analogia com a condutividade Hall não é válida para determinar o tipo de carga em um dado semiconductor.

Nas Figuras 5.3 e 5.4, plotamos o análogo à condutividade Hall versus a densidade de deslocações, onde consideramos $s = \lambda \times 10^{14} cm^{-2}$. Uma vez que tenhamos a seguinte correspondência $\omega_{el} \leftrightarrow \omega_c$, deve-se esperar os degraus usuais como na quantização da condutividade Hall. Para a temperatura ambiente temos que $\sigma_{xy} \propto \frac{1}{s}$, do mesmo modo que $\sigma_{xy} \propto \frac{1}{B}$.

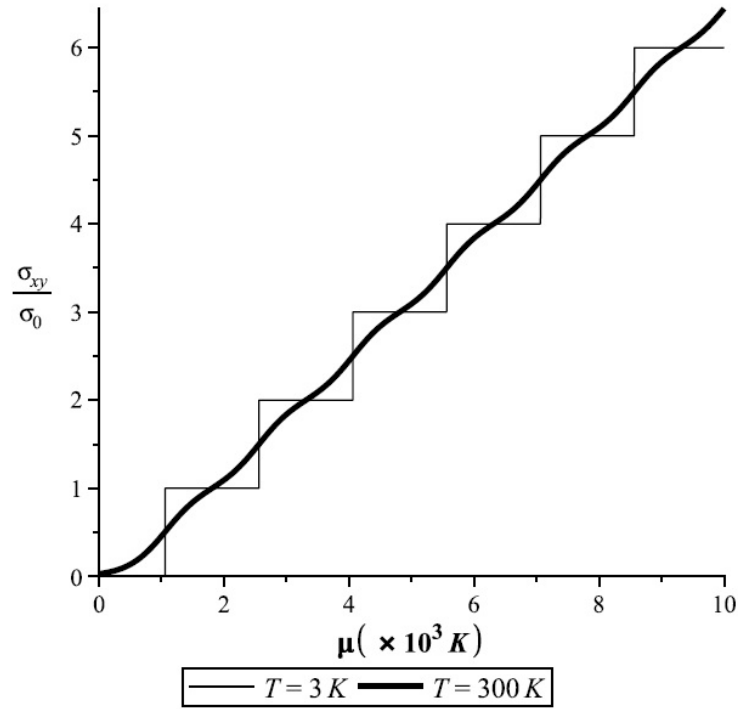


Figura 5.2: Condutividade Hall versus o potencial químico para diferentes valores de temperatura.

Quando variamos o valor da densidade de deslocções parafuso, variamos também a amostra, ou seja, teríamos que dispor de um número grande de amostras para produzir os gráficos propostos. Porém, quando lidamos com a variação do potencial químico, preservamos a amostra e conseguimos observar o efeito da quantização da condutividade.

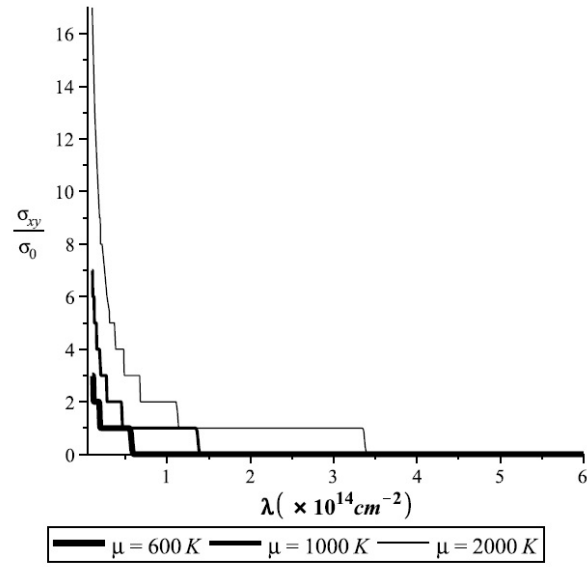


Figura 5.3: Condutividade Hall versus a densidade de deslocações para diferentes valores de potenciais químicos e $T = 3 \text{ K}$.

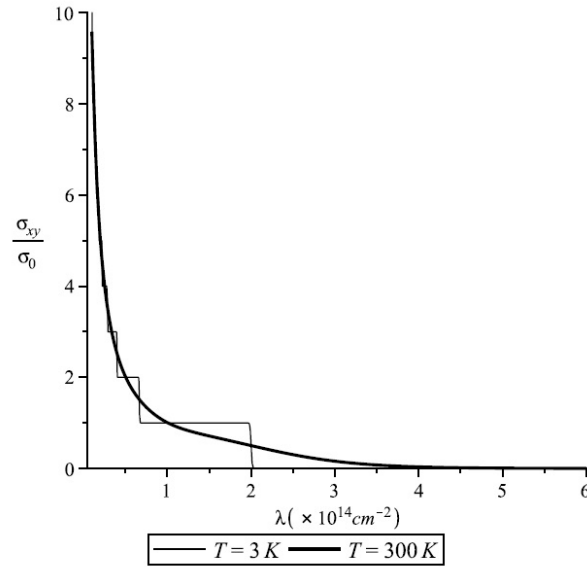


Figura 5.4: Condutividade Hall versus a densidade de deslocações para diferentes valores de temperatura.

Capítulo 6

Considerações finais

Neste trabalho, estudamos a dinâmica de uma partícula em um meio com uma distribuição uniforme de deslocamentos parafuso, um tipo de defeito muito comum em materiais cristalinos. Embora existam semelhanças com o problema de uma partícula carregada na presença de um campo magnético uniforme, como já bem fundamentado na literatura, existem também diferenças importantes. A abordagem clássica vista no Capítulo IV nos fornece uma intuição física do efeito dessa distribuição de defeitos e nos apresenta algumas dessas diferenças. Por exemplo, o movimento é sempre tridimensional devido à natureza da distribuição de defeitos que acopla os graus de liberdade angular (φ) e linear (z) da partícula. Também vale salientar que não existe distinção se a partícula está carregada positivamente, negativamente ou simplesmente neutra.

A abordagem física introduz um acoplamento entre o spin da partícula e a distribuição de defeitos. Sabemos que tal densidade de defeitos em um meio elástico gera um campo de torção que age na partícula como se um campo magnético externo fosse aplicado sobre ela. De fato, um efeito tipo-Zeeman aparece devido ao acoplamento spin-torção. Por outro lado, os níveis de energia, embora semelhantes aos níveis magnéticos (de Landau), possuem algumas importantes diferenças. Enquanto partículas carregadas que se movimentam na presença de um campo magnético uniforme podem ser confinadas em um plano perpendicular ao das linhas de campo, isto não é possível para o caso que possui torção que necessita de movimento em três dimensões espaciais para obter o efeito apresentado. Além disso, no caso de uma partícula

sem spin quando a componente z do seu momento linear é antiparalela ao campo de torção, aparecem modos de energia zero para valores quantizados de momento.

O acoplamento do campo de torção ao spin da partícula introduz uma mudança no espectro de energia e quebra a degenerescência de spin como no efeito Zeeman. Este campo tipo-magnético produzido pela densidade de defeitos é insensível ao sinal da carga e deste modo, poderá ter o mesmo efeito e agir perpendicularmente ao movimento de partículas neutras. Uma vez que o espaçamento tipo-Zeeman permite experimentos de espectroscopia de ressonância de spin, há a perspectiva do uso da ressonância tipo-magnética para o estudo de partículas neutras como os éxcitons no estado de tripleto. Embora o foco principal no estudo da spintrônica seja em materiais livres de deslocamentos, uma vez que o defeito acopla com o momento magnético, ele pode ser usado na fabricação de aparelhos de spintrônica, além da curvatura, que foi sugerida como ferramenta para aparelhos em nanotecnologia [1].

Uma outra possível aplicação para esta densidade de deslocamentos, está na condutividade Hall do efeito Hall quântico inteiro, onde sem campo magnético aplicado, apenas através da densidade de deslocamentos parafuso, mostramos no Capítulo 5 a condutividade elástica tipo-Hall. Sabemos que para se obter campos magnéticos da magnitude usada para o efeito Hall quântico é necessário um custo energético muito intenso. A condutividade elástica tipo-Hall, pode auxiliar na precisão de tais medidas sem a necessidade desse custo energético com o campo magnético e agir também sobre partículas neutras.

Bibliografia

- [1] F. Santos, S. Fumeron, B. Berche e F. Moraes. Geometric effects in the electronic transport of deformed nanotubes. *Nanotechnology* **27**, 135302 (2016).
- [2] V. Volterra. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **24**, 401 (1907).
- [3] Kazuo Kondo. Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry. *Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai* (1958).
- [4] B. A. Bilby, R. Bullough e E. Smith. Continuous Distributions of Dislocations: A New Application of the Methods of Non-Riemannian Geometry. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **231**, 263 (1955).
- [5] JD Eshelby. The continuum theory of lattice defects. *Solid State Physics* **3**, 79 (1956).
- [6] Ekkehart Kröner e Georg Rieder. Kontinuumstheorie der Versetzungen. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* **145**, 424 (1956).
- [7] Marek Zorawski. Théorie mathématique des dislocations. *Dunod* (1957).
- [8] E. Kröner. Continuum theory of defects in Physics of Defects. *North-Holland, Amsterdam* **35**, 215 (1981).
- [9] A. Maurel, V. Pagneux, F. Barra e F. Lund. Interaction of elastic waves with dislocations. *The Journal of the Acoustical Society of America* **123**, 3408 (2008).
- [10] G. Woltersdorf, e B. Heinrich. Two-magnon scattering in a self-assembled nanoscale network of misfit dislocations. *Physical Review B* **69**, 184417 (2004).

- [11] R. Jaszek. Carrier scattering by dislocations in semiconductors. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics* **12**, 1 (2001).
- [12] Ying Ran and Yi Zhang e Ashvin Vishwanath. One-dimensional topologically protected modes in topological insulators with lattice dislocations. *Nature Physics* **5**, 298 (2009).
- [13] O. A. Tretiakov, Ar. Abanov, Shuichi Murakami e Jairo Sinova. Large thermoelectric figure of merit for three-dimensional topological Anderson insulators via line dislocation engineering. *Applied Physics Letters* **97**, 073108 (2010).
- [14] K. Bakke e F. Moraes. Threading dislocation densities in semiconductor crystals: A geometric approach. *Physics Letters A* **376**, 2838 (2012).
- [15] H. Sumiyoshi and S. Fujimoto. Torsional Chiral Magnetic Effect in a Weyl Semimetal with a Topological Defect. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 166601 (2016).
- [16] Kiyoshi Kawamura. A new theory on scattering of electrons due to spiral dislocations. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* **29**, 101 (1978).
- [17] R. Bausch, R. Schmitz e A. Turski. Scattering of electrons on screw dislocations. *Phys. Rev. B* **59**, 13491 (1999).
- [18] Claudio Furtado, V.B Bezerra e Fernando Moraes. Quantum scattering by a magnetic flux screw dislocation. *Physics Letters A* **289**, 160 (2001).
- [19] A. G. de Lima, A. Poux, D. Assafrão e C. Filgueiras. Screw dislocation-induced influence of transverse modes on Hall conductivity. *The European Physical Journal B* **86**, 1 (2013).
- [20] Hisao Taira e Hiroyuki Shima. Optical conductivity of semiconductor crystals with a screw dislocation. *Solid State Communications* **177**, 61 (2014).
- [21] Žutić, Igor ; Fabian, Jaroslav e Das Sarma, S. Spintronics: Fundamentals and applications. *Rev. Mod. Phys.* **76**, 323 (2004).

- [22] M.O Katanaev e I.V Volovich. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals of Physics* **216**, 1 (1992).
- [23] Mikhail O Katanaev. Geometric theory of defects. *Physics-Uspekhi* **48**, 675 (2005).
- [24] F. Moraes. Condensed Matter Physics as a laboratory for gravitation and Cosmology. *Brazilian Journal of Physics* **30**, 304 (2000).
- [25] A. L. Silva Netto e Claudio Furtado. Elastic Landau levels. *Journal of Physics: Condensed Matter* **20**, 125209 (2008).
- [26] A. C. Eringen e G. A. Maugin. Electrodynamics of Continua I. *Springer-Verlag New York* **Vol.1**, Capítulo 7 (1990).
- [27] A. Seeger, H. Kronmüller, H. Rieger e H. Traubel. Effect of Lattice Defects on the Magnetization Curve of Ferromagnets. *Journal of Applied Physics* **35**, 740 (1964).
- [28] L. Berbil-Bautista, et al. Nanoscale spin structures dominated by magnetoelastic interactions around dislocation cores as seen via spin-polarized STM. *Phys. Rev. B* **80**, 241408 (2009).
- [29] I.L. Shapiro. Physical aspects of the spacetime torsion. *Physics Reports* **357**, 113 (2002).
- [30] C. Filgueiras, E.O. Silva, W. Oliveira e F. Moraes. The effect of singular potentials on the harmonic oscillator. *Annals of Physics* **325**, 2529 (2010).
- [31] Neil W. Ashcroft e D. Mermin. Introduction to Solid State Physics. *Saunders, Philadelphia* (1976).
- [32] G. Marques, C. Furtado, V. Bezerra e F. Moraes. Landau levels in the presence of topological defects. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **34**, 5945 (2001).
- [33] J. P. Hirth. A brief history of dislocation theory. *Metallurgical Transactions A* **16**, 2085 (1985).

- [34] Oleg V. Yazyev e Yong P Chen. Polycrystalline graphene and other two-dimensional materials. *Nat Nano* **9**, 1748 (2014).
- [35] Vito Volterra. L'equilibre des corps elastique multiplement connexes. *Gauthier-Villars, Imprimeur-libraire, Paris, France* (1907).
- [36] H. Kleinert. New gauge symmetry in gravity and the evanescent role of torsion. *World Scientific*, p. 174-185 (2012).
- [37] Wikipedia. Dislocation. *Acessada 3 de Março de 2017* <https://en.wikipedia.org>.
- [38] A. Rollett, FJ Humphreys, G.S. Rohrer e M. Hatherly. Recrystallization and related annealing phenomena. *Elsevier* (2004).
- [39] Manfredo P. do Carmo. Differential Forms and Applications. *Springer-Verlag Berlin*, 1ed (1994).
- [40] K. V. Klitzing, G. Dorda e M. Pepper. New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- [41] M. O. Goerbig. Quantum Hall Effects. *ArXiv e-prints* (2009).
- [42] K. S. Novoselov, et al. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. *Science* **306**, 666 (2004).
- [43] The Nobel Prize in Physics 2016. *Acessada 2 de Março de 2017* www.nobelprize.org.
- [44] A. Sommerfeld. Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik. *Zeitschrift für Physik* **47**, 1 (1928).
- [45] Wikipedia. Quantum Hall effect. *Acessada 9 de Fevereiro de 2017* <https://en.wikipedia.org>.
- [46] Delft and course contributors. Topology in condensed matter. *Acessada 12 de Fevereiro de 2017* https://topocondmat.org/w3pump_QHE/QHEedgestates.html.

- [47] A. A. Lima, C. Filgueiras e F. Moraes. Torsion effects on condensed matter: like a magnetic field but not so much. *The European Physical Journal B* **90**, 32 (2017).
- [48] K. R. Symon. *Mechanics Addison-Wesley* (1971).
- [49] V.G. Bagrov, I.L. Buchbinder e I.L. Shapiro. On the possible experimental manifestations of the torsion field at low energies. *Izv. VUZov, Fisica-Sov. J. Phys.* **35**, 5 (1992).
- [50] Lewis H Ryder e Ilya L Shapiro. On the interaction of massive spinor particles with external electromagnetic and torsion fields. *Physics Letters A* **247**, 21 (1998).
- [51] Yuichiro Kato, RC Myers, AC Gossard e DD Awschalom. Coherent spin manipulation without magnetic fields in strained semiconductors. *Nature* **427**, 50 (2004).
- [52] A. N. Chantis, et al. Strain-induced conduction-band spin splitting in GaAs from first-principles calculations. *Physical Review B* **78**, 075208 (2008).
- [53] R. Jaszek. Carrier scattering by dislocations in semiconductors. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics* **12**, 1 (2001).
- [54] Charles P. Poole Jr. *Electron Spin Resonance: A Comprehensive Treatise on Experimental Techniques. Dover, New York* 2ed (1996).
- [55] Li, Y e Li, Y-Q. Strain-assisted spin manipulation in a quantum well. *The European Physical Journal B* **63**, 493 (2008).
- [56] A. Chantis, et al. Strain-induced conduction-band spin splitting in GaAs from first-principles calculations. *Physical Review B* **78**, 075208 (2008).
- [57] P. Streda. Theory of quantised Hall conductivity in two dimensions. *Journal of Physics C: Solid State Physics* **15**, L717 (1982).
- [58] D.V. Bulaev, V.A. Geyler e V.A. Margulis. Quantum Hall effect on the Lobachevsky plane. *Physica B: Condensed Matter* **337**, 180 (2003).