

Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental

**FLEXÃO E ESTABILIDADE DE BARRAS USANDO O MODELO DE
BICKFORD-REDDY: UMA ABORDAGEM PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

CIBELLE DIAS DE CARVALHO DANTAS MAIA

João Pessoa – PB
Abril, 2016

Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental

**FLEXÃO E ESTABILIDADE DE BARRAS USANDO O MODELO DE
BICKFORD-REDDY: UMA ABORDAGEM PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação apresentada por Cibelle Dias de
Carvalho Dantas Maia ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil e Ambiental (PPGECAM) da
Universidade Federal da Paraíba (UFPB) como atividade
final para obtenção do Título de Mestre conforme
legislação vigente.

Orientador: Professor Dr. Ângelo Vieira Mendonça

João Pessoa – PB
Abril, 2016

M217f Maia, Cibelle Dias de Carvalho Dantas.

Flexão e estabilidade de barras usando o modelo de Bickford-Reddy: uma abordagem pelo Método dos Elementos de Contorno / Cibelle Dias de Carvalho Dantas Maia. – João Pessoa, 2016.

128f. : il.

Orientador: Ângelo Vieira Mendonça
Dissertação (Mestrado) – UFPB-CT

1. Engenharia civil e ambiental. 2. Teoria de Vigas. 3. Modelo de Bickford-Reddy. 4. MEC. 5. Flambagem. 6. Solução fundamental. 7. Equação integral.

UFPB/BC

CDU: 624:504(043)

**“FLEXÃO E ESTABILIDADE DE BARRAS USANDO O MODELO DE
BICKFORD-REDDY: UMA ABORDAGEM PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO”**

CIBELLE DIAS DE CARVALHO DANTAS MAIA

**Dissertação aprovada em 22 de abril de 2016
Período Letivo: 2015.2**

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Angelo Vieira Mendonça
Orientador


Prof. Dr. André Jacomel Torii
Examinador Interno


Prof. Dr. Selma Hissae Shimura da Nobrega
Examinadora Externa

**João Pessoa/PB
2016**

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes de tudo, a Deus. Sua luz me conduz e me dá forças, principalmente em momentos de desânimo.

Aos meus pais, Rommel e Rosemere, que, não só me ensinaram o valor do estudo e do trabalho, como são exemplos de vida e amor, espelho do que eu desejo ser. E sei que sempre estarão ao meu lado, apoiando as minhas escolhas e aplaudindo as minhas conquistas.

À minha querida e única irmã Isabelle, por todo apoio, carinho, companheirismo e cumplicidade de irmã, que tanto compartilhou comigo todos esses anos.

Ao meu noivo Danilo por toda atenção e compreensão de tantos momentos adiados para que eu atingisse esse meu objetivo. E por estar sempre ao meu lado me incentivando e dando força.

Ao meu orientador Ângelo Mendonça, que com dedicação, compartilhou comigo seus conhecimentos e ofereceu todo apoio acadêmico para o desenvolvimento desse projeto.

À todos os professores que fizeram parte da minha formação pelas contribuições formais e informais, incentivos e exemplos.

À CAPES pelo suporte financeiro.

A todos meus familiares e amigos que, de uma forma ou de outra, me incentivaram a seguir. Em especial às minhas queridas avós, vovó Carminha e vovó Tila, que muito intercederam ao nosso bom Deus por mim, bem como compreenderam minha ausência em alguns momentos de nossas vidas.

E a todos que de uma forma ou de outra contribuíram para realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, novas soluções, baseadas no Método dos Elementos de Contorno (MEC), são estabelecidas para a análise linear de problemas de flexão e estabilidade de barras de Bickford-Reddy. Todos os passos matemáticos para estabelecer a representação do MEC são apresentados: transformações das equações diferenciais governantes em equações integrais equivalentes, dedução das soluções fundamentais, obtenção e solução do sistema alébrico. Além disso, fundações elásticas (Winkler e Pasternak) em barras de Bickford-Reddy também são analisados pelo MEC. É também abordada uma conveniente estratégia para de discontinuidades no domínio tais como: mudança abrupta de geometria da seção transversal (viga escalonada), carga axial intermediária, apoios rígidos no domínio (viga contínua). Exemplos numéricos incorporando vários tipos de condições de contorno e discontinuidades no domínio são apresentadas para validar as soluções do MEC propostas.

Palavras-chave: Teoria de vigas. Bickford-Reddy. MEC. Flambagem. Solução Fundamental. Equação Integral.

ABSTRACT

In this work, new solutions based on the Boundary Element Method (BEM) are established for the linear analysis of bending and stability problems of Reddy-Bickford beams. All mathematical steps to write the BEM representation are properly presented: transformation of governing differential equations into equivalent integral equations, deduction of fundamental solutions, formation and solution of algebraic representation. In addition, elastic foundations (winkler and pasternak's types) attached to Reddy-Bickford beams are solved by BEM as well. It is also addressed a convenient strategy for discontinuities in the area such as abrupt change in geometry of the cross section (stepped beam), intermediate axial load, intermediate supports (continuous beam). Numerical examples incorporating various types of discontinuities and boundary conditions in the field are presented to validate the solutions proposed BEM.

Keywords: Beam theory. Reddy-Bickford. BEM. Buckling. Fundamental solution. Integral equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – (a) Componentes de tensão. (b) Deformação no plano (x, z) . Fonte: Adaptado de TIMOSHENKO, 1951, p.3 e 5.	4
Figura 2.2 – Deformação de viga. (a) Teoria de Euler-Bernoulli (b) Teoria de Timoshenko (c) Teoria de Bickford – Reddy. Fonte: Adaptado de WANG et al., 2000, p.12.....	7
Figura 2.3 – Viga apoiada em base elástica de Winkler.....	15
Figura 2.4 – Relação força elástica-deslocamento da mola.....	15
Figura 2.5 – Viga apoiada em base elástica de Pasternak.	16
Figura 2.6 – Perda de estabilidade por flambagem. Adaptado de TIMOSHENKO, 1940, p.185.	19
Figura 2.7 – Comprimento infinitesimal da barra.	20
Figura 3.1 – (a) Esforços reais; (b) Deslocamentos reais.	37
Figura 3.2 – Campos no contorno e no domínio.	43
Figura 7.1 – (a) Esforços reais unificados; (b) Deslocamentos reais.	87
Figura 7.2 – Variáveis no contorno para o modelo de Bickford-Reddy.....	88
Figura 7.3 – Descontinuidade no domínio: (a) mudança abrupta de seção transversal; (b) Material não homogêneo; (c) descontinuidade de força normal; (d) descontinuidade de força cortante; (e) descontinuidade de momento fletor; (f) Não homogeneidade de base elástica. ..	90
Figura 7.4 – Descontinuidade na viga sobre base Winkler.	90
Figura 7.5 – Discretização da barra de Bickford-Reddy com representação dos esforços e deslocamentos.....	91
Figura 7.6 – Condições de equilíbrio no nó.....	92
Figura 8.1 – Viga em balanço.....	94
Figura 8.2 – Viga em balanço submetida a um carregamento uniformemente distribuído.....	96
Figura 8.3 – Viga simplesmente apoiada.....	98
Figura 8.4 – Viga com base elástica submetida a uma carga concentrada.....	101
Figura 8.5 – Viga simplesmente apoiada e sobre base elástica.....	102
Figura 8.6 – Viga com descontinuidade geométrica e carga pontual.	105
Figura 8.7 – Viga com descontinuidade geométrica e sob carregamento.	107
Figura 8.8 – Viga sob a ação de um recalque.	109

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Deflexão pelo MEC e pelo método analítico.....	95
Tabela 2 – Inclinação da elástica pelo MEC e pelo método analítico	95
Tabela 3 – Deflexão pelo MEC e pelo método analítico da viga em balanço.....	97
Tabela 4 – Inclinação da elástica pelo MEC e pelo método analítico da viga em balanço.	97
Tabela 5 – Análise de viga pelo MEC e pela forma analítica para seção retangular.	99
Tabela 6 – Análise de viga pelo MEC e pela forma analítica para seção circular.	100
Tabela 7 – Deflexão da viga de Timoshenko e da de Bickford-Reddy.....	101
Tabela 8 – Deslocamentos adimensionalizados (ω).....	103
Tabela 9 – Carga crítica pelo MEC e pelo método analítico.....	104
Tabela 10 – Deslocamentos da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF.....	105
Tabela 11 – Esforços da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF	106
Tabela 12 – Deslocamentos da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF.....	107
Tabela 13 – Esforços da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF.	108
Tabela 14 – Deslocamentos da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF.....	109
Tabela 15 – Esforços da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF.	110

LISTA DE ABREVIATURAS

MDF	- Método das Diferenças Finitas
MEC	- Método dos Elementos de Contorno
MEF	- Método dos Elementos Finitos
sgn	- Função sinal
TBR	- Teoria de viga de Bickford-Reddy

LISTA DE SÍMBOLOS

h	- Altura da seção
$m(x)$	- Momento distribuído
$p(x)$	- Carregamento transversal distribuído
u, v, w	- Deslocamentos axial nas direções x, y e z , respectivamente
u^E	- Deslocamento axial na direção x no modelo de Euler-Bernoulli
u^T	- Deslocamento axial na direção x no modelo de Timoshenko
u^R	- Deslocamento axial na direção x no modelo de Bickford-Reddy
w^E	- Deslocamento axial na direção z no modelo de Euler-Bernoulli
w^T	- Deslocamento axial na direção z no modelo de Timoshenko
w^R	- Deslocamento axial na direção z no modelo de Bickford-Reddy
x, y, z	- Coordenadas do sistema generalizado
x	- Ponto campo, incógnita
$\hat{x}$	- Coordenada do ponto fonte
y_i	- Raízes do polinômio característico
A	- Área
C_i	- Constantes
E	- Módulo de elasticidade do material
F_e	- Força de reação à base elástica
G	- Módulo de elasticidade transversal do material
K_1	- Coeficiente da mola ou modulo elástico da fundação
K_2	- Módulo de cisalhamento da camada
L	- Comprimento
M_x	- Momento fletor de primeira ordem
P	- Carga axial
P_x	- Momento fletor de segunda ordem
Q_x	- Esforço cortante de primeira ordem

R_x	- Esforço cortante de segunda ordem
V	- Volume
W	- Trabalho devido à ação das forças externas
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	- Distorção no plano xy , xz e yz , respectivamente
$\delta\pi_p$	- Variacional da energia potencial de deformação
$\delta(x, \hat{x})$	- Delta de Dirac
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	- Deformação linear na direção dos eixos x , y e z , respectivamente.
κ	- Coeficiente de cisalhamento (fator de forma)
ν	- Coeficiente de Poisson
ξ	- Valor infinitesimal
π_p	- Energia potencial de deformação
π_{pp}	- Energia potencial devido à base elástica de Pasternak
π_{ppc}	- Energia potencial devido à distorção da camada de cisalhamento
π_{pw}	- Energia potencial devido à base elástica de Winkler
σ_x	- Tensão normal na direção x
σ_y	- Tensão normal na direção y
σ_z	- Tensão normal na direção z
τ_{yz}	- Tensão de cisalhamento no plano yz
τ_{xz}	- Tensão de cisalhamento no plano xz
τ_{xy}	- Tensão de cisalhamento no plano xy
$\varnothing$	- Rotação da seção
ψ	- Função escalar
ω	- Deflexão transversal
$\{f\}$	- Vetor dos carregamentos
$[B]$	- Matriz de influência
$[B^{cof}]$	- Matriz dos cofatores da matriz $[B]$

$[G]$ - Matriz dos deslocamentos

$[I]$ - Matriz identidade

SUMÁRIO

1.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
1.1.	Considerações iniciais.....	1
1.2.	Revisão Bibliográfica	1
1.3.	Objetivos	3
1.4.	Organização do trabalho	3
2.	FUNDAMENTAÇÃO DE BARRA.....	4
2.1.	Relações constitutivas para o estado triplo de tensão	4
2.2.	Energia de deformação (flexão da barra).....	6
2.2.1.	Modelo de Euler-Bernoulli	8
2.2.2.	Modelo de Timoshenko	10
2.2.3.	Modelo de Bickford-Reddy	12
2.3.	Energia de deformação (bases elásticas)	15
2.4.	Trabalho das forças externas.....	18
2.4.1.	Força transversal	18
2.4.2.	Força axial no Problema da Estabilidade.....	18
2.5.	Equações de Equilíbrio	21
2.5.1.	Euler-Bernoulli.....	21
2.5.2.	Timoshenko.....	22
2.5.3.	Bickford-Reddy.....	23
3.	ANÁLISE DE VIGA DE BICKFORD-REDDY PELO MEC	25
3.1.	Equação governante do problema real	25
3.2.	Problema fundamental	25

3.3.	Equação integral	31
3.4.	Equação algébrica	36
3.5.	Determinação dos campos no domínio	42
4.	ANÁLISE DE VIGA DE BICKFORD-REDDY APOIADA EM BASE ELÁSTICA PELO MEC	47
4.1.	Equação governante do problema real	47
4.2.	Problema fundamental	47
4.3.	Equação integral	54
4.4.	Equação algébrica	57
5.	ESTABILIDADE DA BARRA DE BICKFORD-REDDY E O MEC	63
5.1.	Equação governante do problema real	63
5.2.	Problema fundamental	63
5.3.	Equação integral	66
5.4.	Equação algébrica	68
6.	ESTABILIDADE DE BARRAS DE BICKFORD-REDDY APOIADAS EM BASE ELÁSTICA E O MEC	71
6.1.	Equação governante do problema real	71
6.2.	Problema fundamental	71
6.3.	Equação integral	78
6.4.	Equação algébrica	82
7.	TRANSFORMAÇÕES E OPERAÇÕES NO SISTEMA ALGÉBRICO	86
7.1.	Unificação de sistemas de referência	86
7.2.	Condições de contorno	88
7.3.	Descontinuidade no domínio	89

8.	EXEMPLOS NUMÉRICOS	94
8.1.	Viga em balanço submetida a uma carga concentrada	94
8.2.	Viga em balanço sob carregamento uniformemente distribuído	95
8.3.	Viga simplesmente apoiada sob um carregamento uniformemente distribuído	98
8.4.	Viga sobre base elástica submetida a uma carga concentrada.....	100
8.5.	Viga simplesmente apoiada e sobre base elástica.....	101
8.6.	Carga crítica de flambagem de uma coluna.....	103
8.7.	VIGA ESCALONADA SOB CARGA PONTUAL	104
8.8.	Viga escalonada sob carregamento distribuído.....	106
8.9.	Viga com descontinuidade devido a recalque.....	108
9.	CONCLUSÃO.....	111
10.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	112

1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1. Considerações iniciais

As estruturas são compostas por um os mais elementos ligados entre si de modo a formar um conjunto estável e resistente às solicitações. O desenvolvimento das teorias que descrevem o comportamento de estruturas se deu inicialmente para estruturas reticuladas, isto é, para estruturas formadas por barras (ou elementos estruturais unidimensionais), que são corpos deformáveis alongados analisados como elementos estruturais unidimensionais por apresentarem o comprimento bem maior do que as dimensões da seção transversal. Tais elementos representam estruturas como vigas, colunas, arcos, pórticos, etc. As teorias de vigas são a base para a representação matemática do comportamento estrutural desses elementos.

1.2. Revisão Bibliográfica

A principal ideia nos modelos de vigas é a tentativa de descrição satisfatória de certos componentes estruturais, originalmente definidos no espaço tridimensional, por um conjunto de variáveis que estão definidos em um espaço unidimensional (no caso, o eixo longitudinal da barra). A representação de barras em problemas 1D implica em equações governantes definidas em domínios 1D, ações externas definidas sobre um eixo, condições de contorno prescritas em pontos, uso de recursos matemáticos e soluções numéricas menos complexas do que em modelos bi ou tridimensionais.

Conforme apresentado por WANG et al. (2000), um dos primeiros modelos de vigas é a teoria clássica de Euler-Bernoulli, que não considera a deformação por força cortante já que a planicidade da seção transversal e sua ortogonalidade com eixo da viga são mantidas mesmo após a viga deformada. Como uma evolução direta da teoria clássica surge o modelo de vigas com deformação por cortante de primeira ordem, proposto por TIMOSHENKO (1921). Este difere da teoria anterior por incorporar o efeito da distorção transversal, consequentemente não mais se considera a ortogonalidade da seção com o eixo longitudinal. Outros modelos de vigas incorporam hipóteses nas quais a planicidade da seção transversal não é mais requerida. Isto implica que os deslocamentos axiais não são mais distribuídos linearmente ao longo da seção transversal recaindo-se em deformações por cortante de alta ordem. Um desses modelos mais difundido é o de Bickford (1982) – Reddy (1984).

Uma das maneiras de obter a solução desses modelos matemáticos pode ser realizada via métodos analíticos, sendo este disponível apenas para alguns casos. Desta forma, mais comumente são empregados métodos numéricos, tais como o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), e o mais recente, Método dos Elementos de Contorno (MEC).

CHENG e CHENG (2005) explicam que, diferente dos outros dois métodos numéricos, MDF e MEF, que são classificados como métodos de domínio, no MEC, por ser um método de contorno, a discretização numérica reduz a dimensão espacial do problema. Ou seja, para problemas em três dimensões (3D), a discretização ocorre na superfície (2D) delimitadora e em corpos de duas dimensões espaciais, ocorre no limite do contorno (1D). Por extensão, no caso de problemas de barras, o contorno resume-se aos dois pontos de extremidade do corpo.

Desde as primeiras investigações através do MEC, o principal foco na Mecânica dos Sólidos tem sido dirigido para os problemas bi e tridimensionais BECKER (1992), DOMINGUEZ(1993), ALIABADI(2002), KATSIKADELIS(2002). Só a partir da década de 1980 soluções numéricas baseadas na filosofia do MEC foram apresentadas no estudo de barras. A aplicação do MEC à viga de Euler-Bernoulli nos problemas estáticos foi apresentada por BANERJEE e BUTTERFIELD (1981), nos dinâmicos por PROVIDAKIS e BESKOS(1986) e nos problemas de estabilidade à flambagem por MANOLIS et al.(1986). Outro avanço do MEC em análise de barras foi a incorporação do modelo de Timoshenko proposto por ANTES (2003). Já em CRUZ (2012) a técnica foi estendida a estruturas aporticadas planas e espaciais. Em PASSOS (2014) foi desenvolvida uma formulação do MEC para o estudo da estabilidade estática e dinâmica de vigas de Timoshenko submetida a cargas axiais apoiadas, ou não, em bases elásticas.

Soluções numéricas têm sido apresentadas para problemas envolvendo o modelo de Bickford-Reddy para barras de seção transversal retangular. Em HEYLIGER e REDDY (1988), KANT e GUPTA (1988), EISENBERGER (2003) a solução é obtida utilizando-se o Método dos Elementos Finitos enquanto que em YESILCE (2008) são construídas respostas baseadas no Método de Matriz de Transferência. No entanto, este cenário não é o mesmo para solução dos problemas envolvendo essas teorias pelo MEC, existindo assim questões no modelo de Bickford-Reddy que ainda merecem ser elucidadas para o estabelecimento dessa técnica de contorno.

1.3. Objetivos

A proposta desse trabalho é apresentar uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para a análise linear de flexão e estabilidade de barras de Bickford-Reddy com, ou sem, fundação elástica.

Já os objetivos específicos desta pesquisa são:

- Deduzir as equações integrais para flexão e estabilidade de barras de Bickford-Reddy apoiadas ou não em base elástica (de Winkler e Pasternak);
- Propor soluções fundamentais pertinentes a estes problemas;
- Obtenção do sistema algébrico do MEC;
- Adaptação do MEC para barras com descontinuidades no domínio.

1.4. Organização do trabalho

No capítulo 2 são tratados assuntos referentes às teorias de flexão e estabilidade de barras apoiadas, ou não, em bases elásticas culminando na obtenção das equações de equilíbrio nos modelos de Euler-Bernoulli, Timoshenko e Bickford-Reddy. A partir do capítulo 3 começa a análise propriamente dita das vigas de Bickford-Reddy pelo MEC com obtenção do problema fundamental, equação integral e equação algébrica. Desta forma, nos capítulos 3, 4, 5 e 6 seguintes são abordadas, respectivamente, vigas sob flexão, sob flexão e fundação elástica, estabilidade de barras e estabilidade de barras apoiadas em base elástica. No capítulo 7 são realizadas manipulações em nível de sistema algébrico com o objetivo viabilizar a resolução de problemas com descontinuidades no domínio. Finalmente no capítulo 8 são apresentados exemplos para a validação numérica das soluções propostas pelo MEC.

2. FUNDAMENTAÇÃO DE BARRA

Neste capítulo são tratados os assuntos pertinentes às teorias de flexão e estabilidade de barras apoiadas, ou não, em bases elásticas. Grande parte das discussões feitas neste capítulo são baseadas principalmente em WANG et al. (2000) e PASSOS (2014).

2.1. Relações constitutivas para o estado triplo de tensão

No estudo de tensões e deformações de corpos, TIMOSHENKO (1951) assume as seguintes hipóteses: material elástico linear, homogêneo – qualquer região do corpo representa as propriedades e fenômenos do todo – e isotrópico, ou seja, mesmas propriedades em todas as direções.

Existem dois tipos de forças externas que podem atuar em um corpo, são elas as forças de superfície, as quais estão distribuídas na superfície do corpo, e as forças de corpo, sendo estas mobilizadas à distância e distribuídas no volume, tais como força gravitacional e magnética.

Seja um corpo em equilíbrio sob a ação de forças externas, quando seccionado e analisado o efeito dessas forças internamente em um elemento infinitesimal de dimensões dx , dy e dz têm-se as tensões, indicadas na Figura 2.1(a). As deformações implicam em mudança de forma do corpo e podem ser classificadas em deformação linear e/ou deformação angular (distorção), Figura 2.1(b).

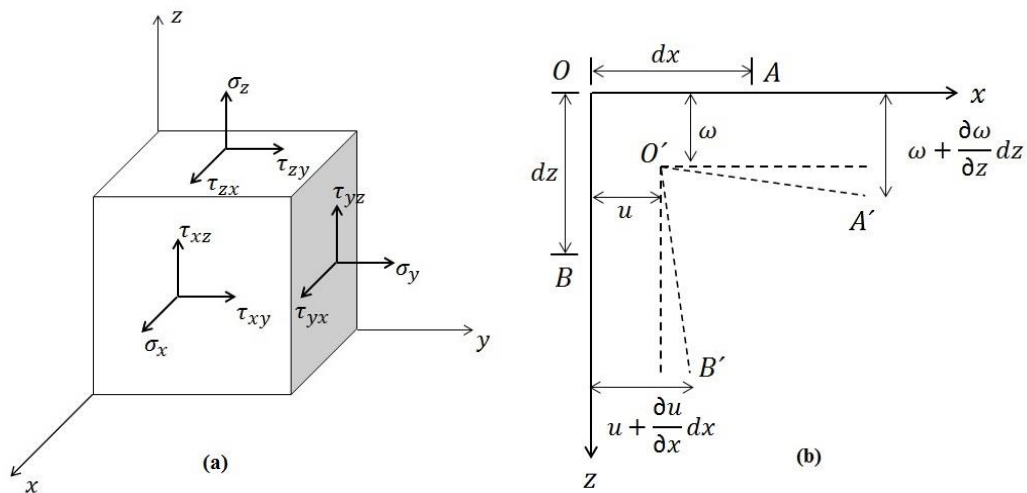


Figura 2.1 – (a) Componentes de tensão. (b) Deformação no plano (x, z) . Fonte: Adaptado de TIMOSHENKO, 1951, p.3 e 5.

As relações de deformação-deslocamento para pequenos campos de deslocamentos e deformações são dadas por TIMOSHENKO (1951):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.6)$$

Onde,

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ são, respectivamente, deformação linear na direção dos eixos x, y, z ,

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ são, respectivamente, deformação angular (distorção) nos planos xy, xz, yz , e,

u, v, w são, respectivamente, o deslocamento na direção x, y, z .

Para um corpo formado por um material homogêneo, isotrópico e elasto-linear, as relações tensão-deformação definidas por TIMOSHENKO (1951) são:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.10)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (2.11)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.12)$$

Em que,

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ são, respectivamente, as tensões normal nas direções x, y, z , respectivamente,

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ são as tensões cisalhantes nos planos xy, xz, yz , respectivamente,

E é o módulo de elasticidade do material,

G é o módulo de elasticidade transversal do material e,

ν é o Coeficiente de Poisson.

Sendo a relação entre os módulos de elasticidade dada por:

$$G = \frac{E}{2.(1+\nu)} \quad (2.13)$$

2.2. Energia de deformação (flexão da barra)

Segundo WANG et al. (2000), um dos primeiros modelos de vigas é a teoria clássica de Euler-Bernoulli que não considera a deformação por cortante (teoria de deformação por força cortante de ordem zero), nesta teoria a seção transversal permanece plana e formando ângulo de 90° com a linha elástica. Como uma evolução direta da teoria clássica surge o modelo proposto por TIMOSHENKO (1921), que incorpora o efeito da deformação por força cortante (sendo este de primeira ordem) e um fator de forma para a seção transversal é requerido para que as tensões cisalhantes sejam devidamente representadas. A hipótese comum entre essas duas teorias é que a seção transversal deve permanecer plana durante o processo de flexão.

A partir da década de 1980 surgiram teorias de vigas com deformação por força cortante de alta ordem, cujo modelo mais difundido é o de Bickford(1982) – Reddy(1984). As teorias de alta ordem implicam na relaxação da imposição da planicidade para a seção transversal. No modelo de Bickford-Reddy, o deslocamento axial é cubicamente distribuído na altura da seção e escrito em função da rotação da seção e da inclinação da elástica. Também são mobilizados os esforços de segunda ordem.

A Figura 2.2 apresenta a configuração deformada da viga para cada uma das três teorias quando esta sofre deformação.

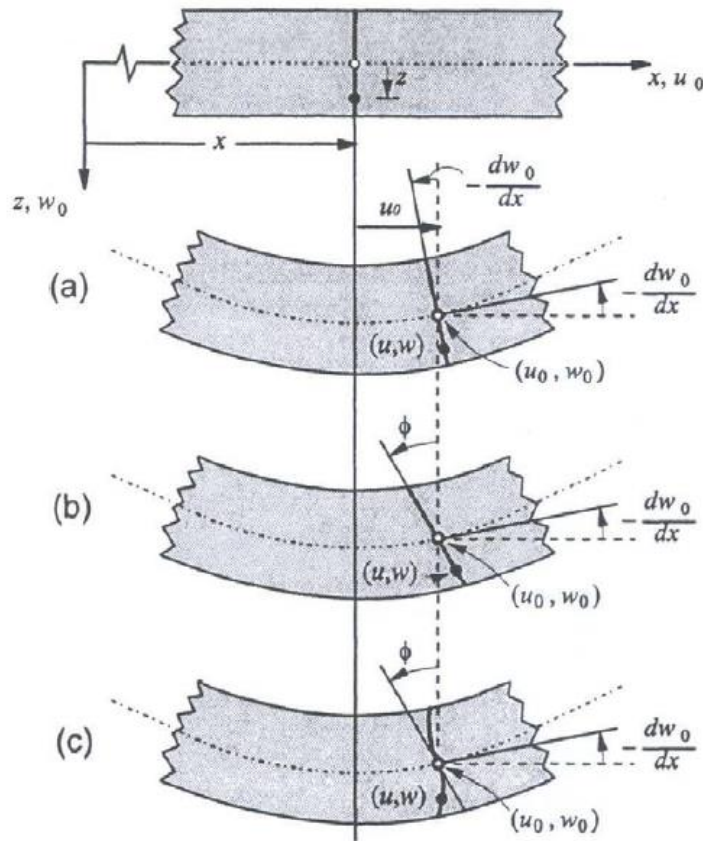


Figura 2.2 – Deformação de viga. (a) Teoria de Euler-Bernoulli (b) Teoria de Timoshenko (c) Teoria de Bickford – Reddy. Fonte: Adaptado de WANG et al., 2000, p.12.

O sistema cartesiano de referência empregado no desenvolvimento desta pesquisa passa pelo centro de gravidade da seção transversal da barra. A coordenada x é tomada ao longo do comprimento da barra, a coordenada z ao longo da altura da seção transversal e a coordenada y ao longo da largura da seção transversal.

As principais hipóteses associadas aos modelos de barras são os seguintes:

- O problema tridimensional pode ser reduzido ao espaço unidimensional, 1D, desde que o comprimento L , seja suficientemente maior que as dimensões da seção transversal;
- Material homogêneo, ou seja, qualquer região do corpo representa as propriedades e fenômenos do todo;
- Material isotrópico, ou seja, mesmas propriedades em todas as direções;
- Material elástico linear. Implica que em um ciclo de carga e descarga não haverá deformação residual, já a linearidade exige uma proporcionalidade direta entre tensão e deformação;

- Deformações transversais da seção serão desprezadas, ou seja, as deformações induzidas transversalmente à seção pela ação do carregamento não é levado em conta, isso implica em desprezar o efeito Poisson;
- Os campos de deslocamentos e deformações são assumidos pequenos para a viga e base elástica (quando presente), desta forma não se faz necessário incorporar parcelas de ordem superior da expansão da Taylor.

Além disso, o problema será desenvolvido para:

- Barras prismáticas, ou seja, a seção transversal não varia ao longo do comprimento.

2.2.1. Modelo de Euler-Bernoulli

Outras hipóteses adicionais devem ser incluídas no modelo clássico de vigas:

- Seções transversais inicialmente planas permanecem planas durante a flexão, implicando na conservação da planicidade da seção transversal.
- Conservação da ortogonalidade da seção transversal e o eixo longitudinal fletido da viga, implicando na supressão na distorção transversa, vide Figura 2.2 (a).

Os deslocamentos axiais e transversais são dados por:

$$u(x, z) = z \cdot \varnothing(x) \quad (2.14)$$

$$w(x, z) = \omega(x) \quad (2.15)$$

Sendo,

z a profundidade da fibra em análise na seção transversal,

$\varnothing$ a rotação da seção, e

ω a deflexão transversal.

Como as distorções transversas são nulas, implica que:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

Ou, substituindo o deslocamento axial e transversal, Equações (2.14) e (2.15), na Equação (2.16):

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\varnothing \quad (2.17)$$

Conforme Equação (2.1), a deformação axial é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \quad (2.18)$$

A energia potencial de deformação é dada por:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x) dV \quad (2.19)$$

Se o material for elástico linear e ainda suprimindo-se o efeito de Poisson ($\nu = 0$), a Equação (2.7) é válida podendo ser reescrita como:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (2.20)$$

O momento fletor pode ser obtido por:

$$M_x = \int_A (\sigma_x \cdot z) dA \quad (2.21)$$

O momento fletor pode ainda ser escrito em função da curvatura, substituindo-se (2.18) e (2.20) em (2.21).

$$M_x = -\frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \int_A E \cdot z^2 \cdot dA = -\frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \cdot D_x \quad (2.22)$$

Onde,

$$D_x = \int_A E \cdot z^2 dA \quad (2.23)$$

Substituindo a deformação axial, Equação (2.18), na Equação (2.19) da energia potencial:

$$\pi_p = -\frac{1}{2} \int_L \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \left[\int_A (z \cdot \sigma_x) dA \right] dx \quad (2.24)$$

Fazendo a Equação (2.24) em função do momento M_x , a Equação (2.21) fica:

$$\pi_p = -\frac{1}{2} \int_L \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} M_x dx = \frac{1}{2} \int_L D_{xx} \left[\frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right]^2 dx \quad (2.25)$$

Já a primeira variação de (2.25) fica:

$$\delta \pi_p = \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_L D_{xx} \left[\frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right]^2 dx \right\} = \int_L D_{xx} \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \delta \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} dx = \int_L D_{xx} \frac{d^4 \omega(x)}{dx^4} \delta \omega(x) dx \quad (2.26)$$

A primeira variação do funcional de energia, Equação (2.26) produz também termos de contorno iguais a $\left[D_{xx} \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \delta \frac{d\omega(x)}{dx} \right]_0^L$ e $\left[-D_{xx} \frac{d^3 \omega(x)}{dx^3} \delta \omega(x) \right]_0^L$. Assumindo que as condições essenciais de contorno são atendidas pelas variações, implica na nulidade de ambos os termos de contorno.

Comparando as Equações (2.25) e (2.26), a variação da energia potencial pode ainda ser relacionada aos momentos fletores como:

$$\delta\pi_p = - \int_L M_x \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \delta\omega(x) dx \quad (2.27)$$

2.2.2. Modelo de Timoshenko

Outras hipóteses adicionais devem ser incluídas no modelo de TIMOSHENKO (1921):

- Seções transversais inicialmente planas permanecem planas durante a flexão, implicando na conservação da planicidade da seção transversal.
- A seção transversal e o eixo longitudinal fletido da viga não ficam necessariamente, ortogonais durante a flexão, mobilizando da distorção transversa no processo, vide Figura 2.2 (b).

Os deslocamentos axiais e transversais são dados por:

$$u = z \cdot \phi(x) \quad (2.28)$$

$$w = \omega(x) \quad (2.29)$$

Sendo,

z a profundidade da fibra em análise na seção transversal,

ϕ a rotação da seção, e

ω a deflexão transversal.

As distorções transversais, Equação (2.5), será dada por:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi(x) + \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} \quad (2.30)$$

As deformações axiais, Equação (2.1), ficam:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (2.31)$$

A energia potencial de deformação da viga de Timoshenko é dada por:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}) dV \quad (2.32)$$

Sendo o material elástico linear e ainda suprimindo-se o efeito de Poisson, as Equações (2.7) e (2.11) podem ser reescritas como:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (2.33)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad (2.34)$$

O momento fletor e a força cortante podem ser obtidos por:

$$M_x = \int_A (\sigma_x \cdot z) dA \quad (2.35)$$

$$Q_x = \int_A \tau_{xz} dA \quad (2.36)$$

O momento fletor pode ainda ser escrito em função da curvatura, substituindo-se a tensão normal e a deformação axial, Equações (2.31) e (2.33), em (2.35):

$$M_x = \frac{d\phi(x)}{dx} E \int_A z^2 dA = \frac{d\phi(x)}{dx} D_x \quad (2.37)$$

Sendo D_x expresso na Equação (2.23).

Já a força cortante pode ser escrita a partir da tensão cisalhante e distorções transversais, Equação (2.34) e (2.30), resultando em:

$$Q_x = \int_A \tau_{xz} dA = \int_A \kappa \cdot G [\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx}] dA = \kappa \cdot A_{xz} [\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx}] \quad (2.38)$$

Onde,

κ é o fator de forma.

$$A_{xz} = \int_A G \cdot dA = GA \quad (2.39)$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x) dV = \frac{1}{2} \int_L \frac{d\phi(x)}{dx} [\int_A (z \cdot \sigma_x) dA] dx = \frac{1}{2} \int_L \frac{d\phi(x)}{dx} M_x dx = \frac{1}{2} \int_L D_x \left[\frac{d\phi(x)}{dx} \right]^2 dx \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V (\tau_{xz} \gamma_{xz}) dV &= \frac{1}{2} \int_L \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] [\int_A \tau_{xz} dA] dx = \frac{1}{2} \int_L \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] Q_x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_L \kappa A_{xz} \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right]^2 dx \end{aligned} \quad (2.41)$$

Finalmente, a energia potencial fica:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_L D_x \left[\frac{d\phi(x)}{dx} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_L \kappa \cdot A_{xz} \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right]^2 dx \quad (2.42)$$

A primeira variação da energia potencial de deformação dada em (2.42) é:

$$\delta \pi_p = \int_L D_x \frac{d\phi}{dx} \delta \frac{d\phi}{dx} dx + \int_L \kappa \cdot A_{xz} \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] \delta \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] dx \quad (2.43)$$

Aplicando as propriedades do cálculo variacional em (2.43) e assumindo que as condições de essenciais de contorno são atendidas pelas variações, resulta em:

$$\delta\pi_p = - \int_L D_x \frac{d^2\phi}{dx^2} \delta\phi dx + \int_L \kappa \cdot A_{xz} \left[\phi(x) + \frac{d\omega}{dx} \right] \delta\phi(x) dx - \int_L \kappa \cdot A_{xz} \left[\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{d^2\omega}{dx^2} \right] \delta\omega dx \quad (2.44)$$

Comparando-se (2.37), (2.38) e (2.44), a variação da energia potencial pode ainda ser relacionada aos esforços como:

$$\delta\pi_p = - \int_L \frac{dM_x}{dx} \delta\phi dx + \int_L Q_x \delta\phi(x) dx - \int_L \frac{dQ_x}{dx} \delta\omega dx \quad (2.45)$$

2.2.3. Modelo de Bickford-Reddy

Outras hipóteses adicionais devem ser incluídas no modelo de Bickford-Reddy:

- Seções transversais inicialmente planas não permanecem planas durante a flexão, vide Figura 2.2 (c);

BICKFORD (1982) apresenta respectivamente o deslocamento axial u (na direção do eixo x) e o deslocamento transversal w (na direção do eixo z):

$$u = z \cdot \phi(x) - \alpha \cdot z^3 \cdot \left(\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \quad (2.46)$$

$$w = \omega(x) \quad (2.47)$$

Sendo,

z a profundidade da fibra em análise na seção transversal,

ϕ a rotação da seção,

ω a deflexão transversal,

$\frac{d\omega}{dx}$ a inclinação da elástica, e

$$\alpha = \frac{4}{3h^2}, \text{ com } h \text{ sendo a altura da seção.} \quad (2.48)$$

A deformação axial (ε_x) e a distorção transversal (γ_{xz}), são obtidas substituindo as Equações (2.46) e (2.47) em (2.1) e (2.5), são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha \cdot z^3 \cdot \left(\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \right) \quad (2.49)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = (1 - 3\alpha z^2) \cdot \left(\phi + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \quad (2.50)$$

Sendo o material elástico linear e ainda suprimindo-se o efeito de Poisson, as Equações (2.7) e (2.11) podem ser reescritas como:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (2.51)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad (2.52)$$

A energia potencial elástica da viga de Bickford-Reddy dada por BICKFORD (1982):

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (2.53)$$

Segundo WANG et al. (2000), os esforços são definidos a partir de convenientes integrações das tensões ao longo da área transversal, resultando em:

$$M_x = \int_A (\sigma_x z) dA = \hat{D}_x \frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha F_x \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \quad (2.54)$$

$$P_x = \int_A (\sigma_x z^3) dA = \hat{F}_x \frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha H_x \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \quad (2.55)$$

$$Q_x = \int_A \tau_{xz} dA = \hat{A}_{xz} \left(\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \quad (2.56)$$

$$R_x = \int_A (\tau_{xz} z^2) dA = \hat{D}_{xz} \left(\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \quad (2.57)$$

Em que,

M_x é o momento fletor de primeira ordem;

P_x é o momento fletor de segunda ordem;

Q_x é o esforço cortante de primeira ordem;

R_x é o esforço cortante de segunda ordem.

$$\hat{D}_x = D_x - \alpha F_x \quad (2.58)$$

$$\hat{F}_x = F_x - \alpha H_x \quad (2.59)$$

$$\hat{A}_{xz} = A_{xz} - \beta D_{xz} \quad (2.60)$$

$$\hat{D}_{xz} = D_{xz} - \beta F_{xz} \quad (2.61)$$

$$(A_x, D_x, F_x, H_x) = \int_A (1, z^2, z^4, z^6) E \cdot dA \quad (2.62)$$

$$(A_{xz}, D_{xz}, F_{xz}) = \int_A (1, z^2, z^4) G \cdot dA \quad (2.63)$$

$$\beta = 3 \cdot \alpha = \frac{4}{h^2} \quad (2.64)$$

Substituindo as tensões e deformações, Equações (2.49), (2.50), (2.51) e (2.52), na Equação (2.53):

$$\frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x) dV = \frac{1}{2} \int_L \frac{d\phi}{dx} \left[\int_A (z \cdot \sigma_x) dA \right] dx - \frac{1}{2} \int_L \alpha \left(\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right) \left[\int_A (z^3 \cdot \sigma_x) dA \right] dx \quad (2.65)$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x) dV = \frac{1}{2} \int_L M_x \cdot \frac{d\phi}{dx} dx - \frac{1}{2} \int_L \alpha \cdot P_x \left(\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right) dx \quad (2.66)$$

Sendo $\hat{M}_x$ dado por:

$$\hat{M}_x = M_x - \alpha \cdot P_x \quad (2.67)$$

A primeira parcela da energia potencial elástica da viga de Bickford-Reddy, Equação (2.53), é dada por:

$$\frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x) dV = \frac{1}{2} \int_L \hat{M}_x \cdot \frac{d\phi}{dx} dx - \frac{1}{2} \int_L \alpha \cdot P_x \cdot \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} dx \quad (2.68)$$

Substituindo a tensão cisalhante e deformação na Equação (2.53) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V (\tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}) dV &= \frac{1}{2} \int_L \left(\phi(x) + \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} \right) \left[\int_A \tau_{xz} dA \right] dx - \frac{1}{2} \int_L 3\alpha \left(\phi(x) + \right. \\ &\left. \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} \right) \left[\int_A \tau_{xz} \cdot z^2 dA \right] dx \end{aligned} \quad (2.69)$$

Substituindo-se as forças cortantes de primeira e segunda ordem, Equações (2.56) e (2.57), resulta:

$$\frac{1}{2} \int_V (\tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}) dV = \frac{1}{2} \int_L Q_x \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] dx - \frac{1}{2} \int_L 3 \cdot \alpha \cdot R_x \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] dx \quad (2.70)$$

Sendo,

$$\hat{Q}_x = Q_x - \beta \cdot R_x \quad (2.71)$$

A Equação (2.70) fica:

$$\frac{1}{2} \int_V (\tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}) dV = \frac{1}{2} \int_L \hat{Q}_x \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] dx \quad (2.72)$$

Com isso, somando as Equações (2.68) e (2.72) a energia potencial da viga de Bickford-Reddy fica:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_L \hat{M}_x \cdot \frac{d\phi}{dx} dx - \frac{1}{2} \int_L \alpha \cdot P_x \cdot \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} dx + \frac{1}{2} \int_L \hat{Q}_x \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] dx \quad (2.73)$$

A primeira variação da energia potencial de deformação dada em (2.73) fica:

$$\delta \pi_p = \int_L \hat{M}_x \cdot \delta \frac{d\phi}{dx} dx - \int_L \alpha \cdot P_x \cdot \delta \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} dx + \int_L \hat{Q}_x \left[\delta \phi(x) + \delta \frac{d\omega(x)}{dx} \right] dx \quad (2.74)$$

Fazendo-se convenientes integrais por partes em (2.74) e assumindo que as condições de essenciais de contorno são atendidas pelas variações, obtém-se:

$$\delta \pi_p = \int_L \left[-\frac{d\hat{M}_x}{dx} + \hat{Q}_x \right] \delta \phi(x) \cdot dx + \int_L \left[-\alpha \cdot \frac{d^2 P_x}{dx^2} - \frac{d\hat{Q}_x}{dx} \right] \delta \omega(x) \cdot dx \quad (2.75)$$

2.3. Energia de deformação (bases elásticas)

A análise de vigas em base elástica submetidas a cargas estáticas tem grande importância na engenharia. Uma aplicação prática é em projeto de fundações, em que esse tipo de análise representa matematicamente a interação solo-estrutura.

O modelo de WINKLER (1867), Figura 2.3, idealiza a base elástica como sendo um conjunto de molas infinitamente próximas, mas separadas entre si, sem resistência a cisalhamento, ou seja, apenas o parâmetro K_1 é necessário para definir sua rigidez, este é denominado coeficiente de mola ou módulo elástico da fundação. Esse modelo considera que a força reativa da base é proporcional em cada ponto ao deslocamento no ponto de aplicação, Figura 2.4.

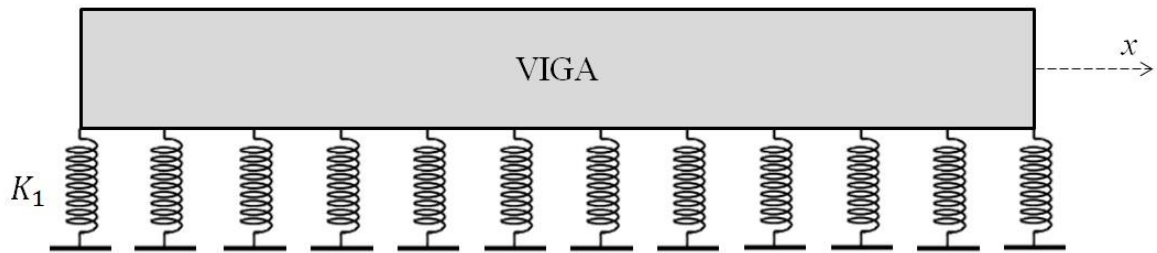


Figura 2.3 – Viga apoiada em base elástica de Winkler

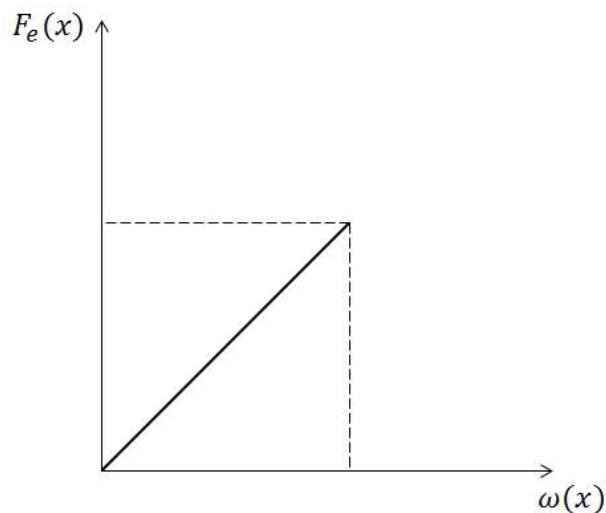


Figura 2.4 – Relação força elástica-deslocamento da mola.

Conforme demonstrado em PASSOS (2014), de acordo com a hipótese de proporcionalidade da relação reação-deslocamento da base, tem-se que:

$$F_e(x) = K_1 \cdot \omega(x) \quad (2.76)$$

Sendo,

$F_e(x)$ a reação da base e,

$\omega(x)$ a deflexão.

A energia potencial devido à base elástica de Winkler, (π_{pw}), computada em toda extensão da barra é dada pela integral da área do triângulo indicado na Figura 2.4. A área do triângulo:

$$d\pi_w = \frac{F_e(x) \cdot \omega(x)}{2} = \frac{K_1 \cdot \omega(x) \cdot \omega(x)}{2} = \frac{1}{2} \cdot K_1 \cdot \omega(x)^2 \quad (2.77)$$

E a energia potencial da base de Winkler resulta em:

$$\pi_w = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L K_1 \cdot [\omega(x)]^2 \cdot dx \quad (2.78)$$

Já a primeira variação da Equação (2.78) fica:

$$\delta\pi_w = \delta \left\{ \frac{1}{2} \cdot \int_0^L K_1 \cdot [\omega(x)]^2 \cdot dx \right\} = \int_0^L K_1 \cdot \omega(x) \delta\omega(x) dx \quad (2.79)$$

Dentre os modelos de base elástica com dois parâmetros de caracterização, tem-se o de PASTERNAK(1954). Este, além de considerar os efeitos definido no modelo de Winkler, incorpora uma reação proporcional à distorção da base. Assim, a base elástica é constituída por uma camada incompressível com deformação por cisalhamento associada ao apoio elástico de Winkler. Vide Figura 2.5.

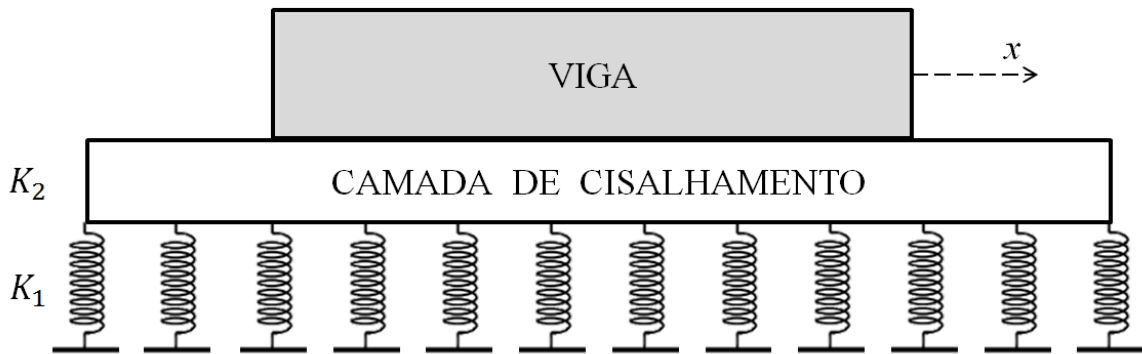


Figura 2.5 – Viga apoiada em base elástica de Pasternak.

Sendo,

K_1 é o coeficiente de mola ou modulo elástico da fundação e

K_2 é o módulo de cisalhamento da camada.

No modelo de Pasternak também são considerados que a reação da base é proporcional ao deslocamento transversal das molas, as tensões cisalhantes da camada de cisalhamento são proporcionais às distorções, levando-se em conta os deslocamentos transversais (ω) e desprezando-se os deslocamentos tangenciais (u) da camada de cisalhamento.

A energia potencial da base de Pasternak pode ser subdividida em duas parcelas.

$$\pi_p = \pi_w + \pi_{pc} \quad (2.80)$$

Em que,

π_w refere-se a contribuição devida às molas, Equação (2.78), e

π_{pc} refere-se a contribuição devido à distorção da camada de cisalhamento.

Como exposto em PASSOS (2014), a parcela da energia devida à distorção da camada de cisalhamento é obtida a partir da relação deformação-deslocamento, Equação (2.5), e da relação tensão-deformação, Equação (2.11), resultando em:

$$\tau_{xz} = G_s \cdot \gamma_{xz} = G_s \cdot \frac{d\omega(x)}{dx} \quad (2.81)$$

Onde G_s é o módulo de elasticidade transversal da camada de cisalhamento.

Como são desprezados os deslocamentos tangenciais da camada, a parcela $\frac{du}{dz}$ é desprezada na Equação (2.81).

A energia potencial π_{pc} é dada por:

$$\begin{aligned} \pi_{pc} &= \frac{1}{2} \int_V \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V G_s \cdot \left(\frac{d\omega(x)}{dx} \right)^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ G_s \cdot \left(\frac{d\omega(x)}{dx} \right)^2 \cdot \left[\int_{A_s} dA_s \right] \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L G_s \cdot A_s \cdot \left(\frac{d\omega(x)}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L K_2 \cdot \left(\frac{d\omega(x)}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (2.82)$$

Sendo,

A_s a área transversal da camada e,

$$K_2 = G_s \cdot A_s \quad (2.83)$$

Da relação da Equação (2.82), a energia potencial devido à base elástica de Pasternak é dada por:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L K_1 \cdot [\omega(x)]^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_2 \cdot \left(\frac{d\omega(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (2.84)$$

Aplicando o variacional e realizando integrações por parte na parcela referente ao K_2 , a Equação (2.84) fica:

$$\delta\pi_p = \delta \left\{ \frac{1}{2} \cdot \int_0^L K_1 \cdot [\omega(x)]^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_2 \cdot \left(\frac{d\omega(x)}{dx} \right)^2 dx \right\} = \int_0^L K_1 \cdot \omega(x) \delta\omega(x) dx - \int_0^L K_2 \cdot \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \delta\omega(x) dx \quad (2.85)$$

2.4. Trabalho das forças externas

2.4.1. Força transversal

A variação do trabalho devido a um carregamento transversal distribuído $q(x)$ no modelo de viga de Euler-Bernoulli, é dado por:

$$\delta W = \int_L q(x) \cdot \delta\omega(x) \cdot dx \quad (2.86)$$

No caso do modelo de Timoshenko ou de Bickford-Reddy, a variação do trabalho devido a um carregamento transversal distribuído $p(x)$ e a um momento distribuído $m(x)$ é dado por:

$$\delta W = \int_L q(x) \cdot \delta\omega(x) \cdot dx + \int_L m(x) \cdot \delta\phi(x) \cdot dx \quad (2.87)$$

2.4.2. Força axial no Problema da Estabilidade

Quando uma barra é submetida a um carregamento axial de compressão pode ocorrer de a mesma entrar em ruína devido à ruptura do material ou por perda de estabilidade por flambagem. No segundo caso, ocorre a deformação da barra devido ao seu eixo longitudinal deixar de ser retilíneo, caracterizando com isso o fenômeno de flambagem.

Grande parte dos critérios de segurança em projetos de estruturas é baseada inicialmente em considerações de resistência e rigidez. Contudo, conforme BAZANT (1991), a importância do tema é evidente a partir da história de colapsos estruturais causados por negligência ou má interpretação dos aspectos do projeto de estabilidade. Os mais famosos deles são, talvez, o colapso da ponte do estreito de Tacoma em Washington, Estados Unidos, em 1940, devido à instabilidade aerodinâmica; e o colapso da ponte de Quebec, Canada, sobre o rio Saint Lawrence, em 1907. Entre numerosas outras catastrofes, tem-se os desastres de

1978 nos Estados Unidos: colapso da estrutura do centro cívico de Hartford em Massachusetts, e da cúpula reticulada do teatro Post College, New York.

TIMOSHENKO (1940) expõe que a carga crítica de flambagem, aquela a qual causa a perda de equilíbrio elástico da estrutura, não depende da resistência do material, mas apenas das dimensões da estrutura e do módulo de elasticidade do material.

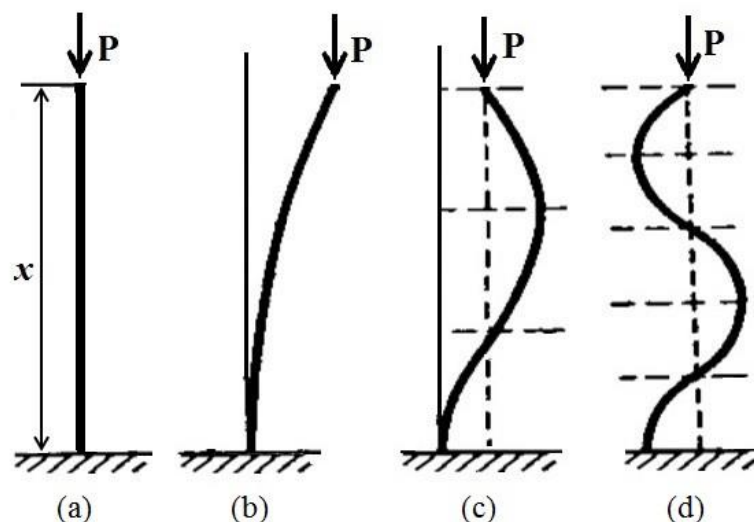


Figura 2.6 – Perda de estabilidade por flambagem. Adaptado de TIMOSHENKO, 1940, p.185.

Considerando uma barra prismática (seção transversal não variando ao longo do comprimento) com uma das extremidades engastada e a outra livre submetida a uma carga de compressão, P , na extremidade livre, Figura 2.6. TIMOSHENKO (1940) explica que, se a carga P é inferior ao valor crítico de flambagem da barra, a mesma permanece reta em equilíbrio elástico estável, sofrendo apenas com os efeitos da compressão axial, Figura 2.6(a).

Ao aumentar gradualmente P chega-se a uma condição em que a forma linear de equilíbrio torna-se instável e ocorre uma deflexão do eixo longitudinal, Figura 2.6 (b), que não desaparece com a causa que o produz. A carga crítica é então definida como a carga axial que causou tal efeito.

Caso não haja o colapso da estrutura no primeiro estágio da flambagem, Figura 2.6 (b), com o aumento da carga a barra assume novas configurações, Figura 2.6 (c) e (d), que são os chamados modos de flambagem. A cada modo de flambagem é definida uma nova carga crítica o qual o provocou.

A análise matemática da instabilidade (perda de estabilidade) requer que o equilíbrio seja feito na posição deformada. Isto implica que há um deslocamento na direção da aplicação da força axial entre a configuração indeformada e a deformada, devido ao giro da barra, vide Figura 2.6, gerando trabalho. Assim, o trabalho das cargas externas, W , é definido como o produto da força pelo deslocamento. Seja uma barra de dimensão longitudinal dx submetida a uma força axial de compressão P , Figura 2.7.

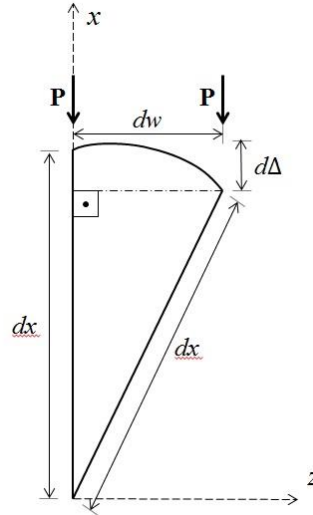


Figura 2.7 – Comprimento infinitesimal da barra.

Segundo PASSOS (2014), o trabalho devido à carga axial de flambagem P (W_P) será dado em função do deslocamento axial elementar $d\Delta$ (na direção do eixo x). A deformação axial da coluna devida à carga P será desprezada.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$dx^2 = (dx - d\Delta)^2 + d\omega^2 \quad (2.88)$$

Desenvolvendo a Equação (2.88):

$$2 \cdot dx \cdot d\Delta = d\Delta^2 + d\omega^2 \quad (2.89)$$

Assumindo-se que a barra está em regime de pequenos deslocamentos e pequenas rotações, implica que $d\Delta$ na Equação (2.89) é de uma ordem de grandeza muito inferior das demais, termo $d\Delta^2$ será desprezado. Desta forma, tem-se:

$$2 \cdot dx \cdot d\Delta = d\omega^2 \quad (2.90)$$

Reorganizando a Equação (2.90):

$$d\Delta = \frac{d\omega^2}{2 \cdot dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \cdot dx \quad (2.91)$$

O deslocamento vertical Δ na extremidade livre da viga pode ser obtido integrando ao longo do comprimento da barra, L .

$$\int_0^L d\Delta = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 dx \quad (2.92)$$

Da Equação (2.92), tem-se que o deslocamento Δ é dado por:

$$\Delta = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 dx \quad (2.93)$$

E, portanto, o trabalho devido à carga P será dado por:

$$W_P = \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 dx \quad (2.94)$$

Aplicando a primeira variação do trabalho da carga axial no problema da estabilidade e realizando integrações por parte, resulta em:

$$\delta W_P = \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 dx \right\} = - \int_0^L P \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \delta \omega dx \quad (2.95)$$

Convém notar que a Equação (2.95) foi deduzida para pequenos deslocamentos e rotações, implicando no estudo linear da flambagem. Se o interesse é o comportamento de pós-flambagem uma análise não-linear geométrica deve ser feita. Isto, no entanto, está fora do escopo desta dissertação que se limita ao estudo do comportamento linear.

2.5. Equações de Equilíbrio

O lema dos princípios variacionais estabelece que as equações de Euler-Lagrange podem ser obtidas pela diferença do variacional da energia de deformação pelo variacional do trabalho das forças externas:

$$\delta \pi_p - \delta W = 0 \quad (2.96)$$

As equações de Euler-Lagrange correspondem às equações governantes do problema em questão.

2.5.1. Euler-Bernoulli

Assim, as equações de equilíbrio do problema de estabilidade da viga de Euler-Bernoulli sobre base elástica de Pasternak podem ser obtidas substituindo os termos da

equação de Euler-Lagrange, (2.96). A equação do variacional da energia potencial de deformação, $\delta\pi_p$, é dada na Equação (2.26) e a equação do variacional de energia devido ao carregamento transversal distribuído, $q(x)$, foi obtida na Equação (2.86), na Equação (2.95) têm-se o variacional devido a carga axial do problema de estabilidade, e, por último, na Equação (2.85), referente à energia de deformação devido a base elástica.

No primeiro caso, têm-se as equações de equilíbrio em deslocamentos:

$$\int_L D_{xx} \frac{d^4 \omega(x)}{dx^4} \delta \omega(x) dx - \int_L q(x) \cdot \delta \omega(x) dx + \int_0^L P \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \delta \omega + \int_0^L K_1 \cdot \omega(x) \cdot \delta \omega(x) dx - \int_0^L K_2 \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \delta \omega(x) dx = 0 \quad (2.97)$$

Já que a variação de $\omega(x)$ é arbitrária, a nulidade de (2.97) será sempre verificada se:

$$D_{xx} \frac{d^4 \omega(x)}{dx^4} + (P - K_2) \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} + K_1 \cdot \omega(x) - q(x) = 0 \quad (2.98)$$

No segundo caso, escrevendo a equação governante em função dos momentos fletores, de acordo com a Equação (2.27):

$$- \int_L \frac{d^2 M(x)}{dx^2} \delta \omega(x) dx - \int_L q(x) \delta \omega(x) dx = 0 \quad (2.99)$$

Resultando em:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (2.100)$$

2.5.2. Timoshenko

As equações de equilíbrio para estabilidade de barras de Timoshenko sobre base elástica de Pasternak podem ser obtidas substituindo os termos da equação de Euler-Lagrange, (2.96). A equação do variacional da energia potencial de deformação, $\delta\pi_p$, é dada na Equação (2.44) e a equação do variacional de energia devido aos esforços externos foi obtida nas Equações (2.87), devido aos carregamentos distribuídos $q(x)$ e $m(x)$; na Equação (2.95), devido a carga axial do problema de estabilidade; e por último na Equação (2.85), referente à energia de deformação devido a base elástica.

$$\begin{aligned} & - \int_L D_{xx} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \delta \phi(x) dx + \int_L k \cdot A_{xz} \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] \delta \phi(x) dx - \int_L k \cdot A_{xz} \left[\frac{d\phi(x)}{dx} + \right. \\ & \left. \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right] \delta \omega(x) \cdot dx - \int_L q(x) \cdot \delta \omega(x) dx - \int_L m(x) \cdot \delta \phi(x) dx + \int_0^L K_1 \cdot \omega(x) \cdot \delta \omega(x) dx - \\ & \int_0^L K_2 \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \delta \omega(x) dx + \int_0^L P \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \delta \omega = 0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

Como as variações $\delta\phi$ e $\delta\omega$ são arbitrárias, a nulidade em (2.101) fica condicionada a:

$$-D_{xx} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + k.A_{xz} \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] - m(x) = 0 \quad (2.102)$$

$$-k.A_{xz} \left[\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \right] + K_1 \cdot \omega(x) + (P - K_2) \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} - q(x) = 0 \quad (2.103)$$

Em termos de esforços, (2.37) e (2.38), as equações de equilíbrio ficam:

$$\int_L \left[-\frac{dM_x}{dx} + Q_x - m(x) \right] \delta\phi(x) dx + \int_L \left[-\frac{dQ_x}{dx} - P \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} - K_1 \cdot \omega(x) + K_2 \cdot \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} - q(x) \right] \delta\omega(x) dx = 0 \quad (2.104)$$

Como as variações $\delta\phi$ e $\delta\omega$ são arbitrárias, isto implica em:

$$-\frac{dM_x}{dx} + Q_x - m(x) = 0 \quad (2.105)$$

$$-\frac{dQ_x}{dx} + K_1 \cdot \omega(x) + (P - K_2) \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} - q(x) = 0 \quad (2.106)$$

2.5.3. Bickford-Reddy

As equações de equilíbrio para estabilidade de barras de Bickford-Reddy sobre base elástica de Pasternak podem ser obtidas substituindo os termos da equação de Euler-Lagrange, (2.96). A equação do variacional da energia potencial de deformação, $\delta\pi_p$, é dada na Equação (2.75) e a equação do variacional de energia devido aos esforços externos foi obtida nas equações: (2.87) os devidos aos carregamentos distribuídos $q(x)$ e $m(x)$; na Equação (2.95) devido a carga axial do problema de estabilidade; e, por último, na Equação (2.85), referente à energia de deformação devido a base elástica. Em função dos esforços:

$$\begin{aligned} & \int_L \left[-\frac{d\hat{M}_x}{dx} + \hat{Q}_x \right] \delta\phi(x) + \int_L \left[-\alpha \cdot \frac{d^2 P_x}{dx^2} - \frac{d\hat{Q}_x}{dx} \right] \delta\omega(x) dx - \int_L q(x) \cdot \delta\omega(x) dx - \\ & \int_L m(x) \cdot \delta\phi(x) dx + \int_0^L P \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \delta\omega(x) dx + \int_0^L K_1 \cdot \omega(x) \delta\omega(x) dx - \\ & \int_0^L K_2 \cdot \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \delta\omega(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (2.107)$$

Como as variações $\delta\phi$ e $\delta\omega$ são arbitrárias, a nulidade em (2.107) fica condicionada a:

$$-\frac{d\hat{M}_x}{dx} + \hat{Q}_x - m(x) = 0 \quad (2.108)$$

$$-\alpha \cdot \frac{d^2 P_x}{dx^2} - \frac{d\hat{Q}_x}{dx} + K_1 \cdot \omega(x) + (P - K_2) \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} - q(x) = 0 \quad (2.109)$$

Se ainda for definida uma força cortante equivalente como

$$V_x = \alpha \frac{dP_x}{dx} + \hat{Q}_x + (P - K_2) \frac{d\omega}{dx} \quad (2.110)$$

Então as equações de equilíbrio, (2.108) e (2.109), podem ser sintetizadas como:

$$-\frac{d\hat{M}_x}{dx} + V_x - (P - K_2) \frac{d\omega}{dx} - \alpha \frac{dP_x}{dx} = m \quad (2.111)$$

$$-\frac{dV_x}{dx} = q(x) - K_1 \cdot \omega(x) \quad (2.112)$$

Em termos dos deslocamentos, substituem-se as Equações (2.67) e (2.71) em (2.111) e (2.112).

$$-\bar{D}_x \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] + \alpha \hat{F}_x \frac{d^3 \omega(x)}{dx^3} - m(x) = 0 \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} & -\bar{A}_{xz} \left[\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right] + \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^4 \omega(x)}{dx^4} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3 \phi(x)}{dx^3} + K_1 \cdot \omega(x) + (P - K_2) \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} - q(x) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.114)$$

Sendo,

$$\bar{A}_{xz} = \hat{A}_{xz} - 3 \cdot \alpha \cdot \hat{D}_{xz} \quad (2.115)$$

$$\bar{D}_x = \hat{D}_x - \alpha \cdot \hat{F}_x \quad (2.116)$$

Assim, na análise de viga por Bickford-Reddy os campos de interesse são:

$$a) \text{ Deslocamentos } \left\{ \begin{array}{c} \omega \\ \frac{d\omega}{dx} \\ \phi \end{array} \right\} \quad (2.117)$$

$$b) \text{ Esforços } \left\{ \begin{array}{c} V_x = \alpha \frac{dP_x}{dx} + \hat{Q}_x + (P - K_2) \frac{d\omega}{dx} \\ \alpha \cdot P_x \\ \hat{M}_x \end{array} \right\} \quad (2.118)$$

3. ANÁLISE DE VIGA DE BICKFORD-REDDY PELO MEC

Depois de discutida a fundamentação do modelo de viga de Bickford-Reddy no Capítulo 2, resultando na obtenção das equações de equilíbrio, parte-se agora para o estabelecimento do Método dos Elementos de Contorno para o problema de barras sob flexão no modelo em questão.

3.1. Equação governante do problema real

A equação governante do problema real da estabilidade de barra de Bickford – Reddy apoiada em base elástica de Pasternak foi discutida no Capítulo 2. No caso da flexão, à carga axial P , e aos coeficientes K_1 e K_2 devem ser atribuídos valores nulos, de forma que as Equações (2.113) e (2.114) possam ser reescritas na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ q \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

3.2. Problema fundamental

O problema fundamental está associado a uma barra de domínio infinito, submetida a fontes em força, q , e em momento, m , atuando no ponto fonte, $\hat{x}$.

De acordo ZWILLINGER (2003), o delta de Dirac a ser utilizado na formulação do problema tem a seguinte definição e propriedades:

$$\delta(x, \hat{x}) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq \hat{x} \\ \infty, & \text{se } x = \hat{x} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, \hat{x}) d\Omega = 1 \quad (3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot \delta(x, \hat{x}) d\Omega = u(x) \quad (3.4)$$

Onde: x é o ponto de leitura do efeito (ponto-campo), e $\hat{x}$ é o ponto de aplicação da fonte (ponto-fonte). E Ω representa o domínio do problema.

Analogamente ao problema real, Equação (3.1), a equação governante do problema fundamental, quando a fonte estiver aplicada em força, $q^{*q}(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $m^{*q} = 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{*q} \\ q^{*q} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Da mesma forma, quando o problema fundamental estiver solicitado pela fonte em momento tem-se $m^{*m}(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $q^{*m} = 0$, sua equação governante fica:

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) \\ \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{*m} \\ q^{*m} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

A título de simplificação, podem-se expressar as Equações (3.5) e (3.6) como:

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A Equação (3.7) pode ser escrita da forma:

$$[B] \cdot [G] = [f] \quad (3.8)$$

Na qual se define a matriz de influência, $[B]$; a matriz dos deslocamentos, $[G]$; e a matriz das fontes $[f]$, sendo:

$$[B] = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$[f] = \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = \delta(x, \hat{x})[I] \quad (3.11)$$

A equação do problema fundamental da viga de Bickford – Reddy sob flexão, Equação (3.7), constitui-se em um sistema acoplado de variáveis o qual neste trabalho será utilizado o método de HÖRMANDER (1963) para fazer seu desacoplamento.

Pelo método de Hörmander, a matriz $[G]$ é escrita em função do escalar $\Psi(x, \hat{x})$, como segue:

$$[G] = [B^{cof}]^T \cdot \Psi(x, \hat{x}) \quad (3.12)$$

Além disso, substituindo a matriz dos deslocamentos, $[G]$, da Equação (3.12) na (3.8):

$$[B] \cdot [B^{cof}]^T \cdot \Psi(x, \hat{x}) = [f] \quad (3.13)$$

Tem-se ainda a definição:

$$[B^{cof}]^T = [B^{-1}] \cdot \det B \quad (3.14)$$

A Equação (3.13) reduz-se a:

$$[B] \cdot [B^{-1}] \cdot \det B \cdot \Psi(x, \hat{x}) = [f] \quad (3.15)$$

Sendo,

$$[f] = \delta(x, \hat{x})[I] \quad (3.16)$$

Reescrevendo (3.15):

$$[I] \cdot \det B \cdot \Psi(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x}) \cdot [I] \quad (3.17)$$

Que após simplificações fica:

$$\det B \cdot \Psi(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x}) \quad (3.18)$$

Explicitando a Equação (3.12):

$$\begin{bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \varnothing^{*m}(x, \hat{x}) & \varnothing^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3}{d^3x} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d}{dx} & \bar{D}_x \cdot \frac{d^2}{dx^2} - \bar{A}_{xz} \\ -H_x \cdot \alpha^2 \frac{d^4}{d^4x} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2}{d^2x} & \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d}{dx} + \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3}{d^3x} \end{bmatrix} \cdot \Psi \quad (3.19)$$

Assim, os valores finais das soluções fundamentais da rotação e deslocamento da barra podem ser obtidos aplicando o operador diferencial na função Ψ conforme mostrado na Equação (3.19):

$$\omega^{*q} = \bar{D}_x \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \bar{A}_{xz} \cdot \Psi \quad (3.20)$$

$$\omega^{*m} = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3 \Psi}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d \Psi}{dx} \quad (3.21)$$

$$\varnothing^{*q} = \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d \Psi}{dx} + \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3 \Psi}{dx^3} \quad (3.22)$$

$$\varnothing^{*m} = -H_x \cdot \alpha^2 \frac{d^4 \Psi}{dx^4} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \quad (3.23)$$

As soluções fundamentais em esforços são obtidas similarmente aos esforços reais, Equação (2.116). Reescrevendo os esforços, Equações (2.110), (2.55) e (2.67), atribuindo valor nulo a carga axial P e aos coeficientes K_1 e K_2 :

$$V_x(x) = \alpha \frac{dP_x}{dx} + \hat{Q}_x \quad (3.24)$$

$$\alpha \cdot P_x(x) = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d\varnothing(x)}{dx} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \quad (3.25)$$

$$\hat{M}_x(x) = \bar{D}_x \frac{d\varnothing(x)}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \quad (3.26)$$

Substituindo $\hat{Q}_x$ (Equação 2.71) e P_x (Equação 2.55) em (3.24):

$$V_x(x) = \left[\alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^3 \omega(x)}{dx^3} \right] + \bar{A}_{xz} \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] \quad (3.27)$$

Analisando as Equações (3.25), (3.26) e (3.27) em relação à fonte em força q^* , os esforços fundamentais ficam:

$$V_x^{*q}(x, \hat{x}) = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \phi^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^3 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \left[\phi^{*q}(x, \hat{x}) + \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx} \right] \quad (3.28)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*q}(x, \hat{x}) = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d\phi^{*q}(x, \hat{x})}{dx} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^2 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (3.29)$$

$$\hat{M}_x^{*q}(x, \hat{x}) = \bar{D}_x \frac{d\phi^{*q}(x, \hat{x})}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (3.30)$$

Ou ainda, substituindo as Equações (3.20) e (3.22) em (3.28), (3.29) e (3.30), os esforços ficam escritos em termos das derivadas da função escalar:

$$V_x^{*q}(x, \hat{x}) = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^5 \psi}{dx^5} + \left[2 \cdot \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x \right] \frac{d^3 \psi}{dx^3} \quad (3.31)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*q}(x, \hat{x}) = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^4 \psi}{dx^4} + \left[\alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x \right] \frac{d^2 \psi}{dx^2} \quad (3.32)$$

$$\hat{M}_x^{*q}(x, \hat{x}) = \left[\bar{D}_x \cdot \bar{A}_{xz} + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x \right] \frac{d^2 \psi}{dx^2} \quad (3.33)$$

Sendo,

$\bar{A}_{xz}$ e $\bar{D}_x$ expressos nas Equações (2.115) e (2.116), respectivamente,

$\hat{D}_x$, $\hat{F}_x$, $\hat{A}_{xz}$ expressos nas Equações (2.58), (2.59) e (2.60), respectivamente,

D_x , F_x e H_x expressos na Equação (2.62), e

A_{xz} e F_{xz} expressos na Equação (2.63).

Semelhante, para a análise das Equações (3.24), (3.25) e (3.26) em relação à aplicação da fonte em momento:

$$V_x^{*m}(x, \hat{x}) = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \phi^{*m}(x, \hat{x})}{dx^2} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^3 \omega^{*m}(x, \hat{x})}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \left[\phi^{*m}(x, \hat{x}) + \frac{d\omega^{*m}(x, \hat{x})}{dx} \right] \quad (3.34)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*m}(x, \hat{x}) = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d\phi^{*m}(x, \hat{x})}{dx} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^2 \omega^{*m}(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (3.35)$$

$$\hat{M}_x^{*m}(x, \hat{x}) = \bar{D}_x \frac{d\phi^{*m}(x, \hat{x})}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega^{*m}(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (3.36)$$

Ou ainda, substituindo os esforços obtidos nas Equações (3.21) e (3.23), seus valores ficam apenas em termos das derivadas de Ψ :

$$V_x^{*m} = 0 \quad (3.37)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*m} = [\bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x] \frac{d\psi^3}{d^3x} \quad (3.38)$$

$$\hat{M}_x^{*m} = \left[-\alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x + \alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 \right] \frac{d\psi^5}{d^5x} + [\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x] \frac{d^3\psi}{dx^3} \quad (3.39)$$

Em que,

$\bar{A}_{xz}$ e $\bar{D}_x$ são expressos nas Equações (2.3115) e (2.116), respectivamente,

$\hat{D}_x$, $\hat{F}_x$, $\hat{A}_{xz}$ são expressos nas Equações (2.58), (2.59) e (2.60), respectivamente

D_x , F_x e H_x são expressos na Equação 2.62 e

A_{xz} e F_{xz} são expressos na Equação 2.63.

Para obter a equação da função escalar $\Psi(x, \hat{x})$, calcula-se o determinante da matriz dos operadores, $[B]$, e substitui-se na Equação (3.18), resultando na seguinte equação diferencial de sexta ordem:

$$a \cdot \frac{d^6\psi}{dx^6} + b_1 \cdot \frac{d^4\psi}{dx^4} = \delta(x, \hat{x}) \quad (3.40)$$

Sendo:

$$a = \bar{D}_x \cdot H_x \cdot \alpha^2 - \hat{F}_x^2 \cdot \alpha^2 \quad (3.41)$$

$$b_1 = -2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x \cdot \alpha - \bar{A}_{xz} \cdot H_x \cdot \alpha^2 - \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x \quad (3.42)$$

A equação diferencial (3.40) é resolvida a partir de sua forma homogênea:

$$\frac{d^4\psi}{dx^4} \left[a \frac{d^2\psi}{dx^2} + b_1 \right] = 0 \quad (3.43)$$

Fazendo $\frac{d^2\psi}{dx^2} = y$, a solução proposta dependerá das raízes y , y_1 e y_2 dadas por:

$$y = \sqrt{\frac{-b_1}{a}} \quad (3.44)$$

$$y_1 = y_2 = 0 \quad (3.45)$$

Após uma análise de casos para diferentes geometrias da seção e comprimento da viga concluiu-se que $y > 0$. Assim, a solução proposta nessa pesquisa para o problema da barra de Bickford-Reddy associada à flexão, é dada por:

$$\Psi = C_1 \cdot r + C_2 \cdot r^3 + C_3 \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r} \quad (3.46)$$

As constantes da Equação (3.46) são obtidas a partir das condições de derivação.

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Psi}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{d\Psi}{dr} \cdot \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (3.47)$$

Onde,

$$\frac{d\psi}{dr} = [C_1 + 3.C_2.r^2 - C_3.\sqrt{y}.e^{-\sqrt{y}.r}] \quad (3.48)$$

A derivada segunda é dada por:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dr^2} \frac{dr^2}{dx^2} = [6.C_2.r + C_3.y.e^{-\sqrt{y}.r}] . \text{sgn}(x, \hat{x}) . \text{sgn}(x, \hat{x}) + [C_1 + 3.C_2.r^2 - C_3.\sqrt{y}.e^{-\sqrt{y}.r}] . 2. \delta(x, \hat{x}) \quad (3.49)$$

Analisando a segunda derivada, Equação (3.49), quando $x = \hat{x}$, $r = 0$ e $\delta(x, \hat{x}) \rightarrow \infty$. Para manter a Equação (3.49) com valor finito, assume-se que:

$$C_1 + 3.C_2.r^2 - C_3.\sqrt{y}.e^{-\sqrt{y}.r} = 0 \quad (3.50)$$

Analisando a Equação (3.50) para $x = \hat{x}$ e $x = x$, resulta na primeira das relações do sistema para achar as constantes:

$$C_1 - C_3.\sqrt{y} = 0 \quad (3.51)$$

A derivada segunda assume então a seguinte forma:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dr^2} = 6.C_2.r + C_3.y.e^{-\sqrt{y}.r} \quad (3.52)$$

Fazendo a terceira derivada da função:

$$\frac{d^3\psi}{dx^3} = \frac{d^3\psi}{dr^3} \frac{dr^3}{dx^3} = \frac{d^3\psi}{dr^3} . \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (3.53)$$

Onde,

$$\frac{d^3\psi}{dr^3} = [6.C_2 - C_3.y\sqrt{y}.e^{-\sqrt{y}.r}] \quad (3.54)$$

Assim como analisado na segunda derivada, a quarta derivada resulta em:

$$\frac{d^4\psi}{dx^4} = \frac{d^4\psi}{dr^4} = C_3.y^2.e^{-\sqrt{y}.r} \quad (3.55)$$

E a segunda relação do sistema para achar as constantes é dada por:

$$6.C_2 - C_3.y\sqrt{y} = 0 \quad (3.56)$$

Fazendo a quinta derivada:

$$\frac{d^5\psi}{dx^5} = \frac{d^5\psi}{dr^5} \frac{dr^5}{dx^5} = \frac{d^5\psi}{dr^5} . \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (3.57)$$

Onde,

$$\frac{d^5\psi}{dr^5} = [-C_3.y^2\sqrt{y}.e^{-\sqrt{y}.r}] \quad (3.58)$$

E, por último, a sexta derivada:

$$\frac{d^6\psi}{dx^6} = [C_3 \cdot y^3 \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r}] \operatorname{sgn}(x, \hat{x}) \cdot \operatorname{sgn}(x, \hat{x}) + [-C_3 \cdot y^2 \sqrt{y} \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r}] 2\delta(x, \hat{x}) \quad (3.59)$$

Ou,

$$\frac{d^6\psi}{dx^6} = \frac{d^6\psi}{dr^6} = [C_3 \cdot y^3 \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r}] + [-C_3 \cdot y^2 \sqrt{y} \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r}] 2\delta(x, \hat{x}) \quad (3.60)$$

Substituindo as derivadas na equação diferencial do problema, Equação (3.40):

$$a[C_5 \cdot y^3 \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r}] + a[-C_5 \cdot y^2 \sqrt{y} \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r}] 2 \cdot \delta(x, \hat{x}) + b_1[C_5 \cdot y^2 \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r}] = \delta(x, \hat{x}) \quad (3.61)$$

$$C_5 \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r} [a \cdot y^3 + b \cdot y^2] - 2 \cdot \delta(x, \hat{x}) \cdot a \cdot C_5 \cdot y^2 \sqrt{y} \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r} = \delta(x, \hat{x}) \quad (3.62)$$

Como $a \cdot y^3 + b \cdot y^2 = 0$, tem-se a ultima relação do sistema para achar as constantes:

$$-2 \cdot a \cdot C_5 \cdot y^2 \sqrt{y} \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r} = 1 \quad (3.63)$$

Reunindo as Equações (3.51), (3.56) e (3.63), o sistema das constantes fica:

$$\begin{cases} C_1 - C_3 \cdot \sqrt{y} = 0 \\ 6 \cdot C_2 - C_3 \cdot y \sqrt{y} = 0 \\ -2 \cdot a \cdot C_3 \cdot y^2 \sqrt{y} \cdot e^{-\sqrt{y} \cdot r} = 1 \end{cases} \quad (3.64)$$

A solução do sistema resulta nas seguintes constantes:

$$C_1 = -\frac{2}{2 \cdot a \cdot y^2} \quad (3.65)$$

$$C_2 = -\frac{1}{12 \cdot a \cdot y} \quad (3.66)$$

$$C_3 = -\frac{1}{2 \cdot a \cdot \sqrt{y^5}} \quad (3.67)$$

3.3. Equação integral

As equações diferenciais de equilíbrio do problema podem ser transformadas em equações integrais equivalentes, utilizando-se basicamente dois caminhos: no primeiro, o qual será abordado neste e nos capítulos 4 e 5, aplicam-se os fundamentos de energia, no caso, o Teorema da Reciprocidade de Betty, e no segundo tem-se o método dos resíduos ponderados, o qual será empregado no capítulo 6.

No problema real são mobilizadas tensões (σ_x, τ_{xz}) devido à aplicação de carregamentos externos. Seja um primeiro caso em que um carregamento em força “ q^* ” seja

aplicado no problema fundamental, isso mobilizará tensões e deformações (σ_x^{*q} , τ_{xz}^{*q} , ε_x^{*q} , γ_{xz}^{*q}). Com isso, aplicando o teorema da reciprocidade uma relação entre o problema real e o fundamental pode ser escrita como:

$$\int_V (\sigma_x^{*q} \cdot \varepsilon_x) dV + \int_V (\tau_{xz}^{*q} \cdot \gamma_{xz}) dV = \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x^{*q}) dV + \int_V (\tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}^{*q}) dV \quad (3.68)$$

Substituindo-se as deformações, Equações (2.49) e (2.50), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_L \left\{ \frac{d\phi(x)}{dx} \left[\int_A (\sigma_x^{*q} \cdot z) dA \right] - \alpha \cdot \left(\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \right) \left[\int_A (\sigma_x^{*q} \cdot z^3) dA \right] + \left(\phi + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \left[\int_A (\tau_{xz}^{*q}) dA \right] - \right. \\ \left. \beta \left(\phi + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \left[\int_A (\tau_{xz}^{*q} \cdot z^2) dA \right] \right\} dx = \int_L \left\{ \frac{d\phi^{*q}}{dx} \left[\int_A (\sigma_x \cdot z) dA \right] - \alpha \cdot \left(\frac{d\phi^{*q}}{dx} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{d^2\omega^{*q}}{dx^2} \right) \left[\int_A (\sigma_x \cdot z^3) dA \right] + \left(\phi + \frac{d\omega^{*q}}{dx} \right) \left[\int_A (\tau_{xz}) dA \right] - \beta \left(\phi^{*q} + \frac{d\omega^{*q}}{dx} \right) \left[\int_A (\tau_{xz} \cdot z^2) dA \right] \right\} dx \end{aligned} \quad (3.69)$$

Substituindo-se agora os esforços, Equações (2.54), (2.55), (2.56) e (2.57), em (3.69) resulta em:

$$\begin{aligned} \int_L \left\{ \frac{d\phi(x)}{dx} \cdot M_x^{*q} - \alpha \cdot \left(\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \right) \cdot P_x^{*q} + \left(\phi + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \cdot Q_x^{*q} - 3 \cdot \alpha \left(\phi + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) R_x^{*q} \right\} dx = \\ \int_L \left\{ \frac{d\phi^{*q}(x)}{dx} \cdot M_x - \alpha \cdot \left(\frac{d\phi^{*q}(x)}{dx} + \frac{d^2\omega^{*q}(x)}{dx^2} \right) \cdot P_x + \left(\phi + \frac{d\omega^{*q}(x)}{dx} \right) Q_x - 3 \cdot \alpha \left(\phi^{*q} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{d\omega^{*q}(x)}{dx} \right) \cdot R_x \right\} dx \end{aligned} \quad (3.70)$$

Reorganizando e aplicando as relações expressas nas Equações (2.67) e (2.71) em (3.70), resulta em:

$$\begin{aligned} \int_L \left\{ \widehat{M}_x^{*q} \cdot \frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha \cdot P_x^{*q} \cdot \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} + \widehat{Q}_x^{*q} \cdot \left(\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \right\} dx = \int_L \left\{ \frac{d\phi^{*q}(x)}{dx} \cdot \widehat{M}_x - \alpha \cdot \frac{d^2\omega^{*q}(x)}{dx^2} \cdot P_x + \right. \\ \left. \left(\phi + \frac{d\omega^{*q}(x)}{dx} \right) \cdot \widehat{Q}_x \right\} dx \end{aligned} \quad (3.71)$$

Utilizando-se convenientes integrações por partes em (3.71):

$$\begin{aligned} [\widehat{M}_x^{*q} \cdot \phi(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x^{*q} \cdot \frac{d\omega(x)}{dx} \right]_0^L + \left[\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{dx} \cdot \omega(x) \right]_0^L + [\widehat{Q}_x^{*q} \cdot \omega(x)]_0^L + \int_L \left\{ \left(-\frac{d\widehat{M}_x^{*q}}{dx} + \right. \right. \\ \left. \left. \widehat{Q}_x^{*q} \right) \cdot \phi(x) + \left(-\alpha \cdot \frac{d^2P_x^{*q}}{dx^2} - \frac{d\widehat{Q}_x^{*q}}{dx} \right) \cdot \omega(x) \right\} dx = [\widehat{M}_x \cdot \phi^{*q}(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x \cdot \frac{d\omega^{*q}(x)}{dx} \right]_0^L + \\ \left[\alpha \cdot \frac{dP_x}{dx} \cdot \omega^{*q}(x) \right]_0^L + [\widehat{Q}_x \cdot \omega^{*q}(x)]_0^L + \int_L \left\{ \left(-\frac{d\widehat{M}_x}{dx} + \widehat{Q}_x \right) \cdot \phi^{*q}(x) + \right. \\ \left. \left(-\alpha \cdot \frac{d^2P_x}{dx^2} - \frac{d\widehat{Q}_x}{dx} \right) \cdot \omega^{*q}(x) \right\} dx \end{aligned} \quad (3.72)$$

Reescrevendo a força cortante, Equação (2.110), e as Equações (2.111) e (2.112) atribuindo valores nulos para a carga axial P e para os coeficientes K_1 e K_2 , resultando em:

$$V_x = \alpha \frac{dP_x}{dx} + \hat{Q}_x \quad (3.73)$$

$$\hat{Q}_x - \frac{d\hat{M}_x}{dx} = m \quad (3.74)$$

$$-\alpha \frac{d^2 P_x}{dx^2} - \frac{d\hat{Q}_x}{dx} = q \quad (3.75)$$

Substituindo as Equações (3.73), (3.74) e (3.75) em (3.72), a equação integral assume o seguinte formato:

$$\begin{aligned} & [\hat{M}_x^{*q} \cdot \phi(x)]_0^L + [V_x^{*q} \cdot \omega(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x^{*q} \cdot \frac{d\omega(x)}{dx} \right]_0^L + \int_L \{m^{*q} \cdot \phi(x) + q^{*q} \cdot \omega(x)\} dx = \\ & [\hat{M}_x \cdot \phi^{*q}(x)]_0^L + [V_x \cdot \omega^{*q}(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x \cdot \frac{d\omega^{*q}(x)}{dx} \right]_0^L + \int_L \{m \cdot \phi^{*q}(x) + q \cdot \omega^{*q}(x)\} dx \end{aligned} \quad (3.76)$$

Como a ativação da fonte é em força, implica que:

$$m^{*q} = 0 \quad (3.77)$$

$$q^{*q} = \delta(x, \hat{x}) \quad (3.78)$$

Pelas propriedades do delta de Dirac, Equação (3.4), a quarta parcela da Equação (3.72) fica:

$$\int_0^L [q^{*q} \omega(x)] dx = \int_0^L [\delta(x, \hat{x}) \omega(x)] dx = \omega(\hat{x}) \quad (3.79)$$

Aplicando as Equações (3.73) e (3.79) em (3.76) tem-se a equação integral para o deslocamento transversal ω :

$$\begin{aligned} \omega(\hat{x}) + [V_x^{*q} \omega]_0^L - \left[\alpha P_x^{*q} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x^{*q} \phi]_0^L = & [V_x \omega^{*q}]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*q}}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x \phi^{*q}]_0^L + \\ & \int_0^L (q \cdot \omega^{*q} + m \cdot \phi^{*q}) dx \end{aligned} \quad (3.80)$$

Se a fonte em momento for aplicada no problema fundamental, então gera um estado de tensão e deformação dado por $(\sigma_x^{*m}, \tau_{xz}^{*m}, \varepsilon_x^{*m}, \gamma_{xz}^{*m})$. O teorema da reciprocidade rege que as relações entre o problema real e o fundamental são dadas por:

$$\int_V (\sigma_x^{*m} \varepsilon_x) dV + \int_V (\tau_{xz}^{*m} \gamma_{xz}) dV = \int_V (\sigma_x \varepsilon_x^{*m}) dV + \int_V (\tau_{xz} \gamma_{xz}^{*m}) dV \quad (3.81)$$

Similar ao realizado para a fonte em força “ q ”, substituindo-se as deformações, Equações (2.49) e (2.50) em (3.81) tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_L \left\{ \frac{d\phi(x)}{dx} \left[\int_A (\sigma_x^{*m} \cdot z) dA \right] - \alpha \cdot \left(\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \right) \left[\int_A (\sigma_x^{*m} \cdot z^3) dA \right] + \left(\phi + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \left[\int_A (\tau_{xz}^{*m}) dA \right] - 3 \cdot \alpha \left(\phi + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \left[\int_A (\tau_{xz}^{*m} \cdot z^2) dA \right] \right\} dx = \int_L \left\{ \frac{d\phi^{*m}(x)}{dx} \left[\int_A (\sigma_x \cdot z) dA \right] - \alpha \cdot \left(\frac{d\phi^{*m}(x)}{dx} + \frac{d^2\omega^{*m}(x)}{dx^2} \right) \left[\int_A (\sigma_x \cdot z^3) dA \right] + \left(\phi + \frac{d\omega^{*m}(x)}{dx} \right) \left[\int_A (\tau_{xz}) dA \right] - 3 \cdot \alpha \left(\phi^{*m} + \frac{d\omega^{*m}(x)}{dx} \right) \left[\int_A (\tau_{xz} \cdot z^2) dA \right] \right\} dx \quad (3.82)
\end{aligned}$$

Substituindo-se agora os esforços, Equações (2.54), (2.55), (2.56) e (2.57), em (3.82) fica:

$$\begin{aligned}
& \int_L \left\{ \frac{d\phi(x)}{dx} \cdot M_x^{*m} - \alpha \cdot \left(\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \right) \cdot P_x^{*m} + \left(\phi + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \cdot Q_x^{*m} - 3 \cdot \alpha \left(\phi + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) R_x^{*m} \right\} dx = \\
& \int_L \left\{ \frac{d\phi^{*m}(x)}{dx} \cdot M_x - \alpha \cdot \left(\frac{d\phi^{*m}(x)}{dx} + \frac{d^2\omega^{*m}(x)}{dx^2} \right) \cdot P_x + \left(\phi + \frac{d\omega^{*m}(x)}{dx} \right) Q_x - 3 \cdot \alpha \left(\phi^{*m} + \frac{d\omega^{*m}(x)}{dx} \right) \cdot R_x \right\} dx \quad (3.83)
\end{aligned}$$

Reorganizando e aplicando a relação expressa na Equação (2.67) e (2.71), resulta em:

$$\begin{aligned}
& \int_L \left\{ \hat{M}_x^{*m} \cdot \frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha \cdot P_x^{*m} \cdot \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} + \hat{Q}_x^{*m} \cdot \left(\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \right\} dx = \int_L \left\{ \frac{d\phi^{*m}(x)}{dx} \cdot \hat{M}_x - \alpha \cdot \frac{d^2\omega^{*m}(x)}{dx^2} \cdot P_x + \left(\phi + \frac{d\omega^{*m}(x)}{dx} \right) \cdot \hat{Q}_x \right\} dx \quad (3.84)
\end{aligned}$$

Realizando convenientes integrações por partes em (3.84):

$$\begin{aligned}
& [\hat{M}_x^{*m} \cdot \phi(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x^{*m} \cdot \frac{d\omega(x)}{dx} \right]_0^L + \left[\alpha \cdot \frac{dP_x^{*m}}{dx} \cdot \omega(x) \right]_0^L + [\hat{Q}_x^{*m} \cdot \omega(x)]_0^L + \int_L \left\{ \left(-\frac{d\hat{M}_x^{*m}}{dx} + \hat{Q}_x^{*m} \right) \cdot \phi(x) + \left(-\alpha \cdot \frac{d^2P_x^{*m}}{dx^2} - \frac{d\hat{Q}_x^{*m}}{dx} \right) \cdot \omega(x) \right\} dx = [\hat{M}_x \cdot \phi^{*m}(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x \cdot \frac{d\omega^{*m}(x)}{dx} \right]_0^L + \left[\alpha \cdot \frac{dP_x}{dx} \cdot \omega^{*m}(x) \right]_0^L + [\hat{Q}_x \cdot \omega^{*m}(x)]_0^L + \int_L \left\{ \left(-\frac{d\hat{M}_x}{dx} + \hat{Q}_x \right) \cdot \phi^{*m}(x) + \left(-\alpha \cdot \frac{d^2P_x}{dx^2} - \frac{d\hat{Q}_x}{dx} \right) \cdot \omega^{*m}(x) \right\} dx \quad (3.85)
\end{aligned}$$

Substituindo a força cortante, Equação (3.73), e as expressões dos carregamentos de momento e de cortante, Equações (3.74) e (3.75), a equação integral assume o seguinte formato:

$$\begin{aligned}
& [\hat{M}_x^{*m} \cdot \phi(x)]_0^L + [V_x^{*m} \cdot \omega(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x^{*m} \cdot \frac{d\omega(x)}{dx} \right]_0^L + \int_L \{ m^{*m} \cdot \phi(x) + q^{*m} \cdot \omega(x) \} dx = \\
& [\hat{M}_x \cdot \phi^{*m}(x)]_0^L + [V_x \cdot \omega^{*m}(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x \cdot \frac{d\omega^{*m}(x)}{dx} \right]_0^L + \int_L \{ m \cdot \phi^{*m}(x) + q \cdot \omega^{*m}(x) \} dx \quad (3.86)
\end{aligned}$$

Processo análogo ao realizado quando a ponderação foi em “q” ocorre em relação à “m”. A integral da carga fica zero quando ponderar “q” e o delta de Dirac quando ponderar o próprio “m”. Pela propriedade do delta de Dirac, Equação (3.4), a quarta parcela de (3.86) fica:

$$\int_0^L [m^{*m} \cdot \emptyset(x)] dx = \int_0^L [\delta(x, \hat{x}) \cdot \emptyset(x)] dx = \emptyset(\hat{x}) \quad (3.87)$$

Então, a equação integral para a rotação $\emptyset$ resulta:

$$\emptyset(\hat{x}) + [V_x^{*m} \cdot \omega]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x^{*m} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x^{*m} \cdot \emptyset]_0^L = [V_x \cdot \omega^{*m}]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x \frac{d\omega^{*m}}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x \cdot \emptyset^{*m}]_0^L + \int_0^L (q \cdot \omega^{*m} + m \cdot \emptyset^{*m}) dx \quad (3.88)$$

Porém o problema estudado apresenta três incógnitas (V_x , $\alpha \cdot P_x$ e $\hat{M}_x$), logo será necessária mais uma equação para que o sistema seja de possível resolução. Assim, a terceira equação integral será a derivada em relação ao ponto fonte da equação em ω , que dará a inclinação da elástica ($d\omega/d\hat{x}$).

$$\frac{d\omega(\hat{x})}{d\hat{x}} + \left[\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}} \omega \right]_0^L - \left[\alpha \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}} \frac{d\omega}{d\hat{x}} \right]_0^L + \left[\frac{d\hat{M}_x^{*q}}{d\hat{x}} \emptyset \right]_0^L = \left[V_x \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\omega^{*q}}{dx} \right) \right]_0^L + \left[\hat{M}_x \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}} \right]_0^L + \int_0^L \left(q \cdot \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} + m \cdot \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}} \right) dx \quad (3.89)$$

Organizando as Equações (3.80), (3.88) e (3.84) na forma matricial, fica:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{c} \omega(\hat{x}) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(\hat{x}) \\ \emptyset(\hat{x}) \end{array} \right\} + \left\{ \left[\begin{array}{ccc} V_x^{*q}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(x, \hat{x}) & M_x^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{V_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot \frac{P_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{M_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ V_x^{*m}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(x, \hat{x}) & M_x^{*m}(x, \hat{x}) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \omega(x) \\ \frac{d\omega(x)}{dx} \\ \emptyset(x) \end{array} \right\} \right\}_0^L = \\ & \left\{ \left[\begin{array}{ccc} \omega^{*q}(x, \hat{x}) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{d}{d\hat{x}} \left[\frac{d\omega^{*q}}{dx}(x, \hat{x}) \right] & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ \omega_m^{*q}(x, \hat{x}) & \frac{d\omega^{*m}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} V_x(x) \\ -\alpha \cdot P_x(x) \\ \hat{M}_x(x) \end{array} \right\} \right\}_0^L + \\ & \int_0^L \left[\begin{array}{cc} \omega^{*q}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} q(x) \\ m(x) \end{array} \right\} \cdot dx \quad (3.90) \end{aligned}$$

3.4. Equação algébrica

O sistema algébrico do MEC possui apenas variáveis a serem determinadas no contorno. Assim, para sua obtenção faz-se necessário que a equação integral, Equação (3.90), tenha pontos de colocação no contorno da barra. Isto é $\hat{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(0 + \varepsilon)$ na extremidade esquerda da barra e na extremidade direita $\hat{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(L - \varepsilon)$, obtendo-se a expressão geral da representação algébrica:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \omega(0 + \varepsilon) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(0 + \varepsilon) \\ \emptyset(0 + \varepsilon) \\ \omega(L - \varepsilon) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(L - \varepsilon) \\ \omega(L - \varepsilon) \end{array} \right\} + \\
 & \left[\begin{array}{cccccc} -V_x^{*q}(0,0 + \varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*q}(0,0 + \varepsilon) & -M_x^{*q}(0,0 + \varepsilon) & V_x^{*q}(L,0 + \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L,0 + \varepsilon) & M_x^{*q}(L,0 + \varepsilon) \\ -\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & \alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & -\frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & \frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) \\ -V_x^{*m}(0,0 + \varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*m}(0,0 + \varepsilon) & -M_x^{*m}(0,0 + \varepsilon) & V_{xm}^{*q}(L,0 + \varepsilon) & -\alpha \cdot P_{xm}^{*q}(L,0 + \varepsilon) & M_x^{*m}(L,0 + \varepsilon) \\ -V_x^{*q}(0,L - \varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*q}(0,L - \varepsilon) & -M_x^{*q}(0,L - \varepsilon) & V_x^{*q}(L,L - \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L,L - \varepsilon) & M_x^{*q}(L,L - \varepsilon) \\ -\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & \alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & -\frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & \frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) \\ -V_x^{*m}(0,L - \varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*m}(0,L - \varepsilon) & -M_x^{*m}(0,L - \varepsilon) & V_x^{*q}(L,L - \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L,L - \varepsilon) & M_x^{*m}(L,L - \varepsilon) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \omega(0) \\ \frac{d\omega}{dx}(0) \\ \emptyset(0) \\ \omega(L) \\ \frac{d\omega}{dx}(L) \\ \emptyset(L) \end{array} \right\} = \\
 & \left[\begin{array}{cccccc} -\omega^{*q}(0,0 + \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0,0 + \varepsilon) & -\emptyset^{*q}(0,0 + \varepsilon) & \omega^{*q}(L,0 + \varepsilon) & -\frac{d\omega^{*q}}{dx}(L,0 + \varepsilon) & \emptyset^{*q}(L,0 + \varepsilon) \\ -\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (0,0 + \varepsilon) & -\frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) & -\frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (L,0 + \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) \\ -\omega^{*m}(0,0 + \varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0,0 + \varepsilon) & -\emptyset^{*m}(0,0 + \varepsilon) & \omega^{*m}(L,0 + \varepsilon) & -\frac{d\omega^{*m}}{dx}(L,0 + \varepsilon) & \emptyset^{*m}(L,0 + \varepsilon) \\ -\omega^{*q}(0,L - \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0,L - \varepsilon) & -\emptyset^{*q}(0,L - \varepsilon) & \omega^{*q}(L,L - \varepsilon) & -\frac{d\omega^{*q}}{dx}(L,L - \varepsilon) & \emptyset^{*q}(L,L - \varepsilon) \\ -\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (0,L - \varepsilon) & -\frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) & -\frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (L,L - \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) \\ -\omega^{*m}(0,L - \varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0,L - \varepsilon) & -\emptyset^{*m}(0,L - \varepsilon) & \omega^{*m}(L,L - \varepsilon) & -\frac{d\omega^{*m}}{dx}(L,L - \varepsilon) & \emptyset^{*m}(L,L - \varepsilon) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} V_x(0) \\ \alpha \cdot P_x(0) \\ M_x(0) \\ V_x(L) \\ \alpha \cdot P_x(L) \\ M_x(L) \end{array} \right\} + \\
 & \int_0^L \left[\begin{array}{cc} \omega^{*q}(0,0 + \varepsilon) & \emptyset^{*q}(L,0 + \varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) \\ \omega^{*m}(0,0 + \varepsilon) & \emptyset^{*m}(L,0 + \varepsilon) \\ \omega^{*q}(0,L - \varepsilon) & \emptyset^{*q}(L,L - \varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) \\ \omega^{*m}(0,L - \varepsilon) & \emptyset^{*m}(L,L - \varepsilon) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} q(x) \\ m(x) \end{array} \right\} \cdot dx \quad (3.91)
 \end{aligned}$$

Ou na forma compacta como:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{b\} \quad (3.92)$$

Onde $[H]$ e $[G]$ são matrizes de influência, $\{b\}$ o vetor de carga, e $\{u\}$ e $\{p\}$ são os vetores de deslocamentos e solicitações internas, dadas por:

$$\{u\} = \left[\omega_i \quad \frac{d\omega_i}{dx} \quad \emptyset_i \quad \omega_j \quad \frac{d\omega_j}{dx} \quad \emptyset_j \right]^T = \left[\omega(0) \quad \frac{d\omega(0)}{dx} \quad \emptyset(0) \quad \omega(L) \quad \frac{d\omega(L)}{dx} \quad \emptyset(L) \right]^T$$

$$\{p\} = [V_{x_i} \quad -\alpha \cdot P_{x_i} \quad M_{x_i} \quad V_{x_j} \quad -\alpha \cdot P_{x_j} \quad M_{x_j}]^T =$$

$$[V_x(0) \quad -\alpha \cdot P_x(0) \quad M_x(0) \quad V_x(L) \quad -\alpha \cdot P_x(L) \quad M_x(L)]^T$$

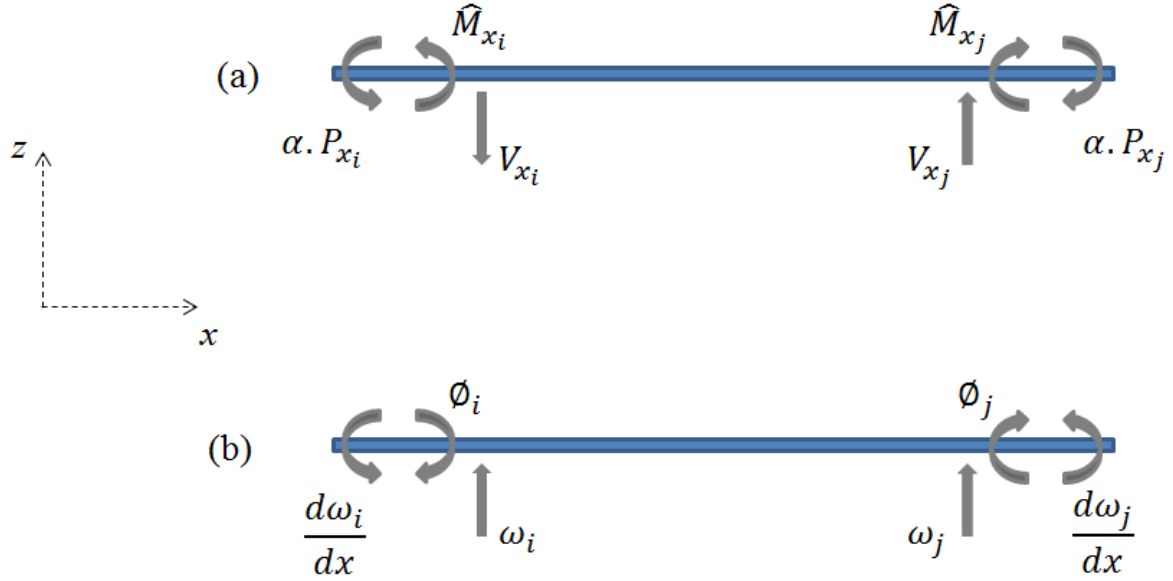


Figura 3.1 – (a) Esforços reais; (b) Deslocamentos reais.

Já a matriz de influencia $[H]$ da Equação (3.92) pode ser escrita da forma:

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Em que cada termo é uma submatriz de dimensão 3×3 definida no contorno:

$$H_{11} = \begin{bmatrix} -V_x^{*q}(0,0+\varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*q}(0,0+\varepsilon) & -M_x^{*q}(0,0+\varepsilon) \\ -\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & \alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & -\frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) \\ -V_x^{*m}(0,0+\varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*m}(0,0+\varepsilon) & -M_x^{*m}(0,0+\varepsilon) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -sa \cdot \eta_{11}(0) & \eta_{12}(0) & -\eta_{13}(0) \\ -\eta_{21}(0) & sa \cdot \eta_{22}(0) & -sa \cdot \eta_{23}(0) \\ -\eta_{31}(0) & sa \cdot \eta_{32}(0) & -sa \cdot \eta_{33}(0) \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$H_{12} = \begin{bmatrix} V_x^{*q}(L,0+\varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L,0+\varepsilon) & M_x^{*q}(L,0+\varepsilon) \\ \frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) \\ V_x^{*m}(L,0+\varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L,0+\varepsilon) & M_x^{*m}(L,0+\varepsilon) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} sd \cdot \eta_{11}(L) & -\eta_{12}(L) & \eta_{13}(L) \\ \eta_{21}(L) & -sd \cdot \eta_{22}(L) & sd \cdot \eta_{23}(L) \\ \eta_{31}(L) & -sd \cdot \eta_{32}(L) & sd \cdot \eta_{33}(L) \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

$$H_{21} = \begin{bmatrix} -V_x^{*q}(0, L - \varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*q}(0, L - \varepsilon) & -M_x^{*q}(0, L - \varepsilon) \\ -\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0, L - \varepsilon) & \alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0, L - \varepsilon) & -\frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0, L - \varepsilon) \\ -V_x^{*m}(0, L - \varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*m}(0, L - \varepsilon) & -M_x^{*m}(0, L - \varepsilon) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -sa \cdot \eta_{11}(L) & \eta_{12}(L) & -\eta_{13}(L) \\ -\eta_{21}(L) & sa \cdot \eta_{22}(L) & -sa \cdot \eta_{23}(L) \\ -\eta_{31}(L) & sa \cdot \eta_{32}(L) & -sa \cdot \eta_{33}(L) \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$H_{22} = \begin{bmatrix} V_x^{*q}(L, L - \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L, L - \varepsilon) & M_x^{*q}(L, L - \varepsilon) \\ \frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(L, L - \varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L, L - \varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L, L - \varepsilon) \\ V_x^{*m}(L, L - \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L, L - \varepsilon) & M_x^{*m}(L, L - \varepsilon) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} sd \cdot \eta_{11}(0) & -\eta_{12}(0) & \eta_{13}(0) \\ \eta_{21}(0) & -sd \cdot \eta_{22}(0) & sd \cdot \eta_{23}(0) \\ \eta_{31}(0) & -sd \cdot \eta_{32}(0) & sd \cdot \eta_{33}(0) \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Da mesma forma, pode ser escrita a matriz de influencia $[G]$ da Equação (3.92):

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Em que cada termo é uma submatriz de dimensão 3×3 definida no contorno:

$$[G_{11}] = \begin{bmatrix} -\omega^{*q}(0, 0 + \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0, 0 + \varepsilon) & -\emptyset^{*q}(0, 0 + \varepsilon) \\ -\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0, 0 + \varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (0, 0 + \varepsilon) & -\frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(0, 0 + \varepsilon) \\ -\omega^{*m}(0, 0 + \varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0, 0 + \varepsilon) & -\emptyset^{*m}(0, 0 + \varepsilon) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\beta_{11}(0) & sa \cdot \beta_{12}(0) & -sa \cdot \beta_{13}(0) \\ -sa \cdot \beta_{21}(0) & \beta_{22}(0) & -\beta_{23}(0) \\ -sa \cdot \beta_{31}(0) & \beta_{32}(0) & -\beta_{33}(0) \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$[G_{12}] = \begin{bmatrix} \omega^{*q}(L, 0 + \varepsilon) & -\frac{d\omega^{*q}}{dx}(L, 0 + \varepsilon) & \emptyset^{*q}(L, 0 + \varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L, 0 + \varepsilon) & -\frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (L, 0 + \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L, 0 + \varepsilon) \\ \omega^{*m}(L, 0 + \varepsilon) & -\frac{d\omega^{*m}}{dx}(L, 0 + \varepsilon) & \emptyset^{*m}(L, 0 + \varepsilon) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}(L) & -sd \cdot \beta_{12}(L) & sd \cdot \beta_{13}(L) \\ sd \cdot \beta_{21}(L) & -\beta_{22}(L) & \beta_{23}(L) \\ sd \cdot \beta_{31}(L) & -\beta_{32}(L) & \beta_{33}(L) \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$[G_{21}] = \begin{bmatrix} -\omega^{*q}(0, L - \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0, L - \varepsilon) & -\emptyset^{*q}(0, L - \varepsilon) \\ -\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0, L - \varepsilon) & \frac{d}{dx}\left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}\right)(0, L - \varepsilon) & -\frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(0, L - \varepsilon) \\ -\omega^{*m}(0, L - \varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0, L - \varepsilon) & -\emptyset^{*m}(0, L - \varepsilon) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\beta_{11}(L) & sa.\beta_{12}(L) & -sa.\beta_{13}(L) \\ -sa.\beta_{21}(L) & \beta_{22}(L) & -\beta_{23}(L) \\ -sa.\beta_{31}(L) & \beta_{32}(L) & -\beta_{33}(L) \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$[G_{22}] = \begin{bmatrix} \omega^{*q}(L, L - \varepsilon) & -\frac{d\omega^{*q}}{dx}(L, L - \varepsilon) & \emptyset^{*q}(L, L - \varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L, L - \varepsilon) & -\frac{d}{dx}\left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}\right)(L, L - \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L, L - \varepsilon) \\ \omega^{*m}(L, L - \varepsilon) & -\frac{d\omega^{*m}}{dx}(L, L - \varepsilon) & \emptyset^{*m}(L, L - \varepsilon) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}(0) & -sd.\beta_{12}(0) & sd.\beta_{13}(0) \\ sd.\beta_{21}(0) & -\beta_{22}(0) & \beta_{23}(0) \\ sd.\beta_{31}(0) & -\beta_{32}(0) & \beta_{33}(0) \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Onde sa e sd representam o valor da função sinal, $sgn(x, \hat{x})$:

$$sa = -1 \quad (3.103)$$

$$sd = 1 \quad (3.104)$$

Em que η são obtidos a partir dos esforços fundamentais apresentados nas Equações (3.29), (3.30), (3.31), (3.37), (3.38) e (3.39) e suas respectivas derivadas.

$$\eta_{11}(r) = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^5 \psi(r)}{dr^5} + \left[2 \cdot \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x \right] \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} \quad (3.105)$$

$$\eta_{21}(r) = - \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^6 \psi(r)}{dr^6} - \left[2 \cdot \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x \right] \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} \quad (3.106)$$

$$\eta_{31}(r) = 0 \quad (3.107)$$

$$\eta_{12}(r) = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} + \left[\alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x \right] \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \quad (3.108)$$

$$\eta_{22}(r) = - \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^5 \psi(r)}{dr^5} - \left[\alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x \right] \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} \quad (3.109)$$

$$\eta_{32}(r) = \left[\bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x \right] \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} \quad (3.110)$$

$$\eta_{13}(r) = \left[\bar{D}_x \cdot \bar{A}_{xz} + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x \right] \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \quad (3.111)$$

$$\eta_{23}(r) = - \left[\bar{D}_x \cdot \bar{A}_{xz} + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x \right] \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} \quad (3.112)$$

$$\eta_{33}(r) = \left[-\alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x + \alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 \right] \frac{d^5 \Psi(r)}{dr^5} + \left[\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x \right] \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} \quad (3.113)$$

E β são obtidos a partir dos deslocamentos fundamentais apresentados nas Equações (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21) e suas respectivas derivadas.

$$\beta_{11}(r) = \bar{D}_x \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} - \bar{A}_{xz} \cdot \Psi(r) \quad (3.114)$$

$$\beta_{21}(r) = -\bar{D}_x \cdot \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\Psi(r)}{dr} \quad (3.115)$$

$$\beta_{31}(r) = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\Psi(r)}{dr} \quad (3.116)$$

$$\beta_{12}(r) = \bar{D}_x \cdot \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \quad (3.117)$$

$$\beta_{22}(r) = -\bar{D}_x \cdot \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \quad (3.118)$$

$$\beta_{32}(r) = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \quad (3.119)$$

$$\beta_{13}(r) = \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\Psi(r)}{dr} + \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} \quad (3.120)$$

$$\beta_{23}(r) = -\bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} - \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} \quad (3.121)$$

$$\beta_{33}(r) = -H_x \cdot \alpha^2 \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \quad (3.122)$$

Sendo a função Ψ e suas derivadas superiores de interesse expressas nas Equações (3.46), (3.48), (3.52), (3.54), (3.55), (3.58) e (3.59) .

O vetor de carga para os carregamentos distribuídos, quando forem constantes em carga ou momentos ao longo do domínio da barra, as seguintes relações podem ser obtidas:

$$\{b\} = \int_0^L \begin{bmatrix} \omega^{*q}(x, 0 + \varepsilon) & \phi^{*q}(x, 0 + \varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, 0 + \varepsilon) & \frac{d\phi^{*q}}{d\hat{x}}(x, 0 + \varepsilon) \\ \omega^{*m}(x, 0 + \varepsilon) & \phi^{*m}(x, 0 + \varepsilon) \\ \omega^{*q}(x, L - \varepsilon) & \phi^{*q}(x, L - \varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, L - \varepsilon) & \frac{d\phi^{*q}}{d\hat{x}}(x, L - \varepsilon) \\ \omega^{*m}(x, L - \varepsilon) & \phi^{*m}(x, L - \varepsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q \\ m \end{Bmatrix} \cdot dx = [MC] \cdot \{f\} \quad (3.123)$$

E a matriz de carga, $[MC]$, pode ser escrita como:

$$[MC] = \begin{bmatrix} \theta_{11} & sd.\theta_{12} \\ sd.\theta_{21} & \theta_{22} \\ sd.\theta_{31} & \theta_{32} \\ \theta_{41} & sa.\theta_{42} \\ sa.\theta_{51} & \theta_{52} \\ sa.\theta_{61} & \theta_{62} \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Em que,

$$\theta_{11} = \bar{D}_x \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=x)}{dr^2} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \Psi(r=x) dx \right] = \bar{D}_x I \Psi 2d(0) - \bar{A}_{xz} I \Psi 0d(0) \quad (3.125)$$

$$\theta_{21} = -\bar{D}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=x)}{dr^3} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=x)}{dr} dx \right] = -\bar{D}_x I \Psi 3d(0) + \bar{A}_{xz} I \Psi 1d(0) \quad (3.126)$$

$$\theta_{31} = -\alpha. \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=x)}{dr^3} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=x)}{dr} dx \right] = -\alpha. \hat{F}_x I \Psi 3d(0) - \bar{A}_{xz} I \Psi 1d(0) \quad (3.127)$$

$$\theta_{41} = \bar{D}_x \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=L-x)}{dr^2} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \Psi(r=L-x) dx \right] = \bar{D}_x I \Psi 2a(L) - \bar{A}_{xz} I \Psi 0a(L) \quad (3.128)$$

$$\theta_{51} = -\bar{D}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=L-x)}{dr^3} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=L-x)}{dr} dx \right] = -\bar{D}_x I \Psi 3a(L) + \bar{A}_{xz} I \Psi 1a(L) \quad (3.129)$$

$$\theta_{61} = -\alpha. \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=L-x)}{dr^3} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=L-x)}{dr} dx \right] = -\alpha. \hat{F}_x I \Psi 3a(L) - \bar{A}_{xz} I \Psi 1a(L) \quad (3.130)$$

$$\theta_{12} = \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=x)}{dr} dx \right] + \alpha. \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=x)}{dr^3} dx \right] = \bar{A}_{xz} I \Psi 1d(0) + \alpha. \hat{F}_x I \Psi 3d(0) \quad (3.131)$$

$$\theta_{22} = -\bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=x)}{dr^2} dx \right] - \alpha. \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^4 \Psi(r=x)}{dr^4} dx \right] = -\bar{A}_{xz} I \Psi 2d(0) - \alpha. \hat{F}_x I \Psi 4d(0) \quad (3.132)$$

$$\theta_{32} = -\alpha^2. H_x \left[\int_0^L \frac{d^4 \Psi(r=x)}{dr^4} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=x)}{dr^2} dx \right] = -\alpha^2. H_x I \Psi 4d(0) + \bar{A}_{xz} I \Psi 2d(0) \quad (3.133)$$

$$\theta_{42} = \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=L-x)}{dr} dx \right] + \alpha. \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=L-x)}{dr^3} dx \right] = \bar{A}_{xz} I \Psi 1a(L) + \alpha. \hat{F}_x I \Psi 3a(L) \quad (3.134)$$

$$\theta_{52} = -\bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=L-x)}{dr^2} dx \right] - \alpha. \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^4 \Psi(r=L-x)}{dr^4} dx \right] = -\bar{A}_{xz} I \Psi 2a(L) - \alpha. \hat{F}_x I \Psi 4a(L) \quad (3.135)$$

$$\theta_{62} = -\alpha^2 \cdot H_x \left[\int_0^L \frac{d^4 \Psi(L-x)}{dx^4} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(L-x)}{dx^2} dx \right] = -\alpha^2 \cdot H_x I\Psi 4d(L) + \bar{A}_{xz} I\Psi 2d(L) \quad (3.136)$$

Onde o resultado das integrações é dado por:

Se $\hat{x} > x$

$$I\Psi 0a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \Psi(r = \hat{x} - x) dx = \frac{C_3}{\sqrt{y}} + \frac{C_1 \cdot \hat{x}^2}{2} + \frac{C_2 \cdot \hat{x}^4}{4} - \frac{C_3 \cdot e^{-\hat{x}\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} \quad (3.137)$$

$$I\Psi 1a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d\Psi(r=\hat{x}-x)}{dr} dx = e^{-\hat{x}\sqrt{y}} \cdot C_3 + \hat{x}^3 \cdot C_2 + \hat{x} \cdot C_1 - C_3 \quad (3.138)$$

$$I\Psi 2a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d^2 \Psi(r=\hat{x}-x)}{dr^2} dx = 3 \cdot \hat{x}^2 \cdot C_2 + \sqrt{y} \cdot C_3 - C_3 \cdot \sqrt{y} \cdot e^{-\hat{x}\sqrt{y}} \quad (3.139)$$

$$I\Psi 3a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d^3 \Psi(r=\hat{x}-x)}{dr^3} dx = 6 \cdot C_2 \cdot \hat{x} + C_3 \cdot y(e^{-\hat{x}\sqrt{y}} - 1) \quad (3.140)$$

$$I\Psi 4a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d^4 \Psi(r=\hat{x}-x)}{dr^4} dx = -C_3 \cdot \sqrt{y^3}(e^{-\hat{x}\sqrt{y}} - 1) \quad (3.141)$$

Se $\hat{x} < x$

$$I\Psi 0d(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \Psi(r = -\hat{x} + x) dx = \frac{C_3}{\sqrt{y}} + \frac{C_1 \cdot (L-\hat{x})^2}{2} + \frac{C_2 \cdot (L-\hat{x})^4}{4} - \frac{C_3 \cdot e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} \quad (3.142)$$

$$I\Psi 1d(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d\Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr} dx = e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y}} \cdot C_3 + (L-\hat{x})^3 \cdot C_2 + (L-\hat{x}) \cdot C_1 - C_3 \quad (3.143)$$

$$I\Psi 2d(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d^2 \Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr^2} dx = 3 \cdot (L-\hat{x})^2 \cdot C_2 + \sqrt{y} \cdot C_3 - C_3 \cdot \sqrt{y} \cdot e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y}} \quad (3.144)$$

$$I\Psi 3d(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d^3 \Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr^3} dx = 6 \cdot C_2 \cdot (L-\hat{x}) + C_3 \cdot y(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y}} - 1) \quad (3.145)$$

$$I\Psi 4d(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d^4 \Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr^4} dx = -C_3 \cdot \sqrt{y^3}(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y}} - 1) \quad (3.146)$$

3.5. Determinação dos campos no domínio

Os campos em deslocamentos no domínio da viga podem ser obtidos após a determinação das variáveis do contorno utilizando a Equação (3.90). Sendo “a” a coordenada em x do ponto de interesse (A), conforme Figura 3.2.

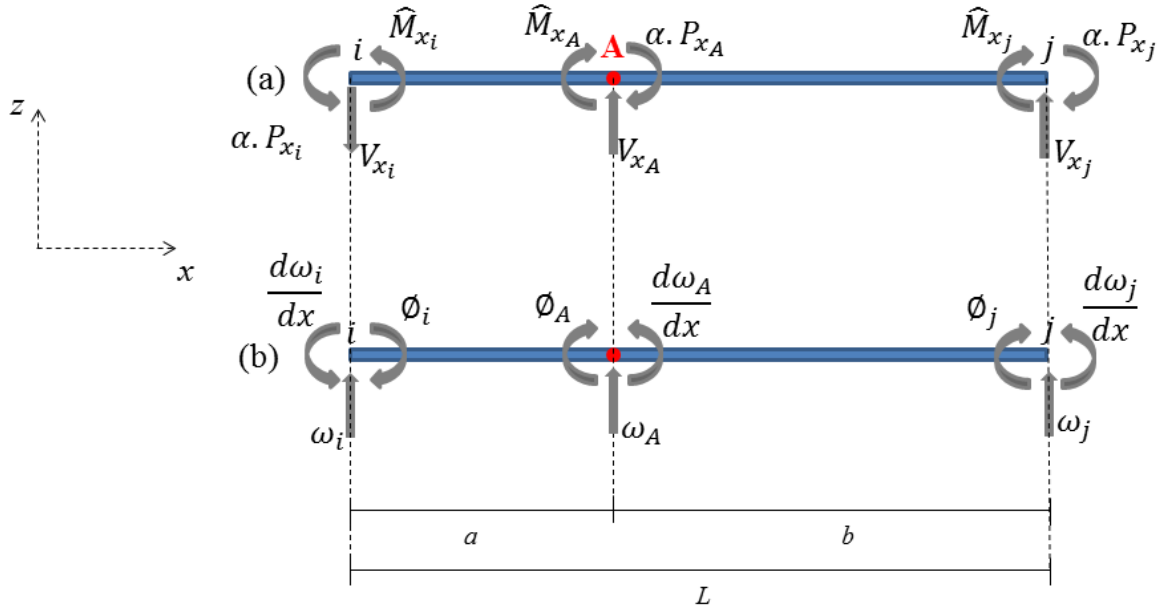


Figura 3.2 – Campos no contorno e no domínio.

Reescrevendo a equação integral (3.90) para os deslocamentos no ponto A no domínio, a representação algébrica fica:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \omega(a) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(a) \\ \phi(a) \end{array} \right\} + \\
 & \left[\begin{array}{cccccc} -V_x^{*q}(0, a) & \alpha \cdot P_x^{*q}(0, a) & -M_x^{*q}(0, a) & V_x^{*q}(L, a) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L, a) & M_x^{*q}(L, a) \\ -\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) & \alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) & -\frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) & \frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) \\ -V_x^{*m}(0, a) & \alpha \cdot P_x^{*m}(0, a) & -M_x^{*m}(0, a) & V_x^{*m}(L, a) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L, a) & M_x^{*m}(L, a) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \omega(0) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(0) \\ \phi(0) \\ \omega(L) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(L) \\ \phi(L) \end{array} \right\} = \\
 & \left[\begin{array}{cccccc} -\omega^{*q}(0, a) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) & -\phi^{*q}(0, a) & \omega^{*q}(L, a) & -\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) & \phi^{*q}(L, a) \\ -\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (0, a) & -\frac{d\phi^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) & -\frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (L, a) & \frac{d\phi^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) \\ -\omega^{*m}(0, a) & \frac{d\omega^{*m}}{d\hat{x}}(0, a) & -\phi^{*m}(0, a) & \omega^{*m}(L, a) & -\frac{d\omega^{*m}}{d\hat{x}}(L, a) & \phi^{*m}(L, a) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} V_x(0) \\ \alpha \cdot P_x(0) \\ M_x(0) \\ V_x(L) \\ \alpha \cdot P_x(L) \\ V_x(L) \end{array} \right\} + \\
 & \int_0^L \left[\begin{array}{cc} \omega^{*q}(x, a) & \phi^{*q}(x, a) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, a) & \frac{d\phi^{*q}}{d\hat{x}}(x, a) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} q(x) \\ m(x) \end{array} \right\} \cdot dx \quad (3.147)
 \end{aligned}$$

Já as matrizes de influência podem ser escritas da forma:

$$[H] = [H_{11} \quad H_{12}] \quad (3.148)$$

Em que cada termo é uma submatriz de dimensão 3×3 definida no ponto A de interesse:

$$H_{11} = \begin{bmatrix} -V_x^{*q}(0, a) & \alpha \cdot P_x^{*q}(0, a) & -M_x^{*q}(0, a) \\ -\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) & \alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) & -\frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) \\ -V_x^{*m}(0, a) & \alpha \cdot P_x^{*m}(0, a) & -M_x^{*m}(0, a) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -sd \cdot \eta_{11}(b) & \eta_{12}(b) & -\eta_{13}(b) \\ -\eta_{21}(b) & sd \cdot \eta_{22}(b) & -sd \cdot \eta_{23}(b) \\ -\eta_{31}(b) & sd \cdot \eta_{32}(b) & -sd \cdot \eta_{33}(b) \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

$$H_{12} = \begin{bmatrix} V_x^{*q}(L, a) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L, a) & M_x^{*q}(L, a) \\ \frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) \\ V_x^{*m}(L, a) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L, a) & M_x^{*m}(L, a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sa \cdot \eta_{11}(a) & -\eta_{12}(a) & \eta_{13}(a) \\ \eta_{21}(a) & -sa \cdot \eta_{22}(a) & sa \cdot \eta_{23}(a) \\ \eta_{31}(a) & -sa \cdot \eta_{32}(a) & sa \cdot \eta_{33}(a) \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

Da mesma forma pode ser escrita a matriz $[G]$:

$$[G] = [G_{11} \quad G_{12}] \quad (3.151)$$

Em que cada termo é uma submatriz de dimensão 3×3 definida no ponto A:

$$[G_{11}] = \begin{bmatrix} -\omega^{*q}(0, a) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0, a) & -\emptyset^{*q}(0, a) \\ -\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) & \frac{d}{dx}\left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}\right)(0, a) & -\frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(0, a) \\ -\omega^{*m}(0, a) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0, a) & -\emptyset^{*m}(0, a) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\beta_{11}(b) & sd \cdot \beta_{12}(b) & -sd \cdot \beta_{13}(b) \\ -sd \cdot \beta_{21}(b) & \beta_{22}(b) & -\beta_{23}(b) \\ -sd \cdot \beta_{31}(b) & \beta_{32}(b) & -\beta_{33}(b) \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

$$[G_{12}] = \begin{bmatrix} \omega^{*q}(L, a) & -\frac{d\omega^{*q}}{dx}(L, a) & \emptyset^{*q}(L, a) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) & -\frac{d}{dx}\left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}\right)(L, a) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L, a) \\ \omega^{*m}(L, a) & -\frac{d\omega^{*m}}{dx}(L, a) & \emptyset^{*m}(L, a) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}(a) & -sa \cdot \beta_{12}(a) & sa \cdot \beta_{13}(a) \\ sa \cdot \beta_{21}(a) & -\beta_{22}(a) & \beta_{23}(a) \\ sa \cdot \beta_{31}(a) & -\beta_{32}(a) & \beta_{33}(a) \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

Onde, sa e sd são expresso nas Equações (3.103) e (3.104).

Sendo a função Ψ e suas derivadas superiores de interesse expressas nas Equações (3.46), (3.48), (3.52), (3.54), (3.55), (3.58) e (3.59) .

O vetor de carga para os carregamentos distribuídos, quando forem constantes em carga ou momentos ao longo do domínio da barra as seguintes relações podem ser obtidas:

$$\{b\} = \int_0^L \begin{bmatrix} \omega^{*q}(x, 0 + \varepsilon) & \emptyset^{*q}(x, 0 + \varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, 0 + \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, 0 + \varepsilon) \\ \omega^{*m}(x, 0 + \varepsilon) & \emptyset^{*m}(x, 0 + \varepsilon) \\ \omega^{*q}(x, L - \varepsilon) & \emptyset^{*q}(x, L - \varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, L - \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, L - \varepsilon) \\ \omega^{*m}(x, L - \varepsilon) & \emptyset^{*m}(x, L - \varepsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q \\ m \end{Bmatrix} \cdot dx = [MC] \cdot \{f\} \quad (3.154)$$

E a matriz de carga, $[MC]$, pode ser reescrita como:

$$[MC] = \begin{bmatrix} \theta_{41} + \theta_{11} & sa.\theta_{42} + sd.\theta_{12} \\ sa.\theta_{51} + sd.\theta_{21} & \theta_{52} + \theta_{22} \\ sa.\theta_{61} + sd.\theta_{31} & \theta_{62} + \theta_{32} \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

Em que,

$$\theta_{11} = \bar{D}_x \left[\int_a^L \frac{d^2\Psi(r=x-a)}{dr^2} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \Psi(r = x - a) dx \right] = \bar{D}_x \cdot I\Psi 2d(a) - \bar{A}_{xz} \cdot I\Psi 0d(a) \quad (3.156)$$

$$\theta_{21} = -\bar{D}_x \left[\int_a^L \frac{d^3\Psi(x-a)}{dx^3} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_a^L \frac{d\Psi(x-a)}{dx} dx \right] = -\bar{D}_x \cdot I\Psi 3d(a) + \bar{A}_{xz} \cdot I\Psi 1d(a) \quad (3.157)$$

$$\theta_{31} = -\alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_a^L \frac{d^3\Psi(r=x-a)}{dr^3} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_a^L \frac{d\Psi(r=x-a)}{dr} dx \right] = -\alpha \cdot \hat{F}_x \cdot I\Psi 3d(a) - \bar{A}_{xz} \cdot I\Psi 1d(a) \quad (3.158)$$

$$\theta_{41} = \bar{D}_x \left[\int_0^a \frac{d^2\Psi(r=a-x)}{dr^2} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^a \Psi(r = a - x) dx \right] = \bar{D}_x \cdot I\Psi 2a(a) - \bar{A}_{xz} \cdot I\Psi 0a(a) \quad (3.159)$$

$$\theta_{51} = -\bar{D}_x \left[\int_0^a \frac{d^3\Psi(r=a-x)}{dr^3} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_0^a \frac{d\Psi(r=a-x)}{dr} dx \right] = -\bar{D}_x \cdot I\Psi 3a(a) + \bar{A}_{xz} \cdot I\Psi 1a(a) \quad (3.160)$$

$$\theta_{61} = -\alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_0^a \frac{d^3\Psi(r=a-x)}{dr^3} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^a \frac{d\Psi(r=a-x)}{dr} dx \right] = -\alpha \cdot \hat{F}_x \cdot I\Psi 3a(a) - \bar{A}_{xz} \cdot I\Psi 1a(a) \quad (3.161)$$

$$\theta_{12} = \bar{A}_{xz} \left[\int_a^L \frac{d\Psi(r=x-a)}{dr} dx \right] + \alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_a^L \frac{d^3\Psi(r=x-a)}{dr^3} dx \right] = \bar{A}_{xz} \cdot I\Psi 1d(a) + \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot I\Psi 3d(a) \quad (3.162)$$

$$\theta_{22} = -\bar{A}_{xz} \left[\int_a^L \frac{d^2\Psi(r=x-a)}{dr^2} dx \right] - \alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_a^L \frac{d^4\Psi(r=x-a)}{dr^4} dx \right] = -\bar{A}_{xz} \cdot I\Psi 2d(a) - \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot I\Psi 4d(a) \quad (3.163)$$

$$\theta_{32} = -\alpha^2 \cdot H_x \left[\int_a^L \frac{d^4 \psi(r=x-a)}{dr^4} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_a^L \frac{d^2 \psi(r=x-a)}{dr^2} dx \right] = -\alpha^2 \cdot H_x \cdot I\Psi 4d(a) + \bar{A}_{xz} \cdot I\Psi 2d(a) \quad (3.164)$$

$$\theta_{42} = \bar{A}_{xz} \left[\int_0^a \frac{d\psi(r=a-x)}{dr} dx \right] + \alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_0^a \frac{d^3 \psi(r=a-x)}{dr^3} dx \right] = \bar{A}_{xz} I\Psi 1a(a) + \alpha \cdot \hat{F}_x I\Psi 3a(a) \quad (3.165)$$

$$\theta_{52} = -\bar{A}_{xz} \left[\int_0^a \frac{d^2 \psi(r=a-x)}{dr^2} dx \right] - \alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_0^a \frac{d^4 \psi(r=a-x)}{dr^4} dx \right] = -\bar{A}_{xz} I\Psi 2a(a) - \alpha \cdot \hat{F}_x I\Psi 4a(a) \quad (3.166)$$

$$\theta_{62} = -\alpha^2 \cdot H_x \left[\int_0^a \frac{d^4 \psi(r=a-x)}{dr^4} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_0^a \frac{d^2 \psi(r=a-x)}{dr^2} dx \right] = -\alpha^2 \cdot H_x I\Psi 4d(a) + \bar{A}_{xz} I\Psi 2d(a) \quad (3.167)$$

4. ANÁLISE DE VIGA DE BICKFORD-REDDY APOIADA EM BASE ELÁSTICA PELO MEC

Este capítulo destina-se ao estabelecimento do Método dos Elementos de Contorno para o problema de vigas sob flexão apoiadas em bases elásticas de Winkler ou Pasternak.

4.1. Equação governante do problema real

A equação governante do problema real da estabilidade de barra de Bickford – Reddy apoiada em base elástica de Pasternak foi discutida no Capítulo 2. No caso da flexão com base elástica deve ser atribuído valor nulo a carga axial P nas Equações (2.113), desta forma, reescrevendo as Equações (2.113) e (2.114) na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ q \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

4.2. Problema fundamental

Assim como discutido no capítulo 3, o problema fundamental de viga está associado a uma viga de domínio infinito, submetida a fontes em força ou momentos atuando no ponto fonte, $\hat{x}$. Por analogia ao problema real, Equação (4.1), quando submetida à aplicação da fonte em força, o problema fundamental é regido pela relação:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \phi^{*q}(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Por outro lado, quando a fonte é ativada em momento, as equações governantes do problema fundamental ficam:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) \\ \phi^{*m}(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta(x, \hat{x}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

A título de simplificação, podem-se expressar as Equações (4.2) e (4.3) como:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

A Equação (4.4) pode ser escrita da forma:

$$[B] \cdot [G] = [f] \quad (4.5)$$

Na qual se define a matriz dos operadores, $[B]$, a matriz dos deslocamentos, $[G]$, e a matriz das fontes $[f]$, sendo:

$$[B] = \begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$[f] = \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

A equação do problema fundamental da viga de Bickford – Reddy com base elástica, Equação (4.4), constitui-se em um sistema acoplado de variáveis. Será novamente abordado o método de Hörmander(1963), para fazer seu desacoplamento com auxílio de uma função escalar Ψ , Equação (3.12), que quando combinada com (4.4) resulta em:

$$\omega^{*q} = \bar{D}_x \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \bar{A}_{xz} \cdot \Psi \quad (4.9)$$

$$\omega^{*m} = -\alpha \cdot \hat{F}_x \cdot \frac{d^3 \Psi}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d \Psi}{dx} \quad (4.10)$$

$$\emptyset^{*q} = \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d \Psi}{dx} + \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot \frac{d^3 \Psi}{dx^3} \quad (4.11)$$

$$\emptyset^{*m} = -\alpha^2 \cdot H_x \cdot \frac{d^4 \Psi}{dx^4} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - K_1 \cdot \Psi + K_2 \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \quad (4.12)$$

As soluções fundamentais em esforços são obtidas similarmente aos esforços reais, Equação (2.116). Assim como realizado no Capítulo 3, reescrevendo os esforços, Equações (2.110), (2.55) e (2.67), atribuindo valor nulo a carga axial P, os esforços fundamentais ficam:

$$V_x^{*q} = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \emptyset^{*q}(x)}{dx^2} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^3 \omega^{*q}(x)}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \left[\emptyset^{*q}(x) + \frac{d \omega^{*q}(x)}{dx} \right] - K_2 \cdot \frac{d \omega^{*q}(x)}{dx} \quad (4.13)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*q} = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d \emptyset^{*q}(x)}{dx} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^2 \omega^{*q}(x)}{dx^2} \quad (4.14)$$

$$\hat{M}_x^{*q} = \bar{D}_x \frac{d\phi^{*q}(x)}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega^{*q}(x)}{dx^2} \quad (4.15)$$

A partir das Equações (4.9) e (4.11), os esforços em termos das derivadas de Ψ ficam:

$$V_x^{*q} = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^5 \Psi}{dx^5} + \left[2 \cdot \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x - \bar{D}_x \cdot K_2 \right] \frac{d^3 \Psi}{dx^3} + \left[\bar{A}_{xz} \cdot K_2 \right] \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \quad (4.16)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*q} = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^4 \Psi}{dx^4} + \left[\alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x \right] \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \quad (4.17)$$

$$\hat{M}_x^{*q} = \left[\bar{A}_{xz} (\bar{D}_x + \alpha \cdot \hat{F}_x) \right] \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \quad (4.18)$$

Analogamente, os esforços devido à fonte em momento ficam:

$$V_x^{*m} = \left[2 \cdot \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot K_2 \right] \frac{d^4 \Psi}{dx^4} + \left[2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot K_2 - \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot K_1 \right] \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \bar{A}_{xz} \cdot K_1 \cdot \Psi \quad (4.19)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*m} = \alpha \cdot \left\{ \left[\bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \hat{F}_x \cdot K_2 \right] \frac{d^3 \Psi}{dx^3} - \hat{F}_x \cdot K_1 \cdot \frac{d\Psi}{dx} \right\} \quad (4.20)$$

$$\hat{M}_x^{*m} = \left[-\alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x + \alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 \right] \frac{d^5 \Psi}{dx^5} + \left[\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \bar{D}_x \cdot K_2 \right] \frac{d^3 \Psi}{dx^3} - \bar{D}_x \cdot K_1 \cdot \frac{d\Psi}{dx} \quad (4.21)$$

Sendo $\bar{A}_{xz}$ expresso na Equação (3.32), $\bar{D}_x$ em (3.33), $\hat{D}_x, \hat{F}_x, \hat{A}_{xz}$ enunciados, respectivamente, nas Equações (2.58), (2.59) e (2.60), D_x, F_x e H_x na Equação (2.62) e A_{xz} e F_{xz} em (2.63).

A Equação (4.4) pode ser desacoplada utilizando a Equação (3.16). Neste caso, a multiplicação do determinante de (4.6) pela função escalar resulta na seguinte equação diferencial:

$$a \cdot \frac{d^6 \Psi}{dx^6} + b_2 \cdot \frac{d^4 \Psi}{dx^4} + c_2 \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + d_2 \cdot \Psi = \delta(x, \hat{x}) \quad (4.22)$$

Sendo:

$$a = \bar{D}_x \cdot H_x \cdot \alpha^2 - \hat{F}_x^2 \cdot \alpha^2 \quad (4.23)$$

$$b_2 = -\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x - \bar{A}_{xz} \cdot H_x \cdot \alpha^2 - 2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x \cdot \alpha - \bar{D}_x \cdot K_2 \quad (4.24)$$

$$c_2 = \bar{D}_x \cdot K_1 + \bar{A}_{xz} \cdot K_2 \quad (4.25)$$

$$d_2 = -\bar{A}_{xz} \cdot K_1 \quad (4.26)$$

Fazendo $\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = y$, a equação diferencial (4.22) é resolvida a partir de sua forma homogênea:

$$a \cdot y^3 + b_2 \cdot y^2 + c_2 \cdot y^1 + d_2 \cdot y^0 = 0 \quad (4.27)$$

A solução proposta dependerá das raízes, y_1 , y_2 e y_3 , dada por:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{b_2}{3a} \quad (4.28)$$

$$y_2 = \frac{-(y_1 + \frac{b_2}{a}) + \sqrt{\Delta_1}}{2} \quad (4.29)$$

$$y_3 = \frac{-(y_1 + \frac{b_2}{a}) - \sqrt{\Delta_1}}{2} \quad (4.30)$$

Em que,

$$p = 2 \left(\frac{b_2}{3a} \right)^3 - \frac{b_2 \cdot c_2}{3a^2} + \frac{d_2}{a} \quad (4.31)$$

$$q = \frac{c_2}{a} - \frac{b_2^2}{3a^2} \quad (4.32)$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3 \quad (4.33)$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3 \quad (4.34)$$

Caso a: Uma raiz real e duas complexas conjugadas

Se $\Delta > 0$ ter-se-á uma raiz real y_1 e duas complexas conjugadas, y_2 e y_3 . Neste caso, são definidas as seguintes relações:

$$\bar{p} = |Re(\sqrt{y_2})| = |Re(\sqrt{y_3})| \quad (4.35)$$

$$\bar{q} = |Im(\sqrt{y_2})| = |Im(\sqrt{y_3})| \quad (4.36)$$

$$\bar{a} = \bar{p}^2 - \bar{q}^2 \quad (4.37)$$

$$\bar{b} = 2 \cdot \bar{p} \cdot \bar{q} \quad (4.38)$$

Onde:

Re é a parte real das raízes complexa,

Im é a parte imaginária da raízes complexa.

A solução proposta para este caso associado ao problema da viga de Bickford-Reddy para a flexão simples com base elástica é dada por:

$$\Psi = C_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) \quad (4.39)$$

As constantes da Equação (4.39) são obtidas a partir das condições de derivação.

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Psi}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{d\Psi}{dr} \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (4.40)$$

Em que,

$$\frac{d\Psi}{dr} = \{-C_1 \sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [-\bar{p} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - \bar{q} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [-\bar{p} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) + \bar{q} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)]\} \quad (4.41)$$

A derivada segunda é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{d^2\Psi}{dr^2} \frac{d^2r}{dx^2} = & \{C_1 \cdot y_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [\bar{p}^2 \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) + \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) + \\ & \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) - \bar{q}^2 \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [\bar{p}^2 \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) - \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - \\ & \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - \bar{q}^2 \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r)]\} \cdot \text{sgn}(x, \hat{x}) \cdot \text{sgn}(x, \hat{x}) + \{C_1 \cdot (-\sqrt{y_1}) \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [-\bar{p} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - \\ & \bar{q} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [-\bar{p} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) + \bar{q} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)]\} \cdot 2\delta(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Analizando a segunda derivada, quando $x = \hat{x}$, $r = 0$ e $\delta(x, \hat{x}) \rightarrow \infty$. Para se ter um valor finito para (4.42), tem-se:

$$C_1 \cdot (-\sqrt{y_1}) \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [-\bar{p} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - \bar{q} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [-\bar{p} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) + \bar{q} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)] = 0 \quad (4.43)$$

Analizando a Equação (4.43) para $x = \hat{x}$ e $x = x$, resulta na primeira das relações do sistema para achar as constantes:

$$C_1(-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot (-\bar{p}) - C_3 \cdot \bar{q} = 0 \quad (4.44)$$

A derivada segunda assume então a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{d^2\Psi}{dr^2} = & C_1 \cdot y_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [\bar{p}^2 \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) + \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) + \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) - \\ & \bar{q}^2 \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [\bar{p}^2 \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) - \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - \bar{q}^2 \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r)] \end{aligned} \quad (4.45)$$

Das relações descritas nas Equações (4.37) e (4.38), pode-se simplificar a Equação (4.45) adquirindo a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dr^2} = C_1 \cdot y_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [\bar{a} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - \bar{b} \cdot \sin(\bar{q} \cdot r)] + \\ C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [\bar{a} \cdot \sin(\bar{q} \cdot r) - \bar{b} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Fazendo a terceira derivada da função, com as devidas simplificações de acordo com as Equações (4.35), (4.36), (4.37) e (4.37), fica:

$$\frac{d^3\psi}{dx^3} = \frac{d^3\psi}{dr^3} \frac{dr^3}{dx^3} = \frac{d^3\psi}{dr^3} \cdot \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (4.47)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \frac{d^3\psi}{dr^3} = C_1 \cdot -y_1 \cdot \sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) \sin(\bar{q} \cdot r)] + \\ C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) \cdot \sin(\bar{q} \cdot r) + (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)] \end{aligned} \quad (4.48)$$

Assim como analisado na segunda derivada, a quarta derivada resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d^4\psi}{dx^4} = \frac{d^4\psi}{dr^4} = C_1 \cdot y_1^2 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) \cos(\bar{q} \cdot r) + 2 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \sin(\bar{q} \cdot r)] + \\ C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) \cdot \sin(\bar{q} \cdot r) - 2 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)] \end{aligned} \quad (4.49)$$

E a segunda relação do sistema para determinar as constantes é dada por:

$$C_1 \cdot y_1 (-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot (-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) + C_3 (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) = 0 \quad (4.50)$$

Fazendo a quinta derivada:

$$\frac{d^5\psi}{dx^5} = \frac{d^5\psi}{dr^5} \frac{dr^5}{dx^5} = \frac{d^5\psi}{dr^5} \cdot \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (4.51)$$

Onde,

$$\begin{aligned} \frac{d^5\psi}{dr^5} = C_1 \cdot y_1^2 \cdot -\sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(-\bar{p} \cdot \bar{a}^2 + \bar{q} \cdot \bar{b}^2 - 2 \cdot \bar{q} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) + \\ (-\bar{q} \cdot \bar{a}^2 + \bar{q} \cdot \bar{p} \cdot \bar{b}^2 - 2 \cdot \bar{p} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \sin(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{q} \cdot \bar{a}^2 - \bar{q} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{p} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) + \\ (-\bar{p} \cdot \bar{a}^2 + \bar{p} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{q} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \sin(\bar{q} \cdot r)] \end{aligned} \quad (4.52)$$

E, por último, a sexta derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \Psi}{dx^6} = \frac{d^6 \Psi}{dr^6} = & C_1 \cdot y_1^3 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{a}^3 - 3 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}^2) \cos(\bar{q} \cdot r) + (3 \cdot \bar{a}^2 \cdot \bar{b} - \\ & \bar{b}^3) \cdot \sin(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{b}^3 - 3 \cdot \bar{a}^2 \cdot \bar{b}) \cos(\bar{q} \cdot r) + (\bar{a}^3 - 3 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}^2) \sin(\bar{q} \cdot r)] + \\ & \{C_1 \cdot y_1^2 \cdot -\sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(-\bar{p} \cdot \bar{a}^2 + \bar{q} \cdot \bar{b}^2 - 2 \cdot \bar{q} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) + (-\bar{q} \cdot \bar{a}^2 + \\ & \bar{q} \cdot \bar{p} \cdot \bar{b}^2 - 2 \cdot \bar{p} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \sin(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{q} \cdot \bar{a}^2 - \bar{q} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{p} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) + \\ & (-\bar{p} \cdot \bar{a}^2 + \bar{p} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{q} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \sin(\bar{q} \cdot r)]\} 2\delta(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Assim como realizado no Capítulo 3, como são três as constantes a serem obtidas, C_1, C_2 e C_3 , a terceira equação que comporá o sistema das constantes é obtida substituindo as derivadas, Equações (4.39), (4.46), (4.49) e (4.53), na equação do problema, Equação (4.22), resultando em:

$$2 \cdot a \cdot [C_1 \cdot y_1^2 (-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot (-\bar{p} \cdot \bar{a}^2 + \bar{p} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{q} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) + C_3 (\bar{q} \cdot \bar{a}^2 - \bar{q} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{p} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b})] = 1 \quad (4.54)$$

A partir de (4.44), (4.50) e (4.54), o sistema das constantes fica:

$$\begin{cases} C_1 (-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot (-\bar{p}) + C_3 \cdot \bar{q} = 0 \\ C_1 \cdot y_1 (-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot (-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) + C_3 (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) = 0 \\ 2 \cdot a \cdot [C_1 \cdot y_1^2 (-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot (-\bar{p} \cdot \bar{a}^2 + \bar{p} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{q} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) + C_3 (\bar{q} \cdot \bar{a}^2 - \bar{q} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{p} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b})] = 1 \end{cases} \quad (4.55)$$

A solução do sistema, Equação (4.55), resulta em:

$$C_1 = -\frac{1}{\mu \cdot \sqrt{y_1}} \cdot \frac{1}{2 \cdot (\bar{a}^2 - 2 \cdot \bar{a} \cdot y_1 + \bar{b}^2 + y_1^2)} \quad (4.56)$$

$$C_2 = \frac{\bar{b} \cdot \bar{p} - \bar{q} \cdot y_1 + \bar{a} \cdot \bar{q}}{\mu \cdot \bar{b} (\bar{p}^2 + \bar{q}^2)} \cdot \frac{1}{2 \cdot (\bar{a}^2 - 2 \cdot \bar{a} \cdot y_1 + \bar{b}^2 + y_1^2)} \quad (4.57)$$

$$C_3 = -\frac{\bar{b} \cdot \bar{q} + \bar{p} \cdot y_1 - \bar{a} \cdot \bar{p}}{\mu \cdot \bar{b} (\bar{p}^2 + \bar{q}^2)} \cdot \frac{1}{2 \cdot (\bar{a}^2 - 2 \cdot \bar{a} \cdot y_1 + \bar{b}^2 + y_1^2)} \quad (4.58)$$

Em que:

$$\mu = \bar{D}_x \cdot H_x \cdot \alpha^2 - \hat{F}_x^2 \cdot \alpha^2 \quad (4.59)$$

Caso b: Três raízes reais positivas

Se $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$, a solução assume a seguinte configuração:

$$\Psi = C_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{y_2} \cdot r} + C_3 \cdot e^{-\sqrt{y_3} \cdot r} \quad (4.60)$$

Assim como nas Equações (4.40), (4.47) e (4.51), as derivadas ímpares de Ψ em relação à x serão multiplicadas pela função sinal, $\text{sgn}(x, \hat{x})$ e as derivadas de Ψ em relação à r são dadas por:

$$\frac{d\Psi}{dr} = -C_1\sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} - C_2\sqrt{y_2} \cdot e^{-\sqrt{y_2} \cdot r} - C_3\sqrt{y_3} \cdot e^{-\sqrt{y_3} \cdot r} \quad (4.61)$$

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} = C_1 \cdot y_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot y_2 \cdot e^{-\sqrt{y_2} \cdot r} + C_3 \cdot y_3 \cdot e^{-\sqrt{y_3} \cdot r} \quad (4.62)$$

$$\frac{d^3\Psi}{dr^3} = -C_1 \cdot y_1 \sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} - C_2 \cdot y_2 \sqrt{y_2} \cdot e^{-\sqrt{y_2} \cdot r} - C_3 \cdot y_3 \sqrt{y_3} \cdot e^{-\sqrt{y_3} \cdot r} \quad (4.63)$$

$$\frac{d^4\Psi}{dr^4} = C_1 \cdot y_1^2 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot y_2^2 \cdot e^{-\sqrt{y_2} \cdot r} + C_3 \cdot y_3^2 \cdot e^{-\sqrt{y_3} \cdot r} \quad (4.64)$$

$$\frac{d^5\Psi}{dr^5} = -C_1 \cdot y_1^2 \sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} - C_2 \cdot y_2^2 \sqrt{y_2} \cdot e^{-\sqrt{y_2} \cdot r} - C_3 \cdot y_3^2 \sqrt{y_3} \cdot e^{-\sqrt{y_3} \cdot r} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^6\Psi}{dr^6} = & C_1 \cdot y_1^3 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot y_2^3 \cdot e^{-\sqrt{y_2} \cdot r} + C_3 \cdot y_3^3 \cdot e^{-\sqrt{y_3} \cdot r} + \left[-C_1 \cdot y_1^2 \sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} - \right. \\ & \left. C_2 \cdot y_2^2 \sqrt{y_2} \cdot e^{-\sqrt{y_2} \cdot r} - C_3 \cdot y_3^2 \sqrt{y_3} \cdot e^{-\sqrt{y_3} \cdot r} \right] 2 \cdot \delta(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (4.66)$$

O sistema completo para determinação das constantes fica:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{y_1} & -\sqrt{y_2} & -\sqrt{y_3} \\ -y_1\sqrt{y_1} & -y_2\sqrt{y_2} & -y_3\sqrt{y_3} \\ -y_1^2\sqrt{y_1} & -y_2^2\sqrt{y_2} & -y_3^2\sqrt{y_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\mu} \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

Após a solução de (4.67) tem-se:

$$C_1 = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{y_1}(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \quad (4.68)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{y_2}(y_1-y_2)(y_2-y_3)} \quad (4.69)$$

$$C_3 = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{y_3}(y_1-y_3)(y_2-y_3)} \quad (4.70)$$

Em que μ é definido em (4.59).

4.3. Equação integral

Assim como no Capítulo 3, será abordado o Teorema da Reciprocidade de Betty para transformar as equações diferenciais de equilíbrio do problema em equações integrais equivalentes. Para o caso de aplicação da fonte em força no problema fundamental, o Teorema da Reciprocidade estabelece sua correlação com o problema real através de:

$$\int_V (\sigma_x^{*q} \varepsilon_x) dV + \int_V (\tau_{xz}^{*q} \gamma_{xz}) dV - \int_L (K_1 \cdot \omega^{*q} \cdot \omega) dx - \int_L \left(K_2 \cdot \frac{d\omega^{*q}}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} \right) dx = \int_V (\sigma_x \varepsilon_x^{*q}) dV + \int_V (\tau_{xz} \gamma_{xz}^{*q}) dV - \int_L (K_1 \cdot \omega \cdot \omega^{*q}) dx - \int_L \left(K_2 \cdot \frac{d\omega}{dx} \cdot \frac{d\omega^{*q}}{dx} \right) dx \quad (4.71)$$

Substituindo-se as deformações, Equações (2.49) e (2.50), e esforços, Equações (2.54), (2.55), (2.56) e (2.57) e realizando convenientes integrações por partes, resulta:

$$\begin{aligned} & [\widehat{M}_x^{*q} \cdot \phi(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x^{*q} \cdot \frac{d\omega(x)}{dx} \right]_0^L + \left[\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{dx} \cdot \omega(x) \right]_0^L + [\widehat{Q}_x^{*q} \cdot \omega(x)]_0^L - \left[K_2 \cdot \frac{d\omega^{*q}(x)}{dx} \cdot \omega(x) \right]_0^L + \\ & \int_L \left\{ \left(-\frac{d\widehat{M}_x^{*q}}{dx} + \widehat{Q}_x^{*q} \right) \cdot \phi(x) + \left(-\alpha \cdot \frac{d^2 P_x^{*q}}{dx^2} - \frac{d\widehat{Q}_x^{*q}}{dx} \right) \cdot \omega(x) - K_1 \cdot \omega^{*q}(x) \cdot \omega(x) + \right. \\ & \left. K_2 \cdot \frac{d^2 \omega^{*q}(x)}{dx^2} \cdot \omega(x) \right\} dx = [\widehat{M}_x \cdot \phi^{*q}(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x \cdot \frac{d\omega^{*q}(x)}{dx} \right]_0^L + \left[\alpha \cdot \frac{dP_x}{dx} \cdot \omega^{*q}(x) \right]_0^L - \\ & \left[K_2 \cdot \frac{d\omega(x)}{dx} \cdot \omega^{*q}(x) \right]_0^L + [\widehat{Q}_x \cdot \omega^{*q}(x)]_0^L + \int_L \left\{ \left(-\frac{d\widehat{M}_x}{dx} + \widehat{Q}_x \right) \cdot \phi^{*q}(x) + \right. \\ & \left. \left(-\alpha \cdot \frac{d^2 P_x}{dx^2} - \frac{d\widehat{Q}_x}{dx} \right) \cdot \omega^{*q}(x) - K_1 \cdot \omega(x) \cdot \omega^{*q}(x) + K_2 \cdot \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \cdot \omega^{*q}(x) \right\} dx \end{aligned} \quad (4.72)$$

Reescrevendo a força cortante, Equação (2.110), e as Equações (2.111) e (2.112) pela atribuição de valores nulos para a carga axial P , tem-se:

$$V_x = \alpha \frac{dP_x}{dx} + \widehat{Q}_x - K_2 \frac{d\omega}{dx} \quad (4.73)$$

$$-\alpha \cdot \frac{d^2 P_x}{dx^2} - \frac{d\widehat{Q}_x}{dx} - K_1 \cdot \omega(x) + K_2 \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} = q(x) \quad (4.74)$$

$$-\frac{d\widehat{M}_x}{dx} + \widehat{Q}_x = m(x) \quad (4.75)$$

Substituindo (4.73), (4.74) e (4.75) em (4.72), a equação integral assume o seguinte formato:

$$\begin{aligned} & [\widehat{M}_x^{*q} \cdot \phi(x)]_0^L + [V_x^{*q} \cdot \omega(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x^{*q} \cdot \frac{d\omega(x)}{dx} \right]_0^L + \int_L \{ m^{*q} \cdot \phi(x) + q^{*q} \cdot \omega(x) \} dx = \\ & [\widehat{M}_x \cdot \phi^{*q}(x)]_0^L + [V_x \cdot \omega^{*q}(x)]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x \cdot \frac{d\omega^{*q}(x)}{dx} \right]_0^L + \int_L \{ m \cdot \phi^{*q}(x) + q \cdot \omega^{*q}(x) \} dx \end{aligned} \quad (4.76)$$

Pela propriedade do delta de Dirac, Equação (3.4), a quarta parcela da Equação (4.76) fica:

$$\int_0^L [q^{*q} \cdot \omega(x)] dx = \int_0^L [\delta(x, \hat{x}) \cdot \omega(x)] dx = \omega(\hat{x}) \quad (4.77)$$

Substituindo-se (4.77) em (4.76), conduz a equação integral em deslocamento.

$$\omega(\hat{x}) + [V_x^{*q} \cdot \omega]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x^{*q} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x^{*q} \emptyset]_0^L = [V_x \cdot \omega^{*q}]_0^L - \left[\alpha \cdot P_x \frac{d\omega^{*q}}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x \cdot \emptyset^{*q}]_0^L + \int_0^L (q \cdot \omega^{*q} + m \cdot \emptyset^{*q}) dx \quad (4.78)$$

Aplicando agora uma fonte de momento “ m ” ao problema fundamental, análogo ao processo realizado quando a fonte era em forçãem “ q ”, tem-se a equação integral para a rotação, $\emptyset$:

$$\emptyset(\hat{x}) + [V_x^{*m} \omega]_0^L - \left[\alpha P_x^{*m} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x^{*m} \emptyset]_0^L = [V_x \omega^{*m}]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*m}}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x \emptyset^{*m}]_0^L + \int_0^L (q \cdot \omega^{*m} + m \cdot \emptyset^{*m}) dx \quad (4.79)$$

A terceira equação integral para tornar possível a resolução do sistema será a derivada em relação ao ponto fonte da equação em ω , que dará a inclinação da elástica ($d\omega/d\hat{x}$).

$$\frac{d\omega(\hat{x})}{d\hat{x}} + \left[\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}} \omega \right]_0^L - \left[\alpha \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + \left[\frac{d\hat{M}_x^{*q}}{d\hat{x}} \emptyset \right]_0^L = \left[V_x \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\omega^{*q}}{dx} \right) \right]_0^L + \left[\hat{M}_x \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}} \right]_0^L + \int_0^L \left(q \cdot \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} + m \cdot \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}} \right) dx \quad (4.80)$$

Organizando as Equações (4.78), (4.79) e (4.80), similar ao Capítulo 2, a forma matricial é dada por:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{c} \omega(\hat{x}) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(\hat{x}) \\ \emptyset(\hat{x}) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} V_x^{*q}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(x, \hat{x}) & M_x^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{V_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot \frac{P_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{M_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ V_x^{*m}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(x, \hat{x}) & M_x^{*m}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \omega(x) \\ \frac{d\omega(x)}{dx} \\ \emptyset(x) \end{array} \right\} \right\}_0^L = \\ & \left\{ \begin{bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{d}{d\hat{x}} \left[\frac{d\omega^{*q}}{dx}(x, \hat{x}) \right] & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ \omega_m^{*m}(x, \hat{x}) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} V_x(x) \\ -\alpha \cdot P_x(x) \\ \hat{M}_x(x) \end{array} \right\} \right\}_0^L + \\ & \int_0^L \left[\begin{array}{cc} \omega^{*q}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} q \\ m \end{array} \right\} \cdot dx \quad (4.81) \end{aligned}$$

4.4. Equação algébrica

Fazendo-se a colocação da fonte de força e de momento, uma de cada vez, nas extremidades da barra, na extremidade esquerda $\hat{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(0 + \varepsilon)$ e na extremidade direita $\hat{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(L - \varepsilon)$, obtendo-se a expressão geral da representação algébrica:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \omega(0 + \varepsilon) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(0 + \varepsilon) \\ \emptyset(0 + \varepsilon) \\ \omega(L - \varepsilon) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(L - \varepsilon) \\ \omega(L - \varepsilon) \end{array} \right\} + \\
 & \left[\begin{array}{cccccc} V_x^{*q}(0,0 + \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(0,0 + \varepsilon) & M_x^{*q}(0,0 + \varepsilon) & V_x^{*q}(L,0 + \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L,0 + \varepsilon) & M_x^{*q}(L,0 + \varepsilon) \\ \frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & \frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) \\ V_x^{*m}(0,0 + \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(0,0 + \varepsilon) & M_x^{*m}(0,0 + \varepsilon) & V_x^{*m}(L,0 + \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L,0 + \varepsilon) & M_x^{*m}(L,0 + \varepsilon) \\ V_x^{*q}(0,L - \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(0,L - \varepsilon) & M_x^{*q}(0,L - \varepsilon) & V_x^{*q}(L,L - \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L,L - \varepsilon) & M_x^{*q}(L,L - \varepsilon) \\ \frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & \frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) \\ V_x^{*m}(0,L - \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(0,L - \varepsilon) & M_x^{*m}(0,L - \varepsilon) & V_x^{*m}(L,L - \varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L,L - \varepsilon) & M_x^{*m}(L,L - \varepsilon) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \omega(0) \\ \frac{d\omega}{dx}(0) \\ \emptyset(0) \\ \omega(L) \\ \frac{d\omega}{dx}(L) \\ \emptyset(L) \end{array} \right\} = \\
 & \left[\begin{array}{cccccc} \omega^{*q}(0,0 + \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0,0 + \varepsilon) & \emptyset^{*q}(0,0 + \varepsilon) & \omega^{*q}(L,0 + \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(L,0 + \varepsilon) & \emptyset^{*q}(L,0 + \varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (0,0 + \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(0,0 + \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (L,0 + \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L,0 + \varepsilon) \\ \omega^{*m}(0,0 + \varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0,0 + \varepsilon) & \emptyset^{*m}(0,0 + \varepsilon) & \omega^{*m}(L,0 + \varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(L,0 + \varepsilon) & \emptyset^{*m}(L,0 + \varepsilon) \\ \omega^{*q}(0,L - \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0,L - \varepsilon) & \emptyset^{*q}(0,L - \varepsilon) & \omega^{*q}(L,L - \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(L,L - \varepsilon) & \emptyset^{*q}(L,L - \varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (0,L - \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(0,L - \varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (L,L - \varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L,L - \varepsilon) \\ \omega^{*m}(0,L - \varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0,L - \varepsilon) & \emptyset^{*m}(0,L - \varepsilon) & \omega^{*m}(L,L - \varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(L,L - \varepsilon) & \emptyset^{*m}(L,L - \varepsilon) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} V_x(0) \\ -\alpha \cdot P_x(0) \\ M_x(0) \\ V_x(L) \\ -\alpha \cdot P_x(L) \\ M_x(L) \end{array} \right\} + \\
 & \int_0^L \left[\begin{array}{cc} \omega^{*q}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} q \\ m \end{array} \right\} \cdot dx \quad (4.82)
 \end{aligned}$$

A forma compacta da Equação (4.82) é vista no Capítulo 3, onde η são obtidos a partir dos esforços fundamentais apresentados nas Equações (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20) e (4.21) e suas respectivas derivadas.

$$\begin{aligned}
 \eta_{11}(r) = & \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^5 \Psi(r)}{dr^5} + \left[2 \cdot \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x - \right. \\
 & \left. \bar{D}_x \cdot K_2 \right] \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} + \left[\bar{A}_{xz} \cdot K_2 \right] \frac{d\Psi(r)}{dr} \quad (4.83)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{21}(r) = & - \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^6 \Psi(r)}{dr^6} - \left[2\alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x - \right. \\
 & \left. \bar{D}_x \cdot K_2 \right] \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} - \left[\bar{A}_{xz} \cdot K_2 \right] \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \quad (4.84)
 \end{aligned}$$

$$\eta_{31}(r) = \left[2 \cdot \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot K_2 \right] \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} + \left[2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot K_2 - \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot K_1 \right] \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} - \bar{A}_{xz} \cdot K_1 \cdot \Psi(r) \quad (4.85)$$

$$\eta_{12}(r) = \left[\alpha \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} + \left[\bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x \right] \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \quad (4.86)$$

$$\eta_{22}(r) = - \left[\alpha \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^5 \psi(r)}{dr^5} - \left[\bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x \right] \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} \quad (4.87)$$

$$\eta_{32}(r) = \left[\bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \hat{F}_x \cdot K_2 \right] \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} - \hat{F}_x \cdot K_1 \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (4.88)$$

$$\eta_{13}(r) = \bar{A}_{xz} \left[\bar{D}_x + \alpha \cdot \hat{F}_x \right] \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \quad (4.89)$$

$$\eta_{23}(r) = -\bar{A}_{xz} \left[\bar{D}_x + \alpha \cdot \hat{F}_x \right] \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} \quad (4.90)$$

$$\eta_{33}(r) = \left[-\alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x + \alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 \right] \frac{d^5 \psi(r)}{dr^5} + \left[\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \bar{D}_x \cdot K_2 \right] \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} - \bar{D}_x \cdot K_1 \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (4.91)$$

E β são obtidos a partir dos deslocamentos fundamentais apresentados nas Equações (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12) e suas respectivas derivadas.

$$\beta_{11}(r) = \bar{D}_x \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} - \bar{A}_{xz} \cdot \psi(r) \quad (4.92)$$

$$\beta_{21}(r) = -\bar{D}_x \cdot \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (4.93)$$

$$\beta_{31}(r) = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (4.94)$$

$$\beta_{12}(r) = \bar{D}_x \cdot \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (4.95)$$

$$\beta_{22}(r) = -\bar{D}_x \cdot \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \quad (4.96)$$

$$\beta_{32}(r) = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \quad (4.97)$$

$$\beta_{13}(r) = \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} + \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} \quad (4.98)$$

$$\beta_{23}(r) = -\bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} - \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} \quad (4.99)$$

$$\beta_{33}(r) = -\alpha^2 \cdot H_x \cdot \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} - K_1 \cdot \psi + K_2 \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \quad (4.100)$$

Sendo a função ψ e suas derivadas superiores de interesse expressas nas Equações (4.39), (4.41), (4.46), (4.48), (4.49), (4.52) e (4.53) para o caso a, em que tem-se uma raiz real e duas complexas conjugadas, e nas Equações (4.60), (4.61), (4.62), (4.63), (4.64), (4.65), (4.66) para o caso b, três raízes reais positivas.

E, as componentes da matriz de carga, $[MC]$, Equação (3.124), são dadas por:

$$\theta_{11} = \bar{D}_x \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=x)}{dr^2} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \Psi(r=x) dx \right] = \bar{D}_x I \Psi 2d(0) - \bar{A}_{xz} I \Psi 0d(0) \quad (4.101)$$

$$\theta_{21} = -\bar{D}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=x)}{dr^3} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=x)}{dr} dx \right] = -\bar{D}_x I \Psi 3d(0) + \bar{A}_{xz} I \Psi 1d(0) \quad (4.102)$$

$$\theta_{31} = -\alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=x)}{dr^3} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=x)}{dr} dx \right] = -\alpha \cdot \hat{F}_x I \Psi 3d(0) - \bar{A}_{xz} I \Psi 1d(0) \quad (4.103)$$

$$\theta_{41} = \bar{D}_x \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=L-x)}{dr^2} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \Psi(r=L-x) dx \right] = \bar{D}_x I \Psi 2a(L) - \bar{A}_{xz} I \Psi 0a(L) \quad (4.104)$$

$$\theta_{51} = -\bar{D}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=L-x)}{dr^3} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=L-x)}{dr} dx \right] = -\bar{D}_x I \Psi 3a(L) + \bar{A}_{xz} I \Psi 1a(L) \quad (4.105)$$

$$\theta_{61} = -\alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=L-x)}{dr^3} dx \right] - \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=L-x)}{dr} dx \right] = -\alpha \cdot \hat{F}_x I \Psi 3a(L) - \bar{A}_{xz} I \Psi 1a(L) \quad (4.106)$$

$$\theta_{12} = \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=x)}{dr} dx \right] + \alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=x)}{dr^3} dx \right] = \bar{A}_{xz} I \Psi 1d(0) + \alpha \cdot \hat{F}_x I \Psi 3d(0) \quad (4.107)$$

$$\theta_{22} = -\bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=x)}{dr^2} dx \right] - \alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^4 \Psi(r=x)}{dr^4} dx \right] = -\bar{A}_{xz} I \Psi 2d(0) - \alpha \cdot \hat{F}_x I \Psi 4d(0) \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \theta_{32} = & -\alpha^2 \cdot H_x \left[\int_0^L \frac{d^4 \Psi(r=x)}{dr^4} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=x)}{dr^2} dx \right] - K_1 \left[\int_0^L \Psi(r=x) dx \right] + \\ & K_2 \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=x)}{dx^2} dx \right] = -\alpha^2 \cdot H_x I \Psi 4d(0) + \bar{A}_{xz} I \Psi 2d(0) - K_1 I \Psi 0d(0) + K_2 I \Psi 2d(0) \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\theta_{42} = \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d\Psi(r=L-x)}{dr} dx \right] + \alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^3 \Psi(r=L-x)}{dr^3} dx \right] = \bar{A}_{xz} I \Psi 1a(L) + \alpha \cdot \hat{F}_x I \Psi 3a(L) \quad (4.110)$$

$$\theta_{52} = -\bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(r=L-x)}{dr^2} dx \right] - \alpha \cdot \hat{F}_x \left[\int_0^L \frac{d^4 \Psi(r=L-x)}{dr^4} dx \right] = -\bar{A}_{xz} I \Psi 2a(L) - \alpha \cdot \hat{F}_x I \Psi 4a(L) \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} \theta_{62} = & -\alpha^2 \cdot H_x \left[\int_0^L \frac{d^4 \Psi(L-x)}{dx^4} dx \right] + \bar{A}_{xz} \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(L-x)}{dx^2} dx \right] - K_1 \left[\int_0^L \Psi(L-x) dx \right] + \\ & K_2 \left[\int_0^L \frac{d^2 \Psi(L-x)}{dx^2} dx \right] = -\alpha^2 \cdot H_x I \Psi 4d(L) + \bar{A}_{xz} I \Psi 2d(L) - K_1 I \Psi 0d(L) + K_2 I \Psi 2d(L) \end{aligned} \quad (4.112)$$

Onde o resultado das integrações é obtido por:

Caso a: Uma raiz real e duas complexas conjugadas

Se $\hat{x} > x$,

$$I\Psi 0a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \Psi(r = \hat{x} - x) dx = \frac{c_1(e^{-\sqrt{y_1}\hat{x}} - 1)}{(-\sqrt{y_1})} + \frac{c_2}{\bar{q}^2 + \bar{p}^2} \left[\bar{q} \cdot e^{-\bar{p}\hat{x}} \left(\text{sen}(\bar{q}\hat{x}) - \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \cos(\bar{q}\hat{x}) \right) + \bar{p} \right] - \frac{c_3}{\bar{q}^2 + \bar{p}^2} \left[\bar{q} \cdot e^{-\bar{p}\hat{x}} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \text{sen}(\bar{q}\hat{x}) + \cos(\bar{q}\hat{x}) \right) - \bar{q} \right] \quad (4.113)$$

$$I\Psi 1a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d\Psi(r=\hat{x}-x)}{dr} dx = C_1(e^{-\sqrt{y_1}\hat{x}} - 1) + C_2[e^{-\bar{p}\hat{x}} \cdot \cos(\bar{q}\hat{x}) - 1] + C_3[e^{-\bar{p}\hat{x}} \cdot \text{sen}(\bar{q}\hat{x})] \quad (4.114)$$

$$I\Psi 2a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d^2\Psi(r=\hat{x}-x)}{dr^2} dx = -C_1\sqrt{y_1}(e^{-\sqrt{y_1}\hat{x}} - 1) + C_2[-\bar{p} \cdot e^{-\bar{p}\hat{x}} \cdot \cos(\bar{q}\hat{x}) + \bar{p} + \bar{q} \cdot e^{-\bar{p}\hat{x}} \cdot \text{sen}(\bar{q}\hat{x})] + C_3[-\bar{p} \cdot e^{-\bar{p}\hat{x}} \cdot \text{sen}(\bar{q}\hat{x}) - \bar{q} + \bar{q} \cdot e^{-\bar{p}\hat{x}} \cdot \cos(\bar{q}\hat{x})] \quad (4.115)$$

$$I\Psi 3a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d^3\Psi(r=\hat{x}-x)}{dr^3} dx = C_1 \cdot y_1(e^{-\sqrt{y_1}\hat{x}} - 1) + C_2 \cdot e^{-\bar{p}\hat{x}} [\bar{a} \cdot \cos(\bar{q}\hat{x}) + \bar{b} \cdot \text{sen}(\bar{q}\hat{x}) - \bar{a}] + C_3 \cdot e^{-\bar{p}\hat{x}} [\bar{a} \cdot \text{sen}(\bar{q}\hat{x}) - \bar{b} \cdot \cos(\bar{q}\hat{x}) + \bar{b}] \quad (4.116)$$

$$I\Psi 4a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d^4\Psi(r=\hat{x}-x)}{dr^4} dx = -C_1 \cdot y_1 \sqrt{y_1} (e^{-\sqrt{y_1}\hat{x}} - 1) + C_2 \{ e^{-\bar{p}\hat{x}} [(-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) \cos(\bar{q}\hat{x}) - (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) \text{sen}(\bar{q}\hat{x})] - (-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) \} + C_3 \{ e^{-\bar{p}\hat{x}} [(-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) \cdot \text{sen}(\bar{q}\hat{x}) + (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) \cdot \cos(\bar{q}\hat{x})] - (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) \} \quad (4.117)$$

Se $\hat{x} < x$,

$$I\Psi 0d(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \Psi(r = -\hat{x} + x) dx = \frac{c_1(e^{-\sqrt{y_1}(L-\hat{x})} - 1)}{(-\sqrt{y_1})} + \frac{c_2}{\bar{q}^2 + \bar{p}^2} \left\{ \bar{q} \cdot e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} \left[\text{sen}(\bar{q}(L-\hat{x})) - \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \cos(\bar{q}(L-\hat{x})) \right] + \bar{p} \right\} - \frac{c_3}{\bar{q}^2 + \bar{p}^2} \left\{ \bar{q} \cdot e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} \left[\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \text{sen}(\bar{q}(L-\hat{x})) + \cos(\bar{q}(L-\hat{x})) \right] - \bar{q} \right\} \quad (4.118)$$

$$I\Psi 1a(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d\Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr} dx = C_1(e^{-\sqrt{y_1}(L-\hat{x})} - 1) + C_2[e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} \cdot \cos(\bar{q}(L-\hat{x})) - 1] + C_3[e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} \cdot \text{sen}(\bar{q}(L-\hat{x}))] \quad (4.119)$$

$$I\Psi 2a(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d^2 \Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr^2} dx = -C_1 \sqrt{y_1} (e^{-\sqrt{y_1}(L-\hat{x})} - 1) + C_2 [-\bar{p} \cdot e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} \cdot \cos(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x}) + \bar{p} + \bar{q} \cdot e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} \cdot \sin(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x})] + C_3 [-\bar{p} \cdot e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} \cdot \sin(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x}) - \bar{q} + \bar{q} \cdot e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} \cdot \cos(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x})] \quad (4.120)$$

$$I\Psi 3a(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d^3 \Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr^3} dx = C_1 \cdot y_1 (e^{-\sqrt{y_1}(L-\hat{x})} - 1) + C_2 \cdot e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} [\bar{a} \cdot \cos(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x}) + \bar{b} \cdot \sin(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x}) - \bar{a}] + C_3 \cdot e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} [\bar{a} \cdot \sin(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x}) - \bar{b} \cdot \cos(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x}) + \bar{b}] \quad (4.121)$$

$$I\Psi 4a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d^4 \Psi(r=\hat{x}-x)}{dr^4} dx = -C_1 \cdot y_1 \sqrt{y_1} (e^{-\sqrt{y_1}(L-\hat{x})} - 1) + C_2 \{e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} [(-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) \cos(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x}) - (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) \sin(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x})] - (-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b})\} + C_3 \cdot \{e^{-\bar{p}(L-\hat{x})} [(-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) \cdot \sin(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x}) + (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) \cdot \cos(\bar{q}L - \bar{q}\hat{x})] - (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b})\} \quad (4.122)$$

Caso b: Três raízes reais positivas

Se $\hat{x} > x$,

$$I\Psi 0a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \Psi(r = \hat{x} - x) dx = -\frac{c_1(e^{-\hat{x}\sqrt{y_1}} - 1)}{\sqrt{y_1}} - \frac{c_2(e^{-\hat{x}\sqrt{y_2}} - 1)}{\sqrt{y_2}} - \frac{c_3(e^{-\hat{x}\sqrt{y_3}} - 1)}{\sqrt{y_3}} \quad (4.123)$$

$$I\Psi 1a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d\Psi(r=\hat{x}-x)}{dr} dx = C_1(e^{-\hat{x}\sqrt{y_1}} - 1) + C_2(e^{-\hat{x}\sqrt{y_2}} - 1) + C_3(e^{-\hat{x}\sqrt{y_3}} - 1) \quad (4.124)$$

$$I\Psi 2a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d^2 \Psi(r=\hat{x}-x)}{dr^2} dx = -C_1 \sqrt{y_1} (e^{-\hat{x}\sqrt{y_1}} - 1) - C_2 \sqrt{y_2} (e^{-\hat{x}\sqrt{y_2}} - 1) - C_3 \sqrt{y_3} (e^{-\hat{x}\sqrt{y_3}} - 1) \quad (4.125)$$

$$I\Psi 3a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d^3 \Psi(r=\hat{x}-x)}{dr^3} dx = C_1 \sqrt{y_1} (e^{-\hat{x}\sqrt{y_1}} - 1) + C_2 \sqrt{y_2} (e^{-\hat{x}\sqrt{y_2}} - 1) + C_3 \sqrt{y_3} (e^{-\hat{x}\sqrt{y_3}} - 1) \quad (4.126)$$

$$I\Psi 4a(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \frac{d^4 \Psi(r=\hat{x}-x)}{dr^4} dx == -C_1 y_1 \sqrt{y_1} (e^{-\hat{x}\sqrt{y_1}} - 1) - C_2 y_2 \sqrt{y_2} (e^{-\hat{x}\sqrt{y_2}} - 1) - C_3 y_3 \sqrt{y_3} (e^{-\hat{x}\sqrt{y_3}} - 1) \quad (4.127)$$

Se $\hat{x} < x$,

$$I\Psi 0d(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \Psi(r = -\hat{x} + x) dx = -\frac{c_1(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_1}} - 1)}{\sqrt{y_1}} - \frac{c_2(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_2}} - 1)}{\sqrt{y_2}} - \frac{c_3(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_3}} - 1)}{\sqrt{y_3}} \quad (4.128)$$

$$I\Psi 1d(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d\Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr} dx = C_1(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_1}} - 1) + C_2(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_2}} - 1) + C_3(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_3}} - 1) \quad (4.129)$$

$$I\Psi 2d(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d^2\Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr^2} dx = -C_1\sqrt{y_1}(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_1}} - 1) - C_2\sqrt{y_2}(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_2}} - 1) - C_3\sqrt{y_3}(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_3}} - 1) \quad (4.130)$$

$$I\Psi 3d(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d^3\Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr^3} dx = C_1\sqrt{y_1}(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_1}} - 1) + C_2\sqrt{y_2}(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_2}} - 1) + C_3\sqrt{y_3}(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_3}} - 1) \quad (4.131)$$

$$I\Psi 4a(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^L \frac{d^4\Psi(r=-\hat{x}+x)}{dr^4} dx = -C_1y_1\sqrt{y_1}(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_1}} - 1) - C_2y_2\sqrt{y_2}(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_2}} - 1) - C_3y_3\sqrt{y_3}(e^{-(L-\hat{x})\sqrt{y_3}} - 1) \quad (4.132)$$

5. ESTABILIDADE DA BARRA DE BICKFORD-REDDY E O MEC

Neste capítulo será abordada a análise linear da estabilidade estática do modelo Bickford-Reddy pelo Método dos elementos de contorno.

5.1. Equação governante do problema real

Se valores nulos forem atribuídos aos coeficientes K_1 e K_2 em (2.113) e (2.114), as equações governantes para o estudo da estabilidade de barras de Bickford-Reddy livres de fundação elásticas podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ q \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

5.2. Problema fundamental

Processo similar ao que foi desenvolvido nos Capítulos 3 e 4, a descrição do problema fundamental e suas soluções são realizadas para o caso da estabilidade. Assim, quando uma fonte em carga é aplicada no domínio do problema fundamental, equações governantes análogas a (5.1) recaem em um sistema de equações acopladas dado por:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \phi^{*q}(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

E, no caso da aplicação de fonte em momento, as equações governantes ficam:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) \\ \phi^{*m}(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta(x, \hat{x}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

A título de simplificação, podem-se expressar as Equações (5.2) e (5.3) como:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \phi^{*m}(x, \hat{x}) & \phi^{*q}(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

A Equação (5.4) pode ser escrita da forma:

$$[B] \cdot [G] = [f] \quad (5.5)$$

Na qual se define a matriz dos operadores, $[B]$, a matriz dos deslocamentos, $[G]$, e a matriz das fontes $[f]$, sendo:

$$[B] = \begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$[f] = \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Conforme discutido nos capítulos anteriores, o desacoplamento das equações governantes do problema fundamental é feito mediante o método de Hörmander, relação (3.12), gerando uma equação diferencial desacoplada e escrita em função de Ψ . Dito isso, Combinando-se (5.6) e (3.12), a equação desacoplada equivalente fica:

$$a \cdot \frac{d^6 \Psi}{dx^6} + b_3 \cdot \frac{d^4 \Psi}{dx^4} + c_3 \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = \delta(x, \hat{x}) \quad (5.9)$$

Sendo:

$$a = \bar{D}_x \cdot H_x \cdot \alpha^2 - \hat{F}_x^2 \cdot \alpha^2 \quad (5.10)$$

$$b_3 = -\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x - \bar{A}_{xz} \cdot H_x \cdot \alpha^2 - \bar{D}_x \cdot P \quad (5.11)$$

$$c_3 = -\bar{A}_{xz} \cdot P \quad (5.12)$$

A Equação (5.9) é resolvida a partir da sua forma homogênea:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} \left[a \frac{d^4 \Psi}{dx^4} + b_3 \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + c_3 \right] = 0 \quad (5.13)$$

Fazendo $\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = y$, a solução proposta dependerá das raízes, y_1 e y_2 , dadas por:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad (5.14)$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad (5.15)$$

Sendo $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$, então a solução proposta nessa pesquisa para o problema da viga de Bickford-Reddy associada à estabilidade, é dada por:

$$\Psi = C_1 + C_2 \cdot r + C_3 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_4 \cdot \sin(\sqrt{-y_2} \cdot r) \quad (5.16)$$

No capítulo 3 foi apresentado o processo de derivação e obtenção das constantes. Dito isto, para o caso da estabilidade, as derivadas da função Ψ em relação a r são dadas por:

$$\frac{d\psi}{dr} = [C_2 + C_3 \cdot (-\sqrt{y_1})e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_4 \cdot \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} \cdot r)] \quad (5.17)$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = C_3 \cdot y_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_4 \cdot y_2 \sin(\sqrt{-y_2} \cdot r) \quad (5.18)$$

$$\frac{d^3\psi}{dr^3} = [C_3 \cdot y_1 (-\sqrt{y_1})e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_4 \cdot y_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} \cdot r)] \quad (5.19)$$

$$\frac{d^4\psi}{dr^4} = C_3 \cdot y_1^2 e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_4 \cdot y_2^2 \cdot \sin(\sqrt{-y_2} \cdot r) \quad (5.20)$$

$$\frac{d^5\psi}{dr^5} = [C_3 \cdot y_1^2 (-\sqrt{y_1})e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_4 \cdot y_2^2 \sqrt{-y_2} \cdot \cos(\sqrt{-y_2} \cdot r)] \quad (5.21)$$

$$\frac{d^6\psi}{dr^6} = C_3 \cdot y_1^3 e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_4 \cdot y_2^3 \sin(\sqrt{-y_2} \cdot r) \quad (5.22)$$

E o sistema para determinar as constantes, fica:

$$\begin{cases} C_2 + C_3(-\sqrt{y_1}) + C_4 \cdot \sqrt{-y_2} = 0 \\ C_3 \cdot y_1(-\sqrt{y_1}) + C_4 \cdot y_2 \sqrt{-y_2} = 0 \\ 2 \cdot a \cdot [C_3 \cdot y_1^2(-\sqrt{y_1}) + C_4 \cdot y_2^2 \sqrt{-y_2}] = 1 \end{cases} \quad (5.23)$$

A solução do sistema, Equação (5.23), resulta nas seguintes constantes:

$$C_1 = 0 \quad (5.24)$$

$$C_2 = \frac{2}{2 \cdot a \cdot y_1 y_2} \quad (5.25)$$

$$C_3 = -\frac{1}{2 \cdot a \cdot (y_1 - y_2)(y_1)^{3/2}} \quad (5.26)$$

$$C_4 = \frac{1}{2 \cdot a \cdot (y_1 - y_2)(-y_2)^{3/2}} \quad (5.27)$$

Após a determinação das constantes da função Ψ (5.16), as soluções fundamentais podem ser obtidas utilizando-se (3.16), resultando em:

$$\omega^{*q} = \bar{D}_x \cdot \frac{d\psi^2}{d^2x} - \bar{A}_{xz} \quad (5.28)$$

$$\omega^{*m} = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d\psi^3}{d^3x} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi}{dx} \quad (5.29)$$

$$\phi^{*q} = \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi}{dx} + \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d\psi^3}{d^3x} \quad (5.30)$$

$$\phi^{*m} = -\alpha^2 \cdot H_x \cdot \frac{d\psi^4}{d^4x} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi^2}{d^2x} - P \cdot \frac{d\psi^2}{d^2x} \quad (5.31)$$

Os esforços reais para o problema da estabilidade podem ser obtidos pela atribuição de valores nulos aos coeficientes K_1 e K_2 nas Equações (2.110), (2.55) e (2.67), resultando em:

$$V_x = \alpha \frac{dP_x}{dx} + \hat{Q}_x + P \cdot \frac{d\omega(x)}{dx} \quad (5.32)$$

$$\alpha \cdot P_x = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \quad (5.33)$$

$$\hat{M}_x = \bar{D}_x \frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \quad (5.34)$$

Já as soluções fundamentais em esforços são obtidas similarmente aos esforços reais, Equações (5.32) a (5.34). Quando a fonte em carga é ativada, eles ficam:

$$V_x^{*q} = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \phi^{*q}(x)}{dx^2} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^3 \omega^{*q}(x)}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \left[\phi^{*q}(x) + \frac{d\omega^{*q}(x)}{dx} \right] + P \cdot \frac{d\omega^{*q}}{dx} \quad (5.35)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*q} = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d\phi^{*q}(x)}{dx} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^2 \omega^{*q}(x)}{dx^2} \quad (5.36)$$

$$\hat{M}_x^{*q} = \bar{D}_x \frac{d\phi^{*q}(x)}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega^{*q}(x)}{dx^2} \quad (5.37)$$

Ou ainda em relação à função escalar Ψ :

$$V_x^{*q} = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^5 \Psi}{dx^5} + \left[2 \cdot \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + P \cdot \bar{D}_x \right] \frac{d^3 \Psi}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \cdot P \cdot \frac{d\Psi}{dx} \quad (5.38)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*q} = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^4 \Psi}{dx^4} + \left[\alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x \right] \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \quad (5.39)$$

$$\hat{M}_x^{*q} = \left[\bar{D}_x \cdot \bar{A}_{xz} + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x \right] \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \quad (5.40)$$

Semelhantemente, os esforços fundamentais associados à aplicação da fonte em momento em relação a função Ψ são:

$$V_x^{*m} = -2 \cdot \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot P \frac{d^4 \Psi}{dx^4} - 2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot P \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \quad (5.41)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*m} = \left[\bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x - \hat{F}_x \cdot P \right] \frac{d^3 \Psi}{dx^3} \quad (5.42)$$

$$\hat{M}_x^{*m} = \left[-\alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x + \alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 \right] \frac{d^5 \Psi}{dx^5} + \left[\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x - \bar{D}_x \cdot P \right] \frac{d^3 \Psi}{dx^3} \quad (5.43)$$

Sendo $\bar{A}_{xz}$ expresso na Equação (3.32), $\bar{D}_x$ em (3.33), $\hat{D}_x, \hat{F}_x, \hat{A}_{xz}$ enunciados, respectivamente, nas Equações (2.58), (2.59) e (2.60), D_x, F_x e H_x na Equação (2.62) e A_{xz} e F_{xz} em (2.63).

5.3. Equação integral

Assim como nos Capítulos 3 e 4, será abordado o Teorema da Reciprocidade de Betty para transformar as equações de equilíbrio do problema em equações integrais equivalentes.

Se, em um primeiro caso, for admitida a fonte aplicada em força “ q^{*} ” no problema fundamental, esse mobiliza tensões e deformações (σ_x^{*q} , τ_{xz}^{*q} , ε_x^{*q} , γ_{xz}^{*q}). O teorema reciprocidade correlaciona os campos de deformações e tensões dos problemas reais e fundamentais pela seguinte relação:

$$\int_V (\tau_{xz} \gamma_{xz}^{*q}) dV + \int_V (\sigma_x \varepsilon_x^{*q}) dV - \int_L \left(P \cdot \frac{d\omega}{dx} \cdot \frac{d\omega^{*q}}{dx} \right) dx = \int_V (\sigma_x^{*q} \varepsilon_x) dV + \int_V (\tau_{xz}^{*q} \gamma_{xz}) dV - \int_L \left(P \cdot \frac{d\omega^{*q}}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} \right) dx \quad (5.44)$$

Substituindo-se os esforços, utilizando-se convenientes integrações por partes e aplicando as propriedades do delta de Dirac dadas em (3.4), a equação integral para os deslocamentos transversais ficam:

$$\omega(\hat{x}) + [V_x^{*q} \omega]_0^L - \left[\alpha P_x^{*q} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x^{*q} \phi]_0^L = [V_x \omega^{*q}]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*q}}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x \phi^{*q}]_0^L + \int_0^L (q \cdot \omega^{*q} + m \cdot \phi^{*q}) dx \quad (5.45)$$

Por outro lado quando o problema fundamental está sob fonte em momento, após aplicação do teorema da reciprocidade, seguida de integrações por partes pertinentes e ainda com o auxílio das propriedades do delta Dirac, a equação integral da rotação ϕ fica:

$$\phi(\hat{x}) + [V_x^{*m} \omega]_0^L - \left[\alpha P_x^{*m} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x^{*m} \phi]_0^L = [V_x \omega^{*m}]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*m}}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x \phi^{*m}]_0^L + \int_0^L (q \cdot \omega^{*m} + m \cdot \phi^{*m}) dx \quad (5.46)$$

Para tornar o sistema de possível resolução, a terceira equação integral será a derivada em relação ao ponto fonte da equação em ω , que dará a inclinação da elástica ($d\omega/d\hat{x}$).

$$\frac{d\omega(\hat{x})}{d\hat{x}} + \left[\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}} \omega \right]_0^L - \left[\alpha \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + \left[\frac{d\hat{M}_x^{*q}}{d\hat{x}} \phi \right]_0^L = \left[V_x \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\omega^{*q}}{dx} \right) \right]_0^L + \left[\hat{M}_x \frac{d\phi^{*q}}{d\hat{x}} \right]_0^L + \int_0^L \left(q \cdot \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} + m \cdot \frac{d\phi^{*q}}{d\hat{x}} \right) dx \quad (5.47)$$

Se descritas na forma matricial as Equações (5.45), (5.46) e (5.47), um sistema de equações integrais pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{matrix} \omega(\hat{x}) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(\hat{x}) \\ \emptyset(\hat{x}) \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} V_x^{*q}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(x, \hat{x}) & M_x^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{V_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot \frac{P_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{M_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ V_x^{*m}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(x, \hat{x}) & M_x^{*m}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} \omega(x) \\ \omega_x \\ \emptyset(x) \end{matrix} \right\}_0^L = \\
& \left\{ \begin{bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{d}{d\hat{x}} \left[\frac{d\omega^{*q}}{dx}(x, \hat{x}) \right] & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ \omega_m^{*q}(x, \hat{x}) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} V_x \\ -\alpha \cdot P_x \\ \hat{M}_x \end{matrix} \right\}_0^L + \\
& \int_0^L \begin{bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} q \\ m \end{matrix} \cdot dx \quad (5.48)
\end{aligned}$$

5.4. Equação algébrica

O sistema algébrico do MEC requer apenas variáveis a serem determinadas no contorno. Desta forma, faz-se a colocação do ponto-fonte de força na extremidade inicial $\hat{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(0 + \varepsilon)$ e na extremidade final, $\hat{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(L - \varepsilon)$, obtendo-se a representação algébrica do problema:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \quad (5.49)$$

A matriz de influência [H] pode ser analogamente escrita à Equação (3.93) e a matriz [G] analogamente às (3.98) a (3.98), isto é:

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \text{ e } [G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

Em que:

$$H_{11} = \begin{bmatrix} -sa \cdot \eta_{11}(0) & \eta_{12}(0) & -\eta_{13}(0) \\ -\eta_{21}(0) & sa \cdot \eta_{22}(0) & -sa \cdot \eta_{23}(0) \\ -\eta_{31}(0) & sa \cdot \eta_{32}(0) & -sa \cdot \eta_{33}(0) \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$H_{12} = \begin{bmatrix} sd \cdot \eta_{11}(L) & -\eta_{12}(L) & \eta_{13}(L) \\ \eta_{21}(L) & -sd \cdot \eta_{22}(L) & sd \cdot \eta_{23}(L) \\ \eta_{31}(L) & -sd \cdot \eta_{32}(L) & sd \cdot \eta_{33}(L) \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$H_{21} = \begin{bmatrix} -sa \cdot \eta_{11}(L) & \eta_{12}(L) & -\eta_{13}(L) \\ -\eta_{21}(L) & sa \cdot \eta_{22}(L) & -sa \cdot \eta_{23}(L) \\ -\eta_{31}(L) & sa \cdot \eta_{32}(L) & -sa \cdot \eta_{33}(L) \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$H_{22} = \begin{bmatrix} sd.\eta_{11}(0) & -\eta_{12}(0) & \eta_{13}(0) \\ \eta_{21}(0) & -sd.\eta_{22}(0) & sd.\eta_{23}(0) \\ \eta_{31}(0) & -sd.\eta_{32}(0) & sd.\eta_{33}(0) \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$[G_{11}] = \begin{bmatrix} -\beta_{11}(0) & sa.\beta_{12}(0) & -sa.\beta_{13}(0) \\ -sa.\beta_{21}(0) & \beta_{22}(0) & -\beta_{23}(0) \\ -sa.\beta_{31}(0) & \beta_{32}(0) & -\beta_{33}(0) \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$[G_{12}] = \begin{bmatrix} \beta_{11}(L) & -sd.\beta_{12}(L) & sd.\beta_{13}(L) \\ sd.\beta_{21}(L) & -\beta_{22}(L) & \beta_{23}(L) \\ sd.\beta_{31}(L) & -\beta_{32}(L) & \beta_{33}(L) \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$[G_{21}] = \begin{bmatrix} -\beta_{11}(L) & sa.\beta_{12}(L) & -sa.\beta_{13}(L) \\ -sa.\beta_{21}(L) & \beta_{22}(L) & -\beta_{23}(L) \\ -sa.\beta_{31}(L) & \beta_{32}(L) & -\beta_{33}(L) \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

$$[G_{22}] = \begin{bmatrix} \beta_{11}(0) & -sd.\beta_{12}(0) & sd.\beta_{13}(0) \\ sd.\beta_{21}(0) & -\beta_{22}(0) & \beta_{23}(0) \\ sd.\beta_{31}(0) & -\beta_{32}(0) & \beta_{33}(0) \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Onde, sa e sd são dados em (3.103) e (3.104).

Já as funções $\eta_{ij}(r)$ e $\beta_{ij}(r)$ para o problema da estabilidade de barras apoiadas no meio contínuo ficam:

$$\eta_{11}(r) = \left[\alpha^2.\hat{F}_x^2 - \alpha^2.\bar{D}_x.H_x \right] \frac{d^5\psi(r)}{dr^5} + \left[2.\alpha.\bar{A}_{xz}.\hat{F}_x + \alpha^2.\bar{A}_{xz}.H_x + \bar{A}_{xz}.\bar{D}_x + \bar{D}_x.P \right] \frac{d^3\psi(r)}{dr^3} - \bar{A}_{xz}.P \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (5.58)$$

$$\eta_{21}(r) = - \left[\alpha^2.\hat{F}_x^2 - \alpha^2.\bar{D}_x.H_x \right] \frac{d^6\psi(r)}{dr^6} - \left[2.\alpha.\bar{A}_{xz}.\hat{F}_x + \alpha^2.\bar{A}_{xz}.H_x + \bar{A}_{xz}.\bar{D}_x + \bar{D}_x.P \right] \frac{d^5\psi(r)}{dr^5} + \bar{A}_{xz}.P \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} \quad (5.59)$$

$$\eta_{31}(r) = - \left[2.\alpha.\hat{F}_x.P \right] \frac{d^4\psi(r)}{dr^4} - 2.\bar{A}_{xz}.P \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} \quad (5.60)$$

$$\eta_{12}(r) = \left[\alpha^2.\hat{F}_x^2 - \alpha^2.\bar{D}_x.H_x \right] \frac{d^4\psi(r)}{dr^4} + \left[\alpha.\bar{A}_{xz}.\hat{F}_x + \alpha^2.\bar{A}_{xz}.H_x \right] \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} \quad (5.61)$$

$$\eta_{22}(r) = - \left[\alpha^2.\hat{F}_x^2 - \alpha^2.\bar{D}_x.H_x \right] \frac{d^5\psi(r)}{dr^5} - \left[\alpha.\bar{A}_{xz}.\hat{F}_x + \alpha^2.\bar{A}_{xz}.H_x \right] \frac{d^3\psi(r)}{dr^3} \quad (5.62)$$

$$\eta_{32}(r) = \left[\bar{A}_{xz}.\hat{F}_x + \alpha^2.\bar{A}_{xz}.H_x - \hat{F}_x.P \right] \frac{d^3\psi(r)}{dr^3} \quad (5.63)$$

$$\eta_{13}(r) = \left[\bar{D}_x.\bar{A}_{xz} + \alpha.\bar{A}_{xz}.\hat{F}_x \right] \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} \quad (5.64)$$

$$\eta_{23}(r) = - \left[\bar{D}_x.\bar{A}_{xz} + \alpha.\bar{A}_{xz}.\hat{F}_x \right] \frac{d^3\psi(r)}{dr^3} \quad (5.65)$$

$$\eta_{33}(r) = \left[-\alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x + \alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 \right] \frac{d^5 \psi(r)}{dr^5} + \left[\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x - \bar{D}_x \cdot P \right] \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} \quad (5.66)$$

$$\beta_{11}(r) = \bar{D}_x \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} - \bar{A}_{xz} \quad (5.67)$$

$$\beta_{21}(r) = -\bar{D}_x \cdot \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (5.68)$$

$$\beta_{31}(r) = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (5.69)$$

$$\beta_{12}(r) = \bar{D}_x \cdot \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (5.70)$$

$$\beta_{22}(r) = -\bar{D}_x \cdot \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \quad (5.71)$$

$$\beta_{32}(r) = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \quad (5.72)$$

$$\beta_{13}(r) = \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} + \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3 \psi(r)}{dr^3} \quad (5.73)$$

$$\beta_{23}(r) = -\bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} - \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} \quad (5.74)$$

$$\beta_{33}(r) = -H_x \cdot \alpha^2 \frac{d^4 \psi(r)}{dr^4} + \bar{A}_{xz} \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} - P \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{d^2 x} \quad (5.75)$$

6. ESTABILIDADE DE BARRAS DE BICKFORD-REDDY APOIADAS EM BASE ELÁSTICA E O MEC

Neste capítulo será abordada a análise linear do modelo de barras de Bickford-Reddy a partir da implementação dos modelos de base elástica de Winkler e Pasternak para representar matematicamente barras submetidas à força axial de compressão, que provoquem flambagem na mesma. Desta forma, um dos objetivos é determinar a carga crítica de flambagem.

6.1. Equação governante do problema real

A equação governante do problema real da estabilidade de barra de Bickford – Reddy apoiada em base elástica de Pasternak foi discutida no capítulo 2. Reescrevendo as Equações (2.113) e (2.114) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ q \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

6.2. Problema fundamental

Assim como discutido nos capítulos anteriores, 3, 4 e 5, o problema fundamental está associado a uma barra de domínio infinito, regida pelos mesmos princípios do problema real, Equação (6.1), e submetida a uma fonte em força, q , e a outra em momento, m , atuando no ponto fonte, $\hat{x}$. Quando a fonte em força é ativada implica em $q^{*q}(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $m^{*q}(x, \hat{x}) = 0$, o sistema de equações governantes do problema fundamental da estabilidade de barras apoiadas base elástica fica:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \phi^{*q}(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Reescrevendo a Equação (6.2) em termos dos esforços, fica:

$$\frac{dV_x^{*q}}{dx} + q^{*q} - K_1 \cdot \omega^{*q} = 0 \quad (6.3)$$

$$m^{*q} + \frac{d\bar{M}_x^{*q}}{dx} - V_x^{*q} + (P - K_2) \frac{d\omega^{*q}}{dx} + \alpha \frac{dP_x^{*q}}{dx} = 0 \quad (6.4)$$

Da mesma forma, para a análise associada à fonte aplicada em momento tem-se: $m^{*m}(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $q^{*m}(x, \hat{x}) = 0$, a equação governante fica:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) \\ \phi^{*m}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Ou escrevendo-se o equilíbrio, Equação (6.5), em termos dos esforços, fica:

$$\frac{dV_x^{*m}}{dx} + q^{*m} - K_1 \cdot \omega^{*m} = 0 \quad (6.6)$$

$$m^{*m} + \frac{d\bar{M}_x^{*m}}{dx} - V_x^{*m} + (P - K_2) \frac{d\omega^{*m}}{dx} + \alpha \frac{dP_x^{*m}}{dx} = 0 \quad (6.7)$$

A título de simplificação, podem-se expressar as Equações (6.2) e (6.5) como:

$$\begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \phi^{*m}(x, \hat{x}) & \phi^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

A Equação (6.8) pode ser escrita da forma:

$$[B] \cdot [G] = [f] \quad (6.9)$$

Na qual se define a matriz dos operadores, $[B]$, a matriz dos deslocamentos, $[G]$, e a matriz das fontes $[f]$, sendo:

$$[B] = \begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \phi^{*m}(x, \hat{x}) & \phi^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$[f] = \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

A equação do problema fundamental da barra de Bickford – Reddy com base elástica, Equação (6.8), constitui-se em um sistema acoplado de variáveis, assim como nos capítulos 3, 4 e 5, utilizar-se-á o método de Hörmander, para fazer seu desacoplamento.

As soluções fundamentais podem ser escritas em função de uma função escalar conforme indicado na Equação (3.12), resultando em:

$$\omega^{*q} = \bar{D}_x \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \bar{A}_{xz} \cdot \Psi \quad (6.13)$$

$$\omega^{*m} = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d\Psi^3}{d^3 x} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\Psi}{dx} \quad (6.14)$$

$$\phi^{*q} = \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot \frac{d\Psi^3}{d^3 x} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\Psi}{dx} \quad (6.15)$$

$$\phi^{*m} = -\alpha^2 \cdot H_x \cdot \frac{d\Psi^4}{d^4 x} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d\Psi^2}{d^2 x} - P \cdot \frac{d\Psi^2}{d^2 x} - K_1 \cdot \Psi + K_2 \cdot \frac{d\Psi^2}{d^2 x} \quad (6.16)$$

A solução fundamental em esforços é obtida similar aos esforços reais, Equação (2.116). Reescrevendo os esforços, Equações (2.110), (2.55) e (2.67):

$$V_x = \alpha \frac{dP_x}{dx} + \hat{Q}_x + (P - K_2) \cdot \frac{d\omega}{dx} \quad (6.17)$$

$$\alpha \cdot P_x = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \quad (6.18)$$

$$\hat{M}_x = \bar{D}_x \frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \quad (6.19)$$

Substituindo $\hat{Q}_x$ (Equação 2.71) e P_x (Equação 2.55) em (6.17):

$$V_x = \left[\alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^3 \omega(x)}{dx^3} \right] + \bar{A}_{xz} \left[\phi(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right] + (P - K_2) \cdot \frac{d\omega(x)}{dx} \quad (6.20)$$

Analisando as Equações (6.17), (6.18) e (6.19) em relação ao efeito da força cortante:

$$V_x^{*q} = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \phi^{*q}}{dx^2} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^3 \omega^{*q}}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \left[\phi^{*q}(x) + \frac{d\omega^{*q}}{dx} \right] + (P - K_2) \cdot \frac{d\omega^{*q}}{dx} \quad (6.21)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*q} = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d\phi^{*q}}{dx} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^2 \omega^{*q}}{dx^2} \quad (6.22)$$

$$\hat{M}_x^{*q} = \bar{D}_x \frac{d\phi^{*q}}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega^{*q}}{dx^2} \quad (6.23)$$

Substituindo os esforços obtidos nas Equações (6.13) e (6.15):

$$V_x^{*q} = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d\Psi^5}{d^5 x} + \left[2 \cdot \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \bar{D}_x \cdot (P - K_2) \right] \frac{d^3 \Psi}{d^3 x} - [\bar{A}_{xz} \cdot (P - K_2)] \frac{d\Psi}{dx} \quad (6.24)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*q} = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d\Psi^4}{d^4 x} + [\alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x] \frac{d^2 \Psi}{d^2 x} \quad (6.25)$$

$$\hat{M}_x^{*q} = [\bar{D}_x \cdot \bar{A}_{xz} + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x] \frac{d^2 \Psi}{d^2 x} \quad (6.26)$$

Semelhantemente ao caso da fonte em força no problema fundamental, os esforços relacionados com as Equações (6.21), (6.22) e (6.23) e decorrentes da aplicação da fonte em momento ficam:

$$V_x^{*m} = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \phi^{*m}}{dx^2} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^3 \omega^{*m}}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \left[\phi^{*m} + \frac{d\omega^{*m}}{dx} \right] + (P - K_2) \cdot \frac{d\omega^{*m}}{dx} \quad (6.27)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*m} = \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d\phi^{*m}}{dx} - \alpha^2 \cdot H_x \frac{d^2 \omega^{*m}}{dx^2} \quad (6.28)$$

$$\hat{M}_x^{*m} = \bar{D}_x \frac{d\phi^{*m}}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega^{*m}}{dx^2} \quad (6.29)$$

Ou ainda quando esses esforços podem ser escritos em função das derivadas superiores da função Ψ pela substituição conveniente das Equações (6.14) e (6.15) em (6.27), (6.28), (6.29):

$$V_x^{*m} = \left[2 \cdot \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot (K_2 - P) \right] \frac{d^4 \Psi}{dx^4} + \left[2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot (K_2 - P) - \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot K_1 \right] \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \bar{A}_{xz} \cdot K_1 \cdot \Psi \quad (6.30)$$

$$\alpha \cdot P_x^{*m} = \left[\bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x - \hat{F}_x \cdot (P - K_2) \right] \frac{d^3 \Psi}{dx^3} - \hat{F}_x \cdot K_1 \cdot \frac{d\Psi}{dx} \quad (6.31)$$

$$\hat{M}_x^{*m} = \left[-\alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x + \alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 \right] \frac{d^5 \Psi}{dx^5} + \left[\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x - \bar{D}_x \cdot (P - K_2) \right] \frac{d^3 \Psi}{dx^3} - \bar{D}_x \cdot K_1 \cdot \frac{d\Psi}{dx} \quad (6.32)$$

Como também apresentado no Capítulo 3, a função escalar $\Psi(x, \hat{x})$, obtida a partir da relação da Equação (3.16), desacopla o sistema governante (6.8) propiciando uma equação diferencial escrita como:

$$a \cdot \frac{d^6 \Psi}{dx^6} + b_4 \cdot \frac{d^4 \Psi}{dx^4} + c_4 \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + d_4 \cdot \Psi = \delta(x, \hat{x}) \quad (6.33)$$

Sendo:

$$a = \bar{D}_x \cdot H_x \cdot \alpha^2 - \hat{F}_x^2 \cdot \alpha^2 \quad (6.34)$$

$$b_4 = -\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x - \bar{A}_{xz} \cdot H_x \cdot \alpha^2 - 2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x \cdot \alpha + \bar{D}_x \cdot P - \bar{D}_x \cdot K_2 \quad (6.35)$$

$$c_4 = -\bar{A}_{xz} \cdot P + \bar{D}_x \cdot K_1 + \bar{A}_{xz} \cdot K_2 \quad (6.36)$$

$$d_4 = -\bar{A}_{xz} \cdot K_1 \quad (6.37)$$

Fazendo $\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = y$, a equação diferencial (6.33) é resolvida a partir de sua forma homogênea:

$$a \cdot y^3 + b_3 \cdot y^2 + c_3 \cdot y^1 + d_3 \cdot y^0 = 0 \quad (6.38)$$

A solução proposta dependerá das raízes, y_1 , y_2 e y_3 , dada por:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{b_4}{3a} \quad (6.39)$$

$$y_2 = \frac{-(y_1 + \frac{b_4}{a}) + \sqrt{\Delta_1}}{2} \quad (6.40)$$

$$y_3 = \frac{-(y_1 + \frac{b_4}{a}) - \sqrt{\Delta_1}}{2} \quad (6.41)$$

Em que,

$$p = 2 \left(\frac{b_4}{3.a} \right)^3 - \frac{b_4.c_4}{3.a^2} + \frac{d_4}{a} \quad (6.42)$$

$$q = \frac{c_4}{a} - \frac{b_4^2}{3.a^2} \quad (6.43)$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3 \quad (6.44)$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3 \quad (6.45)$$

Caso a: Raiz real positiva e demais raízes complexas conjugadas

Se $\Delta > 0$ e $y_1 > 0$ então a função escalar toma uma forma análoga ao caso da flexão da barra apoiada em base elástica dado em (4.39), isto é:

$$\Psi = C_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) \quad (6.46)$$

Analogamente, as derivadas superiores de (6.46) podem ser escritas:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Psi}{dr} \frac{dr}{dx} = \{ & C_1 \cdot -\sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [-\bar{p} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - \bar{q} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r)] + \\ & C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [-\bar{p} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) + \bar{q} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)] \} \cdot \text{sgn}(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = & C_1 \cdot y_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [\bar{a} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) - \bar{b} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [\bar{a} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) - \\ & \bar{b} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)] \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\Psi}{dx^3} = \{ & -C_1 \cdot y_1 \sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) \cos(\bar{q} \cdot r) - (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) \text{sen}(\bar{q} \cdot r)] + \\ & C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) \text{sen}(\bar{q} \cdot r) + (\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) \cos(\bar{q} \cdot r)] \} \cdot \text{sgn}(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4\Psi}{dx^4} = & C_1 \cdot y_1^2 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) \cos(\bar{q} \cdot r) + 2 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{a}^2 - \\ & \bar{b}^2) \cdot \text{sen}(\bar{q} \cdot r) - 2 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \cos(\bar{q} \cdot r)] \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \Psi}{dx^5} = & \{C_1 \cdot y_1^2 \cdot -\sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(-\bar{p} \cdot \bar{a}^2 + \bar{q} \cdot \bar{b}^2 - 2 \cdot \bar{q} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) + \\ & (-\bar{q} \cdot \bar{a}^2 + \bar{q} \cdot \bar{p} \cdot \bar{b}^2 - 2 \cdot \bar{p} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \sin(\bar{q} \cdot r)] + C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{q} \cdot \bar{a}^2 - \bar{q} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{p} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \cos(\bar{q} \cdot r) + \\ & (-\bar{p} \cdot \bar{a}^2 + \bar{p} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{q} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \sin(\bar{q} \cdot r)]\} \cdot \text{sgn}(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \Psi}{dx^6} = & C_1 \cdot y_1^3 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{a}^3 - 3 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}^2) \cos(\bar{q} \cdot r) + (3 \cdot \bar{a}^2 \cdot \bar{b} - \bar{b}^3) \cdot \sin(\bar{q} \cdot r)] + \\ & C_3 \cdot e^{-\bar{p} \cdot r} [(\bar{b}^3 - 3 \cdot \bar{a}^2 \cdot \bar{b}) \cos(\bar{q} \cdot r) + (\bar{a}^3 - 3 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}^2) \sin(\bar{q} \cdot r)] \end{aligned} \quad (6.52)$$

Já o sistema para determinar as constantes fica análogo a Equação (4.55):

$$\begin{cases} C_1(-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot (-\bar{p}) + C_3 \cdot \bar{q} = 0 \\ C_1 \cdot y_1(-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot (-\bar{p} \cdot \bar{a} + \bar{q} \cdot \bar{b}) + C_3(\bar{q} \cdot \bar{a} + \bar{p} \cdot \bar{b}) = 0 \\ 2 \cdot a \cdot [C_1 \cdot y_1^2(-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot (-\bar{p} \cdot \bar{a}^2 + \bar{p} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{q} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) + C_3(\bar{q} \cdot \bar{a}^2 - \bar{q} \cdot \bar{b}^2 + 2 \cdot \bar{p} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b})] = 1 \end{cases} \quad (6.53)$$

A solução do sistema, Equação (6.53), resulta nas seguintes constantes:

$$C_1 = -\frac{1}{\mu \cdot \sqrt{y_1}} \cdot \frac{1}{2 \cdot (\bar{a}^2 - 2 \cdot \bar{a} \cdot y_1 + \bar{b}^2 + y_1^2)} \quad (6.54)$$

$$C_2 = \frac{\bar{b} \cdot \bar{p} - \bar{q} \cdot y_1 + \bar{a} \cdot \bar{q}}{\mu \cdot \bar{b}(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)} \cdot \frac{1}{2 \cdot (\bar{a}^2 - 2 \cdot \bar{a} \cdot y_1 + \bar{b}^2 + y_1^2)} \quad (6.55)$$

$$C_3 = -\frac{\bar{b} \cdot \bar{q} + \bar{p} \cdot y_1 - \bar{a} \cdot \bar{p}}{\mu \cdot \bar{b}(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)} \cdot \frac{1}{2 \cdot (\bar{a}^2 - 2 \cdot \bar{a} \cdot y_1 + \bar{b}^2 + y_1^2)} \quad (6.56)$$

Em que:

$$\mu = \bar{D}_x \cdot H_x \cdot \alpha^2 - \hat{F}_x^2 \cdot \alpha^2 \quad (6.57)$$

Caso b: Raízes reais (uma positiva e duas negativas)

Se $\Delta < 0$, $y_1 > 0$, $y_2 < 0$ e $y_3 < 0$ então a função escalar toma uma forma de:

$$\Psi = C_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) + C_3 \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_3} r) \quad (6.58)$$

Já as derivadas superiores de (6.58) e as condições para determinação das constantes C_1, C_2, C_3 ficam:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Psi}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{d\Psi}{dr} \cdot \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (6.59)$$

Onde,

$$\frac{d\Psi}{dr} = \{-C_1 \cdot \sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot \sqrt{-y_2} \cdot \cos(\sqrt{-y_2} r) + C_3 \cdot \sqrt{-y_3} \cdot \cos(\sqrt{-y_3} r)\} \quad (6.60)$$

Primeira condição para as constantes:

$$C_1(-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot \sqrt{-y_2} + C_3 \cdot \sqrt{-y_3} = 0 \quad (6.61)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dr^2} = C_1 \cdot y_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2(y_2) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) + C_3(y_3) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_3}r) \quad (6.62)$$

$$\frac{d^3\psi}{dx^3} = \frac{d^3\psi}{dr^3} \frac{d^3r}{dx^3} = \frac{d^3\psi}{dr^3} \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (6.63)$$

$$\frac{d^3\psi}{dr^3} = \{-C_1 \cdot y_1 \cdot \sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot y_2 \sqrt{-y_2} \cdot \cos(\sqrt{-y_2}r) + C_3 \cdot y_3 \sqrt{-y_3} \cdot \cos(\sqrt{-y_3}r)\} \quad (6.64)$$

Segunda condição para as constantes:

$$C_1 \cdot y_1(-\sqrt{y_1}) + C_2 \cdot y_2 \sqrt{-y_2} + C_3 y_3 \sqrt{-y_3} = 0 \quad (6.65)$$

$$\frac{d^4\psi}{dx^4} = \frac{d^4\psi}{dr^4} = C_1 \cdot y_1^2 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2(y_2^2) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) + C_3(y_3^2) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_3}r) \quad (6.66)$$

$$\frac{d^5\psi}{dx^5} = \frac{d^5\psi}{dr^5} \frac{d^5r}{dx^5} = \frac{d^5\psi}{dr^5} \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (6.67)$$

$$\frac{d^5\psi}{dr^5} = \{-C_1 \cdot y_1^2 \cdot \sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot y_2^2 \sqrt{-y_2} \cdot \cos(\sqrt{-y_2}r) + C_3 \cdot y_3^2 \sqrt{-y_3} \cdot \cos(\sqrt{-y_3}r)\} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^6\psi}{dx^6} &= C_1 \cdot y_1^3 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2(y_2^3) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) + \\ &C_3(y_3^2) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_3}r) + 2\delta(x, \hat{x}) \{C_1 \cdot y_1^2 \cdot -\sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot y_2^2 \sqrt{-y_2} \cdot \cos(\sqrt{-y_2}r) + \\ &C_3 \cdot y_3^2 \sqrt{-y_3} \cdot \cos(\sqrt{-y_3}r)\} \end{aligned} \quad (6.69)$$

A terceira condição para determinação das constantes é a própria Equação (6.33):

$$\begin{aligned} a. \{C_1 \cdot y_1^3 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2(y_2^3) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) + \\ C_3(y_3^2) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_3}r) + 2\delta(x, \hat{x}) \{C_1 \cdot y_1^2 \cdot -\sqrt{y_1} \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot y_2^2 \sqrt{-y_2} \cdot \cos(\sqrt{-y_2}r) + \\ C_3 \cdot y_3^2 \sqrt{-y_3} \cdot \cos(\sqrt{-y_3}r)\}\} + b_4. \{C_1 \cdot y_1^2 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2(y_2^2) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) + \\ C_3(y_3^2) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_3}r)\} + c_4. \{C_1 \cdot y_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2(y_2) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) + \\ C_3(y_3) \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_3}r)\} + d_4. \{C_1 \cdot e^{-\sqrt{y_1} \cdot r} + C_2 \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) + C_3 \cdot \text{sen}(\sqrt{-y_3}r)\} = 0 \end{aligned} \quad (6.70)$$

Após as simplificações em (6.70) resulta:

$$-y_1^2 \sqrt{y_1} C_1 - y_2^2 \sqrt{y_2} C_2 - y_3^2 \sqrt{y_3} C_3 = \frac{1}{2a} \quad (6.71)$$

Reunindo as Equações (6.61), (6.65) e (6.71), um sistema pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{y_1} & \sqrt{-y_2} & \sqrt{-y_3} \\ -y_1\sqrt{y_1} & y_2\sqrt{-y_2} & y_3\sqrt{-y_3} \\ -y_1^2\sqrt{y_1} & y_2^2\sqrt{-y_2} & y_3^2\sqrt{-y_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2a} \end{Bmatrix} \quad (6.72)$$

Após a solução do sistema, as constantes ficam:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2a} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)\sqrt{y_1}} \\ -\frac{1}{(y_1-y_2)(y_2-y_3)\sqrt{-y_2}} \\ \frac{1}{(y_1-y_3)(y_2-y_3)\sqrt{-y_3}} \end{Bmatrix} \quad (6.73)$$

6.3. Equação integral

Diferentemente dos Capítulos 3, 4 e 5, as equações integrais neste capítulo serão estabelecidas pelo método dos resíduos ponderados. Neste caso, a forma integral ponderada fica:

$$\int_0^L \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega(x) \\ \emptyset(x) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q \\ m \end{Bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) & \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.74)$$

Ativando-se apenas a fonte em força $q^{*q} = \delta(x, \hat{x})$ e $m^{*q} = 0$, a forma integral ponderada fica:

$$\int_0^L \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} + \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} & -\bar{D}_x \frac{d^2}{dx^2} + \bar{A}_{xz} \\ \alpha^2 H_x \frac{d^4}{dx^4} - \bar{A}_{xz} \frac{d^2}{dx^2} + P \frac{d^2}{dx^2} + K_1 - K_2 \frac{d^2}{dx^2} & -\alpha \hat{F}_x \frac{d^3}{dx^3} - \bar{A}_{xz} \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega(x) \\ \emptyset(x) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q \\ m \end{Bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) \\ \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} dx = 0 \quad (6.75)$$

Se o resíduo estiver escrito em termos de esforços, a forma integral ponderada fica:

$$\int_0^L \left[\frac{dV_x}{dx} + q(x) - K_1 \cdot \omega(x) \right] \omega^{*q}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L \left[m + \frac{d\bar{M}_x}{dx} - V_x + (P - K_2) \frac{d\omega}{dx} + \alpha \frac{dP_x}{dx} \right] \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (6.76)$$

Integrando-se convenientemente por partes fica:

$$[V_x \omega^{*q}(x, \hat{x})]_0^L + [\hat{M}_x \emptyset^{*q}(x, \hat{x})]_0^L + \int_0^L (-V_x \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx} - \hat{M}_x \frac{d\emptyset^{*q}}{dx}) dx + \int_0^L [q(x) - K_1 \cdot \omega(x)] \omega^{*q}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L [m - V_x + (P - K_2) \frac{d\omega}{dx} + \alpha \frac{dP_x}{dx}] \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (6.77)$$

Se (2.110) for substituída em (6.77) resulta:

$$[V_x \omega^{*q}(x, \hat{x})]_0^L + [\hat{M}_x \emptyset^{*q}(x, \hat{x})]_0^L - \int_0^L \{[\hat{Q}_x + (P - K_2) \frac{d\omega}{dx} + \alpha \frac{dP_x}{dx}] \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx} + \hat{M}_x \frac{d\emptyset^{*q}}{dx}\} dx + \int_0^L [q(x) - K_1 \cdot \omega(x)] \omega^{*q}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L (m - \hat{Q}_x) \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (6.78)$$

$$V_x = \alpha \frac{dP_x}{dx} + \hat{Q}_x + (P - K_2) \frac{d\omega^R}{dx} \quad (6.79)$$

Integrando-se convenientemente (6.78) por partes fica:

$$[V_x \omega^{*q}(x, \hat{x})]_0^L + [\hat{M}_x \emptyset^{*q}(x, \hat{x})]_0^L - [\alpha P_x \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx}]_0^L - \int_0^L \{(P - K_2) \frac{d\omega}{dx} \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx} + \hat{M}_x \frac{d\emptyset^{*q}}{dx} - \alpha P_x \frac{d^2 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2}\} dx + \int_0^L [q(x) - K_1 \cdot \omega(x)] \omega^{*q}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L \hat{Q}_x [\emptyset^{*q}(x, \hat{x}) + \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx}] dx + \int_0^L m \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (6.80)$$

A seguinte identidade pode ser escrita a partir de (2.71) e (6.80):

$$\hat{Q}_x [\emptyset^{*q}(x, \hat{x}) + \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx}] = \bar{A}_{xz} \left(\emptyset(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) [\emptyset^{*q}(x, \hat{x}) + \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx}] = \hat{Q}_x^{*q}(x, \hat{x}) \left(\emptyset(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} \right) \quad (6.81)$$

Utilizando (2.55), (2.67), (6.25) e (6.26), uma outra identidade pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \hat{M}_x \frac{d\emptyset^{*q}}{dx} - \alpha P_x \frac{d^2 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2} &= \left[\bar{D}_x \frac{d\emptyset(x)}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right] \frac{d\emptyset^{*q}}{dx} - \alpha \left[\hat{F}_x \frac{d\emptyset(x)}{dx} - \alpha H_x \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right] \frac{d^2 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2} \\ &= \left[\bar{D}_x \frac{d\emptyset^{*q}}{dx} - \alpha \cdot \hat{F}_x \frac{d^2 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2} \right] \frac{d\emptyset(x)}{dx} - \alpha \left[\hat{F}_x \frac{d\emptyset^{*q}}{dx} - \alpha H_x \frac{d^2 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2} \right] \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \\ &= \hat{M}_x^{*q} \frac{d\emptyset(x)}{dx} - \alpha P_x^{*q} \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \end{aligned} \quad (6.82)$$

Substituindo-se (6.81) e (6.82) em (6.80) fica:

$$[V_x \omega^{*q}(x, \hat{x})]_0^L + [\hat{M}_x \emptyset^{*q}(x, \hat{x})]_0^L - [\alpha P_x \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx}]_0^L - \int_0^L \{(P - K_2) \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx} \frac{d\omega}{dx} + \frac{d\emptyset(x)}{dx} \hat{M}_x^{*q} - \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \alpha P_x^{*q}\} dx - \int_0^L K_1 \omega^{*q}(x, \hat{x}) \omega(x) dx - \int_0^L \hat{Q}_x^{*q}(x, \hat{x}) [\emptyset(x) + \frac{d\omega}{dx}] dx + \int_0^L m \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L q(x) \omega^{*q}(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (6.83)$$

Fazendo uma integração por conveniente em (6.83) fica:

$$\begin{aligned}
& [V_x \omega^{*q}(x, \hat{x})]_0^L + [\widehat{M}_x \phi^{*q}(x, \hat{x})]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L - \left[\left\{ \widehat{Q}_x^{*q}(x, \hat{x}) + (P - \right. \right. \\
& K_2) \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx} \left. \right\} \omega(x) \right]_0^L - [\widehat{M}_x^{*q} \phi(x)]_0^L + \left[\alpha P_x^{*q} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \left\{ [(P - K_2) \frac{d^2 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2} + \right. \\
& \left. \frac{d\widehat{Q}_x^{*q}}{dx}] \omega(x) + \frac{d\widehat{M}_x^{*q}}{dx} \phi(x) - \frac{d\omega}{dx} \alpha \frac{dP_x^{*q}}{dx} \right\} dx - \int_0^L K_1 \omega^{*q}(x, \hat{x}) \omega(x) dx - \\
& \int_0^L \widehat{Q}_x^{*q}(x, \hat{x}) \phi(x) dx + \int_0^L m \phi^{*q}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L q(x) \omega^{*q}(x, \hat{x}) dx = 0
\end{aligned} \tag{6.84}$$

Integrando-se convenientemente por partes (6.84) resulta:

$$\begin{aligned}
& [V_x \omega^{*q}(x, \hat{x})]_0^L + [\widehat{M}_x \phi^{*q}(x, \hat{x})]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L - \left[\left\{ \widehat{Q}_x^{*q}(x, \hat{x}) + (P - K_2) \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx} + \right. \right. \\
& \left. \alpha \frac{dP_x^{*q}}{dx} \right\} \omega(x) \right]_0^L - [\widehat{M}_x^{*q} \phi(x)]_0^L + \left[\alpha P_x^{*q} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \left\{ [(P - K_2) \frac{d^2 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2} + \frac{d\widehat{Q}_x^{*q}}{dx} + \right. \\
& \left. \alpha \frac{d^2 dP_x^{*q}}{dx^2} - K_1 \omega^{*q}(x, \hat{x})] \omega(x) + \left[\frac{d\widehat{M}_x^{*q}}{dx} - \widehat{Q}_x^{*q} \right] \phi(x) \right\} dx + \int_0^L m \phi^{*q}(x, \hat{x}) dx + \\
& \int_0^L q(x) \omega^{*q}(x, \hat{x}) dx = 0
\end{aligned} \tag{6.85}$$

Substituindo-se (2.110), (6.3) e (6.4) em (6.85) resulta:

$$\begin{aligned}
& [V_x \omega^{*q}(x, \hat{x})]_0^L + [\widehat{M}_x \phi^{*q}(x, \hat{x})]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L - [V_x^{*q} \omega(x)]_0^L - [\widehat{M}_x^{*q} \phi(x)]_0^L + \\
& \left[\alpha P_x^{*q} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \left\{ [(P - K_2) \frac{d^2 \omega^{*q}(x, \hat{x})}{dx^2} + \frac{d\widehat{Q}_x^{*q}}{dx} + \alpha \frac{d^2 dP_x^{*q}}{dx^2} - K_1 \omega^{*q}(x, \hat{x})] \omega(x) + \left[\frac{d\widehat{M}_x^{*q}}{dx} - \right. \right. \\
& \left. \widehat{Q}_x^{*q} \right] \phi(x) \left. \right\} dx + \int_0^L m \phi^{*q}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L q(x) \omega^{*q}(x, \hat{x}) dx = 0
\end{aligned} \tag{6.86}$$

Substituindo-se (6.3) e (6.4) em (6.86) fica:

$$\begin{aligned}
& [V_x^{*q} \omega]_0^L - \left[\alpha P_x^{*q} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + [\widehat{M}_x^{*q} \phi]_0^L + \int_0^L (q^{*q} \cdot \omega) dx + \int_0^L (m^{*q} \cdot \phi) dx = [V_x \omega^{*q}]_0^L - \\
& \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*q}}{dx} \right]_0^L + [\widehat{M}_x \phi^{*q}]_0^L + \int_0^L (q \cdot \omega^{*q}) dx + \int_0^L (m \cdot \phi^{*q}) dx
\end{aligned} \tag{6.87}$$

Como a ativação da fonte é em força e ainda levando-se em conta a propriedade de translação do delta de Dirac em (6.87), a equação integral para o deslocamento transversal no domínio fica:

$$\begin{aligned}
& \omega(\hat{x}) + [V_x^{*q} \omega]_0^L - \left[\alpha P_x^{*q} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + [\widehat{M}_x^{*q} \phi]_0^L = [V_x \omega^{*q}]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*q}}{dx} \right]_0^L + [\widehat{M}_x \phi^{*q}]_0^L + \\
& \int_0^L (q \cdot \omega^{*q} + m \cdot \phi^{*q}) dx
\end{aligned} \tag{6.88}$$

Para o caso da aplicação da fonte em momento $m^{*m} = \delta(x, \hat{x})$ e $q^{*m} = 0$, a forma integral ponderada fica:

$$\int_0^L \left[\frac{dV_x}{dx} + q(x) - K_1 \cdot \omega(x) \right] \omega^{*m}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L \left[m + \frac{d\hat{M}_x}{dx} - V_x + (P - K_2) \frac{d\omega}{dx} + \alpha \frac{dP_x}{dx} \right] \phi^{*m}(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (6.89)$$

Análogo ao processo realizado quando a ponderação foi em “ q ” chega-se a uma relação dada por:

$$\begin{aligned} & [V_x \omega^{*m}(x, \hat{x})]_0^L + [\hat{M}_x \phi^{*m}(x, \hat{x})]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*m}(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L - [V_x^{*m} \omega(x)]_0^L - [\hat{M}_x^{*m} \phi(x)]_0^L + \\ & \left[\alpha P_x^{*m} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \left\{ [(P - K_2) \frac{d^2 \omega^{*m}(x, \hat{x})}{dx^2} + \frac{d\hat{Q}_x^{*m}}{dx} + \alpha \frac{d^2 dP_x^{*m}}{dx^2} - K_1 \omega^{*q}(x, \hat{x})] \omega(x) + \right. \\ & \left. \left[\frac{d\hat{M}_x^{*m}}{dx} - \hat{Q}_x^{*m} \right] \phi(x) \right\} dx + \int_0^L m \phi^{*m}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L q(x) \omega^{*m}(x, \hat{x}) dx = 0 \end{aligned} \quad (6.90)$$

Substituindo-se (6.6) e (6.7) em (6.90) resulta:

$$\begin{aligned} & [V_x^{*m} \omega]_0^L - \left[\alpha P_x^{*m} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x^{*m} \phi]_0^L + \int_0^L (q^{*m} \cdot \omega) dx + \int_0^L (m^{*m} \cdot \phi) dx = [V_x \omega^{*m}]_0^L - \\ & \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*m}}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x \phi^{*m}]_0^L + \int_0^L (q \cdot \omega^{*m}) dx + \int_0^L (m \cdot \phi^{*m}) dx \end{aligned} \quad (6.91)$$

Como foi ativada apenas a fonte em momento, e ainda aplicando-se a translação do delta de Dirac em (6.91), a equação integral para a rotação da seção transversal no domínio fica:

$$\begin{aligned} & \phi(\hat{x}) + [V_x^{*m} \omega]_0^L - \left[\alpha P_x^{*m} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x^{*m} \phi]_0^L = [V_x \omega^{*m}]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d\omega^{*m}}{dx} \right]_0^L + [\hat{M}_x \phi^{*m}]_0^L + \\ & \int_0^L (q \cdot \omega^{*m} + m \cdot \phi^{*m}) dx \end{aligned} \quad (6.92)$$

Porém o problema estudado apresenta três incógnitas (V_x , αP_x e $\hat{M}_x$), logo será necessária mais uma equação para que o sistema seja de possível resolução. Assim a terceira equação integral será a derivada em relação ao ponto fonte da equação em ω , que dará a inclinação da elástica ($d\omega/d\hat{x}$).

$$\begin{aligned} & \frac{d\omega(\hat{x})}{d\hat{x}} + \left[\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}} \omega \right]_0^L - \left[\alpha \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}} \frac{d\omega}{dx} \right]_0^L + \left[\frac{d\hat{M}_x^{*q}}{d\hat{x}} \phi \right]_0^L = \left[V_x \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right]_0^L - \left[\alpha P_x \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\omega^{*q}}{dx} \right) \right]_0^L + \left[\hat{M}_x \frac{d\phi^{*q}}{d\hat{x}} \right]_0^L + \\ & \int_0^L \left(q \cdot \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} + m \cdot \frac{d\phi^{*q}}{d\hat{x}} \right) dx \end{aligned} \quad (6.93)$$

Organizando as Equações (6.88), (6.92) e (6.93) na forma matricial, fica:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{pmatrix} \omega(\hat{x}) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(\hat{x}) \\ \emptyset(\hat{x}) \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} V_x^{*q}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(x, \hat{x}) & M_x^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{V_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot \frac{P_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{M_x^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ V_x^{*m}(x, \hat{x}) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(x, \hat{x}) & M_x^{*m}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega(x) \\ \frac{d\omega(x)}{dx} \\ \emptyset(x) \end{pmatrix} \right\}_0^L = \\
& \left\{ \begin{bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{d}{d\hat{x}} \left[\frac{d\omega^{*q}}{dx}(x, \hat{x}) \right] & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ \omega_m^{*q}(x, \hat{x}) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x(x) \\ -\alpha \cdot P_x(x) \\ \hat{M}_x(x) \end{pmatrix} \right\}_0^L + \\
& \int_0^L \begin{bmatrix} \omega^{*q}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*q}(x, \hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) & \frac{\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x, \hat{x}) \\ \omega^{*m}(x, \hat{x}) & \emptyset^{*m}(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q(x) \\ m(x) \end{pmatrix} \cdot dx \quad (6.94)
\end{aligned}$$

6.4. Equação algébrica

O sistema algébrico do MEC possui apenas variáveis a serem determinadas no contorno. Assim, é necessário que a equação integral, Equação (6.94), tenha pontos de colocação no contorno da viga, na extremidade inicial quando $\hat{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (0 + \varepsilon)$ e na extremidade final para a qual $\hat{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (L - \varepsilon)$, obtendo-se a expressão geral da representação algébrica:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \omega(0+\varepsilon) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(0+\varepsilon) \\ \emptyset(0+\varepsilon) \\ \omega(L-\varepsilon) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(L-\varepsilon) \\ \omega(L-\varepsilon) \end{array} \right\} + \\
& \left[\begin{array}{cccccc} -V_x^{*q}(0,0+\varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*q}(0,0+\varepsilon) & -M_x^{*q}(0,0+\varepsilon) & V_x^q(L,0+\varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L,0+\varepsilon) & M_x^{*q}(L,0+\varepsilon) \\ -\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & \alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & -\frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & \frac{dV_x^q}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) \\ -V_x^{*m}(0,0+\varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*m}(0,0+\varepsilon) & -M_x^{*m}(0,0+\varepsilon) & V_x^m(L,0+\varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L,0+\varepsilon) & M_x^{*m}(L,0+\varepsilon) \\ -V_x^{*q}(0,L-\varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*q}(0,L-\varepsilon) & -M_x^{*q}(0,L-\varepsilon) & V_x^q(L,L-\varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L,L-\varepsilon) & M_x^{*q}(L,L-\varepsilon) \\ -\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L-\varepsilon) & \alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L-\varepsilon) & -\frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L-\varepsilon) & \frac{dV_x^q}{d\hat{x}}(L,L-\varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,L-\varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,L-\varepsilon) \\ -V_x^{*m}(0,L-\varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*m}(0,L-\varepsilon) & -M_x^{*m}(0,L-\varepsilon) & V_x^m(L,L-\varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L,L-\varepsilon) & M_x^{*m}(L,L-\varepsilon) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \omega(0) \\ \frac{d\omega}{dx}(0) \\ \emptyset(0) \\ \omega(L) \\ \frac{d\omega}{dx}(L) \\ \emptyset(L) \end{array} \right\} = \\
& \left[\begin{array}{cccccc} -\omega^{*q}(0,0+\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0,0+\varepsilon) & -\emptyset^{*q}(0,0+\varepsilon) & \omega^{*q}(L,0+\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(L,0+\varepsilon) & \emptyset^{*q}(L,0+\varepsilon) \\ -\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (0,0+\varepsilon) & -\frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (L,0+\varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) \\ -\omega^{*m}(0,0+\varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0,0+\varepsilon) & -\emptyset^{*m}(0,0+\varepsilon) & \omega^{*m}(L,0+\varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(L,0+\varepsilon) & \emptyset^{*m}(L,0+\varepsilon) \\ -\omega^{*q}(0,L-\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0,L-\varepsilon) & -\emptyset^{*q}(0,L-\varepsilon) & \omega^{*q}(L,L-\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(L,L-\varepsilon) & \emptyset^{*q}(L,L-\varepsilon) \\ -\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0,L-\varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (0,L-\varepsilon) & -\frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(0,L-\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L,L-\varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (L,L-\varepsilon) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(L,L-\varepsilon) \\ -\omega^{*m}(0,L-\varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0,L-\varepsilon) & -\emptyset^{*m}(0,L-\varepsilon) & \omega^{*m}(L,L-\varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(L,L-\varepsilon) & \emptyset^{*m}(L,L-\varepsilon) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} V_x(0) \\ \alpha \cdot P_x(0) \\ \bar{M}_x(0) \\ V_x(L) \\ \alpha \cdot P_x(L) \\ \bar{M}_x(L) \end{array} \right\} + \\
& \int_0^L \left[\begin{array}{cc} \omega^{*q}(x,\hat{x}) & \emptyset^{*q}(x,\hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x,\hat{x}) & \frac{d\emptyset^{*q}}{d\hat{x}}(x,\hat{x}) \\ \omega^{*m}(x,\hat{x}) & \emptyset^{*m}(x,\hat{x}) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} q(x) \\ m(x) \end{array} \right\} \cdot dx \quad (6.95)
\end{aligned}$$

Assim como nos Capítulos 3, 4 e 5 a Equação (6.95) pode ser expressa na forma compacta como:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \quad (6.96)$$

A matriz de Influência [H] pode ser analogamente escrita às Equações (3.93) a (3.97) e a Matriz [G] analogamente às (3.98) a (3.102). Já as funções $\eta_{ij}(r)$ e $\beta_{ij}(r)$ para o problema da estabilidade de barras apoiadas no meio contínuo ficam:

$$\begin{aligned}
\eta_{11}(r) = & \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^5 \Psi(r)}{dr^5} + \left[2 \cdot \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \right. \\
& \left. \bar{D}_x \cdot (P - K_2) \right] \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} - [\bar{A}_{xz} \cdot (P - K_2)] \frac{d\Psi(r)}{dr} \quad (6.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{21}(r) = & - \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^6 \Psi(r)}{dr^6} - \left[2 \cdot \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x + \bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \right. \\
& \left. \bar{D}_x \cdot (P - K_2) \right] \frac{d^5 \Psi(r)}{dr^5} + [\bar{A}_{xz} \cdot (P - K_2)] \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \quad (6.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{31}(r) = & \left[2 \cdot \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot (K_2 - P) \right] \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} + \left[2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot (K_2 - P) - \alpha \cdot \hat{F}_x \cdot K_1 \right] \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} - \bar{A}_{xz} \cdot K_1 \cdot \Psi(r) \quad (6.99)
\end{aligned}$$

$$\eta_{12}(r) = \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} + \left[\alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x \right] \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \quad (6.100)$$

$$\eta_{22}(r) = - \left[\alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 - \alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x \right] \frac{d^5 \Psi(r)}{dr^5} - \left[\alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x \right] \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} \quad (6.101)$$

$$\eta_{32}(r) = \left[\bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x + \alpha^2 \cdot \bar{A}_{xz} \cdot H_x - \hat{F}_x \cdot (P - K_2) \right] \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} - \hat{F}_x \cdot K_1 \cdot \frac{d \Psi(r)}{dr} \quad (6.102)$$

$$\eta_{13}(r) = \left[\bar{D}_x \cdot \bar{A}_{xz} + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x \right] \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \quad (6.103)$$

$$\eta_{23}(r) = - \left[\bar{D}_x \cdot \bar{A}_{xz} + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x \right] \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} \quad (6.104)$$

$$\eta_{33}(r) = \left[-\alpha^2 \cdot \bar{D}_x \cdot H_x + \alpha^2 \cdot \hat{F}_x^2 \right] \frac{d^5 \Psi(r)}{dr^5} + \left[\bar{A}_{xz} \cdot \bar{D}_x + \alpha \cdot \bar{A}_{xz} \cdot \hat{F}_x - \bar{D}_x \cdot (P - K_2) \right] \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} - \bar{D}_x \cdot K_1 \cdot \frac{d \Psi(r)}{dr} \quad (6.105)$$

$$\beta_{11}(r) = \bar{D}_x \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} - \bar{A}_{xz} \cdot \Psi(r) \quad (6.106)$$

$$\beta_{21}(r) = -\bar{D}_x \cdot \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d \Psi(r)}{dr} \quad (6.107)$$

$$\beta_{31}(r) = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d \Psi(r)}{dr} \quad (6.108)$$

$$\beta_{12}(r) = \bar{D}_x \cdot \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d \Psi(r)}{dr} \quad (6.109)$$

$$\beta_{22}(r) = -\bar{D}_x \cdot \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} + \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \quad (6.110)$$

$$\beta_{32}(r) = -\hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} - \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \quad (6.111)$$

$$\beta_{13}(r) = \bar{A}_{xz} \cdot \frac{d \Psi(r)}{dr} + \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^3 \Psi(r)}{dr^3} \quad (6.112)$$

$$\beta_{23}(r) = -\bar{A}_{xz} \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} - \hat{F}_x \cdot \alpha \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} \quad (6.113)$$

$$\beta_{33}(r) = -H_x \cdot \alpha^2 \frac{d^4 \Psi(r)}{dr^4} + \bar{A}_{xz} \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} - K_1 \cdot \Psi(r) + (K_2 - P) \cdot \frac{d^2 \Psi(r)}{d^2 x} \quad (6.114)$$

Os valores das derivadas de $\Psi(r)$ dependem dos valores das raízes da Equação (6.38). Se for o caso de uma raiz real e duas complexas, a função Ψ e suas derivadas estão descritas nas Equações (6.46) a (6.52) e as constantes C_1, C_2 e C_3 nas Equações (6.54) a (6.56). Agora, se forem três raízes reais com uma positiva e as demais negativas devem ser utilizadas a função Ψ dada em (6.58) e suas derivadas (6.60), (6.62), (6.64), (6.66), (6.68) e (6.69) assim como as constantes dadas em (6.73).

7. TRANSFORMAÇÕES E OPERAÇÕES NO SISTEMA ALGÉBRICO

Neste capítulo são feitas algumas manipulações em nível de sistema algébrico. Um dos aspectos é a unificação dos sistemas de coordenadas locais de cada barra com intuito de viabilizar a mesma transformação para esforços e deslocamentos. Outro ponto é a aplicação das condições de vínculos no contorno e sua repercussão no sistema algébrico. E, finalmente, o equacionamento de problemas com descontinuidades no domínio.

7.1. Unificação de sistemas de referência

Convém notar que nos sistemas algébricos do MEC discutidos nos capítulos anteriores as orientações dos deslocamentos não coincidem totalmente com as dos esforços, vide Figuras 3.1 (a) e (b). No modelo de Bickford-Reddy a unificação se dá invertendo o sentido da força cortante no nó inicial ($\bar{V}_{xi} = -V_{xi}$), o momento fletor do no nó inicial ($\bar{M}_{xi} = -\hat{M}_{xi}$), e o momento de alta ordem no nó final ($\alpha\bar{P}_{xj} = -\alpha P_{xj}$) de forma que a matriz de influência $[G]$ que multiplica o vetor dos esforços na Equação (3.91) pode ser reescritas invertendo o sinal das colunas referentes a esses esforços, vide Figura 7.1, tal como:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \omega(0+\varepsilon) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(0+\varepsilon) \\ \varnothing(0+\varepsilon) \\ \omega(L-\varepsilon) \\ \frac{d\omega}{d\hat{x}}(L-\varepsilon) \\ \omega(L-\varepsilon) \end{array} \right\} + \\
& \left[\begin{array}{cccccc} -V_x^{*q}(0,0+\varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*q}(0,0+\varepsilon) & -M_x^{*q}(0,0+\varepsilon) & V_x^q(L,0+\varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L,0+\varepsilon) & M_x^{*q}(L,0+\varepsilon) \\ -\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & \alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & -\frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & \frac{dV_x^q}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) \\ -V_x^{*m}(0,0+\varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*m}(0,0+\varepsilon) & -M_x^{*m}(0,0+\varepsilon) & V_x^m(L,0+\varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L,0+\varepsilon) & M_x^{*m}(L,0+\varepsilon) \\ -V_x^{*q}(0,L-\varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*q}(0,L-\varepsilon) & -M_x^{*q}(0,L-\varepsilon) & V_x^q(L,L-\varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*q}(L,L-\varepsilon) & M_x^{*q}(L,L-\varepsilon) \\ -\frac{dV_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L-\varepsilon) & \alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L-\varepsilon) & -\frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(0,L-\varepsilon) & \frac{dV_x^q}{d\hat{x}}(L,L-\varepsilon) & -\alpha \cdot \frac{dP_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,L-\varepsilon) & \frac{dM_x^{*q}}{d\hat{x}}(L,L-\varepsilon) \\ -V_x^{*m}(0,L-\varepsilon) & \alpha \cdot P_x^{*m}(0,L-\varepsilon) & -M_x^{*m}(0,L-\varepsilon) & V_x^m(L,L-\varepsilon) & -\alpha \cdot P_x^{*m}(L,L-\varepsilon) & M_x^{*m}(L,L-\varepsilon) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \omega_i \\ \frac{d\omega_i}{dx} \\ \varnothing_i \\ \omega_j \\ \frac{d\omega_j}{dx} \\ \varnothing_j \end{array} \right\} = \\
& \left[\begin{array}{cccccc} \omega^{*q}(0,0+\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0,0+\varepsilon) & \varnothing^{*q}(0,0+\varepsilon) & \omega^{*q}(L,0+\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(L,0+\varepsilon) & \varnothing^{*q}(L,0+\varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (0,0+\varepsilon) & \frac{d\varnothing^{*q}}{d\hat{x}}(0,0+\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (L,0+\varepsilon) & \frac{d\varnothing^{*q}}{d\hat{x}}(L,0+\varepsilon) \\ \omega^{*m}(0,0+\varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0,0+\varepsilon) & \varnothing^{*m}(0,0+\varepsilon) & \omega^{*m}(L,0+\varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(L,0+\varepsilon) & \varnothing^{*m}(L,0+\varepsilon) \\ \omega^{*q}(0,L-\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(0,L-\varepsilon) & \varnothing^{*q}(0,L-\varepsilon) & \omega^{*q}(L,L-\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{dx}(L,L-\varepsilon) & \varnothing^{*q}(L,L-\varepsilon) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(0,L-\varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (0,L-\varepsilon) & \frac{d\varnothing^{*q}}{d\hat{x}}(0,L-\varepsilon) & \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(L,L-\varepsilon) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}} \right) (L,L-\varepsilon) & \frac{d\varnothing^{*q}}{d\hat{x}}(L,L-\varepsilon) \\ \omega^{*m}(0,L-\varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(0,L-\varepsilon) & \varnothing^{*m}(0,L-\varepsilon) & \omega^{*m}(L,L-\varepsilon) & \frac{d\omega^{*m}}{dx}(L,L-\varepsilon) & \varnothing^{*m}(L,L-\varepsilon) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_{xi} \\ \alpha \cdot P_{xi} \\ \bar{M}_{xi} \\ V_{xj} \\ \alpha \cdot \bar{P}_{xj} \\ \bar{M}_{xj} \end{array} \right\} + \\
& \int_0^L \left[\begin{array}{cc} \omega^{*q}(x,\hat{x}) & \varnothing^{*q}(x,\hat{x}) \\ \frac{d\omega^{*q}}{d\hat{x}}(x,\hat{x}) & \frac{d\varnothing^{*q}}{d\hat{x}}(x,\hat{x}) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} q \\ m \end{array} \right\} \cdot dx
\end{aligned} \tag{7.1}$$

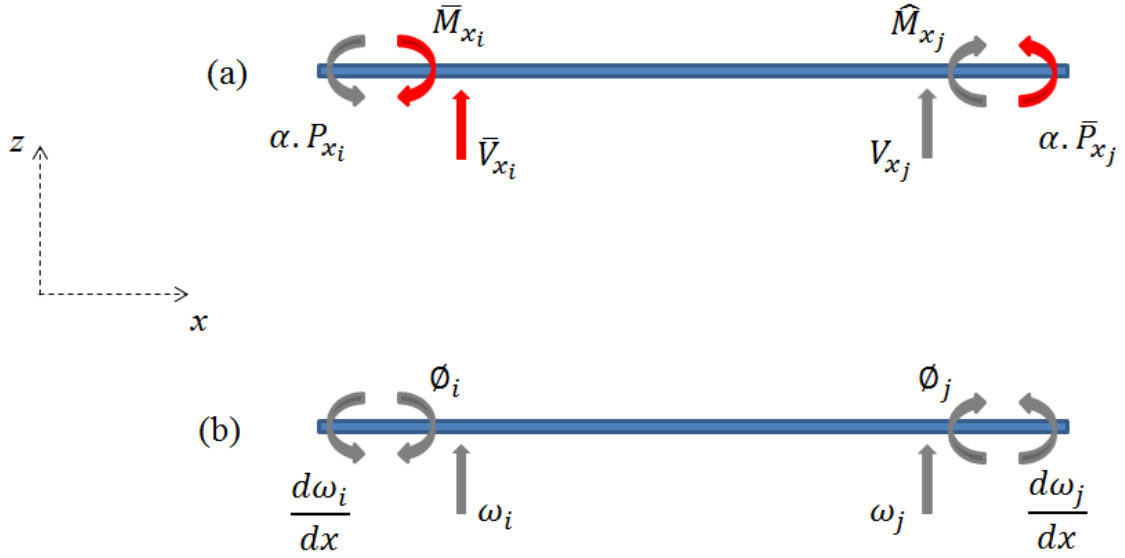


Figura 7.1 – (a) Esforços reais unificados; (b) Deslocamentos reais.

7.2. Condições de contorno

Nessa seção é discutida a imposição das condições de contorno com vínculos rígidos em vigas com domínio homogêneo. A forma geral da equação algébrica, apresentada na Equação (3.92), do modelo de Bickford-Reddy pode ser reescrita da forma:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

A representação dos vetores de deslocamento e de forças da Equação (7.2) estão indicados na Figura (7.2).

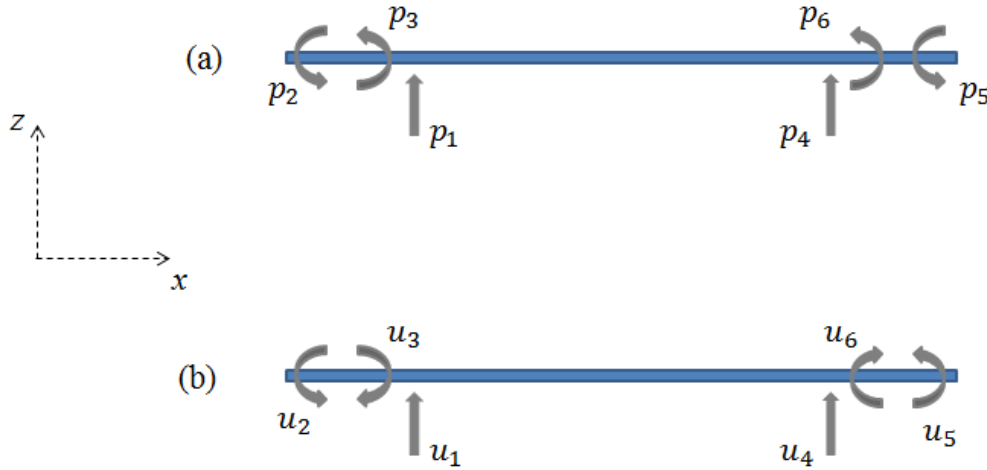


Figura 7.2 – Variáveis no contorno para o modelo de Bickford-Reddy

Utilizando-se uma estratégia apropriada para aplicação das condições de contorno, o sistema apresentado na Equação (7.2) pode ser resolvido a partir da seguinte relação:

$$[R] \cdot \{x\} = \{p\} \quad (7.3)$$

Em que,

$[R]$ é a matriz de influência;

$\{p\}$ é o vetor de esforços e deslocamentos;

$\{x\}$ é o vetor de incógnitas.

São várias as estratégias para a formação de $[R]$ e $\{p\}$, dependendo se a restrição em questão for rígida.

Se considerar três restrições (viga em balanço, engastada na extremidade esquerda) associado com u_1 , u_2 e u_3 , então os valores restantes de $\{p\}$ são prescritos. Uma estratégia para formar $[R]$ e $\{p\}$ da Equação (7.3) é a permutar os valores associados da quarta, quinta e sexta coluna de $[H]$ com $[G]$, observando que agora os elementos de $[G]$ receberão o sinal negativo. Para formar o vetor de esforços, $\{p'\}$, a primeira, segunda e terceira linhas dos vetores $\{u\}$ e $\{p\}$ devem ser permutados sem alteração de sinais, visto que os mesmos já foram incorporados na matriz. Assim, após estas operações com matrizes, os vetores da Equação (7.3) podem ser escritos como segue:

$$[R] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & -G_{14} & -G_{15} & -G_{16} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & -G_{24} & -G_{25} & -G_{26} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & -G_{34} & -G_{35} & -G_{36} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & -G_{44} & -G_{45} & -G_{46} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} & -G_{54} & -G_{55} & -G_{56} \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} & -G_{64} & -G_{65} & -G_{66} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\{p\} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

7.3. Descontinuidade no domínio

São vários os casos que causam descontinuidades no domínio da viga, alguns deles das quais podemos citar:

- a) Mudança abrupta da seção transversal (descontinuidade geométrica), Figura 7.3(a);
- b) Não homogeneidade do material (descontinuidade física), Figura 7.3(b);
- c) Força axial no domínio (descontinuidade de força normal), Figura 7.3(c);
- d) Apoio rígido intermediário (descontinuidade de força cortante), Figura 7.3(d);

- e) Apoio elástico intermediário (descontinuidade de momento fletor), Figura 7.3(e);
 f) Não homogeneidade de base elástica (descontinuidade física), Figura 7.3(d).

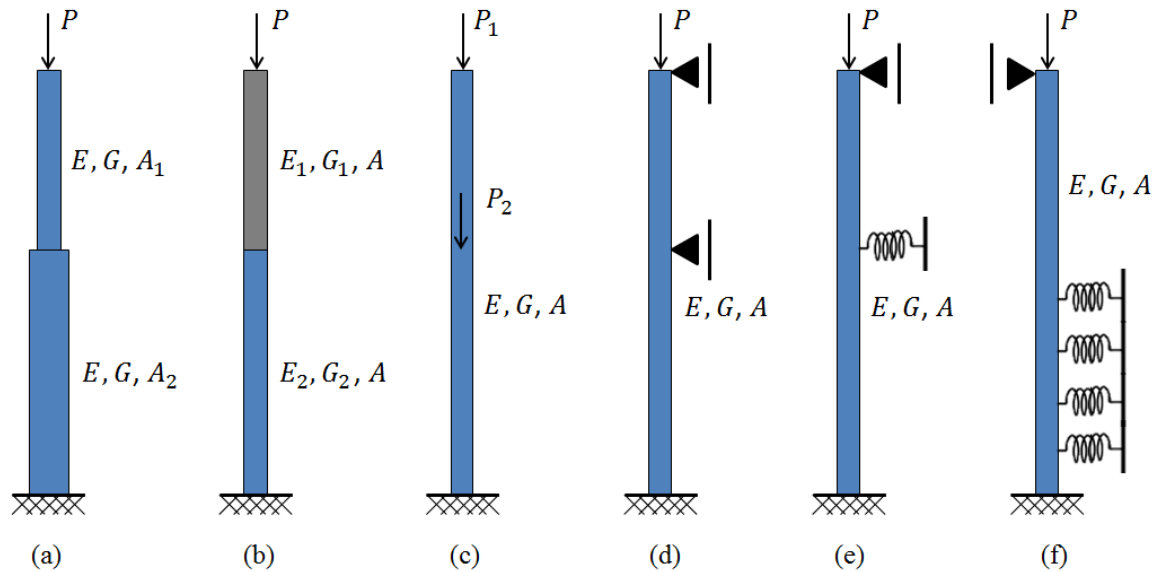


Figura 7.3 – Descontinuidade no domínio: (a) mudança abrupta de seção transversal; (b) Material não homogêneo; (c) descontinuidade de força normal; (d) descontinuidade de força cortante; (e) descontinuidade de momento fletor; (f) Não homogeneidade de base elástica.

Devido a estas descontinuidades, as soluções fundamentais não podem ser aplicadas diretamente. Sem perda de generalidade, por uma questão de concisão na explicação, admite-se que todas as causas de descontinuidade ocorram simultaneamente em uma mesma seção. Assim, o domínio é dividido em dois trechos e elementos de contorno são discretizados neles conforme indicado na Figura 7.4.

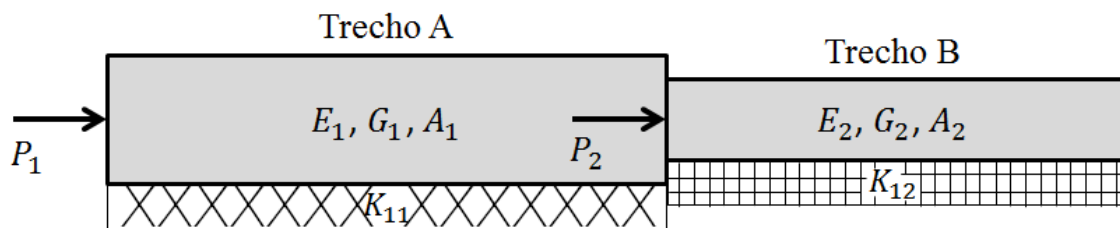


Figura 7.4 – Descontinuidade na viga sobre base Winkler.

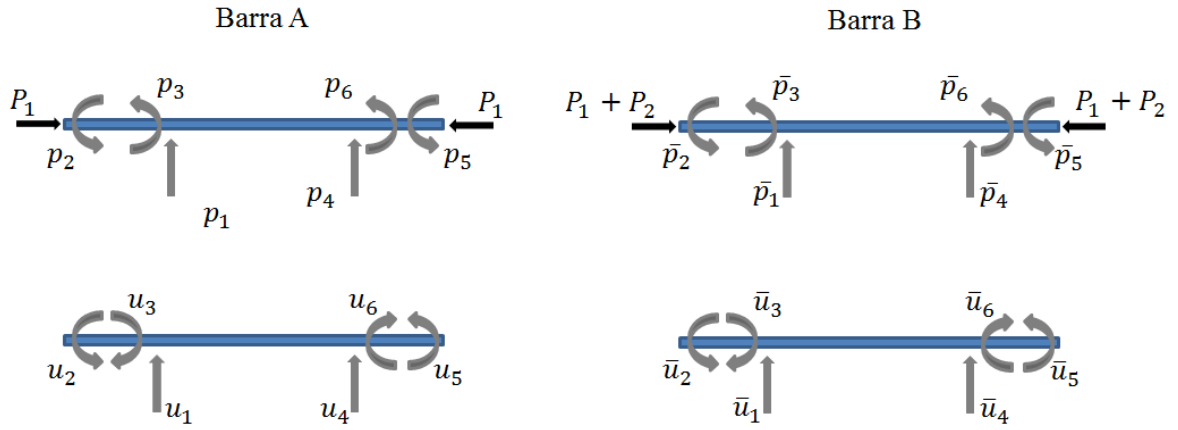


Figura 7.5 – Discretização da barra de Bickford-Reddy com representação dos esforços e deslocamentos

Atribuindo-se as propriedades físicas e geométricas da barra A na equação algébrica, com carga axial $P = P_1$, sua representação dar-se-á da forma como apresentada nos capítulos 3, 4, 5 e 6:

$$\begin{cases} [H_{11}]\{U_1\} + [H_{12}]\{U_2\} = [G_{11}]\{P_1\} + [G_{12}]\{P_5\} + \{B_1\} \\ [H_{21}]\{U_1\} + [H_{22}]\{U_2\} = [G_{21}]\{P_1\} + [G_{22}]\{P_5\} + \{B_2\} \end{cases} \quad (7.6)$$

Onde,

$$\begin{aligned} \{U_1\}^T &= [u_1 \ u_2 \ u_3], \{P_1\}^T = [p_1 \ p_2 \ p_3], \{P_5\}^T = [p_4 \ p_5 \ p_6], \\ \{U_2\}^T &= [u_4 \ u_5 \ u_6], \{B_1\}^T = [b_1 \ b_2 \ b_3], \{B_2\}^T = [b_{10} \ b_{11} \ b_{12}]. \end{aligned}$$

Para a barra B, o sistema algébrico fica:

$$\begin{cases} [\bar{H}_{22}]\{U_4\} + [\bar{H}_{23}]\{U_3\} = [\bar{G}_{22}]\{P_4\} + [\bar{G}_{23}]\{P_3\} + \{B_4\} \\ [\bar{H}_{32}]\{U_4\} + [\bar{H}_{33}]\{U_3\} = [\bar{G}_{32}]\{P_4\} + [\bar{G}_{33}]\{P_3\} + \{B_3\} \end{cases} \quad (7.7)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \{U_3\}^T &= [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{u}_3], \{U_4\}^T = [\bar{u}_4 \ \bar{u}_5 \ \bar{u}_6], \{P_3\}^T = [\bar{p}_1 \ \bar{p}_2 \ \bar{p}_3], \\ \{P_4\}^T &= [\bar{p}_4 \ \bar{p}_5 \ \bar{p}_6], \{\bar{B}_3\}^T = [b_4 \ b_5 \ b_6], \{\bar{B}_4\}^T = [b_7 \ b_8 \ b_9]. \end{aligned}$$

Aplicando-se as condições de compatibilidade de deslocamento na interface de contato das barras, tem-se que:

$$\{U_4\} = \{U_5\} \quad (7.8)$$

Além disso, se cargas concentradas $\{F\}^T = [F_x \ F_z \ M]$ estiverem atuando sobre o nó 2, a relação de equilíbrio deve ser satisfeita (vide Figura 7.6):

$$\{P_5\} + \{P_4\} + \{F\} = \{0\} \quad (7.9)$$

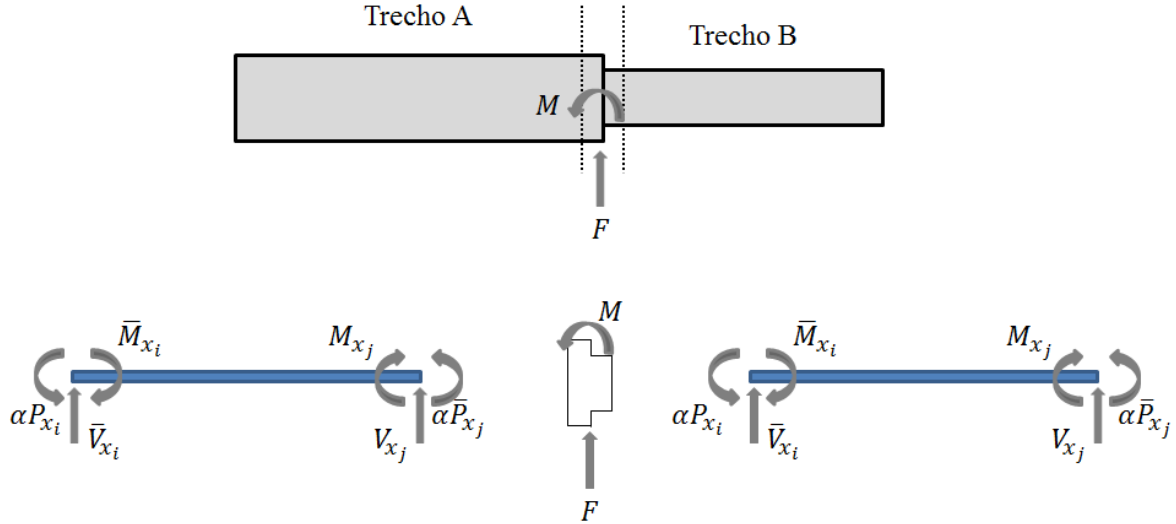


Figura 7.6 – Condições de equilíbrio no nó.

Substituindo-se as condições de compatibilidade de deslocamento, de acordo com a Equação (7.8), e as condições de equilíbrio, conforme a Equação (7.10), nas representações algébricas indicadas nas Equações (7.6) e (7.7), o sistema algébrico da estrutura pode ser reagrupado como:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & [0] & [0] & -[G_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] & [0] & [0] & -[G_{22}] \\ [0] & [\bar{H}_{32}] & [\bar{H}_{33}] & -[\bar{G}_{32}] & [0] \\ [0] & [\bar{H}_{22}] & [\bar{H}_{23}] & -[\bar{G}_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [I] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_4\} \\ \{U_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [G_{21}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\bar{G}_{33}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\bar{G}_{23}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_3\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{B_1\} \\ \{B_2\} \\ \{B_3\} \\ \{B_4\} \\ -\{F\} \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

Para o caso de vigas contínuas (quando apoios intermediários são inseridos no domínio da viga), uma pequena mudança deve ser feita no sistema da Equação (7.10). Neste caso, as reações do apoio são desconhecidas, requerendo que uma troca de colunas deve ser feita como mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [0] & [0] & [0] & -[G_{12}] \\ [H_{21}] & [0] & [0] & [0] & -[G_{22}] \\ [0] & [0] & [\bar{H}_{33}] & -[\bar{G}_{32}] & [0] \\ [0] & [0] & [\bar{H}_{23}] & -[\bar{G}_{22}] & [0] \\ [0] & -[I] & [0] & [I] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{F\} \\ \{U_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [0] & [0] & [0] & -[H_{12}] \\ [G_{21}] & [0] & [0] & [0] & -[H_{22}] \\ [0] & [0] & [\bar{G}_{33}] & [0] & -[\bar{H}_{32}] \\ [0] & [0] & [\bar{G}_{23}] & [0] & -[\bar{H}_{22}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_3\} \\ \{0\} \\ \{U_4\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{B_1\} \\ \{B_2\} \\ \{B_3\} \\ \{B_4\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

Se valores não nulos são atribuídos a $\{U_4\}$ em (7.11), recalques do apoio intermediário podem ser incluídos na análise do MEC. A técnica para análise de descontinuidades descrita acima pode ser facilmente generalizada para resolver problemas com múltiplas descontinuidades ao longo do domínio da barra.

8. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos mostrando a solução em MEC no problema de barras em flexão ou da estabilidade sobre as hipóteses de Bickford-Reddy. As respostas numéricas do MEC são comparadas com soluções analíticas e/ou numéricas. Foi programado um código baseado em MEF utilizando-se os valores da matriz de rigidez e vetores de carga desenvolvidos por Einsenberg (2003). Outro aspecto desse elemento finito de Einsenberg é que ele foi desenvolvido para equações governantes em que as seções transversais da barra eram retangulares.

8.1. Viga em balanço submetida a uma carga concentrada

BICKFORD *apud* ZHONG e WHANG (2010) publicou a solução analítica para uma viga de seção retangular em balanço, uma das extremidades engastada e a outra livre, sob a ação de uma carga concentrada de intensidade Q_L aplicada na extremidade livre. A deflexão analítica da viga para este caso é dada por:

$$\omega = \frac{1}{3} \frac{Q_L L^3}{E.I} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{5} \frac{Q_L L^3}{E.I} (1 + \nu) \left(\frac{h}{L}\right)^2 \left(\frac{x}{L} - \frac{\sinh(\eta_1 L) - \sinh(\eta_1 (L-x))}{\eta_1 L \cosh(\eta_1 L)}\right) \quad (8.1)$$

$$\text{Onde, } \eta_1 = \left(\frac{420}{1+\nu}\right)^{1/2} \frac{1}{h}$$

Seja uma viga de seção retangular de base 0,5 m e altura 1,0 m submetida a uma carga $Q_L = 10\text{kN}$, conforme Figura 8.1. As propriedades do material utilizado são: $E = 13 \times 10^6 \text{kN/m}^2$ e $G = 6,5 \times 10^6 \text{kN/m}^2$.

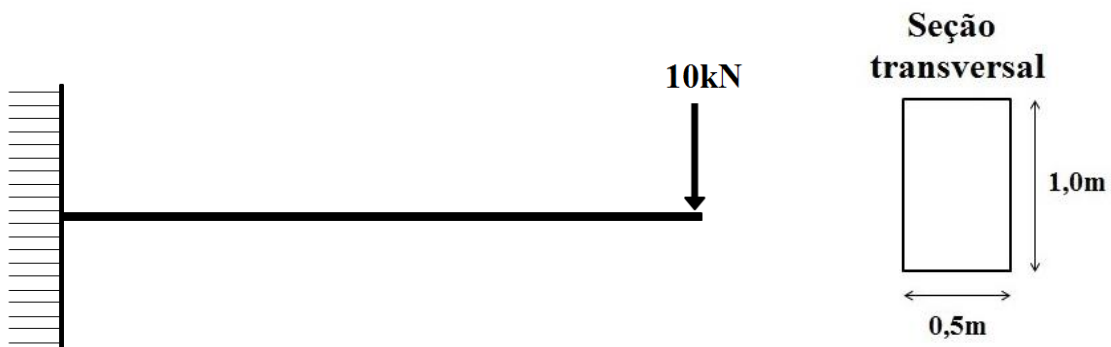


Figura 8.1 – Viga em balanço

Na Tabela 1 e 2 são comparados a deflexão (ω) e a inclinação da elástica ($d\omega/dx$) obtidas pelo MEC e pela forma analítica apresentada em (8.1), em função do comprimento da viga (L). A diferença relativa dos resultados é apresentada para expressar o desempenho da resposta do MEC.

Tabela 1 – Deflexão pelo MEC e pelo método analítico.

L	$10^6 \omega$ (m) MEC	$10^6 \omega$ (m) Analítico	Diferença relativa(%)
1,00 m	9,66599	9,66599	$1,753 \times 10^{-14}$
2,00 m	56,43522	56,43522	$3,602 \times 10^{-14}$
3,00 m	177,0506	177,0506	$1,531 \times 10^{-14}$
4,00 m	408,43522	408,43522	$7,964 \times 10^{-14}$
5,00 m	787,51214	787,51214	$4,13 \times 10^{-14}$

Tabela 2 – Inclinação da elástica pelo MEC e pelo método analítico

L	$10^6 d\omega/dx$ (rad) MEC	$10^6 d\omega_c/dx$ (rad) Analítico	Diferença relativa(%)
1,00 m	12,92308	12,92308	$9,701 \times 10^{-13}$
2,00 m	40,61538	40,61538	$1,502 \times 10^{-13}$
3,00 m	86,76923	86,76923	$6,248 \times 10^{-14}$
4,00 m	151,38462	151,38462	$1,79 \times 10^{-14}$
5,00 m	234,46154	234,46154	$5,78 \times 10^{-14}$

Os resultados apresentados pelo MEC foram satisfatórios e de excelente precisão com a solução analítica.

8.2. Viga em balanço sob carregamento uniformemente distribuído

WANG et al. (2000) apresenta uma solução analítica para uma viga de seção retangular em balanço sob a ação de um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q_0 . A deflexão da viga de Bickford-Reddy (ω_0^R) é relacionada à deflexão da viga pela teoria de Euler-Bernoulli (ω_0^E) e é dada por:

$$\omega_0^R(x) = \omega_0^E(x) + \left(\frac{q_0\mu}{2\lambda^2}\right)\left(\frac{\bar{D}_x}{\hat{A}_{xz}D_x}\right)(2Lx - x^2) + \left(\frac{q_0\mu}{\lambda^4\cosh(\lambda L)}\right)\left(\frac{\bar{D}_x}{\hat{A}_{xz}D_x}\right)[\cosh(\lambda x) + \lambda \cdot L \cdot \sinh(\lambda(L - x))] - \left(\frac{q_0\mu}{\lambda^4}\right)\left(\frac{\bar{D}_x}{\hat{A}_{xz}D_x}\right)\left(\frac{1 + \lambda \cdot L \cdot \sinh(\lambda \cdot L)}{\cosh(\lambda \cdot L)}\right) \quad (8.2)$$

Sendo:

$$\omega_0^E(x) = \frac{q_0 \cdot L^4}{24 \cdot D_x} \left(6 \cdot \frac{x^2}{L^2} - 4 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4}\right) \quad (8.3)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\bar{A}_{xz} \cdot D_x}{\alpha(F_x \cdot \bar{D}_x - \hat{F}_x \cdot D_x)}}, \mu = \frac{\hat{A}_{xz} \bar{D}_x}{\alpha(\bar{D}_x \cdot F_x - \hat{F}_x \cdot D_x)} \quad (8.4)$$

Em que

L é o comprimento da viga.

Seja uma viga de seção retangular de base 0,5 m e altura 1,0 m submetida cujas propriedades do material utilizado são: $E = 2,1 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ e $G = 1,05 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$.

Seja uma viga com as mesmas características apresentadas no exemplo 8.1, submetida agora a um carregamento uniformemente distribuído $q_0 = 10 \text{ kN/m}$, Figura 8.2.

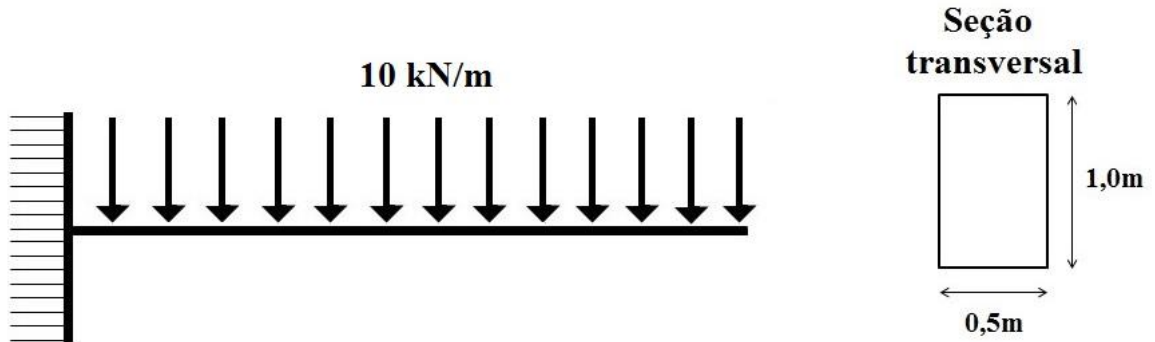


Figura 8.2 – Viga em balanço submetida a um carregamento uniformemente distribuído

Nas Tabelas 3 e 4 são apresentadas, respectivamente, a deflexão (ω) e a inclinação da elástica ($d\omega/dx$) na extremidade livre analisadas pelo MEC e de forma analítica, Equações (7.2), (7.3) e (7.4), em função do comprimento da viga (L).

Tabela 3 – Deflexão pelo MEC e pelo método analítico da viga em balanço.

L (m)	ω (m) MEC	ω_c (m) Analítico	Diferença Absoluta
1,00 m	$2,46534 \times 10^{-4}$	$2,46534 \times 10^{-4}$	0
2,00 m	$2,72110 \times 10^{-3}$	$2,72110 \times 10^{-3}$	0
3,00 m	0,01257	0,01257	0
4,00 m	0,03836	0,03836	0
5,00 m	0,09209	0,09209	0
6,00 m	0,18919	0,18919	0
7,00 m	0,34852	0,34852	0
8,00 m	0,59237	0,59237	0
9,00 m	0,94644	0,94644	0
10,00 m	1,43989	1,43989	0

Tabela 4 – Inclinação da elástica pelo MEC e pelo método analítico da viga em balanço.

L	$d\omega/dx$ (rad) MEC	$d\omega_c/dx$ (rad) Analítico	Diferença Absoluta
1,00 m	$2,01629 \times 10^{-4}$	$2,01629 \times 10^{-4}$	0
2,00 m	$1,53496 \times 10^{-3}$	$1,53496 \times 10^{-3}$	0
3,00 m	$5,15401 \times 10^{-3}$	$5,15401 \times 10^{-3}$	0
4,00 m	0,01220	0,01220	$1,37 \times 10^{-15}$
5,00 m	0,02382	0,02382	$3,73 \times 10^{-15}$
6,00 m	0,04115	0,04115	$4,50 \times 10^{-15}$
7,00 m	0,06534	0,06534	$3,88 \times 10^{-13}$
8,00 m	0,09753	0,09753	$5,405 \times 10^{-13}$
9,00 m	0,13887	0,13887	$2,275 \times 10^{-12}$
10,00 m	0,19049	0,19049	$8,79 \times 10^{-14}$

Tal como os resultados do exemplo anterior, o desempenho do MEC foi satisfatório.

8.3. Viga simplesmente apoiada sob um carregamento uniformemente distribuído

WANG et al. (2000) apresenta uma solução analítica para uma viga simplesmente apoiada sob a ação de um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q_0 , Figura 8.3.

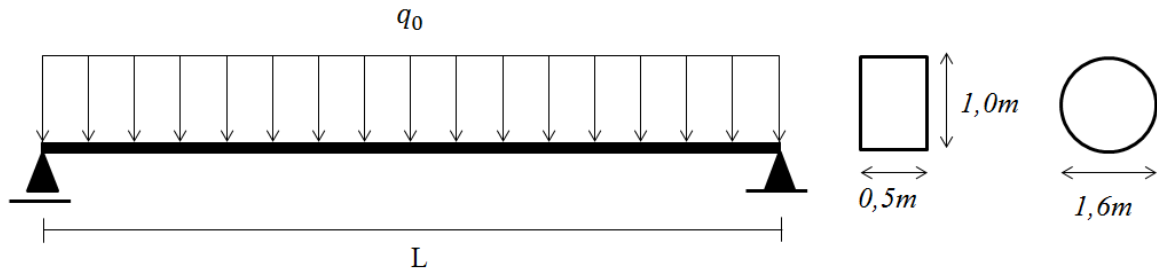


Figura 8.3 – Viga simplesmente apoiada

A deflexão da viga de Bickford-Reddy (ω_0^R) é relacionada à deflexão da viga pela teoria de Euler-Bernoulli (ω_0^E) e é dada por:

$$\omega_0^R(x) = \omega_0^E(x) + \left(\frac{q_0 \cdot \mu}{\lambda^4}\right) \cdot \left(\frac{\hat{D}_x}{\hat{A}_{xz} \cdot D_x}\right) \cdot \left[-\tanh\left(\frac{\lambda L}{2}\right) \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + \cosh(\lambda \cdot x) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot x(L - x) - 1\right] \quad (8.5)$$

Além disso, a rotação e força cortante são obtidas por:

$$\phi(x) = -\frac{d\omega_0^R(x)}{dx} + \frac{Q^R(x)}{\hat{A}_{xz}} \quad (8.6)$$

$$V_x(x) = \hat{D}_x \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left[\phi(x) - \alpha \cdot F_x \cdot \frac{d^3 \omega_0^R(x)}{dx^3} \right] \quad (8.7)$$

Onde,

$$\omega_0^E(x) = \frac{q_0 \cdot L^4}{24 \cdot D_x} \left(\frac{x}{L} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4} \right) \quad (8.8)$$

$$Q^R(x) = \frac{q_0 \cdot \mu}{\lambda^3} \left[\sinh(\lambda \cdot x) - \tanh\left(\frac{\lambda L}{2}\right) \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + \frac{\lambda}{2} (L - 2 \cdot x) \right] \quad (8.9)$$

L é o comprimento da viga,

E λ e μ são dados nas Equações (8.3) e (8.4), respectivamente.

Neste exemplo serão abordadas vigas de seção transversal com duas geometrias distintas submetida a um carregamento $q_0 = 10 \text{ kN/m}$. As propriedades do material utilizadas são: $E = 2,1 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$; $G = 1,05 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$. Na primeira análise será utilizada uma seção

retangular de base 0,5 m e altura 1,0m. Na Tabela 5 são apresentados os esforços e deslocamentos na extremidade esquerda da viga, comparando-se os resultados obtidos através do MEC e pela forma analítica, Equações (8.5), (8.6) e (8.7), em função do comprimento da viga (L).

Tabela 5 – Análise de viga pelo MEC e pela forma analítica para seção retangular.

L	Resultado	MEC	Analítico	Diferença Absoluta
1,00 m	$V_x(kN)$	5,0	5,0	$1,98 \times 10^{-9}$
	$\frac{d\omega}{dx} (rad)$	$1,50752 \times 10^{-4}$	$1,50752 \times 10^{-4}$	0
	$\phi(rad)$	$-2,18359 \times 10^{-5}$	$-2,18359 \times 10^{-5}$	0
2,00 m	$V_x(kN)$	10,0	10,0	$3,36 \times 10^{-9}$
	$\frac{d\omega}{dx} (rad)$	$5,98371 \times 10^{-4}$	$5,98371 \times 10^{-4}$	0
	$\phi(rad)$	$-3,26598 \times 10^{-4}$	$-3,26598 \times 10^{-4}$	0
3,00 m	$V_x(kN)$	15,0	15,0	$4,03 \times 10^{-10}$
	$\frac{d\omega}{dx} (rad)$	$1,61742 \times 10^{-3}$	$1,61742 \times 10^{-3}$	0
	$\phi(rad)$	$-1,20279 \times 10^{-3}$	$-1,20279 \times 10^{-3}$	0
4,0 m	$V_x(kN)$	20,0	20,0	$5,16 \times 10^{-9}$
	$\frac{d\omega}{dx} (rad)$	$3,49361 \times 10^{-3}$	$3,49361 \times 10^{-3}$	0
	$\phi(rad)$	$-2,93612 \times 10^{-3}$	$-2,93612 \times 10^{-3}$	0

Já a segunda geometria da seção é circular e de raio 0,8 m. A Tabela 6 apresenta os resultados pelo MEC e pela forma analítica.

Tabela 6 – Análise de viga pelo MEC e pela forma analítica para seção circular.

L	Resultado	MEC	Analítico	Diferença Absoluta
1,00 m	$V_x(kN)$	5,0	5,0	$10,0 \times 10^{-11}$
	$\frac{d\omega}{dx} (rad)$	$2,93622 \times 10^{-5}$	$2,93591 \times 10^{-5}$	$3,14 \times 10^{-9}$
	$\phi(rad)$	$-1,52874 \times 10^{-6}$	$-1,52936 \times 10^{-6}$	$6,28 \times 10^{-10}$
2,00 m	$V_x(kN)$	10,0	10,0	$2,24 \times 10^{-9}$
	$\frac{d\omega}{dx} (rad)$	$9,88724 \times 10^{-5}$	$9,88657 \times 10^{-5}$	$6,70 \times 10^{-9}$
	$\phi(rad)$	$-3,94349 \times 10^{-5}$	$-3,94363 \times 10^{-5}$	$1,34 \times 10^{-9}$
3,00 m	$V_x(kN)$	15,0	15,0	$2,01 \times 10^{-8}$
	$\frac{d\omega}{dx} (rad)$	$2,42394 \times 10^{-4}$	$2,42384 \times 10^{-4}$	$1,03 \times 10^{-8}$
	$\phi(rad)$	$-1,51353 \times 10^{-4}$	$-1,51355 \times 10^{-4}$	$2,05 \times 10^{-9}$
4,00 m	$V_x(kN)$	20,0	20,0	$5,33 \times 10^{-10}$
	$\frac{d\omega}{dx} (rad)$	$4,96934 \times 10^{-4}$	$4,96920 \times 10^{-4}$	$1,38 \times 10^{-8}$
	$\phi(rad)$	$-3,74289 \times 10^{-4}$	$-3,74291 \times 10^{-4}$	$2,77 \times 10^{-9}$

Os resultados apresentados pelo MEC foram satisfatórios e de excelente precisão.

8.4. Viga sobre base elástica submetida a uma carga concentrada

Para uma viga de comprimento $L=3,0m$ e seção retangular de base $0,12 m$ e altura $1,0 m$ submetida a uma carga pontual vertical de intensidade $10kN$ aplicada na extremidade esquerda e apoiada em uma base elástica, conforme Figura 8.4. As propriedades do material da viga são: $E = 23GPa$ e $G = 11,5GPa$. A base elástica é modelada conforme Winkler e possui rigidez, K_1 , igual a $1,4MPa$.

ERGÜVEN e GEDIKLI (2003) também analisaram o problema utilizando o modelo de vigas de Timoshenko sobre base elástica de Winkler através do Método dos Elementos Finitos, cujos resultados são apresentados na Tabela 7.

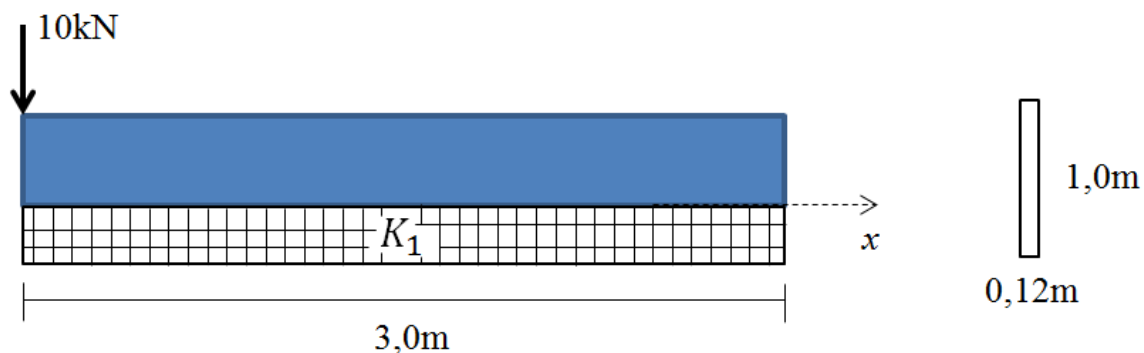


Figura 8.4 – Viga com base elástica submetida a uma carga concentrada

Na Tabela 7 são comparados a deflexão da viga (ω) obtidas pelo modelo de Bickford-Reddy através do MEC com o modelo de Timoshenko (MEF).

Tabela 7 – Deflexão da viga de Timoshenko e da de Bickford-Reddy.

	Bickford-Reddy (MEC)	Timoshenko (MEF)
$\omega(x = 0) \text{ mm}$	-9,53972	-9,530
$\omega\left(x = \frac{L}{2}\right) \text{ mm}$	-2,3744	-2,375
$\omega(x = L) \text{ mm}$	4,75389	4,756

Fonte *Timoshenko*: ERGÜVEN e GEDIKLI (2003)

A partir da Tabela 7 pode-se notar que em vigas curtas apoiadas sobre base elástica as respostas de Bickford-Reddy se aproximam das obtidas pelo modelo de Timoshenko.

8.5. Viga simplesmente apoiada e sobre base elástica

CHEN et al. (2004) publicou a solução analítica para uma viga de seção retangular apoiada em base elástica. A deflexão analítica da viga apresentada de uma forma adimensional para este caso é dada por:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega.E.I}{q.L^4} \quad (8.10)$$

$$\lambda = \frac{H}{L} \quad (8.11)$$

O módulo elástico real, K_w , a ser aplicado para incorporar o efeito da base elástica pelo modelo de Winkler será dado por:

$$K_w = \frac{E.I.\bar{K}_w}{L^4} \quad (8.12)$$

Em que,

$\bar{K}_w$ é o coeficiente adimensional da mola ou módulo elástico da fundação,

E é o módulo de elasticidade do material,

I é o momento de inércia da seção, e

L é o comprimento da viga.

Seja uma viga simplesmente apoiada de comprimento 120,0m e seção retangular de base 0,12 m e altura 1,0 m submetida a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade 1N/m e inserido em um meio de comportamento elástico, conforme Figura 8.5. O material da viga possui módulo de elasticidade, E , de 23MPa e módulo de elasticidade transversal, G , de 8,846MPa. A base elástica modelada conforme Winkler foi tomada para um $\bar{K}_w = 10$.

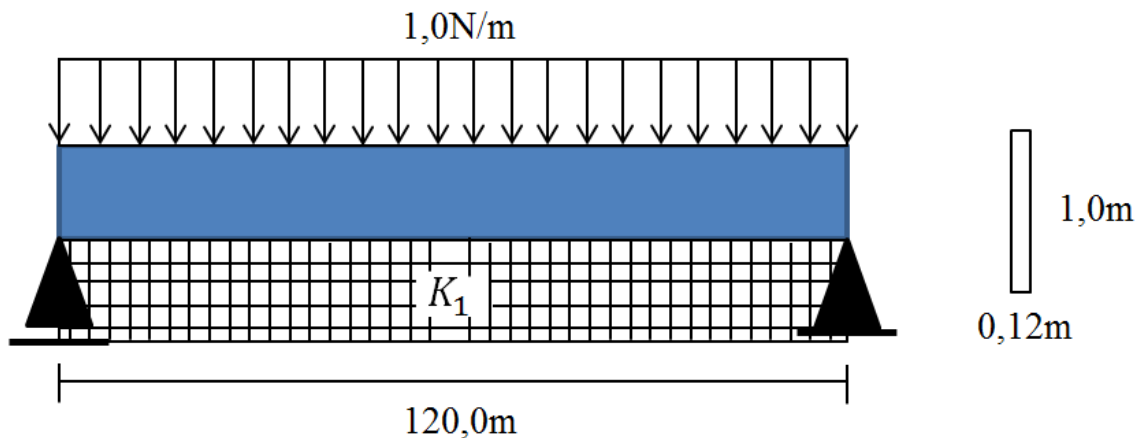


Figura 8.5 – Viga simplesmente apoiada e sobre base elástica

Na Tabela 8 são comparados os deslocamentos transversais adimensionalizados ($\bar{\omega}$) obtidas pelo modelo de Bickford-Reddy através do MEC com soluções analíticas e numéricas (Método das Quadraturas Diferencial, MQD) apresentadas por CHEN et al. (2004).

Tabela 8 – Deslocamentos adimensionalizados ($\bar{\omega}$)

λ	MEC	MQD	Solução de referência
$1/5$	0,01285458	0,01282598	0,01180621
$1/15$	0,01192181	0,01191402	0,0118567
$1/120$	0,01180621	0,01191335	0,01180567

Fonte MQD e Solução de referência: CHEN et al. (2004)

Convém notar que os resultados de Bickford-Reddy obtidos via MEC tiveram um bom desempenho quando comparado aos outros dois demais métodos; sendo estes, o MQD e a solução de referência, uma solução elástica bi-dimensional no estado plano de tensão, e não se refere a uma teoria de vigas específica.

8.6. Carga crítica de flambagem de uma coluna

WANG et al. (2000) apresenta em seu livro, de forma analítica, a carga axial crítica que provoca a instabilidade em uma coluna de seção retangular através da relação entre as teorias de Reddy e Euler Bernoulli.

$$N^R = \frac{N^E \left[1 + \frac{N^E \alpha^2 \check{D}_x}{A_{xz} D_x} \right]}{1 + \frac{N^E \check{D}_x}{D_x A_{xz}}} \quad (8.13)$$

Em que N^R é a carga axial segundo a teoria de Bickford-Reddy e N^E a carga axial segundo a teoria de Euler-Bernoulli.

Sendo,

$$\check{D}_x = D_x H_x - F_x^2 \quad (8.14)$$

São as seguintes relações para cada condição de contorno:

Viga engastada-livre:

$$N^E = \frac{\pi^2 D_x (2n-1)^2}{4 L^2} \quad (8.15)$$

Apoiada-apoiada:

$$N^E = \frac{\pi^2 \cdot D_x \cdot n^2}{L^2} \quad (8.16)$$

Engastada-engastada:

$$N^E = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot D_x \cdot n^2}{L^2} \quad (8.17)$$

Engastada-deslizante

$$N^E = \frac{\pi^2 \cdot D_x \cdot (2n-1)^2}{L^2} \quad (8.18)$$

Seja uma viga de 2m de comprimento e seção retangular de largura 0,5m e altura 1m. As propriedades do material utilizadas são: E=13Pa; G=6,5Pa. Na Tabela 9 são apresentadas as cargas críticas para os dois primeiros modos de flambagem (n) da viga para diferentes condições de contorno. Os resultados obtidos com o MEC são comparados com as soluções analíticas exibidas em (8.16) a (8.19). As representações das condições de contorno são mostradas nas tabelas como Engastado-Engastado (E-E), Engastado-Livre (E-L) e Apoiado – Apoiado (A-A).

Tabela 9 – Carga crítica pelo MEC e pelo método analítico

n	Condição de contorno	P(N) Analítica	P (N) MEC
1	E-E	1,8255	1,8255
	E-L	0,2975	0,2975
	A-A	0,897	0,897
2	E-E	2,6023	2,6024
	E-L	1,4348	1,4348
	A-A	1,8255	1,8255

A partir da Tabela 10 é possível notar que o MEC recupera com sucesso os resultados.

8.7. VIGA ESCALONADA SOB CARGA PONTUAL

Seja uma viga simplesmente apoiada na extremidade esquerda e engastada na direita, com mudança abrupta de seção e carga concentrada na junção entre os dois trechos, conforme Figura 8.6. O primeiro trecho possui comprimento duas vezes a distância L e seção retangular

de largura 0,5m e altura 1m e o segundo trecho comprimento L e seção quadrada de 0,5m por 0,5m. As propriedades do material da viga em toda sua extensão são: $E=2,1 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$; $G=1,05 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$.

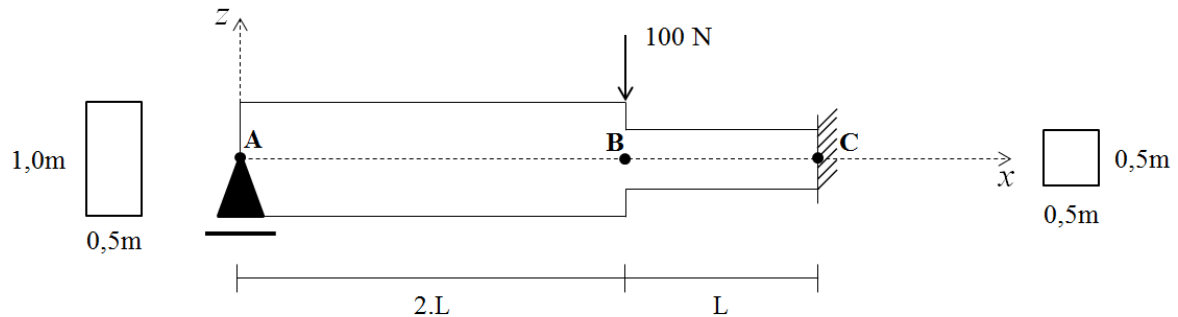


Figura 8.6 – Viga com descontinuidade geométrica e carga pontual.

A Tabela 10 são apresentados os deslocamentos nos pontos A e B da viga.

Tabela 10 – Deslocamentos da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF

Desl.	MEC	MEF	Diferença absoluta	MEC	MEF	Diferença absoluta
	$L=1m$			$L=2m$		
$\frac{d\omega_A}{dx} (rad)$	$-6,101 \times 10^{-3}$	$-6,101 \times 10^{-3}$	0	-0,020	-0,020	0
$\phi_A (rad)$	$5,517 \times 10^{-3}$	$5,517 \times 10^{-3}$	0	0,019	0,019	0
$\omega_B (m)$	$-9,049 \times 10^{-3}$	$-9,049 \times 10^{-3}$	0	-0,055	-0,055	0
$\frac{d\omega_B}{dx} (rad)$	$-6,117 \times 10^{-4}$	$-6,117 \times 10^{-4}$	0	$-6,379 \times 10^{-4}$	$-6,379 \times 10^{-4}$	0
$\phi_B (rad)$	$1,054 \times 10^{-3}$	$1,054 \times 10^{-3}$	0	$1,091 \times 10^{-3}$	$1,091 \times 10^{-3}$	0

Já na Tabela 11 são mostrados os esforços no ponto A, no ponto B pelo lado esquerdo (BD) e direito (BD) e no ponto C.

Tabela 11 – Esforços da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF

Esforço	MEC	MEF	Diferença absoluta	MEC	MEF	Diferença absoluta
	L=1m			L=2m		
$V_{xA}(kN)$	20,423	20,423	$4,62 \times 10^{-14}$	20,109	20,109	$4,26 \times 10^{-14}$
$V_{xBE}(kN)$	-20,423	-20,423	$3,55 \times 10^{-15}$	-20,109	-20,109	$4,97 \times 10^{-14}$
$-\alpha \cdot P_{xBE}(kN \cdot m)$	9,571	9,571	$3,38 \times 10^{-14}$	17,492	17,492	$1,56 \times 10^{-13}$
$\hat{M}_{xBE}(kN \cdot m)$	-31,274	31,274	$2,49 \times 10^{-14}$	-62,946	62,946	$7,46 \times 10^{-14}$
$V_{xBD}(kN)$	-79,577	-79,577	$2,84 \times 10^{-14}$	-79,891	-79,891	$1,42 \times 10^{-14}$
$-\alpha \cdot P_{xBD}(kN \cdot m)$	-9,571	-9,571	$2,67 \times 10^{-14}$	-17,492	-17,492	$1,56 \times 10^{-13}$
$\hat{M}_{xBD}(kN \cdot m)$	31,274	-31,274	$3,2 \times 10^{-14}$	62,946	-62,946	$1,67 \times 10^{-13}$
$V_{xC}(kN)$	79,577	79,577	$7,11 \times 10^{-14}$	79,891	79,891	$1,14 \times 10^{-13}$
$-\alpha \cdot P_{xC}(kN \cdot m)$	-9,3	-9,3	$1,78 \times 10^{-15}$	-17,428	-17,428	$1,07 \times 10^{-14}$
$\hat{M}_{xC}(kN \cdot m)$	29,433	-29,433	$1,78 \times 10^{-14}$	61,15	-61,915	$8,53 \times 10^{-14}$

A partir das Tabelas 10 e 11 é possível notar que o MEC recupera com sucesso os resultados do MEF. Convém notar que os valores do MEF foram obtidos a partir da programação dos valores explícitos da matriz de rigidez encontrados em EISENBERGER (2003).

8.8. Viga escalonada sob carregamento distribuído

Seja uma viga em balanço (engastada na extremidade direita), com mudança abrupta de seção e sob a ação de um carregamento uniformemente distribuído de intensidade 1,0N/m no primeiro trecho, conforme Figura 8.7. O primeiro trecho possui comprimento duas vezes a

distância L e seção retangular de largura $0,5\text{m}$ e altura $1,0\text{m}$ e o segundo trecho comprimento L e seção quadrada de $0,5\text{m}$ por $0,5\text{m}$. As propriedades do material da viga em toda sua extensão são: $E=13\text{Pa}$; $G=6,5\text{Pa}$.

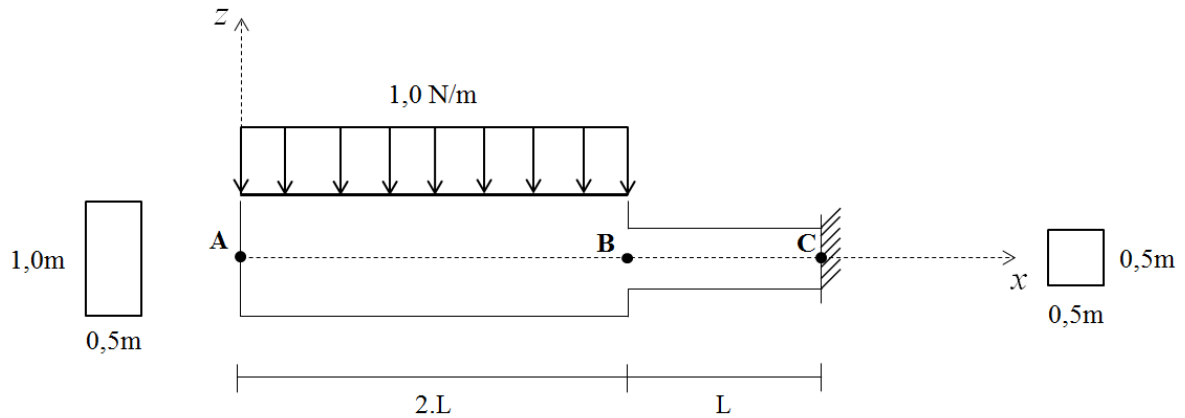


Figura 8.7 – Viga com descontinuidade geométrica e sob carregamento.

A Tabela 12 apresenta os deslocamentos em cada ponto da viga, A, B e C. Já na Tabela 13 são mostrados os esforços no ponto A, no ponto B pelo lado esquerdo (BD) e direito (BD) e no ponto C.

Tabela 12 – Deslocamentos da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF.

Desl.	MEC	MEF	Diferença absoluta	MEC	MEF	Diferença absoluta
	L=1m			L=2m		
$\omega_A(m)$	119,095	119,095	$1,39 \times 10^{-12}$	$1,88 \times 10^3$	$1,88 \times 10^3$	$1,32 \times 10^{-10}$
$\frac{d\omega_A}{dx}(rad)$	-46,787	-46,787	$9,6 \times 10^{-13}$	-374,17	-374,17	$3,25 \times 10^{-11}$
$\phi_A(rad)$	46,765	46,765	$4,19 \times 10^{-13}$	374,149	374,149	$2,45 \times 10^{-11}$
$\omega_B(m)$	26,042	26,042	$3,27 \times 10^{-13}$	399,653	399,653	$2,83 \times 10^{-11}$
$\frac{d\omega_B}{dx}(rad)$	-45,179	-45,179	$5,47 \times 10^{-13}$	-356,22	-356,22	$2,54 \times 10^{-11}$
$\phi_B(rad)$	44,09	44,09	$5,05 \times 10^{-13}$	354,022	354,022	$2,52 \times 10^{-11}$

Tabela 13 – Esforços da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF.

Esforço	MEC	MEF	Diferença absoluta	MEC	MEF	Diferença absoluta
	L=1m			L=2m		
$V_{x_{BE}}$	-2,0	-2,0	$4,219 \times 10^{-14}$	-4,0	-4,0	$2,98 \times 10^{-13}$
$-\alpha \cdot P_{x_{BE}}$	0,384	0,384	$2,109 \times 10^{-15}$	1,568	1,568	$3,84 \times 10^{-14}$
$\hat{M}_{x_{BE}}$	-1,616	-1,616	$1,91 \times 10^{-14}$	-6,432	-6,432	$5,58 \times 10^{-13}$
$V_{x_{BD}}$	2,0	2,0	$4,041 \times 10^{-14}$	4,0	4,0	$2,81 \times 10^{-13}$
$-\alpha \cdot P_{x_{BD}}$	-0,384	-0,384	$2,998 \times 10^{-15}$	-1,568	-1,568	$3,42 \times 10^{-14}$
$\hat{M}_{x_{BD}}$	1,616	1,616	$1,821 \times 10^{-14}$	6,432	6,432	$5,34 \times 10^{-13}$
V_{x_C}	-2,0	-2,0	$4,952 \times 10^{-14}$	-4,0	-4,0	$3,44 \times 10^{-13}$
$-\alpha \cdot P_{x_C}$	0,839	0,839	$1,188 \times 10^{-14}$	3,278	3,278	$2,44 \times 10^{-13}$
$\hat{M}_{x_C}$	-3,161	-3,161	$4,396 \times 10^{-14}$	-12,722	-12,722	$9,38 \times 10^{-13}$

A partir das Tabelas 12 e 13 é possível notar que o MEC recupera com sucesso os resultados do MEF cujo programa foi implementado com a matriz de rigidez e vetor de carga apresentado por EINSENBERG (2003). No entanto alguns valores do vetor de carga para carregamentos distribuídos apresentados por Einsenberg tiveram que ser corrigidos.

8.9. Viga com descontinuidade devido a recalque

Seja uma viga apoiada em três pontos sendo nas extremidades apoios de segundo gênero (pontos A e C) e no vão um apoio simples (ponto B), sob a ação de um recalque de 15mm no apoio B, conforme Figura 8.8. O primeiro trecho possui comprimento L e o segundo trecho possui comprimento duas vezes a distância L. A viga possui seção retangular

de largura 0,5m e altura 1,0m. As propriedades do material da viga em toda sua extensão são: $E=13\text{Pa}$; $G=6,5\text{Pa}$.

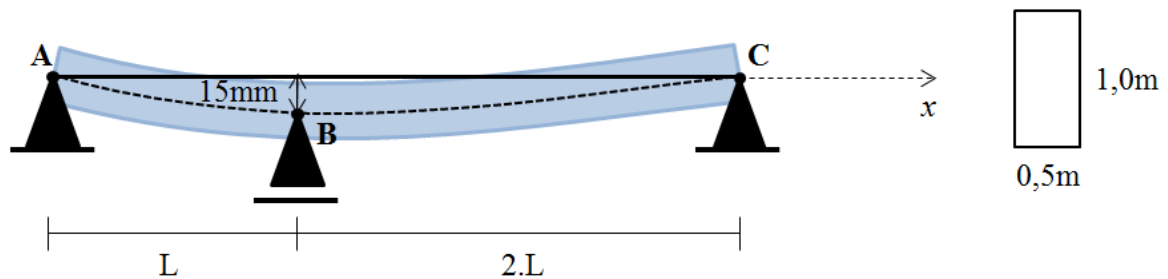


Figura 8.8 – Viga sob a ação de um recalque.

A Tabela 14 apresenta os deslocamentos em cada ponto da viga, A, B e C. Já na Tabela 15 são mostrados os esforços no ponto A, no ponto B pelo lado esquerdo (BD) e direito (BD) e no ponto C. Em ambos, $L=1,0\text{m}$.

Tabela 14 – Deslocamentos da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF.

Desl.	MEC	MEF	Diferença absoluta
$\frac{d\omega_A}{dx} \text{ (rad)}$	-0,018	-0,018	$2,14 \times 10^{-10}$
$\phi_A \text{ (rad)}$	0,014	-0,014	$4,31 \times 10^{-11}$
$\omega_B \text{ (m)}$	-0,015	-0,015	0
$\frac{d\omega_B}{dx} \text{ (rad)}$	$-6,61 \times 10^{-3}$	$-6,61 \times 10^{-3}$	$3,36 \times 10^{-10}$
$\phi_B \text{ (rad)}$	$5,6 \times 10^{-3}$	$-5,6 \times 10^{-3}$	$4,22 \times 10^{-11}$
$\frac{d\omega_C}{dx} \text{ (rad)}$	0,013	0,013	$2,54 \times 10^{-11}$
$\phi_C \text{ (rad)}$	-0,011	0,011	$1,87 \times 10^{-11}$

Tabela 15 – Esforços da viga com descontinuidade pelo MEC e pelo MEF.

Esforço	MEC	MEF	Diferença absoluta
$V_{xA}(\text{N})$	$9,455 \times 10^{-3}$	$9,455 \times 10^{-3}$	$9,39 \times 10^{-11}$
$V_{xBE}(\text{N})$	$-9,455 \times 10^{-3}$	$-9,455 \times 10^{-3}$	$9,39 \times 10^{-11}$
$-\alpha \cdot P_{xBE}(\text{N.m})$	$2,168 \times 10^{-3}$	$2,168 \times 10^{-3}$	$3,84 \times 10^{-11}$
$\hat{M}_{xBE}(\text{N.m})$	$-7,287 \times 10^{-3}$	$-7,287 \times 10^{-3}$	$9,4 \times 10^{-12}$
$V_{xBD}(\text{N.m})$	$-4,727 \times 10^{-3}$	$-4,727 \times 10^{-3}$	$1,45 \times 10^{-11}$
$-\alpha \cdot P_{xBD}(\text{N.m})$	$-2,168 \times 10^{-3}$	$-2,168 \times 10^{-3}$	$3,84 \times 10^{-11}$
$\hat{M}_{xBD}(\text{N.m})$	$7,287 \times 10^{-3}$	$7,287 \times 10^{-3}$	$9,4 \times 10^{-12}$
$V_{xC}(\text{N})$	$4,727 \times 10^{-3}$	$4,727 \times 10^{-3}$	$1,45 \times 10^{-11}$

A partir das Tabelas 14 e 15 é possível notar que o MEC recupera com sucesso os resultados.

9. CONCLUSÃO

Foi proposta deste trabalho a abordagem de problemas de flexão e estabilidade de barras, com ou sem base elástica, pelo modelo de Bickford-Reddy abordado a partir do Método dos Elementos de Contorno.

Desta forma são contribuições originais no estudo de vigas de terceira ordem as soluções fundamentais, equações integrais e algébricas do problema.

A aplicação do método numérico procedeu-se primeiramente com a exposição da equação do problema real da viga de Bickford-Reddy para o problema de flexão e a obtenção da mesma para o caso de vigas submetidas a uma carga axial de compressão.

A princípio foram desenvolvidas as soluções para vigas sem a base elástica, posteriormente o efeito da fundação foi incorporado segundo os modelos de Winkler e Pasternak.

Para a validação numérica foram apresentados exemplos de vigas com, ou sem, base elástica, com diferentes condições de contorno e sobre condições externas adversas. Alguns exemplos que se encontram no texto são: viga em balanço submetida a uma carga concentrada, viga de seção retangular e de seção circular simplesmente apoiada sob um carregamento uniformemente distribuído, vigas sobre base elástica, viga escalonada sob carga pontual, viga com descontinuidade devido a recalque, entre outros. Desta forma, os resultados sugerem um bom desempenho e elegância da formulação apresentada aqui.

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Alguns desdobramentos poderiam ser investigados para o enriquecimento dos estudos referentes à aplicação do MEC no modelo de viga de Bickford-Reddy, por exemplo:

- a) Utilização de modelos de bases elásticas com três parâmetros tais como as bases de Kerr e Vlasov;
- b) Análise dinâmica;
- c) Utilização de modelos para vigas compostas de materiais compósitos laminados e materiais funcionalmente graduados.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALIABADI, M.H. The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures. Wiley, 2002.
- ANTES, H. Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams. Pergamon. Computers and Structures, v. 81, p. 383-396, 2003.
- BAZANT, Z.P.; CEDOLIN, L. Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories. World Scientific. 1991.
- BECKER, A.A. The boundary element method in engineering: a complete course. McGRAW-Hill. 1992.
- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. Boundary Element Methods in Engineering. Science, McGraw-Hill. London, 1981.
- BICKFORD, W.B. A consistent higher order beam theory. Develop Theor Appl Mech. V.11. p.137-50. 1982.
- CHENG, A.H.D.; CHENG, D.T. Heritage and early history of the boundary element method. Elsevier. Engineering Analysis with Boundary Elements, v.29, p.268-302, 2005.
- CHEN, W.Q.; LÜ, C.F. BIAN, Z.G. A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation. Elsevier. V. 28. P.877-890.2004.
- CRUZ, J.M.F. Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo Método dos Elementos de Contorno. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (Tese), Universidade Federal da Paraíba. 2012.
- DOMÍNGUEZ, J. Boundary elements in dynamics. Computational Mechanics Publications. 1993.
- EISENBERGER, M. An exact high order beam element. Computers and Structures. V.81. p.147-152, 2003.
- ERGÜVEN, M.E; GEDIKLI, A. A mixed finite element formulation for timoshenko beam on winkler foundation. Computational Mechanics. V.31. p-229-237. 2003.

HEYLIGER, P.R.; REDDY, J.N. A higher order beam finite element for bending and vibration problems. Journal of Sound and Vibration. V. 126(2). p. 309-326, 1988.

HÖRMANDER. Linear Partial Differential Operators. Berlin: Springer; 1963.

KANT, T; GUPTA, A. A finite element model for a higher-order shear-deformable beam theory. J Sound Vibration. 125(2):193–202, 1988.

KATSIKADELIS, J.T. Boundary elements: Theory and applications. Elsevier. 2002.

MANOLIS, G. D.; BESKOS, D.E.; PINEROS, M.F. Beam and plate stability by boundary elements. Computers and Structures. V. 22, 917-923, 1986.

PASSOS, J.J.S. Análise da estabilidade estática e dinâmica de vigas pelo Método dos Elementos de Contorno. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (dissertação), Universidade Federal da Paraíba. 2014.

PASTERNAK, P. L. On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Constants. Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscow, (in Russian). 1954.

PROVIDASKIS, C. P. e BESKOS, D. E. Dynamic analysis of beams by the boundary element method. Computers and Structures, Vol. 22, N° 6, p. 957-964. 1986.

TIMOSHENKO, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Philos. Mag. 41: 744–746, 1921.

TIMOSHENKO, S; GOODIER, J.N. Theory of elasticity. Mc Graw-Hill. 1951.

TIMOSHENKO, S. Strength of materials. D. Van Nostrand. 1940.

WANG, C.M.; REDDY, J.N.; LEE, K.H. Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions. Elsevier. 2000.

WINKLER, E. Die Lehre Von Der Elastizität Und Festigkeit. Dominicus, Prague. 1867.

YESILCE, Y. Free vibration of semi-rigid connected Reddy–Bickford piles embedded in elastic soil. Sadhana. V.33. p.781-801. 2008.

ZHONG, H.; WANG, Y. Weak form quadrature element analysis of Bickford Beams.Elsevier. European Journal of Mechanics A/Solids, v.29, p.851-858, 2010.

ZWILLINGER, D. Standard mathematical tables and formulae. Chapman and Hall. (2003).