

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre ideais primos anexados de módulos

Clemerson Oliveira da Silva Menezes

JOÃO PESSOA – PB
MARÇO DE 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre ideais primos anexados de módulos

por

Clemerson Oliveira da Silva Menezes.

sob a orientação do

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal

e a coorientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

João Pessoa – PB
Março de 2016

M543s Menezes, Clemerson Oliveira da Silva.
Sobre ideais primos anexados de módulos / Clemerson
Oliveira da Silva Menezes.- João Pessoa, 2016.
67f.
Orientador: Roberto Callejas Bedregal
Coorientação: Napoleón Caro Tuesta
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Representação secundária. 3. Primos
anexados. 4. Dualidade de Matlis. 5. Co-localização.
6. Cohomologia local.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Sobre ideais primos anexados de módulos

por

Clemerson Oliveira da Silva Menezes¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra comutativa.

Aprovada em 09 de Março de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Aron Simis – UFPE
(Examinador Externo)

Prof. Dr(a) Jacqueline Rojas – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

A minha querida mãe, Cleuma Maria.

A minha irmã, Nayara Kelman.

Dedico.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, os responsáveis pela educação que tive, pela confiança e apoio depositados em minhas decisões. Agradeço a minha irmã, Nayara Kelman, pelo amor e compreensão despendidos ao longo da vida.

Agradeço aos meus amigos e professores Uberlandio Severo, Flank Bezerra, Aurélio Menegon, Lizandro Sanchez e Napoleón Caro Tuesta, por toda a colaboração e, principalmente, por terem sido meus referenciais de generosidade, atenciosidade e ensinando-me com experiência e ética os vários caminhos que podem ser trilhados pela vida acadêmica.

Agradeço aos professores Aron Simis, Abramo Hefez, Daniel Levcovitz e a professora Jacqueline Rojas, ao curto período de contato, mas de grande riqueza em minuciosos ensinamentos de vida e em matemática.

Agradeço as minhas amigas Tai Ferras e Juliete Santos, pelas maravilhosas tardes de café e prosas demasiadamente esplêndidas. Pessoas cuja alegria e energia positiva me fizeram acreditar em dias melhores.

Aos grandes amigos e professores da graduação, Eben Alves, André Flores, Wagner Filho, José Arnaldo, Ornan Filipe, Moreno Bonutti, Fábio Zanetti, Eliane Cavalcanti e Gustavo Camelo. A eles devo o início de minha dedicação à Ciência.

Agradeço aos amigos e colegas de pós-graduação. Em especial agradeço a família Bedregal (Luis Alba, Tony Lopes, Zeh Gonçalves, Ricardo Bruno e José Naéliton). Agradeço a Sally Andria, Camila Marques, Isabelly Diniz, Lucas Araújo, Ageu Freire, Luiz Gomes, Leon Tarquino, Thiago Lunes, Thiago Luiz, José Ribeiro, Djair Paulino, Esaú Alves, Dayane Santos, Sylvia Ferreira, Breno Souza, Daniel Lemos, Daniel Tomaz, Diego Ferraz, Danilo Santos, Désio Ramirez, Jarbas Dantas, Esteban Silva, Eudes Lima, Gilson Carvalho, Ricardo Burity, Yane Lísley, Rayssa Cajú, Rodrigo Clemente, Ciane Vieira, Marcius Petrucio, Gilcenio Rodrigues, Caio Ilan, Gustavo Araújo, Nacib Gurgel, Fernanda Roing, Mariana Maia, Tony Nogueira, Franciélia Limeira, Mauri Pereira, Diego Felix, Jorge Alexandre, que colocaram o desejo de aprender e ensinar acima de qualquer possível competição medíocre de conhecimento.

Por fim, sou extremamente grato ao meu amigo e orientador Roberto Callejas Bedregal, por seus ensinamentos, que hei de carregar durante toda a vida, amizade e confiança dedicados a minha pessoa. Aprendi em demasia...

Sucesso e vida Longa a todos.

“Tenho a impressão de ter sido somente um garoto brincando e me divertindo na praia, encontrando, de vez em quando, um seixo mais liso ou uma concha mais bonita que o normal, enquanto que o grande oceano da verdade permanece todo desconhecido diante de mim.”

Isaac Newton

“Sinta-se envergonhado de morrer até que você tenha conseguido alguma vitória para a humanidade.”

Horace Mann

Resumo

A conexão entre a teoria de cohomologia local e a teoria de representação secundária e ideais primos anexados foi exposta nos trabalhos de R. Y. Sharp e I. G. Macdonald e mostrou-se bastante prolífica, uma vez que foram estabelecidas condições de anulamento e não anulamento de determinados módulos de cohomologia local. Neste trabalho, provamos que, para determinadas condições, o dual de Matlis (generalizado) de um módulo M , $D_R(M)$, sobre um anel semi-local R , é Artiniano e, portanto, representável. Sob estas condições, mostramos que $\text{Att}_R D_R(M) = \text{Ass}M$. Além disso, descrevemos os conjuntos de primos anexados de alguns módulos de cohomologia local e módulos via co-localização. Por exemplo, mostramos que o conjunto dos ideais primos anexados do módulo de cohomologia local $H_{\mathfrak{a}}^{\dim(R)}(R)$ é justamente o conjunto de ideais primos de R que satisfazem a condição do Teorema de Anulamento de Lichtenbaum–Hartshorne.

Palavras-chave: Representação secundária, Primos anexados, Dualidade de Matlis, Co-localização, Cohomologia local.

Abstract

The connection between the theory of local cohomology and the theory of secondary representation and attached prime ideals is exposed in the work of R. Y. Sharp and I. G. Macdonald and it displayed itself as very prolific since the statement of various conditions of vanishing and non-vanishing for some local cohomology modules. In this work we show that, in some conditions, the (generalised) Matlis dual $D_R(M)$ of a module M over a semi-local ring R is Artinian, hence representable. Under the same conditions we show that $\text{Att}_R(D_R(M)) = \text{Ass}(M)$. We also describe the set of attached primes of co-localisations of modules and of some local cohomology modules. The use for the latter is, as an example, to describe the set of attached primes of the top local cohomology module $H_a^{\dim(R)}(R)$ as the set of prime ideals of R which satisfy the condition of Lichtenbaum–Hartshorne Vanishing Theorem.

Keywords: Secondary representation, attached primes, Matlis duality, co-localisation, local cohomology.

Sumário

Introdução	1
1 Representação secundária de módulos sobre um anel comutativo	3
1.1 Conceitos básicos	3
1.2 Representação secundária	6
1.2.1 Módulos Artinianos admitem representação secundária	8
1.3 Ideais primos anexados	9
1.4 Módulos injetivos sobre um anel Noetheriano são representáveis	13
2 Cohomologia local	18
2.1 Alguns resultados preliminares sobre cohomologia local	18
2.2 Módulos de cohomologia local Artinianos	20
3 Ideais primos anexados, módulos de cohomologia local e co-localização	25
3.1 Ideais primos anexados de módulos de cohomologia local	25
3.2 Ideais primos anexados da co-localização de um módulo	30
A Completamento	37
A.1 Filtrações e gradações	37
A.2 Anéis e módulos graduados	38
A.3 Topologia linear	39
A.4 Completamento	39
A.4.1 Completamento I -ádico	40
A.4.2 Anéis locais completos	41
B Módulos injetivos	43
B.1 Extensões essenciais	46
B.2 Resoluções injetivas	48
B.3 Módulos injetivos sobre um anel comutativo noetheriano	50
Referências Bibliográficas	57

Introdução

No ano de 1973, I. G. Macdonald introduziu em seu artigo pioneiro, *Secondary representation of modules over a commutative ring*, *Sympos. Math.* 11 (1973) 23–43, uma teoria dual a teoria de ideais primos associados e decomposição primária, chamada representação secundária de módulos. Os ideais primos que estão no coração desta teoria são conhecidos como ideais primos anexados e sua relação com a teoria de ideais primos associados é enfatizada pela igualdade $\text{Att}_R(D(M)) = \text{Ass}(M)$, onde $D(M)$ denota o dual (generalizado) de Matlis de um R -módulo finitamente gerado M , com R semi-local Noetheriano, e $\text{Att}_R(D(M))$ denota o conjunto de ideais primos anexados do dual de Matlis $D(M)$.

Se, além disso, o anel semi-local R for J -completo, onde J denota o ideal de Jacobson de R , então, segue do isomorfismo $DD(M) \cong M$, que $\text{Att}_R(M) = \text{Ass}(D(M))$. Esta última igualdade nos permite obter uma descrição para o conjunto $\text{Att}_R(M)$ em termos dos ideais primos associados do dual de Matlis de M . Desse modo, surge naturalmente o seguinte questionamento: é possível, obter uma descrição para $\text{Att}_R M$, qualquer que seja M ?

I. G. Macdonald mostrou em [13] que módulos Artinianos são representáveis. Uma vez que tais módulos são representáveis, os mesmos admitem a existência, determinada pela representação secundária, do conjunto dos ideais primos anexados. Mas o conjunto de módulos representáveis contém estritamente o conjunto de módulos Artinianos. Por exemplo, em [21] vê-se que os módulos injetivos, sobre um anel Noetheriano, são representáveis. Neste caso, também obtêm-se uma descrição do conjunto dos ideais primos anexados para os injetivos, Teorema 1.32.

Em geral, determinar o conjunto dos ideais primos anexados de um dado módulo M não é uma tarefa fácil, visto que a pergunta acima não possui hipóteses suficientes sobre o anel R e o R -módulo M . No entanto, para certas hipóteses, podemos estabelecer alguns resultados significativos. Por exemplo, I. G. Macdonald e R. Y. Sharp mostraram que, se (R, \mathfrak{m}) é anel local, M um R -módulo não-nulo, finitamente gerado

e cuja dimensão de Krull é s , então

$$\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^s(M)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M) : \dim R/\mathfrak{p} = s\}$$

e $H_{\mathfrak{m}}^s(M) \neq 0$.

Através desse resultado, vê-se claramente uma conexão entre a teorias de representação secundária e ideais primos anexados com a teoria de cohomologia local. Essa relação foi estudada inicialmente por I.G. Macdonald e R. Y. Sharp em [14].

Para explorar ainda mais essa conexão, seria bom ter uma classe de exemplos para que possamos determinar facilmente os ideais primos anexados de um dado módulo. Desse modo, este trabalho tem como objetivo descrever os conjuntos de ideais primos anexados de alguns módulos de cohomologia local e módulos via co-localização. Para este fim, discorreremos sobre os artigos [13], [20], [22], [21], os quais apresentam informações e descobertas a respeito do tema.

Para nossos objetivos, seguiremos o seguinte roteiro:

No *Capítulo 1*, apresentamos os conceitos de representação secundária e ideais primos anexados de um módulo M . Além disso, provamos que módulos Artinianos são representáveis. Demonstramos a unicidade da representação secundária e mostramos que módulos injetivos sobre um anel Noetheriano são representáveis.

No *Capítulo 2*, expomos alguns resultados sobre cohomologia local. Por exemplo, mostramos que, sob certas hipóteses, um dado módulo de cohomologia local é Artiniano. Além disso, expomos os clássicos teoremas de anulamento e não anulamento de Grothendieck e o teorema do não anulamento de Lichtenbaum-Hartshorne.

No *Capítulo 3*, nosso objeto de investigação é o conjunto dos ideais primos anexados de alguns módulos de cohomologia local. Mais especificamente, para M um R -módulo finitamente gerado e (R, \mathfrak{m}) anel local, consideramos os módulos de cohomologia local com suporte em um ideal máximo $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$, e os módulos $H_{\mathfrak{a}}^{\dim R}(R)$, com $M \neq 0$. Tais módulos são Artinianos, e assim, obtemos uma descrição de seus conjuntos de ideais primos anexados. Além disso, apresentamos o conceito de co-localização de um módulo, provamos, via dualidade de Matlis, a relação, de igualdade entre os ideais primos associados de um módulo finitamente gerado sobre um anel semi-local Noetheriano com os ideais primos anexados do dual de Matlis do módulo em questão, e por fim, mostramos que, para um anel local (R, \mathfrak{m}) completo, se M é um R -módulo representável, então a co-localização de M relativa ao conjunto multiplicativo $S = R \setminus \mathfrak{p}$, é representável, com $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$.

Finalmente, os *Apêndices A, B* são dedicados aos seguintes tópicos complementares: Completamento e Módulos injetivos, respectivamente.

Capítulo 1

Representação secundária de módulos sobre um anel comutativo

Neste capítulo introduzimos os conceitos de representação secundária e ideais primos anexados de módulos sobre um anel comutativo. Além disso, demonstramos alguns resultados importantes referentes aos módulos representáveis, por exemplo, mostramos que se um R -módulo M possui uma representação secundária minimal, então, esta representação é única. Não obstante, mostramos que módulos Artinianos são representáveis e módulos injetivos sobre um anel Noetheriano são representáveis.

Em relação a teoria de representação secundária de módulos, muitos dos resultados abordados neste capítulo tomam como base as referências [13], [22], [21] e [11] de I. G. Macdonald, R. Y. Sharp e D. Kirby, respectivamente.

1.1 Conceitos básicos

Como ponto de partida para um mergulho na teoria de representação secundária de módulos, ou pelo menos em uma pequena parte, consideramos R um anel comutativo com unidade. É importante ressaltar a existência de uma generalização da teoria de representação secundária de módulos sobre anéis não-comutativos [2]. No entanto, nossa abordagem está baseada, como já mencionado, no artigo de I. G. Macdonald [13].

Definição 1.1. Um R -módulo $M \neq 0$ diz-se *secundário* quando, para cada $x \in R$, o endomorfismo

$$\begin{aligned}\varphi_{x,M} : M &\rightarrow M \\ m &\mapsto xm\end{aligned}$$

for sobrejetor ou nilpotente. Em outras palavras, $xM = M$ ou $x^n M = 0$ para algum número inteiro $n > 0$.

Proposição 1.2. Se M é um R -módulo secundário, então $\text{nil}(M) := \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$ é um ideal primo em R .

Demonstração. Sejam $a, b \in R$ tais que $ab \in \text{nil}(M)$. Logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(ab)^n M = 0$. Se $b \notin \text{nil}(M)$, então $\varphi_{b^n, M}$ é sobrejetora, i.e., $b^n M = M$. Logo,

$$0 = (ab)^n M = a^n b^n M = a^n M.$$

Ou seja, $a \in \text{nil}(M)$ e portanto, $\text{nil}(M) \in \text{Spec } R$. □

Definição 1.3. Se M é um R -módulo secundário e $\text{nil}(M) = \mathfrak{p} \in \text{Spec } R$, dizemos que M é \mathfrak{p} -secundário.

Exemplo 1.4. Se A é um domínio integral, então seu corpo de frações, $K(A)$, é um A -módulo (0)-secundário. De fato, dado $x \in A$ e supondo que $\varphi_{x, K(A)}$ não é nilpotente, tem-se que $x^n K(A) \neq 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $xK(A) \neq 0$. Como $A \subset K(A)$ e $xK(A) \neq 0$, existe $x^{-1} \in K(A)$ tal que $1 \in xK(A)$ e portanto, $xK(A) = K(A)$. Isto garante que $K(A)$ é um módulo secundário. Além disso, $K(A)$ é claramente (0)-secundário.

Exemplo 1.5. Se A é um anel local com ideal maximal \mathfrak{m} e se cada elemento de \mathfrak{m} é nilpotente, então A é um A -módulo \mathfrak{m} -secundário. De fato, seja $x \in A$. Como A é um anel local, segue que $A \setminus \mathfrak{m} \subseteq A^*$. Desse modo, se $x \in A \setminus \mathfrak{m}$, então $\varphi_{x, A}$ é sobrejetora. Do contrário, segue-se que $\varphi_{x, A}$ é nilpotente uma vez que todo elemento em \mathfrak{m} é nilpotente. Além disso, como $\text{nil}(A) \in \text{Spec } A$ e $\mathfrak{m} \subseteq \text{nil}(A)$, segue da maximalidade de \mathfrak{m} que $\mathfrak{m} = \text{nil}(A)$. Portanto, A é \mathfrak{m} -secundário.

Proposição 1.6. Somas diretas finitas de módulos \mathfrak{p} -secundários são módulos \mathfrak{p} -secundários.

Demonstração. Basta provar a validade do resultado para $n = 2$. De fato, sejam M_1 e M_2 R -módulos \mathfrak{p} -secundários. Agora, consideremos o R -módulo $M = M_1 \oplus M_2$ e um elemento $x \in R$ de modo que $\varphi_{x, M}$ não seja sobrejetora, isto é, $M \neq xM$, o que implica em $xM_1 \neq M_1$ ou $xM_2 \neq M_2$. Se considerarmos $xM_1 \neq M_1$, então existe $n > 0$ tal que $x^n M_1 = 0$, isto é, $x \in \text{nil}(M_1)$. Como $\text{nil}(M_1) = \text{nil}(M_2)$, existe $m > 0$ tal que $x^m M_2 = 0$. Fazendo $k = \max \{n, m\}$, obtemos $x^k (M_1 \oplus M_2) = 0$, ou seja, $x \in \text{nil}(M)$ e, portanto, M é secundário.

Para mostrar que M é \mathfrak{p} -secundário, basta notar que $\text{nil}(M) = \sqrt{\text{Ann}_R(M_1 \oplus M_2)} = \sqrt{\text{Ann}_R(M_1) \cap \text{Ann}_R(M_2)} = \sqrt{\text{Ann}_R(M_1)} \cap \sqrt{\text{Ann}_R(M_2)} = \mathfrak{p}$. □

Proposição 1.7. A imagem de um R -módulo \mathfrak{p} -secundário, por um homomorfismo não-nulo de R -módulos, é \mathfrak{p} -secundário.

Demonstração. Seja $\Phi : M \rightarrow M'$ um homomorfismo não-nulo de R -módulos, onde M é \mathfrak{p} -secundário. Desse modo, Para $x \in R$ temos que $\varphi_{x,M}$ é sobrejetora ou nilpotente. Se $\varphi_{x,M}$ é sobrejetor, então

$$\begin{aligned} \varphi_{x,\Phi(M)} : \Phi(M) &\rightarrow \Phi(M) \\ n &\mapsto xn \end{aligned}$$

é sobrejetora pois,

$$\varphi_{x,\Phi(M)}(\Phi(M)) = x\Phi(M) = \Phi(xM) = \Phi(M).$$

No entanto, se $x \in \text{nil}(M)$, então existe $k > 0$ tal que $x^k M = 0$. Daí obtemos que

$$x^k \Phi(M) = \Phi(x^k M) = 0,$$

isto é, $\varphi_{x,\Phi(M)}$ é nilpotente e, portanto, $\Phi(M)$ é secundário.

Para a verificação de que $\Phi(M)$ é \mathfrak{p} -secundário, demonstraremos as seguintes inclusões:

$$\text{Ann}_R(M) \subseteq \text{Ann}_R(\Phi(M)) \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(M)}.$$

Para a primeira inclusão, seja $x \in \text{Ann}_R(M)$. Como Φ é homomorfismo, segue que $x\Phi(m) = \Phi(xm)$ para qualquer $\Phi(m) \in \Phi(M)$. De $x \in \text{Ann}_R(M)$ segue que $xM = 0$, isto é, $xm = 0$ para todo $m \in M$. Logo, $\Phi(xm) = 0$, ou seja, $x \in \text{Ann}_R(\Phi(M))$.

Para a segunda inclusão, consideremos $x \in \text{Ann}_R(\Phi(M))$, logo $x\Phi(m) = 0$ para todo $m \in M$. Isto implica em $xM \subseteq \text{Ker}(\Phi) \subsetneq M$, ou seja, $\varphi_{x,M}$ não é sobrejetora. Assim $x^r M = 0$ para algum $r > 0$ e, portanto, $\text{Ann}_R(\Phi(M)) \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$, pois M é secundário.

□

Corolário 1.8. Seja M um R -módulo, $\mathfrak{p} \in \text{Spec}R$ e M_1, \dots, M_r submódulos \mathfrak{p} -secundários de M . Então $\sum_{i=1}^r M_i$ é \mathfrak{p} -secundário.

Demonstração. Como cada M_i é não-nulo, segue que $\sum_{i=1}^r M_i \neq 0$. Uma vez que

$$\begin{aligned} \varphi : \bigoplus_{i=1}^r M_i &\longrightarrow \sum_{i=1}^r M_i \\ (m_1, \dots, m_r) &\longmapsto \sum_{i=1}^r m_i \end{aligned}$$

é sobrejetora e $\bigoplus_{i=1}^r M_i$ é \mathfrak{p} -secundário, segue que $\sum_{i=1}^r M_i$ é \mathfrak{p} -secundário. \square

Observação 1.9. Segue da Proposição 1.7 que o quociente não-nulo de módulos \mathfrak{p} -secundários é \mathfrak{p} -secundário.

Proposição 1.10. O anulador de um R -módulo \mathfrak{p} -secundário é um ideal \mathfrak{p} -primário.

Demonstração. Seja $I = \text{Ann}_R(M)$, onde M denota um R -módulo \mathfrak{p} -secundário. Seja $ab \in I$ e suponhamos que $b^n \notin I$ para todo $n > 0$. Como M é secundário, segue que $\varphi_{b,M}$ é sobrejetora, logo $0 = ab(M) = a(bM) = aM$. Com isso obtemos que $a \in I$ e assim, I é primário. Além disso, notemos que $\sqrt{I} = \sqrt{\text{Ann}_R(M)} = \mathfrak{p}$. Portanto, I é \mathfrak{p} -primário. \square

Proposição 1.11. Seja M um R -módulo não-nulo e seja \mathfrak{p} um ideal primo em R . Então M é um módulo \mathfrak{p} -secundário se, e somente se,

1. $r \in R$ e $rM \neq M$ implica $r \in \mathfrak{p}$, e
2. $\mathfrak{p} \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$.

Demonstração. Considerando M \mathfrak{p} -secundário, segue que $\mathfrak{p} = \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$. Além disso, para $r \notin \mathfrak{p}$, temos que $rM = M$. Assim, 1 e 2 são imediatos.

Reciprocamente, suponhamos 1 e 2. Consideremos $r \in R$ tal que $r \notin \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$; então, por 1 e 2, $r \notin \mathfrak{p}$ e $rM = M$. Assim, M é secundário. Agora consideremos $r \in R$ tal que $r \notin \mathfrak{p}$. Desse modo, segue que $rM = M$ e $r^k M = M \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $r \notin \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$. Portanto, $\mathfrak{p} \supseteq \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$. Isto garante que M é \mathfrak{p} -secundário. \square

1.2 Representação secundária

Nesta seção, apresentamos o conceito de representação secundária de módulos. Além disso, provamos que, se um módulo M é representável, então sua representação minimal é única.

1. Representação secundária de módulos sobre um anel comutativo

Uma *representação secundária* de um R -módulo M é uma expressão de M como soma finita de submódulos secundários. Seja $M = \sum_{i=1}^r N_i$ uma representação secundária com $N_i \subseteq M$ \mathfrak{p}_i -secundário para cada i . Uma tal representação diz-se *minimal* quando:

1. \mathfrak{p}_i e \mathfrak{p}_j são ideais primos distintos em R para $1 \leq i \neq j \leq r$;
2. para todo $j = 1, 2, \dots, r$, temos $N_j \not\subseteq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r N_i$.

Observação 1.12. Se um R -módulo M é representável, podemos obter uma representação secundária minimal.

Estudaremos sob quais condições a decomposição minimal de um módulo representável é única. A fim de fazer isso, consideramos o submódulo $M_{(T)} = \bigcap_{t \in T} tM$, onde cada T é subconjunto multiplicativamente fechado em R . Além disso, se $T = \emptyset$, definimos $M_{(T)} = M$.

Proposição 1.13. Seja $M = M_1 + \dots + M_k$ um R -módulo, onde M_i é um submódulo \mathfrak{p}_i -secundário, e seja T um subconjunto multiplicativamente fechado em R . Se T possui interseção vazia com $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_l$ e não-vazia com $\mathfrak{p}_{l+1}, \dots, \mathfrak{p}_k$, então $M_{(T)} = M_1 + \dots + M_l$.

Demonstração. Suponhamos que $t \in T$. Assim $t \notin \mathfrak{p}_i$, com $i = 1, 2, \dots, l$, e $tM = tM_1 + \dots + tM_k \supseteq M_1 + \dots + M_l$. Portanto, $M_{(T)} \supseteq M_1 + \dots + M_l$.

Reciprocamente, quando $\mathfrak{p}_i \cap T \neq \emptyset$, para $i = l+1, \dots, k$, existe $t_i \in \mathfrak{p}_i \cap T$ e $t = \prod_{i=l+1}^k t_i \in \mathfrak{p}_i \cap T$ para $i = l+1, \dots, k$. Mas $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\text{Ann}_R(M_i)}$; assim, existe um inteiro $w > 0$ tal que $t^w M_i = 0$, para cada $i = l+1, \dots, k$. Contudo, $t^w \in T$, assim $t^w \notin \mathfrak{p}_i$ com $i = 1, \dots, l$. Portanto, $t^w M_i = M_i$ para cada $i = 1, \dots, l$ e

$$M_{(T)} \subseteq t^w M = t^w M_1 + \dots + t^w M_k = M_1 + \dots + M_l,$$

o que encerra a prova. □

Agora consideremos M um R -módulo representável. É inevitável o surgimento natural da seguinte questão: tal representação é única? A solução para este problema é afirmativa e sua demonstração é o conteúdo do seguinte Teorema:

Teorema 1.14. *Sejam $M = M_1 + \dots + M_k$ e $M = M'_1 + \dots + M'_l$ duas representações secundárias minimais de M , onde M_i e M'_j são R -módulos \mathfrak{p}_i -secundário e \mathfrak{p}'_j -secundário, respectivamente, com $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq l$. Então, $k = l$ e os conjuntos $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k\}$ e $\{\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_l\}$ coincidem.*

Demonstração. Seja \mathfrak{p} um dos $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$. É suficiente provar que \mathfrak{p} pertence a $\{\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_l\}$. Primeiro renumeramos M_i, M'_j tal que $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_i$ para $1 \leq i < m$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_m$, $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{p}_i$ para $m < i \leq k$, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}'_j$ para $1 \leq j \leq n$, $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{p}'_j$ para $n < j \leq l$. Pondo $T = R \setminus \mathfrak{p}$; segue da Proposição 1.13 que

$$M_1 + \dots + M_m = M_{(T)} = M'_1 + \dots + M'_n.$$

Suponhamos $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}'_j$ para $1 \leq j \leq n$; assim, existe $r \in \mathfrak{p}$ tal que $r \notin \mathfrak{p}_i$ para $1 \leq i < m$ e $r \notin \mathfrak{p}'_j$ para $1 \leq j \leq n$. Agora, $r \in \mathfrak{p} = \sqrt{\text{Ann}_R(M_m)}$ implica $r^t M_m = 0$ para algum inteiro $t > 0$, $r \notin \mathfrak{p}_i = \sqrt{\text{Ann}_R(M_i)}$ implica $r M_i = M_i$, com $1 \leq i < m$, e $r \notin \mathfrak{p}'_j = \sqrt{\text{Ann}_R(M'_j)}$ implica $r M'_j = M'_j$. Portanto,

$$M_1 + \dots + M_{m-1} = r^t M_{(T)} = M'_1 + \dots + M'_n,$$

e

$$M_1 + \dots + M_{m-1} = M_1 + \dots + M_m,$$

o que contraria a minimalidade da decomposição $M_1 + \dots + M_k$. Consequentemente, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'_j$ para algum j satisfazendo $1 \leq j \leq n$, e o teorema está provado. \square

1.2.1 Módulos Artinianos admitem representação secundária

Um R -módulo não-nulo M é *irredutível quanto à soma* se a soma de dois quaisquer submódulos próprios de M ainda é um submódulo próprio em M .

Lema 1.15. Seja M um R -módulo Artiniano. Se M é não-secundário, então existem submódulos próprios N_1, N_2 de M tais que $M = N_1 + N_2$.

Demonstração. Seja M não-secundário. Então existe $r \in R$ tal que $r \notin \text{nil}(M)$ e $rM \subset M$. Consideremos a seguinte cadeia decrescente de submódulos

$$M \supset rM \supseteq r^2M \supseteq \dots$$

Como M é Artiniano, existe $t > 0$ tal que $r^t M = r^{t+n} M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixemos $N_1 = rM$ e $N_2 = \text{Ann}_M(r^t R)$. Notemos que N_1 e N_2 são próprios em M . Além disso, para $m \in M$, existe $m' \in M$ tal que $r^t m = r^{t+1} m'$. Com isso, obtemos que $m - r m' \in \text{Ann}_M(r^t R) = N_2$. Como $r m' \in N_1$, segue que $m = m - r m' + r m' \in N_1 + N_2$ e portanto, $N_1 + N_2 = M$. \square

Teorema 1.16. *Todo R -módulo Artiniano M admite representação secundária.*

Demonstração. Denotemos por \mathfrak{F} a família de submódulos de M que não podem ser escritos como soma finita de módulos secundários. Suponhamos que $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Da Artinianidade de M , obtém-se que \mathfrak{F} possui um elemento minimal, a saber, N . Notemos que N não é secundário, logo $N = N_1 + N_2$ para certos submódulos próprios $N_1 \subset N$ e $N_2 \subset N$. Pela minimalidade de N , N_1 e N_2 são formados por somas finitas de módulos secundários e assim, por conseguinte, N também é representável. Esta contradição mostra que $\mathfrak{F} = \emptyset$ e portanto, M é representável. \square

1.3 Ideais primos anexados

O conceito de ideal primo anexado de um módulo M está intimamente relacionado com sua representação secundária (caso M seja representável). Além disso, sua importância em cohomologia local consiste no fato de, através do conjunto de ideais primos anexados, obtermos condições de anulamento e não anulamento para um módulo de cohomologia local.

Um ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ é chamado *ideal primo anexado* do R -módulo M se existe algum submódulo U de M tal que $\mathfrak{p} = \text{nil}(M/U)$. Denota-se o conjunto dos ideais primos anexados de um módulo M por $\text{Att}_R(M)$.

Lema 1.17. Seja $M = \sum_{i=1}^n N_i$ uma representação secundária minimal de M , com N_i \mathfrak{p}_i -secundário para $1 \leq i \leq n$. Se Q é um quociente de M tal que $\text{nil}(Q) = \mathfrak{p} \in \text{Spec } R$, então, \mathfrak{p} é igual a um dos \mathfrak{p}_i , $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Seja $Q = M/L$, onde L denota um submódulo de M . Organizando os N_i (se necessário), colocamos $N_i \not\subseteq L$ para $1 \leq i \leq r$ e $N_i \subset L$ para $r+1 \leq i \leq n$. Então

$$M/L = \sum_{i=1}^n (N_i + L)/L = \sum_{i=1}^r (N_i + L)/L.$$

Como $(N_i + L)/L \cong N_i/N_i \cap L$ é \mathfrak{p}_i -secundário, para cada $1 \leq i \leq r$, temos que

$$\mathfrak{p} = \text{nil}(M/L) = \sqrt{\text{Ann}_R\left(\sum_{i=1}^r (N_i + L)/L\right)} = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i,$$

logo $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ para algum $1 \leq i \leq r$. \square

Na seção anterior vimos que, se um R -módulo M possui representação secundária minimal, esta será única. O seguinte Teorema nos permite, através da representação secundária minimal de um R -módulo M , determinar o conjunto $\text{Att}_R(M)$.

Teorema 1.18. *Seja $M = N_1 + \dots + N_n$ uma representação secundária minimal do R -módulo M , com $\mathfrak{p}_i = \text{nil}(N_i)$. Então $\text{Att}_R(M) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$.*

Demonstração. Uma vez que $L = M/(N_1 + \dots + N_{i-1} + N_{i+1} + \dots + N_n)$ é um quociente não-nulo de N_i , L é \mathfrak{p}_i -secundário. Assim, $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\} \subseteq \text{Att}_R(M)$. A recíproca segue do Lema 1.17. \square

Lema 1.19. *Seja M um R -módulo representável. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $\text{Att}_R(M) \neq \emptyset$;
2. $\min \text{Att}_R(M) = \min V(\text{Ann}_R(M))$. Em particular,

$$\dim(R/\text{Ann}_R(M)) = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M)\}.$$

3. Se

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de R -módulos, então

$$\text{Att}_R(M'') \subseteq \text{Att}_R(M) \subseteq \text{Att}_R(M') \cup \text{Att}_R(M'').$$

Demonstração. 1. Se $\text{Att}_R(M) = \emptyset$ e $M = \sum_{i=1}^n N_i$ denota uma representação minimal do R -módulo M , com $\mathfrak{p}_i = \text{nil}(N_i) \in \text{Spec } R$, então obtemos que algum N_i é não-nulo e, portanto, $\mathfrak{p}_i \in \text{Att}_R(M)$ absurdamente.

2. Inicialmente notemos que $\text{Att}_R(M) \subseteq V(\text{Ann}_R(M))$. Como M é representável, obtemos a seguinte igualdade,

$$V(\text{Ann}_R(M)) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M)} V(\mathfrak{p}).$$

Agora, consideremos $\mathfrak{q} \in \min \text{Att}_R(M) \subseteq V(\text{Ann}_R(M)) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M)} V(\mathfrak{p})$. Se $\mathfrak{a} \in V(\text{Ann}_R(M))$ é tal que $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a}$, então $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M)$. Como $\mathfrak{q} \in \min \text{Att}_R(M)$, segue que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ e portanto, $\mathfrak{q} \in \min V(\text{Ann}_R(M))$.

Reciprocamente, seja $\mathfrak{b} \in \min V(\text{Ann}_R(M))$. Como

$$\min V(\text{Ann}_R(M)) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M)} V(\mathfrak{p}),$$

existe $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M)$ tal que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{b}$. Segue-se então que $\mathfrak{b} \in \text{Att}_R(M)$. Além disso, para

qualquer $\mathfrak{q} \in \text{Att}_R(M)$ tal que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{b}$, obtemos $\mathfrak{q} = \mathfrak{b}$, uma vez que

$$\text{Att}_R(M) \subseteq V(\text{Ann}_R(M)).$$

3. A primeira inclusão segue diretamente da definição de ideais primos anexados. Para a segunda, seja $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M)$ e N um submódulo de M tal que M/N seja \mathfrak{p} -secundário. Se $M' + N = M$ então M/N é um quociente não-trivial de M' , assim $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M')$. Se $M' + N \neq M$ então $M/(M' + N)$ é um quociente não-trivial de M'' bem como de M/N , assim M'' possui um quociente \mathfrak{p} -secundário e $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M'')$. \square

Segue do item 3 acima que, se M_1, \dots, M_r são R -módulos representáveis, então $M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ é representável e

$$\text{Att}_R(M_1 \oplus \dots \oplus M_r) \subseteq \bigcup_{i=1}^r \text{Att}_R M_i.$$

Observação 1.20. Note que pela Proposição 1.24 e pelo Teorema 1.18 temos que, se M é um R -módulo representável e se $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$, com R um anel Noetheriano, então, $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R M$ se, e somente se, existe uma imagem homomorfa de M que possui anulador igual a \mathfrak{p} .

Proposição 1.21. Seja M um R -módulo Artiniano, e seja $r \in R$. Então

1. $rM = M$ se, e somente se, $r \in R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Att}_R M} \mathfrak{p}$; e
2. $\text{nil}(M) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Att}_R M} \mathfrak{p}$.

Demonstração. Inicialmente suponhamos que $M \neq 0$ e consideremos $M = \sum_{i=1}^n N_i$ uma representação secundária minimal de M .

1. Seja $r \in R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Att}_R M} \mathfrak{p}$; então $rN_i = N_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e assim, $rM = M$. Por outro lado, se $r \in \mathfrak{p}_j$ para algum j com $1 \leq j \leq n$, então $r^h N_j = 0$ para um inteiro h suficientemente grande, e assim

$$r^h M = r^h N_1 + \dots + r^h N_j + \dots + r^h N_n \subseteq N_1 + \dots + \hat{N}_j + \dots + N_n \subset M,$$

já que a representação secundária $M = \sum_{i=1}^n N_i$ é minimal.

2. Basta notar que $\text{nil}(M) = \bigcap_{i=1}^n \text{nil}(N_i) = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. \square

Lema 1.22. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local e M um R -módulo Artiniano. Então M é finitamente gerado (e assim de comprimento finito) se, e somente se, $\text{Att}_R M \subseteq \{\mathfrak{m}\}$.

Demonstração. Quando M é de comprimento finito, existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^h M = 0$, desse modo que M é 0 ou \mathfrak{m} -secundário. Reciprocamente, se $M \neq 0$, então, pela

Proposição 1.21 (2), existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^h M = 0$ e, portanto, M é de comprimento finito. \square

Proposição 1.23. [18, Proposição 5.2] Seja M um R -módulo Artiniano e N um R -módulo de apresentação finita. Então

$$\text{Att}_R M \otimes_R N = \text{Att}_R M \cap \text{Supp}_R N.$$

Proposição 1.24. [14, Proposição 1.4] Seja R um anel Noetheriano e suponha que o R -módulo não nulo M possua uma representação secundária minimal $M = \sum_{i=1}^n N_i$, com N_i \mathfrak{p}_i -secundário para cada $1 \leq i \leq n$. Considere $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$. Então \mathfrak{p} é igual a um dos $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ se, e somente se, existe um módulo quociente N de M tal que $(0 : N) = \mathfrak{p}$.

Demonstração. Como N é uma imagem homomorfa de R^m para algum m , $M \otimes_R N$ é uma imagem homomorfa de M^m para algum m . Consequentemente,

$$\text{Att}_R M \otimes_R N \subseteq \text{Att}_R M^m = \text{Att}_R M.$$

Uma vez que $\text{Ann}_R N \subset \text{Ann}_R M \otimes_R N$, algum $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R M \otimes_R N$ deve conter $\text{Ann}_R N$, i.e., $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R N$.

Agora, seja $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R M \cap \text{Supp}_R N$. Então M possui um quociente B , \mathfrak{p} -secundário, tal que $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R B$. Multiplicação por um elemento $a \in R$ em $B \otimes_R N$ é zero se $a \in \mathfrak{p}$ e sobrejetor se $a \in R \setminus \mathfrak{p}$. Agora, por [18, Lema 5.1], temos que

$$\text{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, B \otimes_R N) \cong \text{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, B) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \cong \text{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, B) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}N_{\mathfrak{p}}$$

visto que $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\text{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, B) = 0$. Agora $\text{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, B)$ e $N_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}N_{\mathfrak{p}}$ são $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ -espaços vetoriais não nulos. Segue que $\text{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, B \otimes_R N) \neq 0$ e, portanto, $B \otimes_R N \neq 0$. Daí segue que $B \otimes_R N$ é \mathfrak{p} -secundário e, uma vez imagem homomorfa de $M \otimes_R N$, obtemos $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R M \otimes_R N$. \square

Lema 1.25. [16, Teorema 23.2] Seja $\psi : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis Noetherianos. Seja M um R -módulo e N um S -módulo plano sobre R , via ψ . Então

1. para $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ e $N/\mathfrak{p}N \neq 0$, tem-se $\text{Spec } \psi(\text{Ass}_S(N/\mathfrak{p}N)) = \text{Ass}_R(N/\mathfrak{p}N) = \{\mathfrak{p}\}$, onde $\text{Spec } \psi$ é o morfismo contravariante associado.
2. $\text{Ass}_S(M \otimes_R N) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)} \text{Ass}_S(N/\mathfrak{p}N)$, para M e N finitamente gerados.

Desse modo, sendo (R, \mathfrak{m}) um anel Noetheriano local, M um R -módulo finitamente gerado e considerando o homomorfismo natural $\psi : R \rightarrow \hat{R}$, onde \hat{R} denota o com-

pletamento \mathfrak{m} -ádico, então, segue do Lema 1.25 que

$$\text{Ass}_R M = \{\mathfrak{P} \cap R : \mathfrak{P} \in \text{Ass}_{\hat{R}} \hat{M}\}$$

e

$$\text{Ass}_{\hat{R}}(\hat{M}) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)} \text{Ass}_{\hat{R}}(\hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R}).$$

Lema 1.26. [6, Seção 8.2] Sejam R e R' anéis comutativos Noetherianos e considere $f : R \longrightarrow R'$ um homomorfismo de anéis. Seja M' um R' módulo representável. Então, M' possui uma representação secundária como R -módulo e

$$\text{Att}_R(M') = \{f^{-1}(\mathfrak{p}') : \mathfrak{p}' \in \text{Att}_{R'}(M')\}.$$

Desse modo, segue do Lema 1.26 juntamente com o Lema A.29 que, para um R -módulo Artiniano M , obtemos

$$\text{Att}_R(M) = \{\mathfrak{P} \cap R : \mathfrak{P} \in \text{Att}_{\hat{R}}(M)\}.$$

1.4 Módulos injetivos sobre um anel Noetheriano são representáveis

Uma vez demonstrada a existência de módulos injetivos, Teorema B.5, mostramos nesta seção, que tais módulos ocupam um lugar no conjunto dos módulos representáveis, isto é, módulos injetivos sobre um anel Noetheriano são representáveis. Com isso, amplia-se nossa gama de exemplos sobre módulos representáveis.

Lema 1.27. Seja \mathfrak{q} um ideal \mathfrak{p} -primário em R e seja E um R -módulo injetivo. Então $(0 :_E \mathfrak{q})$ se não-nulo, é \mathfrak{p} -secundário.

Demonstração. Seja $r \in R$. Se $r \in \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$, então $r^n \in \mathfrak{q}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, temos que $r \in \text{nil}(0 :_E \mathfrak{q})$. Por outro lado, se $r \notin \mathfrak{p}$, mostraremos que $(0 :_E \mathfrak{q}) = r(0 :_E \mathfrak{q})$. De fato, seja $x \in (0 :_E \mathfrak{q})$. Consideremos os seguintes homomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : R/\mathfrak{q} \rightarrow R/\mathfrak{q} & e & \Phi : R/\mathfrak{q} \rightarrow E \\ \bar{m} \mapsto r\bar{m} & & \bar{b} \mapsto bx \end{array} .$$

Notemos que α e Φ estão bem definidas e α é um monomorfismo. Como E é um módulo injetivo, podemos estender o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E & & \\
 & & \uparrow & \swarrow \psi & \\
 0 & \longrightarrow & \frac{R}{\mathfrak{q}} & \xrightarrow{\alpha} & \frac{R}{\mathfrak{q}} \\
 & & \Phi & &
 \end{array}$$

onde $\Phi = \psi\alpha$. Assim, $x = \Phi(\bar{1}) = \psi(\alpha(\bar{1})) = \psi(r\bar{1}) = r\psi(\bar{1})$. Consequentemente, $\psi(\bar{1}) \in (0 :_E \mathfrak{q})$ implica em $x \in r(0 :_E \mathfrak{q})$ e portanto, $(0 :_E \mathfrak{q}) = r(0 :_E \mathfrak{q})$. \square

Lema 1.28. Sejam $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_n$ elementos de $\text{Spec } R$ e E um R -módulo injetivo. Então,

$$\sum_{i=1}^n (0 :_E \mathfrak{q}_i) = (0 :_E \cap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i).$$

Demonstração. Seja $x \in (0 :_E \cap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i)$. Consideremos também os homomorfismos naturais $\pi : R \rightarrow R / \cap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ e $\pi_i : R \rightarrow R / \mathfrak{q}_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Desse modo, a seguinte aplicação é, para todo $r \in R$, um monomorfismo bem definido

$$\begin{aligned}
 \xi : R / \cap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n R / \mathfrak{q}_i \\
 \pi(r) &\longmapsto (\pi_1(r), \pi_2(r), \dots, \pi_n(r)).
 \end{aligned}$$

Além disso, consideremos o homomorfismo

$$\begin{aligned}
 \eta : R / \cap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i &\longrightarrow E \\
 \pi(r) &\longmapsto \eta(\pi(r)) = rx.
 \end{aligned}$$

Como E é injetivo, podemos estender o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E & & \\
 & & \uparrow & \swarrow \zeta & \\
 0 & \longrightarrow & \frac{R}{\cap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i} & \xrightarrow{\xi} & \bigoplus_{i=1}^n R / \mathfrak{q}_i \\
 & & \eta & &
 \end{array}$$

onde $\eta = \zeta \circ \xi$. Agora notemos que $x = \eta(\pi(1)) \in \text{Im}(\zeta)$ e $\text{Im}(\zeta) \subseteq \sum_{i=1}^n (0 :_E \mathfrak{q}_i)$. Daí,

segue que

$$(0 :_E \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i) \subseteq \sum_{i=1}^n (0 :_E \mathfrak{q}_i).$$

Como a inclusão $\sum_{i=1}^n (0 :_E \mathfrak{q}_i) \subseteq (0 :_E \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i)$ é imediata, obtemos o resultado desejado. \square

Definição 1.29. Um R -módulo injetivo E é chamado um *cogerador injetivo de R* se, para cada R -módulo X e cada elemento não-nulo $x \in X$, existe um homomorfismo $\phi : X \rightarrow E$ tal que $\phi(x) \neq 0$.

Teorema 1.30. *Seja E um R -módulo injetivo, com R um anel Noetheriano. Então E possui uma representação secundária e $\text{Att}_R E \subseteq \text{Ass}(R)$. Mais precisamente, seja $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i = (0)$ uma decomposição primária minimal do ideal nulo de R , com \mathfrak{q}_i \mathfrak{p}_i -primário para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Então,*

$$E = (0 :_E \mathfrak{q}_1) + \dots + (0 :_E \mathfrak{q}_n) \tag{1.1}$$

e, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $(0 :_E \mathfrak{q}_i)$ é nulo ou um módulo \mathfrak{p}_i -secundário.

Além disso, se j é um inteiro tal que $1 \leq j \leq n$ e $J = \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$, então $E = \sum_i (0 :_E \mathfrak{q}_i)$ se, e somente se, $\bigcap_{i \in J} \mathfrak{q}_i$ anula E ; conseqüentemente, se E é um cogerador injetivo de R , então a igualdade em (1.1) é uma representação secundária minimal para E e $\text{Att}_R E = \text{Ass}(R)$.

Demonstração. Pelo Lema 1.27 segue que $(0 :_E \mathfrak{q}_i)$ é nulo ou \mathfrak{p}_i -secundário e, pelo Lema 1.28, temos que

$$E = (0 :_E 0) = \sum_{i=1}^n (0 :_E \mathfrak{q}_i) = (0 :_E \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i).$$

O mesmo lema fornece as informações de que, se o inteiro j satisfaz $1 \leq j \leq n$, então $\sum_{i \in J} (0 :_E \mathfrak{q}_i) = (0 :_E \bigcap_{i \in J} \mathfrak{q}_i)$. O último módulo é claramente igual a $E \Leftrightarrow \bigcap_{i \in J} \mathfrak{q}_i$ anula E .

Por outro lado, se assumirmos que E é um cogerador injetivo de R , mostraremos que $E = \sum_{i=1}^n (0 :_E \mathfrak{q}_i)$ é uma decomposição secundária minimal e $\text{Att}_R E = \text{Ass}(R)$. De fato, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, notemos que

$$\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i \subset \bigcap_{i \in J} \mathfrak{q}_i \implies E = (0 :_E \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i) \supset \sum_{i \in J} (0 :_E \mathfrak{q}_i).$$

Como $\bigcap_{i \in J} \mathfrak{q}_i \neq (0)$, basta provar que \mathfrak{b} não anula E , para um ideal $\mathfrak{b} \subset R \setminus (0)$ qualquer. Para tal, seja $y \in \mathfrak{b} \setminus (0)$. Uma vez que E é um cogrador injetivo de R , existe um homomorfismo $\tilde{\phi} : R \rightarrow E$ tal que $\tilde{\phi}(y) \neq 0$. Então $y\tilde{\phi}(1) = \tilde{\phi}(y) \neq 0$, assim, $\tilde{\phi}(1) \in E$ que não é anulado por y e desse modo, não anula \mathfrak{b} . Portanto, $\text{Att}_R E = \text{Ass}(R)$. \square

Assumindo que R é Noetheriano e E um R -módulo injetivo, daremos uma descrição de $\text{Att}_R E$. Para tal, faremos o uso de argumentos da teoria de decomposição para módulos injetivos sobre um anel comutativo Noetheriano.

Lema 1.31. (Matlis[15]) Seja R um anel Noetheriano e $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$.

1. Cada elemento de $E(R/\mathfrak{p})^1$, onde $E(R/\mathfrak{p})$ é o menor módulo injetivo contendo R/\mathfrak{p} , é anulado por alguma potência de \mathfrak{p} .
2. Multiplicação por um elemento $a \in R \setminus \mathfrak{p}$ fornece um automorfismo de $E(R/\mathfrak{p})$.
3. O anulador de $E(R/\mathfrak{p})$ é $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}^{(i)}$ onde $\mathfrak{p}^{(i)}$ é a i -ésima potência simbólica² do ideal $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$.

Se E é um módulo injetivo sobre um anel Noetheriano R , então existe uma família $(\mathfrak{p}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de ideais primos de R para os quais $E \cong \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} E(R/\mathfrak{p}_\alpha)$, veja Teorema B.18. Além disso, se $(\mathfrak{q}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ é uma segunda família de ideais primos de R para os quais $E \cong \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} E(R/\mathfrak{q}_\gamma)$, então existe uma bijeção $\beta : \Lambda \rightarrow \Gamma$ tal que $\mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{q}_{\beta(\alpha)}$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

O conjunto $\{\mathfrak{p}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ é unicamente determinado por E ; denotaremos tal conjunto por $\mathfrak{D}(E)$, e nos referimos aos seus membros como os ideais primos que ocorrem na decomposição direta de E .

Uma vez demonstrado que módulos injetivos são representáveis, descreveremos $\text{Att}_R(E)$ em termos de $\text{Ass}(R)$ e $\mathfrak{D}(E)$.

Teorema 1.32. *Seja R um anel Noetheriano e E um R -módulo injetivo. Então $\text{Att}_R E = \{\mathfrak{p}' \in \text{Ass}(R) : \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p} \text{ para algum } \mathfrak{p} \in \mathfrak{D}(E)\}$.*

Demonstração. Demonstrou-se no Teorema 1.30 que se $(0) = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ é uma decomposição primária para o ideal nulo de R , com $\mathfrak{q}_i \in \text{Spec } R$ \mathfrak{p}_i -primário para cada $i = 1, 2, \dots, n$, então

$$E = (0 :_E \mathfrak{q}_1) + \dots + (0 :_E \mathfrak{q}_n), \quad (1.2)$$

¹Chamado de envoltoria injetiva. Veja pg.45.

²Para $n \in \mathbb{N}$, define-se potência simbólica de \mathfrak{p} como o ideal de R dado por $\mathfrak{p}^{(n)} := \rho^{-1}(\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}})$ em que $\rho : R \rightarrow R_{\mathfrak{p}}$ denota o mapa de localização.

e $(0 :_E \mathfrak{q}_i)$ é \mathfrak{p}_i -secundário para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Uma representação secundária mínima para E pode ser obtida a partir da igualdade em (1.2) removendo primeiro os termos nulos no lado direito (caso existam) e, em seguida, removendo os termos redundantes (caso existam). Estabeleceremos o teorema mostrando (a) que $(0 :_E \mathfrak{q}_i) = (0)$ para qualquer i para os quais \mathfrak{p}_i não está contido em qualquer \mathfrak{p} em $\mathfrak{D}(E)$ e, (b) que se j é um inteiro ($1 \leq j \leq n$) para o qual \mathfrak{p}_j está contido em algum \mathfrak{p} pertencente a $\mathfrak{D}(E)$, então $\sum_{i \in J} (0 :_E \mathfrak{q}_i) \neq E$, onde $J = \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ de modo que $(0 :_E \mathfrak{q}_j)$ não podem ser omitidos a partir de (1.2) em qualquer fase do processo de redução.

(a) Suponhamos então, que i é um inteiro ($1 \leq i \leq n$) tal que $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}(E)$. Agora, se $(\mathfrak{p}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ é uma família de ideais primos de R para o qual $E \cong \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} E(R/\mathfrak{p}_\alpha)$, então

$$(0 :_E \mathfrak{q}_i) \cong \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (0 :_{E(R/\mathfrak{p}_\alpha)} \mathfrak{q}_i).$$

Assim, a fim de mostrar que $(0 :_E \mathfrak{q}_i) = (0)$, é suficiente mostrar que $(0 :_{E(R/\mathfrak{p})} \mathfrak{q}_i) = (0)$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}(E)$. Mas, para um tal \mathfrak{p} , temos $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$ (uma vez que $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$), e assim podemos obter $a \in \mathfrak{q}_i \setminus \mathfrak{p}$. Em seguida, multiplicação por a em $E(R/\mathfrak{p})$ fornece, pelo Lema 1.31, um automorfismo de $E(R/\mathfrak{p})$ e, assim, $(0 :_{E(R/\mathfrak{p})} \mathfrak{q}_i) = (0)$, como desejamos.

(b) Agora, suponhamos j um inteiro (com $1 \leq j \leq n$ e J definido como antes) para o qual $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}(E)$. Vamos mostrar que $\sum_{i \in J} (0 :_E \mathfrak{q}_i) \neq E$. Suponhamos que este não é o caso; então, pelo Teorema 1.30, E é anulado por $\mathfrak{a}_j = \bigcap_{i \in J} \mathfrak{q}_i$, e assim, $E(R/\mathfrak{p})$ é anulado por \mathfrak{a}_j . Assim, pelo Lema 1.31, temos $\mathfrak{a}_j \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{p}^{(k)}$. Agora, $\mathfrak{a}_j \not\subseteq \mathfrak{q}_j$; seja $a \in \mathfrak{a}_j \setminus \mathfrak{q}_j$. Então $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{p}^{(k)}$, que é o núcleo do homomorfismo natural de R para $R_{\mathfrak{p}}$. Portanto não existe $s \in R \setminus \mathfrak{q}_j$ tal que $sa = 0 \in \mathfrak{q}_j$. Uma vez que $a \in R \setminus \mathfrak{p}_j$ e (assim como $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}$) $s \in R \setminus \mathfrak{p}_j$, obtemos uma contradição, pois \mathfrak{q}_j é \mathfrak{p}_j -primário. Isto completa a prova. \square

Capítulo 2

Cohomologia local

No capítulo anterior, provamos que módulos Artinianos admitem representação secundária e além disso, obtemos do Lema A.29, que tais módulos possuem uma estrutura natural de \hat{R} -módulos. Neste capítulo provamos que, para (R, \mathfrak{m}) anel local, com $\dim R = n$, $H_{\mathfrak{a}}^n(R)$ possui uma estrutura de \hat{R} -módulo Artiniano, logo admite uma representação secundária e por conseguinte, podemos determinar o conjunto dos ideais primos anexados $\text{Att}_{\hat{R}}(H_{\mathfrak{a}}^n(R))$.

2.1 Alguns resultados preliminares sobre cohomologia local

As duas seções deste capítulo tem como objetivo expor alguns resultados em cohomologia local de extrema relevância para este trabalho. Algumas demonstrações serão omitidas, porém, o leitor interessado em maiores detalhes poderá consultar a referência [6]. Além disso, admitimos que todos os anéis, referentes a este capítulo, são Noetherianos.

Seja M um R -módulo e $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal. O submódulo $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0 :_M \mathfrak{a}^n) \subseteq M$ é chamado \mathfrak{a} -torção. Notemos que, para um homomorfismo $f : M \rightarrow N$ de R -módulos, temos que $f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$, e assim, existe um mapa

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$$

que coincide com f em cada elemento de $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$.

Se $g : M \rightarrow N$ e $h : N \rightarrow L$ são dois homomorfismos de R -módulos e $r \in R$, então $\Gamma_{\mathfrak{a}}(h \circ g) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(h) \circ \Gamma_{\mathfrak{a}}(g)$, $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f+g) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(f) + \Gamma_{\mathfrak{a}}(g)$, $\Gamma_{\mathfrak{a}}(rg) = r\Gamma_{\mathfrak{a}}(g)$ e $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\text{Id}_M) = \text{Id}_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}$. Assim, com estas atribuições, $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ torna-se um funtor R -linear covariante e aditivo, e o chamaremos funtor \mathfrak{a} -torção. Além disso, pode-se verificar que o funtor $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ é exato à

esquerda [6, Lema 1.1.6, pg.2].

Para $i \in \mathbb{N}$, o i -ésimo funtor derivado à direita de $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ será denotado por $H_{\mathfrak{a}}^i$ e será referido como o i -ésimo funtor de cohomologia local com respeito a \mathfrak{a} . Em outras palavras, se \mathfrak{J}^{\bullet} é uma resolução injetiva de M , então $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = H_{\mathfrak{a}}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{J}^{\bullet}))$ para todo $i \geq 0$. Alternativamente podemos usar a seguinte definição para um módulo de cohomologia local:

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M).$$

Outro fato relevante é que, se \mathfrak{b} é um ideal de R cujo radical coincide com o radical de \mathfrak{a} , então $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = H_{\mathfrak{b}}^i(M)$ para todo i e todo R -módulo M .

Seja \mathfrak{a} um ideal de R . Um R -módulo M é chamado \mathfrak{a} -torção quando $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$. Se $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$, dizemos que M é livre de \mathfrak{a} -torção.

Lema 2.1. [6, Lema 2.1.1] Seja $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal e M um R -módulo finitamente gerado. Então M é livre de \mathfrak{a} -torção se, e somente se, \mathfrak{a} contém um não-divisor de zero de M .

Demonstração. Seja $r \in \mathfrak{a}$ um não-divisor de zero em M e suponhamos que $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Assim, existe um inteiro n tal que $\mathfrak{a}^n m = 0$. Em seguida, temos que $r^n m = 0$, a partir do qual deduzimos que $m = 0$ e, portanto, $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

Reciprocamente, assumiremos que \mathfrak{a} consiste inteiramente de divisores de zero em M . Então, por [23, Corolário 9.36], $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$ e uma vez que M é finitamente gerado, $\text{Ass}_R(M)$ é finito. Segue do Lema da esquiva que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, para algum $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)$. Uma vez que M possui um submódulo cujo anulador é exatamente \mathfrak{p} , segue-se que $(0 :_M \mathfrak{a}) \neq 0$, de modo que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$. \square

Seja M um R -módulo finitamente gerado e I um ideal em R tal que $IM \neq M$. Lembrando que $\text{grade}(I, M)$ é o maior comprimento das sequências M -regulares em \mathfrak{a} , então obtemos o seguinte teorema.

Teorema 2.2. [6, Teorema 6.27] Seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $\mathfrak{a}M \neq M$. Então, $\text{grade}(\mathfrak{a}, M)$ é o menor inteiro i tal que $H_{\mathfrak{a}}^i(M) \neq 0$.

Lema 2.3. [6, Corolário 2.1.7] Sejam M e N R -módulos tais que M é \mathfrak{a} -torção. Então

1. $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ para todo $i > 0$;
2. $H_{\mathfrak{a}}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)) = 0$ para todo $i > 0$; e
3. o mapa natural $\pi : N \rightarrow N/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ induz um isomorfismo $H_{\mathfrak{a}}^i(N) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(N/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N))$ para todo $i > 0$.

Teorema 2.4. Seja $f : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis, $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal e $i \in \mathbb{N}$.

1. (**Independência**), [6, Teorema 4.2.1] Seja M um S -módulo. Então $H_a^i(M) \cong H_{aS}^i(M)$ como R -módulos.
2. (**Mudança de Base Plana**, [6, Teorema 4.3.2]) Assumindo que f é um homomorfismo plano e M um R -módulo. Então existe um isomorfismo

$$H_a^i(M) \otimes_R S \cong H_{aS}^i(M \otimes_R S).$$

Observação 2.5. Uma vez que os morfismos canônicos $R \rightarrow \hat{R}$ e $R \rightarrow R_{\mathfrak{p}}$ são planos, segue do Teorema da mudança de base plana que

$$H_a^i(M) \otimes_R \hat{R} \cong H_{a\hat{R}}^i(M \otimes_R \hat{R})$$

e

$$H_a^i(M) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong H_{aR_{\mathfrak{p}}}^i(M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}).$$

Lembremos que, se M é um R -módulo não-nulo, então a dimensão (de Krull) de M é definida como o supremo dos comprimentos das cadeias de ideais primos na variedade do anulador $(0 :_R M)$ de M , ou seja

$$\dim(M) := \sup\{l \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_l \in V(\text{Ann}_R M) : \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_l\}.$$

Teorema 2.6 (Anulamento de Grothendieck). [6, Teorema 6.1.2] Seja M um R -módulo. Então $H_a^i(M) = 0$ para todo $i > \dim M$.

Em virtude do próximo Teorema (Não anulamento de Grothendieck) $n = \dim M$ é o maior inteiro i para o qual $H_m^i(M) \neq 0$.

Teorema 2.7 (Não anulamento de Grothendieck). [6, Teorema 6.1.4] Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local e M um R -módulo não nulo finitamente gerado e de dimensão n . Então $H_m^n(M) \neq 0$.

2.2 Módulos de cohomologia local Artinianos

Teorema 2.8. ([17, Teorema 1.3]) Seja M um R -módulo \mathfrak{a} -torção para o qual $(0 :_M \mathfrak{a})$ é Artiniano. Então M é Artiniano.

Teorema 2.9. ([6, Teorema 7.1.3 e 7.1.6]) Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local e M é um R -módulo finitamente gerado. Então

1. o R -módulo $H_m^i(M)$ é Artiniano para todo $i \in \mathbb{N}$.

2. Cohomologia local

2. para $M \neq 0$, o R -módulo $H_{\mathfrak{a}}^{\dim M}(M)$ é Artiniano para todo ideal próprio $\mathfrak{a} \subset R$.

Demonstração. 1. Provaremos por indução sobre i . Obviamente $H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ é de comprimento finito, logo é Artiniano, uma vez que este é um módulo finito com suporte em $\{\mathfrak{m}\}$. Agora, suponhamos indutivamente que $i > 0$ e que $H_{\mathfrak{m}}^{i-1}(M')$ seja Artiniano para qualquer módulo M' finitamente gerado. Pelo Lema 2.3 temos que

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Além disso, segue de [6, Lema 2.1.2] que $M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ é livre de \mathfrak{m} -torção. Desse modo, podemos admitir que M é livre de \mathfrak{m} -torção.

Usando o Lema 2.1 podemos assumir a existência de um elemento $r \in \mathfrak{m}$ M -regular. A sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{r} M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

onde $M' = M/rM$, induz uma sequência exata

$$H_{\mathfrak{m}}^{i-1}(M') \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M) \xrightarrow{r} H_{\mathfrak{m}}^i(M) .$$

Como M/rM é finitamente gerado, segue da hipótese indutiva que $H_{\mathfrak{m}}^{i-1}(M')$ é Artiniano, assim $(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^i(M)} r)$, núcleo da multiplicação pelo elemento r sobre $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$, é Artiniano. Como $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ é \mathfrak{m} -torção, e portanto Rr -torção, segue do Teorema 2.8 que $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ é Artiniano.

2. Provaremos por indução sobre $n = \dim M$. Se $n = 0$ então $\sqrt{(0 : M)} = \mathfrak{m}$, assim M é anulado por uma potência de \mathfrak{m} (logo, M possui comprimento finito) portanto, $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ é de comprimento finito. Agora, suponhamos indutivamente que $n > 0$ e que o teorema seja válido para todo R -módulo não-nulo, finitamente gerado e de dimensão menor do que n . Pelo Lema 2.3 temos que

$$H_{\mathfrak{a}}^n(M) \cong H_{\mathfrak{a}}^n(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)).$$

Se $\dim(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) < n$, então $H_{\mathfrak{a}}^n(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$, pelo Teorema do anulamento de Grothendieck. Isto conclui a prova. Do contrário, como $M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é livre de \mathfrak{a} -torção, podemos assumir que M também é livre de \mathfrak{a} -torção. Desse modo, o argumento procede igual ao item 1. Pelo Lema 2.1 o ideal \mathfrak{a} contém um elemento r M -regular. Com isso, a sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{r} M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

induz uma sequência exata

$$H_{\mathfrak{r}}^{n-1}(M') \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^n(M) \xrightarrow{r} H_{\mathfrak{a}}^n(M) .$$

Uma vez que r não é um membro minimal de $\text{Supp}M$, temos que $\dim(M/rM) \leq n-1$. Segue da hipótese de indução que o R -módulo $H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M/rM)$ é Artiniano. Desse modo, segue da sequência exata acima que $(0 :_{H_{\mathfrak{a}}^n(M)} r)$ é Artiniano e, como $H_{\mathfrak{a}}^n(M)$ é rR -torção, segue do Teorema 2.8 que $H_{\mathfrak{a}}^n(M)$ é Artiniano. \square

Agora concentraremos nossa atenção no módulo $H_{\mathfrak{a}}^n(R)$. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local de dimensão n . Mostraremos que $H_{\mathfrak{a}}^n(R)$ é um módulo Artiniano e, além disso, o mesmo possui estrutura de \hat{R} -módulo Artiniano. De fato, consideremos inicialmente o seguinte resultado:

Proposição 2.10. ([8, Teorema 2.2] e [14, Proposição 2.1]). Seja \mathfrak{a} um ideal do anel local R e seja i um inteiro não negativo. Então

1. existe um isomorfismo $H_{\mathfrak{a}}^i(R) \otimes_R \hat{R} \cong H_{\mathfrak{a}}^i(\hat{R})$ de \hat{R} -módulos;
2. $H_{\mathfrak{a}}^i(R)$ é um R -módulo Artiniano se, e somente se, $H_{\mathfrak{a}}^i(\hat{R})$ é um \hat{R} -módulo Artiniano.

Proposição 2.11. [22, Proposição 2.3] Seja \mathfrak{a} um ideal do anel local R , e seja $\dim(R) = n$. Então, para todo R -módulo finitamente gerado M ,

$$H_{\mathfrak{a}}^n(M) \cong H_{\mathfrak{a}}^n(R) \otimes_R M.$$

Com o objetivo de estudar o conjunto dos ideais primos anexados do \hat{R} -módulo $H_{\mathfrak{a}}^n(R)$, mostraremos que o R -módulo $H_{\mathfrak{a}}^n(R)$ é Artiniano. Isto fornece uma conexão com a teoria dos ideais primos anexados da representação secundária de módulos Artinianos.

Teorema 2.12 (Anulamento de Lichtenbaum-Hartshorne). [6, Teorema 8.2.1] *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local com $\dim R = n$ e $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal próprio. Então os seguintes fatos são equivalentes:*

1. $H_{\mathfrak{a}}^n(R) = 0$;
2. para cada ideal primo minimal $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(\hat{R})$, satisfazendo $\dim \hat{R}/\mathfrak{q} = n$, tem-se que $\dim(\hat{R}/(\mathfrak{a}\hat{R} + \mathfrak{q})) > 0$.

Corolário 2.13. [6, Corolario 8.2.2] *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local com $\dim R = n$ e $\mathfrak{a} \subseteq R$ um ideal próprio, com $\dim(\hat{R}/(\mathfrak{a}\hat{R} + \mathfrak{q})) > 0$ para cada ideal $\mathfrak{q} \in \text{Spec} \hat{R}$ tal que $\dim \hat{R}/\mathfrak{q} = n$. Então $H_{\mathfrak{a}}^i(M) \neq 0$ para todo $i \geq n$ e para cada R -módulo M .*

Teorema 2.14. *Seja \mathfrak{a} um ideal próprio do anel local (R, \mathfrak{m}) com dimensão $\dim R = n$. Então o R -módulo $H_{\mathfrak{a}}^n(R)$ é Artiniano.*

Demonstração. Em virtude da Proposição 2.10, item 2, podemos assumir que R é completo. Desse modo, podemos usar o teorema de estrutura de Cohen para anéis locais completos, e assim, existem um anel local completo Gorenstein¹

B , com dimensão n , e um homomorfismo sobrejetor $\sigma : B \rightarrow R$. Pondo $\sigma^{-1}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$, podemos considerar, por intermédio de σ , R e $H_{\mathfrak{a}}^n(R)$ como B -módulos. Segue de [4, Seção 4.3] que existe um isomorfismo de B -módulos $H_{\mathfrak{a}}^n(R) \cong H_{\mathfrak{b}}^n(R)$. Com isso, é suficiente mostrar que $H_{\mathfrak{b}}^n(R)$ é um B -módulo Artiniano.

Consideremos $\mathfrak{c} = \ker \sigma$. Como σ é sobrejetora, segue do Teorema do isomorfismos que $B/\mathfrak{c} \cong R$. Da Proposição 2.11, obtemos que

$$H_{\mathfrak{b}}^n(R) \cong H_{\mathfrak{b}}^n(B/\mathfrak{c}) \cong H_{\mathfrak{b}}^n(B) \otimes B/\mathfrak{c},$$

de modo que

$$H_{\mathfrak{b}}^n(R) \cong H_{\mathfrak{b}}^n(B)/\mathfrak{c}H_{\mathfrak{b}}^n(B).$$

Com isso, basta mostrar que $H_{\mathfrak{b}}^n(B)$ é um B -módulo Artiniano. De fato, necessitamos calcular $H_{\mathfrak{b}}^n(B)$ aplicando o funtor \mathfrak{b} -torção $\Gamma_{\mathfrak{b}}(-)$ a uma resolução injetiva minimal de B . Como B é um anel local, Gorenstein e n -dimensional, segue do trabalho de Bass [4, Seção 1] que, se \mathfrak{r} denota o ideal maximal de B , então o n -ésimo termo de uma resolução injetiva minimal de B é isomorfo a $E_B(B/\mathfrak{r})$. Uma vez que $E_B(B/\mathfrak{r})$ é Artiniano, por [15, Teorema 4.2], segue que $H_{\mathfrak{b}}^n(B)$ é Artiniano, pois é isomorfo a uma imagem homomórfica de um submódulo de $E_B(B/\mathfrak{r})$, que também é Artiniano. \square

Lema 2.15. [6, Lema 7.3.1] *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local e M um R -módulo não-nulo, finitamente gerado e de dimensão n . Então o conjunto*

$$\mathfrak{L} = \{N' : N' \text{ é um submódulo de } M \text{ e } \dim N' < n\}$$

possui um maior elemento com respeito a inclusão, digamos N . Considerando $G := M/N$, obtemos que:

1. $\dim G = n$;
2. G não possui nenhum submódulo com dimensão menor do que n ;

¹

- Seja R um anel e M um R -módulo. A dimensão injetiva de M (denotada por $\text{inj.dim} M$) é o menor inteiro n para o qual existe uma resolução injetiva I^\bullet de M com $I^m = 0$ para todo $m > n$.
- Um anel Noetheriano local R é um anel Gorenstein se a dimensão injetiva de R é finita.

2. Cohomologia local

3. $\text{Ass}(G) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}M : \dim R/\mathfrak{p} = n\}$; e

4. $H_{\mathfrak{m}}^n(G) \cong H_{\mathfrak{m}}^n(M)$.

Capítulo 3

Ideais primos anexados, módulos de cohomologia local e co-localização

R. Y. Sharp foi um dos primeiros a relacionar a teoria de representação secundária com a teoria de cohomologia local. Neste capítulo, baseado nas referências [3], [6] e [22], obtemos uma descrição dos conjuntos de ideais primos anexados de módulos de cohomologia local, em casos particulares. Além disso, apresentamos o conceito de co-localização e demonstramos que se R é um anel semi-local Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado, então o conjunto dos ideais primos anexados do dual (generalizado) de Matlis desse módulo é igual ao conjunto dos primos associados de M . Este belo resultado evidencia a dualidade entre as teorias de primos associados e representação secundária de módulos.

Não obstante, estudamos alguns resultados sobre primos anexados via co-localização. Uma vez que o funtor de co-localização preserva primos anexados e representação secundária, Teorema 3.10, investigamos o conjunto de ideais primos anexados da co-localização de módulos de cohomologia local.

Admitiremos, a menos de menção contrária, que todos os anéis são comutativos, com unidade e Noetherianos.

3.1 Ideais primos anexados de módulos de cohomologia local

Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local e M um R -módulo finitamente gerado. Sabemos, do Teorema 2.9, que o R -módulo $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ é Artiniano para todo $i \geq 0$ e, portanto, representável. Para $n = \dim M$, segue do Teorema do anulamento de Grothendieck que $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ para todo $i > n$. Pelo Lema 1.19 obtemos que $\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M)) = \emptyset$. De modo natural, fazemos a pergunta; é possível obter uma descrição para $\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^n(M))$?

A resposta segue do seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local e M um R -módulo, não-nulo, finitamente gerado e de dimensão n . Então $H_{\mathfrak{m}}^n(M) \neq 0$ e*

$$\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^n(M)) = \text{Assh}(M),$$

onde $\text{Assh}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}M : \dim R/\mathfrak{p} = n\}$.

Demonstração. Usaremos indução sobre n . De fato, quando $n = 0$, o módulo M possui comprimento finito e assim é anulado por alguma potência de \mathfrak{m} . Consequentemente $H_{\mathfrak{m}}^0(M) \cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = M \neq 0$. Pelo Lema 1.19 e pela Proposição 1.22,

$$\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^0(M)) = \text{Att}_R(M) = \{\mathfrak{m}\} = \text{Ass}M = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}M : \dim R/\mathfrak{p} = 0\}.$$

Assim, para o caso $n = 0$, o resultado está demonstrado.

Suponha, por indução, que $n > 0$ e que o resultado tenha sido provado para R -módulos não-nulos finitamente gerados e de dimensão $n - 1$. Pelo Lema 2.15 podemos fatorar, se necessário, o maior submódulo de M de dimensão menor do que n e portanto, vamos supor que M não possui submódulos não-nulos de dimensão menor do que n . Vamos supor essa hipótese para o restante da etapa indutiva e com isso, nosso objetivo será demonstrar que $\text{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^n(M) = \text{Ass}M$, pois, neste caso $\text{Ass}(M) = \text{Assh}(M)$.

Uma vez que $n > 0$, temos que $\mathfrak{m} \notin \text{Ass}M$, pois, caso contrário, M conteria um submódulo de dimensão 0, contrariando a suposição acima. Assim existe $r \in \mathfrak{m}$ M -regular e portanto, $\text{grade}_M(\mathfrak{m}) \geq 1$.

Vamos provar inicialmente que $H_{\mathfrak{m}}^n(M) \neq 0$. Suponhamos que $H_{\mathfrak{m}}^n(M) = 0$. Para $n = 1$, temos que $1 \leq \text{grade}_M \mathfrak{m} = \text{depth } M \leq \dim M = 1$. Assim, $\text{grade}_M \mathfrak{m} = 1$, logo, pelo Teorema 2.2, $H_{\mathfrak{m}}^1(M) \neq 0$ e isto contraria a suposição que $H_{\mathfrak{m}}^1(M) = 0$. Desse modo, podemos, e assumiremos, ter $n > 1$. Agora, para $r \in \mathfrak{m}$ M -regular, o módulo M/rM (diferente de zero e finitamente gerado) possui $\dim(M/rM) = n - 1$ e a sequência exata

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow M/rM \longrightarrow 0$$

induz uma sequência exata

$$H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M/rM) \longrightarrow 0$$

e por nossa hipótese $H_{\mathfrak{m}}^n(M) = 0$. Desse modo, para cada $r \in \mathfrak{m}$ M -regular, temos que

$$H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M)/rH_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M/rM),$$

e este último módulo é diferente de zero pela hipótese de indução. Portanto, obtém-se $H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M) \neq 0$.

Nosso próximo passo é provar que $\mathfrak{m} \in \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M))$. De fato, suponhamos que $\mathfrak{m} \notin \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M))$. Então, pelo Lema da esquiva, obtemos

$$\mathfrak{m} \not\subseteq \left(\bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M)} \mathfrak{p} \right) \cup \left(\bigcup_{\mathfrak{q} \in \text{Ass} M} \mathfrak{q} \right)$$

e pela proposição 1.21 existe $r_1 \in M$ -regular tal que $H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M) = r_1 H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M)$. Como

$$H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M)/r_1 H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M/r_1 M)$$

isto contraria o fato de que $H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M/r_1 M) \neq 0$. Assim $\mathfrak{m} \in \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M))$; sejam $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$ os membros restantes de $\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M))$. Segue do Lema da esquiva que existe

$$r_2 \in \mathfrak{m} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^t \mathfrak{p}_i \right) \cup \left(\bigcup_{\mathfrak{q} \in \text{Ass} M} \mathfrak{q} \right).$$

Uma vez que $r_2 \in \mathfrak{m}$ e r_2 é M -regular, temos novamente que

$$H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M)/r_2 H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M/r_2 M),$$

pela hipótese de indução, $H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M/r_2 M) \neq 0$ e

$$\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M/r_2 M)) \subseteq \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M/r_2 M) : \dim R/\mathfrak{p} = n - 1\}. \quad (3.1)$$

Mas, pela Observação 1.20

$$\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M)/r_2 H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M)) \subseteq \{\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M)) : r_2 \in \mathfrak{p}\},$$

e, pela escolha de r_2 , \mathfrak{m} é o único membro deste último conjunto. Portanto,

$$\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(M/r_2 M)) = \{\mathfrak{m}\}.$$

Uma vez que $n > 1$, segue a contradição com a equação (3.1). Assim, provamos que $H_{\mathfrak{m}}^n(M) \neq 0$.

Vamos provar a seguir que $\text{Att} H_{\mathfrak{m}}^n(M) = \text{Ass}(M)$. Sabemos que $\text{grade}_M \mathfrak{m} \geq 1$; além disso, para cada $r \in \mathfrak{m}$ M -regular, temos $\dim(M/rM) = n - 1$, de modo que $H_{\mathfrak{m}}^n(M/rM) = 0$ pelo Teorema do anulamento de Grothendieck, além disso, a sequência

exata de módulos de cohomologia local induzida pela sequência

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow M/rM \longrightarrow 0$$

fornece $H_{\mathfrak{m}}^n(M) = rH_{\mathfrak{m}}^n(M)$ e portanto, pela Proposição 1.21, o elemento r não pertence a nenhum ideal primo anexado de $H_{\mathfrak{m}}^n(M)$. Assim,

$$\mathfrak{m} \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}M} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{\mathfrak{q} \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^n(M)} \mathfrak{q}.$$

Seja $\mathfrak{q} \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^n(M)$. Segue, a partir da inclusão acima e o Lema da esquiva, que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \text{Ass}M$. Uma vez que $H_{\mathfrak{m}}^n$ é um funtor R -linear, segue que

$$\text{Ann}(M) \subseteq \text{Ann}(H_{\mathfrak{m}}^n(M)) \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}.$$

Como $n = \dim M = \dim R/\mathfrak{p}$, segue que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Consequentemente

$$\text{Att}(H_{\mathfrak{m}}^n(M)) \subseteq \text{Ass}M.$$

Para estabelecer a inclusão inversa, seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass}M$, de modo que $\dim R/\mathfrak{p} = n$. Pelo Teorema de decomposição primária, existe um submódulo \mathfrak{p} -primário Q de M , ou seja, M/Q é um R -módulo não-nulo, finitamente gerado e $\text{Ass}(M/Q) = \{\mathfrak{p}\}$. Observe que M/Q não possui submódulos não-nulos de dimensão menor que n , do contrário, ele possuiria um ideal primo associado diferente de \mathfrak{p} . Assim, usando os mesmos argumentos dos parágrafos anteriores trocando M por M/Q , temos que $H_{\mathfrak{m}}^n(M/Q) \neq 0$ e

$$\emptyset \neq \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^n(M/Q)) \subseteq \text{Ass}(M/Q) = \{\mathfrak{p}\}.$$

Desse modo, $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^n(M/Q) \subseteq \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^n(M))$. Consequentemente

$$\text{Ass}(M) \subseteq \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^n(M)),$$

e portanto, $\text{Ass}M = \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^n(M))$. □

Agora, consideremos \mathfrak{a} um ideal próprio do anel local (R, \mathfrak{m}) , com $\dim R = n$. Sabemos, pelo Teorema 2.14, que o R -módulo $H_{\mathfrak{a}}^n(R)$ é Artiniano. Além disso, notemos que $H_{\mathfrak{a}}^n(R)$ satisfaz as condições do Lema A.29, logo $H_{\mathfrak{a}}^n(R)$ admite uma estrutura natural de \hat{R} -módulo Artiniano. Com isso, obtemos uma descrição do conjunto $\text{Att}_{\hat{R}}(H_{\mathfrak{a}}^n(R))$.

Teorema 3.2. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local, com $\dim R = n$, e \mathfrak{a} um ideal próprio de R .*

Então

$$\text{Att}_{\hat{R}}(H_{\mathfrak{a}}^n(R)) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } \hat{R} \mid \dim(\hat{R}/\mathfrak{q}) = n \text{ e } \dim(\hat{R}/(\mathfrak{a}\hat{R} + \mathfrak{q})) = 0\}.$$

Demonstração. Em virtude do Lema A.29 e da Proposição 2.10, item 1, podemos assumir que R é completo. Usaremos a caracterização de $\text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^n(R))$ dada pela Proposição 1.24. Suponhamos que $\mathfrak{q} \in \text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^n(R))$. Da Proposição 1.24 obtemos que $H_{\mathfrak{a}}^n(R) \neq \mathfrak{q}H_{\mathfrak{a}}^n(R)$, o que implica em $H_{\mathfrak{a}}^n(R) \otimes_R R/\mathfrak{q} \neq 0$. Desse modo, segue da Proposição 2.11 que $H_{\mathfrak{a}}^n(R/\mathfrak{q}) \neq 0$. Pelo Teorema da independência, obtemos que, sobre o domínio integral local e completo R/\mathfrak{q} , o módulo de cohomologia local $H_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{q})/\mathfrak{q}}^n(R/\mathfrak{q}) \neq 0$. Assim, resulta do Teorema do anulamento de Grothendieck que $\dim R/\mathfrak{q} = n$, enquanto o Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne mostra que $\dim(R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{q})) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que \mathfrak{q} é um ideal de R , tal que $\dim R/\mathfrak{q} = n$, para o qual $\dim(R/\mathfrak{a} + \mathfrak{q}) = 0$. Desse modo, o ideal $(\mathfrak{a} + \mathfrak{q})/\mathfrak{q}$ é $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$ -primário no domínio integral local completo R/\mathfrak{q} . Assim,

$$H_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{q})/\mathfrak{q}}^n(R/\mathfrak{q}) = H_{\mathfrak{m}/\mathfrak{q}}^n(R/\mathfrak{q}).$$

Pelo Teorema 3.1 $H_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{q})/\mathfrak{q}}^n(R/\mathfrak{q})$ é um R/\mathfrak{q} -módulo (0)-secundário (i.e., $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}$ -secundário). Usando o Teorema da independência e o Lema 1.26, vemos que o R -módulo $H_{\mathfrak{a}}^n(R/\mathfrak{q})$ é \mathfrak{q} -secundário. Além disso, considerando a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{q} \longrightarrow 0,$$

obtemos a sequência longa de módulos de cohomologia local cujos últimos termos são

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^n(\mathfrak{q}) \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^n(R) \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^n(R/\mathfrak{q}) \longrightarrow 0,$$

logo $\mathfrak{q} \in \text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^n(R/\mathfrak{q})) \subseteq \text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^n(R))$. □

Corolário 3.3. Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior, temos que

$$\text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^n(R)) = \{\mathfrak{B} \cap R : \mathfrak{B} \in \text{Spec } (\hat{R}), \dim \hat{R}/\mathfrak{B} = n \text{ e } \dim(\hat{R}/(\mathfrak{a}\hat{R} + \mathfrak{B})) = 0\}.$$

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 3.2 e do Lema A.29 □

3.2 Ideais primos anexados da co-localização de um módulo

Seja R um anel comutativo e $S \subseteq R$ um subconjunto fechado multiplicativamente. Sabe-se¹ que o funtor de localização $S^{-1}(-)$ é tal que, se M é um R -módulo Noetheriano (resp. Artiniano) então $S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$ -módulo Noetheriano (resp. Artiniano). Além disso, temos que

$$\text{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in \text{Ass}(M) \text{ e } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

A pergunta que surge é se existe um módulo N , que depende de M , tal que

$$\text{Att}_{S^{-1}R}(N) = \{S^{-1}\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M) \text{ e } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

A. S. Richardson, apresenta em [20] uma definição de co-localização que satisfaz as propriedades do funtor procurado.

Denotaremos por E_R a envoltória injetiva de $\bigoplus R/\mathfrak{m}$, soma percorrendo todos os ideais maximais de R . O funtor $\text{Hom}(-, E_R)$, introduzido por Ooishi em [19] e chamado de funtor (generalizado) de Matlis, será denotado por D_R ou simplesmente por D se o anel de base está subentendido.

O módulo E_R é o cogrador injetivo minimal da categoria dos R -módulos, isto é, é o menor R -módulo injetivo com a propriedade de que, para cada módulo M e $x \in M$ não-nulo, existe um homomorfismo $\gamma : M \rightarrow E_R$ com $\gamma(x) \neq 0$.

Definição 3.4. Seja R um anel comutativo e $S \subseteq R$ um subconjunto fechado multiplicativamente. Para qualquer R -módulo M , a co-localização de M relativa a S é o $S^{-1}R$ -módulo $S_{-1}M = D_{S^{-1}R}(S^{-1}D_R(M))$. Se $S = R \setminus \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, escrevemos ${}^{\mathfrak{p}}M$.

Resulta da definição que $S_{-1}(-)$ é um funtor exato e aditivo. Além disso, quando R é completo e $S^{-1}R$ semi-local, a definição de co-localização dada por Richardson (em [20]) preserva módulos Artinianos. Para provar esta afirmação, faremos uso do seguinte resultado devido a Ooishi, [19].

Teorema 3.5. [19, Teorema 1.6] *Seja R uma anel semi-local Noetheriano e M um R -módulo.*

1. *Seja M é finitamente gerado então $D_R(M)$ é Artiniano.*

¹Veja [16, corolário do Teorema 4.1]

2. Se M é Artiniano então $D_R(M)$ é finitamente gerado sobre o completamento de R .

3. Se R é completo e M é Artiniano, então $M \cong D_R D_R(M)$.

4. $\text{Ann}(M) = \text{Ann}(D_R(M))$.

Demonstração. 1. Se $R^r \rightarrow M \rightarrow 0$ é exata, então $0 \rightarrow D_R(M) \rightarrow D_R(R^r) = E_R^r$ é exata. Como E_R^r é Artiniano, segue que $D_R(M)$ também é Artiniano.

2. Se $0 \rightarrow M \rightarrow E_R^r$ é exata, então $R^r = D_R(E_R^r) \rightarrow D_R(M) \rightarrow 0$ é exata, mostrando que $D_R(M)$ é finitamente gerado.

3. Se $0 \rightarrow M \rightarrow E_R^r \rightarrow E_R^s$ é exata, então o isomorfismo $D_R D_R(M) \cong M$ segue do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & D_R D_R(M) & \longrightarrow & D_R D_R(E_R^r) & \longrightarrow & D_R D_R(E_R^s) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E_R^r & \longrightarrow & E_R^s.
 \end{array}$$

4. Demonstraremos que $D_R(M) = 0$ se, e somente se, $M = 0$. A suficiência é imediata, pois $D_R(-)$ é um funtor R -linear. Reciprocamente, seja x um elemento não-nulo de M . Então, $\text{Ann}_R(x)$ está contido num ideal maximal \mathfrak{m} de R . Logo, existe uma sobrejeção $Rx \rightarrow R/\mathfrak{m}$ que induz um homomorfismo não-nulo $Rx \rightarrow E_R(R/\mathfrak{m})$. Assim, pela injetividade de E_R , temos um homomorfismo não-nulo $M \rightarrow E_R$ e concluímos que $D_R(M) \neq 0$. Uma vez demonstrado isto, observe que um elemento $a \in R$ é tal que $aM = 0$ se, e somente se $aD_R(M) = D_R(aM) = 0$. \square

Corolário 3.6. [20, Teorema 2.3] Seja R um anel semi-local e completo. Se $S^{-1}R$ é semi-local, mas não necessariamente completo, então $S_{-1}(-)$ leva R -módulos Artinianos em $S^{-1}R$ -módulos Artinianos.

Demonstração. Segue do Teorema 3.5 e do fato que $S^{-1}(-)$ leva R -módulos finitamente gerados em $S^{-1}R$ -módulos finitamente gerados. \square

O seguinte resultado garante uma relação entre os ideais primos anexados do dual de Matlis de um R -módulo M finitamente gerado sobre um anel Noetherianos R com seus ideais primos associados.

Teorema 3.7. *Seja R um anel semi-local Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado. Então $\text{Ass}_R(M) = \text{Att}_R(D(M))$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R M$, assim M possui um submódulo B com anulador igual a \mathfrak{p} . Pelo Teorema 3.5, o anulador de um R -módulo M e o anulador do dual de Matlis de M são iguais. Além disso, como D é um funtor exato e contravariante, segue que $D(M)$ possui uma imagem homomórfica $D(B)$ com anulador igual a \mathfrak{p} . Desse modo, pela Observação 1.20, temos que $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R D(M)$.

Reciprocamente, seja $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R D(M)$. Pela Observação 1.20, $D(M)$ possui uma imagem homomórfica A com anulador igual a \mathfrak{p} . Usando novamente o Teorema 3.5 obtemos que $DD(M)$ possui um R -submódulo com anulador igual a \mathfrak{p} . Além disso, existe um R -isomorfismo $DD(M) = \text{Hom}(\text{Hom}(M, E_R), E_R) \cong M \otimes_R \hat{R}$, onde

$$\text{Hom}(E_R, E_R) = \oplus \text{Hom}(E_R(R/\mathfrak{m}), E_R(R/\mathfrak{m})) = \oplus \hat{R}_{\mathfrak{m}} = \hat{R}.$$

Portanto, existe um R -módulo L de $M \otimes_R \hat{R}$ com $(0 :_R L) = \mathfrak{p}$.

Seja $L\hat{R}$ o \hat{R} -submódulo de $M \otimes_R \hat{R}$ gerado por L . Note que $L\hat{R}$ é um \hat{R} -módulo finitamente gerado e que

$$(0 :_{\hat{R}} L\hat{R}) \cap R = (0 :_R L\hat{R}) = (0 :_R L) = \mathfrak{p}.$$

Segue a existência de $\mathfrak{B} \in \text{Ass}_{\hat{R}}(L\hat{R})$ tal que $\mathfrak{B} \cap R = \mathfrak{p}$. Tendo $\mathfrak{B} \in \text{Ass}_{\hat{R}}(M \otimes_R \hat{R})$, segue do Lema 1.25 que $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R M$. \square

Lema 3.8. [20, Lema 1.5] Seja $\{f_\lambda : M \rightarrow M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de homomorfismos de módulos com domínios em comum. Então existe uma sobrejeção

$$\frac{D_R(M)}{\sum_{\lambda \in \Lambda} \text{im } D_R(f_\lambda)} \longrightarrow D_R\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \ker f_\lambda\right).$$

Lema 3.9. Seja M um R -módulo e $S \subset R$ um subconjunto multiplicativamente fechado.

1. Se $sM = 0$ para algum $s \in S$, então $S_{-1}M = 0$.
2. Se $\bigcap_{s \in S} sM \neq 0$, então $S_{-1}M \neq 0$.

Demonstração. 1. Demonstração análoga ao caso da localização.

2. Notemos que o núcleo $(0 :_{D_R(M)} s)$ do mapa $D_R(M) \xrightarrow{s} D_R(M)$ é imagem do mapa $D_R(M/sM) \longrightarrow D_R(M)$. Do Lema 3.8 temos uma sobrejeção

$$\frac{D_R(M)}{\sum_{s \in S} (0 :_{D_R(M)} s)} \longrightarrow D_R\left(\bigcap_{s \in S} sM\right),$$

o que significa que

$$\bigcup (0 :_{D_R(M)} s) \neq D_R(M).$$

Isso por sua vez significa que $S^{-1}D_R(M) \neq 0$, assim $S_{-1}M \neq 0$. \square

Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local completo, \mathfrak{a} um ideal de R e $S = R \setminus \mathfrak{p}$ com $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$. Nesta seção mostramos uma caracterização para o conjunto dos ideais primos anexados do módulo ${}^{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{a}}^{\dim R}(R)$.

Teorema 3.10. *Seja $S \subseteq R$ um subconjunto multiplicativamente fechado de R e M um R -módulo. Seja \mathfrak{p} um ideal primo de R .*

1. *Se M é \mathfrak{p} -secundário, então $S_{-1}M = 0$ se $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, ou $S_{-1}M$ é $S^{-1}\mathfrak{p}$ -secundário se $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$*
2. *Se M é representável, então $S_{-1}M$ é representável e, além disso,*

$$\text{Att}_{S^{-1}R}(S_{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \text{Att}_R M \text{ e } S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}.$$

Demonstração. 1. Se $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, então $s^n M = 0$ para algum $s \in S$, assim $S_{-1}M = 0$ pelo Lema 3.9 (1). Se $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, então $sM = M$ para todo $s \in S$, assim $S_{-1}M \neq 0$ pelo Lema 3.9 (2). Neste caso, a exatidão de $S_{-1}(-)$ mostra que para qualquer $x/s \in S^{-1}R$, a multiplicação por x/s é sobrejetora em $S_{-1}M$ se $x/s \notin S^{-1}\mathfrak{p}$, ou nilpotente se $x/s \in S^{-1}\mathfrak{p}$.

2. Precisamos mostrar que, se $M = N_1 + \dots + N_n$ é uma representação secundária irredundante, com N_i \mathfrak{p}_i -secundário, então os $S_{-1}N_i$'s, com $S \cap \mathfrak{p}_i = \emptyset$, formam uma representação secundária irredundante para $S_{-1}M$. Para qualquer $X \subseteq \{1, \dots, n\}$, seja $N_X = \sum_{i \in X} N_i$. Suponhamos que X e Y particionam $\{1, \dots, n\}$, de modo que $M = N_X + N_Y$, e consideremos a sequência exata

$$\bigoplus_{i \in X} S_{-1}N_i \longrightarrow S_{-1}M \longrightarrow S_{-1}\left(\frac{N_Y}{N_Y \cap N_X}\right);$$

isto mostra que $S_{-1}N_i$, $i \in X$, dá uma representação de $S_{-1}M$ se, e somente se, o módulo $S_{-1}(N_Y/N_X \cap N_X)$ é zero. Agora, co-localizando a sobrejeção

$$\bigoplus_{i \in Y} N_i \longrightarrow N_Y/(N_Y \cap N_X)$$

vemos que $S_{-1}(N_Y/N_X \cap N_Y)$ será zero se $Y \subset \{i \mid S \cap \mathfrak{p}_i \neq \emptyset\}$, de modo que os $S_{-1}N_i$'s com $S \cap \mathfrak{p}_i = \emptyset$ dão uma representação secundária de $S_{-1}M$. Por outro lado, para cada $i \in Y$, $N_Y/(N_Y \cap N_X)$ se sobrejeta em um módulo \mathfrak{p}_i -secundário, assim

$S_{-1}(N_Y/N_Y \cap N_X)$ será diferente de zero se Y contém algum i com $S \cap \mathfrak{p}_i = \emptyset$, o que comprova a minimalidade de nossa representação secundária. \square

Teorema 3.11. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local completo, \mathfrak{a} um ideal de R e $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$. Seja c um número inteiro tal que $H_{\mathfrak{a}}^i(R) = 0$ para todo $i > c$. Assuma que $H_{\mathfrak{a}}^c(R)$ é Artiniano. Então*

1. $\text{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}({}^{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{a}}^c(R)) \subseteq \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} : \dim R/\mathfrak{q} \geq c, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \text{ e } \mathfrak{q} \in \text{Spec}(R)\}$.
2. $\text{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}({}^{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{a}}^{\dim R}(R)) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} : \dim R/\mathfrak{q} = \dim R, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \text{ e } \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{q}} = \mathfrak{m} \in \text{Spec}(R)\}$.

Demonstração. 1. Como $H_{\mathfrak{a}}^c(R)$ é Artiniano, segue da dualidade de Matlis que

$$D_R(D_R(H_{\mathfrak{a}}^c(R))) = H_{\mathfrak{a}}^c(R).$$

Isto implica que

$$\text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^c(R)) = \text{Att}_R(D_R(D_R(H_{\mathfrak{a}}^c(R)))) = \text{Ass}_R(D_R(H_{\mathfrak{a}}^c(R))).$$

Portanto, em virtude do Teorema 3.10 temos

$$\text{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}({}^{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{a}}^c(R)) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{q} \in \text{Ass}_R D_R(H_{\mathfrak{a}}^c(R)) \text{ e } \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Uma vez que $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_R D_R(H_{\mathfrak{a}}^c(R))$, então

$$0 \neq \text{Hom}_R(R/\mathfrak{q}, D_R(H_{\mathfrak{a}}^c(R))) = D_R(H_{\mathfrak{a}}^c(R) \otimes_R R/\mathfrak{q}) = D_R(H_{\mathfrak{a}}^c(R/\mathfrak{q})).$$

Para finalizar, notemos que a primeira igualdade segue pela \otimes -adjunção de $\text{Hom}(-)$ e a segunda segue do fato de $H_{\mathfrak{a}}^c(-)$ ser um funtor exato à direita. Daí deduzimos que $H_{\mathfrak{a}}^c(R/\mathfrak{q}) \neq 0$, portanto $\dim R/\mathfrak{q} \geq c$.

2. Denotemos $d := \dim R$. Se $H_{\mathfrak{a}}^d(R) = 0$ então acabamos. Assumindo que $H_{\mathfrak{a}}^d(R) \neq 0$, seja $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \text{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}({}^{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{a}}^d(R))$. Visto em (1) que $H_{\mathfrak{a}}^d(R/\mathfrak{q}) \neq 0$, temos que $\dim R/\mathfrak{q} = d$ e pelo Teorema do anulamento de Lichtenbaum-Hartshorne, segue que $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$. Isto demonstra que

$$\text{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}({}^{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{a}}^{\dim R}(R)) \subseteq \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} : \dim R/\mathfrak{q} = \dim R, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \text{ e } \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{q}} = \mathfrak{m} \in \text{Spec}(R)\}.$$

Em virtude do Teorema 3.10

$$\text{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}({}^{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{a}}^{\dim R}(R)) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{q} \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^d(R), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

por isso será suficiente mostrar que $\mathfrak{q} \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^d(R)$. Como $\dim R/\mathfrak{q} = d$ e $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{q}} =$

\mathfrak{m} , segue do Teorema da independência que $H_{\mathfrak{a}}^d(R/\mathfrak{q}) \neq 0$. Conseqüentemente, pela Proposição 1.23 temos que

$$\emptyset \neq \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^d(R/\mathfrak{q}) = \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^d(R) \cap \text{Supp}_R(R/\mathfrak{q}).$$

Do contrário, assumimos que $\mathfrak{q} \notin \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^d(R)$. Em virtude desta última igualdade, existe $\mathfrak{q}_0 \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^d(R)$ tal que $\mathfrak{q}_0 \supset \mathfrak{q}$ e assim, $\dim R/\mathfrak{q}_0 < d$. De outro modo, $\mathfrak{q}_0 \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^d(R)$ se, e somente se $\mathfrak{q}_0 R_{\mathfrak{q}_0} \in \text{Att}_{R_{\mathfrak{q}_0}}({}^{\mathfrak{q}_0}H_{\mathfrak{a}}^d(R))$ (veja Teorema 3.10). Em virtude da primeira parte, temos que $\dim R/\mathfrak{q}_0 \geq d$, o que é contraditório. Isto conclui a demonstração. \square

Observação 3.12. Em relação ao item 1 do Teorema 3.11, no geral não se tem a igualdade. De fato, seja (R, \mathfrak{m}) um anel local completo com $\dim R > 0$ e consideremos \mathfrak{p} um ideal primo minimal de R . Assumindo que $H_{\mathfrak{a}}^d(R) = 0$, segue que $\text{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}({}^{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{a}}^d(R)) = \emptyset$, mas

$$\{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} : \dim R/\mathfrak{q} = d \text{ e } \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}.$$

Proposição 3.13. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local completo com $\dim R = d$. Seja \mathfrak{a} um ideal de R . Assumindo que $H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R)$ é Artiniano e $H_{\mathfrak{a}}^d(R) = 0$, então

1. $\text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R) \subseteq \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : \dim R/\mathfrak{p} = d-1, \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{p}} = \mathfrak{m}\} \cup \text{Assh}_R(R)$.
2. $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : \dim R/\mathfrak{p} = d-1, \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{p}} = \mathfrak{m}\} \subseteq \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R)$.

Demonstração. 1. Seja $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R)$, assim $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \text{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}({}^{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R))$ e conseqüentemente, segue do Teorema 3.11 que $\dim R/\mathfrak{p} \geq d-1$. Quando $\dim R/\mathfrak{p} = d$ segue-se que $\mathfrak{p} \in \text{Assh}(R)$. No caso $\dim R/\mathfrak{p} = d-1$ e visto que $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R)$, com $\text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R) = \text{Ass}_R D_R(H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R))$ juntamente com o funtor exato à direita $H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(-)$, deduzimos que $H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R/\mathfrak{p}) \neq 0$. Conseqüentemente, segue do Teorema do anulamento de Lichtenbaum-Hartshorne que existe um ideal primo $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ de R de dimensão $d-1$ com $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$. Agora podemos ver que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

2. Seja $\dim R/\mathfrak{p} = d-1$ e $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$. Do Teorema 3.11, segue que $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \text{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}({}^{\mathfrak{p}}H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R/\mathfrak{p}))$. Aplicando o Teorema 3.10 deduzimos que $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R/\mathfrak{p})$. Do epimorfismo

$$H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R) \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R/\mathfrak{p}) \longrightarrow 0$$

vemos que $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R)$. \square

Um fato notório em relação ao item 1 da Proposição 3.13 ocorre quando o ideal \mathfrak{a} é 1-dimensional. Neste caso, teremos uma igualdade

$$\text{Att}_R H_{\mathfrak{a}}^{d-1}(R) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : \dim R/\mathfrak{p} = d-1, \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{p}} = \mathfrak{m}\} \cup \text{Assh}_R(R).$$

3. Ideais primos anexados, módulos de cohomologia local e co-localização

Veja [9, Teorema 8.2.3].

Por fim, a pergunta que deixamos é se existe alguma classe de módulos, diferente das classes estudadas nesse trabalho, cujos módulos admitem representação secundária?

Apêndice A

Completamento

Com a ideia de fazer este texto autocontido, produzimos este apêndice para amenizar a falta de alguns pré-requisitos. Muitos dos resultados aqui expostos terão suas demonstrações omitidas, porém, neste caso, citaremos as referências.

A.1 Filtrações e graduações

Seja R um anel comutativo e com unidade.

Definição A.1. R diz-se *anel filtrado* quando existe uma família $\{R_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de ideais de R satisfazendo as seguintes condições:

1. $R_0 = R$;
2. $R_{n+1} \subseteq R_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$;
3. $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo A.2. (*Filtração trivial*) Para qualquer anel R , definimos $R_0 = R$ e $R_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Isto define uma filtração.

Exemplo A.3. (*Filtração I -ádica*) Seja I um ideal do anel R e consideremos $R_n = I^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma filtração, denominada filtração I -ádica.

Definição A.4. Seja R um anel filtrado. Um R -módulo M chama-se *módulo filtrado* quando existe uma família $\{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de R -submódulos de M satisfazendo:

1. $M_0 = M$;
2. $M_{n+1} \subseteq M_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$;
3. $R_n M_m \subseteq M_{n+m}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo A.5. Seja I um ideal do anel R e consideremos a filtração I -ádica em R . Definimos uma filtração em M do seguinte modo, $M_n = I^n M$, para $n \in \mathbb{N}$. Tal filtração é denominada filtração I -ádica em M .

Exemplo A.6. Seja M um R -módulo filtrado e N um submódulo de M . Uma filtração $\{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ induz uma filtração em N , bastando definir $N_n = M_n \cap N$. Notemos também que $\{M_n\}$ define uma filtração em M/N . Basta definir $(M/N)_n = (M_n + N)/N$.

A.2 Anéis e módulos graduados

Definição A.7. Um anel \mathbb{Z} -graduado (ou simplesmente anel graduado) é um anel R cujo grupo aditivo admite uma decomposição $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d$ como soma direta de subgrupos abelianos R_d tal que $a_i \in R_i, a_j \in R_j$ implica em $a_i a_j \in R_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Exemplo A.8. O exemplo canônico de anel graduado é o anel de polinômios $K[x_1, \dots, x_n]$ com coeficientes num corpo K , que admite a gradação

$$K[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} K[x_1, \dots, x_n]_d,$$

onde $K[x_1, \dots, x_n]_d = 0$ se $d < 0$ e $K[x_1, \dots, x_n]_d$ é o K -espaço vetorial de dimensão $(n+d-1)!/(n-1)!d!$ gerado pelos monômios $x_1^{e_1} \dots x_n^{e_n}$ de grau $d = e_1 + \dots + e_n$ para $d \geq 0$.

Definição A.9. Seja R um anel graduado e M um R -módulo. Se o grupo aditivo de M é uma soma direta de subgrupos abelianos $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ de modo que $a_i \in R_i, m_j \in M_j$ implicam em $a_i m_j \in M_{i+j}$ para quais quer $i, j \in \mathbb{Z}$, dizemos que M é graduado..

Definição A.10. Um submódulo N de um módulo graduado M diz-se submódulo graduado se $N = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d \cap N$

Definição A.11. (*I-filtração*) Seja M um R -módulo com uma filtração $\{M_n\}$. Seja I um ideal de R . A filtração $\{M_n\}$ diz-se uma I -filtração se $IM_n \subseteq M_{n+1}$ para todo n .

Definição A.12. (*Filtração estável*) Uma I -filtração $\{M_n\}$ de M diz-se estável quando existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $IM_n = M_{n+1}$ para todo $n \geq m$.

Exemplo A.13. A filtração I -ádica em M é I -estável.

A.3 Topologia linear

Definição A.14. (*Grupos topológicos*) Um grupo G munido de uma topologia tal que as operações $(x, y) \mapsto xy$ e $x \mapsto x^{-1}$ são contínuas é denominado grupo topológico.

Definição A.15. (*Anéis topológicos*) Um anel topológico é um anel R munido de uma topologia tal que as operações $(x, y) \mapsto x + y$ e $(x, y) \mapsto xy$ são contínuas em R .

Definição A.16. (*Topologia linear*) Seja R um anel com filtração $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e M um R -módulo com filtração $F = \{M_n\}$. Se $x \in M$, a F -ordem de x é definida por $ord_F(x) = \sup\{n : x \in M_n\}$. Note que $ord_F(x) = \infty$ se, e somente se, $x \in \bigcup_{n \geq 0} M_n$.

Defina o mapa $d_F : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ por $d_F(x, y) = 2^{-ord_F(x-y)}$. Verifica-se que d_F é uma pseudo-métrica em M . Assim, a filtração F dá origem a uma topologia τ_F em M via a pseudo-métrica. τ_F é denominada topologia linear.

Observação A.17. Se $\{M_n\}$ é uma filtração do R -módulo M , pode-se definir uma topologia em M considerando $\{M_n\}$ um sistema fundamental de subconjuntos abertos de (0) . Para cada $x \in M$, o sistema fundamental de vizinhanças em torno de x é $(x + M_n)$

Proposição A.18. [16] Se N é um submódulo de M , então o, com a topologia da obs, o fecho de N é dado por $\bar{N} = \bigcap_{n=0}^{\infty} (N + M_n)$.

Corolário A.19. [16] A topologia da obs é Hausdorff se, e somente se, $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n = \{0\}$.

Definição A.20. (*Limite inverso*) Seja R um anel. Dados R -módulos M_n munidos com morfismos lineares $\psi_n^m : M_m \rightarrow M_n$, com $m \geq n$, o limite inverso $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} M_i$ é um submódulo de $\prod M_i$ dado por

$$\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} M_i = \{(x_i) \in \prod M_i : \psi_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i\}.$$

Observação A.21. (*Propriedade universal*) Dados morfismos $\beta_n : N \rightarrow M_n$ com $\psi_n^{n+1}\beta_{n+1} = \beta_n$, existe um único morfismo $\beta : N \rightarrow \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} M_i$ com $\pi_n\beta = \beta_n$ para todo n .

Em geral, a família $\{M_i, \psi_i^j\}_{j \geq i}$, indexada por um conjunto dirigido, é denominada sistema inverso ou sistema projetivo.

A.4 Completamento

Definição A.22. (*Pseudo-métrica*) Uma função $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ chama-se uma pseudo-métrica se:

1. $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in M$
2. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, para todos $x, y, z \in M$;

Se além disso, $d(x, y) = 0$ se, e somente se $x = y$, dizemos que d é uma métrica.

Dada uma filtração $\{M_n\}$ de um R -módulo M , podemos definir uma pseudo-métrica em M da seguinte forma:

Fixemos qualquer $c \in (0, 1)$. Para qualquer $x, y \in M$, definamos $d(x, y) = c^n$, onde n é um inteiro tal que $x - y \in M_n - M_{n+1}$; se tal inteiro não existir, então $d(x, y) = 0$. Uma vez definida d , podemos falar em sucessões convergentes, sucessões de Cauchy e completamento de M por d .

Definição A.23. (*sucessões de Cauchy*) Uma sucessão (x_n) em M , diz-se de Cauchy quando, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe $N > 0$ natural tal que

$$n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Definição A.24. Define-se o completamento de M , com respeito a métrica associada à topologia proveniente de uma filtração de M , como o quociente

$$\Lambda(M) := \frac{\{\text{Sequências de Cauchy em } M\}}{\{\text{Sequências de Cauchy convergentes a zero em } M\}}$$

de modo que duas sequências (x_n) e (y_n) estão relacionadas se, para cada m , existe n_0 tal que $x_n - y_n \in M_n$, para $n \geq n_0$.

Proposição A.25. [16] Seja $\{M_n\}$ uma filtração do R -módulo M e $\Lambda(M)$ seu completamento. Então $\Lambda(M) \cong \varprojlim M/M_n$.

A.4.1 Completamento I -ádico

Seja R um anel, I um ideal de R e M um R -módulo. Considerando as filtrações I -ádicas $\{I^n\}$ e $\{I^n M\}$ de R e M respectivamente, definimos os completamentos I -ádicos de R e M , respectivamente, como os seguintes limites

$$\hat{R} = \varprojlim R/I^n \quad e \quad \hat{M} = \varprojlim M/I^n M.$$

Exemplo A.26. Seja $R = K[x]$ o anel de polinômios com coeficientes num corpo K e consideremos o ideal $I = (x)$. O completamento $\hat{R} = \varprojlim K[x]/(x^n)$ é o anel das séries formais de potências em x sobre K e denotado por $K[[x]] = \{a_0 + a_1 x + \dots : a_i \in K \forall i\}$.

Teorema A.27. [5, Teorema 13.3.4] (Completamento é funtor exato) *Sejam R um anel noetheriano e I um ideal de R . Então o funtor $M \rightarrow \hat{M}$ é exato na categoria dos R -módulos finitamente gerados, isto é, se*

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de R -módulos finitamente gerados, então a sequência

$$0 \rightarrow \hat{M} \rightarrow \hat{N} \rightarrow \hat{P} \rightarrow 0$$

dos completamentos I -ádicos também é exata.

Teorema A.28. [5, Teorema 13.3.5] *Sejam R um anel noetheriano, I um ideal em R e M um R -módulo finitamente gerado. Denote por \hat{R} e \hat{M} os completamentos I -ádicos de R e M , respectivamente. Então*

1. *o mapa $M \otimes_R \hat{R} \rightarrow \hat{M}$, dado por $m \otimes (\hat{x}_i) \rightarrow (m\hat{x}_i)$, é um isomorfismo.*
2. *\hat{R} é plano sobre R .*
3. *$\hat{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}\hat{R}$ para todo ideal $\mathfrak{b} \subseteq R$.*
4. *se $I = (a_1, \dots, a_r)$ então*

$$\hat{R} \cong \frac{R[[x_1, \dots, x_r]]}{(x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r)}$$

e portanto \hat{R} também é noetheriano.

Lema A.29. [21, Lema 2.1] *Sejam R um anel Noetheriano e M um R -módulo Artiniano. Então, M possui uma estrutura natural de \hat{R} -módulo Artiniano, e existe um \hat{R} -isomorfismo*

$$\psi : M \otimes_R \hat{R} \rightarrow M$$

para o qual

$$\psi\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \hat{a}_i\right) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i x_i$$

para $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ e $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n \in \hat{R}$.

A.4.2 Anéis locais completos

Definição A.30. *Seja R um anel filtrado, com filtração $\{R_n\}$. R diz-se completo quando o mapa natural $R \rightarrow \varprojlim R/R_n$ é um isomorfismo.*

Proposição A.31. Seja R um anel e \mathfrak{m} um ideal maximal em R . Então \hat{R} , em relação a \mathfrak{m} , é um anel local com $\hat{\mathfrak{m}}$ como ideal maximal.

Demonstração. Como $R/\mathfrak{m} \cong \hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}$, segue que $\hat{\mathfrak{m}}$ é um ideal maximal. Além disso, $\hat{\mathfrak{m}} \subset \sqrt{\hat{R}}$. Se \mathfrak{m}' é um ideal maximal de \hat{R} , então $\sqrt{\hat{R}} \subset \mathfrak{m}'$. Desse modo, $\mathfrak{m}' = \hat{\mathfrak{m}}$ e, portanto, \hat{R} é local. \square

Definição A.32. Seja R um anel local noetheriano de dimensão r . Dizemos que R é *regular* se o ideal maximal de R é gerado por r elementos.

Observação A.33. Note que R é regular se, e somente se, $\dim R = \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Definição A.34. Sejam R um anel e M um R -módulo. Dizemos que $r \in R$ é um elemento M -regular se r não é um divisor de zero de M .

Uma sequência de elementos regulares (r_1, \dots, r_s) é chamada *M -sequência regular* se ambas as condições seguintes valem:

1. r_i é $M/(r_1, \dots, r_{i-1})M$ -regular para $i = 1, \dots, s$;
2. $M/(r_1, \dots, r_s)M \neq 0$.

O seguinte teorema é devido a I. S. Cohen.

Teorema A.35. [7, Seção IV.0.19.8.] (**Teorema de estrutura de Cohen**) *Qualquer anel local noetheriano completo é um quociente de um anel regular completo.*

Proposição A.36. [10, Proposição 4.14] Seja (R, \mathfrak{m}) um anel noetheriano local. Então, para o completamento \mathfrak{m} -ádico temos

1. $\dim R = \dim \hat{R}$
2. R é regular se, e somente se, \hat{R} é regular.

Apêndice B

Módulos injetivos

Se M e N são R -módulos, onde R é um anel com tais características, as expressões “ M é um submódulo de N ” (notada $M \subseteq N$) e “existe um monomorfismo $\iota : M \rightarrow N$ ” são equivalentes e serão usadas neste texto de maneira indistinta, identificando-se assim o módulo M com sua imagem $\iota(M)$ em N . Um R -módulo E é dito *injetivo* se para cada monomorfismo $\alpha : M' \rightarrow M$ e cada homomorfismo $f : M' \rightarrow E$, existe um *levantamento* $g : M \rightarrow E$ (isto é, $g\alpha = f$). Equivalentemente, o R -módulo E é injetivo quando o funtor contravariante $\text{Hom}_R(-, E) : R\text{-mód} \rightarrow \text{Ab}$ é *exato*, isto é, $\text{Hom}_R(-, E)$ transforma sequências exatas curtas em sequências exatas curtas (observe que $\text{Hom}_R(\alpha, E)(g) = g\alpha$ para quaisquer morfismos $\alpha : M' \rightarrow M$ e $g : M \rightarrow E$).

Se $E = \prod_{i \in \Lambda} E_i$, então, E será injetivo se, e somente se, cada E_i for injetivo. Isto vem do fato de que todo homomorfismo $M' \rightarrow E$ é determinado de maneira única pelas projeções $M' \rightarrow E_i$.

Na prática, não é necessário testar todos os homomorfismos possíveis entre R -módulos para comprovar injetividade.

Lema B.1 (Critério de Baer). Um R -módulo E é injetivo se, e somente se, todo homomorfismo $\mathfrak{b} \rightarrow E$ estende a um homomorfismo $R \rightarrow E$ para todo ideal \mathfrak{b} de R .

Demonstração. Se E é injetivo, então, todo homomorfismo $\mathfrak{b} \rightarrow E$ estende a um homomorfismo $R \rightarrow E$ para todo ideal \mathfrak{b} de R : faça $M' = \mathfrak{b}$, $M = R$ e $\alpha = \iota$ a inclusão.

Reciprocamente, considere um monomorfismo $\alpha : M' \rightarrow M$ e um homomorfismo $f : M' \rightarrow E$. Considere também a família de pares

$$\mathcal{F} = \{(N, g_N) : \alpha(M') \subseteq N \subseteq M \text{ e } g_N : N \rightarrow E \text{ é tal que } g_N\alpha = f\}.$$

Esta família satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn com a ordem $(N, g_N) \leq (N', g_{N'})$ quando $N \subseteq N'$ e $g_{N'}|_N = g_N$. Então, existe um elemento maximal (H, g) . Se $H \neq M$,

considere $x \in M - H$ e $\mathfrak{b} = (H :_R x)$. Existe uma aplicação

$$\varphi : \mathfrak{b} \xrightarrow{\mu_x} H \xrightarrow{g} E.$$

Logo, esta aplicação estende a $\tilde{\varphi} : R \rightarrow E$. Defina $\psi : H + Rx \rightarrow E$ como $\psi(h + rx) = g(h) + \tilde{\varphi}(r)$. Observemos que ψ está bem definida: se $h + rx = h' + r'x$, então, $h - h' = (r' - r)x$ e $g(h) - g(h') = g((r' - r)x)$. Por outro lado, $r' - r \in \mathfrak{b}$ e $\tilde{\varphi}(r') - \tilde{\varphi}(r) = \tilde{\varphi}(r' - r) = g((r' - r)x)$. Logo, $g(h) + \tilde{\varphi}(r) = g(h') + \tilde{\varphi}(r')$. Além disso, ψ é um homomorfismo, $H \subsetneq H + Rx$ e $\psi|_H = g$, o que é uma contradição com a maximalidade do par (H, g) . \square

Seja D um grupo abeliano. Dizemos que D é *divisível* se para cada $d \in D$ e cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, existe $d' \in D$ tal que $d = nd'$.

A seguir apresentamos alguns exemplos:

Exemplo 1. O grupo abeliano \mathbb{Q} dos números racionais é divisível.

Exemplo 2. Somas diretas e produtos diretos de grupos abelianos divisíveis são divisíveis.

Exemplo 3. Quocientes de grupos abelianos divisíveis são divisíveis.

Esta nova definição fornece outra caracterização para \mathbb{Z} -módulos injetivos.

Proposição B.2. Um grupo abeliano D é injetivo (isto é, um \mathbb{Z} -módulo injetivo) se, e somente se, D é divisível.

Demonstração. Se D é injetivo, considere $e \in D$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Fica definido um homomorfismo $f : n\mathbb{Z} \rightarrow D$ por $f(rn) = re$ para cada $r \in \mathbb{Z}$. Logo, existe uma extensão $h : \mathbb{Z} \rightarrow D$, isto é, $h(rn) = f(rn)$ para cada $r \in \mathbb{Z}$. Assim, $e = f(n) = h(n) = nh(1)$, donde D é divisível.

Reciprocamente, suponha que D é divisível e considere um homomorfismo $f : n\mathbb{Z} \rightarrow D$ onde $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Assim, existe $e \in D$ tal que $f(n) = ne$. Defina $h : \mathbb{Z} \rightarrow D$ por $h(r) = re$. Deste modo, h é um homomorfismo que estende f . Pelo Critério de Baer, D é injetivo. \square

Procedemos à primeira parte da existência de módulos injetivos.

Proposição B.3. Todo grupo abeliano é subgrupo de um grupo abeliano injetivo.

Demonstração. Podemos ver o grupo abeliano $G = \sum_{g \in G} \mathbb{Z}g$. Consideremos o grupo livre $F = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}$. Deste modo, $G \cong \frac{F}{N}$. Mas $F \subseteq D$, onde $D = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Q}$. Portanto, $G \subseteq \frac{D}{N}$ e o enunciado segue dos exemplos e da Proposição B.2. \square

Lema B.4. Se D é um grupo abeliano divisível, então, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ é um R -módulo injetivo.

Demonstração. O grupo abeliano $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ torna-se um R -módulo definindo $rf : a \mapsto f(ar)$ para cada $r \in R$ e cada $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$. Agora, o funtor

$$\text{Hom}_R(-, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D))$$

é naturalmente equivalente à composição $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, D) \circ (R \otimes_R -)$. O funtor $R \otimes_R -$ é naturalmente equivalente ao funtor id , logo exato, e o funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, D)$ é exato porque D é injetivo. Portanto, o funtor $\text{Hom}_R(-, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D))$ é exato, donde $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ é um R -módulo injetivo. \square

Concluimos desta forma que a categoria dos R -módulos possui injetivos suficientes.

Teorema B.5. *Todo módulo é submódulo de um módulo injetivo.*

Demonstração. Defina $\varphi : M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ como $m \mapsto \varphi_m$ onde $\varphi_m : R \rightarrow M$ é definida como $r \mapsto \varphi_m(r) = rm$. Observe que φ é um monomorfismo de grupos. Também, existe um grupo abeliano injetivo D e um monomorfismo de grupos $\iota : M \rightarrow D$. Agora, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \iota) : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ é um homomorfismo injetor. Mais ainda, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \iota)\varphi : M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ é um homomorfismo de R -módulos: de fato, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \iota)\varphi(rm) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \iota)(\varphi_{rm}) = \iota\varphi_{rm} : a \mapsto \iota(arm)$. Por outro lado, $r\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \iota)\varphi(m) = r\iota\varphi_m$ e $r\iota\varphi_m(a) = \iota\varphi_m(ar) = \iota(arm)$ para cada $a \in R$, concluindo o requerido. \square

Uma seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

é dita “*cindida*” (*splits* ou *is split*) se existe um homomorfismo $j : M'' \rightarrow M$ tal que $\pi j = \text{id}_{M''}$.

Equivalentemente, tal seqüência cinde se, e somente se, existe um homomorfismo $q : M \rightarrow M'$ tal que $q\iota = \text{id}_{M'}$. De fato, defina $q(m) = \iota^{-1}(m - j\pi(m))$ para cada $m \in M$, expressão que faz sentido pois $\pi(m - j\pi(m)) = \pi(m) - \pi(m) = 0$. Reciprocamente, defina $j(m'') = m - \iota q(m)$ onde $m \in \pi^{-1}(m'')$. O homomorfismo j é bem definido pois se $\pi(m) = m'' = \pi(n)$, então, $m - n \in \ker(\pi)$ e existe um único $m' \in M'$ com $\iota(m') = m - n$. Logo, $m' = q(m) - q(n)$ e $m - n = \iota q(m) - \iota q(n)$, donde $m - \iota q(m) = n - \iota q(n)$.

Observe também que se dita seqüência cinde, então, $M \cong M' \oplus M''$ via os isomorfismos $M \rightarrow M' \oplus M''$, $m \mapsto (q(m), \pi(m))$, e $M' \oplus M'' \rightarrow M$, $(a, b) \mapsto \iota(a) + j(b)$.

Existe mais uma caracterização de módulos injetivos via sequências cindidas.

Lema B.6. Um módulo E é injetivo se, e somente se, toda sequência exata curta $0 \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ cinde.

Demonstração. Se E é injetivo e $\iota : E \rightarrow M$ é um monomorfismo, então, existe um homomorfismo $q : M \rightarrow E$ tal que $q\iota = \text{id}_E$.

Reciprocamente, existem um módulo injetivo E' e um monomorfismo $\iota : E \rightarrow E'$ pelo Teorema B.5. Logo, $E' = E \oplus \frac{E'}{E}$, donde E é injetivo. \square

O lema acima permite-nos concluir que um módulo injetivo E é somando direto de qualquer módulo que o contém.

B.1 Extensões essenciais

Sejam $M \subseteq N$ módulos. N é uma *extensão essencial* de M se todo submódulo não-nulo H de N satisfaz $H \cap M \neq 0$. Tal extensão essencial é dita *própria* se $M \subsetneq N$ (trivialmente, M sempre é extensão essencial de si mesmo, inclusive quando $M = 0$).

Existem outras formas de verificar se uma extensão é essencial.

Lema B.7. Sejam $M \subseteq N$ módulos. As condições são equivalentes:

1. N é uma extensão essencial de M .
2. Todo elemento não-nulo $n \in N$ possui um múltiplo não-nulo $rn \in M$.
3. Se $\varphi : N \rightarrow M'$ é um homomorfismo tal que $\varphi|_M := \varphi\iota$ é injetor, então, φ é injetor.

Demonstração. Suponha que N é uma extensão essencial de M e seja n um elemento não-nulo de N . Logo, Rn é um submódulo não-nulo de N e existe $r \in R$ tal que $0 \neq rn \in M$.

Se a condição 2 é satisfeita e $\varphi : N \rightarrow M'$ é um homomorfismo tal que $\varphi|_M$ é injetor, considere um elemento não-nulo $h \in \ker \varphi$. Então, $rh \in M - \{0\}$ para algum $r \in R$. Assim, $0 = r\varphi(h) = \varphi(rh) \neq 0$, o que é absurdo.

Agora, se a condição 3 é satisfeita e H é um submódulo de N , considere a projeção $\pi : N \rightarrow \frac{N}{H}$. Então, $\ker \pi|_M = H \cap M$. Se $H \cap M = 0$, então, $\pi|_M$ é injetor, donde π é injetor e $0 = \ker \pi = H$. Logo, N é uma extensão essencial de M . \square

Se M é um submódulo de N , a existência de extensões essenciais maximais de M em N fica garantida graças ao Lema de Zorn. Os módulos injetivos ficam caracterizados pela não existência de extensões essenciais próprias.

Lema B.8. Um módulo é injetivo se, e somente se, não possui extensões essenciais próprias.

Demonstração. Se E é injetivo e $E \subseteq M$, então, $M = E \oplus M''$ para algum submódulo M'' de M pelo Lema B.6. Se $E \neq M$, então, $M'' \neq 0$ e M não é uma extensão essencial de E .

Reciprocamente, se E não possui extensões essenciais próprias, considere $E \subsetneq M$, onde M é injetivo. Então, existe um submódulo não-nulo H de M tal que $H \cap E = 0$. Pelo Lema de Zorn, existe um submódulo maximal N de M tal que $H \subseteq N$ e $N \cap E = 0$. Agora, existe um monomorfismo natural $E \rightarrow \frac{M}{N}$ que, de fato, define uma extensão essencial $E \subseteq \frac{M}{N}$ pelo Lema B.7. Deste modo, $E = \frac{M}{N}$. Portanto, $E + N = M$, donde $M = E \oplus N$ e E é injetivo. \square

Deste modo, se M é submódulo de um módulo injetivo E , então, todas as extensões essenciais possíveis de M devem estar contidas em E . Assim, não é mais necessário especificar “o contexto” de M estar contido em módulo algum graças ao Teorema B.5.

Proposição B.9. Se N é uma extensão essencial maximal de M , então, N é injetivo.

Demonstração. Suponha que N possui uma extensão essencial Q . Então, Q é uma extensão essencial de M . Logo, $N = Q$, pois N é extensão essencial maximal de M . Deste modo, N não possui extensões essenciais próprias, logo, N é injetivo pelo Lema B.8. \square

Mais ainda, quaisquer duas extensões essenciais maximais de um módulo M devem ser isomorfas.

Teorema B.10. Se N e N' são duas extensões essenciais maximais de M , então, $N \cong N'$.

Demonstração. Sejam $\alpha : M \rightarrow N$ e $\beta : M \rightarrow N'$ monomorfismos. Logo, α estende para um monomorfismo $\varphi : N' \rightarrow N$ pelo Lema B.7 e pela Proposição B.9, isto é, $\alpha = \varphi\beta$. Logo, N' é um submódulo de N , donde $N' \cong N$. \square

Chamamos de *envoltória injetiva* (*injective hull*) de M qualquer extensão essencial maximal de M e denotamo-la por $E_R(M)$.

Recolhemos a seguir uma série de exemplos elementares de extensões essenciais e envoltórias injetivas:

Exemplo 4. Todo anel comutativo é extensão essencial de cada um de seus ideais que contêm pelo menos um elemento regular.

Exemplo 5. Se R é um anel comutativo, denote por S o conjunto de todos os elementos regulares de R . Verifica-se que $S^{-1}R$ é uma extensão essencial de R .

Exemplo 6. Mais ainda, se R é um domínio de integridade, então, seu corpo de frações é um R -módulo injetivo: de fato, se \mathfrak{b} é um ideal (não-nulo) de R e $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow \text{Frac}(R)$ é um homomorfismo, fixe $i \in \mathfrak{b} - \{0\}$ e defina $\psi : R \rightarrow \text{Frac}(R)$ como $\psi(r) = \frac{\varphi(ri)}{i}$. Observa-se que ψ é um homomorfismo que estende φ . Concluimos assim que $E_R(R) = \text{Frac}(R)$ quando R é um domínio de integridade.

Exemplo 7. Notando \mathbb{I}_n o grupo cíclico de ordem n e considerando um número primo p , define-se o grupo abeliano $\mathbb{I}_{p^\infty} = \bigcup_{i \geq 1} \mathbb{I}_{p^i}$. Observa-se que \mathbb{I}_{p^∞} é uma extensão essencial sobre cada \mathbb{I}_{p^i} : de fato, se $d \in \mathbb{I}_{p^\infty} - \{0\}$, considere o menor índice i tal que $d \in \mathbb{I}_{p^i}$. Assim, existe um único $r \in \{1, \dots, p^i - 1\}$ não-divisível por p tal que $d = \bar{r}$ em \mathbb{I}_{p^i} . Deste modo, o elemento $p^{i-1}\bar{r}$ tem ordem p em \mathbb{I}_{p^i} , donde $\mathbb{Z}d \cap \mathbb{I}_p \neq 0$ e \mathbb{I}_{p^∞} é extensão essencial de \mathbb{I}_p , logo, de cada \mathbb{I}_{p^i} . Estabelecer o fato de \mathbb{I}_{p^∞} ser um grupo abeliano divisível é um exercício talvez um pouco mais exigente.

Exemplo 8. Se $N \subseteq M$, então, $E_R(N) \subseteq E_R(M)$: de fato se $e \in E - E_R(M)$ para algum módulo E , então, $Re \cap M = 0$, donde $Re \cap N = 0$. Especificamente, se M é uma extensão essencial de N , então, $E_R(M) = E_R(N)$.

Exemplo 9. De maneira similar ao exemplo anterior, pode-se concluir que se $M \subseteq M_1 \oplus \dots \oplus M_s$, então, $E_R(M) \subseteq E_R(M_1) \oplus \dots \oplus E_R(M_s)$.

B.2 Resoluções injetivas

Seja M um R -módulo. Então, é possível construir uma sequência exata de R -módulos $0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \dots$ onde cada E^i é injetivo graças ao Teorema B.5. Toda esta situação motiva algumas definições.

Definição B.11. Seja \mathcal{X} uma classe de módulos. Dizemos que existem \mathcal{X} -módulos *suficientes* quando, para cada módulo M , existem um módulo X da classe \mathcal{X} (dora-vante, X é um \mathcal{X} -módulo) e um monomorfismo $M \rightarrow X$. Uma \mathcal{X} -*resolução* de M é um cocomplexo $\mathbf{X}(M)$ de \mathcal{X} -módulos

$$0 \longrightarrow X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \longrightarrow \dots$$

tal que $H^0(\mathbf{X}(M)) = \ker d^0 = M$ e $H^i(\mathbf{X}(M)) = 0$ para cada $i \geq 1$.

Para cada $i \geq 0$, o quociente $V^i = \frac{X^i}{\ker d^i}$ é chamado de *i -ésima cosizígia* de $\mathbf{X}(M)$. Assim, o homomorfismo $d^i : X^i \rightarrow X^{i+1}$ fica fatorado como $d_i = \bar{d}^i \pi^i$ onde $\bar{d}^i : V^i \rightarrow X^{i+1}$ é um monomorfismo e $\pi^i : X^i \rightarrow V^i$ é um epimorfismo para cada $i \geq 0$.

Neste texto, consideraremos de maneira exclusiva a classe \mathcal{X} dos módulos injetivos. Se $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de módulos e $\mathbf{X}(M)$ e $\mathbf{X}(N)$ são, respectivamente,

resoluções injetivas

$$0 \longrightarrow D^0 \xrightarrow{d^0} D^1 \xrightarrow{d^1} D^2 \longrightarrow \dots$$

e

$$0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{e^0} E^1 \xrightarrow{e^1} E^2 \longrightarrow \dots$$

de M e N , então, pode-se construir uma aplicação de cadeias

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\beta} & E^0 & \xrightarrow{e^0} & E^1 & \xrightarrow{e^1} & E^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow f & & \uparrow f^0 & & \uparrow f^1 & & \uparrow f^2 & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & D^0 & \xrightarrow{d^0} & D^1 & \xrightarrow{d^1} & D^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

que será chamada de *resolução de f* . Aqui, α e β são os monomorfismos que fazem que as linhas do diagrama sejam exatas. De fato, f^0 é um levantamento de βf via o monomorfismo α , pois E^0 é injetivo. Supondo que foram encontradas todos os homomorfismos até $f^n : D^n \rightarrow E^n$, temos um monomorfismo $\bar{d}_n : V_M^n \rightarrow D^{n+1}$ induzido por d^n , mais precisamente, $\bar{d}_n \pi^n = d^n$ onde $\pi^n : D^n \rightarrow V_M^n$ é a projeção canônica. Define-se, também, um homomorfismo (é, de fato, bem definido!) $\lambda^n : V_M^n \rightarrow E^{n+1}$ como $\lambda^n(a + \ker d^n) = e^n f^n(a)$. Portanto, existe $f^{n+1} : D^{n+1} \rightarrow E^{n+1}$ tal que $f^{n+1} \bar{d}_n = \lambda^n$. Assim, $f^{n+1} d^n = f^{n+1} \bar{d}_n \pi^n = \lambda^n \pi^n = e^n f^n$.

Observe, também, que se fora construída outra resolução $(g^i)_{i \geq 0}$ de f , então, ambas aplicações de cadeias são *homotópicas*, isto é, existe uma aplicação $t = (t^n : D^n \rightarrow E^{n-1})$ de grau 1 (ou cograu -1) tal que $f^n - g^n = e^{n-1} t^n + t^{n+1} d^n$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \xrightarrow{e^{-1}} & E^0 & \xrightarrow{e^0} & E^1 & \xrightarrow{e^1} & E^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & \swarrow t^0 & & \swarrow t^1 & & \swarrow t^2 & & & \\ 0 & \xrightarrow{d^{-1}} & D^0 & \xrightarrow{d^0} & D^1 & \xrightarrow{d^1} & D^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

De fato, observe que $M \cong \text{im } \alpha \subseteq \ker(f^0 - g^0)$ e defina $\lambda^0 : V_M^0 \rightarrow E^0$ como $\lambda^0(a + \ker d^0) = (f^0 - g^0)(a)$, isto é, $\lambda^0 \pi^0 = f^0 - g^0$, onde $\pi^0 : D^0 \rightarrow V_M^0$ é a projeção natural. Mas $\bar{d}^0 \pi^0(x) = d^0(x)$ para todo $x \in E^0$. Por ser E^0 injetivo, defina $t^1 : D^1 \rightarrow E^0$ estendendo λ^0 , ou seja, $\lambda^0 = t^1 \bar{d}^0$. Logo, $f^0 - g^0 = \lambda^0 \pi^0 = e^{-1} t^0 + t^1 d^0$.

Supondo que já foram encontrados todos os homomorfismos até $t^n : D^n \rightarrow E^{n-1}$, considere, análogo ao primeiro passo, o homomorfismo $\lambda^n : V_M^n \rightarrow E^n$ definido por

$\lambda^n \pi^n = f^n - g^n - e^{n-1} t^n$. Define-se um levantamento $t^{n+1} : D^{n+1} \rightarrow E^n$ de λ^n via \bar{d}^n (isto é, $t^{n+1} \bar{d}_n = \lambda^n$) e verifica-se que $f^n - g^n = e^{n-1} t^n + t^{n+1} \bar{d}^n$.

Fica, então, demonstrado o seguinte resultado.

Proposição B.12. Quaisquer duas resoluções injetivas de um mesmo módulo são *homotopicamente equivalentes*, isto é, se $\mathbf{E}(M)$ e $\mathbf{D}(M)$ são resoluções injetivas de M , então, existem aplicações de cadeias $f : \mathbf{E}(M) \rightarrow \mathbf{D}(M)$ e $g : \mathbf{D}(M) \rightarrow \mathbf{E}(M)$ tais que fg é homotópica a $\text{id}_{\mathbf{D}(M)}$ e gf é homotópica a $\text{id}_{\mathbf{E}(M)}$.

Uma resolução injetiva $\mathbf{E}(M) = (E^i(M), d^i)_{i \geq 0}$ de M é *minimal* se o termo de cograu n é extensão essencial da $(n-1)$ -ésima cosizígia para cada $n \geq 0$ (convenimos $V^{-1} = M$).

Existem muitas razões para as resoluções injetivas minimais terem este nome. Uma delas é a seguinte.

Proposição B.13. Sejam $\mathbf{D}(M)$ e $\mathbf{E}(M)$ duas resoluções injetivas de M , sendo a segunda delas minimal. Então, para cada $n \geq 0$, cada termo de $\mathbf{E}(M)$ de cograu n é somando direto do termo de $\mathbf{D}(M)$ do mesmo cograu. Em particular, para cada $n \geq 0$, os termos de cograu n de quaisquer duas resoluções injetivas minimais do mesmo módulo são isomorfos.

Demonstração. Construiremos uma aplicação de cadeias

$$(\text{id}_M^i)_{i \geq 0} : (\mathbf{E}(M), e) \rightarrow (\mathbf{D}(M), d)$$

induzida pelo isomorfismo identidade $\text{id}_M : M \rightarrow M$ e injetora. De fato, id_M^0 satisfaz $\text{id}_M^0 \alpha = \beta \text{id}_M$, sendo o lado direito um monomorfismo. Logo, id_M^0 é injetora pelo Lema B.7 e E^0 é somando direto de D^0 .

Suponha, agora, que id_M^i é injetora para cada $i \in \{0, \dots, n\}$. Observe que $x \in \ker e^i$ se, e somente se, $\text{id}_M^i(x) \in \ker d^i$. Defina $\lambda^n : V_{\mathbf{E}}^n \rightarrow D^{n+1}$ como $\lambda^n(a + \ker e^n) = d^n \text{id}_M^n(a)$. Verifica-se que λ^n é injetora: de fato, $\text{id}_M^n(a) \in \ker d^n$ se, e somente se, $a \in \ker e^n$. Deste modo, λ^n estende-se a um monomorfismo $\text{id}_M^{n+1} : E^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$ pois $\bar{e}^n : V_{\mathbf{E}}^n \rightarrow E^{n+1}$ é uma extensão essencial. Portanto, E^n é somando direto de D^n para cada $n \geq 0$ pelo Lema B.6. \square

B.3 Módulos injetivos sobre um anel comutativo noetheriano

Antes de continuarmos com o estudo de módulos injetivos, lembremos algumas propriedades dos módulos de homomorfismos. Para qualquer conjunto de índices I ,

existe um monomorfismo de grupos $\varphi : \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(M, N_i) \rightarrow \text{Hom}_R\left(M, \bigoplus_{i \in I} N_i\right)$ dado por $\varphi(f_{i_1} + \cdots + f_{i_s}) = f_{i_1} + \cdots + f_{i_s} : M \rightarrow \bigoplus_{i \in I} N_i$ quando $f_{i_j} \in \text{Hom}_R(M, N_{i_j})$. Observa-se que φ é um isomorfismo quando M é finitamente gerado: de fato, a imagem de $f \in \text{Hom}_R\left(M, \bigoplus_{i \in I} N_i\right)$ está contida numa quantidade finita de N_i neste caso, logo, $f \in \text{Hom}_R\left(M, \bigoplus_{i \in F} N_i\right)$ onde F é um subconjunto finito de I . Mas

neste último caso, o monomorfismo $\varphi|_F : \bigoplus_{i \in F} \text{Hom}_R(M, N_i) \rightarrow \text{Hom}_R\left(M, \bigoplus_{i \in F} N_i\right)$ é, de fato, um isomorfismo (independente de M ser finitamente gerado). Assim, existe $g \in \bigoplus_{i \in F} \text{Hom}_R(M, N_i) \subseteq \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(M, N_i)$ tal que $\varphi(g) = \varphi|_F(g) = f$.

Os anéis noetherianos ficam caracterizados pelo comportamento dos módulos injetivos.

Proposição B.14. Um anel é noetheriano (à direita) se, e somente se, toda soma direta de módulos injetivos (à direita) é injetiva.

Demonstração. Seja $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ uma soma direta de módulos injetivos e considere um ideal \mathfrak{a} de um anel noetheriano R . A inclusão $\mathfrak{a} \rightarrow R$ induz um homomorfismo $\text{Hom}_R(R, E) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E)$. Como cada E_i é injetivo, temos também que cada homomorfismo $\text{Hom}_R(R, E_i) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E_i)$ é sobrejetor. Logo, $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(R, E_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E_i)$ é sobrejetor. Como \mathfrak{a} é finitamente gerado, temos o isomorfismo natural $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E_i) \cong \text{Hom}_R\left(\mathfrak{a}, \bigoplus_{i \in I} E_i\right)$. Portanto, o homomorfismo $\text{Hom}_R(R, E) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E)$ é sobrejetor, donde E é um módulo injetivo pelo Critério de Baer.

Reciprocamente, suponha que R não é noetheriano. Exibiremos uma soma direta de módulos injetivos que não é injetiva. Existe uma cadeia ascendente $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \cdots$ de ideais de R . Seja $\mathfrak{a} = \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{a}_i$. Existem projeções naturais $\pi_i : \mathfrak{a} \rightarrow E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$ para cada $i \geq 1$, donde obtemos um homomorfismo $\pi : \mathfrak{a} \rightarrow \prod_{i \geq 1} E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$. Se $a \in \mathfrak{a}$, então, $a \in \mathfrak{a}_j$ para algum inteiro $j \geq 1$. Assim, $\pi_i(a) = 0$ quando $i \geq j$. Portanto, o contradomínio de π é o submódulo $\bigoplus_{i \geq 1} E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$ de $\prod_{i \geq 1} E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$. Se existisse $\psi : R \rightarrow \bigoplus_{i \geq 1} E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$ estendendo π , então, $\psi(1) = e_1 + \cdots + e_s$ para alguns $e_i \in E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$ e $s \geq 1$. Agora, $\pi(a) = a\psi(1)$ para cada $a \in \mathfrak{a}$. Mas se $a \in \mathfrak{a}_{s+2} - \mathfrak{a}_{s+1}$, então, $\pi_{s+1}(a) \neq 0$ e chegamos a uma contradição. \square

Lembremos que um módulo é dito *simples* quando não tem submódulos não-triviais. Um módulo será dito *indecomponível* quando não for uma soma direta de submódulos não-triviais. Um módulo será dito *uniforme* quando satisfizer alguma das condições equivalentes:

1. Não contém somas diretas não-triviais.
2. Todo submódulo não-nulo é indecomponível.
3. É extensão essencial de cada um de seus submódulos não-nulos.

Todo módulo simples é uniforme e todo módulo uniforme é indecomponível. Exemplos que mostram que estas implicações não são equivalências podem ser encontrados em [12, página 84]. Porém, todo módulo injetivo indecomponível é uniforme como veremos a seguir.

Teorema B.15. *Seja E um módulo injetivo. As condições são equivalentes:*

1. E é indecomponível.
2. $E \neq 0$ e $E = E_R(M)$ para qualquer submódulo não-nulo M de E .
3. $E = E_R(U)$ para algum submódulo uniforme U de E .
4. $E = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}}\right)$ onde \mathfrak{a} é irredutível, isto é, se $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' = \mathfrak{a}$, então, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}$.
5. O anel $\text{End}_R(E)$ dos endomorfismos do R -módulo E é local.

Demonstração. Se E é um módulo injetivo e $0 \neq M \subseteq E$, então, toda extensão essencial de M está contida em E . Em particular, $E_R(M) \subseteq E$, donde $E_R(M) = E$, pois E é indecomponível. Deste modo, a condição 1 implica na condição 2.

Se $E = E_R(M)$ para qualquer submódulo não-nulo M de E , então, E é uniforme. Assim, $U = E$ satisfaz a condição 3 quando E satisfaz a condição 2.

Suponha que $E = E_R(U)$ para algum submódulo uniforme U de E e considere um submódulo cíclico V de U , isto é, $V = \frac{R}{\mathfrak{a}}$ para algum ideal \mathfrak{a} de R . Como U é uniforme, temos que U é uma extensão essencial de V . Portanto, $E_R(U)$ é uma extensão essencial de V . Finalmente, se $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' = \mathfrak{a}$, considere os submódulos cíclicos $W = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ e $W' = \frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}}$ de $V \subseteq U$. Se $W \neq 0$, então, $W' = 0$, pois $W \cap W' = 0$ e U é uniforme. Fica demonstrado deste modo que a condição 3 implica na condição 4.

Seja $E = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}}\right)$ onde \mathfrak{a} é irredutível. Observe que o módulo $U = \frac{R}{\mathfrak{a}}$ é uniforme. Considere um elemento não-invertível $\alpha \in \text{End}_R(E)$. Então, $\ker \alpha \neq 0$, pois caso contrário, $E \cong \text{im } \alpha \subsetneq E$, o que é absurdo, pois E é injetivo. Assim, $U \cap \ker \alpha \neq 0$. Considerando outro elemento não-invertível $\beta \in \text{End}_R(E)$, obtemos igualmente que

$U \cap \ker \beta \neq 0$. Logo, $\ker \alpha + \beta \supseteq \ker \alpha \cap \ker \beta \supseteq (U \cap \ker \alpha) \cap (U \cap \ker \beta) \neq 0$. Portanto, o conjunto dos elementos não-invertíveis de $\text{End}_R(E)$ é um ideal, concluindo assim que a condição 4 implica na condição 5.

Finalmente, se $E = E_1 \oplus E_2$, então, $\text{id}_{E_1} \oplus 0$ e $0 \oplus \text{id}_{E_2}$ são elementos idempotentes de $\text{End}_R(E)$. Assim, a condição 5 implica na condição 1 e o enunciado fica estabelecido. \square

Um módulo (à direita) N é dito *primo* se $\text{Ann}(N') = \text{Ann}(N)$ para todo submódulo não-nulo N' de N . Pode-se demonstrar que o ideal $\text{Ann}(N)$ é primo sob esta condição: de fato, se $ab \in \text{Ann}(N)$ e $a \notin \text{Ann}(N)$, considere $n \in N$ tal que $na \neq 0$. Assim, o submódulo $N' = naR$ de N deve satisfazer $\text{Ann}(N') = \text{Ann}(N)$. Como $b \in \text{Ann}(N')$, a afirmação segue.

Um ideal primo \mathfrak{p} é dito *associado* ao módulo (à direita) M quando $\mathfrak{p} = \text{Ann}(N)$ para algum submódulo primo N de M e o conjunto de ideais primos associados de M é denotado por $\text{Ass}(M)$. Observe que a presente definição de ideal primo associado coincide com a usual no caso comutativo.

Uma das vantagens de considerarmos estas novas definições é a seguinte.

Lema B.16. Se E é uma extensão essencial de M , então, $\text{Ass}(E) = \text{Ass}(M)$. Em particular, $\text{Ass}(E_R(M)) = \text{Ass}(M)$.

Demonstração. Seja H um submódulo primo de E . Então, $H \cap M \neq 0$, donde $\mathfrak{p} = \text{Ann}(H) = \text{Ann}(H \cap M)$. Agora, $H \cap M$ é um submódulo primo de M . Assim, $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$. A recíproca é tranqüila. \square

Se \mathfrak{p} é um ideal primo de um anel comutativo R , então, o R -módulo $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ é uniforme, donde $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ é indecomponível pelo Teorema B.15. Observe que $\text{Ass}_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = \{\mathfrak{p}\}$. De fato, todos os módulos uniformes satisfazem esta condição.

Lema B.17. Todo módulo uniforme possui, no máximo, um ideal primo associado.

Demonstração. Suponha que $\text{Ann}(H_1)$ e $\text{Ann}(H_2)$ são ideais primos associados de um módulo uniforme U , onde H_1 e H_2 são submódulos primos de U . Então, $H_1 \cap H_2 \neq 0$ e $\text{Ann}(H_1) = \text{Ann}(H_1 \cap H_2) = \text{Ann}(H_2)$. \square

O objetivo agora é decompor todo módulo injetivo em indecomponíveis. Isto pode ser feito no contexto comutativo noetheriano e o anel base terá estas características daqui para frente.

Teorema B.18. *Seja E um módulo injetivo não-nulo sobre um anel comutativo noetheriano R . Então, $E \cong \bigoplus_i E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}_i}\right)$ onde cada \mathfrak{p}_i é um ideal primo de R .*

Demonstração. Observe que se E é um módulo injetivo indecomponível, então, $E = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}}\right)$ onde \mathfrak{a} é um ideal irredutível. Demonstraremos que se R é comutativo noetheriano, então, \mathfrak{a} pode ser escolhido como um ideal primo. Seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(E)$. Então, existe um monomorfismo $\frac{R}{\mathfrak{p}} \rightarrow E$. Como E é indecomponível, temos que E é uma extensão essencial de $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ pelo Teorema B.15, donde $E = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$.

Em geral, seja $e \in E$ e considere $\mathfrak{a} = \text{Ann}(e)$. Então, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_s$ onde cada \mathfrak{a}_i é um ideal irredutível (veja [16, página 40]). Logo, $Re = \frac{R}{\mathfrak{a}} \subseteq \frac{R}{\mathfrak{a}_1} \oplus \dots \oplus \frac{R}{\mathfrak{a}_s}$, donde $Re \subseteq E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_1}\right) \oplus \dots \oplus E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_s}\right)$. Como cada \mathfrak{a}_i é irredutível, existem ideais primos \mathfrak{p}_i tais que $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right) = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}_i}\right)$ para cada i pelo argumento anterior e concluimos o enunciado. \square

Deste modo, o conjunto $\left\{E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)\right\}_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R}$ fornece uma lista completa dos módulos injetivos indecomponíveis sobre o anel comutativo noetheriano R . Assim, dados dois ideais primos, \mathfrak{p} e \mathfrak{q} , de R , teremos que $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)$ se, e somente se, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$: de fato, se $x \in \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$, então, a multiplicação por x é um automorfismo em $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)$ e não é um automorfismo em $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$.

Extensões essenciais e injetividade são preservadas via localização.

Lema B.19. Considere um conjunto multiplicativo S de um anel comutativo noetheriano R . Se E é um R -módulo injetivo, então, $S^{-1}E$ é injetivo como $S^{-1}R$ -módulo e como R -módulo.

Demonstração. Se \mathfrak{a} é um ideal de $S^{-1}R$, então, $\mathfrak{a} = S^{-1}\mathfrak{b}$ para algum ideal \mathfrak{b} de R . Temos a sequência exata $\text{Hom}_R(R, E) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{b}, E) \rightarrow 0$. Como $S^{-1}(-)$ é um funtor exato da categoria dos R -módulos à categoria dos $S^{-1}R$ -módulos, obtemos a sequência exata $S^{-1}\text{Hom}_R(R, E) \rightarrow S^{-1}\text{Hom}_R(\mathfrak{b}, E) \rightarrow 0$. Agora, como R é noetheriano, todos seus ideais são de apresentação finita e a sequência anterior transforma-se em $\text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R, S^{-1}E) \rightarrow \text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}\mathfrak{b}, S^{-1}E) \rightarrow 0$ via isomorfismos naturais (veja [1, Proposition 12.21]). Deste modo, $S^{-1}E$ é um $S^{-1}R$ -módulo injetivo pelo Critério de Baer.

Finalmente, considere dois R -módulos $M \subseteq N$ e um homomorfismo de R -módulos $\lambda : M \rightarrow S^{-1}E$. O homomorfismo canônico $\psi : S^{-1}E \rightarrow S^{-1}E$ é um isomorfismo de $S^{-1}R$ -módulos. Deste modo, $\psi^{-1}S^{-1}\lambda : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}E$ é um homomorfismo de $S^{-1}R$ -módulos. Agora, existe um homomorfismo de $S^{-1}R$ -módulos $\mu' : S^{-1}N \rightarrow S^{-1}E$ que estende $\psi^{-1}S^{-1}\lambda$. Deste modo, o homomorfismo canônico $\theta : N \rightarrow S^{-1}N$ induz um homomorfismo de R -módulos $\mu'\theta : N \rightarrow S^{-1}E$ que estende λ concluindo que $S^{-1}E$ é também R -injetivo. \square

Lema B.20. Seja S um conjunto multiplicativo de um anel comutativo noetheriano R e considere um homomorfismo de R -módulos $f : L \rightarrow M$ tal que $\text{im } f \subseteq M$ é uma extensão essencial. Então, $S^{-1}M$ é uma extensão essencial de $\text{im } S^{-1}f$.

Demonstração. Seja $\frac{x}{s}$ um elemento não-nulo de $S^{-1}M$. Logo, existe $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(Rx)$ tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Assim, $\mathfrak{p} = \text{Ann}(rx)$ para algum $r \in R$, isto é, podemos escolher $r \in R$ de maneira que Rrx seja um R -módulo primo. Como M é uma extensão essencial de $\text{im } f$, existe $r' \in R$ tal que $0 \neq r'rx = f(y)$ para algum $y \in L$. Como Rrx é um R -submódulo primo de Rx , temos que $\text{Ann}(r'rx) = \mathfrak{p}$, donde $0 \neq \frac{r'rx}{1} = \frac{f(y)}{s} = S^{-1}f\left(\frac{y}{s}\right)$. Conclui-se que $S^{-1}M$ é uma extensão essencial de $\text{im } S^{-1}f$. \square

Lema B.21. Considere um conjunto multiplicativo S de um anel comutativo noetheriano R . Então, os $S^{-1}R$ -módulos injetivos indecomponíveis são os módulos $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$, com \mathfrak{p} primo, tais que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

Demonstração. Pelo Teorema B.18, os $S^{-1}R$ -módulos injetivos indecomponíveis são os módulos $E_{S^{-1}R}\left(\frac{S^{-1}R}{S^{-1}\mathfrak{p}}\right)$ onde \mathfrak{p} é um ideal primo de R tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Agora, $E_{S^{-1}R}\left(\frac{S^{-1}R}{S^{-1}\mathfrak{p}}\right) = S^{-1}E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$, pois $S^{-1}E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ é $S^{-1}R$ -injetivo pelo Lema B.19 e uma extensão essencial do $S^{-1}R$ -módulo $S^{-1}\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{S^{-1}R}{S^{-1}\mathfrak{p}}$ pelo Lema B.20. Afirmamos que, quando $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, o R -módulo $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ possui estrutura de $S^{-1}R$ -módulo e, além disso, que é isomorfo ao $S^{-1}R$ -módulo $E_{S^{-1}R}\left(\frac{S^{-1}R}{S^{-1}\mathfrak{p}}\right)$: de fato, a primeira afirmação segue porque a multiplicação por qualquer elemento $s \in S$ é um automorfismo em $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$, ficando definido $\frac{e}{s} = \mu_s^{-1}(e)$ para cada $e \in E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ e cada $s \in S$. Quanto à segunda afirmação, note que a estrutura de $S^{-1}R$ -módulo em $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ é única (veja [1, Proposition 12.1]). Deste modo, $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = S^{-1}E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = E_{S^{-1}R}\left(\frac{S^{-1}R}{S^{-1}\mathfrak{p}}\right)$ e conclui-se o requerido. \square

Proposição B.22. Seja \mathfrak{p} um ideal primo de um anel comutativo noetheriano R e considere os módulos $E = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ e $\kappa(\mathfrak{p}) = \text{Frac}\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}$. Então, $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), E) = \kappa(\mathfrak{p})$ e $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}\left(\kappa(\mathfrak{p}), E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}}\right) = 0$ para todo ideal primo $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$.

Demonstração. Observe que $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), E) = (0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$. Afirmamos que $(0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) = \kappa(\mathfrak{p})$: de fato, $\kappa(\mathfrak{p}) \subseteq (0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ e $(0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ é um $\kappa(\mathfrak{p})$ -espaço vetorial, donde $\kappa(\mathfrak{p})$ é somando direto de $(0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$. Por outro lado, E é extensão essencial de todos seus submódulos não-nulos pelo Lema B.21. Assim, $(0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) = \kappa(\mathfrak{p})$.

Para o segundo isomorfismo, consideremos primeiro um ideal primo $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Assim, $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}}$ é uma extensão essencial de $\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}} = 0$ pelo Lema B.20. Se $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, então, $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}\left(\kappa(\mathfrak{p}), E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}}\right) = (0 :_{E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) = (0 :_{E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$, a última igualdade

vinda do Lema B.21. Se $(0 :_{E_R(\frac{R}{\mathfrak{q}}} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) \neq 0$, então, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, pois $\text{Ass}\left(E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)\right) = \{\mathfrak{q}\}$ pelo Lema B.16. \square

Referências Bibliográficas

- [1] A. ALTMAN AND S. KLEIMAN, *A Term of Commutative Algebra*, World Center of Mathematics, (2013).
- [2] S. ANNIN, *Attached prime over noncommutative rings*, Journal of Pure and Applied Algebra 212 (2008) 510–521.
- [3] J. A'ZAMI, *On the Attached Prime Ideals of Local Cohomology Modules*, Communications in Algebra 41 (2013), 3648–3651.
- [4] H. BASS, *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Z. 82 (1963), 8-28.
- [5] H. BORGES E E. TENGAN, *Álgebra comutativa em quatro movimentos*, Rio de Janeiro, IMPA, 2015.
- [6] M. BRODMANN AND R. Y. SHARP, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge Univ. Press, 60, Cambridge, (1998).
- [7] A. GROTHENDIECK, *Eléments de géométrie algébrique*, Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math. 20 (1964).
- [8] R. HARTSHORNE, *Cohomological dimension of algebraic varieties*, Ann. of Math. 88 (1968) 403-450.
- [9] M. HELLUS, *The co-localization of an Artinian module*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 38 (1995), 121-131.
- [10] B. IVERSEN, *Lectures notes on local rings*, World Scientific Publishing, (2014).
- [11] D. KIRBY, *Coprimary decomposition of Artinian modules*, J. London Math. Soc. 6 (1973), 571-576.
- [12] T. LAM, *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 189, Springer (1999).

- [13] I. G. MACDONALD, *Secondary representation of modules over a commutative ring*, in Symposia Mat. 11, Istituto Nazionale di alta Matematica, Roma, (1973), 23-43.
- [14] I. G. MACDONALD AND R. Y. SHARP, *An elementary proof of the non-vanishing of certain local cohomology modules*, Quart. J. Math. Oxford 23 (1972), 197-204.
- [15] E. MATLIS, *Injective modules over Noetherian rings*, Pacific J. Math. 8 (1958), 511-528.
- [16] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge Univ. Press, (1986).
- [17] L. MELKERSSON, *On asymptotic stability for sets of prime ideals connected with the powers of an ideal*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 107 (1990), 267-271.
- [18] L. MELKERSSON AND P. SCHENZEL, *The co-localization of an Artinian module*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 38 (1995), 121-131.
- [19] A. OOISHI, *Matlis duality and the width of a module*, Hiroshima Math. J. 6 (1976), 573-587.
- [20] A. S. RICHARDSON, *Co-localization, co-support and local cohomology*, Rocky Mountain J. of Math., 36, 5 (2006), 1679-1703.
- [21] R. Y. SHARP, *Secondary representations for injective modules over commutative Noetherian rings*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 20 (1976), 143-151.
- [22] R. Y. SHARP, *On the attached prime ideals of certain Artinian local cohomology modules*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 24 (1981) 9-14.
- [23] R. Y. SHARP, *Steps in commutative algebra: Second edition*, London Mathematical Society Student Texts 51 (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).