

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Hipersuperfícies com Hessiano Nulo em \mathbb{P}^4

Gérsica Valesca Lima de Freitas

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2013

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Hipersuperfícies com Hessiano Nulo em \mathbb{P}^4

por

Gérsica Valesca Lima de Freitas

sob orientação da

Prof^a Dr^a Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

João Pessoa – PB
Agosto de 2013

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

F866h Freitas, Gérsica Valesca Lima de.
Hipersuperfícies com hessiano nulo em P^4 / Gérsica Valesca
Lima de Freitas.-- João Pessoa, 2013.
66f.
Orientadora: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Hessiano. 3. Mapa polar. 4. GN-
hipersuperfície. 5. Franchetta hipersuperfície.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Hipersuperfícies com Hessiano Nulo em \mathbb{P}^4

por

Gérsica Valesca Lima de Freitas

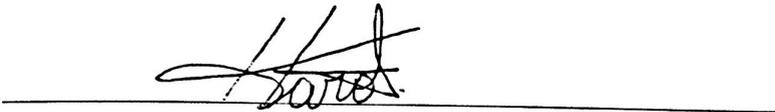
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 15 de agosto de 2013.

Banca Examinadora:


Prof. Dr.ª. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia – UFPB
(Orientador)


Prof. Dr. André Luiz Meireles Araujo – UFPE
(Examinador Externo)


Prof. Dr. Napoleon Caro Tuesta – UFPB
(Examinador Interno)


Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza – UFPB
(Suplente)

Aos meus avós

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais e avôs por saber que sempre posso ter o apoio deles.

Aos meus professores que sempre estiveram prontamente e pacientemente me auxiliado nessa caminhada. Em especial a minha orientadora Prof^a Dr^a Jacqueline Rojas que não mediu esforços para me ajudar a concluir essa etapa e se tornou alguém muito especial pra mim.

Ao meu namorado Luan Diego por estar comigo me ajudando a seguir em frente sempre. Eu sei que ele foi um presente de Deus.

Por último e não menos importante a meus amigos que fazem um papel fundamental na minha existência. Obrigada Luan, Eudes Mendes, Eudes Lima, Danilo, Ricardo Burity, Ricardo Pinheiro, Maicon, Lily, Rafael, Nacib, Mariana, Tony, Mônica, Mylenna, Wanderson... Essas pessoas e algumas outras foram anjos que Deus me mandou para preencher meu coração. Elas com toda excelência fizeram melhor e tomaram conta de tudo.

“Aos seus amados Ele o dá enquanto dormem.”

Salmos 127: 2

Resumo

Hesse afirmou em [9] que uma hipersuperfície projetiva irredutível em \mathbb{P}^n definida por uma equação com hessiano nulo necessariamente é um cone. Gordan e Noether provaram em [6] que isso é verdade para $n \leq 3$ e exibiram contra-exemplos para cada $n \geq 4$. Gordan-Noether e Franchetta deram uma classificação das hipersuperfícies em \mathbb{P}^4 com hessiano nulo e que não são cones, ver [6] e [3]. Aqui vamos dar uma abordagem geométrica à classificação das hipersuperfícies com hessiano nulo em \mathbb{P}^4 proposta por Gordan-Noether, seguindo as linhas de Garbagnati-Reppeto em [4].

Palavras-chave: Hessiano, Mapa polar, GN-hipersuperfície, Franchetta hipersuperfície

Abstract

Hesse claimed in [9] that an irreducible projective hypersurface in \mathbb{P}^n defined by an equation with vanishing hessian determinant is necessarily a cone. Gordan and Noether proved in [6] that this is true for $n \leq 3$ and constructed counterexamples for every $n \geq 4$. Gordan-Noether and Franchetta gave a classification of hypersurfaces in \mathbb{P}^4 with vanishing hessian and which are not cones, see [6] and [3]. Here we give a geometric approach to the classification proposed by Gordan-Noether, providing a classification of hypersurfaces with zero Hessian in \mathbb{P}^4 , following the lines of Garbagnati-Reppeto in [4].

Keywords: Hessian, polar Map, GN-hypersurface, Franchetta hypersurface .

Sumário

Introdução	xii
1 Famílias de Hipersuperfícies com Hessiano Nulo	1
1.1 Hessiana	1
1.2 Cones em \mathbb{P}^n	2
1.2.1 Descrição das Hipersuperfícies que são Cones em \mathbb{P}^4	7
1.3 Gordan-Noether Hipersuperfícies	9
1.4 Francheta Hipersuperfície em \mathbb{P}^4	12
2 Dualidade e Mapa Polar	20
2.1 Dual de Variedades Projetivas	20
2.2 Mapa Polar	23
3 Classificação das hipersuperfícies com hessiano nulo em \mathbb{P}^4	33
3.1 Classificação de hipersuperfícies em \mathbb{P}^4 com Hessiano nulo	36
A Miscelânea de geometria algébrica	39
A.1 Variedades	39
A.1.1 Espaços Tangentes e Dimensão de uma Variedade Projetiva	41
A.1.2 Variedades Lineares Geradas	43
A.1.3 Mudança de Coordenada Projetiva	43
A.2 Mapas Regulares, Racionais e Tópicos Afins	44
A.2.1 Multiplicidade de uma Hipersuperfície em \mathbb{P}^n	46
B Biografias	49
B.1 Ludwig Otto Hesse (1811-1874)	49
B.2 Paul Albert Gordan (1837-1912)	49
B.3 Max Noether (1844-1921)	50
B.4 Alfredo Franchetta (1916-2011)	52
Referências Bibliográficas	53

Introdução

Se $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n$ é um cone, então o polinômio $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ depende, a menos de mudança de coordenadas projetivas, de no máximo n variáveis. Concluímos que o hessiano de X é identicamente nulo, pois uma coluna da matriz hessiana é toda nula. As hipersuperfícies com Hessiano nulo inicialmente foram estudadas por O. Hesse, que acreditava tê-las caracterizado como cones, isto é, uma hipersuperfície X tem hessiano nulo se, e somente se, X é um cone. Os dois artigos publicados com as conclusões de Hesse são [9] em 1851 e [10] em 1857. Entretanto a recíproca é falsa, isto é, existem exemplos de hipersuperfícies com hessiano nulo que não são cones.

Gordan e Noether em 1876, vinte e cinco anos após a primeira afirmação de Hesse, escreveram o histórico artigo [6] apontando o erro de Hesse. Nesse artigo eles provaram que a afirmação é verdadeira em \mathbb{P}^3 e exibiram uma família infinita de exemplos de hipersuperfícies em \mathbb{P}^4 que não são cones e cujo hessiano é identicamente nulo. Ditas hipersuperfícies levaram seus nomes em homenagem aos mesmos. Eles observaram que Hesse estava certo para $n \leq 3$ e que em geral para $n \geq 4$ a afirmação não é verdadeira.

Franchetta em 1954, setenta e oito anos após o artigo de Gordan e Noether deu uma classificação das hipersuperfícies de \mathbb{P}^4 que não são cones e cujo hessiano é identicamente nulo em [2] e [3]. A classificação dada por Franchetta é nitidamente independente, já que ele usa técnicas mais geométricas diferenciando o seu trabalho ao de Gordan e Noether, que faz uma construção mais algébrica.

Quando considerado o caso de hipersuperfícies cúbicas com hessiano nulo foi obtido por Perazzo em [16], uma classificação em \mathbb{P}^4 , \mathbb{P}^5 e \mathbb{P}^6 . Além dos trabalhos acima citados, houve também contribuições para o tema nos seguintes artigos: Permutti (1957, 1964), [17], [18], [19], Zak (2004), [22], Ciliberto, Russo e Simis (2008), [1]. A classificação das hipersuperfícies de hessiano nulo em \mathbb{P}^n com $n \geq 5$ ainda está em aberto.

O artigo [4], sobre o qual este texto trata, tem por meta traduzir em termos mais geométricos a classificação das hipersuperfícies com hessiano nulo em \mathbb{P}^4 dada por Gordan e Noether, usando algumas ideias e resultados contidos em [6], e [11] e o recente artigo [1]. Também descreve brevemente o contra exemplo no espaço projetivo de dimensão 4 produzido por Gordan e Noether.

Estrutura do Texto

Tendo em vista que um de nossos objetivos é classificar as hipersuperfícies com hessiano nulo em \mathbb{P}^4 , em especial a caracterização das hipersuperfícies em \mathbb{P}^4 com hessiano nulo que não são cones. Então dividimos nosso trabalho em três capítulos, nos quais incumbimos o primeiro capítulo para o estudo de cones e os dois últimos para o estudo de hipersuperfícies de hessiano nulo que não são cones.

O primeiro capítulo é fracionado em quatro seções. Nas duas primeiras seções vamos dar as definições “básicas” dos conceitos que serão utilizados em nosso trabalho e exibir uma descrição das hipersuperfícies que são cones em \mathbb{P}^4 . Sendo nossa definição de cone bem geométrica mostramos uma caracterização para a definição de cone mais algébrica. Na terceira seção a partir da construção dos polinômios de Gordan e Noether encontramos as hipersuperfícies dos mesmos, denotadas por GN-hipersuperfícies, que em geral não são cones, mas possuem hessiano nulo. Na última seção desse capítulo apresentamos as hipersuperfícies de Franchetta, \mathcal{F} -hipersuperfícies, que possuem uma definição totalmente geométrica. Já visando nosso objetivo mostramos que em \mathbb{P}^4 essas duas famílias de hipersuperfícies são equivalentes. Assim, concluímos que em \mathbb{P}^4 as hipersuperfícies de hessiano nulo são cones ou \mathcal{F} -hipersuperfícies.

Agora, visando nosso objetivo, o qual já tem duas equivalências provadas, deixamos o segundo capítulo para introduzir o conceito de variedade dual e mapa polar de uma hipersuperfície. Nesse capítulo colocamos resultados gerais desses dois assuntos e observações voltadas para a demonstração da caracterização de Franchetta. O leitor que já se aprofundou nesses tópicos pode pular esse capítulo.

O último capítulo foi deixado especialmente para, os resultados usados na prova do Teorema principal, também chamado de caracterização das hipersuperfícies em \mathbb{P}^4 com hessiano nulo que não são cones, a saber:

Teorema 3.4 Seja $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^4$ uma hipersuperfície irredutível de grau $d \geq 3$ que não é um cone. Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $X = \mathcal{Z}(F)$ tem hessiano nulo.
- (ii) $X = \mathcal{Z}(F)$ é uma Franchetta hipersuperfície.
- (iii) $X = \mathcal{Z}(F)$ é uma GN-hipersuperfície geral do tipo $(4, 2, 1, s)$, com $\mu = \left[\frac{d}{s} \right]$, que tem um plano de multiplicidade $d - \mu$.

Como o ambiente do Teorema principal é \mathbb{P}^4 , deixamos nesse capítulo resultados que são válidos especificamente em \mathbb{P}^4 .

Gostaríamos de deixar claro ao leitor que em todo momento estamos trabalhando com espaços projetivos sobre o corpo dos números complexos, isto é, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$, já que sua completude é indispensável.

Por fim, o nosso Apêndice A é composto de breves comentários sobre tópicos utilizados no decorrer da dissertação. Muitos dos resultados não são provados, mas indicamos literaturas nas quais podemos encontrá-los. Comentamos assuntos básicos sobre variedades projetivas e outros mais avançados, mas que devem ser aceitos pelos leitores ainda não familiarizados para uma leitura mais proveitosa. Já no apêndice B nos deleitamos com algumas informações sobre os grandes Matemáticos citados nesse texto.

Notações

- \mathbb{P}^n - Denota o espaço projetivo complexo de dimensão n ;
- \mathcal{P} - Denota o conjunto de polinômios nas variáveis x_0, \dots, x_n e coeficientes complexos;
- \mathcal{P}_d - Denota o subespaço de \mathcal{P} formados pelos polinômios homogêneos de grau d ;
- h_F - Denota o determinante da matriz hessiana associada a F ;
- $\text{Vert}(X)$ - Denota o vértice do cone X ;
- $\ell_{x,y}$ - Denota a reta passando por x e y ;
- $I(X)$ - Denota o ideal associado à variedade X ;
- $\mathcal{T}_p X$ - Denota o espaço tangente à variedade X no ponto $p \in X$;
- \mathbb{T} - Denota uma mudança de coordenadas projetivas (Mcp);
- $\frac{\partial h}{\partial \psi_j}$ - Denota a derivada de $h \in \mathbb{C}[y_0, \dots, y_m]$ em relação a y_j e avaliada em $\psi_j(\underline{x})$;
- \mathbb{P}^{n*} - Denota o conjunto composto por hiperplanos de \mathbb{P}^n ;
- X^* - Denota o dual da variedade X ;
- $\text{mult}_p(X)$ - Denota a multiplicidade de X em p ;
- $\text{Sing}(X)$ - Denota o conjunto de pontos singulares de X ;
- $G(k+1, \mathbb{C}^{n+1})$ - Denota o conjunto de subespaços de \mathbb{C}^{n+1} de dimensão $k+1$, chamada $(k+1)$ -grassmaniana;
- $\mathbb{G}(k+1, \mathbb{C}^{n+1})$ - Denota o conjunto de subespaços de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ de dimensão $k+1$, chamada $(k+1)$ -grassmaniana projetiva;
- \mathcal{I}_F - Denota o fecho da imagem do mapa polar associado a $\mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^n$, o qual chamaremos de imagem do mapa polar;

- $C(S)$ - Denota o cone afim associado a $S \subseteq \mathbb{P}^n$;
- π_h - Denota a projeção do ponto h ao hiperplano \mathbb{P}^{n-1}

Capítulo 1

Famílias de Hipersuperfícies com Hessiano Nulo

1.1 Hessiana

Tendo em consideração que o objetivo desta dissertação é classificar as hipersuperfícies irredutíveis e reduzidas em \mathbb{P}^4 que tem hessiano nulo. Iniciamos esta seção dando a definição de Hessiano e mostrando que se o Hessiano for nulo ele permanecerá nulo após uma mudança de coordenadas projetiva. Axiomatizamos que a partir desse momento todas as variedades são reduzidas, a menos de menções contrárias.

Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Denotaremos por h_F o hessiano polinomial de F , o qual é definido pelo determinante da matriz Hessiana associada a F , ou seja,

$$h_F = \det[Hess(F)] := \det\left(\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=0,\dots,n}\right).$$

Teorema 1.1. *Sejam $F \in P_d$ não nulo, com $d \geq 1$, e $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$. Então $[Hess(T_d F)] = [T^{-1}]^t [Hess(F)] [T^{-1}]$, veja o apêndice para entender as notações.*

Demonstração. Considere o seguinte diagrama

$$\mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{T^{-1}} \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{F} \mathbb{C}.$$

As aplicações,

$$(T^{-1})' : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}^{n+1})$$

e

$$(T^{-1})'' : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathfrak{L}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}^{n+1})),$$

induzem para todo $c \in \mathbb{C}^{n+1}$ as seguintes aplicações

$$(\mathbb{T}^{-1})'(c) : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

e

$$(\mathbb{T}^{-1})''(c) : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}.$$

Usando a regra da cadeia e o fato da derivada da aplicação linear $(\mathbb{T}^{-1})'(c)$ ser \mathbb{T}^{-1} , temos:

$$(F \circ \mathbb{T}^{-1})''(c)(u, v) = F''_{\mathbb{T}^{-1}(c)}((\mathbb{T}^{-1})'(c)(u), (\mathbb{T}^{-1})'(c)(v)),$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$. Sendo $(F \circ \mathbb{T}^{-1})''(c)$ uma aplicação bilinear e \mathbb{T}^{-1} uma aplicação linear, temos da álgebra linear que as matrizes das aplicações na base canônica satisfazem:

$$[Hess(\mathbb{T}_d F)] = [(F \circ \mathbb{T}^{-1})''(c)] = [\mathbb{T}^{-1}]^t [Hess(F)] [\mathbb{T}^{-1}],$$

onde $\mathbb{T}_d F = F \circ \mathbb{T}^{-1}$. □

Corolário 1.2. Seja $F \in P_d$ não nulo, com $d \geq 1$. Então $h_F = 0$ se, e somente se, $h_{\mathbb{T}_d F} = 0$, para todo $\mathbb{T} \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$.

Demonstração. Do teorema acima temos,

$$\det[Hess(\mathbb{T}_d F)] = \det[\mathbb{T}^{-1}]^t \det[Hess(F)] \det[\mathbb{T}^{-1}].$$

Logo,

$$h_{\mathbb{T}_d F} = 0 \text{ se, e somente se, } h_F = 0,$$

já que $\det[\mathbb{T}^{-1}] \neq 0$. □

Exemplo 1.1. Seja X um hipersuperfície quádrlica singular em \mathbb{P}^n , pela classificação das quádrlicas sabemos que, a menos de mudança de coordenadas X é o conjunto dos zeros de um polinômio da seguinte forma $\sum_{i=0}^k x_i^2$, para algum $k < n$. Logo $h_{\mathbb{T}_d F} = 0$, e pelo corolário 1.2 $h_F = 0$. Concluimos também que, $h_F = 0$ se, e somente se, X é uma quádrlica singular.

1.2 Cones em \mathbb{P}^n

Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades e $S_{X,Y}^0 := \{(x, y, z), x \neq y : z \in \langle x, y \rangle\} \subset X \times Y \times \mathbb{P}^n$. Defina por $S_{X,Y}$ seu fecho em $X \times Y \times \mathbb{P}^n$, chamamos esse conjunto de "Join abstract" de X e Y . Considere a projeção de $S_{X,Y}$ para os fatores $X \times Y$ e \mathbb{P}^n ,

$$\begin{array}{ccc}
 & S_{X,Y} & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 X \times Y & & \mathbb{P}^n.
 \end{array}$$

O "Join" de X e Y , $S(X, Y)$ é a imagem por p_2 do "Join Abstract", isto é,

$$S(X, Y) = p_2(S_{X,Y}) = \overline{\bigcup_{x \neq y, x \in X, y \in Y} \langle x, y \rangle} \subseteq \mathbb{P}^n,$$

onde $\langle x, y \rangle$ é a reta passando por x e y .

Definição 1.1. Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade p um ponto em \mathbb{P}^n . Dizemos que p pertence ao *vértice* de X se, e somente se, $X = S(p, X)$. Chamaremos o conjunto de todos os pontos satisfazendo a condição acima de *vértice de X* e o denotaremos por $\text{Vert}(X)$, isto é,

$$\text{Vert}(X) = \{p \in X \mid X = S(p, X)\}.$$

Definição 1.2. Seja X uma variedade projetiva em \mathbb{P}^n . Dizemos que X é um *Cone* se existe $p \in X$ de modo que $S(p, X) = X$, isto é, $\text{Vert}(X) \neq \emptyset$. Geometricamente isto significa que dado $x \in X$, $x \neq p$, a reta $\langle p, x \rangle$ está contida em X .

Exemplo 1.2. Seja $F(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ irredutível, com $0 \leq k \leq n - 1$, e assumamos que não existe uma mudança de coordenadas projetiva em \mathbb{P}^n que permita diminuir o número de variáveis que aparecem em F . Vamos mostrar que $X = \mathcal{Z}(F)$ em \mathbb{P}^n é um cone. Considere as subvariedades de \mathbb{P}^n , $\Lambda = \mathcal{Z}(x_0, \dots, x_k)$, $H = \mathcal{Z}(x_{k+1}, \dots, x_n)$ e $Y = X \cap H$.

Afirmção 1.1. $X = \bigcup_{x \in \Lambda, y \in Y} \ell_{x,y}$

De fato, seja $a \in X$. Caso $a \in \Lambda$ ou $a \in H$, nada temos a fazer. Suponhamos que $a \notin \Lambda$ e $a \notin H$, e definamos $\Lambda_1 = \langle \Lambda, a \rangle$. Note que $\dim \Lambda_1 = n - k$ e $\dim H = k$. Assim, $\Lambda_1 \cap H \neq \emptyset$. Considere $p \in \Lambda_1 \cap H$. Como $\Lambda_1 = \mathbb{P}([e_{k+1}, \dots, e_n, \tilde{a}])$, com $\tilde{a} = (a_0, \dots, a_n)$ e $a = [\tilde{a}]$, temos $p = [ta_0 : \dots : ta_k : p_{k+1} + ta_{k+1} : \dots : p_n + ta_n]$. Além disso, $p \in H$, donde $p = [ta_0 : \dots : ta_k : 0 : \dots : 0]$. Logo, $F(p) = t^d F(a) = 0$. Daí, $p \in Y = H \cap X$. Do fato de $a \notin H$, temos que $a \neq p$. A partir de um simples cálculo, observando a definição de Λ_1 percebemos que $\ell_{a,p} \subset \Lambda_1$. Agora faz sentido calcular a dimensão de $\ell_{a,p} \cap \Lambda$ em Λ_1 , a qual é não negativa. Seja $x \in \ell_{a,p} \cap \Lambda$, então $a \in \ell_{x,p} = \ell_{a,p}$. Logo, $X \subseteq \bigcup_{x \in \Lambda, y \in Y} \ell_{x,y}$.

Para a outra inclusão, seja $a \in \ell_{x,y}$, com $x \in \Lambda$ e $y \in Y = X \cap H$. Se $a = x$ ou $a = y$, então $a \in X$, pois $\Lambda \subseteq X$ e $y \in Y = X \cap H$, respectivamente. Caso contrário, $a = [ty_0 : \dots : ty_t : sx_{k+1} : \dots : sx_n]$, $[s : t] \in \mathbb{P}^1$. Daí, $F(a) = t^d F(y) = 0$. Portanto, $a \in X$.

Finalmente mostraremos que X é um cone a partir da afirmação 1.1. Considere $q = [0 : \dots : 0 : q_{k+1} : \dots : q_n] \in \Lambda$. Claramente, $X \subseteq \bigcup_{q \neq x, x \in X} \langle x, q \rangle \subseteq \overline{\bigcup_{q \neq x, x \in X} \langle x, q \rangle}$. Logo, precisamos provar apenas a outra inclusão. Seja $a \in \ell_{x,q} \subset \bigcup_{q \neq x, x \in X} \langle x, q \rangle$, então se $a = x$ ou $a = q$ não temos nada a fazer. Suponhamos que exista $[s : t] \in \mathbb{P}^1$ tal que $a = [sx_0 : \dots : sx_k : sx_{k+1} + tq_{k+1} : \dots : sx_n + tq_n]$, então $F(a) = s^d F(x) = 0$. Assim, $\bigcup_{q \neq x, x \in X} \langle x, q \rangle \subseteq X$. Logo, $\overline{\bigcup_{q \neq x, x \in X} \langle x, q \rangle} \subseteq \overline{X} = X$. Portanto, X é um cone.

Por completude do exemplo vamos determinar o vértice da variedade X . Como $X = S(q, X)$, para todo $q \in \Lambda$, concluímos que $\Lambda \subseteq \text{Vert}(X)$. Suponha $\Lambda \subsetneq \text{Vert}(X)$. Seja $p \in \text{Vert}(X) \setminus \Lambda$, então $p = [p_0 : \dots : p_k, : p_{k+1} : \dots : p_n]$, $p_j \neq 0$, para algum $j \in \{0, \dots, k\}$. Considere $\tilde{p} = [p_0 : \dots : p_k : 0 : \dots : 0] \in H$, então $\tilde{p} \in Y = X \cap H$. Logo, para todo $a \in U \subset H$, U algum aberto, podemos escolher ℓ_a , reta passando por $\tilde{p} \in H \cap X$, tal que $\sharp(\ell_a \cap Y) \geq 2$. Seja $b \in \ell_a \cap Y$, então $a \in \ell_a = \ell_{\tilde{p}, b} \subset X$, pois $\ell_{p, b} \subset X$. Logo, $a \in X$. Assim, $\overline{U} = H \subseteq X$ e por consequência $F \in I(H) = \langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle$. Absurdo. Portanto, $\text{Vert}(X) = \Lambda$.

No próximo exemplo observamos que em \mathbb{P}^3 a união de um número finito de planos, contendo um reta ℓ , é um cone tendo a reta ℓ por vértice.

Exemplo 1.3. Seja $f = \prod_{i=1}^k (a_i x_0 + b_i x_1)$, com $[a_i : b_i] \in \mathbb{P}^1$, e fixe a reta $\ell = \mathcal{Z}(x_0, x_1) \subset \mathbb{P}^3$. Considerando $X = \mathcal{Z}(f) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{Z}(a_i x_0 + b_i x_1)$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{Z}(a_i x_0 + b_i x_1)$ é um plano em \mathbb{P}^3 contendo a reta ℓ . Temos:

Poderíamos usar simplesmente o Exemplo 1.2 e concluirmos que X é um cone. Entretanto, vamos mostrar isto a partir da definição para facilitar o encontro do vértice. Assim nossa primeira tarefa é mostrar que existe $p \in X$ tal que $X = \overline{\bigcup_{p \neq q, q \in X} \ell_{p,q}}$.

Afirmação 1.2. $X = S(q, X)$, para todo $q \in \ell$.

De fato, seja $p = [0 : 0 : a : 1] \in X$, então claramente $X \subseteq \overline{\bigcup_{p \neq q, q \in X} \ell_{p,q}}$. Para a outra inclusão, seja $w \in \bigcup_{p \neq q, q \in X} \ell_{p,q}$, então existe $q \in X$ tal que $w \in \ell_{p,q}$, com $p \neq q$.

Como, $w = [tq_0 : tq_1 : tq_2 + sa : tq_3 + s]$, para algum $[s : t] \in \mathbb{P}^1$, temos $f(w) = \prod_{i=1}^k (a_i q_0 + b_i q_1) = 0$, pois $q \in X$. Donde, $w \in X$. Passando o fecho obtemos assim a igualdade.

Afirmação 1.3. $\text{Vert}(X) = \ell$

Pela afirmação 1.2 vemos que $\ell \subseteq \text{Vert}(X)$. Por outro lado, suponhamos que exista $p \in \text{Vert}(X) \setminus \ell$, então $X = \bigcup_{p \neq q, q \in X} \ell_{p,q}$. Podemos considerar $q \in \mathcal{Z}_j := \mathcal{Z}(a_j x_0 + b_j x_1)$, para algum

$j \in \{1, \dots, k\}$, de forma que $p \notin \mathcal{Z}_j$. Mostraremos que $\ell_{p,q} \not\subseteq X$. Efetivamente, se $\ell_{p,q} \subseteq X$, então $w_{st} = [sq_0 + tp_0 : \dots : sq_3 + tp_3] \in X$, para todo $[s : t] \in \mathbb{P}^1$. Logo existem, no mínimo, $[s_1 : t_1], [s_2 : t_2] \in \mathbb{P}^1$ tais que $w_{s_1 t_1}, w_{s_2 t_2} \in \mathcal{Z}_\alpha = \mathcal{Z}(a_\alpha x_0 + b_\alpha x_1)$, para algum $\alpha \in \{1, \dots, k\}$. Donde, $\ell_{p,q} \subseteq \mathcal{Z}_\alpha$. Absurdo, pois p e q estão em planos diferentes. Assim, chegamos que $\text{Vert}(X) \setminus \ell = \emptyset$.

Proposição 1.1. Seja $X = \mathcal{Z}(F)$ uma variedade projetiva de dimensão d , então

$$\text{Vert}(X) = \mathbb{P}^\ell \subseteq \bigcap_{p \in X} \mathcal{T}_p X,$$

onde $\mathcal{T}_p X = \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) x_i\right)$.

Demonstração. Veja Proposição 1.2.6, p. 11 em [20]. □

O próximo resultado caracteriza hipersuperfícies irredutíveis que são cones em \mathbb{P}^n .

Proposição 1.2. Seja $X = \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície irredutível de grau d . São equivalentes:

(i) Existe uma mudança de coordenadas projetiva \mathbb{T} em \mathbb{P}^n tal que $T_d F$ é um polinômio onde comparecem no máximo n variáveis.

(ii) Existe $H \subseteq \mathbb{P}^n$ um hiperplano e $p \notin H$ tal que $X = \bigcup_{q \in S} \ell_{p,q}$, onde $S = X \cap H$ e $\dim S = n - 2$.

(iii) $X = \mathcal{Z}(F)$ é um cone, isto é, existe um $p \in X$ tal que $X = \overline{\bigcup_{p \neq q, q \in X} \ell_{p,q}}$.

Demonstração. (i) \Leftrightarrow (ii) Suponha que existe uma Mcp \mathbb{T} tal que $T_d F = f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n-1}]$. Consideramos $H = \mathcal{Z}(x_n)$ e $p = [0 : \dots : 0 : 1] \in \mathbb{P}^n$. A seguir provaremos que $\mathcal{Z}(f) = \bigcup_{q \in S} \ell_{p,q}$, onde $S = \mathcal{Z}(f) \cap H$:

(I) Seja $r \in \mathcal{Z}(f)$. Se $r = p$ ou $r \in H$, nada temos a provar.

Caso contrário, $r \notin H$ e $r \neq p$. Logo $\ell_{p,r} \cap H = \{q\}$. Assim, seja $r = [v]$ com $v = (r_0, \dots, r_n)$. Sabemos que $\ell_{p,r} = \{[\alpha v + \beta e_{n+1}] \mid [\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1\}$. Donde, existe $[s : t] \in \mathbb{P}^1$ tal que $q = [\alpha v + \beta e_{n+1}]$. Como $q \in H$, temos $q = [\alpha r_0 : \dots : \alpha r_{n-1} : 0]$. Além disso,

$$f(q) = f(\alpha r_0, \dots, \alpha r_{n-1}, 0) = \alpha^d f(r) = 0.$$

Assim, $q \in S$ e $\ell_{p,r} = \ell_{p,q} \subseteq \bigcup_{q \in S} \ell_{p,q}$. Portanto, $\mathcal{Z}(f) \subseteq \bigcup_{q \in S} \ell_{p,q}$.

(II) Seja $r \in \ell_{p,q}$, com $q \in S$. Logo, $q = [q_0 : \dots : q_{n-1} : 0]$. Assim, $r = [\alpha q_0 : \dots : \alpha q_{n-1} : \beta]$, para algum $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$.

Observemos que

$$f(r) = f(\alpha q_0, \dots, \alpha q_{n-1}, \beta) = \alpha^d f(q_0, \dots, q_{n-1}, 0) = \alpha^d f(q) = 0.$$

Donde, $\ell_{p,q} \subseteq \mathcal{Z}(f)$.

Logo,

$$\mathbb{T}(\mathcal{Z}(F)) = \mathcal{Z}(f) = \bigcup_{q \in S} \ell_{p,q}.$$

De onde concluímos que,

$$\mathcal{Z}(F) = \mathbb{T}^{-1}\left(\bigcup_{q \in S} \ell_{p,q}\right) = \bigcup_{\mathbb{T}^{-1}(q) \in \mathbb{T}^{-1}(S)} \mathbb{T}^{-1}(\ell_{p,q}) = \bigcup_{\mathbb{T}^{-1}(q) \in \mathbb{T}^{-1}(S)} \ell_{\mathbb{T}^{-1}(p), \mathbb{T}^{-1}(q)}.$$

Note que da proposição A.5 e A.3 temos: $n-1 \leq \dim S \leq n-2$. Se $\dim S = n-1$, então pelo Teorema A.2 $\mathcal{Z}(f) \cap H = H$. Donde, $\mathcal{Z}(x_n) \subset \mathcal{Z}(f)$ ($H = \mathcal{Z}(x_n)$). Logo, $f = \alpha x_n$, $\alpha \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, e $\alpha \in S_{d-1}$. Absurdo, a variável x_n não comparece em f . Assim, $\dim S = n-2$.

Reciprocamente, seja $H = \mathcal{Z}(h) \subseteq \mathbb{P}^n$ e $p \notin H$. Então do exemplo A.6 existe uma $M_{cp} \mathbb{T} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, tal que $\mathbb{T}(H) = \mathcal{Z}(x_n)$, isto é, $\mathbb{T}_1 h = x_n$, e $\mathbb{T}(p) = [0 : \dots : 0 : 1]$.

Sendo,

$$X = \bigcup_{q \in S} \ell_{p,q},$$

onde $S = X \cap H$ e $\dim S = n-2$. Seja $T_d F = f$. Do fato da mudança de coordenadas projetiva ser um isomorfismo temos:

$$\mathbb{T}(X) = \mathbb{T}(\mathcal{Z}(F)) = \mathcal{Z}(T_d F) = \bigcup_{q_1 \in \mathbb{T}(S)} \ell_{\mathbb{T}(p), q_1},$$

Note que $\tilde{f} = f(x_0, \dots, x_{n-1}, 0) \neq 0$. Caso contrário teríamos $f = \lambda x_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, e $\mathbb{T}(S) = \mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(x_n) = \mathcal{Z}(x_n)$. Logo, $\dim S = n-1$. Absurdo! Assim pela primeira parte concluímos que,

$$\mathcal{Z}(\tilde{f}) = \bigcup_{q \in \tilde{S}} \ell_{\mathbb{T}(p), q},$$

onde $\tilde{S} = \mathcal{Z}(\tilde{f}) \cap \mathcal{Z}(x_n)$. Além disso,

$$\mathbb{T}(S) = \mathcal{Z}(T_d F) \cap \mathcal{Z}(T_1 h) = \mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(x_n) = \mathcal{Z}(\tilde{f}) \cap \mathcal{Z}(x_n) = \tilde{S}.$$

De onde concluímos que, $\mathcal{Z}(T_d F) = \mathcal{Z}(\tilde{f})$ e por conseguinte existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $T_d F = \lambda \tilde{f} \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n-1}]$.

(ii) \Leftrightarrow (iii) Suponha que existem H hiperplano e $p \in X$ tais que $X = \bigcup_{q \in S} \ell_{p,q}$, onde $S = X \cap H$.

Claramente temos a seguinte inclusão:

$$X = \bigcup_{q \in S} \ell_{p,q} \subseteq \bigcup_{p \neq q, q \in X} \ell_{p,q},$$

pois $S \subset X$. Para a outra inclusão, seja $x \in \bigcup_{p \neq q, q \in X} \ell_{p,q}$, então existe $q_1 \in X$ tal que $x \in \ell_{p,q_1}$. Da proposição A.5 sabemos que existe $q \in \ell_{p,q_1} \cap H$. Agora basta mostrarmos que $q \in S$. Note que $\ell_{p,q_1} = \ell_{p,q}$. Logo, $\ell_{p,q} \subset X$. Donde, $q \in X \cap H = S$. Assim, $x \in \ell_{p,q} \subset \bigcup_{q \in S} \ell_{p,q}$ e por consequência

$\bigcup_{p \neq q, q \in X} \ell_{p,q} \subseteq X$. Sendo X um fechado em \mathbb{P}^n , temos da definição de fecho que $\overline{\bigcup_{p \neq q, q \in X} \ell_{p,q}} \subseteq X$. Obtendo a igualdade desejada.

Para a recíproca, basta observarmos que podemos escolher um hiperplano H tal que $p \notin H$ e usando o mesmo argumento acima obtemos $X = \bigcup_{q \in S} \ell_{p,q}$, onde $S = X \cap H$. Além disso, sabemos que $n - 2 \leq \dim S \leq n - 1$. Logo, $\dim S = n - 2$. Caso contrário teríamos $\dim S = n - 1$. Donde pelo Teorema A.2 $X \cap H = X$. Logo, $X \subset H$. Absurdo, pois $p \in X$ e $p \notin H$.

□

Combinando o Corolário 1.2 e a Proposição 1.2 concluímos o resultado a seguir, pois ao menos uma coluna ou linha da matriz hessiana é toda nula:

Corolário 1.3. Seja $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n$ um cone, então $h_F = 0$.

Agora podemos começar a trabalhar em nosso objetivo. Nosso desejo é classificar as hipersuperfícies que possuem Hessiano nulo em \mathbb{P}^4 , após a próxima observação só vamos precisar classificar as hipersuperfícies com grau maior ou igual a 3.

Observação 1.1. Note que, se $d \leq 2$, d é o grau de $\mathcal{Z}(F)$, então a Conjectura de Hesse's é verdadeira para todo $n \geq 1$. De fato, se $d = 1$, então $\mathcal{Z}(F)$ é um hiperplano. Daí, combinando o exemplo A.6 e com a proposição 1.2 acima constatamos que todo Hiperplano é um cone. Por outro lado, se $d = 2$, então $\mathcal{Z}(F)$ é uma hipersuperfície quádrlica. Sendo o Hessiano nulo, temos que a mesma é uma hipersuperfície quádrlica singular. Logo, existe uma mudança de coordenadas que elimina ao menos uma variável. Assim, $\mathcal{Z}(F)$ é um cone pela proposição 1.2.

1.2.1 Descrição das Hipersuperfícies que são Cones em \mathbb{P}^4

Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ um polinômio de grau d e $X = \mathcal{Z}(F)$. Se X é um cone, então existe uma Mcp \mathbb{T} em \mathbb{P}^4 tal que em $T_d F$ comparecem no máximo quatro variáveis. Seja k o número mínimo de variáveis que aparece após realizarmos uma Mcp. Temos:

(I) Para $k = 1$, digamos que $T_d F = \alpha x_0^d$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Logo, $\mathcal{Z}(T_d F) = \mathcal{Z}(x_0)$. Assim, $\mathcal{Z}(T_d F)$ é um hiperplano ou 3–plano. Portanto X é um hiperplano (ou 3–plano) em \mathbb{P}^4 .

(II) Para $k = 2$, podemos a partir do resultado A.1 considerar

$$T_d F = \prod_{i=1}^m (a_i x_1 + b_i x_0)^{d_i},$$

onde $d_1 + \dots + d_m = d$, $[a_i : b_i] \in \mathbb{P}^1$. Note que, $T_d F = \ell_1^{d_1} \dots \ell_m^{d_m}$, onde $m \geq 2$. Caso contrário, $T_d F = \ell_1^{d_1}$. Logo, existe S , Mcp, tal que $S(T_d F) = (S_1 \ell_1)^{d_1} = x_0^{d_1}$. Absurdo, pois supomos $k = 2$. Assim, $T_d F$ é a união de m 3–planos contendo o plano $\mathcal{Z}(x_0, x_1)$.

(III) Para $k = 3$. Se $T_d F$ for redutível, então temos possivelmente a união dos casos anteriores ou o que descreveremos a seguir:

Lema 1.4. Seja $F \in \mathcal{P}_d$ irredutível e $X = \mathcal{Z}(F) \subsetneq \mathbb{P}^4$. São equivalentes:

- (i) Existe uma mudança de coordenadas projetiva $\mathbb{T} : \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$ tal que $T_d F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$.
- (ii) Existe $H \subseteq \mathbb{P}^4$ um 2–plano e $\ell \subset \mathbb{P}^4$ reta tal que $\ell \cap H = \emptyset$ e $X = \bigcup_{q \in \mathbb{C} \text{ e } p \in \ell} \ell_{p,q}$, onde $C = X \cap H$ e $\dim C = 1$.

Demonstração. Sabemos que existe uma Mcp em \mathbb{P}^4 tal que $T_d F = f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. A seguir considere a reta $\ell = \mathcal{Z}(x_0, x_1, x_2)$ e o 2–plano $H = \mathcal{Z}(x_3, x_4)$. Note que $C = H \cap \mathcal{Z}(f)$ é uma variedade projetiva de dimensão 1. Seja $q \in \mathcal{Z}(f)$. Se $q \in \ell$ ou $q \in C$ nada à fazer. Do contrário, $q = [q_0 : \dots : q_4] \in \mathbb{P}^4$ é tal que $[q_0 : q_1 : q_2] \in \mathbb{P}^2$ e $[q_3 : q_4] \in \mathbb{P}^1$, pois $q \notin \ell$ e $q \notin C$, respectivamente. Considere $p = [0 : 0 : 0 : q_3 : q_4] \in \ell$ e $r = [q_0 : q_1 : q_2 : 0 : 0] \in X \cap H$. Assim, $\ell_{p,r} \subseteq \bigcup_{y \in C \text{ e } x \in \ell} \ell_{x,y}$ e $q \in \ell_{p,r}$. Portanto, $q \in \bigcup_{y \in C \text{ e } x \in \ell} \ell_{x,y}$. Para mostrar a outra inclusão, seja $r \in \bigcup_{q \in \mathbb{C} \text{ e } p \in \ell} \ell_{p,q}$. Suponha que $r \in \ell_{p,q}$ com $p = [0 : 0 : 0 : a : b]$ e $q = [\alpha : \beta : \gamma : 0 : 0]$. Assim, $r = [t\alpha : t\beta : t\gamma : sa : sb]$, para algum $[s : t] \in \mathbb{P}^1$. Logo, $f(r) = t^d f(q) = 0$. Portanto $\mathbb{T}(X) = \bigcup_{y \in C \text{ e } x \in \ell} \ell_{x,y}$, de onde concluímos que $X = \bigcup_{q \in \mathbb{C} \text{ e } p \in \ell_1} \ell_{p,q}$, onde $\ell_1 = \mathbb{T}(\ell)$, $C_1 = \mathbb{T}(C) = X \cap \mathbb{T}(H)$.

Reciprocamente, suponha que existe $H \subseteq \mathbb{P}^4$, 2–plano, ℓ uma reta tal que $\ell \cap H = \emptyset$, $C = X \cap H$ tem dimensão 1 e $X = \bigcup_{q \in \mathbb{C}, p \in \ell} \ell_{p,q}$. Usando o mesmo raciocínio do primeiro exemplo observamos que existe uma mudança de coordenadas projetiva \mathbb{T} tal que $\mathbb{T}(\ell) = \mathcal{Z}(x_0, x_1, x_2)$ e $H_1 := \mathbb{T}(H) = \mathcal{Z}(x_3, x_4)$, pois $\ell \cap H = \emptyset$. Seja $T_d F = f$ e $\tilde{f} = f(x_0, x_1, x_2, 0, 0)$. Note que $\tilde{f} \neq 0$. Caso contrário, $H_1 \subseteq \mathcal{Z}(f)$. Daí,

$$\mathbb{T}(H) = H_1 = H_1 \cap \mathcal{Z}(f) = \mathbb{T}(H) \cap \mathcal{Z}(T_d F) = \mathbb{T}(H \cap X).$$

Logo, $H \cap X = H$. Absurdo, pois $\dim C = 1$. Usando a primeira parte do Lema para a hipersuperfície $\mathcal{Z}(\tilde{f})$ e a mesma ideia da prova da Proposição 1.2, temos:

$$\mathcal{Z}(\tilde{f}) = \bigcup_{q \in C_1, p \in \ell_1} \ell_{p,q},$$

onde $\mathbb{T}(\ell) = \ell_1$, $\mathbb{T}(C) = C_1$. Assim, $\mathcal{Z}(\tilde{f}) = \mathcal{Z}(T_d F)$ e por conseguinte existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T_d F = \lambda \tilde{f}$. Portanto, existe uma mudança de coordenadas projetiva \mathbb{T} tal que $T_d F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. □

(IV) Para $k = 4$, temos a união dos casos anteriores ou um cone com vértice um ponto (ver proposição 1.2).

1.3 Gordan-Noether Hipersuperfícies

Nesta seção descrevemos alguns exemplos de hipersuperfícies em \mathbb{P}^n , $n \geq 4$, com Hessiano nulo e que em geral não são cones. A seguir vamos descrever a construção dos GN-polinômios.

Assuma $n \geq 4$, fixe $t \geq m + 1$ tal que $n - 2 \geq t \geq 2$ e $n - t - 1 \geq m \geq 1$. Considere as formas $h_i(y_0, \dots, y_m) \in \mathbb{C}[y_0, \dots, y_m]$, $i = 0, \dots, t$ de mesmo grau, e $\psi_j(x_{t+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_{t+1}, \dots, x_n]$, $j = 0, \dots, m$, também homogêneos de mesmo grau. Introduza os seguintes polinômios homogêneos de mesmo grau.

$$Q_\ell(x_0, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} x_0 & \cdots & x_t \\ \frac{\partial h_0}{\partial \psi_0} & \cdots & \frac{\partial h_t}{\partial \psi_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_0}{\partial \psi_m} & \cdots & \frac{\partial h_t}{\partial \psi_m} \\ a_{1,0}^{(\ell)} & \cdots & a_{1,t}^{(\ell)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t-m-1,0}^{(\ell)} & \cdots & a_{t-m-1,t}^{(\ell)} \end{vmatrix},$$

onde $\ell = 1, \dots, t - m$. Note que $a_{u,v}^{(\ell)} \in \mathbb{C}$ para $u = 1, \dots, t - m - 1$, $v = 1, \dots, t$ e, $\frac{\partial h_i}{\partial \psi_j}$ denota a derivada em relação a y_j e avaliada em $\psi_j(x_{t+1}, \dots, x_n)$ com $i = 0, \dots, t$ e $j = 0, \dots, m$. Considere s o grau comum dos polinômios Q_ℓ . Tomando a expansão de Laplace ao longo da primeira linha da matriz obtemos: $Q_\ell(x_0, \dots, x_n) = M_{\ell,0}x_0 + \dots + M_{\ell,t}x_t$, onde $M_{\ell,i}$, $\ell = 1, \dots, t - m$, $i = 0, \dots, t$, são polinômios homogêneos de grau $s - 1$ em x_{t+1}, \dots, x_n . Fixe um inteiro $d > s$ e tome $\mu = \left\lceil \frac{d}{s} \right\rceil$. Fixe biformas $P_k(z_1, \dots, z_{t-m}; x_{t+1}, \dots, x_n)$ de bigrau $(k, d - ks)$, $k = 0, \dots, \mu$, respectivamente. Finalmente defina,

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{\mu} P_k(Q_1, \dots, Q_{t-m}; x_{t+1}, \dots, x_n),$$

forma de grau d em x_0, \dots, x_n . O polinômio f é chamado um *Gordan-Noether polinômio* (*GN-polinômio*) do tipo (n, t, m, s) , e assim também qualquer um que pode ser obtido a partir dele por mudança de coordenadas projetiva.

Dizemos que uma hipersuperfície $\mathcal{Z}(f)$ é uma *GN-hipersuperfície* do tipo (n, t, m, s) se f é um GN-polinômio do tipo (n, t, m, s) .

Exemplo 1.4. Vamos determinar um GN-polinômio em \mathbb{P}^4 . Logo, da construção acima obtemos $n = 4$, $t = 2$ e $m = 1$. Considere, $h_0(y_0, y_1) = \frac{1}{2}y_0^2$, $h_1(y_0, y_1) = y_0y_1$, $h_2(y_0, y_1) = \frac{1}{2}y_1^2$, $\psi_0(x_3, x_4) = x_3$ e $\psi_1(x_3, x_4) = x_4$. Então, $\ell = 1$ e

$$Q_1(x_0, \dots, x_4) := \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = x_0x_4^2 + x_1x_3x_4 + x_2x_3^2.$$

Donde, $s = 3$. Se $d = 4$, então $\mu = 1$. Tome, $P_0 = x_3x_4^3$ e $P_1 = z_1x_3$. Assim,

$$f(x_0, \dots, x_4) = x_3x_4^3 + x_0x_3x_4^2 + x_1x_3^2x_4 + x_2x_3^3,$$

será um GN-polinômio do tipo $(4, 2, 1, 3)$. Note que $h_f = 0$, e $\mathcal{Z}(f)$ não é um cone. De fato, suponha que $X = \mathcal{Z}(f)$ seja um cone, então pelo Teorema 2.2 temos que X^* é degenerada. Logo, $X^* \subseteq \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H} = \mathcal{Z}(a_0z_0 + \dots + a_4z_4)$ é um hiperplano com a_i 's números complexos não todos nulos. Assim, $\mathcal{T}_pX = \mathcal{Z}\left(\sum_{k=0}^4 \frac{\partial f}{\partial x_k}(p)x_k\right) = \mathcal{H}$, ou seja, $a_0\frac{\partial f}{\partial x_0}(p) + \dots + a_4\frac{\partial f}{\partial x_4}(p) = 0$. Portanto,

$$a_0x_3x_4^2 + a_1x_3^2x_4 + a_2x_3^3 + a_3(x_4^3 + x_0x_4^2 + 2x_1x_3x_4 + 3x_2x_3^2) + a_4(3x_3x_4^2 + x_0x_4^2 + x_1x_3^2) = 0$$

$$x_3x_4^2(a_0 + 3a_4) + x_3^2x_4a_1 + x_3^3a_2 + x_4^3a_3 + x_0x_4^2(a_3 + a_4) + x_1x_3x_42a_3 + x_2x_3^23a_3 + x_3^2x_1a_4 = 0.$$

Como os mônômios que comparecem na equação acima formam parte de uma base de \mathcal{P}_3 temos, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Absurdo!

Uma das motivações de Gordan e Noether ao construir os *GN*-polinômios foi exibir uma família de hipersuperfícies em \mathbb{P}^n , $n \geq 4$, que tem hessiano nulo e que em geral não são cones.

Proposição 1.3. Todo GN-polinômio em \mathbb{P}^4 tem hessiano nulo.

Demonstração. Seja f um GN-polinômio em \mathbb{P}^4 de grau d de tipo $(4, 2, 1, s)$. Assim,

$$f = \sum_{k=0}^{\mu} P_k(Q_1, ; x_3, x_4), \quad (1.1)$$

onde $Q_1 = M_{1,0}x_0 + M_{1,1}x_1 + M_{1,2}x_2$, $M_{1,t} \in \mathbb{C}[x_3, x_4]$ e $\text{grau}(M_{1,t}) = s - 1$, $t = 0, 1, 2$. Além disso, $d > s$, com $\mu = \lceil \frac{d}{s} \rceil$, e $P_k(z_1, x_3, x_4)$, $k = 0, \dots, \mu$, são bihomogêneas de grau $(k, d - ks)$.

Considere g_k definida pela composição das funções definidas a seguir:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^5 & \xrightarrow{q} & \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{P_k} & \mathbb{C} \\ \underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & (Q_1, x_3, x_4) & \mapsto & P_k(Q_1, x_3, x_4), \end{array}$$

isto é, $g_k = P_k \circ q$. Assim, $f = \sum_{k=0}^{\mu} g_k$. Como $dg_k = dP_k \circ q \cdot dq$, temos:

$$\left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial g_k}{\partial x_0} & \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \frac{\partial g_k}{\partial x_3} & \frac{\partial g_k}{\partial x_4} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial P_k}{\partial y_1} \circ q & \frac{\partial P_k}{\partial y_2} \circ q & \frac{\partial P_k}{\partial y_3} \circ q \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Logo,

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i} = \frac{\partial P_k}{\partial y_1} \circ q \frac{\partial Q_1}{\partial x_i}, \text{ para } 0 \leq i \leq 2,$$

e

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j} = \frac{\partial P_k}{\partial y_1} \circ q \frac{\partial Q_1}{\partial x_j} + \frac{\partial P_k}{\partial y_{j-1}} \circ q, \text{ para } 3 \leq j \leq 4.$$

Diferenciando (1.1) e tendo em consideração que $\frac{\partial Q_1}{\partial x_i} = M_{1,i}$, obtemos:

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\sum_{k=0}^{\mu} \frac{\partial P_k}{\partial y_1}(q(x)) \right) M_{1,i}, \text{ para } 0 \leq i \leq 2.$$

Para $0 \leq i \leq 2$, temos que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \tilde{P}_1 M_{1,i}$, se $\tilde{P}_1 = \sum_{k=0}^{\mu} \frac{\partial P_k}{\partial y_1}(q(x))$. Observe que, se $\tilde{P}_1 \equiv 0$, então

$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$, $0 \leq i \leq 2$. Logo, f é um cone. Do contrário, defina

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{P}^4 & \cdots \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ \underline{x} & \mapsto & \left[\frac{\partial f}{\partial x_0}(\underline{x}) : \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}) : \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}) \right]. \end{array}$$

Note que a imagem de φ é igual a imagem do seguinte mapa racional

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{P}^1 \quad \dots \rightarrow \quad \mathbb{P}^2 \\ [x_3 : x_4] \quad \mapsto \quad [M_{1,0} : M_{1,1} : M_{1,2}]. \end{aligned}$$

Logo, $\dim \overline{Im(\varphi)} = \dim \overline{Im(\phi)} \leq 1$. Isto significa que existe $Y \subset \mathbb{P}^2$ uma curva, $Y = \mathcal{Z}(G)$, $G \neq 0$, contendo a imagem, ou seja, $G(f_0(q), f_1(q), f_2(q)) = 0, \forall q \in \mathcal{U}, \mathcal{U}$ aberto.

Assim, $G(f_0, f_1, f_2) = 0$. Donde, f_0, f_1, f_2 são algébricamente dependentes. Portanto, do Teorema 2.4 temos $h_F = 0$. □

Claramente podemos chamar uma GN-hipersuperfície do tipo (n, t, m, s) de geral se os dados que definem forem escolhidos genericamente, isto é, os polinômios $h_i(y_0, \dots, y_m), i = 0, \dots, t$, os polinômios $\psi_j(x_{t+1}, \dots, x_n), j = 0, \dots, m$, as constantes $a_{u,v}^\ell, \ell = 1, \dots, t-m, u = 1, \dots, t-m-1, v = 0, \dots, t$, e as biformas $P_k, k = 0, \dots, \mu$, são suficientemente genéricas.

1.4 Francheta Hipersuperfície em \mathbb{P}^4

Definição 1.3. Seja $\mathcal{Z}(F)$ uma GN-hipersuperfície do tipo (n, t, m, s) . O *Centro* de $\mathcal{Z}(F)$ é o subespaço t -dimensional $\Pi \subset \mathcal{Z}(F)$ definido pelas equações $x_{t+1} = \dots = x_n = 0$.

Usaremos a noção de multiplicidade na próxima proposição. Esse conceito pode ser encontrado no apêndice, caso o leitor não tenha familiaridade com esse conceito.

Proposição 1.4. Seja $X = \mathcal{Z}(F)$ uma GN-hipersuperfície do tipo (n, t, m, s) de grau d e $\mu = \lfloor \frac{d}{s} \rfloor$. Então:

- (i) $\mathcal{Z}(F)$ tem multiplicidade pelo menos $d - \mu$ num ponto geral de seu centro Π .
- (ii) Um subespaço linear geral Π' , de dimensão $t + 1$, contendo Π , intersecta $X = \mathcal{Z}(F)$ fora de Π , num cone de grau no máximo μ e cujo vértice é um subespaço linear Γ de Π de dimensão m .
- (iii) Se $\mathcal{Z}(F)$ é geral, então está tem multiplicidade exatamente $d - \mu$ num ponto geral do seu centro Π , e o subespaço linear geral Π' , de dimensão $t + 1$ e contendo Π , intersecta $\mathcal{Z}(F)$, fora de Π , num cone de grau exatamente μ . Além disso, quando Π' varia o subespaço Γ descreve a família de espaços tangentes a uma subvariedade $S(F) \subseteq \Pi$ de dimensão m e uniracional.

Demonstração. (i) Queremos determinar a multiplicidade de F em $\eta = [\eta_0 : \dots : \eta_t : 0 : \dots : 0]$. Com este objetivo em mente, inicialmente determinaremos o índice de interseção $i(\eta, \ell \cap X)$, para qualquer reta passando por η . Assim, escolha $\tilde{\xi} \neq \eta$ e considere a reta $\ell_{\eta, \tilde{\xi}}$. Temos duas possibilidades, $\tilde{\xi} \in \Pi$ ou $\tilde{\xi} \notin \Pi$.

1. Famílias de Hipersuperfícies com Hessiano Nulo

Se $\tilde{\xi} \in \Pi$, então $\ell_{\eta, \tilde{\xi}} \subset \Pi \subset X$. Logo, $i(\eta, \ell_{\eta, \tilde{\xi}} \cap X) = \infty$. Para a segunda possibilidade, seja $\tilde{\xi} = [\xi_0 : \dots : \xi_t : \xi_{t+1} : \dots : \xi_n]$, com algum $\xi_i \neq 0$, $i \in \{0, \dots, t\}$, então os pontos de $\ell_{\eta, \tilde{\xi}} \setminus \{\tilde{\xi}\}$ se representam na forma $q_z = [\eta_0 + z\xi_0 : \dots : \eta_t + z\xi_t : z\xi_{t+1} : \dots : z\xi_n]$, com $z \in \mathbb{C}$.

Logo, para $0 \leq k \leq \mu$ temos:

$$\begin{aligned} P_k(q_z) &= P_k\left(\sum_{i=0}^t M_{1,i}(z\xi_{t+1}, \dots, z\xi_n)(\eta_i + z\xi_i), \dots, \sum_{i=0}^t M_{t-m,i}(z\xi_{t+1}, \dots, z\xi_n)(\eta_i + z\xi_i), z\xi_{t+1}, \dots, z\xi_n\right) \\ &= P_k\left(z^{s-1}\left(\sum_{i=0}^t M_{1,i}(\xi)(\eta_i + z\xi_i)\right), \dots, z^{s-1}\left(\sum_{i=0}^t M_{t-m,i}(\xi)(\eta_i + z\xi_i)\right), z\xi_{t+1}, \dots, z\xi_n\right) \\ &= z^{k(s-1)} z^{d-ks} P_k\left(\sum_{i=0}^t M_{1,i}(\xi)(\eta_i + z\xi_i), \dots, \sum_{i=0}^t M_{t-m,i}(\xi)(\eta_i + z\xi_i), \xi_{t+1}, \dots, \xi_n\right) \\ &= z^{d-k} P_k\left(\sum_{i=0}^t M_{1,i}(\xi)(\eta_i + z\xi_i), \dots, \sum_{i=0}^t M_{t-m,i}(\xi)(\eta_i + z\xi_i), \xi_{t+1}, \dots, \xi_n\right). \end{aligned}$$

Como P_k é homogêneo de grau k nas variáveis z_1, \dots, z_{t-m} , concluímos que

$$\begin{aligned} P_k\left(\sum_{i=0}^t M_{1,i}(\xi)(\eta_i + z\xi_i), \dots, \sum_{i=0}^t M_{t-m,i}(\xi)(\eta_i + z\xi_i), \xi_{t+1}, \dots, \xi_n\right) \\ = A_0 z^k + \dots + A_k, \end{aligned}$$

onde A_k são constantes determinadas pelos $M_{j,i}(\xi), \eta_i, \xi_i$, $0 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq t-m$.

Logo, $P_k(q_z) = z^{d-k}(A_0 z^k + \dots + A_k)$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(q_z) &= \sum_{k=0}^{\mu} P_k(q_z) = \sum_{k=0}^{\mu} z^{d-k}(A_0 z^k + \dots + A_k) \\ &= z^d A_{0,0} + \dots + z^{d-k}(A_{1,0} z^\mu + \dots + A_{\mu,\mu}) = z^{d-\mu} [z^\mu A_{0,0} + \dots + z^{d-k}(A_{1,0} z^\mu + \dots + A_{\mu,\mu})]. \end{aligned}$$

Assim, $i(\eta, \ell_{\eta, \xi} \cap X) \geq d - \mu$. Como $\text{mult}_\eta(X) = \min\{i(\eta, \ell_{\eta, \xi} \cap X) \mid \ell \text{ reta passando por } \eta\}$ concluímos que $\text{mult}_\eta(X) \geq d - \mu$.

(ii) Como $\Pi \subsetneq \Pi'$ e $\dim \Pi' = t+1$, temos da Proposição A.6 que existe $\xi \in \Pi' \setminus \Pi$ tal que $\Pi' = \langle \Pi, \xi \rangle$. Sendo o centro de X , $\Pi = \mathcal{Z}(x_{t+1}, \dots, x_n)$ podemos considerar $\xi = [0 : \dots : 0 : \xi_{t+1} : \dots : \xi_n]$, com algum ξ_i não nulo. Seja $p \in \Pi'$, então $p = [v]$, com

$$v = (x_1, \dots, x_t, z\xi_{t+1}, \dots, z\xi_n),$$

já que pela Proposição A.6 $\Pi' = \mathbb{P}([e_0, \dots, e_t, (0, \dots, 0, \xi_{t+1}, \dots, \xi_n)])$.

Note que

$$\begin{aligned}
 p &= [x_0 : \dots : x_t : z\xi_{t+1} : \dots : z\xi_n] \in X \cap \Pi' \\
 &\Downarrow \\
 &F(x_0, \dots, x_t, z\xi_{t+1}, \dots, z\xi_n) = 0 \\
 &\Downarrow \\
 &\sum_{k=0}^{\mu} z^{d-k} P_k(M_{1,0}(\xi)x_0 + \dots + M_{1,t}(\xi)x_t, \dots, M_{t-m,0}(\xi)x_0 + \dots + M_{t-m,t}(\xi)x_t, \xi) = 0 \\
 &\Downarrow \\
 &z^{d-\mu}(z^\mu \tilde{P}_0 + z^{\mu-1} \tilde{P}_1 + \dots + z \tilde{P}_{\mu-1} + \tilde{P}_\mu) = 0,
 \end{aligned}$$

onde $\tilde{P}_k = P_k(L_1, \dots, L_{t-m}, \xi_{t+1}, \dots, \xi_n)$ e $L_i = \sum_{j=0}^t a_{i,j} x_j$.

Se $z \neq 0$, i.e., $p \notin \Pi$, então $z^\mu \tilde{P}_0 + z^{\mu-1} \tilde{P}_1 + \dots + z \tilde{P}_{\mu-1} + \tilde{P}_\mu = 0$.

Seja $W_\xi = \mathcal{Z}(z^\mu \tilde{P}_0 + z^{\mu-1} \tilde{P}_1 + \dots + z \tilde{P}_{\mu-1} + \tilde{P}_\mu)$. Logo, $X \cap \Pi' = \Pi \cup W_\xi$. Agora nossa meta é mostrar que W_ξ é um cone de grau no máximo μ . Primeiro considere a seguinte variedade linear

$$\Gamma_\xi = \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^t M_{1,i}(\xi)x_i, \dots, \sum_{i=0}^t M_{t-m,i}(\xi)x_i, x_{t+1}, \dots, x_n\right),$$

o qual é dado pelos zeros de $n - m$ formas lineares LI. Logo, $\dim \Gamma_\xi = m$.

Considere $p = [x_0 : \dots : x_t : 0 : \dots : 0] \in \Gamma_\xi \subset W_\xi$, então $W_\xi = \bigcup_{q \neq p, q \in W_\xi} \ell_{p,q}$. De fato, claramente

$W_\xi \subseteq \bigcup_{q \neq p, q \in W_\xi} \ell_{p,q}$. Para a outra inclusão, seja $r \in \ell_{p,q}$, para algum $q \in W_\xi$. Se $r \in W_\xi$, nada à fazer,

caso contrário escrevemos $r = [ax_0 + by_0 : \dots : ax_t + bx_t : bu\xi_{t+1} : \dots : bu\xi_n]$, com $[a : b] \in \mathbb{P}^1$ e $q = [y_0 : \dots : y_t : u\xi_{t+1} : \dots : \xi_n]$. Note que se $r \notin \Pi$, então basta mostrarmos que $r \in X = \mathcal{Z}(F)$. Assim,

$$F(r) = \sum_{k=0}^{\mu} P_k\left(ub^{s-1} \sum_{i=0}^t M_{1,i}(ub\xi)(ax_i + by_i), \dots, ub^{s-1} \sum_{i=0}^t M_{t-m,i}(\xi)(ax_i + by_i), ub\xi\right)$$

Como $p = [x_0 : \dots : x_t : 0 : \dots : 0] \in \Gamma_\xi$, concluímos que

$$F(r) = \sum_{k=0}^{\mu} z^{d-k} P_k\left(\sum_{i=0}^t M_{1,i}(ub\xi)uby_i, \dots, \sum_{i=0}^t M_{t-m,i}(ub\xi)uby_i, ub\xi\right) = F(q) = 0.$$

Portanto, W_ξ é um cone de grau no máximo μ , sendo máximo quando $P_0 \neq 0$. Como $p \in \Gamma_\xi$ foi arbitrário, temos que $\Gamma_\xi \subseteq \text{Vert}(W_\xi)$. Para mostrar a outra inclusão, vamos relembrar alguns detalhes.

Sendo $W_\xi = \mathcal{Z}(G)$, com $G = z^\mu \tilde{P}_0 + z^{\mu-1} \tilde{P}_1 + \dots + z \tilde{P}_{\mu-1} + \tilde{P}_\mu$. Seja $q = [y_0 : \dots : y_t : u] \in \text{Vert}(W_\xi)$, então pela Proposição 1.1 $q \in \bigcap_{p \in W_\xi} \mathcal{T}_p W_\xi$. Temos,

$$\begin{aligned}
q &\in \bigcap_{p \in W_\xi} \mathcal{T}_p W_\xi \\
&\Downarrow \\
\sum_{i=0}^t \frac{\partial G}{\partial x_i}(p) y_i + \frac{\partial G}{\partial z}(p) u &= 0, \quad \forall p \in W_\xi \\
&\Downarrow \\
\sum_{i=0}^t \left\{ z^{\mu-1} \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \tilde{P}_\mu}{\partial x_i} \right\} y_i + \left\{ \sum_{j=0}^t (\mu+j) z^{\mu-1-j} \tilde{P}_j \right\} u &= 0 \\
&\Downarrow \\
\sum_{i=0}^t \left\{ \sum_{\ell=1}^{\mu} z^{\mu-\ell} \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial x_i} \right\} y_i + \left\{ \sum_{j=0}^t (\mu+j) z^{\mu-1-j} \tilde{P}_j \right\} u &= 0 \\
&\Downarrow \\
\sum_{i=0}^t \left\{ \sum_{\ell=1}^{\mu} z^{\mu-\ell} \left[\sum_{j=1}^{t-m} \frac{\partial P_\ell}{\partial z_j} a_{j,i} \right] \right\} y_i + \left\{ \sum_{j=0}^t (\mu+j) z^{\mu-1-j} \tilde{P}_j \right\} u &= 0 \\
&\Downarrow \\
\sum_{\ell=1}^{\mu} z^{\mu-\ell} \sum_{j=0}^t \frac{\partial P_\ell}{\partial z_j} L_j(q) + \left\{ \sum_{j=0}^t (\mu+j) z^{\mu-1-j} \tilde{P}_j \right\} u &= 0 \\
&\Downarrow \\
\sum_{j=0}^{\mu} \left(\sum_{\ell=1}^t z^{\mu-\ell} \frac{\partial P_\ell}{\partial z_j} \right) L_j(q) + \left\{ \sum_{j=0}^t (\mu+j) z^{\mu-1-j} \tilde{P}_j \right\} u &= 0 \\
&\Downarrow \\
\sum_{\ell=1}^{\mu} \tilde{Q}_\ell L_\ell(q) + \tilde{Q} u &= 0,
\end{aligned}$$

para todo $p = [x_0 : \dots : x_t : z] \in W_\xi$. Da generalidade dos elementos da GN-Hipersuperfície, existem p_0, \dots, p_t, p_{t+1} pontos em W_ξ tais que

$$\begin{vmatrix}
\tilde{Q}_0(p_0) & \dots & \tilde{Q}_t(p_0) & \tilde{Q}(p_0) \\
\vdots & & & \vdots \\
\tilde{Q}_0(p_t) & \dots & \tilde{Q}_t(p_t) & \tilde{Q}(p_t) \\
\tilde{Q}_0(p_{t+1}) & \dots & \tilde{Q}_t(p_{t+1}) & \tilde{Q}(p_{t+1})
\end{vmatrix} \neq 0.$$

Logo, existe um isomorfismo T associado a essa matriz acima, na qual $(L_1(q), \dots, L_{t-m}(q), u) \in \ker(T)$. Assim, $L_1(q) = \dots = L_{t-m}(q) = u = 0$. Portanto, $q \in \Gamma_\xi$, obtendo assim a igualdade desejada.

(iii) Suponha agora que $X = \mathcal{Z}(F)$ é uma GN-hipersufície geral.

Note que considerando $p = [1 : 0 : \dots : 0] \in X \cap \Pi$, existe $\xi = [0 : \dots : 0 : \xi_{t+1} : \dots : \xi_n] \in \mathbb{P}^n$ tal que $P_\mu(w : 0 : \dots : 0 : z\xi_{t+1} : \dots : z\xi_n) \neq 0$. Das provas dos itens (i) e (ii) temos que p tem multiplicidade exatamente $d - \mu$ e a que Π' intersecta X , fora de Π , num cone de grau exatamente μ .

Sabemos que $\dim \Gamma_\xi \geq m$ e a igualdade mantém se X é uma GN-hipersuperfície.

Note que Γ_ξ contém os $m + 1$ pontos $p_j(\xi) = [p_{j,0} : \dots : p_{j,t} : 0 \dots : 0]$, onde $p_{j,i} = \frac{\partial h_i}{\partial y_j}(\psi_0(\xi), \dots, \psi_m(\xi))$, $i = 0 \dots, t, j = 0, \dots, m$, pois nesses pontos os Q'_t s são nulos. Como escolhemos X uma GN-hipersuperfície geral temos que $\{p_0(\xi), \dots, p_m(\xi)\}$ é um conjunto linearmente independente. Donde,

$$\Gamma_\xi = \langle p_0(\xi), \dots, p_m(\xi) \rangle.$$

Defina o seguinte mapa racional dominante

$$\begin{aligned} h : \bar{\Pi} = \mathcal{Z}(x_0, \dots, x_t) \cong \mathbb{P}^{n-t-1} &\longrightarrow \Pi = \mathcal{Z}(x_{t+1}, \dots, x_n) \\ \xi = [\xi_0 : \dots : \xi_t] &\longmapsto [h_0(\underline{\psi}(\xi)) : \dots : h_t(\underline{\psi}(\xi))], \end{aligned}$$

e considere a subvariedade uniracional $S(F)$ de Π , que é a imagem do mesmo, onde $\underline{\psi}(\xi) = (\psi_0(\xi), \dots, \psi_m(\xi))$. Vejamos agora que $\mathcal{T}_{h(\xi)}S(F) = \Gamma_\xi$. Podemos escolher $\mathcal{U} \subseteq \bar{\Pi}$ aberto e $h_\mathcal{U} : \mathcal{U} \rightarrow S(F) \subset \Pi$ morfismo dominante que representa h , tal que, $dh_\xi : \mathcal{T}_\xi \mathcal{U} = \bar{\Pi} \rightarrow \mathcal{T}_{h(\xi)}V = \mathcal{T}_{h(\xi)}S(F)$ é sobrejetiva. Da definição de espaços tangentes temos $\mathcal{T}_{h(\xi)}S(F) = \Gamma_\xi$, isto é, Γ_ξ é o espaço tangente a $S(F)$ em $h(\xi)$. Da proposição A.4 temos $\dim S(F) = m$. □

Definição 1.4. Uma hipersuperfície $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^4$ de grau d é denominada uma *Francheta hipersuperfície* (\mathcal{F} -*Hipersuperfície*) se existe uma família Σ de planos de dimensão 1, ou seja, $\Sigma = \{P_\xi\}_{\xi \in \mathbb{P}^1}$, onde P_ξ é um plano em \mathbb{P}^4 , tal que :

- (i) Existe uma curva plana racional $C \subseteq X$, de grau $p > 1$, tal que P_ξ é tangente a C , $\forall \xi \in \mathbb{P}^1$.
- (ii) Para todo H 3-plano geral em \mathbb{P}^4 contendo C , verifica-se que a interseção $H \cap X$, fora do espaço linear gerado por C , é a união de planos de Σ , todos tangentes a curva C no mesmo ponto p_H .

Para entender melhor a definição de Francheta hipersuperfície vamos apresentar o exemplo a seguir.

Exemplo 1.5. Considere $h_0 = \frac{1}{2}y_0^2$, $h_1 = y_0y_1$, $h_2 = \frac{1}{2}y_1^2 \in \mathbb{C}[y_0, y_1]$ e $\psi_0 = x_3$, $\psi_1 = x_4 \in \mathbb{C}[x_3, x_4]$. Logo, $Q_1 = x_0x_4^2 - x_1x_3x_4 + x_2x_3^2$. Como $s = 3$, definimos $d = 4$ e $P_0 = x_4^4$, $P_1 = x_3z_1$. Donde,

$$F = x_4^4 + x_0x_3x_4^2 - x_1x_3^2x_4 + x_2x_3^3.$$

Note que $X = \mathcal{Z}(F)$ é uma GN-Hipersuperfície em \mathbb{P}^4 . Queremos mostrar que X é uma \mathcal{F} -hipersuperfície, para isso vamos exibir o material necessário primeiro e no decorrer da construção mostrar que eles verificam as condições para que X seja uma \mathcal{F} -hipersuperfície.

Considerando o mapa racional h , definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h : \quad \bar{\Pi} \quad \quad \quad \dots &\longrightarrow \quad \quad \quad \Pi \\ \xi = [0 : 0 : 0 : \xi_3 : \xi_4] &\longmapsto \quad [\xi_3^2 : 2\xi_3\xi_4 : \xi_4^2 : 0 : 0] \end{aligned} \quad ,$$

temos por imagem de h a seguinte curva $C = \mathcal{Z}(x_1^2 - 4x_0x_2, x_3, x_4) \subset \mathcal{Z}(x_3x_4) = \Pi$.

Daí, C é uma curva plana em \mathbb{P}^4 .

Agora, seja H um 3–plano em \mathbb{P}^4 contendo C , digamos que $H = \mathcal{Z}(g)$. Como $C \subseteq H$, temos: $\Pi = \langle C \rangle \subseteq H = \mathcal{Z}(g)$. Logo, $g \in \langle x_3, x_4 \rangle$. Note que, para cada H , nas condições acima, existe ξ tal que $H = \Pi_\xi = \langle \Pi, \xi \rangle$, onde $\xi = [0 : 0 : 0 : \xi_3 : \xi_4]$ e $[\xi_3 : \xi_4] \in \mathbb{P}^1$. Donde, $g = \xi_4x_3 - \xi_3x_4$.

Analisando a interseção $\Pi_\xi \cap X$, temos:

$$p \in \Pi_\xi \cap X \Leftrightarrow z^3(z\xi_4^3 + x_0\xi_3\xi_4^2 - x_1\xi_3^2\xi_4 + x_2\xi_3^3) = 0.$$

Considere os planos da forma $\mathcal{P}_\xi = \mathcal{Z}(\xi_4x_3 - \xi_3x_4, z\xi_4^3 + x_0\xi_3\xi_4^2 - x_1\xi_3^2\xi_4 + x_2\xi_3^3)$, onde $\xi = [0 : 0 : 0 : \xi_3 : \xi_4]$ e $[\xi_3 : \xi_4] \in \mathbb{P}^1$, e denote por Σ a família desses planos, isto é, $\Sigma = \{\mathcal{P}_\xi\}_{\xi \in \mathbb{P}^1}$.

Seja $q \in \mathcal{P}_\xi \cap C$. Sabemos que q é da seguinte forma $q = [a^2 : 2ab : b^2 : 0 : 0]$, com $[a : b] \in \mathbb{P}^1$, isso decorre da construção da C . Além disso, $z = 0$ e $q \in \mathcal{P}_\xi$, então $\xi_3(a^2\xi_4^2 - 2ab\xi_3\xi_4 + b^2\xi_3^2) = 0$. Note que, $q \in \ell_{h(\xi)} = \mathcal{Z}(x_0\xi_4^2 - x_1\xi_3\xi_4 + x_2\xi_3^2, x_3, x_4)$ se $\xi_3 \neq 0$, onde $\ell_{h(\xi)}$ é a reta tangente a C em $h(\xi)$. Logo, $\mathcal{P}_\xi \cap C = \{h(\xi)\}$. Assim, $h(\xi) = q$ e $\ell_{h(\xi)} \subseteq \mathcal{P}_\xi$. Portanto, \mathcal{P}_ξ é tangente a C , $\forall \xi \in \mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1]\}$.

Por outro lado, X é uma GN-Hipersuperfície, então pela proposição 1.4

$$H \cap X = \Pi \cup W_\xi,$$

onde $W_\xi = \mathcal{Z}(z\xi_4^3 + x_0\xi_3\xi_4^2 - x_1\xi_3^2\xi_4 + x_2\xi_3^3)$ é um cone em Π_ξ com vértice $\Gamma_\xi = \mathcal{Z}(x_0\xi_4^2 - x_1\xi_3\xi_4 + x_2\xi_3^2, x_3, x_4)$. De onde concluímos que X é uma \mathcal{F} –Hipersuperfície.

Na próxima proposição vamos correlacionar as Franchetas Hipersuperfícies com as hipersuperfícies trabalhadas na seção anterior. Essa correlação nos possibilita transferir algumas propriedades das Hipersuperfícies que são do tipo Gordan-Noether para as Franchetas Hipersuperfícies.

Proposição 1.5. Seja X uma variedade irredutível em \mathbb{P}^4 . Então X é uma GN-Hipersuperfície se, e somente se, X é uma \mathcal{F} –Hipersuperfície.

Demonstração. Seja X uma GN-Hipersuperfície em \mathbb{P}^4 , então o polinômio que a define é da forma $f = \sum_{k=0}^{\mu} P_k(Q_1, x_3, x_4)$, onde $Q_1 = M_{1,0}x_0 + M_{1,1}x_1 + M_{1,2}x_2$. Considere o 3–plano $\Pi_\xi = \langle \Pi, \xi \rangle$, lembre que já comentamos que todo 3–plano em \mathbb{P}^4 contendo Π é dessa mesma forma, onde $\xi = [0 : 0 : 0 : \xi_3 : \xi_4]$ e $\Pi = \mathcal{Z}(x_3, x_4)$. Logo,

$$p = [x_0 : x_1 : x_2 : z\xi_3 : z\xi_4] \in \Pi_\xi \cap X \Leftrightarrow z^{d-\mu}(z^\mu P_0 + \dots + P_\mu).$$

Seja $g(u, v) := \sum_{k=0}^{\mu} a_k(\xi)u^{\mu-k}P_k(v, \xi_3\xi_4)$, então da proposição A.1 existem α'_i s e β'_i s, escalares

não todos nulos, tais que $g(u, v) = \prod_{i=1}^{\mu} (\alpha_i u - \beta_i v)$. Logo,

$$p \in \Pi_{\xi} \cap X \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } p \in \mathcal{Z}(g) = \bigcup_{i=1}^{\mu} \mathcal{P}_{\gamma_i},$$

onde $\mathcal{P}_{\gamma_i} = \mathcal{Z}(\alpha_i z - \beta_i L_{\xi})$, $\gamma_i = [\alpha_i : \beta_i] \in \mathbb{P}^1$.

Da proposição 1.4, a curva plana $S(F) = \mathcal{Z}(x_1^2 - 4x_0x_2, x_3, x_4)$ contida em Π , possui por planos tangentes em $h(\xi)$ os planos \mathcal{P}_{γ_i} .

Reciprocamente, seja X uma \mathcal{F} -Hipersuperfície, então existe uma curva plana racional C . A menos de mudança de coordenadas projetiva o plano que contém C é $\Pi = \mathcal{Z}(x_3, x_4)$.

Considere o seguinte isomorfismo

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \Pi & \cdots \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ [x_0 : x_1 : x_2 : 0 : 0] & \longmapsto & [x_0 : x_1 : x_2] \end{array}.$$

Sendo C uma curva em Π , então pelo isomorfismo acima a imagem da curva, que denotaremos por \tilde{C} , também é uma curva em \mathbb{P}^2 . Logo, existe $g \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ tal que $\tilde{C} = \mathcal{Z}(g)$. Daí, concluimos que $C = \mathcal{Z}(g, x_3, x_4)$. Além disso, $\mathcal{T}_{\tilde{p}}\tilde{C} = \mathcal{Z}(L_p)$, com $\Psi(p) = \tilde{p}$ e $\Psi(C) = \tilde{C}$, concluimos que $\mathcal{T}_p C = \mathcal{Z}(L_p, x_3, x_4)$.

Seja $H \subset \mathbb{P}^4$ um 3-plano contendo Π , então $H = \mathcal{Z}(h)$, $h = \alpha x_3 - \beta x_4$, com $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$. Assim, seja $H = H_{[\alpha:\beta]}$ e defina o seguinte isomorfismo

$$\Theta : \begin{array}{ccc} \{H \subseteq \mathbb{P}^4 \mid 3\text{-plano e } \Pi \subseteq H\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ H_{[\alpha:\beta]} & \longmapsto & [\alpha : \beta] \end{array}.$$

Então existe um aberto $\mathcal{U} = \mathbb{P}^1 - \{p_1, \dots, p_i\}$ satisfazendo a condição: $H_{\alpha} \cap X = \Pi \cup \mathfrak{X}$, com $\mathfrak{X} = \bigcup \mathcal{P}$ e \mathcal{P} planos tangentes a C no ponto p_{α} . Note que cada plano \mathcal{P} contém a reta tangente $\ell_{\alpha} = \mathcal{T}_{p_{\alpha}} C$.

Suponha $\beta \neq 0$, então $H = \mathcal{Z}(h_{\alpha})$, com $h_{\alpha} = \alpha x_3 - x_4$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Para facilitar denotamos H por H_{α} . Considere o seguinte isomorfismo

$$\Phi : \begin{array}{ccc} H_{\alpha} & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \alpha x_3] & \longmapsto & [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \end{array}.$$

Note que, $H_{\alpha} \cap X = \mathcal{Z}(h_{\alpha}, F) = \mathcal{Z}(h_{\alpha}, F(x_0, x_1, x_2, x_3, \alpha x_3))$. Defina $X_{\alpha} = \mathcal{Z}(F(x_0, x_1, x_2, x_3, \alpha x_3))$. Do fato de \mathcal{P} ser um plano em \mathbb{P}^4 , temos que existem duas formas lineares que o define, digamos L_1, L_2 , ou seja, $\mathcal{P} = \mathcal{Z}(L_1, L_2)$. Logo, $L_1, L_2 \in \langle x_3, x_4, L_{\alpha} \rangle$, e $L_{\alpha} = a_0(\alpha)x_0 + \dots + a_3(\alpha)x_3$.

Sabendo que $\mathcal{P} \subseteq H_\alpha$, Temos:

$$\mathcal{P}|_{H_\alpha} = \mathcal{Z}(b_{\mathcal{P}}(\alpha)x_3 + L_\alpha).$$

Donde,

$$\begin{aligned} H_\alpha \cap X|_{H_\alpha} &= \mathcal{Z}(F(x_0, x_1, x_2, x_3, \alpha x_3)) = \Pi|_{H_\alpha} \cup \mathfrak{X}|_{H_\alpha} \\ &= \mathcal{Z}(x_3) \cup \mathcal{Z}\left(\prod_{\mathcal{P}} (b_{\mathcal{P}}(\alpha)x_3 + L_\alpha)\right) = \mathcal{Z}\left(x_3 \prod_{\mathcal{P}} (b_{\mathcal{P}}(\alpha)x_3 + L_\alpha)\right). \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, x_2, x_3, \alpha x_3) &= x_3^{d-\mu} \prod_{\mathcal{P}} (b_{\mathcal{P}}(\alpha)x_3 + L_\alpha) = x_3^{d-\mu} \sum_{k=0}^{\mu} a(\alpha)x_3^{k-\mu} L_\alpha^k = \sum_{k=0}^{\mu} a(\alpha)x_3^{d-k} L_\alpha^k \\ &= \sum_{k=0}^{\mu} x_3^{k(s-1)} x_3^{d-ks} P_k(L_\alpha, \alpha_3, \alpha_4) = \sum_{k=0}^{\mu} P_k(x_3^{s-1} M_{1,0}(\alpha)x_0 + \dots + x_3^{s-1} M_{1,2}(\alpha)x_2, x_3\alpha_3, x_3\alpha_4). \end{aligned}$$

Assim, $F = \sum_{k=0}^{\mu} P_k(Q_1, x_3, x_4)$. Portanto, $X = \mathcal{Z}(F)$ é uma GN-Hipersuperfície em \mathbb{P}^4 .

□

Capítulo 2

Dualidade e Mapa Polar

Com o objetivo de classificar as hipersuperfícies com hessiano nulo em \mathbb{P}^4 , estudaremos nesse capítulo o dual de um variedade projetiva e o mapa polar associado a uma hipersuperfície. Essas ferramentas serão chaves na prova de nosso teorema principal. Vamos dispor nesse momento resultados gerais sobre os assuntos aqui mencionados, os quais terão por intuito mostrar o resultado final do último capítulo e completude do trabalho.

2.1 Dual de Variedades Projetivas

A seguir denotaremos por \mathbb{P}^{n*} o conjunto formado pelos hiperplanos em \mathbb{P}^n , ou seja,

$$\mathbb{P}^{n*} = \{H \subsetneq \mathbb{P}^n \mid H \text{ é um hiperplano}\} = \{H = \mathcal{Z}(F) \mid F \in \mathcal{P}_1 \setminus \{0\}\}.$$

Além disso, podemos fazer as seguintes identificações representadas no diagrama abaixo. Usaremos estas identificações para induzir uma topologia em \mathbb{P}^{n*} , de fato, $F \subseteq \mathbb{P}^{n*}$ é um fechado se $\Gamma^{-1}(\Lambda^{-1}(F))$ é um fechado em \mathbb{P}^n .

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbb{P}((\mathbb{C}^{n+1})^*) & \xrightarrow{\Lambda} & \mathbb{P}^{n*} \\ [a_0 : \dots : a_n] & \mapsto & [f] & \mapsto & H = \mathbb{P}(\ker(f)), \end{array}$$

onde $f = a_0e_0^* + \dots + a_n e_n^*$, sendo $\beta = \{e_0^*, \dots, e_n^*\}$ a base dual de $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ associada à base canônica $\{e_i\}_{i=0}^n$ de \mathbb{C}^{n+1} . Fica a cargo do leitor interessado a verificação das bijeções.

Observação 2.1. Seja $H_0, H_1 \in \mathbb{P}^{n*}$ e $H_0 \neq H_1$, então a reta passando por esse dois pontos em \mathbb{P}^{n*} é dada pelo seguinte conjunto

$$L_{H_0, H_1} = \{H \in \mathbb{P}^{n*} \mid H_0 \cap H_1 \subseteq H\}.$$

De fato, existem $a = [a_0 : \dots : a_n], b = [b_0 : \dots : b_n] \in \mathbb{P}^n$, pela correspondência acima, tais que $H_0 = \mathcal{Z}(a_0x_0 + \dots + a_nx_n)$ e $H_1 = \mathcal{Z}(b_0x_0 + \dots + b_nx_n)$. Sabemos que a reta passando por a e b

é dada pelo seguinte conjunto

$$L_{a,b} = \{[sa_0 + tb_0 : \dots : sa_n + tb_n] \in \mathbb{P}^n \mid [s : t] \in \mathbb{P}^1\},$$

a qual é identificada pela bijeção acima com

$$L_{H_0, H_1} = \{\mathcal{Z}((sa_0 + tb_0)x_0 + \dots + (sa_n + tb_n)x_n) \mid [s : t] \in \mathbb{P}^1\},$$

onde L_{H_0, H_1} é a reta passando por H_0 e H_1 . Note que,

$$H_0 \cap H_1 = \mathcal{Z}(\langle \sum_{i=1}^n a_i x_i, \sum_{i=1}^n b_i x_i \rangle) \subseteq H = \mathcal{Z}(h),$$

onde $h = s \sum_{i=1}^n a_i x_i + t \sum_{i=1}^n b_i x_i$ e $[s : t] \in \mathbb{P}^1$. Claramente observamos as duas inclusões, e assim obtemos a igualdade.

Definição 2.1. Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Definimos o *dual de X* , denotado por X^* , como o fecho em \mathbb{P}^{n*} do conjunto

$$\{H \in \mathbb{P}^{n*} \mid \mathcal{T}_p X \subseteq H, \text{ para algum } p \in X \setminus \text{Sing}(X)\},$$

ou seja,

$$X^* = \overline{\{H \in \mathbb{P}^{n*} \mid \mathcal{T}_p X \subseteq H, \text{ para algum } p \in X \setminus \text{Sing}(X)\}},$$

onde $\mathcal{T}_p X = \bigcap_{F \in \mathcal{I}(X)} \mathcal{Z}(\sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) x_i)$.

Exemplo 2.1. Seja $H = \mathcal{Z}(\sum_{i=0}^4 a_i x_i)$ um hiperplano em \mathbb{P}^4 . Temos:

$$\begin{aligned} H_0^* &= \overline{\{H \in \mathbb{P}^{4*} \mid H_0 = \mathcal{T}_p H_0 \subseteq H, \text{ para algum } p \in H_0\}} \\ &= \overline{\{H_0\}} = \{H_0\}, \end{aligned}$$

pois como H_0 e H tem a mesma dimensão e $H_0 \subseteq H$, temos $H_0 = H$.

Os próximos resultados sobre dualidade serão apenas enunciados, pois suas demonstrações poderiam ser omitidas sem comprometimento da completude do trabalho.

Teorema 2.1. *Seja X uma variedade irredutível, então $X^{**} \cong X$.*

Demonstração. Veja Teorema 2.4.1, p. 33 em [14]. □

Proposição 2.1. *Se X é irredutível, então X^* é irredutível.*

Demonstração. Veja Proposição 2.4.1, p. 33 em [14]. □

A seguir provaremos uma proposição que nos será necessária em um dos itens do resultado principal.

Proposição 2.2. Seja C uma curva plana irredutível em \mathbb{P}^4 , com grau $d \geq 2$, tal que $\Pi = \langle C \rangle$. Então $C^* \subset \mathbb{P}^{4*}$ é um cone com vértice uma reta, a qual é o dual de Π , isto é, $\text{Vert}(C^*) = \Pi^*$.

Demonstração. Seja $C \subseteq \mathbb{P}^4$ uma curva plana irredutível contida num plano Π , o qual vamos considerar a menos de mudança de coordenadas sendo $\Pi = \mathcal{Z}(x_3, x_4)$. Vamos dualizar essa curva em $\mathbb{P}^2 \equiv \Pi$ inicialmente. Usaremos nesse momento um comentário encontrado na página 24 em [20], afirmando que $\dim C^\vee \leq 2 - 1 = 1$, C^\vee é o dual de C em \mathbb{P}^2 . Suponha que $\dim C^\vee = 0$, então $C^\vee = \{m\} \subset \mathbb{P}^{2*}$. Logo, $C^{\vee\vee} = C = \{m\}^\vee$ é uma reta em \mathbb{P}^2 , o que não pode acontecer já que o grau da curva é maior que 2. Donde, $\dim C^\vee = 1$, e assim $C^\vee = \mathcal{Z}(g(a_0, a_1, a_2))$. De posse dessas informações vamos mostrar que $C^\vee = \mathcal{Z}(g(a_0, a_1, a_2))$ em \mathbb{P}^{4*} .

Agora provaremos a seguinte inclusão: $C^* \subset \mathcal{Z}(g(a_0, a_1, a_2))$. De fato, seja $C^* = \overline{\mathcal{U}}$, com $\mathcal{U} = \{\Upsilon \in \mathbb{P}^{4*} \mid \mathcal{T}_a C \subseteq \Upsilon, \text{ para algum } a \in C \setminus \text{Sing}C\}$. Considere $\Upsilon \in \mathcal{U}$, então $\mathcal{T}_a C = \mathcal{Z}(b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, x_3, x_4) \subset \Upsilon = \mathcal{Z}(g)$. Logo, $g = u_0(b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2) + u_1 x_3 + u_2 x_4$. Assim, $\Upsilon \equiv [u_0 b_0 : u_0 b_1 : u_0 b_2 : u_1 : u_2]$. Como $b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ é a equação da reta tangente a curva em Π , temos pela dualidade feita inicialmente em \mathbb{P}^2 que $g(b_0, b_1, b_2) = 0$. Portanto, $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}(g(a_0, a_1, a_2))$, e conseqüentemente $C^* \subseteq \overline{\mathcal{Z}(g(a_0, a_1, a_2))} = \mathcal{Z}(g(a_0, a_1, a_2))$.

Note que $\Pi^* = \{\Lambda \subset \mathbb{P}^4 \mid \Lambda \text{ hiperplano contendo } \Pi\} = \{\Lambda = \mathcal{Z}(\alpha x_3 + \beta x_4) \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\} \equiv \mathcal{Z}(a_0, a_1, a_2)$.

Para a outra inclusão, considere $L = \mathcal{Z}(a_0, a_1, a_2) \subset \mathcal{Z}(g(a_0, a_1, a_2)) := \tilde{Z}$. Mostraremos nesse momento que $\tilde{Z} \setminus L \subset C^*$. Seja $b = [b_0 : b_1 : b_2 : b_3 : b_4] \in \tilde{Z} \setminus L$, então $g(b_0, b_1, b_2) = 0$, com $b_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, 2, 3\}$. Sabemos que $b \equiv \Upsilon = \mathcal{Z}(b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4)$, dizemos que b se identifica com Υ . Do fato de $b \in \tilde{Z} \setminus L$ podemos considerar $\tilde{b} = [[b_0 : b_1 : b_2 : b_3 : 0 : 0] \in C^\vee \cap H^\vee$, com $H^\vee = \mathcal{Z}(a_3, a_4)$. Pela primeira dualidade existe $a \in C$ tal que $\mathcal{T}_a C = \mathcal{Z}(b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, x_3, x_4)$. Donde $\mathcal{T}_a C \subset \Upsilon$. Assim, $\Upsilon \in \mathcal{U}$, e por conseqüência $\tilde{Z} \setminus L \subset \mathcal{U}$. Logo, $\overline{\tilde{Z} \setminus L}^{\tilde{Z}} \subseteq \overline{\mathcal{U}}^{\tilde{Z}} \subset \overline{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U} = C^* \cap \mathcal{U}$. Como $\tilde{Z} \setminus L$ é um aberto em \tilde{Z} , temos $\tilde{Z} \subseteq C^*$. □

A seguir caracterizamos o dual de um k -plano em \mathbb{P}^n , o que nos será útil, já que no último capítulo trabalhamos muito com os mesmos.

Observação 2.2. Seja $X = \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade linear de dimensão k , onde

$W \in \mathbb{G}(k+1, \mathbb{C}^{n+1})$ e $0 \leq k \leq n-1$. Denote $W = [w_0, \dots, w_k]$, Então:

$$\begin{aligned} X^* &= \overline{\{H \in \mathbb{P}^{n*} \mid \mathcal{T}_p X \subseteq H, \text{ para algum } p \in X \setminus \text{Sing}(X)\}} \\ &= \overline{\{H \in \mathbb{P}^{n*} \mid X \subseteq H\}} \\ &= \overline{\{H \in \mathbb{P}^{n*} \mid \mathbb{P}(W) \subseteq H\}} \\ &= \overline{\{H = \mathbb{P}(\mathcal{U}) \in \mathbb{P}^{n*} \mid W \subseteq \mathcal{U}\}} \\ &= \overline{\{[f] \in \mathbb{P}((\mathbb{C}^{n+1})^*) \mid W \subseteq \ker(f)\}} \end{aligned}$$

Como $w = \{w_0, \dots, w_k\}$ é uma base de W , então completemos w de forma que $\alpha = \{w_0, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ seja uma base de \mathbb{C}^{n+1} . Dualizando a base α obtemos a base dual $\alpha^* = \{w_0^*, \dots, w_k^*, v_{k+1}^*, \dots, v_n^*\}$. Assim,

$$X^* = \mathbb{P}(\mathcal{W}),$$

onde $\mathcal{W} = [v_{k+1}^*, \dots, v_n^*]$. Logo, o espaço dual de um k -plano em \mathbb{P}^n é um $(n-k-1)$ -plano em \mathbb{P}^{n*} .

Definição 2.2. Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Dizemos que X é *não degenerada* se X não está contida num hiperplano de \mathbb{P}^n .

Teorema 2.2. *Seja $X = \mathcal{Z}(F) \subsetneq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau d . Então, X é um cone se, e somente se, X^* é degenerada.*

Demonstração. Veja Teorema 2.1.4, p. 15 em [12]. □

2.2 Mapa Polar

Muitos dos conceitos e resultados utilizados nessa seção podem ser encontrados no apêndice.

Definição 2.3. Seja $X = \mathcal{Z}(F) \subsetneq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau d . Chamamos de *Mapa Polar* associado a X o mapa racional

$$\begin{aligned} \varphi_F : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^{n*} \\ q &\longmapsto \left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(q) : \dots : \frac{\partial F}{\partial x_n}(q) \right]. \end{aligned}$$

Denotaremos a imagem do mapa polar como sendo $\mathcal{I}_F = \overline{\varphi_F(\mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(X))} \subseteq \mathbb{P}^{n*}$.

Exemplo 2.2. Seja X a hipersuperfície quádratica em \mathbb{P}^4 definido pela forma $F = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Então o mapa polar associado a X é:

$$\begin{aligned} \varphi_F : \mathbb{P}^4 &\cdots \rightarrow & \mathbb{P}^{4*} \\ q &\longmapsto & [2x_0 : 2x_1 : 2x_2 : 0 : 0]. \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{I}_F = \mathcal{Z}(z_3, z_4) \subsetneq (\mathbb{P}^4)^*$ é um 2-plano.

O próximo teorema será enunciado aqui, apesar de utilizarmos apenas no capítulo 3. Sua prova foi omitida por não ser o enfoque de nosso trabalho, para uma maior completude vamos referenciar sua demonstração.

Teorema 2.3. (ZAK) *Sejam $X = \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva irredutível com $h_F \equiv 0$ o hessiano polinômial de F e $\varphi_F : \mathbb{P}^n \cdots \rightarrow \mathbb{P}^{n*}$ o mapa polar associado a X . Então $\mathcal{I}_F^* \subseteq \text{Sing}(X)$.*

Demonstração. Veja Proposição 4.9, em [22]. □

Observação 2.3. Usando a notação acima, concluímos que $X^* \subseteq \mathcal{I}_F$. De fato, sabemos que $X^* = \overline{U}$, onde $U = \{H \in \mathbb{P}^{n*} \mid \mathcal{T}_q X = H, \text{ para algum } q \in X \setminus \text{Sing}(X)\}$. Seja $q \in X \setminus \text{Sing}(X)$, então $\varphi_F(q) = \mathcal{T}_q X \in X^*$. Assim, $\varphi_F(X \setminus \text{Sing}(X)) \subseteq U \subseteq \mathcal{I}_F$. Portanto, $X^* = \overline{U} \subseteq \mathcal{I}_F$.

Teorema 2.4. *Sejam $X = \mathcal{Z}(F) \subsetneq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau $d \geq 1$. Seja φ_F o mapa polar associado a X . Assim, são equivalentes:*

- (a) $h_F = 0$;
- (b) φ_F não é dominante;
- (c) $\mathcal{I}_F \subsetneq \mathbb{P}^{n*}$;
- (d) $\frac{\partial F}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ são algébricamente dependentes.

Demonstração. (a) \Leftrightarrow (b) Vamos provar a contra-positiva. Suponha que φ_F é um mapa dominante. Pelo Lema A.4 temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_F : \mathbb{C}^{n+1} &\cdots \rightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ v &\longmapsto & \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(v), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(v) \right), \end{aligned}$$

é um mapa racional dominante. Assim, pela Proposição A.7 existe um aberto $U \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ não vazio tal que $\widetilde{\varphi}_F$ é suave em v e $\dim \ker((d\widetilde{\varphi}_F)_v) = 0$ para todo $v \in U$. Como

$$[(d\widetilde{\varphi}_F)_v] = \text{Hess}(F)(v)$$

e $(d\widetilde{\varphi}_F)_v$ é um isomorfismo, temos $h_F(v) \neq 0, \forall v \in U$. Assim, $h_F \neq 0$.
 Reciprocamente, suponha que φ_F não é dominante, então pelo Lema A.4

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_F : \mathbb{C}^{n+1} &\dots \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ v &\longmapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(v), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(v) \right), \end{aligned}$$

não é dominante. Considere o mapa

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}^{n+1} &\dots \rightarrow \overline{\widetilde{\varphi}_F(\mathbb{C}^{n+1})} \subsetneq \mathbb{C}^{n+1} \\ v &\longmapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(v), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(v) \right), \end{aligned}$$

e note que ψ é um mapa racional e dominante. Assim, pela Proposição A.7 existe um aberto $U \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ não vazio tal que ψ é suave em v e $\dim \ker(d\psi_v) = n + 1 - \dim \overline{\widetilde{\varphi}_F(\mathbb{C}^{n+1})} \geq 1$, para todo $v \in U$. Logo pelo mesmo argumento usado anteriormente $h_F(v) = 0, \forall v \in U$.
 Onde, $U \subseteq \mathcal{Z}(h_F)$ e por consequência $\overline{U} = \mathbb{C}^{n+1} \subseteq \mathcal{Z}(h_F) \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$. Assim, $\mathcal{Z}(h_F) = \mathbb{C}^{n+1}$.
 Portanto, $h_F \equiv 0$.

(b) \Leftrightarrow (c) Definição A.11.

(c) \Leftrightarrow (d) Suponhamos $\mathcal{I}_F \subsetneq \mathbb{P}^{n*}$, então existe uma hipersuperfície $\mathcal{Z}(G) \subsetneq \mathbb{P}^{n*}$ tal que $\mathcal{I}_F \subseteq \mathcal{Z}(G) \subsetneq \mathbb{P}^{n*}$. Assim,

$$G(\varphi_F(p)) = 0, \forall p \in \mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(X) \Leftrightarrow G\left(\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(p) : \dots : \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)\right]\right) = 0, \forall p \in \mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(X).$$

Note que $H = G\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ é um polinômio homogêneo, pois $G, \frac{\partial F}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ são polinômios homogêneos. Assim,

$$\begin{aligned} H(p) = 0, \forall p \in U = \mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(X) &\Leftrightarrow U \subseteq \mathcal{Z}(H) \\ &\Leftrightarrow \overline{U} = \mathbb{P}^n \subseteq \mathcal{Z}(H) \subseteq \mathbb{P}^n \Leftrightarrow \mathcal{Z}(H) = \mathbb{P}^n \\ &\Leftrightarrow H \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \text{ são algebricamente dependentes.} \end{aligned}$$

□

Como todo aberto não vazio de \mathbb{P}^n é irredutível, temos que $\mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(X)$ é irredutível em \mathbb{P}^n .
 Onde, $\varphi_F(\mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(X))$ é irredutível, e por conseguinte \mathcal{I}_F é irredutível.

Proposição 2.3. Seja $X = \mathcal{Z}(F) \subsetneq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície. Então existe uma hipersuperfície irredutível e reduzida $Y = \mathcal{Z}(G) \subseteq \mathbb{P}^{n*}$ tal que $\mathcal{I}_F \subseteq Y$ e $\mathcal{I}_F \not\subseteq \text{Sing}(Y)$.

Demonstração. Sendo o Hessiano de X nulo, temos do Teorema 2.4 que \mathcal{I}_F é um fechado próprio de \mathbb{P}^{n*} . Seja $G \in I(\mathcal{I}_F)$, um polinômio homogêneo não nulo de menor grau no ideal associado a

\mathcal{I}_F , caso exista mais de um apenas escolha um. Seja d o grau de G e $Y = \mathcal{Z}(G)$. Se Y é um hiperplano, isto é, $d = 1$, então $\mathcal{I}_F \subseteq Y$ e $\text{Sing}(Y) = \emptyset$. Logo, o resultado é válido. Suponhamos agora que $d \geq 2$, temos que $\mathcal{I}_F \not\subseteq \text{Sing}(Y)$. De fato, se $\mathcal{I}_F \subseteq \text{Sing}(Y) = \mathcal{Z}\left(\frac{\partial G}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}\right)$, então $\frac{\partial G}{\partial x_i} \in \mathcal{I}_F$, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Como G define uma hipersuperfície em \mathbb{P}^{n*} , temos que existe $j \in \{0, \dots, n\}$ tal que $\frac{\partial G}{\partial x_j} \neq 0$. Assim, $\frac{\partial G}{\partial x_j} \in \mathcal{I}_F$ e grau de $\frac{\partial G}{\partial x_j}$ é $d - 1$. Absurdo! Note que podemos escolher G irredutível. Suponha $G = G_1 \cdots G_k \in \mathcal{I}_F$, então $G_i \in \mathcal{I}_F$, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$, pois \mathcal{I}_F é irredutível e portanto tem ideal associado primo. Assim, podemos escolher G livre de quadrados. □

O resultado anterior e alguns que estão no apêndice A, nos permite definir o mapa racional φ_{FG} dado pela composta de mapas polares da seguinte forma:

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{\varphi_F} \mathbb{P}^{n*} \xrightarrow{\varphi_G} \mathbb{P}^{n**}$$

Assim, $\varphi_{FG} = \varphi_G \circ \varphi_F$, ou seja,

$$\begin{aligned} \varphi_{FG} : \mathbb{P}^n \cdots &\rightarrow \mathbb{P}^{n**} \equiv \mathbb{P}^n \\ q &\longmapsto \left[\frac{\partial G}{\partial y_0}(\tilde{\varphi}_F(q)) : \dots : \frac{\partial G}{\partial y_n}(\tilde{\varphi}_F(q)) \right] \\ &= [H_0(q) : \dots : H_n(q)], \end{aligned}$$

onde $H_i = \frac{\partial G}{\partial y_i}(\tilde{\varphi}_F)$, com $i = \{0, \dots, n\}$ e $\rho = \text{mdc}\left(\frac{\partial G}{\partial y_0}(\tilde{\varphi}_F(q)), \dots, \frac{\partial G}{\partial y_n}(\tilde{\varphi}_F(q))\right)$. Chamaremos o fecho da imagem do mapa racional φ_{FG} por \mathcal{I}_{FG} , essa tipo de notação já foi usada na definição de mapa polar.

Teorema 2.5. *Seja $\varphi_{FG} : \mathbb{P}^n \cdots \rightarrow \mathbb{P}^{n**}$ o mapa racional definido acima, $Z = \mathcal{Z}(H_0, \dots, H_n)$ e $Y = \mathcal{Z}(G)$. Então:*

- i. Se $\dim \mathcal{I}_{FG} = 0$, então \mathcal{I}_F é degenerada. Assim, X é um cone.*
- ii. $\dim Z \leq n - 2$*
- iii. $\mathcal{I}_{FG} \subseteq \mathcal{I}_F^*$.*

Demonstração. Para provarmos o item (i), suponha $\dim \mathcal{I}_{FG} = 0$, então $\mathcal{I}_{FG} = \{H\}$, para algum $H \in \mathbb{P}^{n**}$. Assim, $H = \mathcal{T}_p Y$, para todo $p \in \mathcal{I}_F \setminus \text{Sing}(Y)$. Logo, $\mathcal{I}_F \setminus \text{Sing}(Y) \subseteq H$. Como $Y \setminus \text{Sing}(Y)$ é um aberto em Y , temos que $\mathcal{I}_F \setminus \text{Sing}(Y)$ é um aberto relativo em \mathcal{I}_F . Sendo \mathcal{I}_F irredutível, concluímos que $\mathcal{I}_F = \overline{\mathcal{I}_F \setminus \text{Sing}(Y)} \subseteq H$. Note que, $X^* \subseteq \mathcal{I}_F$. Portanto, X é degenerada e pelo Teorema 2.2 X é um cone.

No segundo item suponhamos que $\dim Z = n$, então $Z = \mathbb{P}^n$. Logo, $H_i \equiv 0$, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Absurdo, pois $\mathcal{I}_F \not\subseteq \text{Sing}(Y)$. Agora, suponhamos que $\dim Z = n - 1$, então existe $Q \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ tal que Z é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}(Q)$. Logo, $H_i = \mu_i Q$, com $\mu_i \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ para $i \in \{0, \dots, n\}$. Donde, $\text{mdc}(H_0, \dots, H_n) \neq 1$. Absurdo! Portanto, $\dim Z \geq n - 2$.

No último item lembramos que

$$\varphi_{FG}(\mathbb{P}^n \setminus Z) = \{H \in \mathbb{P}^{n**} \mid H = \mathcal{T}_p Y, \text{ para algum } p \in \mathcal{I}_F \setminus \text{Sing}(Y)\}$$

e $\mathcal{I}_F^* = \overline{V}$, onde $V = \{H \in \mathbb{P}^{n**} \mid \mathcal{T}_p Y \subseteq H, \text{ para algum } p \in \mathcal{I}_F \setminus \text{Sing}(\mathcal{I}_F)\}$.

Como $\mathcal{I}_F \subseteq Y$, temos que $\mathcal{T}_p \mathcal{I}_F \subseteq \mathcal{T}_p Y$, para todo $p \in \mathcal{I}_F \setminus (\text{Sing}(\mathcal{I}_F) \cup \text{Sing}(Y))$. Tomando $U = \{H \in \mathbb{P}^{n**} \mid H = \mathcal{T}_p Y, \text{ para algum } p \in \mathcal{I}_F \setminus (\text{Sing}(\mathcal{I}_F) \cup \text{Sing}(Y))\}$, temos:

$$U \subseteq \varphi_{FG}(\mathbb{P}^n \setminus Z) \text{ e } U \subseteq V.$$

Logo, $\overline{U} \subseteq \mathcal{I}_{FG}$ e $\overline{U} \subseteq \overline{V}$. Assim, $\mathcal{I}_{FG} \subseteq \mathcal{I}_F^*$.

□

Nesse momento enunciaremos alguns resultados, entre estes que os cones em \mathbb{P}^3 são as únicas hipersuperfícies com hessiano nulo, como também que o fecho da imagem do mapa polar é uma curva plana irredutível e racional, se $X \subset \mathbb{P}^4$ tem hessiano nulo e não é cone.

Proposição 2.4. Seja $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ uma hipersuperfície de grau $d \geq 3$. Então X tem Hessiano nulo se, e somente se, X é um cone. Mais precisamente, X tem Hessiano nulo se, e somente se, X é um cone sobre uma curva com vértice um ponto ou X consiste de d planos distintos contendo uma reta. No primeiro caso \mathcal{I}_F é um plano em \mathbb{P}^{3*} , enquanto no segundo caso este é uma reta em \mathbb{P}^{3*} .

Demonstração. Veja Teorema 3.0.15, em [12].

□

Corolário 2.6. Seja $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n$, $n \geq 4$ uma hipersuperfície de grau d . Se X tem Hessiano nulo e se $\dim \mathcal{I}_F \leq 2$, então X é um cone.

A próxima proposição foi “generalizada” no Corolário C.0.13 em [12], de acordo com nossa necessidade a formularemos num caso específico.

Proposição 2.5. Sejam $q \in \varphi_{FG}(\mathbb{P}^n \setminus Z)$ e $w \in \overline{\varphi_{FG}^{-1}(q)} \setminus \varphi_{FG}^{-1}(q)$, então $\langle w, q \rangle \subseteq Z$.

O resultado preliminar seguinte da uma descrição geométrica de \mathcal{I}_F no caso de hipersuperfícies com hessiano nulo em \mathbb{P}^4 que não são cones.

Proposição 2.6. Seja $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^4$ uma hipersuperfície de grau $d \geq 3$ que não é cone. Se $X = \mathcal{Z}(F)$ tem Hessiano nulo, então $\mathcal{I}_F^* \subset \mathbb{P}^4$ é uma curva plana irredutível racional. Equivalentemente, \mathcal{I}_F é um cone com vértice uma reta sobre uma curva plana irredutível racional.

Demonstração. Como X não é cone e $h_X = 0$, segue do Corolário 2.6 que $\dim \mathcal{I}_F \geq 3$. Sabemos que $\mathcal{I}_F \subsetneq \mathbb{P}^{4*}$, logo $\dim \mathcal{I}_F = 3$.

Lembremos que ao definir $\varphi_{FG} : \mathbb{P}^4 \cdots \rightarrow \mathbb{P}^4$, escolhemos G irredutível de modo que $\mathcal{I}_F \subseteq Y = \mathcal{Z}(G)$ e $\mathcal{I}_F \not\subseteq \text{Sing}(Y)$. Assim, $\mathcal{I}_F = Y = \mathcal{Z}(G)$.

Além disso, podemos afirmar que $\mathcal{I}_F^* = \overline{\varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z)}$. Do Teorema 2.5 temos que $\mathcal{I}_{FG} \subseteq \mathcal{I}_F^*$. Note que $\mathcal{I}_F^* = \overline{A} \subset \mathbb{P}^{4**} \equiv \mathbb{P}^4$, onde

$$\begin{aligned} A &= \{ \Lambda \subset \mathbb{P}^{4**} \mid \Lambda = \mathbb{T}_\eta \mathcal{I}_F, \text{ para algum } \eta \in \mathcal{I}_F \setminus \text{Sing}(\mathcal{I}_F) \} \\ &= \{ \Lambda \subset \mathbb{P}^{4**} \mid \Lambda = \mathcal{Z} \left(\frac{\partial G}{\partial y_0}(\eta)x_0 + \dots + \frac{\partial G}{\partial y_n}(\eta)x_n \right), \text{ para algum } \eta \in \mathcal{I}_F \setminus \text{Sing}(\mathcal{I}_F) \} \\ &= \left\{ \left[\frac{\partial G}{\partial y_0}(\eta) : \dots : \frac{\partial G}{\partial y_n}(\eta) \right] \mid \text{ para algum } \eta \in \mathcal{I}_F \setminus \text{Sing}(\mathcal{I}_F) \right\}. \end{aligned}$$

Sendo $\text{Sing}(X) \subseteq Z$, e consequentemente $\mathbb{P}^4 \setminus Z \subseteq \mathbb{P}^4 \setminus \text{Sing}(X)$, temos $\mathcal{I}_F = \overline{\varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z)}$. Recorde também que

$$\begin{aligned} \varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z) &= \left\{ \left[\frac{\partial G}{\partial y_0}(\varphi_F(\xi)) : \dots : \frac{\partial G}{\partial y_n}(\varphi_F(\xi)) \right] \mid \xi \in \mathbb{P}^4 \setminus Z \right\} \\ &= \left\{ \left[\frac{\partial G}{\partial y_0}(\eta) : \dots : \frac{\partial G}{\partial y_n}(\eta) \right] \mid \text{ para algum } \eta \in \mathcal{I}_F \setminus \text{Sing}(\mathcal{I}_F) \right\}. \end{aligned}$$

Se $B \subset \mathbb{P}^{4**}$ é um fechado qualquer contendo $\varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z)$. Tome $h \in I(B)$, assim para cada $\eta \in \varphi_F(\mathbb{P}^4 \setminus Z)$ temos, $h \left(\frac{\partial G}{\partial y_0}(\eta), \dots, \frac{\partial G}{\partial y_n}(\eta) \right) = 0$. Logo,

$$\varphi_F(\mathbb{P}^4 \setminus Z) \subset \mathcal{Z} \left(\frac{\partial G}{\partial y_0}(z), \dots, \frac{\partial G}{\partial y_n}(z) \right).$$

Donde,

$$\mathcal{I}_F \subseteq \mathcal{Z} \left(\frac{\partial G}{\partial y_0}(z), \dots, \frac{\partial G}{\partial y_n}(z) \right).$$

Comparando os conjuntos exibidos acima, a saber A e $\varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z)$, das constatações feitas a partir do B e da escolha arbitrária do mesmo, concluímos que $A \subset B$. Passando o fecho na inclusão anterior obtemos assim o desejado, que era a outra inclusão, isto é,

$$\mathcal{I}_F^* \subseteq \overline{\varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z)}.$$

Sabemos que $\overline{\varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z)} \subseteq Z$, veja Proposição 3.0.12 em [12], e que $\dim Z \leq 4 - 2 = 2$. Assim, $\dim \mathcal{I}_F^* = \dim \overline{\varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z)} \leq \dim Z \leq 2$. Como X não é um cone, temos que $\dim \mathcal{I}_F^* \geq 1$. Vamos

analisar dois casos, isto é, $\dim \mathcal{I}_F^* = 1$ e $\dim \mathcal{I}_F^* = 2$.

Assuma que $\dim \mathcal{I}_F^* = 2$. Sabemos que \mathcal{I}_F é irredutível, logo segue da Proposição 2.1 que \mathcal{I}_F^* também é irredutível. Além disso, como $\mathcal{I}_F^* \subseteq Z$ tem dimensão 2, concluímos que \mathcal{I}_F^* é uma componente irredutível de dimensão 2 de Z . Do Teorema da dimensão das fibras existe $V \subset \mathcal{I}_F^*$, aberto, tal que $\dim \varphi_{FG}^{-1}(q) = 4 - 2 = 2$, para todo $q \in V \cap \varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z)$. Sejam $s_1, s_2 \in V \cap \varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z) \subseteq \mathcal{I}_F^*$, então $\overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_1)} \cap \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_2)} \neq \emptyset$ e podemos escolher $t \in \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_1)} \cap \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_2)}$. Note que $\overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_i)} = [\overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_i)} \setminus \varphi_{FG}^{-1}(s_i)] \cup \varphi_{FG}^{-1}(s_i)$ e $\varphi_{FG}^{-1}(s_1) \cap \varphi_{FG}^{-1}(s_2) = \emptyset$, logo $t \in Z$. Além disso, $t \in \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_i)} \setminus \varphi_{FG}^{-1}(s_i)$, para todo $i \in \{1, 2\}$, segue da Proposição 2.5 que $\langle t, s_i \rangle \subset Z$.

Sabemos que $\ell_{s_i} = \langle t, s_i \rangle$, $i = 1, 2$ está contida em Z . Assim, para cada $s \in V \cap \mathcal{I}_F^*$, existe $\ell_s \subseteq Z$, que deve estar contida em alguma componente irredutível de Z . Sejam $Z_1 = \mathcal{I}_F^*, Z_2, \dots, Z_k$ as componentes irredutíveis de Z de dimensão 2 e L_1, \dots, L_m as componentes irredutíveis de Z de dimensão menor ou igual a 1. Defina $\Omega = \{s \in V \cap \mathcal{I}_F^* \mid \exists \ell_s \subseteq \mathcal{I}_F^* \text{ e } s \in \ell_s\}$. Logo, $V \cap \mathcal{I}_F^* = \Omega \cup \Omega^c$ e $\dim \overline{\Omega^c} \leq 1$, pois $\overline{\Omega^c} \subseteq V \cap \mathcal{I}_F^* \cap Z_2 \cup \dots \cup V \cap \mathcal{I}_F^* \cap L_m$. Agora, $\overline{V \cap \mathcal{I}_F^*} = \mathcal{I}_F^* = \overline{\Omega} \cup \overline{\Omega^c}$, como \mathcal{I}_F^* é irredutível de dimensão 2, concluímos que $\mathcal{I}_F^* = \overline{\Omega}$.

Portanto, $\mathcal{I}_F^* = \overline{\cup_{s \in \Omega} \ell_s}$. Mostra-se que \mathcal{I}_F^* é um cone. Sendo \mathcal{I}_F^* cone, então $\mathcal{I}_F \equiv \mathcal{I}_F^{**}$ é degenerada. Como $X^* \subset \mathcal{I}_F$ também será degenerada, logo X é um cone. Absurdo!

Assim só nos resta a possibilidade de $\dim \mathcal{I}_F^* = 1$. Neste caso, se $s_1, s_2 \in \mathcal{I}_F^*$ forem pontos gerais teremos que $\dim \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_i)} = 3$. Podemos supor que todas as componentes irredutíveis de $\overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_i)}$ tem dimensão 3, logo $\overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_i)} = \mathcal{Z}(f_i)$, para todo $i \in \{1, 2\}$. Portanto, $\overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_1)} \cap \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_2)} = \mathcal{Z}(f_1, f_2) = R$ tem dimensão 2. Além disso, $R \subset Z$. Assim, $\dim Z = 2$. Como Z admite um número finito de componentes irredutíveis de dimensão 2, temos que para $s_1, s_2 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{I}_F^*$ gerais verifica-se que $\overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_1)} \cap \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s_2)} = R$, será constante. Sejam $s \in \mathcal{I}_F^* = \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s)}$ e $t \in R \subset Z \cap \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s)}$, então $\langle s, t \rangle \subset Z$. De fato, como $\overline{\varphi_{FG}^{-1}(s)}$ é um cone e $s \in \text{Vert}(\overline{\varphi_{FG}^{-1}(s)})$, concluímos que $\langle s, t \rangle \subset \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s)}$ também. Logo, $\langle s, t \rangle \subset Z \cap \overline{\varphi_{FG}^{-1}(s)}$. A seguir verificaremos que cada componente irredutível de R é um cone. Seja $\tilde{R} \subseteq R$ uma componente irredutível de dimensão 2 de R . Fixe $s \in \mathcal{I}_F^*$ e defina $\Omega = \{t \in \tilde{R} \mid \langle s, t \rangle \subset R\}$.

Afirmção 2.1. $\overline{\Omega} = \tilde{R}$.

De fato, sejam $Z_1 = \tilde{R}, Z_2, \dots, Z_k$, as componentes irredutíveis de dimensão 2 de Z e L_1, \dots, L_m as componentes irredutíveis de Z de $\dim \leq 1$. Para cada $t \in \tilde{R}$, temos $\ell_{s,t} = \langle s, t \rangle \subseteq Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_k \cup L_1 \cup \dots \cup L_m$.

Como $\ell_{s,t}$ é irredutível deve estar contida em alguma componente irredutível de Z . Para cada $t \in \Omega^c$ em \tilde{R} , isto é, $t \in \tilde{R}$ e $\ell_{s,t} \not\subseteq \tilde{R}$, então $\ell_{s,t}$ deve estar contida em alguma das componentes irredutíveis $Z_2, \dots, Z_k, L_1, \dots, L_m$. Assim, $\Omega^c \subseteq \tilde{R} \cap Z_2 \cup \dots \cup \tilde{R} \cap Z_k \cup \tilde{R} \cap L_1 \cup \dots \cup \tilde{R} \cap L_m$.

Note que $\dim \tilde{R} \cap Z_i \leq 1$ e $\dim \tilde{R} \cap L_j \leq 1$, com $2 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq m$. Logo, $\dim \overline{\Omega^c} \leq 1$. Como $\tilde{R} = \Omega \cup \Omega^c$, temos $\tilde{R} = \overline{\Omega} \cup \overline{\Omega^c}$. Sendo \tilde{R} irredutível, concluímos que $\tilde{R} = \overline{\Omega}$ ou $\tilde{R} = \overline{\Omega^c}$. Donde $\tilde{R} = \overline{\Omega}$, pois $\dim \tilde{R} = 2$.

Observe que $\bigcup_{t \in \Omega} \ell_{s,t} \subseteq \tilde{R}$. Donde, $\overline{\bigcup_{t \in \Omega} \ell_{s,t}} \subseteq \tilde{R}$, logo $\overline{\bigcup_{t \in \tilde{R}} \ell_{s,t}} \subseteq \tilde{R}$. Daí, $\ell_{s,t} \subset \overline{\bigcup_{t \in \tilde{R}} \ell_{s,t}} = \tilde{R} \subseteq R$, para todo $t \in \tilde{R}$.

Note que R é de dimensão pura 2, isto é, toda componente irredutível de R tem dimensão exatamente 2. Logo dado $t \in R$, temos $t \in \tilde{R}$, para alguma \tilde{R} componente irredutível de dimensão 2. Pela afirmação $\ell_{s,t} \subset \tilde{R} \subseteq R$. Assim, $R = \bigcup_{t \in R} \ell_{s,t}$. Logo R é um cone.

Além disso, $\mathcal{I}_F^* \subset R$. De fato, $\mathcal{I}_F^* \subset \text{Vert}(R)$. Como R é um cone e $\text{Vert}(R)$ é uma variedade linear de dimensão menor ou igual a 2, temos que: Se $\dim \text{Vert}(R) = 1$, então $\mathcal{I}_F^* \equiv \mathbb{P}^1$. Donde, $\mathcal{I}_F \equiv \mathbb{P}^2$, e conseqüentemente X^* é degenerada. Daí, X é um cone. Absurdo! Por outro lado, se $\dim \text{Vert}(R) = 2$, então R é um plano. Assim, \mathcal{I}_F^* é uma curva plana tal que $\langle \mathcal{I}_F^* \rangle = R \subset Z$. □

Agora vamos provar um fato isolado necessário no nosso próximo resultado.

Lema 2.7. Seja $S \subsetneq \mathbb{P}^n$. Defina

$$C(S) = \{a \in \mathbb{A}^{n+1} \mid a = 0 \text{ ou } [a] \in S\}.$$

Então $\overline{C(S)} = C(\overline{S})$, onde \overline{S} é o fecho de S em \mathbb{P}^n . O conjunto $C(S)$ é chamado de *Cone Afim*.

Demonstração. Como $S \subseteq \overline{S} \subseteq \mathbb{P}^n$, temos que $C(S) \subseteq C(\overline{S})$. Sendo \overline{S} um fechado em \mathbb{P}^n podemos considerá-lo da seguinte forma $\overline{S} = \mathcal{Z}(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathbb{P}^n$. Além disso, $C(\overline{S}) = \mathcal{Z}^A(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$, ou seja, $C(\overline{S})$ é um fechado em \mathbb{A}^{n+1} contendo $C(S)$. Portanto, $\overline{C(S)} \subseteq C(\overline{S}) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Para verificar a outra inclusão observe que

$$\overline{C(S)} = \bigcap_{C(S) \subseteq F} F,$$

onde F é fechado em \mathbb{A}^{n+1} . Tome $F = \mathcal{Z}^A(I)$ fechado em \mathbb{A}^{n+1} contendo $C(S)$. Logo, para cada $g \in I$ temos que $g(0) = 0$ e $g(a) = 0$, pois $0 \in C(S)$ e $[a] \in S$, $a \neq 0$, respectivamente. Escrevamos g como soma das suas partes homogêneas, isto é, $g = g_0 + \dots + g_d$. Logo, $g_0 = 0$, pois $g(0) = 0$. Além disso, $g(\lambda a) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Donde, $\lambda g_1(a) + \dots + \lambda^d g_d(a) = 0$, e assim $g_i(a) = 0$, para todo $[a] \in S$. Daí, $g_i \in I(S) = I(\overline{S}) = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$, isto é, existem a_{ij} tais que $g_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} f_j$, $i = 1, \dots, d$. Assim, $g_i(b) = 0$, para todo $[b] \in \overline{S}$ e $i = 1, \dots, d$. Logo, $C(\overline{S}) \subseteq \mathcal{Z}^A(g)$, para todo $g \in I$. Mais ainda, $C(\overline{S}) \subseteq \bigcap_{g \in I} \mathcal{Z}^A(g) = \mathcal{Z}(I) = F$. E da definição de fecho, $C(\overline{S}) \subseteq \overline{C(S)}$. Portanto, $C(\overline{S}) = \overline{C(S)}$. □

O lema seguinte é chamado de Lema chave e podemos encontrar sua prova em [12].

Lema 2.8. (Chave) Sejam $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ e $H = (H_0, \dots, H_n)$, então

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} H_i \equiv 0 \Leftrightarrow F(v) = F(v + \lambda H(v)), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } \forall v \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Proposição 2.7. Sejam $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, então $f_i(x) = f_i(x + \lambda \varphi_{FG}(x))$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{C}^{n+1}$. Assim, $f_i(p) = f_i(p + \lambda q)$, para todo $p \in \overline{\varphi_{FG}^{-1}(q)}$.

Demonstração. Note que $\sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} H_i = 0$, esta relação é obtida diferenciando a equação $G(H_0, \dots, H_n) = 0$ com respeito a x_j e aplicando a regra da cadeia. Do Lema 2.8 $f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x} + \lambda \varphi_{FG}(\underline{x}))$. Considere $\Lambda_i(x) = f_i(x) - f_i(x + \lambda \varphi_{FG}(x))$ e $S = \overline{\varphi_{FG}^{-1}(q)}$, com $q \in \varphi_{FG}(\mathbb{P}^n \setminus Z)$. Assim, para cada $p \in C(\varphi_{FG}^{-1}(q))$, temos que $f_i(p) = f_i(p + \lambda q)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Onde, $C(\varphi_{FG}^{-1}(q)) \subseteq \mathcal{Z}^A(\Lambda_i)$, e em consequência do Lema 2.7 $C(\overline{\varphi_{FG}^{-1}(q)}) = \overline{C(\varphi_{FG}^{-1}(q))} \subseteq \mathcal{Z}^A(\Lambda_i)$ \square

Finalmente vamos mostrar um resultado que será muito importante na caracterização de Franchetta hipersuperfícies no último capítulo, pois devido a ele provamos que o plano Π esta contido na hipersuperfície X .

Proposição 2.8. Sobre as notações acima e supondo X não cone, seja $q \in \mathcal{I}_{FG}$ um ponto geral e $t \in \text{Sing}(X)$. Se $t \in \overline{\varphi_{FG}^{-1}(q)} \setminus \{q\}$, então a variedade linear gerada $\langle t, q \rangle$ está contida em $\text{Sing}(X)$.

Demonstração. Pela Proposição 2.6 e Teorema 2.5 concluímos que a dimensão de \mathcal{I}_{FG} é 1. Por outro lado, a partir do Teorema da dimensão da fibra temos que $\dim \varphi_{FG}^{-1}(q) \geq 4 - 1 = 3$. Onde, $\dim \overline{\varphi_{FG}^{-1}(q)} \geq 3$. Logo, $\mathcal{I}_{FG} \cap \overline{\varphi_{FG}^{-1}(q)} \neq \emptyset$. Seja $q \in \varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z) \subseteq \mathcal{I}_{FG}$ e $t \in \mathcal{I}_{FG} \cap \overline{\varphi_{FG}^{-1}(q)}$, então da Proposição 2.7,

$$\{ a \in \ell_{t,q} | q \neq t \text{ e } q \in \varphi_{FG}(\mathbb{P}^4 \setminus Z) \} \subset \text{Sing}(X).$$

Portanto, $\ell_{t,q} \subset \text{Sing}(X)$. \square

Outra observação geral e útil é o seguinte lema. Que nos dá uma ligação entre o mapa polar da restrição a uma seção hiperplana com a geometria de \mathcal{I}_F . No próximo resultado usamos um mapa especial π_h , chamado de Projecção, cuja definição consta no apêndice.

Lema 2.9. Sejam $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície, $H = \mathbb{P}^{n-1}$ um hiperplano não contido em X e $h = H^*$ o ponto correspondente em \mathbb{P}^{n*} . Então:

$$\varphi_{X \cap H} = \pi_h \circ (\varphi_F|_H).$$

Em particular, $\mathcal{I}_{X \cap H} \subset \pi_h(\mathcal{I}_F)$, onde $\mathcal{I}_{X \cap H}$ denota o fecho da imagem do mapa polar $\varphi_{X \cap H}$ da hipersuperfície $X \cap H$ de H .

Demonstração. Nessa demonstração vamos usar o fato de existir uma mudança de coordenada que identifica qualquer hiperplano com o hiperplano coordenado $\mathcal{Z}(x_n)$, a construção desse fato se encontra no apêndice. Por usarmos várias identificações nessa prova, a faremos via esquemas, o que irá facilitar a visualização da igualdade acima.

Inicialmente colocaremos um esquema mostrando o que está acontecendo de um lado da igualdade. Seja $X = \mathcal{Z}(F)$ e $H = \mathcal{Z}(x_n) = \mathbb{P}^{n-1}$, tal que H não está contido em X . Lembre que $h = H^* = \{H\} \equiv [0 : \dots : 0 : 1] \in \mathbb{P}^n$ e das identificações feita no início desse capítulo. Observe o seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccccccc} H \cap X \subset H & \longleftrightarrow & \tilde{X} \subset \mathbb{P}^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{\tilde{X}}} & \mathbb{P}^{n-1*} & \xrightarrow{i \circ \Gamma \circ \Lambda} & \mathcal{Z}(x_n) \\ [q_0 : \dots : q_{n-1} : 0] & \longleftrightarrow & q = [q_0 : \dots : q_{n-1}] & \mapsto & \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(q)\right) & \mapsto & \left[\frac{\partial g}{\partial x_0}(q) : \dots : \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}(q) : 0\right], \end{array}$$

onde $\tilde{X} = \mathcal{Z}(g(x_0, \dots, x_{n-1}))$ e $g = F(x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$. Note que, $g = F \circ i$, e assim $\frac{\partial g}{\partial x_i}(q) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(i(q)) \frac{\partial i}{\partial x_i}(q)$.

Por outro lado,

$$\begin{array}{ccccccc} H & \xrightarrow{\varphi_F|_H} & \mathbb{P}^{n*} \setminus \{h\} & \xleftarrow{\Gamma \circ \Lambda} & \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\pi_h} & \mathcal{Z}(x_n) \\ \underline{q} = [q_0 : \dots : q_{n-1} : 0] & \mapsto & \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(q)\right) & \longleftrightarrow & [F_0(q) : \dots : F_n(q)] & \mapsto & [F_0(q) : \dots : F_{n-1}(q) : 0]. \end{array}$$

Obtemos assim a igualdade, a menos de identificações.

□

Capítulo 3

Classificação das hipersuperfícies com hessiano nulo em \mathbb{P}^4

No primeiro capítulo vimos que a classe de GN-hipersuperfícies do tipo $(4, 2, 1, s)$ e das Franchetta hipersuperfícies coincidem. Neste capítulo usaremos alguns resultados desenvolvidos ao longo do trabalho e outros fatos, para os quais fomos capazes de fornecer uma prova sucinta nesse capítulo. Vamos provar de uma forma geométrica que as hipersuperfícies em \mathbb{P}^4 com Hessiano nulo são cones ou Franchetta hipersuperfícies e que não há outras possibilidades. Um resultado semelhante, não é conhecido em dimensão maior.

O próximo lema mostrará que o fecho da imagem pelo mapa polar de uma variedade, que é a união de planos em \mathbb{P}^3 contendo uma reta, é uma reta em \mathbb{P}^{3*} .

Lema 3.1. Seja $Y = \bigcup_{i=1}^k \Pi_i \subset \mathbb{P}^3$, onde os Π_i 's são planos contendo a reta ℓ , a qual podemos considerar a menos de mudança de coordenada projetiva sendo $\ell = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$. Então, $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathbb{P}^{3*}$ é uma reta. Além disso, $\mathcal{I}_Y = \ell^*$.

Demonstração. Como $\mathcal{Z}(x_0, x_1) \subset \Pi_i = \mathcal{Z}(h_i)$, temos $h_i \in \langle x_0, x_1 \rangle$. Consequentemente, $\Pi_i = \mathcal{Z}(a_i x_0 + b_i x_1)$, $[a_i : b_i] \in \mathbb{P}^1$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Logo, $Y = \mathcal{Z}(f)$, com $f = (a_1 x_0 + b_1 x_1) \cdots (a_k x_0 + b_k x_1)$. Considere o mapa polar de Y , isto é,

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathbb{P}^3 &\cdots \rightarrow \mathbb{P}^{3*} \\ q &\longmapsto \left[\frac{\partial f}{\partial x_0}(q) : \frac{\partial f}{\partial x_1}(q) : 0 : 0 \right]. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi_f(\mathbb{P}^3 \setminus \text{Sing}(Y)) \subset \mathcal{Z}(y_2, y_3)$, onde $\mathcal{Z}(y_2, y_3)$ é uma reta em \mathbb{P}^{3*} . Donde, $\dim \mathcal{I}_Y = 0$ ou $\dim \mathcal{I}_Y = 1$. Suponha que $\dim \mathcal{I}_Y = 0$. Note que \mathcal{I}_Y é um fechado irredutível, então $\mathcal{I}_Y = \{P\} \subset \mathbb{P}^{3*}$, onde $P \subset \mathbb{P}^3$ é um plano. Dualizando obtemos $\mathcal{I}_Y^* = \{P\}^* \subset \mathbb{P}^{3^{**}}$ é um plano em $\mathbb{P}^{3^{**}} \cong \mathbb{P}^3$. Pelo Teorema de ZAK 2.3 $\mathcal{I}_Y^* \subseteq \text{Sing}(Y)$, onde $\text{Sing}(Y)$ é uma reta. Assim, $\dim \mathcal{I}_Y^* \leq 1$. Absurdo, pois \mathcal{I}_Y^* é um plano. Logo, $\dim \mathcal{I}_Y = 1$ e portanto $\mathcal{I}_Y = \mathcal{Z}(y_2, y_3)$. Mais

ainda, $\ell^* = \{\Lambda \mid \Lambda \text{ é um plano contendo } \ell\} = \{\mathcal{Z}(ax_0 + bx_1) \mid [a : b] \in \mathbb{P}^1\} \longleftrightarrow \{[a : b : 0 : 0] \mid [a : b] \in \mathbb{P}^1\} \equiv \mathcal{Z}(y_2, y_3)$. Daí, $\mathcal{I}_Y = \ell^*$.

□

Observação 3.1. No lema anterior usamos que a singularidades de Y , $\text{Sing}(Y)$ é uma reta. Mostraremos agora que nas condições do Lema 3.1 $\text{Sing}(Y)$ é exatamente essa reta ℓ . De fato, claramente $\ell \subseteq \text{Sing}(Y)$, logo provaremos a outra inclusão apenas. Seja $v \in \text{Sing}(Y) \setminus \ell$, então $f(v) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(v) = 0$, para cada $i \in \{0, \dots, 3\}$. Note que, se $v \in Y$, então $v \in \Pi_i$, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $v = [v_0 : \dots : v_3] \in \Pi_1$, então $a_1 v_0 + b_1 v_1 = 0$. Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = a_1 \left(\prod_{i=2}^k (a_i x_0 + b_i x_1) \right) + (a_1 x_0 + b_1 x_1) \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\prod_{i=2}^k (a_i x_0 + b_i x_1) \right).$$

Logo, aplicamos em v , concluímos que $a_1 = 0$ e pelo mesmo procedimento $b_1 = 0$. Absurdo! Obtendo assim o resultado.

Continuando nesse ambiente de união de planos contendo uma reta vamos agora mostrar que o dual dessa variedade em \mathbb{P}^3 é um conjunto finito de pontos.

Proposição 3.1. Seja $Y = \bigcup_{i=1}^k \Pi_i \subset \mathbb{P}^3$, onde os Π_i 's são planos contendo a reta ℓ , a qual podemos considerar a menos de mudança de coordenada projetiva sendo $\ell = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$. Então, $Y^* = \{p_1, \dots, p_k\}$.

Demonstração. Antes de começarmos a prova vamos observar um fato. Se $v \in \Pi_j \setminus \ell$, então $T_v Y = \Pi_j$. Note que,

$$T_v Y = \mathcal{Z} \left((a_j x_0 + b_j x_1) \prod_{i \neq j} (a_i v_0 + b_i v_1) \right).$$

Logo, claramente $\Pi_j \subseteq T_v Y$. Por outro lado, se $u \in T_v Y$, então $a_j u_0 + b_j u_1 = 0$, já que $\prod_{i \neq j} (a_i v_0 + b_i v_1) \neq 0$.

Voltando ao nosso resultado, Temos:

$$\begin{aligned} Y^* &= \overline{\{\Omega \subset \mathbb{P}^3 \mid \Omega \text{ é um 2-plano e } T_v Y = \Omega, \text{ para algum } v \in Y \setminus \ell\}} \\ &= \{\Pi_1, \dots, \Pi_k\} = \{p_1, \dots, p_k\}, \end{aligned}$$

onde $p_i = \Pi_i \in \mathbb{P}^{3*}$.

□

A próxima proposição caracteriza os 2–planos contidos num cone irredutível em \mathbb{P}^4 satisfazendo certas condições.

Proposição 3.2. Seja $\mathcal{X} = \mathcal{Z}(F(x_0, x_1, x_2)) \subseteq \mathbb{P}^4$ cone irredutível com vértice $\ell = \mathcal{Z}(x_0, x_1, x_2)$ sobre a curva $\Gamma = \mathcal{Z}(F(x_0, x_1, x_2), x_3, x_4) = \mathcal{X} \cap H$, de grau $d \geq 3$, onde $H = \mathcal{Z}(x_3, x_4)$. Considerando $\Lambda \subset \mathbb{P}^4$ um 2-plano contido em \mathcal{X} existe $a \in \Gamma$ de modo que $\Lambda = \langle a, \ell \rangle$.

Demonstração. Nas condições acima sabemos que $H \cap \Lambda \neq \emptyset$ e $\dim H \cap \Lambda \geq 0$. Temos duas possibilidades para interseção do 2-plano Λ com a curva Γ , isto é, $\Gamma \cap \Lambda = \emptyset$ ou $\Gamma \cap \Lambda \neq \emptyset$. Suponha que $\Gamma \cap \Lambda = \emptyset$. Note que, para todo $x \in \Lambda$ temos $x \notin \Gamma$. Mas $\emptyset \neq H \cap \Lambda \subset H \cap \mathcal{X} = \Gamma$. Absurdo! Logo acontece o segundo caso, o qual mostraremos que é um conjunto unitário. De fato, suponha que exista $a, b \in \Lambda \cap \Gamma$, tal que $a \neq b$, então $\ell_{a,b} \subset \Lambda \subset \mathcal{X}$. Onde, $\ell_{a,b} \subset H \cap \Lambda \subset H \cap \mathcal{X} = \Gamma$. Daí, $\ell_{a,b} = \Gamma$, o que é uma contradição já que $d \geq 3$. Assim, se Λ é um 2-plano contido em \mathcal{X} , então existe um único $a \in \Gamma \cap \Lambda$. Agora, veremos que $\ell \subset \Lambda$. Suponha por absurdo que $\ell \not\subset \Lambda$, então existe $q \in \ell$ tal que $q \notin \Lambda$. Considere o 3-plano $\Omega = \langle \Lambda, q \rangle$. Como $\Lambda \subset \mathcal{X}$ e $q \in \ell$, temos $\Omega \subset \mathcal{X}$. De fato, seja $\Lambda = \mathbb{P}([v_1, v_2, v_3])$ um 2-plano e $q = [0 : 0 : 0 : q_3 : q_4] \in \ell$, então $\Omega = \mathbb{P}([v_1, v_2, v_3, u])$ com $u = (0, 0, 0, q_3, q_4)$. Onde, para todo $w \in \Omega$ temos $w = [v]$, $v = v_4 + \alpha u$ e $v_4 \in [v_1, v_2, v_3]$. Sendo \mathcal{X} cone, concluímos que $w \in \ell_{q, [v_4]} \subset \mathcal{X}$. Logo, $H \cap \Omega \subseteq H \cap \mathcal{X} = \Gamma$. Como $\dim H \cap \Omega \geq 1$, temos $H \cap \Omega = \Gamma$ é uma reta. Absurdo, pois novamente contradiz o grau da curva Γ . Assim, $\ell \subset \Lambda$. Note que, $a \notin \ell \subseteq \Lambda$ e $a \in \Lambda$. Portanto, $\langle \ell, a \rangle \subseteq \Lambda$, o que implica em $\Lambda = \langle \ell, a \rangle$. □

Corolário 3.2. Nas condições da proposição anterior. Se Λ é um plano, então podemos escolher $h_1 = b_0x_1 - b_1x_0, h_2 = b_0x_2 - b_2x_0 \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_4]$ lineares tais que $\Lambda = \mathcal{Z}(h_1, h_2)$.

Demonstração. Da proposição anterior deduzimos que $\Lambda = \langle \ell, b \rangle$, com $b = [b_0 : b_1 : b_2 : 0 : 0]$, sem perder a generalidade podemos supor $b_0 \neq 0$. Sendo Λ um plano em \mathbb{P}^4 , temos que existem $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ lineares tais que $\mathcal{I}(V) = \langle f_1, f_2 \rangle$. Digamos que $f_1 = Ax_0 + Bx_1 + Cx_2 + Dx_3 + Fx_4$ e considere $u = [0 : 0 : 0 : 1 : 0], v = [0 : 0 : 0 : 0 : 1] \in \ell$, temos $f_1(u) = f_1(v) = 0$. Onde $D = F = 0$. A partir de $b \in \Lambda$ concluímos que $Ab_0 + Bb_1 + Cb_2 = 0$. Logo, $A = -B\frac{b_1}{b_0} - C\frac{b_2}{b_0}$. Substituindo em f_1 , chegamos em $f_1 = B(x_1 - \frac{b_1}{b_0}x_0) + C(x_2 - \frac{b_2}{b_0}x_0)$. Fazendo o mesmo procedimento para f_2 , concluímos que $f_2 \in \langle h_1, h_2 \rangle$. Assim, podemos escolher como geradores h_1 e h_2 no lugar de f_1 e f_2 . □

Corolário 3.3. Ainda nas condições acima. Seja Λ o plano no Corolário 3.2, então $\Lambda^* = \mathcal{Z}(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2, x_3, x_4)$.

Demonstração. Vamos calcular $\Lambda^* \subset \mathbb{P}^{4**} \cong \mathbb{P}^4$. Da definição de dual e alguns resultados simples já comentados anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= \{\Omega \subset \mathbb{P}^4 \mid \Omega \text{ um 3-plano e } \Lambda \subset \Omega\} = \{\Omega = \mathcal{Z}(h) \mid h = \alpha h_1 + \beta h_2, [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\} \\ &= \{\Omega = \mathcal{Z}(h) \mid h = (-\alpha b_1 - \beta b_2)x_0 + \alpha b_0 x_1 + \beta b_0 x_2\} = \{[-\alpha b_1 - \beta b_2 : \alpha b_0 : \beta b_0] \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^4. \end{aligned}$$

Após um cálculo básico concluímos que $\Lambda^* = \mathcal{Z}(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2, x_3, x_4)$. □

3.1 Classificação de hipersuperfícies em \mathbb{P}^4 com Hessiano nulo

A descrição dada na Proposição 2.6 é crucial para a prova de que uma hipersuperfície $X = \mathcal{Z}(F)$ em \mathbb{P}^4 com hessiano nulo, que não é um cone, é uma Franchetta hipersuperfície. O resultado seguinte dá finalmente uma caracterização de hipersuperfícies em \mathbb{P}^4 com hessiano nulo e que não são cones.

Teorema 3.4. *Seja $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^4$ uma hipersuperfície irredutível de grau $d \geq 3$ que não é um cone. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $X = \mathcal{Z}(F)$ tem hessiano nulo.
- (ii) $X = \mathcal{Z}(F)$ é uma Franchetta hipersuperfície.
- (iii) $X = \mathcal{Z}(F)$ é uma GN-hipersuperfície geral do tipo $(4, 2, 1, s)$, com $\mu = \lfloor \frac{d}{s} \rfloor$, que tem um plano de multiplicidade $d - \mu$.

Demonstração. Recorde que na Proposição 1.3 já provamos que (iii) implica (i) e na Proposição 1.5 mostramos que (ii) acontece se, e somente se (iii). Agora mostraremos que (i) implica (ii). De fato, pelo Teorema 2.3 temos que $\mathcal{I}_F^* \subseteq \text{Sing}(X) \subset X$. Usando a Proposição 2.6 temos que $\mathcal{I}_F^* \subseteq \mathbb{P}^{4^{**}} \equiv \mathbb{P}^4$ é uma curva plana racional irredutível, chamemos de Π o plano que contém \mathcal{I}_F^* . Como queremos mostrar que X é uma \mathcal{F} -hipersuperfície temos de obter uma curva de grau maior que 1. Logo, vamos mostrar que \mathcal{I}_F^* tem grau maior que 1. Suponha que $\text{grau}(\mathcal{I}_F^*) = 1$, então $\mathcal{I}_F^* \equiv \mathbb{P}^1$, ou melhor, \mathcal{I}_F^* é uma reta em \mathbb{P}^4 . Note que, a bidualidade garante $\mathcal{I}_F = (\mathcal{I}_F^*)^* = (\mathbb{P}^1)^* = \Upsilon$, onde Υ é um plano em \mathbb{P}^{4^*} . Logo X^* é degenerado, assim a Proposição 2.1 nos garante que X é um ponto. Absurdo!

Como \mathcal{I}_F^* é uma curva plana irredutível, temos que $(\mathcal{I}_F^*)^* = \mathcal{I}_F$ é um cone de vértice uma reta $L = \Pi^* \equiv \mathbb{P}^1$ sobre uma curva plana irredutível Γ . Sabemos do Teorema 2.5 item (i) que $\dim \mathcal{I}_{FG} \geq 1$, pois X não é cone, e pelo item (ii) $\mathcal{I}_{FG} \subseteq \mathcal{I}_F^*$. Sendo \mathcal{I}_F^* uma curva irredutível, concluímos que $\mathcal{I}_{FG} = \mathcal{I}_F^*$. Pelo Teorema de Bezout para curvas planas, observamos que dada uma reta $\ell \subset \Pi$ e a curva $\mathcal{I}_F^* \subset \Pi$, a cardinalidade da interseção contém o produto dos graus das curvas. Daí, a interseção é no mínimo dois pontos. Tendo em mente a Proposição 2.8 e $\mathcal{I}_F^* \subseteq \text{Sing}(X)$, concluímos que ℓ está contida em $\text{Sing}(X)$. Assim, $\Pi \subseteq \text{Sing}(X) \subset X$. Considere agora um hiperplano geral $H \subseteq \mathbb{P}^4$ passando através do plano Π , e não contido em X . A interseção $X \cap H$ é uma hipersuperfície em $H \equiv \mathbb{P}^3$ contendo o plano Π com multiplicidade $\mu \geq 0$, pois X é uma variedade irredutível.

Note que $h = H^* \in L = \Pi^*$, pois $\Pi \subset H$, onde $\pi_h(\mathcal{I}_F)$ é uma superfície naturalmente mergulhada no espaço dual de H . Antes de prosseguirmos indicamos aos leitores não familiarizados com

projeção de um ponto num hiperplano que vejamos no apêndice o exemplo A.3. Logo $\pi_h(\mathcal{I}_F)$ é um cone com vértice um ponto $p_L = \pi_h(L)$ sobre a curva plana $\widehat{\Gamma} = \pi_h(\Gamma)$. De fato, sabendo que a forma geométrica independe do hiperplano concluímos a partir do exemplo A.3 que, $\pi_h(L)$ é um ponto e $\pi_h(\Gamma)$ é uma curva plana. Além disso, para cada reta $\ell_{a,b} \subset \mathcal{I}_F$, com $a \in \Gamma$ e $b \in L$, temos que $\pi_h(\ell_{a,b}) = \ell_{\pi_h(b), p_L}$ e $p_L = [0 : 0 : 0 : 1 : 0]$. Assim,

$$\pi_h\left(\bigcup_{a \in \Gamma, b \in L} \ell_{a,b}\right) = \bigcup_{\tilde{b} \in \pi_h(\Gamma)} \ell_{p_L, \tilde{b}}.$$

Portanto, $\pi_h(\mathcal{I}_F)$ é um cone em H^\star , onde $H^\star = \{\Lambda \subset H \mid \Lambda \text{ é um hiperplano em } H\}$.

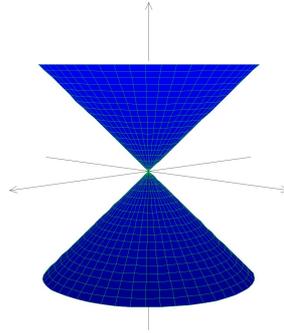


Figura 3.1: Cone com vértice um ponto em \mathbb{P}^3

Pelo Lema 2.9 podemos concluir que $\mathcal{I}_{X \cap H} \subseteq \pi_h(\mathcal{I}_F) \subset \mathbb{P}^{3^*}$. De fato, Sabemos que $H \setminus \text{Sing}(X) \subseteq \mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(X)$, então

$$\varphi_{X \cap H}(H \setminus \text{Sing}(X)) = \pi_h(\varphi_F(H \setminus \text{Sing}(X))) \subseteq \pi_h(\overline{\varphi_F(H \setminus \text{Sing}(X))}) \subseteq \pi_h(\overline{\varphi_F(\mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(X))}).$$

Logo, $\mathcal{I}_{X \cap H} = \overline{\varphi_{X \cap H}(H \setminus \text{Sing}(X))} \subseteq \overline{\pi_h(\overline{\varphi_F(\mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(X))})} = \pi_h(\mathcal{I}_F)$, já que por resultados gerais de geometria algébrica a imagem pela projeção de um fecho é fechado. Como $\pi_h(\mathcal{I}_F) \subseteq \mathbb{P}^{3^*}$ é um cone em \mathbb{P}^{3^*} de vértice um ponto. Assim, do Teorema 2.4 a hipersuperfície $X \cap H \subset H = \mathbb{P}^3$ tem hessiano nulo. Nessas hipóteses, temos da Proposição 2.4 que: $X \cap H$ é um cone sobre uma curva com vértice um ponto ou consiste de planos distintos passando através de uma reta.

Suponha que aconteça o primeiro caso, então $\mathcal{I}_{X \cap H} \subseteq \pi_h(\mathcal{I}_F)$, com $\mathcal{I}_{X \cap H}$ um plano em \mathbb{P}^{3^*} . O que não pode acontecer, já que conhecemos $\pi_h(\mathcal{I}_F)$. Logo acontece o segundo caso, isto é, $\mathcal{I}_{X \cap H}$ é uma reta em $H^\star \equiv \mathbb{P}^{3^*}$ e $X \cap H$ é uma união de planos intersectando a reta $T = \mathcal{I}_{X \cap H}^* \subset H$, pelo Lema 3.1, em $H \equiv \mathbb{P}^3$.

Note que $\Pi^* = \{H \in \mathbb{P}^{4^*} \mid \Pi = \mathcal{Z}(h_1, h_2) \subseteq H\}$ é uma família 1-dimensional de planos, basta considerarmos a seguinte identificação

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{P}^1 &\longleftrightarrow \Pi^* \\ [a : b] &\longmapsto \mathcal{Z}(ah_1 + bh_2). \end{aligned}$$

Considere H geral, isto é, H está num aberto de \mathbb{P}^1 pela identificação acima. Vamos ver agora que $\varphi_F(H) := \overline{\varphi_F(H \setminus \text{Sing}(X))}$ é um plano em \mathbb{P}^{4*} . Do Lema 2.9 temos

$$\varphi_{\tilde{X}}(H \setminus \text{Sing}(X)) = \pi_h(\varphi_F(H \setminus \text{Sing}(X))),$$

onde $\tilde{X} = X \cap H$. Donde, $\mathcal{I}_{\tilde{X}} = \overline{\pi_h(\varphi_F(H \setminus \text{Sing}(X)))}$. Por resultados de topologia geral e Teorema A.1, temos:

$$\mathcal{I}_{\tilde{X}} = \overline{\pi_h(\varphi_F(H \setminus \text{Sing}(Y)))} = \pi_h(\varphi_F(H)) \subseteq \pi_h(\mathcal{I}_X).$$

Já provamos anteriormente, no Lema 3.1, que $\mathcal{I}_{\tilde{X}}$ é uma reta e da definição de mapa polar $\varphi_F(H) \subseteq \mathcal{I}_F$. Logo, $\pi_h(\varphi_F(H)) \subseteq \pi_h(\mathcal{I}_X)$ é uma reta em \mathbb{P}^{4*} . Assim, $\pi_h(\varphi_F(H))$ é um reta passando pelo vértice do cone $\pi_h(\mathcal{I}_X)$. No exemplo A.4 mostramos que a fibra pela projeção de uma reta é um plano menos um ponto, num caso particular. Por resultados gerais de projeção a forma geométrica independe do hiperplano. Logo, podemos usar a mesma ideia, a menos de mudança de coordenada, para provar em \mathbb{P}^{4*} , temos $\varphi_F(H)$ é um plano contido em \mathcal{I}_F . Assim, a partir do Corolário 3.3 $\varphi_F(H)^* = \mathcal{Z}(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2, x_3, x_4)$ é uma reta em \mathbb{P}^4 . Da dualidade da curva \mathcal{I}_F^* em \mathbb{P}^2 , constatamos que $\varphi_F(H)^*$ é uma reta tangente a \mathcal{I}_F^* . Daí, existe um $z \in \mathcal{I}_F^*$ tal que $\mathcal{T}_z\mathcal{I}_F^* = \mathcal{Z}(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2, x_3, x_4)$.

Sabemos do Corolário 3.3 e do Lema 2.9 que $\mathcal{I}_{\tilde{X}}$ é uma reta contida no cone $\pi_h(\mathcal{I}_F)$. Como toda reta nesse cone passa por $\pi_h(L)$ e existe um $b(\alpha) \in \pi_h(\Gamma)$ tal que $\mathcal{I}_{\tilde{X}} = \ell_{b(\alpha), p_L}$. A Observação 2.3 afirma que $\tilde{X}^* \subset \mathcal{I}_{\tilde{X}}$ e a Proposição 3.1 mostra que \tilde{X}^* é um conjunto finito de pontos. Logo, dado $x_i \in \tilde{X}^*$, então existe $[s : t] \in \mathbb{P}^1$ tais que $x_i = [sb_0^\alpha : sb_1^\alpha : sb_2^\alpha : t : 0] \in \ell_{b(\alpha), p_L}$. Da identificação feita no começo do segundo capítulo de dual, temos que $x_i \equiv \mathcal{Z}(g)$, onde $g = sb_0^\alpha x_0 + sb_1^\alpha x_1 + sb_2^\alpha x_2 + tx_3$. Note que, $g \in \langle sb_0^\alpha x_0 + sb_1^\alpha x_1 + sb_2^\alpha x_2, x_3, x_4 \rangle$. Como já comentamos anteriormente na dualização da curva em \mathbb{P}^2 existe $z \in \mathcal{I}_F^*$ tal que $\mathcal{T}_z\mathcal{I}_F^* = \mathcal{Z}(sb_0^\alpha x_0 + sb_1^\alpha x_1 + sb_2^\alpha x_2, x_3, x_4)$. Assim, toda seção geral da variedade X é a união de planos, todos tangentes a curva no mesmo ponto z . Portanto, X é uma Franchetta hipersuperfície. \square

Apêndice A

Miscelânea de geometria algébrica

A.1 Variedades

Definição A.1. Um subconjunto X de \mathbb{P}^n é dito uma *variedade projetiva* se existem polinômios homogêneos $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{P}$ tais que X é o conjunto de zeros desses polinômios, denotamos por: $\mathcal{Z}(F_1, \dots, F_k) = \{[p_0 : \dots : p_n] \in \mathbb{P}^n \mid F_i(p_0, \dots, p_n) = 0, \forall i = 1, \dots, k\}$.

Exemplo A.1. $\mathbb{P}^n = \mathcal{Z}(0)$ e $\emptyset = \mathcal{Z}(1)$.

Observação A.1. As variedades definidas por polinômios em \mathcal{P}_1 são chamadas de variedades lineares em \mathbb{P}^n .

Exemplo A.2. Uma hipersuperfície de grau um em \mathbb{P}^n é chamada de hiperplano. As de grau dois em \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^3 são chamadas de cônicas e superfícies quádricas, respectivamente. Mais ainda, as de grau três em \mathbb{P}^3 são chamadas de superfícies cúbicas.

Motivados pela definição de um hiperplano, vamos definir um mapa chamado de *Projeção de um ponto sobre um hiperplano*. Essa definição será usada no segundo capítulo, mostrando o seu vínculo com um dos mapas polares definidos no mesmo.

Definição A.2. Seja $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ um hiperplano e o ponto $p \in \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}$. Defina o mapa

$$\begin{aligned} \pi_p : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} &\longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ q &\longmapsto \langle p, q \rangle \cap \mathbb{P}^{n-1}, \end{aligned}$$

que é o envio de um ponto $q \in \mathbb{P}^n$, exceto p , para o ponto de interseção da reta $\langle p, q \rangle$ com o hiperplano \mathbb{P}^{n-1} , chamamos esse mapa de *Projeção do ponto p ao hiperplano \mathbb{P}^{n-1}* .

Agora exemplificaremos a definição acima e com isso mostraremos algumas curiosidades muito importantes que usaremos na demonstração do teorema Principal da dissertação.

Exemplo A.3. Considere o ponto $h = [0 : 0 : 0 : \alpha : 1] \in \mathbb{P}^4$, o hiperplano $\mathcal{H} = \mathcal{Z}(x_4) \equiv \mathbb{P}^3$ e a projeção seguinte

$$\begin{aligned} \pi_h : \mathbb{P}^4 \setminus \{[0 : 0 : 0 : \alpha : 1]\} &\longrightarrow \mathcal{H} \equiv \mathbb{P}^3 \\ [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4] &\longmapsto [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 - \alpha a_4 : 0]. \end{aligned}$$

- Seja $\Upsilon = \mathcal{Z}(x_3, x_4)$ um plano em \mathbb{P}^4 tal que $h \notin \Upsilon$. Para cada $a = [sa_0 : sa_1 : sa_2 : t\alpha : t] \in \ell_{h, \tilde{a}}$, com $\tilde{a} = [a_0 : a_1 : a_2 : 0 : 0] \in \Upsilon$ e $[s : t] \in \mathbb{P}^1$, temos $\pi_h(\tilde{a}) = [sa_0 : sa_1 : sa_2 : 0 : 0]$. Donde, $\pi_h(\Upsilon) = \mathcal{Z}(x_3)$ em \mathcal{H} , isto é, $\pi_h(\Upsilon)$ um plano em \mathcal{H} .
- Seja $\ell = \mathcal{Z}(x_2, x_3, x_4)$ uma reta em \mathbb{P}^4 tal que $h \notin \ell$. Para cada $a = [sa_0 : sa_1 : 0 : t\alpha : t] \in \ell_{h, \tilde{a}}$, com $\tilde{a} = [a_0 : a_1 : 0 : 0 : 0] \in \ell$ e $[s : t] \in \mathbb{P}^1$, temos que $\pi_h(\tilde{a}) = [a_0 : a_1 : 0 : 0 : 0]$. Logo, $\pi_h(\ell) = \{\tilde{a}\}$ em \mathcal{H} , isto é, $\pi_h(\ell)$ é um ponto em \mathcal{H} . Isto acontece porque $\ell \subset \mathcal{H}$.
- Se $\alpha \neq 0$, seja $\ell = \mathcal{Z}(x_0, x_1, x_3)$, Observe que ℓ é uma reta em \mathbb{P}^4 tal que $h \notin \ell$ e $\ell \not\subset \mathcal{H}$. Para cada $a = [0 : 0 : sa_2 : t\alpha : sa_4 + t] \in \ell_{h, \tilde{a}}$, com $\tilde{a} = [0 : 0 : a_2 : 0 : a_4] \in \ell$ e $[s : t] \in \mathbb{P}^1$, temos que $\pi_h(\tilde{a}) = [0 : 0 : sa_2 : -\alpha sa_4 : 0] = [0 : 0 : a_2 : -\alpha a_4 : 0]$. Logo, $\pi_h(\ell) = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ em \mathcal{H} , isto é, $\pi_h(\ell)$ é uma reta em \mathcal{H} . Deixamos o caso de $\alpha = 0$, ao leitor interessado.
- Seja $\ell = \mathcal{Z}(x_0, x_1, x_2)$ uma reta em \mathbb{P}^4 tal que $h \in \ell$. Verifica-se que $\pi_h(\ell)$ é um ponto em \mathcal{H} . De fato, após aplicarmos o mesmo raciocínio acima, encontramos que $\pi_h(\ell) = [0 : 0 : 0 : 1 : 0]$ em \mathbb{P}^4 .

Vamos mostrar agora um exemplo em \mathbb{P}^4 que será usado na demonstração do resultado principal do terceiro capítulo, a menos de mudança de coordenada, já que a forma geométrica da fibra pela projeção independe do hiperplano considerado.

Exemplo A.4. Seja $p = [0 : 0 : 0 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^4$ e $\mathcal{H} = \mathcal{Z}(x_4) \subset \mathbb{P}^4$. Considere a reta $m = \mathcal{Z}(x_2, x_3, x_4) \subset \mathcal{H}$, então

$$\begin{aligned} \pi_p^{-1}(m) &= \{b = [b_0 : b_1 : b_2 : b_3 : b_4] \in \mathbb{P}^4 \mid \pi_p(b) = [b_0 : b_1 : b_2 : b_3 : 0] \in m\} \\ &= \{[b_0 : b_1 : b_2 : b_3 : b_4] \in \mathbb{P}^4 \mid b_2 = b_3 = 0\} \setminus \{p\} = \mathcal{Z}(x_2, x_3) \setminus \{p\}. \end{aligned}$$

Assim, a fibra da reta é um plano menos um ponto.

O resultado a seguir garante que a imagem por uma projeção de um fechado é uma variedade.

Teorema A.1. *A projeção \overline{X} de X de p em \mathbb{P}^{n-1} é uma variedade projetiva.*

Demonstração. Veja Teorema 3.5, p. 35 em [7]. □

Definição A.3. Uma variedade $X \subseteq \mathbb{P}^n$ é dita *irredutível* se X é irredutível como espaço topológico na Topologia de Zariski induzida.

O próximo resultado será muito utilizado durante toda a dissertação.

Proposição A.1. Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ não nulo e homogêneo de $\partial(F) = d \geq 1$, então existem $\alpha'_i, \beta'_i \in \mathbb{C}$ tais que $F = \prod_{\sum m_i = d} (\alpha_i x_0 - \beta_i x_1)^{m_i}$, $m'_i \in \mathbb{N}$.

Proposição A.2. Sejam $F \in \mathcal{P}_d$ não nulo, com $d \geq 1$ e $\ell = \mathbb{P}(W)$ uma reta em \mathbb{P}^n , $n \geq 2$. Então $\mathcal{Z}(F) \cap \ell \neq \emptyset$. Além disso, ou $\ell \subset \mathcal{Z}(F)$ ou $\mathcal{Z}(F) \cap \ell$ consiste de no máximo d pontos.

Demonstração. Se $\ell \subset \mathcal{Z}(F)$ temos o resultado. Suponha que $\ell \not\subset \mathcal{Z}(F)$, então podemos escolher uma base $\{w_1, w_2\}$ de W tal que $[w_2]$ não pertence a $\mathcal{Z}(F)$ e podemos escrever

$$\ell = \{[w_1 + tw_2] \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{[w_2]\}.$$

Se $w_1 = (a_0, \dots, a_n)$, $w_2 = (b_0, \dots, b_n)$ e

$$F = \sum_{\substack{i_0, \dots, i_n \geq 0 \\ i_0 + \dots + i_n = d}} c_{i_0, \dots, i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n},$$

com $c_{i_0, \dots, i_n} \in \mathbb{C}$, então avaliando F em $[w_1 + tw_2] \in \ell$ obtemos o polinômio

$$p(t) = \sum_{\substack{i_0, \dots, i_n \geq 0 \\ i_0 + \dots + i_n = d}} c_{i_0, \dots, i_n} (a_0 + tb_0)^{i_0} \dots (a_n + tb_n)^{i_n} = F(w_1) + \dots + t^d F(w_2).$$

Note que se $[w_1 + t_0 w_2] \in \mathcal{Z}(F)$, então $p(t_0) = 0$.

Sendo $p(t)$ um polinômio não constante, já que o coeficiente do termo de grau d é $F(w_2) \neq 0$, então pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $p(t)$ tem ao menos uma raiz, ou seja, $\mathcal{Z}(F) \cap \ell \neq \emptyset$. Por outro lado, já que o grau do polinômio $p(t)$ é d , então o número máximo de raízes distintas do polinômio é d . Portanto o número de pontos da interseção $\mathcal{Z}(F) \cap \ell$ é no máximo d . □

A.1.1 Espaços Tangentes e Dimensão de uma Variedade Projetiva

Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Sabendo que $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ é noetheriano temos que $I(Y)$ é finitamente gerado, onde $I(Y)$ denota o ideal associado a variedade Y . Logo faz sentido definir o jacobiano dos geradores do $I(Y)$. Digamos que $I(Y) = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$, então a matriz jacobiana aplicada no ponto $p \in Y$ é da seguinte forma:

$$J(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_0}(p) & \dots & \frac{\partial F_0}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_0}(p) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}.$$

Definição A.4. Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva e $p \in X$, então definimos o *espaço tangente de X em p* por:

$$\mathcal{T}_p X = \bigcap_{F \in \mathcal{I}(X)} \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)x_i\right).$$

Exemplo A.5. Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva linear e $p \in Y$, então $\mathcal{T}_p Y = Y$.

Se $C \subseteq \mathbb{P}^n$ ($n \geq 3$) for uma curva e Λ um k -plano em \mathbb{P}^n . Dizemos que Λ é tangente a C , se Λ contém uma reta tangente a C .

Definição A.5. Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva, então a *dimensão* de Y é dada por $n - \text{Post}(J(p))$, isto é, $\dim Y = n - \text{Post}(J(p))$.

Proposição A.3. Seja $Y \subsetneq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ uma variedade projetiva. Se $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ é irredutível tal que $Y = \mathcal{Z}(f)$, então $\dim Y = n - 1$.

Observação A.2. Sejam X, Y duas variedades em \mathbb{P}^n tal que $X \subseteq Y \subsetneq \mathbb{P}^n$, então $\mathcal{T}_p X \subseteq \mathcal{T}_p Y$, $\forall p \in X$. De fato, pois se $X \subseteq Y \subsetneq \mathbb{P}^n$, então $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$.

Definição A.6. Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva e $p \in Y$. Dizemos que p é um *ponto singular* de Y se, $\dim \mathcal{T}_p Y > \dim Y$. Denotaremos o conjunto dos pontos singulares de Y por $\text{Sing}(Y)$.

Observação A.3. Em particular, sejam $Y = \mathcal{Z}(F)$ uma hipersuperfície reduzida e $p \in Y$, então p é um ponto singular se, e somente se, $\nabla F(p) = 0$.

Seja $Y^s = \{p \in Y \mid \dim \mathcal{T}_p Y = d\}$, onde $d = \dim Y$. Prova-se que Y^s é um aberto de Y , para não nos estendermos nesse assunto deixamos a prova a cargo do leitor, salientando que usamos o caso afim para provar o caso projetivo.

Proposição A.4. Seja Y uma variedade projetiva irredutível, Então:

$$\dim Y = \min\{\dim \mathcal{T}_p Y \mid p \in Y\}.$$

Demonstração. Sabemos que $(\text{Sing}(Y))^c$ é um aberto não vazio de Y . Da definição da topologia de Zariski temos $(\text{Sing}(Y))^c \cap Y^s \neq \emptyset$. Seja $y \in (\text{Sing}(Y))^c \cap Y^s$, então

$$\text{Post}(J(y)) = n - \dim Y \implies n - \dim \mathcal{T}_p Y = n - \dim Y,$$

onde $J(y)$ é o jacobiano de Y aplicando em y . □

Proposição A.5. Sejam X e Y variedades projetivas de dimensão r e s , respectivamente em \mathbb{P}^n . Verifica-se:

(i) Se W é uma componente irredutível de $X \cap Y$, então a dimensão de W é maior ou igual a $r + s - n$.

(ii) Se $r + s - n \geq 0$, então $X \cap Y \neq \emptyset$.

Demonstração. Veja Teorema 7.2, p. 48 em [8]. □

Teorema A.2. *Se $X \subseteq Y$, então $\dim X \leq \dim Y$. Além disso, se Y é irredutível e $X \subseteq Y$ é uma subvariedade fechada com $\dim X = \dim Y$, então $X = Y$.*

A.1.2 Variedades Lineares Geradas

Primeiramente, considere Λ uma variedade e p um ponto em \mathbb{P}^n . Definimos por variedade gerada por Λ e p , denotado por $\langle \Lambda, p \rangle$, a menor variedade projetiva linear que os contém. Note que,

$$\langle \Lambda, p \rangle = \bigcap_{\Lambda \subseteq \Omega, p \in \Omega} \Omega,$$

onde Ω é uma variedade projetiva linear.

Proposição A.6. Se $\Lambda = \mathbb{P}(W)$ é um t -plano contido no $(t + 1)$ -plano Λ' . Então para todo $p = [v] \in \Lambda' \setminus \Lambda$ verifica-se que

$$\Lambda' = \langle \Lambda, p \rangle.$$

Mais precisamente, se $\{u_0, \dots, u_t\}$ é uma base de W , então $\Lambda' = \mathbb{P}(\overline{W})$, onde $\overline{W} = [u_0, \dots, u_t, v]$.

Demonstração. Considere $\{u_0, \dots, u_t\}$ base de W e $p = [v] \in \Lambda' \setminus \Lambda$, então $v \notin W$. Logo, $U = \{u_0, \dots, u_t, v\}$ é um conjunto linearmente independente. Assim, $\overline{W} = [U]$ determina um subespaço vetorial de dimensão $t + 1$ de \mathbb{C}^{n+1} . Como $\Lambda = \mathbb{P}(W) \subseteq \Lambda' = \mathbb{P}(W')$, onde W' é um subespaço de \mathbb{C}^{n+1} , temos $W \subseteq W'$. Sendo $p \in \Lambda' \setminus \Lambda$, então $W + [v] \subseteq W'$. Além disso, $\dim(W + [v]) = t + 1$. Donde, $W + [v] = W'$. Por outro lado, $\overline{W} = W + [v]$. Logo, $\Lambda' = \mathbb{P}(\overline{W})$. Além disso, claramente $\langle \Lambda, p \rangle \subseteq \Lambda'$ e $\Lambda \subseteq \langle \Lambda, p \rangle \subseteq \Lambda'$. Como $\dim \Lambda = t$ e $p \notin \Lambda$, temos $\Lambda' = \langle \Lambda, p \rangle$. □

A.1.3 Mudança de Coordenada Projetiva

Definição A.7. Seja $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um isomorfismo linear. Visto que tal aplicação preserva retas de \mathbb{C}^{n+1} passando pela origem, temos definida uma bijeção natural, $\mathbb{T} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, dada por $\mathbb{T}([v]) = [T(v)]$, que será chamada uma *projetividade* ou *mudança de coordenadas projetiva* (Mcp) em \mathbb{P}^n .

Observação A.4. Todo isomorfismo linear $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ induz o isomorfismo de \mathbb{C} -álgebras $T_\bullet : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ dado por $(T_\bullet F)(x_0, \dots, x_n) = F(T^{-1}(x_0, \dots, x_n))$. Além disso, T_\bullet preserva a gradação usual de $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, de modo que, T_d denotará o isomorfismo linear de $\mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{P}_d$ dada por $F \mapsto T_\bullet F$.

Exemplo A.6. Seja $H \subseteq \mathbb{P}^n$ um hiperplano e $p \in \mathbb{P}^n$ tal que $p \notin H$, então existe uma Mcp tal que $\mathbb{T}(H) = \mathcal{Z}(x_n)$ e $\mathbb{T}(p) = [0 : \dots : 0 : 1]$. De fato, temos que $p = [p_0 : \dots : p_n]$. Se $p_n \neq 0$, então façamos $p = [p_0 : \dots : p_{n-1} : 1]$. Caso contrário, façamos uma Mcp de tal modo que $p_n \neq 0$ e assim encontraremos $p = [p_0 : \dots : p_{n-1} : 1]$. Além disso, temos que $H = \mathcal{Z}(h)$, onde $h = A_0x_0 + \dots + A_nx_n$. Note que,

$$h(p) = A_0p_0 + \dots + A_{n-1}p_{n-1} + A_n = \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.1})$$

Considere $\tilde{h} = \frac{A_0}{\mu}x_0 + \dots + \frac{A_{n-1}}{\mu}x_{n-1} + \frac{A_n}{\mu}x_n$ e observe que $\tilde{h}(p) = 1$. Como $(A_0, \dots, A_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, considere $W = [(A_0, \dots, A_n)]$ o subespaço gerado por (A_0, \dots, A_n) . Note que $\dim W = 1$, logo o subespaço $W^\perp = \{(a_0, \dots, a_n) \mid \sum A_i a_i = 0\}$ é tal que $\dim W^\perp = n$. Assim podemos escolher uma base para W^\perp , digamos $\{u_1, \dots, u_n\}$, onde $u_i = (a_{1i}, \dots, a_{(n+1)i})$; $i = 1, \dots, n$. Donde, $\{u_1, \dots, u_n, v\}$, com $v = (p_0, \dots, p_{n-1}, 1)$, constitui uma base para \mathbb{C}^{n+1} . Esse fato decorre de $v \notin W^\perp$, caso contrário teríamos $p_0A_0 + \dots + p_{n-1}A_{n-1} + A_n = 0$ contradizendo (A.6). Logo, a matriz abaixo tem determinante não nulo.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & p_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & p_{n-1} \\ a_{(n+1)1} & \cdots & a_{(n+1)n} & 1. \end{bmatrix}.$$

Assim podemos assumir que dita matriz é a matriz associada a uma transformação linear \mathbb{T}^{-1} na base canônica. Note que, $\mathbb{T}^{-1}(e_{n+1}) = v$ e $p = [v]$. Então, $\mathbb{T}^{-1}([0 : \dots : 0 : 1]) = [v] = p$. Portanto, $\mathbb{T}(p) = [0 : \dots : 0 : 1]$. Além disso,

$$\begin{cases} A_0a_{11} + \dots + A_na_{(n+1)1} = 0, \\ \vdots \\ A_0a_{1n} + \dots + A_na_{(n+1)n} = 0, \\ \frac{A_0}{\mu}p_0 + \dots + \frac{A_{n-1}}{\mu}p_{n-1} + \frac{A_n}{\mu} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{T}_1\tilde{h} = x_n \Leftrightarrow \tilde{h}(\mathbb{T}^{-1}(x_0, \dots, x_n)) = x_n.$$

A.2 Mapas Regulares, Racionais e Tópicos Afins

Sejam X e Y variedades.

Definição A.8. Sejam $p \in X$ e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que φ é *regular em p* se existir $U \subseteq X$, aberto contendo p e $F, G \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneos do mesmo grau tais que $G(u) \neq 0, \forall u \in U$, e $\varphi(u) = \frac{F(u)}{G(u)}, \forall u \in U$.

Para cada aberto U de X considere $\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é regular}\}$.

Definição A.9. Uma função $\varphi : X \rightarrow Y$ é denominada de *morfismo* se as seguintes condições forem verificadas:

- (i) φ é contínua.
- (ii) Dado $V \subseteq Y$, aberto, e $f \in \mathcal{O}(V)$ verifica-se $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$.

Teorema A.3. (Teorema de Dimensão da Fibra) *Suponha $f : X \rightarrow Y$ um morfismo dominante, onde X, Y são variedades irredutíveis, $\dim X = n$ e $\dim Y = m$. Então:*

(i) $m \leq n$.

(ii) Para cada Γ componente da fibra $f^{-1}(y)$, não vazia, verifica-se que $\dim \Gamma \geq n - m$.

(iii) Existe um subconjunto aberto não vazio $\mathcal{U} \subset Y$ tal que $\dim f^{-1}(y) = n - m$, para todo $y \in \mathcal{U}$.

Considere $\mathfrak{X}_{XY} = \{(U, \varphi) \mid U \subseteq X \text{ aberto não vazio e } \varphi : U \rightarrow Y \text{ é um morfismo}\}$ e a seguinte relação de equivalência em \mathfrak{X}_{XY} : $(U, \varphi) \sim (V, \psi) \Leftrightarrow \varphi|_{U \cap V} = \psi|_{U \cap V}$.

Definição A.10. Todo elemento de $\frac{\mathfrak{X}_{XY}}{\sim}$ será denominado de função *racional* de X em Y . Denotamos os elementos por $\varphi : X \cdots \rightarrow Y = \langle U, \varphi \rangle$, onde $(U, \varphi) \in \mathfrak{X}_{XY}$ e $\langle U, \varphi \rangle$ denota a classe de equivalência de (U, φ) em $\frac{\mathfrak{X}_{XY}}{\sim}$.

Definição A.11. Um mapa racional $\alpha : X \cdots \rightarrow Y$ será denominada *dominante* se existe $(U, \varphi) \in \mathfrak{X}_{XY}$ tal que $\alpha = \langle U, \varphi \rangle$ e $\overline{\varphi(U)} = Y$.

Lema A.4. Sejam $F_0, \dots, F_n \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos de mesmo grau. Seja

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^n &\cdots \rightarrow \mathbb{P}^n \\ p &\longmapsto [F_0(p) : \dots : F_n(p)], \end{aligned}$$

o mapa racional associado e

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \mathbb{C}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ v &\longmapsto [F_0(v), \dots, F_n(v)], \end{aligned}$$

o mapa afim associado a φ . Então φ é dominante se, e somente se, $\tilde{\varphi}$ é dominante.

Definição A.12. Seja $\varphi : X \cdots \rightarrow Y$ um mapa racional, dominante e $x \in X$ tal que $\varphi(x) \in Y \setminus \text{Sing}(Y)$. Dizemos que φ é *suave em x* se, e somente se, $x \in X \setminus \text{Sing}(X)$ e $\dim \ker(d\varphi_x) = \dim X - \dim Y$.

Proposição A.7. Seja $\varphi : X \cdots \rightarrow Y$ um mapa racional e dominante. Então

$$U = \{x \in X \mid \varphi \text{ é suave em } x\}$$

é um aberto não vazio e denso em X .

Demonstração. Veja Teorema 3.6, p. 42 em [?]. □

Definição A.13. Dizemos que uma variedade X é *uniracional*, se existe um mapa racional dominante $\varphi : \mathbb{P}^n \cdots \rightarrow X$, para algum n .

Os resultados a seguir foram colocados no intuito de completude para um leitor interessado, já que no decorrer do trabalho fazemos alguma composições de mapas racionais sem muitos comentários.

Fato A.1. Seja $\varphi : X \cdots \rightarrow Y$ um mapa racional, com X, Y variedades de \mathbb{P}^n . Considere $\varphi_U : U \rightarrow Y$ um representante de φ e $Z = \overline{\varphi_U(U)}$. Então para todo $\psi_V : V \rightarrow Y$ representante de φ verifica-se $Z = \overline{\psi_V(V)}$.

Demonstração. Sabemos que $\varphi_U|_{U \cap V} = \psi_V|_{U \cap V}$. Note que $U \cap V \subset U$ é um aberto em U . Logo, $\overline{U \cap V}^U = U$. Da continuidade de φ_U , temos que $\varphi_U(U) = \varphi_U(\overline{U \cap V}^U) \subseteq \overline{\varphi_U(U \cap V)} \subseteq \overline{\varphi_U(U)}$. De onde concluímos que, $\overline{\varphi_U(U \cap V)} = \overline{\varphi_U(U)}$. Analogamente, $\overline{\varphi_V(U \cap V)} = \overline{\varphi_V(U)}$. Como $\overline{\varphi_U(U \cap V)} = \overline{\varphi_V(U \cap V)}$, temos $\overline{\varphi_U(U)} = \overline{\varphi_V(U)}$. □

Fato A.2. Sejam X, Y e Z variedades projetivas. Se $\varphi : X \cdots \rightarrow Y$ e $\psi : Y \cdots \rightarrow Z$ são mapas racionais representados por $\varphi_U : U \cdots \rightarrow Y$ e $\psi_V : V \cdots \rightarrow Z$, com $\varphi_U(U) \cap V \neq \emptyset$, então podemos considerar o seguinte morfismo $\psi_V \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(V)} : U \rightarrow Z$. Mais ainda, a classe desse mapa define um mapa racional de X em Z .

Observação A.5. Em geral não podemos compor mapas racionais, pois pode acontecer da imagem do primeiro mapa estar contida em outro lugar onde o segundo mapa não esteja definido. Tal situação não acontece se X é irredutível e φ for dominante.

A.2.1 Multiplicidade de uma Hipersuperfície em \mathbb{P}^n

Vamos construir o conceito de multiplicidade de uma hipersuperfície. Considere uma hipersuperfície irredutível $X = \mathcal{Z}(F)$ de grau d e $L \subset \mathbb{P}^n$ uma reta tal que $p \in X \cap L$, onde $p = [p_0 : \dots : p_n]$.

Podemos pensar nessas retas como sendo os seguintes conjuntos:

$$L := L_{p,q} = \{[sp_0 + tq_0 : \dots : sp_n + tq_n] \mid [s : t] \in \mathbb{P}^1\},$$

onde $q = [q_0 : \dots : q_n] \in \mathbb{P}^n$, $p \neq q$. Analisando a interseção $X \cap L_{p,q}$ temos: Se $\tilde{p} \in X \cap L_{p,q}$, então $\tilde{p} = [sp_0 + tq_0 : \dots : sp_n + tq_n]$, para algum $[s : t] \in \mathbb{P}^1$, e $F(sp_0 + tq_0, \dots, sp_n + tq_n) = 0$.

Seja $f = F(sp_0 + tq_0, \dots, sp_n + tq_n) \in \mathbb{C}[s, t]$, então pela proposição A.1

$$f = \prod_{\sum m_i = d} (\alpha_i s - \beta_i t)^{m_i}.$$

Como $p \in \ell_{p,q}$ e neste caso $[1 : 0]$ é raiz de f , temos que $f(s, t) = t^\mu \prod_{\sum m_i = d - \mu} (\alpha_i s - \beta_i t)^{m_i}$. Logo, definimos o *índice de interseção* de L, X no ponto p por

$$i(p, X \cap L) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin L \cap X, \\ \infty, & \text{se } p \in L \subset X, \\ \mu, & \text{se } p \in L \cap X \text{ e } L \not\subset X \end{cases}$$

A partir da construção anterior daremos uma definição para a multiplicidade.

Definição A.14. Seja X uma hipersuperfície irreduzível de grau d e $p \in \mathbb{P}^n$. Dizemos que a *Multiplicidade de p em X* é dada pelo mínimo do conjunto $\{i(p, X \cap L) \mid L \text{ reta em } \mathbb{P}^n, p \in X \cap L\}$, denotaremos essa multiplicidade por $mult_p(X)$, isto é,

$$mult_p(X) = \min\{i(p, X \cap L) \mid L \text{ reta em } \mathbb{P}^n, p \in X \cap L\}.$$

Para entendermos melhor o conceito, vamos considerar uma hipersuperfície quádrlica em \mathbb{P}^4 .

Exemplo A.7. Seja $X = \mathcal{Z}(f)$ a hipersuperfície quádrlica não singular em \mathbb{P}^4 , onde $f = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ e $p = [0 : 0 : 0 : i : 1] \in X$. Considere a reta $L_{p,q}$ com $q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3 : q_4] \in \mathbb{P}^4$. Logo, para $[tq_0 : tq_1 : tq_2 : tq_3 + si : tq_4 + s] \in L_{p,q} \cap X$, com $[s : t] \in \mathbb{P}^1$, temos:

$$\begin{aligned} f(tq_0, tq_1, tq_2, tq_3 + si, tq_4 + s) &= (tq_0)^2 + (tq_1)^2 + (tq_2)^2 + (tq_3 + si)^2 + (tq_4 + s)^2 \\ &= t^2 f(q) + 2iq_3 st + 2q_4 st = t(tf(q) + 2s(iq_3 + q_4)). \end{aligned}$$

Assim, $mult_p(X) = 1$.

Usaremos a próxima observação na demonstração do Teorema principal (sem mencionarmos seu uso) pois subentendemos que o leitor tem conhecimento prévio ou seguiu nossa indicação anteriormente.

Observação A.6. Sejam X e Y duas hipersuperfícies em \mathbb{P}^n definidas pelos polinômios f e g , respectivamente. Se $X \subset Y$, então podemos falar em multiplicidade da hipersuperfície X em Y . Essa multiplicidade é dada pela potência máxima de f que compareceu na fatoração de g , isto é, se $g = \alpha f^\mu$, então μ é a multiplicidade de X em Y .

A seguir enunciaremos o Teorema de Bezout num caso particular (o qual vamos usar na demonstração do resultado principal).

Teorema A.5. *Seja X, Y curvas planas projetivas, sem componentes em comum, então o número de pontos na interseção $X \cap Y$, contados com multiplicidade, é igual a o produto dos graus das curvas.*

Apêndice B

Biografias

Nesse apêndice desfrutamos um pouco da biografia de importantes personagens que contribuíram com os temas desse trabalho.

B.1 Ludwig Otto Hesse (1811-1874)



Figura B.1: Ludwig Otto Hesse

Ludwig Otto Hesse (Königsberg, 22 de abril de 1811 - Munique, 4 de agosto de 1874) foi um matemático alemão. Filho de Johann Gottlieb Hesse, comerciante e dono de cervejaria, e Anna Karoline Reiter. Estudou em sua cidade natal na Universidade de Königsberg, orientado por Carl Gustav Jakob Jacobi. Alguns de seus mestres foram Friedrich Wilhelm Bessel, Carl Neumann e Friedrich Julius Richelot. Sob a orientação de Jacobi doutorou-se em 1840 com a tese: *De octo punctis intersectionis trium superficium secundi ordinis*. Em 1841 habilitou-se para a universidade, casando no mesmo ano com Marie Sophie Emilie Dulk, filha do farmacêutico e professor de química Friedrich Philipp Dulk. Dedicou-se especialmente à geometria analítica e à teoria matemática dos determinantes. Definiu e introduziu na literatura matemática a matriz hessiana, seu determinante e a forma normal hessiana de superfícies planas.

B.2 Paul Albert Gordan (1837-1912)

Paul Albert Gordan (Wroclaw, 27 de abril de 1837 - Erlangen, 21 de dezembro de 1912) foi um matemático alemão. Foi aluno de Carl Gustav Jakob Jacobi na Universidade de Königsberg, antes de obter o doutorado na Universidade de Wroclaw, em 1862, e foi professor na Universidade de Erlangen-Nürnberg. Foi conhecido como o “rei da teoria dos invariantes.” Sua contribuição mais conhecida é que o anel de invariantes de uma forma binária de grau fixo é finitamente gerado. Juntamente com Alfred Clebsch tem seu nome perpetuado nos coeficientes de Clebsch Gordan. Foi orientador de Emmy Noether. Uma famosa citação atribuída a Gordan sobre a prova de David Hilbert do teorema da base de Hilbert, um resultado que generaliza suas investigações sobre invariantes, é: “Isto não é matemática, isto é teologia.” A prova em questão foi a existência (não construtiva) de uma base finita para invariantes. Não é claro se Gordon realmente disse isto, pois as referências primárias ao fato são datadas de 25 anos após seu suposto acontecimento, quando Gordon já tinha falecido. Também não é claro se a citação foi crítica, elogiosa ou uma piada sutil. Gordon encorajou Hilbert e utilizou seus resultados e métodos, e

a história propagada de que ele se opunha ao trabalho de Hilbert é um mito (embora ele tenha citado explicitamente que algumas das suposições de Hilbert eram incompletas).

B.3 Max Noether (1844-1921)



Figura B.2: Max Noether

A mãe de Max Noether era Amalia Würzburger e seu pai era Hermann Noether. A família era judia assim uma pequena explicação é necessária por que eles tinham nomes alemães. Na verdade o avô paterno de Max era Elias Samuel, o fundador de uma empresa em Bruchsal. Elias teve nove filhos, sendo um deles um filho Hertz Samuel. Em 1809, o Estado de Baden fez o Édito de Tolerância que exigia judeus a adotar nomes germânicos. Elias Samuel escolheu o sobrenome NOTHER, tornando-se Elias NOTHER, mas também mudou os nomes dados de seus filhos, dando o nome Hertz Hermann. Quando ele tinha 18 anos de idade, Hermann NOTHER deixou sua cidade natal de Bruchsal e estudou teologia na Universidade de Mannheim. Então, em 1837, junto com seu irmão Joseph, ele montou um negócio por atacado em hardware de ferro. Hermann NOTHER e sua esposa Amalia teve cinco filhos, a terceira das quais foi Max. Os dois filhos mais velhos do que Max fosse Sarah (nascido em 06 de novembro de 1839) e Emil. É interessante notar neste ponto que o negócio de ferro - atacado NOTHER permaneceu uma empresa familiar para exatamente cem anos, até que os nazistas removido famílias judias de seus próprios negócios em 1937. Um outro comentário é necessário neste momento. Embora o nome de família foi escolhida para ser NOTHER pelo avô de Max, Max e sua família sempre usou a forma Noether (exceto na certidão de casamento de Max , onde a forma NOTHER aparece).

Max freqüentou a escola em Mannheim, mas seus estudos no ginásio foram interrompidos em 1858. Ele sofreu um ataque de poliomielite quando tinha 14 anos e ela o deixou com uma deficiência para o resto de sua vida. Por dois anos ele era incapaz de andar e não pôde comparecer ao Ginásio. No entanto, seus pais arranjaram para ele receber aulas em casa e por isso ele foi capaz de completar o currículo Gymnasium sem voltar para a escola. Nesta fase Noether estava interessado em astronomia, por isso antes de iniciar seus estudos universitários, ele passou um curto período de tempo em Mannheim Observatory.

Ele entrou na Universidade de Heidelberg, em 1865, e passou três semestres lá antes de obter um doutorado em 5 de março 1868. No Heidelberg ele foi ensinado por Jacob Lüroth que foi premiado com um doutorado em 1865, mas, principalmente, ele foi influenciado por Gustav Kirchhoff, que foi o professor de física. Seu doutorado de Heidelberg foi em astronomia, e Noether não era obrigada a escrever uma dissertação. Foi-lhe dado um exame oral no quarto do Dean, com a única exigência é que o candidato teve de fornecer o vinho para os examinadores. Após a adjudicação do seu doutorado Noether passou um tempo em Giessen trabalhar com Alfred Clebsch. Como Noether, Clebsch começou sua carreira trabalhando na física, mas havia colaborado com Paul Gordan em *Theorie der Abelschen Funktionen* em 1866. Enquanto em Giessen, Noether conheceu Alexander von Brill, que era um privatdozent lá. Os dois se tornaram amigos e colaboradores, escrever documentos importantes juntos. Clebsch esquerda Giessen para assumir um compromisso em Göttingen em 1869 e Noether foi com ele. Em 1870 ele apresentou sua tese de habilitação *Über Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* para Heidelberg e foi nomeado lá como um privatdozent.

A revista *Mathematische Annalen* foi fundada em 1868 por Alfred Clebsch e Carl Neumann. Dada a amizade de Noether com Clebsch, não é surpreendente que ele faria seu diário a principal saída para a sua publicação. Ele publicou *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von Beliebig vielen Dimensionen* no segundo volume da revista publicada em 1870, e no terceiro volume, também publicado em 1870, ele publicou sua tese de habilitação *Über Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* e outro trabalho *Über die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen*. Noether publicou muitos artigos em *Mathematische Annalen* com uma grande contribuição que aparecem quase todos os anos entre 1870 e 1921. Ele se juntou à equipe editorial da revista em 1893.

Nomeado um privatdozent em Heidelberg em 1870, Noether foi promovido a professor extraordinário lá em 25 de setembro 1874. No ano seguinte mudou-se para Erlangen, onde ele foi apontado como um professor extraordinário, sendo nomeado como professor ordinário lá em 16 de Abril 1888. Casou-se com Ida Amalia Kaufmann (nascido em 1852, morreu 1915), filha de uma família de comerciantes judeus ricos de Colônia, em 28 de agosto de 1880. Ida tinha um irmão que era professor na Universidade de Berlim. Max e Ida teve quatro filhos, um dos quais era o famoso matemático Emmy Noether, damos mais detalhes abaixo de seus filhos.

Max Noether foi um dos líderes da geometria algébrica do século XIX. Ele foi influenciado por Abel, Riemann, Cayley e Cremona. Após Cremona, Max Noether estudou as propriedades invariantes de uma variedade algébrica sob a ação de transformações Birational. Macaulay escreve [3]: -

Ele contribuiu muito para o avanço da ciência matemática de três maneiras distintas: pelas novas e frutíferas ideias contidas em suas pesquisas originais, pela investigação paciente e incentivo que deu a outros escritores, e por sua obra histórica agudamente crítico e detalhado.

Em 1873, Noether provou um resultado importante na interseção de duas curvas algébricas no papel *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen* publicado em volume 6 de *Mathematische Annalen*. Este resultado mostrou que, dada duas curvas algébricas $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, que se intersectam num número finito de pontos isolados, então a equação de uma curva algébrica que passa através de todos os pontos de intersecção pode ser expressa na forma $f + bG = 0$, em que a e b são polinômios em x e y , caso certas condições sejam satisfeitas. Essas condições são agora conhecidos como "condições Noetherian". Este teorema dá [1]: -

... condições necessárias e suficientes para o caso em que as curvas têm vários pontos em comum com o contato de qualquer grau de complexidade.

Volume 7 de *Mathematische Annalen* contém o importante papel *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* que foi escrito em conjunto por Noether e Brill.

Vamos também observar que Noether escreveu muitos obituários. Por exemplo, ele escreveu obituários de Otto Hesse (1875), Arthur Cayley (1895), James Joseph Sylvester (1898), Francesco Brioschi (1898), Sophus Lie (1900), Charles Hermite (1901), Luigi Cremona (1904), George Salmon (1905), Jacob Lüroth (1911), Paul Gordan (1914), e Hieronymus Georg Zeuthen (1921). Ele também foi editor das obras completas de Ludwig Otto Hesse, publicado em 1897. Muitos dos artigos neste material uso arquivo de obituários de Noether.

Em 1882, sua filha Emmy Noether nasceu. Emmy se interessou por muitos temas semelhantes ao seu pai e generalizada alguns de seus teoremas. Em 1883, Max e Ida Noether teve um filho chamado Alfred, que mais tarde estudou química. Ele morreu antes de seu pai em 1918. Fritz, que nasceu em 1884, passou a se tornar um matemático. Forçado a deixar a Alemanha sob as políticas anti-semitas nazistas, ele foi para a União Soviética e foi apontado como um professor de matemática da Universidade de Tomsk. Ele

foi preso sob Stalin 1937-1938 Grande Expurgo de ser um espião alemão, condenado a 25 anos de prisão, em seguida, acusado de propaganda anti-soviética na prisão e tiro em 1941. Quarto filho de Max e Ida Noether era Gustav Robert, nascido em 1889. Ele sofreu problemas de saúde durante a maior parte de sua vida e morreu em 1928.

Macaulay dá uma visão interessante sobre o pensamento de Max Noether em [3] : -

Mente de Noether era naturalmente intuitiva, mas ele desconfiava de intuição, e era capaz de deixar qualquer coisa sugerida por ele passar fora de seus pensamentos. Parecia que este apertado seus poderes, até certo ponto, em seus últimos anos. Ele encontrou, talvez, em sua matéria que a intuição é muitas vezes susceptível de induzir em erro. Ele foi, naturalmente, nunca conteúdo sem prova algébrica ou aritmética, mas às vezes tinha de se contentar com uma prova incompleta. Embora naturalmente impaciente ele tomaria as dores infinitas de entender os pensamentos dos outros, e dar-lhes a abundante ajuda de seus próprios amplos recursos. Há muitos, incluindo o escritor desta nota, que somos gratos a ele por sua ajuda. Ele busca e métodos peculiares de sua própria para testar a verdade das coisas.

B.4 Alfredo Franchetta (1916-2011)

Na noite de 28-29 setembro de 2011, morreu em Nápoles, Alfredo Franchetta. A seguinte informação biográfica é derivado da introdução de Ciro Ciliberto - A vida e obra de Alfredo Franchetta - o volume das Obras Escolhidas, publicado pela Academia de Nápoles Pontaniana em 2006, por ocasião do seu nonagésimo aniversário.

Alfredo Franchetta nasceu em Pescara em 17 de março de 1916. Foi incentivado por professores que o tiveram como estudante para se inscrever na pós-graduação na Universidade de Roma. Aqui, na segunda metade dos anos 30, Franchetta encontrou um ambiente alegre e estimulante. Matriculou-se na primeira licenciatura em Física, mas logo passou para Matemática, Franchetta teve a sorte de assistir mestres como Federigo Enriques, Enrico Fermi, Guido Castelnuovo, Gaetano Scorza, Francesco Severi. Em particular Franchetta foi atraído pela personalidade multifacetada de Enriques, que foi o relator de sua tese, que foi defendida em 1939. De Enriques, Franchetta absorveu o gosto e a capacidade de ver e fazer seus próprios objetos de geometria algébrica, qualidades que caracterizam as atividades do grande mestre e sua escola. Mas também pelos muitos e freqüentes contatos com os acadêmicos e científicos Castelnuovo, Severi e Scorza, Franchetta deteve uma cultura geométrica profunda, amplitude de visão e o bom gosto que caracteriza a grande escola italiana de geometria algébrica.

Depois de ter realizado as suas atividades na Universidade de Roma, primeiro como professor assistente, depois como professor e palestrante em várias disciplinas Franchetta se juntou, em 1951, ao conjunto dos três vencedores de um concurso para a cadeira de geometria na Universidade de Turim. Os outros dois membros da tríade eram Aldo Andreotti e Carlo Felice Manara. Chamado para a cadeira que tinha sido de Michele de Franchis, na Universidade de Palermo, passou três anos lá. Ele, então, mudou-se em 1954 para a Faculdade de Ciências da Universidade de Nápoles, onde permaneceu até a aposentadoria, que teve lugar em 1992. Em cerca de 40 anos na Universidade de Nápoles, prof. Franchetta realizou várias palestras sobre geometria, como também assumiu as responsabilidades institucionais a ele atribuídas. Ele foi diretor do Instituto de Matemática e diretor da pesquisa de Matemática. Foi sócio da Academia de Ciências Físicas e Matemáticas, da Sociedade Nacional de Ciências e Artes em Letras para a Academia Pontaniana.

As grandes qualidades como professor e mestre de prof. Alfredo Franchetta, juntamente com as suas excelentes qualidades humanas, são bem conhecidos na comunidade matemática. Seus alunos, alguns dos quais passam a tornar-se professores universitários, sempre foram capazes de apreciar a disponibilidade, paciência, rigor, gosto e grande cultura de Franchetta. O prof. Franchetta foi, entre outras coisas, o autor de alguns textos universitários bonitos, que combinam a clareza com rigor, que encontram soluções originais para a apresentação de alguns argumentos clássicos delicados.

Referências Bibliográficas

- [1] C. CILIBERTO, F. RUSSO, A. SIMIS, *Homaloidal hypersurfaces and hypersurfaces with vanishing Hessian*, Advances in Mathematics, **vol 218**, 2008, 1759-1805.
- [2] A. FRANCHETTA, *Forme algebriche sviluppabili e relative hessiane*. Atti Acc. Lincei 10, 1951, 1 – 4.
- [3] A. FRANCHETTA, *Sulle forme algebriche di S^4 aventi hessiana indeterminata*, Rend. Mat. 13, 1954, 1 – 6.
- [4] A. GARBAGNATI, F. REPETTO, *A geometrical approach to Gordan-Noether's and Franchetta's contributions to a questions posed by Hesse*, Collectanea Mathematica, **vol 60**, 2009, 27-41.
- [5] I. M. GELFAND, M. M. KAPRANOV E A. V. ZELEVINSKY, *Discriminants, Resultants, and Multi-dimensional Determinants*. Springer, 1994.
- [6] P. GORDAN, M. NÖTHER,, *Ueber die algebraischen Formen, deren Hessesche Determinante identisch verschwindet* Math. Ann. 10 (1876), 547 – 568.
- [7] J. HARRIS, Algebraic Geometry, A First Course, G.T.M. 133, Springer Verlag, 1992.
- [8] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000.
- [9] O. HESSE, *Über die Bedingung, unter welche eine homogene ganze Function von n unabhängigen Variabeln durch Lineäre Substitutionen von n andern unabhängigen Variabeln auf eine homogene Function sich zurück-führen lässt, die eine Variable weniger enthält*, J. reine angew. Math. 42, 1851, 117 – 124.
- [10] O. HESSE, *Zur Theorie der ganzen homogenen Functionen*, J. reine angew. Math. 56, 1859, 263 – 269.
- [11] C. LOSSEN, *When does the Hessian determinant vanish identically? (On Gordan and Noether's Proof of Hesse's Claim)*, Bull. Braz. Math. Soc. **35** 2004, 71-82.
- [12] S.L. MAIKON, *Hipersuperfícies com Hessiano nulo*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2011.
- [13] H. MATSUMURA, Commutative ring theory, W. A. Benjamin Co., New York, 1970.
- [14] I. MENZ, *Sobre Dualidade de Variedades Projetivas*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2005.
- [15] D. MUMFORD, Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 221. Springer, 1976.
- [16] U. PERAZZO, *Sulle varietà cubiche la cui hessiana svanisce identicamente*, Giornale di Matematiche (Battaglini) 38 1900, 337 – 354.
- [17] R. PERMUTTI, *Su certe forme a hessiana indeterminata*, Ricerche diMat. 6, 1957, 3 – 10.
- [18] R. PERMUTTI, *Sul teorema di Hesse per forme sopra un campo a caratteristica arbitraria*, Le Matematiche 13, (1963), 115 – 128.

- [19] R. PERMUTTI, *Su certe classi di forme a hessiana indeterminata*, Ricerche di Mat. 13, 1964, 97–105.
- [20] F. RUSSO, *Tangentes and secantes of algebraic varieties. Note of a course*, 24° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2003.
- [21] I. R. SHAFAREVICH, *Basic Algebraic Geometry*, Grundlehren 213, Springer Verlag, Heidelberg, 1974.
- [22] F. L. ZAK, *Determinants of projective varieties and their degrees*, in *Algebraic transformation groups and algebraic varieties*, Pro. Conference "Interesting algebraic varieties arising in algebraic transformation group theory", Enc. Math. Sci. 132 Springer Verlag, Berlin, 2004, 207 – 238.