

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

Isabelly Camila Diniz de Oliveira

JOÃO PESSOA – PB
MARÇO DE 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

por

Isabelly Camila Diniz de Oliveira

sob a orientação do

Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa

João Pessoa – PB
Março de 2016

O48i Oliveira, Isabelly Camila Diniz de.
Índice de n-formas diferenciáveis totalmente reais / Isabelly
Camila Diniz de Oliveira.- João Pessoa, 2016.
78f. : il.
Orientador: Lizandro Sanchez Challapa
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. n-Forma diferencial totalmente real. 3.
Índice. 4. Folheações.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

por

Isabelly Camila Diniz de Oliveira ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

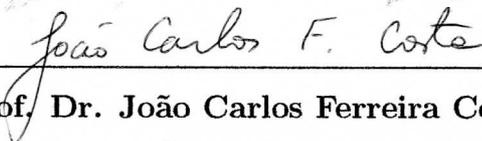
Área de Concentração: Geometria e Topologia

Aprovada em 21 de Março de 2016.

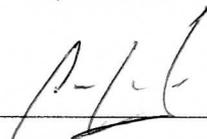
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa – UNESP
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do(a) CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*Aos meus pais Silvânia e
José*

Agradecimentos

À Deus, pela força espiritual para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, por estarem incondicionalmente ao meu lado.

À Rafael, pela paciência ao longo desta trajetória.

Ao grande amigo e orientador Lizandro por sua fundamental ajuda e ao professor Ñuno Ballesteros pelo auxílio que possibilitou o término deste trabalho.

Aos meus amigos Ageu, Camila, Cássio, Danilo, Igor, José, Lucas e em especial a minha amiga Sally, por fazerem parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À todos que direta e indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as n -formas diferenciais totalmente reais em uma vizinhança de um ponto singular isolado. Usando a abordagem geométrica, estudamos uma definição de índice para essa classe de equações, a qual coincide com a definição clássica de Hopf para o índice de equações diferenciais quadráticas positivas, e este índice é invariante por difeomorfismos que preservam n -formas diferenciais totalmente reais. Também mostramos uma generalização do Teorema de Poincaré-Hopf para o índice de uma n -forma diferencial totalmente real. Além disso, usando coordenadas complexas obtivemos uma fórmula para o índice em termos dos coeficientes da n -forma diferencial totalmente real. Por fim, utilizamos o método blow-up polar para estudar n -formas diferenciais totalmente reais com parte principal não degenerada. Também obtivemos uma generalização da fórmula de Bendixon.

Palavras-chave: n -Forma diferencial totalmente real, Índice, Folheações.

Abstract

In this work, we studied totally real differential n -forms in a neighborhood of an isolated singular point. Using the geometric approach, we study a definition of index for this equations classes, which coincides with the classic definition of Hopf to the index of positive quadratic differential equations, and these index is invariant for diffeomorphisms that preserve totally real differential n -forms. We also show a generalization of the Poincaré-Hopf theorem for the index of a totally real differential n -forms. Moreover, using complex coordinates we obtain a formula for the index in terms of the coefficients of the totally real differential n -form. Lastly, we use the polar blow-up method to study totally real differential n -forms with non degenerate principal part. We also obtained a generalization of the Bendixon formula.

Keywords: Totally real differential n -form, index, foliations.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	5
1.1 Conceitos básicos	5
1.2 Geometria diferencial clássica	8
1.3 Variedades diferenciáveis	17
2 n-Formas diferenciais binárias	25
2.1 Tensores simétricos	25
2.2 n -Formas diferenciais binárias	28
2.3 Equações diferenciais binárias	29
2.4 Folheações	32
3 Índice de n-formas diferenciáveis totalmente reais	36
3.1 n -Formas diferenciais totalmente reais	36
3.2 Índice de uma n -forma diferencial totalmente real	39
3.3 n -Formas diferenciáveis totalmente reais em coordenadas complexas . .	53
3.4 n -Formas diferenciáveis totalmente reais não degeneradas	59
Referências Bibliográficas	70

Introdução

Equações diferenciais binárias (EDB's) tem sido estudadas por diversos autores com aplicações na geometria diferencial de superfícies, equações diferenciais parciais e teoria do controle. Por exemplo, linhas de curvatura, assintóticas e linhas características sobre uma superfície suave em \mathbb{R}^3 são dadas por EDB's, e as linhas características de uma equação diferencial linear geral de segunda ordem também são dadas por EDB's em [2].

Uma EDB é localmente escrita, em uma vizinhança U da origem em \mathbb{R}^2 , na forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (1)$$

onde os coeficientes a, b, c são funções suaves. A EDB é chamada positiva se o discriminante, num ponto (x, y) da Equação (1), dado por $\delta = (b^2 - ac)(x, y)$, satisfaz a seguinte propriedade: $\delta(x, y) > 0$ com igualdade se, e somente se, $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$. Uma EDB positiva define um par de folheações transversais em pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\delta(x, y) > 0$. Em [13], Hopf introduz uma definição do índice para uma EDB positiva.

Neste trabalho, com base no artigo de Fukui e Nuño-Ballesteros [9], estudamos uma generalização de EDB's positivas chamadas n -formas diferenciais totalmente reais. Introduzimos o conceito de índice de uma n -forma diferencial totalmente real em torno de uma singularidade isolada. Esta classe de equações é da forma

$$\omega = a_0(x, y)dx^n + a_1(x, y)dx^{n-1}dy + \dots + a_n(x, y)dy^n = 0, \quad (2)$$

onde $a_i(x, y)$ são funções suaves definidas sobre $U \subset \mathbb{R}^2$, tal que para qualquer $(x, y) \in U$, ou é um ponto singular (isto é, $a_i(x, y) = 0$ para qualquer $i = 1, \dots, n$), ou uma equação algébrica associada que tem exatamente n diferentes raízes reais. Quando $n = 1$, uma 1-forma diferencial é sempre totalmente real e induz uma folheação orientada no plano com singularidades. Para $n = 2$, totalmente real é equivalente a definição de EDB's positivas, e por isso, a EDB define um par de folheações transversais (não orientada).

Quando $n \geq 3$, a EDB correspondente induz localmente uma n -teia numa região regular (isto é, um conjunto de n folheações $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\}$ dois a dois transversais).

Para classificar singularidades genéricas de n -formas diferenciais totalmente reais, temos como principal ferramenta, o índice de um ponto singular isolado dado como um número racional da forma k/n , onde $k \in \mathbb{Z}$, o qual pode ser interpretado como o número de rotações de um vetor tangente continuamente escolhido, quando a estudamos em torno de um ponto singular.

Também é mostrado uma generalização do teorema de Poincaré-Hopf: se M é uma superfície compacta, e ω é uma forma totalmente real com um número finito de pontos singulares, então a soma dos índices é igual a característica de Euler $\chi(M)$.

Outro ponto aqui estudado é o uso de coordenadas complexas, com o qual conseguimos escrever a n -forma diferencial totalmente real como $\omega = A_0 dz^n + A_1 dz^{n-1} d\bar{z} + \dots + A_n d\bar{z}$, onde $A_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são funções diferenciáveis, com $A_j = \bar{A}_{n-j}$, para todo $j = 0, \dots, n$, e assim, expressamos o índice como sendo $-deg(A_0)/n$, onde $deg(A_0)$ é o grau da função A_0 . Genericamente, o índice é $\pm 1/n$.

Por fim, utilizamos o método de desingularização chamado blow-up polar para estudar singularidades de uma n -forma diferencial totalmente real com parte principal não degenerada. Neste caso, o blow-up produz uma n -forma diferencial totalmente real que tem apenas singularidades do tipo sela ou nó, não aparecendo do tipo foco, e obtivemos uma generalização da fórmula de Bendixon, isto é, o índice da n -forma diferencial totalmente real é igual a $1 + \frac{(e-h)}{2n}$ onde e, h são os números dos setores elípticos e hiperbólicos, respectivamente. Estudar o caso em que as singularidades são degeneradas é um trabalho mais árduo, podendo ser objeto de estudo futuro.

Nosso trabalho está dividido da seguinte:

O *Capítulo 1*, trata dos conceitos preliminares que são úteis no decorrer do trabalho. Veremos uma parte da geometria diferencial clássica e alguns de seus resultados. A maioria deles não foram demonstrados aqui, já que não é objetivo desse trabalho, porém são facilmente encontrados em diversos livros que abordam esse conteúdo. Apresentamos os conceitos de variedades diferenciáveis, métrica riemanniana, e abordamos o estudo do grau de uma aplicação, que é importante no capítulo final.

No *Capítulo 2* discorreremos sobre os conceitos de formas diferenciais binárias e seus resultados fundamentais. Mostramos a relação existente entre polinômios homogêneos e tensores simétricos, que, em geral, tem definições diferentes, mas, no nosso estudo, podem ser adotadas como idênticas.

Na *Seção 2.2*, definimos as n -formas diferenciais binárias sobre uma superfície M , e vimos que as soluções são dadas através de curvas $\beta(t)$ com $t \in [0, l]$. A *Seção 2.3*, é dedicada às equações diferenciais binárias, onde definimos e apresentamos exemplos

de EDB's de grau 2, para que possamos ter uma melhor visualização geométrica em torno de pontos singulares isolados.

Ao fim desse capítulo, trabalhamos com folheações, cuja definição pode ser encontrada de várias maneiras segundo cada autor. Aqui foi adotada a definição dada por Camacho e Neto em [3]. Consideramos duas definições alternativas, uma delas diz que uma folheação é definida basicamente como uma família de cartas locais, a outra remete à *Forma Local das Submersões*.

No *Capítulo 3*, demonstramos os principais resultados deste trabalho. Definimos o índice de uma n -forma diferencial totalmente real, que generaliza o índice no caso de EDB's positivas; generalizamos o famoso Teorema de Poincaré-Hopf; mostramos como expressar uma n -forma diferencial totalmente real em coordenadas complexas, e apresentamos uma fórmula para o índice nesse caso. Por fim, trabalhamos com singularidades não degeneradas, e encontramos uma fórmula para calcular o índice com essa particularidade dada por $ind(\omega, p) = 1 - (S^+ - S^-)/n$, onde S^+ e S^- denotam o número de direções características do tipo sela e nó, respectivamente, e com isso, generalizamos a conhecida fórmula de Bendixon.

Capítulo 1

Preliminares

Na primeira parte deste capítulo, apresentaremos a teoria introdutória que será necessária para a compreensão e demonstração dos resultados que serão apresentados nos próximos capítulos. Em seguida, faremos uma breve revisão da geometria de superfícies em \mathbb{R}^3 , destacando resultados importantes para o trabalho. Por fim, trataremos de algumas noções básicas relacionadas com o conceito de variedades diferenciáveis.

1.1 Conceitos básicos

Sejam U e V conjuntos abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^p , respectivamente. Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ é de classe C^k se possui derivadas parciais contínuas de ordem 1 até k . Quando f possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens, dizemos que $f : U \rightarrow V$ é de classe C^∞ . Denotaremos por $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ a diferencial de f no ponto a .

Definição 1.1.1. Dada uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, dizemos que $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto singular de f se, a matriz jacobiana

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)(x), \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq p,$$

não tem posto máximo em $x \in \mathbb{R}^n$. Caso contrário, dizemos que x é um ponto regular de f .

Em outras palavras, o posto $Jf(x) < \min\{n, p\}$. Note que as linhas da matriz Jf são as derivadas parciais das funções coordenadas de f . Portanto, quando $p = 1$, isto é, no caso das funções, o posto da jacobiana não será o máximo possível quando todas as derivadas parciais da função se anularem.

Definição 1.1.2. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto

crítico não degenerado de f se x_0 é um ponto singular de f e o determinante da matriz

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

é não nulo.

Definição 1.1.3. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^m , chama-se uma submersão quando, para todo $x \in U$, sua diferencial $df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é posto máximo.

Observação 1.1. Para que isto ocorra, é necessário que se tenha $m \geq n$.

Teorema 1.1.1. (Forma Local das Submersões) *Seja $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$) de um aberto $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R}^n . Se, num ponto $p = (a, b) \in U$, a matriz*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{m+j}}\right)(p), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

é invertível então existem abertos $Z \ni p$ em \mathbb{R}^{m+n} , $V \ni a$ em \mathbb{R}^m , $W \ni c = f(p)$ em \mathbb{R}^n e um difeomorfismo vertical $h : V \times W \rightarrow Z$ de classe C^k , tal que $f(h(x, w)) = w$ para todo $x \in V$ e todo $w \in W$.

Definição 1.1.4. Uma imersão do aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ no espaço \mathbb{R}^n é uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $x \in U$, a diferencial $df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear injetiva.

Observação 1.2. Isto só acontece quando $m \leq n$.

O lema a seguir é um resultado clássico e muito útil em problemas de classificação.

Lema 1.1.2. (Lema de Hadamard) *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , $k \geq 1$, e $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Então, numa vizinhança de a , a função f pode ser escrita na forma*

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) f_i(x),$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e as funções f_i são de classe C^{k-1} .

Demonstração. Podemos escrever f da seguinte forma:

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [f(a + t(x - a))] dt.$$

Agora,

$$\frac{d}{dt} [f(a + t(x - a))] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + t(x - a)) \cdot (x_i - a_i).$$

Logo,

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a)) dt.$$

Observe que as funções

$$f_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a)) dt$$

são de classe C^{k-1} . Assim, o resultado segue. \square

Corolário 1.1.3. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , $k \geq 1$, e $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Se todas as derivadas parciais de f em a , até à ordem $r < k$, são nulas, então, na vizinhança desse ponto, a função pode ser escrita na forma:

$$f(x) = f(a) + \sum_{|\alpha|=r+1} (x - a)^\alpha f_\alpha(x),$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é o vetor de inteiros não negativos, $|\alpha|$ é a soma desses inteiros, f_α são funções de classe C^{k-r-1} e $(x - a)^\alpha = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (x_n - a_n)^{\alpha_n}$.

Demonstração. A demonstração desse corolário é baseado no Lema de Hadamard e no princípio da indução matemática. \square

Para encerrar esta seção, falaremos sobre um conceito fundamental na análise da propriedade de uma determinada função: sua expansão em série de Taylor.

Definição 1.1.5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . A série de Taylor \hat{f} da função f em torno de um ponto x_0 é a série de potências definida por

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

onde $n!$ é o fatorial de n e, $f^{(n)}(x_0)$ denota a n -ésima derivada de f no ponto x_0 .

Se a série convergir, ela não necessariamente será igual a própria função. Quando a série convergir e for igual a função, ela será chamada de analítica real.

Exemplo 1.1. Dada a função $f(x) = e^x$, a série de Taylor de f em torno da origem é dada por

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Neste caso, $f(x) = \hat{f}(x)$. Portanto, f é uma função analítica real.

Exemplo 1.2. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , \text{ se } x > 0 \\ 0 & , \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

Então, a série de Taylor de f em torno da origem é dada por $\hat{f}(x) = 0$. Claramente, $f(x) \neq \hat{f}(x)$. Assim, $f \in C^\infty$ mas não é analítica real.

Definição 1.1.6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . A série de Taylor de f em torno do ponto (x_0, y_0) é dada por

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x_0, y_0) (x - x_0)^i (y - y_0)^{k-i}.$$

Observação 1.3. Quando $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação de classe C^∞ , a série de Taylor de F em torno do ponto (x_0, y_0) é dada por

$$\hat{F}(x, y) = (\hat{F}_1(x, y), \hat{F}_2(x, y)), \tag{1.1}$$

onde \hat{F}_1, \hat{F}_2 são as séries de Taylor das funções coordenadas F_1 e F_2 de F , respectivamente.

1.2 Geometria diferencial clássica

Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou até o \mathbb{R}^n) de classe C^∞ , onde $I = [a, b]$. O subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é o traço da curva α .

Definição 1.2.1. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, e dita regular por partes se existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$ do intervalo $[a, b]$ tal que α é regular em cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Os pontos $\alpha(t_i)$, $i = 0, \dots, k$, são chamados vértices de α e os traços $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ são chamados arcos regulares de α . Intuitivamente, α é uma curva que deixa de ter uma reta tangente bem definida apenas em um número finito de pontos.

Definição 1.2.2. Dizemos que uma curva regular por partes $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, em um intervalo fechado $I = [a, b]$, é simples e fechada se:

- (1) $\alpha(t) \neq \alpha(s)$, se $t \neq s$, com $t, s \in [a, b]$.
- (2) $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Definição 1.2.3. Uma curva simples e fechada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ será dita orientada positivamente se for percorrida no sentido anti-horário.

Exemplo 1.3. Considere a curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (-\sin t, \cos t)$. Assim, α percorre o círculo no sentido anti-horário

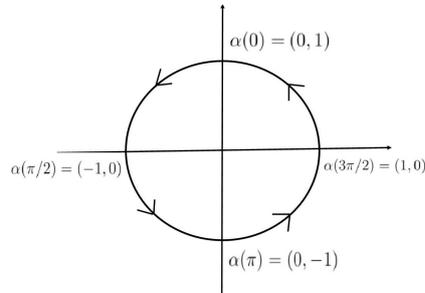


Figura 1.1: Traço da curva α

Definição 1.2.4. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, com $p \in V$, e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$, definida num aberto U de \mathbb{R}^2 tal que:

1. $X : U \rightarrow V \cap S$, $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, é de classe C^∞ .
2. X é um homeomorfismo, isto é, X é uma bijeção contínua cuja inversa X^{-1} é contínua.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A aplicação X é chamada de parametrização ou um sistema de coordenadas locais em p , e $V \cap S$ é chamada uma vizinhança coordenada de S em p .

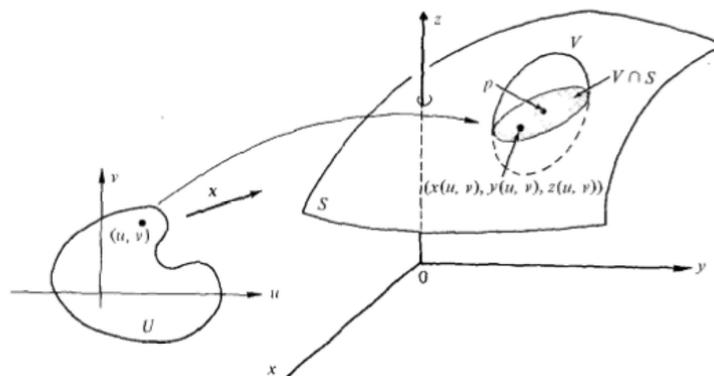


Figura 1.2: Definição de superfície regular

Definição 1.2.5. Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares. Uma aplicação $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ é diferenciável em $p \in S_1$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$ em $\varphi(p) \in S_2$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável em um aberto de S_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Observação 1.4. Quando $dX_q(1, 0) = X_u(q)$ é ortogonal a $d_qX(0, 1) = X_v(q)$, para todo $q \in U$, a aplicação X é chamada parametrização ortogonal.

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Dizemos que $v \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a S em p se $v = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ é uma curva parametrizada diferenciável, tal que $\alpha(0) = p$.

Definição 1.2.6. O plano tangente a S em p , denotado por T_pS , é o conjunto de todos os vetores tangentes a S em p .

Definição 1.2.7. Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares e seja $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in S_1$ e cada $v \in T_pS_1$ existe uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Seja $\beta = \varphi \circ \alpha$. Então aplicação $d\varphi_p : T_pS_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}S_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear chamada diferencial de φ em p .

Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma superfície regular S e $X(q) = p \in S$. Então, $\{X_u(q), X_v(q)\}$ é uma base de T_pS . Um campo de vetores em um conjunto aberto $W \subset S$ é uma correspondência ω que associa a cada $p \in W$ um vetor $\omega(p) \in T_pS$. O campo de vetores ω é diferenciável em p se, para alguma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset W$ de S em p , $\omega \circ X = aX_u + bX_v$ na base $\{X_u, X_v\}$, as funções a e b são diferenciáveis em q , onde $X(q) = p$. O campo de vetores ω é diferenciável em $X(U)$ se a e b são diferenciáveis em U .

Definição 1.2.8. Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada diferenciável em S , onde $I = [0, l]$. Um campo de vetores ao longo de α é uma correspondência que associa a cada $t \in I$, um vetor $\omega(t) \in T_{\alpha(t)}S$.

Definição 1.2.9. Sejam S uma superfície regular, ω um campo de vetores diferenciável em um conjunto aberto $U \subset S$ e $p \in U$. Seja $y \in T_pS$. Considere uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$, e seja $\bar{\omega}(t) = \omega(\alpha(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a restrição do campo de vetores ω à curva α . O vetor obtido pela projeção ortogonal de $(d\bar{\omega}/dt)(0)$ sobre o plano T_pS é chamado a derivada covariante em p do campo ω em relação ao vetor y . Esta derivada covariante é denotada por $\frac{D\bar{\omega}}{dt}(0)$.

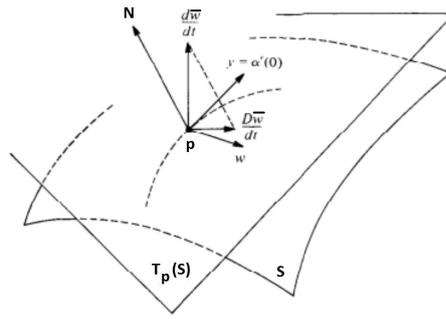


Figura 1.3: Derivada covariante de ω

Observe que se ω é um campo de vetores ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow S$, então a derivada covariante de ω em t , denotada por $\frac{D\omega}{dt}(t)$, é definida como a projeção ortogonal de $\frac{d\omega}{dt}(t)$ sobre o plano $T_{\alpha(t)}S$.

Definição 1.2.10. Seja S uma superfície regular. Um campo de vetores diferenciável ω ao longo de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow S$ é paralelo se $\frac{D\omega}{dt}(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Definição 1.2.11. Sejam $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada diferenciável e $\omega_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$. Seja ω um campo de vetores paralelo ao longo de α com $\omega(t_0) = \omega_0$. O vetor $\omega(t)$, $t \in I$, é chamado transporte paralelo de ω_0 ao longo de α no ponto t .

Definição 1.2.12. Uma curva parametrizada diferenciável, não constante, $\gamma : I \rightarrow S$ é chamada geodésica em $t \in S$, se seu campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de γ em t , isto é, $\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0$. Dizemos que γ é uma geodésica parametrizada se é uma geodésica para todo $t \in I$.

Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma superfície regular S em um ponto $p \in S$, para cada ponto q de $X(U)$, podemos escolher um vetor normal unitário $N(q)$ dado por

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(X^{-1}(q)), \quad q \in X(U). \quad (1.2)$$

Assim, temos uma aplicação diferenciável $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in X(U)$ um vetor normal unitário $N(q)$. Em geral, se $V \subset S$ é um conjunto aberto em S e $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que associa a cada $q \in V$ um vetor normal unitário em q , dizemos que N é um campo diferenciável de vetores normais unitários em V .

Definição 1.2.13. Uma superfície regular S é orientável se ela admite um campo contínuo de vetores normais unitários definido em toda a superfície; a escolha de tal campo N é chamada uma orientação de S , e S , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável.

Em outras palavras, S é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . Se S é orientada, uma parametrização X é compatível com a orientação de S se, juntando X à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S .

Definição 1.2.14. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow S^2$, assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de S .

A diferencial dN_p de N em p é uma aplicação linear de T_pS em $T_{N(p)}S^2$, e como T_pS e $T_{N(p)}S^2$ são os mesmos espaços vetoriais, dN_p pode ser vista como um operador linear em T_pS . Tal aplicação opera da seguinte maneira: para cada curva parametrizada diferenciável $\alpha(t)$ em S , com $\alpha(0) = p$, consideremos $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2 . O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de T_pS . Ele mede a taxa de variação do vetor normal N , restrito à curva $\alpha(t)$, em $t = 0$. Assim, dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p . No caso das curvas, esta medida é dada por um número: a curvatura. No caso das superfícies, esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

Definição 1.2.15. Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado curvatura Gaussiana K de S em p .

Definição 1.2.16. Seja ω um campo diferenciável e unitário de vetores ao longo de um curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow S$ sobre uma superfície orientada S . Como $\omega(t)$, $t \in I$, é um campo de vetores unitário, $(d\omega/dt)(t)$ é normal a $\omega(t)$, e portanto

$$\frac{D\omega}{dt} = \lambda(N \wedge \omega(t)).$$

O número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[D\omega/dt]$, é chamado valor algébrico da derivada covariante de ω em t .

Definiremos a seguir, a curvatura geodésica de uma curva regular numa superfície regular S cujo sinal depende da orientação da curva e da superfície. As geodésicas que são curvas regulares são assim caracterizadas como curvas cuja curvatura geodésica é nula.

Definição 1.2.17. Seja C uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S , e seja $\alpha(s)$ uma parametrização de C , em uma vizinhança de $p \in S$, pelo comprimento de arco s . O valor algébrico $[D(\alpha')(s)/ds] = k_g$ da derivada covariante de $\alpha'(s)$ é chamado curvatura geodésica de C em p .

Sejam ω e ν dois campos de vetores diferenciáveis ao longo de uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow S$, com $\|\omega(t)\| = \|\nu(t)\| = 1$, $t \in I$. Queremos definir uma função diferenciável do ângulo de $\omega(t)$ a $\nu(t)$ na orientação de S . Para isto, consideramos o campo de vetores diferenciável $\bar{\omega}$ ao longo de α , definido pela condição de que $\{\omega, \bar{\omega}\}$ seja uma base ortonormal positiva, isto é, uma base ortonormal compatível com a orientação, para cada $t \in I$. Assim, $\nu(t)$ pode ser expresso como

$$\nu(t) = a(t)\omega(t) + b(t)\bar{\omega}(t),$$

onde a e b são funções diferenciáveis em I e $a^2 + b^2 = 1$. O lema abaixo nos mostra que fixando uma determinação φ_0 do ângulo de $\omega(t_0)$ a $\nu(t_0)$ é possível “estendê-lo” diferenciavelmente em I , e isto nos fornece a função desejada.

Lema 1.2.1. Sejam a e b funções diferenciáveis em I com $a^2 + b^2 = 1$ e $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ tais que $a(t_0) = \cos \varphi_0$ e $b(t_0) = \text{sen} \varphi_0$. Então a função diferenciável

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') ds$$

é tal que $\cos \varphi(t) = a(t)$, $\text{sen} \varphi(t) = b(t)$, $t \in I$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Demonstração. Basta mostrar que a função

$$(a - \cos \varphi)^2 + (b - \text{sen} \varphi)^2 = 2 - 2(a \cos \varphi + b \text{sen} \varphi)$$

é identicamente nula, ou que

$$A = a \cos \varphi + b \text{sen} \varphi = 1.$$

Utilizando o fato de que $aa' = -bb'$ e a definição de φ , obtemos facilmente

$$\begin{aligned} A' &= -a(\text{sen} \varphi)\varphi' + b(\cos \varphi)\varphi' + a' \cos \varphi + b' \text{sen} \varphi \\ &= -b'(\text{sen} \varphi)(a^2 + b^2) - a'(\cos \varphi)(a^2 + b^2) + a' \cos \varphi + b' \text{sen} \varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $A(t) = \text{const.}$, e como $A(t_0) = 1$, o lema está demonstrado. \square

Antes de apresentarmos o conhecido teorema de Gauss-Bonnet, vejamos uma primeira versão deste teorema que trata de triângulos geodésicos em superfícies, isto é, triângulos cujos lados são arcos de geodésicas. A grosso modo, Gauss afirma que o excesso sobre π da soma dos ângulos internos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de um triângulo geodésico T é igual à integral da curvatura Gaussiana K sobre T ; isto é

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \iint_T K dr.$$

A extensão do teorema a uma região limitada por uma curva simples deve-se a Bonnet.

Definição 1.2.18. Seja S uma superfície regular. Dizemos que uma região conexa $R \subset S$ é regular se R é compacta e a sua fronteira ∂R é uma união finita de curvas regulares por partes fechadas e simples que não se intersectam. A região na figura abaixo (a) é regular, mas a região (b) não é regular.

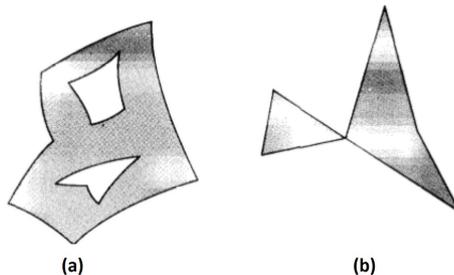


Figura 1.4: Exemplo de regiões regulares e não regulares

Por conveniência, consideramos uma superfície compacta como uma região regular, cuja fronteira é o conjunto vazio.

Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ uma curva regular por partes, simples e fechada e seja $\alpha(t_i)$, $i = 0, \dots, k$, vértices de α . Sejam $\alpha'(t_i^-)$ e $\alpha'(t_i^+)$ os limites à esquerda e a direita, respectivamente, de cada vértice $\alpha'(t_i)$. Suponha que S está orientada com uma orientação N e seja $|\theta_i|$, $0 < |\theta_i| \leq \pi$, a menor determinação do ângulo de $\alpha'(t_i^-)$ a $\alpha'(t_i^+)$. Se $|\theta_i| \neq \pi$ (isto é, $\alpha(t_i)$ não é uma cúspide), damos a θ_i o sinal do determinante $(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), N(\alpha(t_i)))$, ou seja, o sinal de θ_i é dado pela orientação de S . O ângulo θ_i , $-\pi < \theta_i \leq \pi$ é chamado ângulo externo no vértice $\alpha(t_i)$.

Definição 1.2.19. Dizemos que uma região simples que tem apenas três vértices, com ângulos externos $\theta_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, é chamada de triângulo.

Definição 1.2.20. Uma triângulação de uma região regular $R \subset S$ é uma família finita τ de triângulos T_i , $i = 1, \dots, n$, tal que

1. $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$,
2. Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j .

Definição 1.2.21. Dada uma triângulação τ de uma região regular $R \subset S$ de uma superfície regular S , denotaremos por F o número de triângulos (faces), por E o número de lados (arestas), e por V o número de vértices da triângulação. O número

$$F - E + V = \chi(R)$$

é chamado característica de Euler-Poincaré da região R .

As demonstrações dos próximos resultados foram omitidos nesta seção mas podem ser vistos na referência [5].

Proposição 1.2.2. Toda região regular de uma superfície regular admite uma triângulação.

Proposição 1.2.3. A característica de Euler-Poincaré de uma região regular R de uma superfície S não depende da triângulação de R .

Proposição 1.2.4. Sejam S uma superfície regular orientada e $\{X_\alpha\}$, $\alpha \in A$, uma família de parametrizações compatíveis com a orientação de S que cobre toda a superfície S . Seja R uma região regular de S . Então existe uma triângulação τ de R tal que cada triângulo $T \in \tau$ está contido em alguma vizinhança coordenada $X_\alpha(U_\alpha)$ da família $\{X_\alpha\}$. Além disto, se a fronteira de cada triângulo for orientada positivamente, triângulos adjacentes determinam orientações opostas no lado em comum.

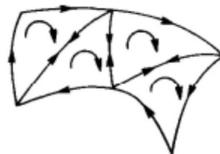


Figura 1.5: Triângulação da região R

Definição 1.2.22. Seja S uma superfície orientada. Dizemos que uma região $R \subset S$ é uma região simples se R é homeomorfa a um disco e a fronteira ∂R de R é o traço de uma curva regular por partes, simples e fechada $\alpha : I \rightarrow S$. Dizemos que α é orientada positivamente se para cada $\alpha(t)$, pertencente a um arco regular, a base positiva ortogonal $\{\alpha'(t), h(t)\}$ satisfaz a condição de que $h(t)$ “aponta para dentro” de R .

Com a notação da Proposição 1.2.4, a soma

$$\sum_{j=1}^k \iint_{x_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j,$$

não depende da triângulação τ nem da família $\{x_\alpha\}$ de parametrizações de S , onde E_j , F_j e G_j são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{x_{ju}, x_{jv}\}$ de $T_p S$.

Teorema 1.2.5. (Gauss Bonnet Global) *Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada e sejam C_1, \dots, C_n as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂R de R . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, \dots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas C_1, \dots, C_n . Então*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K dr + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi \chi(R),$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i , e a integral sobre C_i significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de C_i .

Levando em conta o fato de que uma superfície compacta pode ser considerada uma região com fronteira vazia, obtemos:

Corolário 1.2.6. *Seja S uma superfície compacta e orientável. Então*

$$\iint_S K dr = 2\pi \chi(S).$$

Apresentaremos abaixo uma aplicação do teorema de Gauss-Bonnet: o índice de um campo de vetores. Para esta aplicação, precisaremos adotar o seguinte resultado da topologia do plano: o conhecido teorema da curva de Jordan.

Teorema 1.2.7. *Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, simples e regular por partes. Então $\mathbb{R}^2 - C$ tem duas componentes conexas, uma limitada D e outra ilimitada A , tais que $\partial D = \partial A = C$. Além disso, D é homeomorfo a um disco, isto é, C é o bordo de uma região simples.*

Este resultado é fácil de ser visualizado, mas a demonstração não é simples, para maiores detalhes ver [18].

Seja ν um campo de vetores diferenciável em uma superfície orientada S . Dizemos que p é um ponto singular de ν se $\nu(p) = 0$. O ponto singular é dito isolado se existe uma vizinhança V de p em S tal que ν não tem pontos singulares em $V \setminus \{p\}$.

A cada ponto singular isolado p de um campo de vetores ν associamos um número inteiro, o índice de ν em p da seguinte maneira:

Seja $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ uma parametrização ortogonal em $p = X(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in U$, compatível com a orientação de S , tal que $\nu(\bar{p}) \neq 0$ para todo $\bar{p} \in X(U) \setminus \{p\}$, e seja $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ uma curva regular por partes, simples, fechada e orientada positivamente tal que $\alpha([0, l]) \subset X(U)$ é a fronteira de uma região simples R contendo p como o único ponto singular.

Seja $\nu(t) = \nu(\alpha(t))$, $t \in [0, l]$, a restrição de ν ao longo de α , e seja $\varphi : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ uma determinação diferenciável por partes do ângulo positivo de X_u a $\nu(t)$, isto é,

$$\frac{\nu(t)}{\|\nu(t)\|} = \cos \varphi(t) \frac{X_u}{\|X_u\|}(\beta(t)) + \operatorname{sen} \varphi(t) \frac{X_v}{\|X_v\|}(\beta(t)),$$

onde $\beta(t) = X^{-1}(\alpha(t))$, dado pelo Lema 1.2.1 da seção anterior (que pode ser facilmente estendido a curvas regulares por partes). Como α é fechada, temos que $\frac{\nu(0)}{\|\nu(0)\|} = \frac{\nu(l)}{\|\nu(l)\|}$. Assim, existe um inteiro $\operatorname{ind}(\nu, p)$ definido por

$$2\pi \operatorname{ind}(\nu, p) = \varphi(l) - \varphi(0), \tag{1.3}$$

onde $\operatorname{ind}(\nu, p)$ é chamado o índice de ν em p .

Teorema 1.2.8. (Poincaré-Hopf) *A soma dos índices de um campo de vetores diferenciável ν com singularidades isoladas em uma superfície compacta S é igual a característica de Euler-Poincaré de S .*

Ver em [5].

1.3 Variedades diferenciáveis

Faremos agora, uma breve revisão dos conceitos e resultados sobre variedades diferenciáveis que serão usados nos próximos capítulos.

Definição 1.3.1. Seja M um espaço topológico. Uma n -carta sobre M é um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Sejam (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) duas cartas no mesmo espaço topológico M , tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Então, a aplicação

$$\varphi_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

que é um homeomorfismo, é chamada mudança de coordenadas.

Definição 1.3.2. Um atlas de classe C^k sobre um espaço topológico M é uma família de cartas

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) | i \in I\}$$

tais que

- (1) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$;
- (2) Todas as aplicações “mudança de coordenadas” entre membros de \mathcal{A} são difeomorfismos C^k .

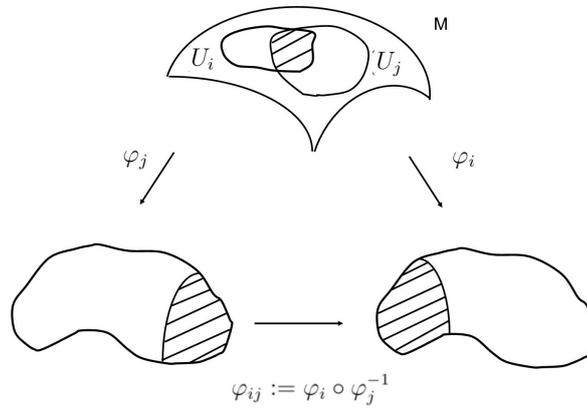


Figura 1.6: Mudança de coordenadas

Definição 1.3.3. Uma variedade diferenciável de dimensão n é um par (M, \mathcal{A}) , onde M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável, \mathcal{A} um atlas de classe C^∞ e para todo $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$, $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.

Observe que se $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é uma carta sobre M então $x = \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ é chamada de parametrização de M .

Definição 1.3.4. Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \rightarrow N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N$ em $\varphi(p) \in N$ existe uma n -parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Consideremos $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável, com $\alpha(0) = p$ e

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

1. Preliminares

onde $x_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \{1, \dots, n\}$ são as funções coordenadas de α . Então, $\alpha'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_n(0)) = v \in \mathbb{R}^n$. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma vizinhança de p . Assim,

$$df_p(v) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Portanto, para cada $v = \alpha'(0) \in \mathbb{R}^n$, podemos definir um operador L sobre funções diferenciáveis dada por $L(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}$. Esta é a propriedade característica que usaremos para definir vetor tangente em variedades.

Definição 1.3.5. Sejam M uma variedade diferenciável e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja \mathcal{D} o conjunto das funções diferenciáveis em M no ponto p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente de M em p é um vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes de M em p será denotado por $T_p M$.

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização de M tal que $x(q) = p$. Sejam $\alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável dada por $\alpha_i(t) = x(q + te_i)$, onde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é base canônica de \mathbb{R}^n . Então, $\alpha'_i(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\alpha'_i(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha_i)}{dt} \right|_{t=0} = d(f \circ x)_q(e_i) = \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}(q).$$

Denotaremos por $\alpha'_i(0) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q$. Observe que se $\alpha'(0)$ é um vetor tangente de M em p então $x^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva diferenciável dada por $(x^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e

$$\begin{aligned} \alpha'(0)(f) &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d[(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)]}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}(q) = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q \right)(f). \end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q.$$

Reciprocamente, se $v = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q$ então existe uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ dada por $\alpha(t) = x(q + t(c_1, \dots, c_n))$ tal que $\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q$. Portanto, isso mostra que $T_p M$ é um espaço vetorial de dimensão n e que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_q \right\}$ é uma base de $T_p M$. O espaço vetorial $T_p M$ é chamado o espaço tangente de M em p .

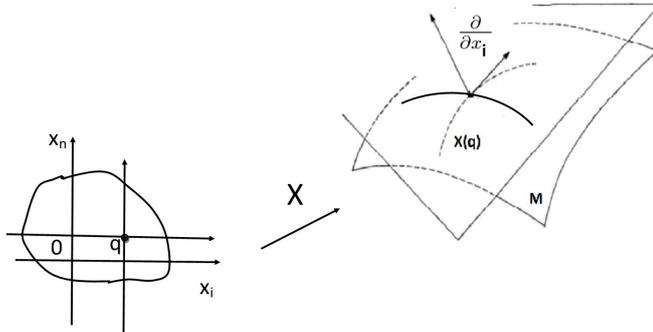


Figura 1.7: Espaço tangente de M em p

Definição 1.3.6. Sejam M e N variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p M$ existe uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Seja $\beta = \varphi \circ \alpha$. Então aplicação $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear chamada diferencial de φ em p .

Definição 1.3.7. Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, bijetiva, e sua inversa φ^{-1} também é diferenciável.

A existência de um difeomorfismo entre variedades diferenciáveis nos fornece a noção de equivalência entre variedades diferenciáveis. Em particular, se existe um difeomorfismo entre as variedades M e N então estas variedades têm a mesma dimensão.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Então, denotemos por TM a união disjunta de todos os espaços tangentes a M . Mais precisamente, definimos

$$TM = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M)$$

O conjunto TM é chamado o fibrado tangente de M . Não é difícil mostrar que $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.

Definição 1.3.8. Uma variedade M diz-se orientável quando existe uma família $x_i : U_i \rightarrow M$, $i \in J$, de parametrizações de M tal que $M = \cup_{i \in J} U_i$ e para todo i, j , com

$x_i(U_i) \cap x_j(U_j) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_j^{-1} \circ x_i$ tem determinante positivo. Neste caso, um elemento da família é chamado de parametrização positiva. Se uma tal escolha não é possível, diz-se que M é não-orientável.

Observe que, na definição acima, uma orientação positiva de $T_p M$ é dada pela base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_q\}$, onde $x : U \rightarrow M$ é uma parametrização positiva de M e $x(q) = p$.

Exemplo 1.4. Se M pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas V_1 e V_2 de modo que a interseção $V_1 \cap V_2$ é conexa, então M é orientável. De fato, como o determinante Jacobiano da mudança de coordenadas é diferente de zero, ele não muda de sinal em $V_1 \cap V_2$; se é negativo, basta trocar o sinal de uma das coordenadas para que ele passe a ser positivo em $V_1 \cap V_2$.

Definição 1.3.9. Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p M$.

Em outras palavras, um campo de vetores em M é uma aplicação $X : M \rightarrow TM$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ & \searrow Id & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

comuta, isto é, $\pi \circ X = Id$, onde $\pi : TM \rightarrow M$ definida por $\pi(p, v) = p$ para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_p M$ é a projeção canônica de TM sobre M .

Um campo de vetores em M é também chamado de uma seção do fibrado tangente TM .

Definição 1.3.10. Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que o campo de vetores X em M é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.

Considere duas variedades orientadas M e N , de mesma dimensão, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se M é compacta, definimos o grau de f da seguinte forma: Seja $p \in M$ um ponto regular de f , de modo que df_p é um isomorfismo linear entre os espaços vetoriais orientados $T_p M$ e $T_{f(p)} N$. Definimos o sinal da diferencial df_p , denotado por $sign df_p$, como sendo $+1$, se df_p preserva orientação, ou -1 , se df_p inverte orientação.

Dado um valor regular $q \in N$ de f , temos que $f^{-1}(q)$ é uma variedade de dimensão 0. Como M é compacta, $f^{-1}(q)$ é um conjunto finito. Assim, definimos

$$deg(f; q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} sign df_p.$$

Este inteiro é chamado o grau da aplicação f , e não depende da escolha do valor regular de f . Assim, denotaremos este número por $\deg(f)$.

Quando $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável tal que $f(0) = 0$ e $f(x) \neq 0$, para todo $x \neq 0$, o grau de f é definido como o grau da aplicação $\frac{f}{\|f\|} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, onde $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $n - 1$. Uma propriedade muito útil do grau é a seguinte:

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g), \quad (1.4)$$

onde $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções diferenciáveis.

Observação 1.5. Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável tal que $f(0) = 0$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$, então $\text{ind}(f) = \deg(f)$.

Exemplo 1.5. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Então, $\frac{f(z)}{\|f(z)\|} = f(z)$, para todo $z \in S^1$. Observe que $z_0 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ é um valor regular de f e que existem k soluções em S^1 da equação $z^k = z_0$. Como f é holomorfa, então df_z preserva orientação. Logo, $\deg(f) = k$.

Exemplo 1.6. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $f(z) = \bar{z}$. Então, $\frac{f(z)}{\|f(z)\|} = f(z)$, para todo $z \in S^1$. Como f é um difeomorfismo, e o determinante da diferencial de f é negativo então, $\deg(f) = -1$. Por outro lado, se $g(z) = \bar{z}^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, então $g = f \circ h$, onde $h(z) = z^k$ e $f(z) = \bar{z}$. Assim, $\deg(g) = \deg(f) \cdot \deg(h) = -k$.

Definição 1.3.11. Sejam M uma variedade diferenciável e \widetilde{M} uma variedade diferenciável orientável. Dizemos que uma aplicação $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ é um recobrimento duplo orientável se:

- (1) π é uma aplicação diferenciável sobrejetiva,
- (2) para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U de M tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são conjuntos abertos disjuntos de \widetilde{M} , a restrição de π a cada V_i , $i = 1, 2$, é um difeomorfismo sobre U .

Teorema 1.3.1. *Seja M uma variedade diferenciável conexa. Então, existem uma variedade orientável \widetilde{M} e um recobrimento duplo orientável $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$.*

Demonstração. Seja M uma variedade conexa, não-orientável. Para cada $p \in M$, consideremos o conjunto B de todas as bases de $T_p M$ e assumamos que duas bases são equivalentes se elas estão relacionadas por uma matriz com determinante positivo. Com isto, definimos uma relação de equivalência e dividimos B em dois conjuntos disjuntos. Seja \mathcal{O}_p o espaço quociente de B por esta relação de equivalência. Então

\mathcal{O}_p tem dois elementos, e cada elemento $O_p \in \mathcal{O}_p$ é uma orientação de T_pM . Seja \widetilde{M} o conjunto

$$\widetilde{M} = \{(p, O_p); O_p \in \mathcal{O}_p\}.$$

Para dar a \widetilde{M} uma estrutura diferenciável, seja $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ uma estrutura diferenciável de M e defina $\tilde{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \widetilde{M}$ por

$$\tilde{x}_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) = \left(x_\alpha(u_\alpha, v_\alpha), \left[\frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \right] \right),$$

onde $(u_\alpha, v_\alpha) \in U_\alpha$ e $\left[\frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \right]$ denota o elemento de \mathcal{O}_p determinado pela base $\left\{ \frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \right\}$. Assim, temos que, $\{U_\alpha, \tilde{x}_\alpha\}$ é uma estrutura diferenciável em \widetilde{M} e \widetilde{M} com esta estrutura diferenciável é uma superfície orientável. Para mostrar que $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ é um recobrimento duplo, veja [15] \square

Definição 1.3.12. Dada uma variedade M de dimensão n , uma métrica Riemanniana g em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $g(p)$ no espaço tangente T_pM (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva, definida em T_pM) e que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é uma parametrização em torno de p , então $g(x(q))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q\right) = g_{ij}(q)$ é uma função diferenciável em U . Uma variedade M munida de uma métrica Riemanniana g é chamada de variedade Riemanniana. Note que algumas vezes, o produto interno $g(p)$ no espaço tangente T_pM e será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = g(p)$.

Em outras palavras, podemos dizer que a diferenciabilidade da métrica Riemanniana g é afirmar que dados campos de vetores X, Y diferenciáveis em uma vizinhança V de M , a aplicação $p \in M \mapsto g(p)(X(p), Y(p)) \in \mathbb{R}$ é diferenciável em V .

Exemplo 1.7. Dada uma imersão $f : M \rightarrow N$ entre duas variedades diferenciáveis sendo N uma variedade Riemanniana com métrica g_2 , podemos definir uma métrica riemanniana g_1 em M do seguinte modo

$$g_1(p)(v_1, v_2) = g_2(f(p))(df_p(v_1), df_p(v_2))$$

para todo $v_1, v_2 \in T_pM$, onde $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$.

Definição 1.3.13. Diz-se que a métrica Riemanniana g em M é de classe C^k se, para cada parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, a função dada por $g_{ij}(q) = g(x(q))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q\right)$ é de classe C^k .

Exemplo 1.8. $M = \mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual é uma variedade Riemanniana.

Exemplo 1.9. Toda superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ possui uma métrica Riemanniana natural, de classe C^∞ . Basta considerar, em cada espaço tangente $T_p M \subset \mathbb{R}^3$, o produto interno induzido de \mathbb{R}^3 .

A existência de um produto interno que varia diferenciavelmente em relação à escolha do ponto $p \in M$ possibilita definir conceitos como ângulo entre vetores, comprimento de curvas e ângulo entre curvas.

Observação 1.6. Uma variedade diferenciável de dimensão 2 de classe C^∞ com uma métrica riemanniana é chamada superfície. Todos os conceitos associados a uma superfície regular que dependam do produto interno, são válidos para superfícies.

Capítulo 2

n -Formas diferenciais binárias

Neste capítulo, apresentaremos resultados de maneira resumida, porém consistente, da teoria das formas diferenciais. Definiremos primeiramente os tensores simétricos, e apresentaremos alguns exemplos. Em seguida, definiremos as n -formas diferenciais binárias, uma das principais ferramentas de nosso estudo.

Faremos um resumo do estudo das equações diferenciais binárias (EDB's), que é um caso particular de uma n -forma diferencial binária. Para um estudo completo, ver por exemplo [2] e [1].

Por fim, na última Seção, estudaremos as folheações, que são induzidas pelas formas diferenciais.

Todo esse capítulo tem o intuito de complementar os resultados que serão apresentados no próximo capítulo.

2.1 Tensores simétricos

Seja E um espaço vetorial n -dimensional sobre \mathbb{R} . Uma aplicação $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre todo E , é dita ser um funcional linear se $\alpha(au + v) = a\alpha(u) + \alpha(v)$ para todo $u, v \in E$ e para todo $a \in \mathbb{R}$. Denota-se por $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ o espaço vetorial dos funcionais lineares E em \mathbb{R} , o qual é chamado de espaço dual de E , e que satisfaz $\dim E = \dim E^*$.

Dada uma base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E , existe uma base $\mathcal{B}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ de E^* chamada base dual de \mathcal{B} satisfazendo:

$$e^i(e_j) = \delta_{ij},$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Logo, dado $v \in E$ tem-se que $v = \sum_{i=1}^n F_i e_i$, segue que $F_i = e^i(v)$, para $i = 1, \dots, n$. Daí,

$$v = e^1(v)e_1 + e^2(v)e_2 + \dots + e^n(v)e_n. \quad (2.1)$$

Além disso, dado um funcional linear $\alpha \in E^*$, supondo $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i$, segue que $\alpha_i = \alpha(e_i)$, para $i = 1, \dots, n$. Assim,

$$\alpha = \alpha(e_1)e^1 + \alpha(e_2)e^2 + \dots + \alpha(e_n)e^n. \quad (2.2)$$

Exemplo 2.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em U . Sua diferencial em $x \in U$ é o funcional linear $df_x \in (\mathbb{R}^n)^*$ dado da seguinte maneira. Fixando a base canônica $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n e dado $v \in \mathbb{R}^n$, com $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ temos

$$df_x(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \alpha_i. \quad (2.3)$$

Denotaremos por $\mathcal{B}^* = \{dx_1, \dots, dx_n\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ a base dual de \mathcal{B} . Como

$$df_x(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad (2.4)$$

então, usando a Equação (2.2), a expressão de df_x em termos da base \mathcal{B}^* é

$$df_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i. \quad (2.5)$$

Observação 2.1. Denotaremos por T_p^*M a base dual do T_pM .

Definição 2.1.1. Sejam E_1, \dots, E_n e F espaços vetoriais sobre o corpo \mathbb{R} . Dizemos que $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ é uma aplicação multilinear, ou n -linear, quando f for linear em cada uma de suas n variáveis. Ou seja, dados $v_1 \in E_1; \dots; v_n \in E_n$, $u_i \in E_i$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, arbitrários, então para todo $i = 1, \dots, n$ valem:

1. $f(v_1, \dots, v_i + u_i, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, u_i, \dots, v_n)$;
2. $f(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$.

Quando $F = \mathbb{R}$, dizemos então que f é uma forma n -linear. O conjunto das formas n -lineares é denotado por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{R})$. Na verdade, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Quando $E_1 = \dots = E_n = E$, então o denotamos simplesmente por $\mathcal{L}_n(E)$.

Definição 2.1.2. Um tensor T de ordem n em um espaço vetorial V é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ vezes}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

Exemplo 2.2. O “tensor métrico” $T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é um tensor de ordem 2, que satisfaz $T(v_1, v_2) = T(v_2, v_1)$, $T(v_1, v_1) \geq 0$, $T(v_1, v_1) = 0$ se, e somente se, $v_1 = 0$, para todo $v_1, v_2 \in V$. O tensor métrico é usado para medir distância em um espaço e também descrever a geometria desse espaço.

O caso particular definido acima, é um exemplo muito importante do que chamamos de tensores simétricos, isto é, tensores em que ao trocar qualquer par de argumentos, seu valor é inalterado:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n),$$

sempre que $1 \leq i < j \leq n$, onde n é a ordem de T .

Observe que o conjunto de todos os tensores simétricos de ordem n formam um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Denotaremos este espaço vetorial por $S^n(V^*)$.

Definição 2.1.3. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Uma aplicação $P : V \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio homogêneo de grau n , se existir um tensor T de ordem n em V tal que $P(v_1) = T(v_1, \dots, v_1)$, para todo $v_1 \in V$.

É fácil ver que o conjunto constituído pelos polinômios homogêneos de grau n é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} com as operações usuais de aplicações. Denotaremos esse espaço por $H^n(V)$.

Proposição 2.1.1. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Para cada tensor simétrico T de ordem r , considere a aplicação

$$\tilde{T} : V \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{T}(v_1) = T(v_1, \dots, v_1).$$

Então, a correspondência $T \mapsto \tilde{T}$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $S^n(V^*)$ e $H^n(V)$.

Exemplo 2.3. Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais lineares. Então, $f \cdot g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(f \cdot g)(v_1, v_2) = f(v_1) \cdot g(v_2)$ define um tensor de ordem 2 em V . Assim, $(\widetilde{f \cdot g})(v) = (f \cdot g)(v, v) = f(v) \cdot g(v)$ define um polinômio homogêneo de grau 2.

Exemplo 2.4. Sejam $\beta = \{e_1, e_2\}$ base canônica de \mathbb{R}^2 , $\{dx_1, dx_2\}$ base dual de β , e T um tensor simétrico de ordem 2 em \mathbb{R}^2 . Então,

$$\bar{T}(v) = T(v, v) = T(c_1e_1 + c_2e_2, c_1e_1 + c_2e_2) = c_1^2T(e_1, e_1) + 2c_1c_2T(e_1, e_2) + c_2^2T(e_2, e_2),$$

onde $v = c_1e_1 + c_2e_2$. Assim,

$$T = T(e_1, e_1)dx_1^2 + 2T(e_1, e_2)dx_1dx_2 + T(e_2, e_2)dx_2^2.$$

Exemplo 2.5. Seja T um tensor simétrico de ordem 3 em \mathbb{R}^2 . Então,

$$\begin{aligned} T(v, v, v) &= T(c_1e_1 + c_2e_2, c_1e_1 + c_2e_2, c_1e_1 + c_2e_2) \\ &= c_1^3T(e_1, e_1, e_1) + 3c_1^2c_2T(e_1, e_1, e_2) + 3c_1c_2^2T(e_1, e_2, e_2) + c_2^3T(e_2, e_2, e_2). \end{aligned}$$

Assim,

$$T = T(e_1, e_1, e_1)dx_1^3 + 3T(e_1, e_1, e_2)dx_1^2dx_2 + 3T(e_1, e_2, e_2)dx_1dx_2^2 + T(e_2, e_2, e_2)dx_2^3.$$

2.2 n -Formas diferenciais binárias

Definição 2.2.1. Seja M uma superfície. Uma n -forma binária em M é uma aplicação ω que a cada $p \in M$ associa $\omega(p) \in S^n(T_p^*M)$. Se tomamos coordenadas x, y em algum subconjunto aberto $U \subset M$, qualquer n -forma binária pode ser escrita de maneira única como

$$\omega(p) = \sum_{i=0}^n f_i(p)(dx)_p^i(dy)_p^{n-i}, \quad \text{para todo } p \in U, \quad (2.6)$$

onde $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função e $\{(dx)_p, (dy)_p\}$ é a base dual da base $\left\{\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p\right\}$ de T_p^*M .

Dizemos que ω é uma n -forma diferencial binária se as funções f_i são C^∞ . Algumas vezes, denotaremos ω na vizinhança U por $\omega = \sum_{i=0}^n f_i dx^i dy^{n-i}$.

Note que $S^n(T^*M) = \cup_{p \in M} S^n(T_p^*M)$ é chamado fibrado de tensores simétricos e ω é chamado seção deste fibrado.

Definição 2.2.2. Se ω é uma n -forma diferencial binária sobre N e $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável entre superfícies, então $f^*\omega$ é a n -forma diferencial binária sobre M dada por $f^*\omega(p)(x_1, \dots, x_n) = \omega(f(p))(df_p(x_1), \dots, df_p(x_n))$, para qualquer $p \in M$ e $x_1, \dots, x_n \in T_pM$, onde $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ a diferencial de f no ponto p .

Definição 2.2.3. Sejam M uma superfície e ω uma n -forma diferencial binária. Dizemos que p é um ponto singular de ω se $\omega(p) = 0$. Caso contrário, dizemos que p é um ponto regular de ω .

Definição 2.2.4. Sejam ω uma n -forma diferencial binária em M dada por (2.6) e $p \in U \subset M$. Então, $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \in T_p M$ é uma solução de ω em p se

$$\omega(p)(v) = \sum_{i=0}^n f_i(p) v_1^i v_2^{n-i} = 0. \quad (2.7)$$

Dizemos que duas soluções u e v de uma n -forma diferencial binária ω em p são equivalentes, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. A classe de equivalência definida por esta relação é chamada de direção de ω em p .

Exemplo 2.6. Considere uma 1-forma diferencial binária em \mathbb{R}^2 escrita da seguinte maneira,

$$\omega(p) = f_1(p)(dx_1)_p + f_2(p)(dx_2)_p.$$

Uma solução dessa equação é o vetor $v = \frac{(-f_2(p), f_1(p))}{\|(-f_2(p), f_1(p))\|}$ unitário. Notemos que a solução não é única: é só fazer λv com $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.3 Equações diferenciais binárias

Uma equação diferencial binária (EDB) é uma 2-forma diferencial binária em \mathbb{R}^2 , isto é, uma equação da forma

$$\omega = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0 \quad (2.8)$$

onde a , b e c são funções suaves sobre um aberto $U \in \mathbb{R}^2$. A função $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta = b^2 - ac$ é denominada função discriminante. O conjunto $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta(x, y) = 0\}$ é chamado discriminante.

Dizemos que uma curva $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma solução da Equação (2.8) se

$$a(\alpha(t))(\alpha_2'(t))^2 + 2b(\alpha(t))\alpha_1'(t)\alpha_2'(t) + c(\alpha(t))(\alpha_1'(t))^2 = 0.$$

Notemos que se multiplicarmos a Equação (2.8) por $a(x, y)$ obtemos:

$$[a(x, y)dy + (b(x, y) - \sqrt{\delta(x, y)})dx][a(x, y)dy + (b(x, y) + \sqrt{\delta(x, y)})dx] = 0 \quad (2.9)$$

Assim, em pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\delta(x, y) > 0$ a Equação (2.8) define duas direções da EDB (2.8). Quando $\delta(x, y) = 0$, a EDB (2.8) define uma única direção.

Em pontos onde $\delta < 0$, não existem direções da EDB.

A EDB (2.8) pode ser pensada como uma superposição de um número finito de equações diferenciais ordinárias (EDO's) e as singularidades podem surgir de três modos: existem aqueles pontos onde as duas direções coincidem em cada ponto do plano, aqueles onde uma das componentes das EDO's tem uma singularidade, e pontos onde ambos ocorrem. Além disso, as duas direções coincidem sobre o conjunto discriminante.

Uma equação diferencial binária é positiva se $\delta \geq 0$ e $\delta(x, y) = 0$ se, e somente se, $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$, isto é, quando o discriminante é positivo e se anula só em pontos isolados. Este tipo de equação é bastante estudado, por exemplo, em [1], e tem aplicações em geometria diferencial, equações diferenciais parciais (EDP's) e teoria de controle. Por exemplo, as linhas de curvatura (Exemplo 2.7) ou as linhas assintóticas (Exemplo 2.8) de uma superfície em \mathbb{R}^3 são dadas por equações diferenciais binárias.

Exemplo 2.7. As linhas de curvatura em superfície de \mathbb{R}^3 , em torno de um ponto umbílico determinam uma equação diferencial binária positiva, isto é,

$$(gF - fG)dy^2 + (gE - eG)dxdy + (fE - eF)dx^2 = 0$$

onde e, f, g e E, F, G são os coeficientes de primeira e segunda formas fundamentais da superfície respectivamente. Esta é uma equação diferencial binária.

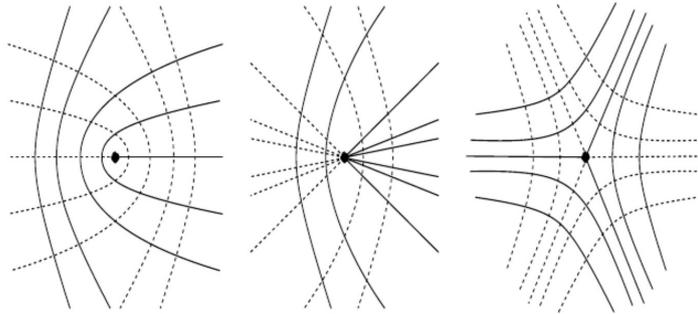


Figura 2.1: Linhas de curvatura próximas a um ponto umbílico

A Figura 2.1 corresponde ao comportamento genérico e estável das linhas de curvatura, numa vizinhança de pontos umbílicos de imersões de uma superfície compacta e orientável em \mathbb{R}^3 demonstrado por Garcia, Gutierrez e Sotomayor, em [10], e também correspondem ao comportamento genérico e estável de EDB's positivas numa vizinhança de pontos singulares definidas em uma superfície compacta e orientável demonstrado por Victor Guinéz, em [11]. A genericidade e estabilidade global de linhas de curvatura foi estudada por Garcia, Gutierrez e Sotomayor, em [10].

Exemplo 2.8. As linhas assintóticas de uma superfície em \mathbb{R}^3 determinam uma EDB não necessariamente positiva, isto é,

$$edy^2 + 2fdxdy + gdx^2 = 0$$

onde e , f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental, é uma equação diferencial binária.

As singularidades de linhas assintóticas foram descritas por T. Gaffney usando a Teoria das singularidades e tem sido recentemente estudadas por Ronaldo Garcia, Carlos Gutierrez e Sotomayor, em [10].

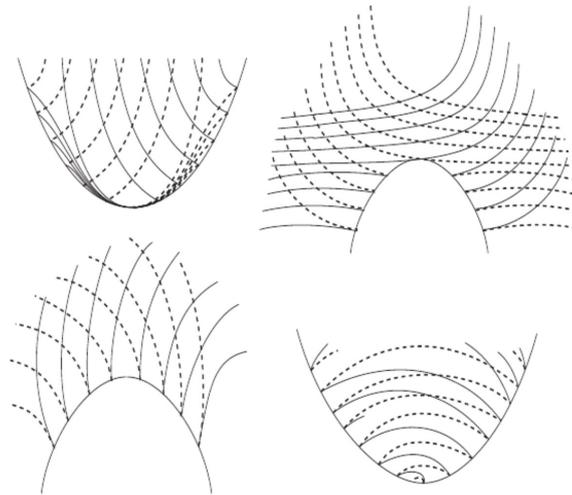


Figura 2.2: Linhas assintóticas próximas a pontos parabólicos

A Figura 2.2 corresponde ao comportamento genérico e estável das linhas assintóticas numa vizinhança de pontos parabólicos de imersões de uma superfície compacta e orientável em \mathbb{R}^3 , demonstrado por Ronaldo Garcia, Carlos Gutierrez e Jorge Sotomayor, em [10]. A estabilidade global das linhas assintóticas foram estudadas por estes mesmos autores.

Em [13], Hopf introduz uma definição do índice para uma EDB positiva. O principal resultado é apresentada no teorema abaixo.

Teorema 2.3.1. *Sejam ω uma EDB positiva dada por (2.8) e p um ponto singular isolado de ω em p . Então, o índice de ω em p é dado por*

$$ind(\omega, p) = \frac{-deg(a, p)}{2},$$

onde $a = (x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Observação 2.2. Observe que o índice também pode ser calculado usando o grau das funções b ou c .

2.4 Folheações

Definição 2.4.1. Sejam M uma variedade diferencial de dimensão n . Uma 1-forma em M é uma aplicação ω que associa a cada ponto $p \in M$ um elemento $\omega(p) \in T_p^*M$. Assim, se tomamos coordenada (x_1, \dots, x_n) em algum subconjunto aberto $U \subset M$, ω pode ser escrita como

$$\omega(p) = f_1(p)(dx_1)_p + \dots + f_n(p)(dx_n)_p \quad (2.10)$$

ou

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i, \quad (2.11)$$

onde f_i são funções reais em U . Se as funções f_i são diferenciáveis em U , ω é chamada de 1-forma diferencial.

Dizemos que a 1-forma ω é de classe C^r quando as funções f_i acima forem C^r . Também, por convenção, chamaremos de 0-forma as funções diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 2.9. Em abertos do \mathbb{R}^2 , dado $p = (x, y)$, as 1-formas diferenciais são do tipo:

$$\omega(p) = f_1(p)dx_p + f_2(p)dy_p,$$

onde f_i com $i = 1, 2$ são funções diferenciáveis. Já em abertos do \mathbb{R}^3 , dado $p = (x, y, z)$, as 1-formas diferenciais são do tipo:

$$\omega(p) = f_1(p)dx_p + f_2(p)dy_p + f_3(p)dz_p$$

onde os f_i com $i = 1, 2, 3$ são funções diferenciáveis em U .

Teorema 2.4.1. Sejam λ uma 1-forma diferencial sobre uma variedade M de dimensão n , e $p_0 \in M$ tal que $\lambda(p_0) \neq 0$. Então, existe um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) , em torno de p_0 , tal que $\lambda = dx_1$.

Exemplo 2.10. Seja ω uma 1-forma diferencial sobre \mathbb{R}^2 definida da seguinte forma

$$\omega = A dy + B dx.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \alpha : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

é uma solução de ω , significa que

$$A(\alpha(t))\alpha_2'(t) + B(\alpha(t))\alpha_1'(t) = 0.$$

Assim,

$$\frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)} = \frac{-B(\alpha(t))}{A(\alpha(t))}.$$

Esse exemplo, nos mostra com clareza o uso de equações diferenciais ordinárias (EDO's) para determinar as soluções de ω , que são soluções de EDO's, isto é, α é uma solução da EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-B}{A}.$$

Intuitivamente, uma folheação em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição de U em variedades diferenciáveis conexas disjuntas duas a duas. Chamamos de folha cada componente conexa desta decomposição. Além disso, estas folhas se aglomeram localmente tais como subconjuntos de \mathbb{R}^n da forma particular $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ com segunda coordenada constante. Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 2.4.2. Consideremos M uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^∞ . Uma folheação \mathcal{F} de codimensão p e classe C^r está definida por uma coleção de cartas locais

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i \in I$$

da variedade M tais que:

$$(1) \bigcup_{i \in I} U_i = M$$

$$(2) \text{ Se } U_i \cap U_j \neq \emptyset \text{ as mudanças de coordenadas } h_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \text{ tem a forma } h_{ji}(x, y) = (h^1(x, y), h^2(y)), \text{ onde } (x, y) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p.$$

e são de classe C^r .

Denominamos de placa de U_i as componentes conexas de $\varphi_i^{-1}(x, y_0)$ para $y_0 = \text{const.}$, sendo elas subvariedades mergulhadas de U_i de codimensão p . A condição (2) dada na Definição 2.4.2 expressa que se $\alpha_i \subset U_i, \beta_j \subset U_j$ são placas então ou $\alpha_i \cap \beta_j = \emptyset$ ou $\alpha_i \cap \beta_j$ é aberto em α_i e β_j . Um caminho de placas em \mathcal{F} é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas tais que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Se $\pi : \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ é a projeção $\pi(x, y) = y$, definimos $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^p$ por $f_i = \pi \circ \varphi_i$. As placas de U_i são então as componentes conexas de $f_i^{-1}(y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}^p$. No caso em que $r \geq 1$ podemos tomar a seguinte definição equivalente:

Definição 2.4.3. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^∞ . Uma folheação \mathcal{F} de codimensão p e classe C^r está definida por uma coleção de submersões,

$$f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad i \in I$$

tais que

(1) Para todo $i \in I$, U_i é aberto em M e $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

(2) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ existem homeomorfismos de classe C^r , $g_{ji} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que $f_j = g_{ji} \circ f_i$ nos pontos de $U_i \cap U_j$.

As aplicações f_i são denominadas aplicações distinguidas da folheação e as subvariedades $f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^p$, placas de U_i .

Uma folha F de \mathcal{F} é uma classe de equivalência da relação \sim dada por: se $p, q \in U$, então $p \sim q$ se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tal que $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$.

Exemplo 2.11. Seja $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 - x_3 dx_3 = df$, onde $f = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$, temos que $\text{sing}(\omega) = \{0\}$. Uma particularidade dessa folheação é que apesar de f não ser submersão em $\{0\}$ e $f(0) = 0$, o conjunto $f^{-1}(0) \setminus \{0\}$ determina um cone de duas folhas, já que para todo $p \in f^{-1}(0) \setminus \{0\}$, $df_p \neq 0$.

As folhas de \mathcal{F} são as componentes conexas das superfícies de nível de $f|_{\mathbb{R}^3 - \{0\}}$ e estão dadas na figura abaixo.

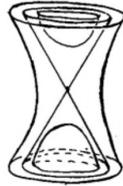


Figura 2.3: Folhas em ω

Uma consequência da Definição 2.4.2, é que toda folha é um conjunto conexo por caminhos. De fato, se F é uma folha e $p, q \in F$, seja $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ um caminho de placas com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. Como φ_i é, em particular, homeomorfismo, então $\alpha_i = \varphi_i^{-1}(U_i^1 \times \{c\})$ é conexo por caminhos, onde $c \in U_i^2$ e $\varphi(U_i) = U_i^1 \times U_i^2 \subset \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$. Assim, como $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$, para $i = 1, \dots, k-1$, tomemos $p_1 \in \alpha_1 \cap \alpha_2$. Daí existe um caminho ligando p a p_1 (em α_1). Em seguida, tomemos $p_2 \in \alpha_2 \cap \alpha_3$ e um caminho ligando p_1 a p_2 (em α_2). Fazendo isso sucessivamente, até pegarmos um caminho em α_k ligando p_{k-1} a q , onde $p_{k-1} \in \alpha_{k-1} \cap \alpha_k$. Obtemos assim, um caminho $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ contido em F ligando p a q .

Definição 2.4.4. Um campo de linhas numa variedade M é uma aplicação P que associa a cada ponto $q \in M$ um subespaço vetorial $P(q)$ de dimensão 1 de T_qM .

Exemplo 2.12. Se X é um campo de vetores sem singularidade em M , podemos definir um campo de linhas P em M colocando $P(q) = \langle X(q) \rangle$, subespaço de dimensão 1 de T_qM gerado por $X(q)$.

Reciprocamente, se P é um campo de linhas em M , podemos definir um campo de vetores sem singularidades em M escolhendo em cada ponto $q \in M$ um vetor não nulo em $P(q)$. Dizemos que tal campo de vetores é tangente a P .

Definição 2.4.5. Um campo de linhas P em M é orientável se existe um campo de vetores contínuo X em M tal que, para todo $x \in M$, $P(x)$ é o subespaço gerado por $X(x)$. O campo de linhas P orientável é de classe C^r se X é de classe C^r .

Definição 2.4.6. Uma folheação \mathcal{F} em M de classe C^k e dimensão 1 é orientável se o campo de linhas definido por \mathcal{F} é orientável.

Exemplo 2.13. A Figura 2.3 ilustra um exemplo na variedade $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ onde a folheação \mathcal{F} não é orientável.

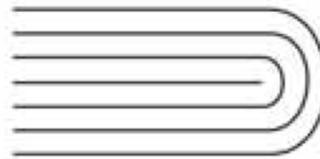


Figura 2.4: Superfície sem campo de vetores contínuo tangente

Proposição 2.4.2. Se P é um campo de linhas de classe C^r em M tal que $P(q) \neq 0$, para todo $q \in M$, então P define uma folheação de dimensão 1 em M .

Demonstração. Ver [4]. □

As folhas de P são chamadas curvas integrais de P .

Capítulo 3

Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

Neste capítulo, apresentaremos os resultados principais deste trabalho, começaremos definindo formas diferenciais totalmente reais, mostrando exemplos e especificações deste caso. Definiremos o índice de formas diferenciais totalmente reais, que generaliza o índice no caso de 2-formas diferenciais binárias positivas. Generalizaremos o teorema de Poincaré-Hopf e a fórmula de Bendixon. Por fim, estudaremos o caso em que as formas diferenciais totalmente reais são não degeneradas, e veremos que, quando o ponto singular é simples há apenas duas possibilidades para o valor do índice: ± 1 ; podendo ser calculada por uma fórmula específica.

3.1 n -Formas diferenciais totalmente reais

Sejam M uma superfície e ω uma n -forma diferencial binária em M . Consideremos (x, y) coordenadas ortogonais sobre alguma vizinhança aberta U de M , então ω em U é da forma

$$\omega = \sum_{i=0}^n f_i dx^i dy^{n-i}, \quad (3.1)$$

onde $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

Denotemos por $Sing(\omega)$ o conjunto dos pontos singulares de ω .

Definição 3.1.1. Seja $p \in M \setminus Sing(\omega)$. Dizemos que ω é uma n -forma diferencial totalmente real em p se existirem n formas lineares $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p) \in T_p^*M$ que são dois a dois linearmente independentes tais que $\omega(p) = \lambda_1(p) \cdot \dots \cdot \lambda_n(p)$. Dizemos que ω é uma n -forma diferencial totalmente real se for uma n -forma diferencial totalmente real em todo ponto $p \in M \setminus Sing(\omega)$.

Observação 3.1. As linhas de curvatura de uma superfície regular, determinam uma 2-forma diferencial totalmente real (Ver Exemplo 2.7), e as linhas assintóticas de uma superfície regular, determinam uma 2-forma diferencial binária que não é uma 2-forma diferencial totalmente real (Ver Exemplo 2.8).

Quando $n = 1$, uma 1-forma diferencial binária, sempre é uma 1-forma diferencial totalmente real.

No caso $n = 2$, a 2-forma diferencial binária é uma 2-forma diferencial totalmente real se é positiva. De fato, sejam ω uma 2-forma diferencial binária positiva em M e (x, y) coordenadas ortogonais definida em algum subconjunto aberto $U \subset M$. Então, ω em U é dado por

$$\omega = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2, \quad (3.2)$$

onde $A, B, C : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves. Assim, para todo $p \in U$,

$$A(p) = B(p) = C(p) = 0 \quad \text{ou} \quad B^2(p) - A(p)C(p) > 0.$$

Note que, neste último caso, se $A(p) = 0$, então $\omega(p) = (2B(p)dx + C(p)dy)dy$. Quando $A(p) \neq 0$ temos que

$$\omega(p) = \frac{1}{A(p)} [A(p)dx + (B(p) - \sqrt{\delta(p)})dy] [A(p)dx + (B(p) + \sqrt{\delta(p)})dy],$$

onde $\delta(p) = B^2(p) - A(p)C(p)$.

Para entender o caso em que $n \geq 3$ precisamos da seguinte definição:

Definição 3.1.2. Uma n -teia sobre uma superfície M é uma escolha de n campos de linhas suaves L_1, \dots, L_n em M tais que $L_1(p), \dots, L_n(p)$ são dois a dois transversais para cada $p \in M$. Em particular, em uma vizinhança U de p , temos um conjunto de n folheações $\mathcal{W} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\}$ de dimensão 1 sobre U que são dois a dois transversais em qualquer ponto de M , e corresponde as curvas integrais dos n campos de linhas suaves.

Exemplo 3.1. As equações dadas por $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 0$ em \mathbb{R}^2 definem uma 3-teia \mathbb{R}^2 . Este é um dos exemplos mais simples de uma 3-teia em \mathbb{R}^2 .

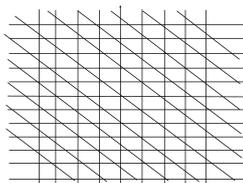


Figura 3.1: 3-teia

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

Observemos que, em geral, não podemos definir uma n -teia globalmente sobre M , ou seja, n folheações sobre M , pois se $\chi(M) \neq 0$, todo campo de linhas admite uma singularidade.

Seja ω é uma n -forma diferencial totalmente real sobre M . Então, podemos associar localmente uma n -teia sobre $M \setminus \text{Sing}(\omega)$ da seguinte maneira: para cada ponto $p \in M \setminus \text{Sing}(\omega)$, existem uma vizinhança $U \subset M$ de p e 1-formas diferenciáveis em U , λ_i , com $i \in \{1, \dots, n\}$, tais que

$$\omega = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n, \quad (3.3)$$

e $\lambda_1(q), \dots, \lambda_n(q)$ são dois a dois linearmente independentes, para todo $q \in U$. Assim, a n -teia é definida pelas folheações \mathcal{F}_i determinadas por λ_i sobre U .

Definição 3.1.3. Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real dada por (3.1) e $p \in M$. Dizemos que $u \in T_p M$ é uma solução de ω em p se

$$\omega(p)(u) = \sum_{i=0}^n f_i(p) u_1^i u_2^{n-i} = 0,$$

onde $u = u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y}$.

Definição 3.1.4. Sejam $\alpha : [0, l] \rightarrow M$ uma curva suave e X um campo de vetores ao longo de α . Dizemos que X é uma solução de ω se

$$\omega(\alpha(t))(X(t)) = 0,$$

para todo $[0, l]$.

Lema 3.1.1. Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real dada por (3.3), $\alpha : [0, l] \rightarrow U$ uma curva suave, e X um campo de vetores ao longo de α . Se X é uma solução de ω , então existe um único $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda_i(\alpha(t))(X(t)) = 0$ para todo $t \in [0, l]$.

Demonstração. Observemos que $X(0)$ é uma solução de ω em $\alpha(0)$. Logo, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda_i(\alpha(0))(X(0)) = 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $i = 1$. Definamos $A = \{t \in [0, l] / \lambda_1(\alpha(t))(X(t)) = 0\}$. Note que $A \neq \emptyset$.

Seja $f(t) = \lambda_1(\alpha(t))(X(t))$ uma função diferenciável. Então, $A = f^{-1}(0)$ é fechado. Por outro lado, se $t_0 \in A$ então $\lambda_1(\alpha(t_0))(X(t_0)) = 0$. Assim, pela transversalidade temos

$$\lambda_2(\alpha(t_0))(X(t_0)) \lambda_3(\alpha(t_0))(X(t_0)) \cdot \dots \cdot \lambda_n(\alpha(t_0))(X(t_0)) \neq 0.$$

Definamos uma função

$$g(t) = \lambda_2(\alpha(t))(X(t)) \lambda_3(\alpha(t))(X(t)) \cdot \dots \cdot \lambda_n(\alpha(t))(X(t)),$$

g é diferenciável. Como $g(t_0) \neq 0$, existe um intervalo I_0 tal que $t_0 \in I_0 \subset I$ e para todo $t \in I_0$, $g(t) \neq 0$. Logo, $\omega(\alpha(t))(X(t)) = 0$ implica que $\lambda_1(\alpha(t))(X(t)) = 0$ para todo $t \in I_0$, daí $t_0 \in I_0 \subset A$. Assim, A é aberto. Portanto, segue que $A = [0, l]$. \square

Observação 3.2. Sejam $\alpha : [0, l] \rightarrow U$ uma curva suave, e X_1, X_2 campos de vetores unitários ao longo de α sendo soluções de ω . Se $X_1(0) = X_2(0)$ então $X_1(t) = X_2(t)$ para todo $t \in I$. De fato, pelo Lema 3.1.1, existem $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\lambda_i(\alpha(t))(X_1(t)) = 0$ e $\lambda_j(\alpha(t))(X_2(t)) = 0$ para todo $t \in I$. Como $X_1(0) = X_2(0)$ então, pela transversalidade, $i = j$. Logo, $X_1(t) = f(t)X_2(t)$, onde $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Observe que X_1 e X_2 são unitários. Assim, $f(t) = \pm 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $X_1(0) = X_2(0)$ então $f(t) = 1$. Portanto, $X_1(t) = X_2(t)$.

Definição 3.1.5. Se ω é uma n -forma diferencial totalmente real sobre M e $f : N \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável entre superfícies, então $f^*\omega$ é a n -forma diferencial totalmente real sobre N dada por $f^*\omega(p)(u) = \omega(f(p))(df_p(u))$, para qualquer $p \in N$ e $u \in T_pN$, onde $df_p : T_pN \rightarrow T_{f(p)}M$ a diferencial de f no ponto p .

Definição 3.1.6. Sejam ω_1, ω_2 duas n -formas diferenciais totalmente reais definidas sobre superfícies M, N respectivamente. Dizemos que ω_1 e ω_2 são C^∞ -equivalentes, se existe um difeomorfismo C^∞ , $\phi : M \rightarrow N$ tal que

- (1) $\phi(\text{Sing}(\omega_1)) = \text{Sing}(\omega_2)$;
- (2) $\phi^*(\omega_2) = f\omega_1$ sobre $M \setminus \text{Sing}(\omega_1)$, onde $f : M \setminus \text{Sing}(\omega_1) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave tal que $f(p) \neq 0$, para todo $p \in M \setminus \text{Sing}(\omega_1)$.

Observe que da definição acima ϕ leva folhas de ω_1 em folhas de ω_2 .

3.2 Índice de uma n -forma diferencial totalmente real

Definição 3.2.1. Seja ω uma n -forma diferencial totalmente real sobre uma superfície M . Dizemos que $p \in M$ é um ponto singular isolado de ω se existe uma vizinhança U de p em M tal que ω não tem pontos singulares em $U \setminus \{p\}$.

A cada ponto singular isolado p de ω vamos associar um número, o índice de ω em p da seguinte maneira:

Escolhamos coordenadas ortogonais (x, y) sobre alguma vizinhança aberta U de p em M . Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow M$ uma curva regular por partes, simples e fechada, tal que $\alpha([0, l]) \subset U$ é a fronteira de uma região simples R , que contém p como o único ponto singular no interior e assumamos α orientada positivamente.

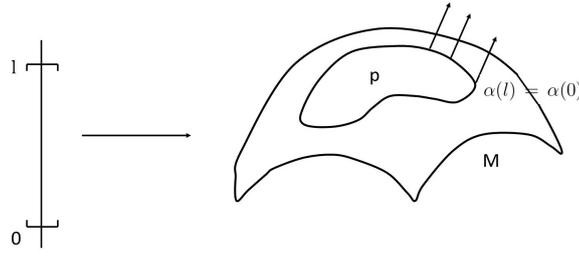


Figura 3.2: Curva α em M

Como α é uma curva fechada, podemos estênde-la a $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ definindo $\alpha(t+l) = \alpha(t)$. Assim, $\alpha(kl) = \alpha(0)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Seja X um campo de vetores unitários ao longo da curva α que é uma solução de ω , isto é,

$$\omega(\alpha(t))(X(t)) = \sum_{i=0}^n f_i(\alpha(t)) X_1^i(t) X_2^{n-i}(t) = 0,$$

onde $X(t) = X_1(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} + X_2(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)}$.

Observe que $\omega(\alpha(t)) = \lambda_1(t) \lambda_2(t) \cdots \lambda_n(t)$, onde $\lambda_i(t) \in T_{\alpha(t)} M^*$. Assim, a equação $\omega(\alpha(t)) = 0$ define X_1, \dots, X_{2n} campos de vetores unitários ao longo de α , as quais são dados pela equação

$$\lambda_i(t) = 0, i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.4)$$

Lema 3.2.1. Seja X um campo de vetores unitários ao longo de α que é uma solução de ω . Então, $X(2nl) = X(0)$.

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1, existe um único $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda_i(\alpha(t))(X(t)) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $\lambda_i(\alpha(0))(X(kl)) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Observe que $X(0), X(l) \in T_{\alpha(0)} M$. Se $X(l) = X(0)$ então, pela Observação 3.2, temos que $X(t+l) = X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{aligned} X(l) &= X(2l) \\ X(2l) &= X(3l) \\ &\vdots \\ X((2n-1)l) &= X(2nl). \end{aligned}$$

Assim, $X(0) = X(2nl)$. Se $X(l) = -X(0)$ então pela Observação 3.2 temos que $X(t+l) = -X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, daí $X(0) = X(2l)$. Portanto, $X(2nl) = X(0)$. \square

Sejam X um campo de vetores unitários ao longo de α que é uma solução de ω , e

$\theta(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x}|_{\alpha(t)}$ e $X(t)$, isto é,

$$X(t) = \cos \theta(t) \frac{\partial}{\partial x}|_{\alpha(t)} + \operatorname{sen} \theta(t) \frac{\partial}{\partial y}|_{\alpha(t)}. \quad (3.5)$$

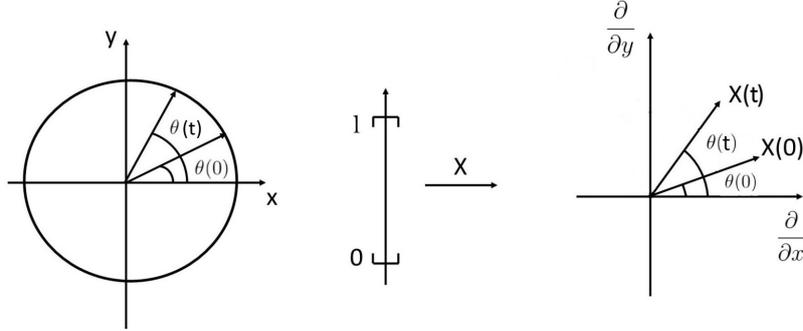


Figura 3.3: Comportamento de X

Como $X(2nl) = X(0)$, então $\theta(2nl)$ e $\theta(0)$ diferem por um inteiro múltiplo de 2π , ou seja, $\theta(2nl) - \theta(0) = 2\pi s$ com $s \in \mathbb{Z}$.

Definição 3.2.2. Com a notação acima, definimos o índice de ω em p por

$$\operatorname{ind}(\omega, p) = \frac{\theta(2nl) - \theta(0)}{4\pi n} \quad (3.6)$$

Segue-se então, da definição acima, que o índice de ω em p é sempre um número racional da forma

$$\operatorname{ind}(\omega, p) = \frac{s}{2n}, \quad (3.7)$$

com $s \in \mathbb{Z}$.

Precisamos mostrar que esta definição está bem definida.

Teorema 3.2.2. *O índice de ω em p dado na Definição 3.2.2, independe das coordenadas ortogonais (x, y) e da curva α escolhida.*

Demonstração. Sejam $Y_0 \in T_{\alpha(0)}M$ um vetor tangente não nulo e Y o transporte paralelo de Y_0 ao longo da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ e $\psi(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x}|_{\alpha(t)}$ e $Y(t)$. Então

$$\int_R K dr = \psi(l) - \psi(0) \quad (3.8)$$

onde R é a região limitada pela curva α e K é a curvatura Gaussiana de M , isso diz que a diferença $\psi(l) - \psi(0)$ não depende da parametrização ortogonal sobre M , e não depende da escolha de Y_0 .

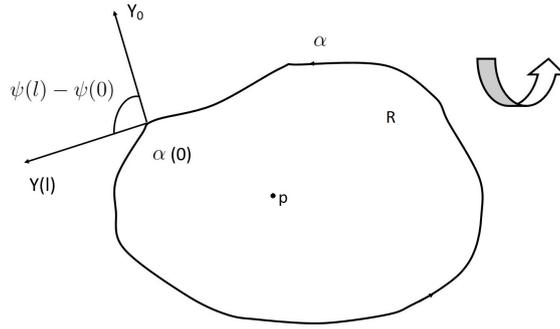


Figura 3.4: Curva α

Como $\alpha(0) = \alpha(l) = \alpha(2l) = \dots = \alpha(2nl)$, então

$$\begin{aligned} \int_R K dr &= \psi(l) - \psi(0) \\ \int_R K dr &= \psi(2l) - \psi(l) \\ &\vdots \\ \int_R K dr &= \psi(2nl) - \psi((2n-1)l) \end{aligned}$$

Somando as equações anteriores obtemos

$$2n \int_R K dr = \psi(2nl) - \psi(0). \quad (3.9)$$

Usando as relações (3.6) e (3.9), deduzimos que

$$2n \int_R K dr - 4n\pi \text{ind}(\omega, p) = (\psi - \theta)(2nl) - (\psi - \theta)(0)$$

Observe que, $(\psi - \theta)(2nl)$ é o ângulo entre $Y(2nl)$ e $X(2nl)$, e $(\psi - \theta)(0)$ é o ângulo entre os vetores $Y(0)$ e $X(0)$. Assim, o ângulo $\psi - \theta$ não depende das coordenadas x e y . Portanto, o índice não depende das coordenadas ortogonais.

Mostremos agora que o índice não depende da curva escolhida. Seja $\beta : \mathbb{R} \rightarrow M$ uma outra curva regular por partes, fechada e simples com as mesmas hipóteses da curva α . Denotaremos por $\text{ind}(\omega^\beta, p)$ o índice de ω em p , usando a curva β . Suponhamos primeiro que os traços α e β não se interseccionam, e que o traço de α está contida na região simples \tilde{R} limitada pelo traço de β . Então, podemos construir uma família de curvas regular por partes, fechadas e simples $H_u : [0, l] \rightarrow M$, onde $H : [0, l] \times [0, 1] \rightarrow M$ é contínua, $H(t, u) = H_u(t)$ para $u \in [0, 1]$, $H_0(t) = \alpha(t)$ e $H_1(t) = \beta(t)$.

Sejam X_u um campo de vetores unitários ao longo de H_u , que é uma solução de ω , e $\theta_u(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{H_u(t)}$ e $X_u(t)$. Então, pelo Lema 3.2.1, temos que

$X_u(2nl) = X_u(0)$. Assim,

$$\theta_u(2nl) - \theta_u(0) = 2\pi s(u)$$

onde $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $s(u) \in \mathbb{Z}$. Logo, $s(u) = k_0$, para todo $u \in [0, 1]$.

Assim,

$$\theta_u(2nl) - \theta_u(0) = 2\pi k_0$$

para todo $u \in [0, 1]$. Portanto,

$$\frac{\theta_1(2n) - \theta_1(0)}{4\pi n} = \frac{\theta_0(2n) - \theta_0(0)}{4\pi n}.$$

Assim,

$$\text{ind}(\omega^\beta, p) = \text{ind}(\omega^\alpha, p).$$

Por outro lado, se os traços de α e β se interceptam, escolhemos uma curva γ fechada e simples, suficientemente pequena tal que a região limitada contem o ponto p , e o traço não intercepta os traços de α e β . Assim, $\text{ind}(\omega^\gamma, p) = \text{ind}(\omega^\alpha, p)$ e $\text{ind}(\omega^\gamma, p) = \text{ind}(\omega^\beta, p)$. Portanto, $\text{ind}(\omega^\alpha, p) = \text{ind}(\omega^\beta, p)$.

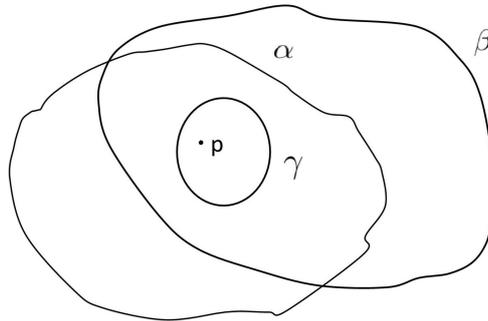


Figura 3.5: Traços de α e β quando se intersectam

□

O próximo teorema nos garante que o índice depende apenas da n -forma diferencial totalmente real ω .

Teorema 3.2.3. *O índice de ω em p não depende da escolha de*

- (1) *A determinação do ângulo;*
- (2) *O campo de vetores unitários X ao longo da curva α que é solução de ω ;*
- (3) *A métrica Riemanniana g ;*
- (4) *A orientação de M .*

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

Demonstração.

(1) Consideremos $\tilde{\theta}(t)$ um outro ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\alpha(t)}$ e $X(t)$, isto é,

$$X(t) = \cos \tilde{\theta}(t) \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\alpha(t)} + \operatorname{sen} \tilde{\theta}(t) \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\alpha(t)}$$

Usando a Equação (3.5), temos que $\cos(\theta(t)) = \cos(\tilde{\theta}(t))$ e $\operatorname{sen}(\theta(t)) = \operatorname{sen}(\tilde{\theta}(t))$. Assim,

$$\theta(t) - \tilde{\theta}(t) = 2k(t)\pi,$$

onde $k(t) \in \mathbb{Z}$. Observe que $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Assim, $k(t) = k_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, para $t = 0$ e $t = 2nl$

$$\theta(2nl) - \tilde{\theta}(2nl) = \theta(0) - \tilde{\theta}(0)$$

Daí,

$$\frac{\theta(2nl) - \theta(0)}{4\pi n} = \frac{\tilde{\theta}(2nl) - \tilde{\theta}(0)}{4\pi n}$$

Portanto, o índice não depende do ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\alpha(t)}$ e $X(t)$.

(2) Consideremos X_1 um outro campo de vetores unitários ao longo da curva α , que é solução de ω . Seja $\theta_1(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\alpha(t)}$ e $X_1(t)$ tal que $|\theta_1(0) - \theta(0)| \leq \pi$. Pelo Lema 3.2.1, temos que $X_1(2nl) = X_1(0)$. Assim,

$$\theta_1(2nl) - \theta_1(0) = 2s_1\pi$$

Se $X_1(0) = \pm X(0)$ então pela Observação 3.2, $X_1(t) = \pm X(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, os ângulos devem diferir em um múltiplo de π , isto é,

$$\theta_1(t) - \theta(t) = k(t)\pi$$

onde $k(t) \in \mathbb{Z}$. Como $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então $k(t) = k_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo $\theta_1(2nl) - \theta(2nl) = \theta_1(0) - \theta(0)$. Assim,

$$\frac{\theta_1(2nl) - \theta_1(0)}{4\pi n} = \frac{\theta(2nl) - \theta(0)}{4\pi n}$$

Isto mostra que o índice, neste caso, são iguais.

Se $X_1(0) \neq \pm X(0)$ então, pela Observação 3.2, $X_1(t) \neq \pm X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$0 < |\theta_1(t) - \theta(t)| < \pi$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo

$$0 < |\theta_1(2nl) - \theta(2nl)| < \pi \quad \text{e} \quad |\theta_1(0) - \theta(0)| < \pi.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} |\theta_1(2nl) - \theta(2nl) - (\theta_1(0) - \theta(0))| &= |\theta_1(2nl) - \theta_1(0) - (\theta(2nl) - \theta(0))| \\ &\leq |\theta_1(2nl) - \theta(2nl)| + |\theta_1(0) - \theta(0)| \\ &< 2\pi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{|\theta_1(2nl) - \theta_1(0) - (\theta(2nl) - \theta(0))|}{2\pi} < 1.$$

Como

$$\theta_1(2nl) - \theta_1(0) = 2s_1\pi \quad \text{e} \quad \theta(2nl) - \theta(0) = 2s\pi$$

então,

$$|s_1 - s| < 1.$$

Como $s_1, s \in \mathbb{Z}$, então $s_1 = s$. Concluimos que,

$$\frac{\theta_1(2nl) - \theta_1(0)}{4\pi n} = \frac{\theta(2nl) - \theta(0)}{4\pi n}.$$

Portanto, o índice não depende da escolha de X .

- (3) Seja h uma outra métrica Riemanniana. Denotaremos por $ind(\omega^h, p)$ o índice de ω usando a métrica riemanniana h . Consideremos a família de métricas Riemannianas $g_s = (1-s)g + sh$, para todo $s \in [0, 1]$. Observe que $g_0 = g$ e $g_1 = h$.

Sejam X_s um campo de vetores unitários com respeito a métrica g_s ao longo da curva α , que é solução de ω . Sejam (x_s, y_s) coordenadas ortogonais com respeito a métrica g_s , e $\theta_s(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_{\alpha(t)}$ e $X_s(t)$. Então, pelo Lema 3.2.1, $X_s(2nl) = X_s(0)$. Assim,

$$\theta_s(2nl) - \theta_s(0) = 2\pi k(s),$$

onde $k(s) \in \mathbb{Z}$ e $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Logo, $s(s) = k_0$, para todo $s \in [0, 1]$. Assim, $\theta_s(2nl) - \theta_s(0) = 2\pi k_0$, para todo $s \in [0, 1]$. Logo,

$$\frac{\theta_1(2nl) - \theta_1(0)}{4\pi n} = \frac{\theta_0(2nl) - \theta_0(0)}{4\pi n}.$$

Portanto, $ind(\omega^h, p) = ind(\omega^g, p)$.

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

(4) Seja (\bar{x}, \bar{y}) coordenadas ortogonais negativa tais que $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial x}$. Sejam $\bar{\alpha}(t) = \alpha(l-t)$ uma curva fechada, simples, negativa e $\bar{X}(t) = X(l-t)$ um campo de vetores unitários ao longo de $\bar{\alpha}$, que é solução de ω . Seja $\bar{\theta}(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}|_{\bar{\alpha}(t)}$ e $\bar{X}(t)$, dada por

$$\bar{X}(t) = \cos(\bar{\theta}(t)) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{\alpha}(t)} + \text{sen}(\bar{\theta}(t)) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{\alpha}(t)}.$$

Assim,

$$X(l-t) = \cos(\bar{\theta}(t)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(l-t)} + \text{sen}(\bar{\theta}(t)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(l-t)}.$$

Por hipótese, temos que

$$\begin{aligned} X(t) &= \cos(\theta(t)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} + \text{sen}(\theta(t)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)} \\ &= \cos(-\theta(t) + \pi/2) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)} + \text{sen}(-\theta(t) + \pi/2) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$X(l-t) = \cos(-\theta(l-t) + \pi/2) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(l-t)} + \text{sen}(-\theta(l-t) - \pi/2) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(l-t)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \cos(-\theta(l-t) + \pi/2) &= \cos(\bar{\theta}(t)) \\ \text{sen}(-\theta(l-t) + \pi/2) &= \text{sen}(\bar{\theta}(t)) \end{aligned}$$

implicando

$$\bar{\theta}(t) = -\theta(l-t) + \pi/2 + 2k_0\pi.$$

Denotaremos por $\text{ind}(\omega^-, p) = \frac{\bar{\theta}(2nl) - \bar{\theta}(0)}{4\pi n}$. Como $\bar{X}(2nl) = \bar{X}(0)$ temos $X(l-2nl) = X(l)$. Pelo Lema 3.2.1, $X(t-2nl) = X(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\theta(t-2nl) - \theta(t) = 2\pi k(t),$$

onde $k(t) \in \mathbb{Z}$ e $k : \mathbb{R} \rightarrow M$ é contínua. Logo, $k(t) = \bar{k}_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, para $t = l$ e $t = 2nl$

$$\theta(l-2nl) - \theta(l) = \theta(0) - \theta(2nl),$$

isso implica que

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(2nl) - \bar{\theta}(0) &= -\theta(l - 2nl) + \pi/2 + 2k_0\pi - (-\theta(l) + \pi/2 + 2k_0\pi) \\ &= \theta(l) - \theta(l - 2nl) \\ &= \theta(2nl) - \theta(0).\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\bar{\theta}(2nl) - \bar{\theta}(0)}{4\pi n} = \frac{\theta(2nl) - \theta(0)}{4\pi n}.$$

Portanto, $ind(\omega^-, p) = ind(\omega, p)$. □

Podemos estender a Definição 3.2.2 para o caso onde p é um ponto regular de ω , embora, nesse caso, o índice seja sempre zero. De fato, seja $\omega = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ a n -forma diferencial totalmente real dada por (3.3). Como p é um ponto regular, então $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são 1-formas não nulas. Assim, existe uma parametrização ortogonal (x, y) , tal que $\lambda_1 = dy$. Logo,

$$X(t) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} \right\|}$$

é um campo de vetores unitários ao longo de α que é uma solução de ω . Assim, o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)}$ e $X(t)$ é zero. Portanto, $ind(\omega, p) = 0$.

Proposição 3.2.4. Sejam ω_1, ω_2 duas n -formas diferenciais totalmente reais definidas sobre superfícies M, N respectivamente, que são equivalentes através do difeomorfismo $f : M \rightarrow N$. Seja p um ponto singular isolado de ω_1 . Então,

$$ind(\omega_1, p) = ind(\omega_2, f(p)).$$

Demonstração. Sejam g_1 uma métrica riemanniana em M e (x_1, x_2) coordenadas ortogonais de M , isto é, $g_1(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \right) = 0$, para todo ponto $p \in M$. Definimos uma métrica g_2 em N , como $g_2(q)(v_1, v_2) = g_1(f^{-1}(q))(df_q^{-1}(v_1), df_q^{-1}(v_2))$ para todo $v_1, v_2 \in T_q N$ e $q \in N$, onde $f^{-1} : N \rightarrow M$ e $df_q^{-1} : T_q N \rightarrow T_{f^{-1}(q)} M$. Observe que existe coordenadas (y_1, y_2) em N tal que

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_{f(p)} = df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p \right) \text{ e } \frac{\partial}{\partial y_2} \Big|_{f(p)} = df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \right)$$

para todo $p \in M$. Estas coordenadas são ortogonais em N , pois

$$g_2(f(p)) \left(df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p \right), df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \right) \right) = g_1(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \right) = 0.$$

Sejam $\alpha_1 : [0, l] \rightarrow M$ uma curva regular por partes, simples e fechada, tais que

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

$\alpha([0, l])$ é a fronteira de uma região simples R que contém p como único ponto singular no interior de R e $X_1(t)$ um campo de vetores unitários ao longo da curva α_1 que é uma solução de ω_1 . Podemos supor, sem perda de generalidade, que $f^*(\omega_2) = \omega_1$. Daí,

$$f^*(\omega_2)(p)(v) = \omega_2(f(p))(df_p(v))$$

por 3.1.6, temos que $\omega_1 = f^*(\omega_2)$. Daí,

$$f^*(\omega_2)(\alpha_1(t))(X_1(t)) = \omega_2(f \circ \alpha_1(t))(df_{\alpha_1(t)}(X_1(t))) = 0$$

Seja $\alpha_2 = f \circ \alpha_1 : [0, l] \rightarrow N$ uma curva regular por partes simples e fechada. Então, $X_2(t) = df_{\alpha_1(t)}(X_1(t))$ é um campo de vetores ao longo de α_2 que é uma solução de ω_2 . Observe que X_2 é unitário, pois

$$\omega_2(\alpha_2(t))(X_2(t), X_2(t)) = g_1(\alpha_1(t))(X_1(t), X_1(t)) = 1$$

para todo $t \in [0, l]$. Seja $\theta_1(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{\alpha_1(t)}$ e $X_1(t)$, isto é,

$$X_1(t) = \cos(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{\alpha_1(t)} + \text{sen}(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_{\alpha_1(t)}.$$

Então,

$$df_{\alpha_1(t)}(X_1(t)) = \cos(\theta_1(t)) df_{\alpha_1(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{\alpha_1(t)} \right) + \text{sen}(\theta_1(t)) df_{\alpha_1(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_{\alpha_1(t)} \right)$$

Assim,

$$X_2(t) = \cos(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_{\alpha_2(t)} + \text{sen}(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial y_2} \Big|_{\alpha_2(t)}.$$

Como o índice de ω_1 e ω_2 não depende da escolha do sistema de coordenadas, a métrica riemanniana, o campo de vetores unitários, e o ângulo, então segue que $\text{ind}(\omega_1, p) = \text{ind}(\omega_2, f(p))$. \square

Na próxima proposição, apresentaremos uma fórmula que pode ser muito útil para calcular o índice. Denotemos por $X_1(t), \dots, X_{2n}(t)$ os campos de vetores unitários ao longo de α que são soluções de ω . Seja $\theta_j(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)}$ e $X_j(t)$, para cada $j \in \{1, \dots, 2n\}$. Podemos supor que eles são ordenados de forma que

$$\theta_1(t) < \theta_2(t) < \dots < \theta_{2n}(t).$$

Denotaremos por $\theta_{2n+j}(t) = \theta_j(t) + 2\pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $j \in \mathbb{Z}^+$. Então,

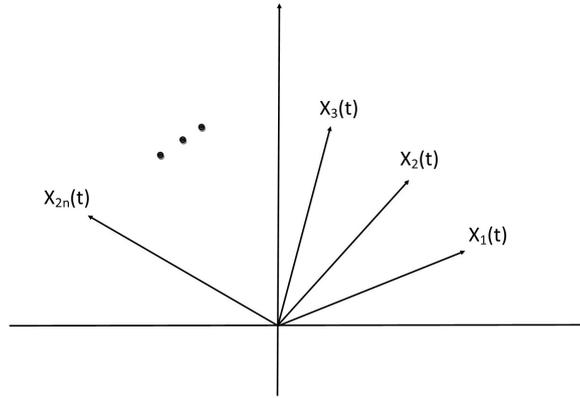


Figura 3.6: Campos de vetores X_j em t

podemos afirmar que

$$\theta_{2qn+j}(t) = \theta_j(t) + 2q\pi \quad (3.10)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $q, j \in \mathbb{Z}^+$. De fato, a prova é feita por indução sobre q . Se $q = 1$ temos $\theta_{2n+j}(t) = \theta_j(t) + 2\pi$. Suponha que $\theta_{2qn+j}(t) = \theta_j(t) + 2q\pi$. Como

$$\theta_{2(q+1)n+j}(t) = \theta_{2n+2qn+j}(t) = \theta_{2qn+j}(t) + 2\pi,$$

temos pela hipótese de indução que

$$\theta_{2(q+1)n+j}(t) = \theta_j(t) + 2(q+1)\pi.$$

Portanto, por indução o resultado segue. Observe que o índice de ω em p não depende da escolha do campo de vetores unitário ao longo de α que é solução de ω . Assim,

$$\text{ind}(\omega, p) = \frac{\theta_1(2nl) - \theta_1(0)}{4\pi n}.$$

Como $X_1(l) \in T_{\alpha(0)}M$ e $X_1(0), X_2(0), \dots, X_{2n}(0) \in T_{\alpha(0)}M$ são todas as soluções de ω em $\alpha(0)$, então $X_1(l) = X_i(0)$ para algum $i \in \{1, \dots, 2n\}$. Logo, $\theta_1(l) = \theta_i(0) + 2\pi m_i$, onde $m_i \in \mathbb{Z}$.

Proposição 3.2.5. Com as mesmas notações adotadas acima, temos que, o índice de ω em p pode ser calculado por

$$\text{ind}(\omega, p) = m_i + \frac{i-1}{2n}.$$

Demonstração. Como $X_1(l) = X_i(0)$ temos, pela Observação 3.2, que $X_1(t+l) = X_i(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, podemos afirmar que, $\theta_1(kl) = \theta_{k(i-1)+1}(0) + 2m_i k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Provaremos isto por indução. De fato, para $k = 1$ temos que $\theta_1(l) =$

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

$\theta_i(0) + 2m_i\pi$. Suponha que

$$\theta_1(kl) = \theta_{k(i-1)+1}(0) + 2m_i k\pi. \quad (3.11)$$

Então, $X_1(kl) = X_{k(i-1)+1}(0)$. Logo, pela Observação 3.2 temos que $X_1(kl + t) = X_{k(i-1)+1}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Notemos que,

$$\theta_1(kl + t) = \theta_{k(i-1)+1}(t) + 2\pi s(t), \quad (3.12)$$

onde $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $s(t) \in \mathbb{Z}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $s(t) = k_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $k_0 = s(0) = km_i$. Sabemos que,

$$\begin{aligned} X_i(0) &= X_1(l) \\ X_{i+1}(0) &= X_2(l) \\ &\vdots \\ X_{i+(j-1)}(0) &= X_j(l) \\ X_{i+j}(0) &= X_{j+1}(l) \\ &\vdots \\ X_{i+2n-1}(0) &= X_{2n}(l) \end{aligned}$$

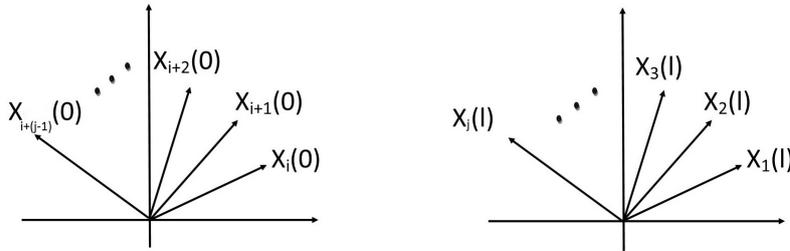


Figura 3.7: Comportamento de X_j em 0 e em l

Assim,

$$\theta_{j+1}(l) - \theta_j(l) = \theta_{i+j}(0) - \theta_{i+(j-1)}(0).$$

para todo $j \in \{1, \dots, 2n\}$. Logo,

$$\theta_{j+1}(l) - \theta_{i+j}(0) = \theta_j(l) - \theta_{i+j-1}(0).$$

Seja $H(j) = \theta_j(l) - \theta_{i+j-1}(0)$, para todo $j \in \{1, \dots, 2n\}$. Então, $H(j) = H(j+1)$,

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

para todo $j \in \{1, \dots, 2n\}$. Assim,

$$H(1) = H(2) = \dots = H(2n).$$

Para $j = k(i-1) + 1$, obtemos

$$2\pi m_i = H(1) = H(j) = \theta_{k(i-1)+1}(l) - \theta_{i+k(i-1)+1-1}(0)$$

Então,

$$\theta_{k(i-1)+1}(l) = \theta_{(k+1)(i-1)+1}(0) + 2\pi m_i \quad (3.13)$$

Por (3.12) e (3.13),

$$\theta_1((k+1)l) = \theta_{(k+1)(i-1)+1}(0) + 2m_i(k+1)\pi$$

Portanto, a Equação (3.11) é válida para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Logo, usando (3.11) e (3.10) temos que

$$\begin{aligned} \theta_1(2nl) &= \theta_{2n(i-1)+1}(0) + 4n\pi m_i \\ &= \theta_1(0) + 2(i-1)\pi + 4n\pi m_i. \end{aligned}$$

Com isso, chegamos que

$$\begin{aligned} \text{ind}(\omega, p) &= \frac{\theta_1(2nl) - \theta_1(0)}{4\pi n} \\ &= \frac{2nm_i + i - 1}{2n} \\ &= m_i + \frac{i-1}{2n} \end{aligned}$$

□

Terminamos essa seção provando uma generalização do Teorema de Poincaré-Hopf já conhecido para campo de vetores, 1-formas e formas diferenciais quadráticas positivas.

Teorema 3.2.6. *Sejam M uma superfície compacta e ω uma n -forma diferencial totalmente real com um número finito de pontos singulares p_1, \dots, p_m . Então,*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^m \text{ind}(\omega, p_i). \quad (3.14)$$

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

Demonstração. Suponhamos inicialmente que M é orientável. Escolhamos uma orientação e uma métrica Riemanniana sobre M . Consideremos $\{(U_i, \varphi_i(U_i))\}$ um atlas sobre M tal que cada carta é ortogonal e compatível com a orientação. Além disso, tomemos uma triangulação τ de M tal que

- (1) Cada triângulo $T \in \tau$ está contido em alguma vizinhança coordenada do atlas $\{(U_i, \varphi_i(U_i))\}$.
- (2) Cada triângulo $T \in \tau$ contém no máximo um ponto singular p_T . Nos triângulos com pontos não singulares escolhemos qualquer ponto p_T no interior.
- (3) A fronteira de cada $T \in \tau$ não tem pontos singulares e é orientada positivamente.

Sejam $T_i \in \tau$ e $\alpha_i : [0, l_i] \rightarrow M$ uma curva regular por partes do bordo ∂T_i e $\alpha(0)$, $\alpha_i(t_{i_1})$, $\alpha_i(t_{i_2})$ vértices do triângulo T_i . Sejam $X_i(t)$ um campo de vetores ao longo da curva α_i que é uma solução da ω e $Y_i(t)$ o transporte paralelo unitário ao longo de α_i . Aplicando a Equação (3.9) a cada um dos triângulos $T_i \in \tau$, obtemos

$$2n \int_{T_i} K dr - 4n\pi \text{ind}(\omega, p_{T_i}) = (\psi_i - \theta_i)(2nl_i) - (\psi_i - \theta_i)(0), \quad (3.15)$$

onde $\psi_i(t)$ é o ângulo entre $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\alpha_i(t)}$ e $Y_i(t)$, e $\theta_i(t)$ é o ângulo entre $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\alpha_i(t)}$ e $X_i(t)$.

Agora, somando-se ao longo do $T \in \tau$ e tendo em vista que cada aresta é comum a dois triângulos com orientações opostas, temos

$$2n \sum_{T \in \tau} \int_{T_i} K dr - 4n\pi \sum_{T \in \tau} \text{ind}(\omega, p_T) = 0, \quad (3.16)$$

e pelo teorema de Gauss-Bonnet (Corolário 1.2.6), obtemos que

$$\chi(M) = \sum_{T \in \tau} \text{ind}(\omega, p_T). \quad (3.17)$$

Caso M não seja orientável. Pelo Teorema 1.3.1, existe um recobrimento duplo $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, onde \tilde{M} é uma superfície compacta, orientável e $\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M)$. Como π é um difeomorfismo local, cada ponto singular q_j de ω dá exatamente dois pontos singulares p_{j_1} e p_{j_2} da n -forma diferencial totalmente real induzida $\pi^*\omega$ com o mesmo índice. Assim,

$$\chi(\tilde{M}) = \sum \text{ind}(\pi^*\omega, p_i) = 2 \sum \text{ind}(\omega, q_j).$$

Logo, $\chi(M) = \sum \text{ind}(\omega, p)$. □

3.3 n -Formas diferenciáveis totalmente reais em coordenadas complexas

Seja $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Identificando \mathbb{R}^2 com o corpo dos números complexos \mathbb{C} , temos que $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$ o conjugado complexo de z . Usaremos as seguintes notações

$$dz = dx + idy \quad , \quad d\bar{z} = dx - idy \quad (3.18)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (3.19)$$

Observemos que $\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$ é uma base de \mathbb{C}^2 e $\{dz, d\bar{z}\}$ sua base dual. Com esta notação, qualquer n -forma diferencial totalmente real sobre um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{C}$ pode ser escrito de maneira única com estas coordenadas como

$$\omega = A_0 dz^n + A_1 dz^{n-1} d\bar{z} + \dots + A_n d\bar{z}^n, \quad (3.20)$$

onde $A_j : U \rightarrow \mathbb{C}$ são funções diferenciáveis tais que $A_j = \overline{A_{n-j}}$ para todo $j = 0, \dots, n$.

Vejam como chegamos a isso no caso $n = 2$, ou seja,

$$\omega = a_0 dx^2 + 2a_1 dx dy + a_2 dy^2. \quad (3.21)$$

Como $dz = dx + idy$ e $d\bar{z} = dx - idy$ temos

$$\frac{dz + d\bar{z}}{2} = dx \quad \text{e} \quad \frac{i(d\bar{z} - dz)}{2} = dy, \quad (3.22)$$

substituindo em (3.21), obtemos

$$\begin{aligned} \omega &= a_0 \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2} \right)^2 + 2a_1 \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2} \right) \left(\frac{i(d\bar{z} - dz)}{2} \right) + a_2 \left(\frac{i(d\bar{z} - dz)}{2} \right)^2 \\ &= a_0 \left(\frac{dz^2 + 2dzd\bar{z} + d\bar{z}^2}{4} \right) + 2a_1 \left(\frac{idzd\bar{z} - idz^2 + id\bar{z}^2 - id\bar{z}dz}{4} \right) + a_2 \left(\frac{-d\bar{z}^2 + 2d\bar{z}dz - dz^2}{4} \right) \\ &= \left(\frac{a_0}{4} - \frac{ia_1}{2} - \frac{a_2}{4} \right) dz^2 + \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2} \right) d\bar{z}dz + \left(\frac{a_0}{4} + \frac{ia_1}{2} - \frac{a_2}{4} \right) d\bar{z}^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} A_0(z) &= \frac{a_0(z)}{4} - \frac{ia_1(z)}{2} - \frac{a_2(z)}{4} \\ A_1(z) &= \frac{a_0(z)}{2} + \frac{a_2(z)}{2} \\ A_2(z) &= \frac{a_0(z)}{4} + \frac{ia_1(z)}{2} - \frac{a_2(z)}{4}. \end{aligned}$$

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

Assim, $A_0(z) = \overline{A_2}(z)$ e $A_1(z) = \overline{A_1}(z)$.

Sejam p um ponto singular isolado de $A_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e $X(t) = A_0(\alpha(t))$ um campo de vetores ao longo da curva simples e fechada $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que p está no interior da região limitada por α . Podemos estender α em \mathbb{R} definindo $\alpha(t) = \alpha(t + l)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Denominamos por $\varphi(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)}$ e $\frac{A_0(\alpha(t))}{\|A_0(\alpha(t))\|}$ então

$$\deg(A_0, p) = \frac{\varphi(l) - \varphi(0)}{2\pi}$$

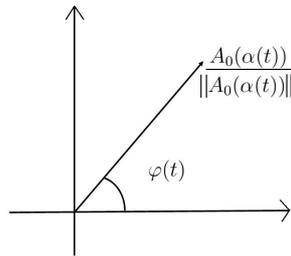


Figura 3.8: Ângulo de $\frac{A_0(\alpha(t))}{\|A_0(\alpha(t))\|}$

Como $X(t) = A_0(\alpha(t))$ e $X(t + l) = A_0(\alpha(t))$, temos que $\varphi(t + l) - \varphi(t) = 2\pi k(t)$ para todo t , e $k(t) \in \mathbb{Z}$, pela continuidade da função $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, obtemos $k(t) = k_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(l) - \varphi(0) &= 2\pi k_0 \\ \varphi(2l) - \varphi(l) &= 2\pi k_0 \\ &\vdots \\ \varphi(kl) - \varphi((k-1)l) &= 2\pi k_0. \end{aligned}$$

Somando as expressões acima chegamos que $\varphi(kl) - \varphi(0) = k(\varphi(l) - \varphi(0))$. Logo quando $k = 2n$ temos que

$$\varphi(2nl) - \varphi(0) = 2n[\varphi(l) - \varphi(0)].$$

Assim,

$$\frac{\varphi(2nl) - \varphi(0)}{4n\pi} = \frac{\varphi(l) - \varphi(0)}{2\pi}.$$

Observação 3.3. Com o que foi visto acima, temos que

$$\deg(A_0, p) = \frac{\varphi(2nl) - \varphi(0)}{4n\pi}.$$

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

Com o próximo teorema, mostraremos que o grau da n -forma diferencial totalmente real ω sobre uma superfície pode ser calculado usando $\deg(A_0, p)$.

Teorema 3.3.1. *Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real sobre um aberto $U \subset \mathbb{C}$ dado por (3.20) e $p \in U$ um ponto singular isolado de ω . Então, p é um zero isolado de $A_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e*

$$\text{ind}(\omega, p) = -\frac{\deg(A_0, p)}{n}.$$

Demonstração. Sejam $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $\alpha_\delta(t) = p + \delta e^{it}$ uma circunferência com centro em p e raio $\delta > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Denotemos por $X_1(t), \dots, X_n(t)$ os campos de vetores unitários ao longo da curva α_δ sendo dois a dois linearmente independentes e soluções de ω . Denotaremos por $\theta_j(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x}|_{\alpha_\delta(t)}$ e $X_j(t)$. Então $X_j(t) = \cos\theta_j(t)\frac{\partial}{\partial x}|_{\alpha_\delta(t)} + \sin\theta_j(t)\frac{\partial}{\partial y}|_{\alpha_\delta(t)}$.

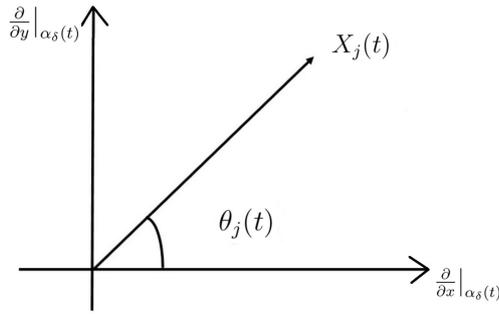


Figura 3.9: O ângulo de $X_j(t)$

Como $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ e $\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)i$, temos

$$\begin{aligned} X_j(t) &= \cos\theta_j(t)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) + \sin\theta_j(t)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)i \\ &= [\cos\theta_j(t) + i\sin\theta_j(t)]\frac{\partial}{\partial z} + [\cos\theta_j(t) - i\sin\theta_j(t)]\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ &= e^{i\theta_j(t)}\frac{\partial}{\partial z} + e^{-i\theta_j(t)}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

Seja $\lambda_j(t) = 2\sin(\theta_j(t))dx - 2\cos(\theta_j(t))dy$. Então, $\lambda_j(t)(X_j(t)) = 0$. Por outro lado, das equações dadas em (3.22), temos

$$\begin{aligned} \lambda_j(t) &= (\sin\theta_j(t) + i\cos\theta_j(t))dz + (\sin\theta_j(t) - i\cos\theta_j(t))d\bar{z} \\ &= e^{i\phi_j(t)}dz + e^{-i\phi_j(t)}d\bar{z}, \end{aligned}$$

onde $\phi_j(t) = \frac{\pi}{2} - \theta_j(t)$. Isso pois,

$$e^{i\phi_j(t)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_j(t)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_j(t)\right) = \sin\theta_j(t) + i\cos\theta_j(t)$$

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

e

$$e^{-i\phi_j(t)} = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \theta_j(t)\right)\right) + i\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \theta_j(t)\right)\right) = \sin\theta_j(t) - i\cos\theta_j(t).$$

Assim, deduzimos que ao longo de α_δ é possível escrever ω como

$$\omega(\alpha_\delta(t)) = f(t)\lambda_1(t) \cdot \dots \cdot \lambda_n(t).$$

De fato, por definição, $\omega(\alpha_\delta(t)) = \tilde{\lambda}_1(t) \cdot \dots \cdot \tilde{\lambda}_n(t)$ onde $\tilde{\lambda}_1(t), \dots, \tilde{\lambda}_n(t) \in T_{\alpha_\delta(t)}^*M$, como $\omega(\alpha(t))(X_j(t)) = 0$, então existe $j_1 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\tilde{\lambda}_{j_1}(t)(X_j(t)) = 0$ e $\lambda_j(t)(X_j(t)) = 0$. Assim, existe uma função não nula f_j tal que $\tilde{\lambda}_{j_1}(t) = f_j(t)\lambda_j(t)$. Logo, $\omega(\alpha_\delta(t)) = f(t)\lambda_1(t)\lambda_2(t)\dots\lambda_n(t)$, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \neq 0$. Daí,

$$\omega(\alpha_\delta(t)) = f(t)(e^{i\phi_1(t)}dz + e^{-i\phi_1(t)}d\bar{z})(e^{i\phi_2(t)}dz + e^{-i\phi_2(t)}d\bar{z}) \cdot \dots \cdot (e^{i\phi_n(t)}dz + e^{-i\phi_n(t)}d\bar{z})$$

Com isso, vemos que o coeficiente de dz^n da expressão acima é

$$\begin{aligned} A_0(\alpha_\delta(t)) &= f(t)e^{i\phi_1(t)} \cdot \dots \cdot e^{i\phi_n(t)} \\ &= f(t)e^{i(\phi_1(t)+\dots+\phi_n(t))}. \end{aligned}$$

A partir disso, vemos que $A_0(\alpha_\delta(t)) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $\delta > 0$. Observe que para todo $q \neq p$ existe t_0 e δ_0 tal que $\alpha_{\delta_0}(t_0) = q$. Assim, $A_0(q) = A_0(\alpha_{\delta_0}(t_0)) \neq 0$. Isto mostra que p é um zero isolado de A_0 . Seja $\beta(t)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\alpha_\delta(t)}$ e $\frac{A_0(\alpha(t))}{\|A_0(\alpha(t))\|}$. Logo,

$$\beta(t) - [\phi_1(t) + \dots + \phi_n(t)] = q\pi$$

para algum $q \in \mathbb{Z}$, por serem paralelos. Assim,

$$\beta(t) = \phi_1(t) + \dots + \phi_n(t) + q\pi$$

Finalmente, usando a Observação 3.3 quando $l = 2\pi$

$$\begin{aligned}
 \deg(A_0, p) &= \frac{\beta(4n\pi) - \beta(0)}{4n\pi} \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j(4n\pi) - \phi_j(0)}{4n\pi} \\
 &= - \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j(4n\pi) - \theta_j(0)}{4n\pi} \\
 &= - \sum_{j=1}^n \text{ind}(\omega, p) \\
 &= -n \text{ind}(\omega, p).
 \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. □

O Teorema acima, diz que o índice de um ponto singular de uma n -forma diferencial totalmente real é, de fato, da forma s/n , com $s \in \mathbb{Z}$, em vez de $s/2n$. Isto pode ser interpretado como algum tipo de condição de orientabilidade para n -teia definida pela n -forma diferencial totalmente real.

Corolário 3.3.2. Seja $s \in \mathbb{Z}$. Então existe uma n -forma diferencial totalmente real ω e um ponto singular isolado p de ω tais que

$$\text{ind}(\omega, p) = \frac{s}{n}$$

Demonstração. Suponha que $M = \mathbb{C}$. Se $s \geq 0$, definimos a n -forma diferencial totalmente real $\omega_1 = z^s dz^n + \bar{z}^s d\bar{z}^n$. Como $\deg(z^s, 0) = s$ então, pelo Teorema 3.3.1 temos que $\text{ind}(\omega_1, 0) = s/n$.

Se $s < 0$, definimos a n -forma diferencial totalmente real $\omega_2 = \bar{z}^{|s|} dz^n + z^{|s|} d\bar{z}^n$. Como $\deg(\bar{z}^{|s|}, 0) = s$, segue novamente pelo Teorema 3.3.1, que $\text{ind}(\omega_2, 0) = s/n$. □

Observemos que, quando $n = 1$, a 1-forma diferencial totalmente real em M , induz uma folheação orientável em uma vizinhança de cada ponto de M . Neste caso, $\text{ind}(\omega, p) = -\deg(A_0, p)$ é um inteiro. Por outro lado, o índice de uma folheação não necessariamente orientável em um ponto singular isolado é da forma $s/2$.

Corolário 3.3.3. Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real sobre uma superfície M , e $p \in M$ um ponto singular isolado. Seja X um campo de vetores unitários ao longo de $\alpha : [0, l] \rightarrow M$, solução de ω . Então $X(nl) = X(0)$ e

$$\text{ind}(\omega, p) = \frac{\theta(nl) - \theta(0)}{2n\pi},$$

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

onde $\theta(t)$ denota o ângulo de $\frac{\partial}{\partial x}|_{\alpha(t)}$ a $X(t)$.

Demonstração. Sejam $X_1(t), X_2(t), \dots, X_{2n}(t)$ campos de vetores unitários ao longo de α , que são soluções de ω . Suponhamos que $X(t) = X_1(t)$ e que eles são ordenados de forma que

$$\theta_1(t) < \theta_2(t) < \dots < \theta_{2n}(t),$$

onde $\theta_j(t)$ denota o ângulo de $\frac{\partial}{\partial x}|_{\alpha(t)}$ a $X_j(t)$. Pela Proposição 3.2.5, temos que

$$\text{ind}(\omega, p) = m_i + \frac{i-1}{2n},$$

onde $\theta_1(l) = \theta_i(0) + 2m_i\pi$, com $m_i \in \mathbb{Z}$ e $i \in \{1, \dots, 2n\}$.

Pelo Teorema 3.3.1, o $\text{ind}(\omega, p) = s/n$ onde $s \in \mathbb{Z}$, então

$$\frac{s}{n} = m_i + \frac{i-1}{2n}$$

Logo,

$$s = nm_i + \frac{i-1}{2}.$$

Assim,

$$i-1 = 2(s - nm_i).$$

Denotamos por $c = s - nm_i \in \mathbb{Z}$. Daí, usando as Equações (3.11) e (3.10) obtemos

$$\theta_1(nl) = \theta_{n(i-1)+1}(0) + 2m_i n\pi = \theta_1(0) + 2\pi(m_i n + c)$$

Assim, $X_1(nl) = X_1(0)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1(nl) - \theta_1(0)}{2n\pi} &= \frac{[2\pi(m_i n + c)]}{2n\pi} \\ &= m_i + \frac{c}{n} \\ &= m_i + \frac{i-1}{2} \cdot \frac{1}{n} \\ &= m_i + \frac{i-1}{2n} \\ &= \text{ind}(\omega, p). \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. □

Seja ω uma n -forma diferencial totalmente real numa vizinhança $U \subset M$ dada por

$$\omega = A_0 dz^n + A_1 dz^{n-1} d\bar{z} + \dots + A_n d\bar{z}^n, \quad (3.23)$$

onde $A_i : U \rightarrow \mathbb{C}$ são funções diferenciáveis. Seja p uma singularidade isolada de ω . Suponhamos, pela simplicidade, que $p = 0$. Então, usando as equações $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, a expansão de Taylor de A_i na origem, é dada por

$$\tilde{A}_i(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_i^k(z),$$

onde $A_i^k(z)$ é o polinômio homogêneo de grau k nas variáveis z e \bar{z} . Observe que a parte linear de A_i é dada por $A_i^1(z) = a_i z + b_i \bar{z}$. Daí, a parte linear de ω em p é definida como a n -forma diferencial binária

$$\omega_1 = (a_0 z + b_0 \bar{z}) dz^n + (a_1 z + b_1 \bar{z}) dz^{n-1} d\bar{z} + \dots + (a_n z + b_n \bar{z}) d\bar{z}^n. \quad (3.24)$$

Definição 3.3.1. Dizemos que o ponto singular p da n -forma diferencial totalmente real ω , dada por (3.23), é simples, se a parte linear de ω em p , ω_1 , é uma n -forma diferencial totalmente real, e p é um ponto singular isolado de ω_1 .

Corolário 3.3.4. Seja p um ponto singular da n -forma diferencial totalmente ω , dada por (3.23). Se p é um ponto simples de ω então

$$ind(\omega, p) = \pm \frac{1}{n}.$$

Demonstração. Suponha $p = 0$. Como p é um ponto simples de ω então p é um ponto singular isolado de ω_1 , dado por (3.24) e ω_1 é uma n -forma diferencial totalmente real. Pelo Teorema 3.3.1, p um é zero isolado de $A_0^1(z) = a_0 z + b_0 \bar{z}$. Como A_0^1 é a parte linear de A_0 , temos que o $deg(A_0, p) = \pm 1$. Assim, pelo Teorema 3.3.1, $ind(\omega, p) = \pm 1/n$. \square

3.4 n -Formas diferenciáveis totalmente reais não degeneradas

Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real sobre um aberto $U \subset \mathbb{C}$ dada por (3.23), e seja $p \in U$ um ponto singular isolado de ω . Denotamos por ω_k a parte homogênea de grau k de ω dada por

$$\omega_k = A_0^k dz^n + A_1^k dz^{n-1} d\bar{z} + \dots + A_n^k d\bar{z}^n$$

onde $A_i^k(z)$ são os polinômios homogêneos de grau k da expansão de Taylor de A_i em p .

Definição 3.4.1. Dizemos que ω é semi-homogêneo em p se existir $k \geq 1$ tal que $\omega_i = 0$ para $i = 1, \dots, k-1$ e ω_k é uma n -forma diferencial totalmente real tendo p como um ponto singular isolado. Chamaremos ω_k a parte principal de ω .

Note que quando $k = 1$, esta é igual a definição de um ponto singular simples.

Definimos o polinômio característico de ω como o polinômio homogêneo de grau $k+n$ dada por

$$P_\omega(z) = A_0^k(z)z^n + A_1^k(z)z^{n-1}\bar{z} + \dots + A_n^k(z)\bar{z}^n. \quad (3.25)$$

Como $A_j(z) = \bar{A}_{n-j}(z)$ para $j \in \{0, \dots, n\}$, então $A_j^k(z) = \bar{A}_{n-j}^k(z)$. Assim, $P_\omega(z) = \bar{P}_\omega(z)$. Logo, $P_\omega(z)$ é um polinômio homogêneo real de grau $k+n$.

Observemos que, a parte linear de ω sendo zero, surgem mais singularidades, daí, precisamos aplicar um método de desingularização desses pontos, chamado blow up polar. Essencialmente, podemos dizer que o blow up polar é a técnica em que uma mudança de coordenadas polares conveniente “explode” uma singularidade em uma curva na qual obtemos, genericamente, finitas singularidades. Após nova mudança de coordenadas, estudamos as singularidades da n -forma resultante, isoladamente, ao longo desta curva. Pelo processo inverso, chamado blow down, obtemos o retrato de fase local da n -forma original.

Consideremos a aplicação π correspondente a mudança de coordenadas dada por

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (r, t) &\longmapsto re^{it} \end{aligned}$$

Notemos que π leva a reta $r = 0$ em 0 , e a aplicação inversa $\pi^{-1}(0) = \{(0, t) | t \in \mathbb{R}\}$, ou seja, “expande” a origem em uma reta. Seja ω uma n -forma diferencial totalmente real sobre um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{C}$ e seja $p \in U$ um ponto singular isolado de ω . Suponha que $p = 0$. Agora, fixemos $\delta > 0$ suficientemente pequeno de tal modo que $\pi((-\delta, \delta) \times \mathbb{R}) \subset U$ e $p = 0$ é o único ponto singular de ω em U .

Lema 3.4.1. Se ω é semi-homogêneo com parte principal ω_k , então

$$\tilde{\omega}(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{r^k} \omega(re^{it}), & \text{se } r \neq 0 \\ \omega_k(e^{it}), & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

define uma n -forma diferencial totalmente real ao longo de π sobre $(-\delta, \delta) \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponhamos que ω é dada por

$$\omega = A_0 dz^n + A_1 dz^{n-1} d\bar{z} + \dots + A_n d\bar{z}^n.$$

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

Como $\omega_s = 0$, $s \in \{1, \dots, k-1\}$ então $A_j^s(z) = 0$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Assim, as derivadas parciais de A_j de ordem menor ou igual a $k-1$ na origem são zeros. Logo, pelo Lema 1.1.2 existem funções diferenciáveis $\hat{B}_{mj} : U \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$A_j(z) = \sum_{m=0}^k z^m \bar{z}^{k-m} \hat{B}_{mj}(z).$$

Por outro lado, pelo Corolário 1.1.3, existem $c_{mj} \in \mathbb{C}$ e $L_{mj}, D_{mj} : U \rightarrow \mathbb{C}$ funções diferenciáveis tais que

$$\hat{B}_{mj}(z) = c_{mj} + zL_{mj}(z) + \bar{z}D_{mj}(z).$$

Logo,

$$A_j(re^{it}) = r^k B_j(r, t),$$

onde

$$B_j(r, t) = \sum_{m=0}^k e^{i(2m-k)t} \hat{B}_{mj}(re^{it}),$$

Observe que

$$B_j(0, t) = \sum_{m=0}^k e^{i(2m-k)t} c_{mj} = A_j^k(e^{it}). \quad (3.26)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \omega(re^{it}) &= A_0(re^{it})dz^n + A_1(re^{it})dz^{n-1}d\bar{z} + \dots + A_n(re^{it})d\bar{z}^n \\ &= r^k B_0(r, t)dz^n + r^k B_1(r, t)dz^{n-1}d\bar{z} + \dots + r^k B_n(r, t)d\bar{z}^n. \end{aligned}$$

Portanto, considerando $\tilde{\omega}(r, t) = B_0(r, t)dz^n + B_1(r, t)dz^{n-1}d\bar{z} + \dots + B_n(r, t)d\bar{z}^n$, o resultado segue. \square

Sejam ω semi-homogêneo com parte principal ω_k e $\tilde{\omega}$ definida no Lema 3.4.1. Como $\tilde{\omega}$ é uma n -forma diferencial totalmente real então podemos escolher n campos de vetores unitários $X_1(r, t), \dots, X_n(r, t)$ ao longo de $\pi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definido como $\pi_r(t) = \pi(r, t) = re^{it}$, para todo $r \in (-\delta, \delta)$, sendo dois a dois linearmente independentes e soluções de $\tilde{\omega}$.

Denotemos por $\theta_j(r, t)$ o ângulo de $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\pi(r, t)}$ a $X_j(r, t)$. Assim, usando o mesmo argumento da prova do Teorema 3.3.1 obtemos que

$$X_j(r, t) = e^{i\theta_j(r, t)} \frac{\partial}{\partial z} + e^{-i\theta_j(r, t)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

e

$$\tilde{\omega}(r, t) = f(r, t)\lambda_1(r, t) \cdot \dots \cdot \lambda_n(r, t),$$

onde λ_j são 1-formas lineares dadas por

$$\lambda_j(r, t) = e^{i\phi_j}(r, t)dz + e^{-i\phi_j}(r, t)d\bar{z},$$

onde $\phi_j(r, t) = \frac{\pi}{2} - \theta_j(r, t)$ e f é uma função diferenciável tal que $f(r, t) \neq 0$ para todo $(r, t) \in (-\delta, \delta) \times \mathbb{R}$.

Agora definiremos a n -forma polar de ω .

Definição 3.4.2. O pull-back através de $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ da n -forma diferencial totalmente real $\tilde{\omega}$ define uma n -forma $\pi^*\tilde{\omega}$ sobre $(-\delta, \delta) \times \mathbb{R}$, que é chamada de n -forma polar de ω . Analogamente, chamamos de formas lineares polares de ω as 1-formas lineares $\pi^*\lambda_1, \dots, \pi^*\lambda_n$ sobre $(-\delta, \delta) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\pi^*\tilde{\omega} = f\pi^*\lambda_1 \cdot \dots \cdot \pi^*\lambda_n.$$

Sendo $\pi^*\lambda_j$ uma 1-forma linear sobre $(-\delta, \delta) \times \mathbb{R}$ então

$$\pi^*\lambda_j = A_1 dr + A_2 dt, \tag{3.27}$$

onde $\{dr, dt\}$ é a base dual associada a base $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}\}$. Logo, $\pi^*\lambda_j(\frac{\partial}{\partial r}) = A_1$ e $\pi^*\lambda_j(\frac{\partial}{\partial t}) = A_2$. Daí, usando a Definição 2.2.2 temos

$$\begin{aligned} A_1 &= \pi^*\lambda_j\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \lambda_j(r, t)\left(d\pi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) \\ &= \lambda_j(r, t)\left(\cos(t)\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}(t)\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= e^{i\phi_j}dz\left(\cos(t)\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}(t)\frac{\partial}{\partial y}\right) + e^{-i\phi_j}d\bar{z}\left(\cos(t)\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}(t)\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= e^{i\phi_j}(\cos(t) + i\operatorname{sen}(t)) + e^{-i\phi_j}(\cos(t) - i\operatorname{sen}(t)) \\ &= e^{i\phi_j} \cdot e^{it} + e^{-i\phi_j} \cdot e^{-it} = e^{i(\phi_j+t)} + e^{-i(\phi_j+t)} \\ &= 2 \cos \varphi_j, \end{aligned}$$

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

onde $\varphi_j(r, t) = \phi_j(r, t) + t$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \pi^* \lambda_j \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \lambda_j(r, t) \left(d\pi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\
 &= \lambda_j(r, t) \left(r \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} + r \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
 &= e^{i\phi_j} dz \left[r \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} + r \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] + e^{-i\phi_j} d\bar{z} \left[r \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} + r \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \\
 &= e^{i\phi_j} \left[r \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + i r \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \right] + e^{-i\phi_j} \left[r \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - i r \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &= e^{i\phi_j} \cdot r e^{i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-i\phi_j} \cdot r e^{-i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} = r e^{i(\phi_j + t + \frac{\pi}{2})} + r e^{-i(\phi_j + t + \frac{\pi}{2})} \\
 &= r e^{i(\varphi_j + \pi/2)} + r e^{-i(\varphi_j + \pi/2)} \\
 &= -2r \operatorname{sen} \varphi_j
 \end{aligned}$$

Concluimos assim, que

$$\pi^* \lambda_j = 2(\cos \varphi_j dr - r \operatorname{sen} \varphi_j dt)$$

para cada $j = 1, \dots, n$, onde $\varphi_j(r, t) = \phi_j(r, t) + t$. Deste modo, cada uma destas formas lineares polares tem ponto singular $(0, t)$ com $\varphi_j(0, t) = \frac{\pi}{2} + q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$.

Notemos que se $(0, t)$ é um ponto singular de $\pi^* \lambda_{j_1}$ e $\pi^* \lambda_{j_2}$ então $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2}$. De fato, como

$$\varphi_{j_1}(0, t) = \frac{\pi}{2} + q_1\pi \quad \text{e} \quad \varphi_{j_2}(0, t) = \frac{\pi}{2} + q_2\pi$$

para algum $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j_2}(0, t) - \varphi_{j_1}(0, t) &= \phi_{j_2}(0, t) - \phi_{j_1}(0, t) \\
 &= \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{j_2}(0, t) \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{j_1}(0, t) \right) \\
 &= \theta_{j_1}(0, t) - \theta_{j_2}(0, t) \\
 &= (q_2 - q_1)\pi
 \end{aligned}$$

o que implica que os campos de vetores $X_{j_1}(0, t)$ e $X_{j_2}(0, t)$ são linearmente dependentes. Assim, $j_1 = j_2$.

Além disso, sob certas condições, é possível determinar o tipo topológico destes pontos singulares.

Seja Λ_j um campo de vetores dado por

$$\Lambda_j = r \operatorname{sen} \varphi_j \frac{\partial}{\partial r} + \cos \varphi_j \frac{\partial}{\partial t},$$

os pontos singulares de Λ_j na reta $r = 0$ são os pontos $(0, t)$ tal que $\varphi_j(0, t) = \frac{\pi}{2} + q\pi$,

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

$q \in \mathbb{Z}$. A matrix jacobiana de Λ_j é dada por

$$D\Lambda_j(r, t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi_j + r \cos \varphi_j \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} & r \cdot \cos \varphi_j \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \\ -\operatorname{sen}\varphi_j \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} & -\operatorname{sen}\varphi_j \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Logo, a matriz jacobiana no ponto singular $(0, t)$ de Λ_j é

$$D\Lambda_j(0, t) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\partial \varphi_j}{\partial r}(0, t) & -\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(0, t) \end{pmatrix}$$

com autovalores $1, -\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(0, t)$. Como consequência, $(0, t)$ é ponto singular hiperbólico de $\pi^*\lambda_j$ se, e somente se, $\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(0, t) \neq 0$. Além disso, $(0, t)$ é do tipo sela quando $\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(0, t) > 0$ e do tipo nó quando $\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(0, t) < 0$.

Lema 3.4.2. Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real semi-homogênea e $p = 0$ um ponto singular isolado de ω . Então $z = e^{it}$ é uma raiz do polinômio característico P_ω se, e somente se, $(0, t)$ é um ponto singular de uma das 1-formas lineares polares. Além disso, $z = e^{it}$ é uma raiz simples de P_ω se, e somente se, $(0, t)$ é um ponto singular hiperbólico de tal 1-forma linear polar.

Demonstração. Seja ω semi-homogêneo com parte principal em ω_k . Pelo Lema 3.4.1, temos que

$$\tilde{\omega}(0, t) = \omega_k(e^{it}) = A_0^k(e^{it})dz^n + \dots + A_n^k(e^{it})d\bar{z}^n$$

Daí, a n -forma polar de ω é dada por

$$\pi^*\tilde{\omega}(0, t) = A_0^k(e^{it})\pi^*dz^n + \dots + A_n^k(e^{it})\pi^*d\bar{z}^n$$

Sabemos que π^*dz e $\pi^*d\bar{z}$ são 1-formas lineares dadas por

$$\pi^*dz = B_1dr + B_2dt \quad \text{e} \quad \pi^*d\bar{z} = B_3dr + B_4dt$$

onde $\{dr, dt\}$ é uma base dual associada a base $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}\}$. Logo, $\pi^*dz(\frac{\partial}{\partial r}) = B_1$, $\pi^*dz(\frac{\partial}{\partial t}) = B_2$, $\pi^*d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial r}) = B_3$ e $\pi^*d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial t}) = B_4$. Assim,

$$\begin{aligned} B_1 &= \pi^*dz\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = dz\left(d\pi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) \\ &= (dx + idy)\left(\cos(t)\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}(t)\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \cos(t) + i\operatorname{sen}(t) = e^{it}. \end{aligned}$$

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

Por outro lado,

$$\begin{aligned} B_2 &= \pi^* dz \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = dz \left(d\pi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\ &= (dx + idy) \left(-r \operatorname{sen}(t) \frac{\partial}{\partial x} + r \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= -r \operatorname{sen}(t) + ir \cos(t) = ire^{it}. \end{aligned}$$

Por cálculos semelhantes, encontramos os valores de B_3 e B_4 . Assim,

$$\pi^* dz = e^{it}(dr + ir dt) \quad \text{e} \quad \pi^* d\bar{z} = e^{-it}(dr - ir dt).$$

Restringindo para $r = 0$ temos

$$\begin{aligned} \pi^* \tilde{\omega}(0, t) &= A_0^k(e^{it}) \cdot [e^{it} dr]^n + A_1^k(e^{it}) [e^{it} dr]^{n-1} \cdot [e^{-it} dr] + \dots + A_n^k(e^{it}) [e^{-it} dr]^n \\ &= [A_0^k(e^{it})(e^{it})^n + A_1^k(e^{it})(e^{it})^{n-1} \cdot e^{-it} + \dots + A_n^k(e^{it})(e^{-it})^n] dr^n. \end{aligned}$$

Por (3.25), temos que $\pi^* \tilde{\omega}(0, t) = P_\omega(e^{it}) dr^n$. Pela Definição 3.4.2 e por cálculos feitos chegamos que

$$\begin{aligned} \pi^* \tilde{\omega}(0, t) &= f(0, t) \pi^* \lambda_1(0, t) \cdot \dots \cdot \pi^* \lambda_n(0, t) \\ &= f(0, t) (2 \cos \varphi_1(0, t) dr) \cdot \dots \cdot (2 \cos \varphi_n(0, t) dr) \\ &= 2^n f(0, t) \cos \varphi_1(0, t) \cdot \dots \cdot \cos \varphi_n(0, t) dr^n. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$P_\omega(e^{it}) = 2^n f(0, t) \cos \varphi_1(0, t) \cdot \dots \cdot \cos \varphi_n(0, t). \quad (3.28)$$

Assim, $z = e^{it}$ é uma raiz de P_ω se e somente se $(0, t)$ é um ponto singular de uma das 1-formas lineares polares.

Por outro lado, seja $z = e^{it}$ uma raiz de P_ω , então existe um único $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\varphi_j(0, t) = \frac{\pi}{2} + q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$. Não é difícil provar que $z = e^{it}$ é uma raiz simples se, e somente se, $\frac{d}{dt}(P_\omega(e^{it})) \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $j = 1$. Assim,

$$P_\omega(e^{it}) = \cos(\varphi_1(0, t)) s(t),$$

onde $s(t) = 2^n f(0, t) \cos(\varphi_2(0, t)) \cdot \dots \cdot \cos(\varphi_n(0, t))$. Logo,

$$\frac{d}{dt} P_\omega(e^{it}) = -\operatorname{sen}(\varphi_1(0, t)) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(0, t) s(t) + \cos(\varphi_1(0, t)) \frac{\partial s}{\partial t}(t).$$

Como $\cos(\varphi_1(0, t)) = 0$ e $\text{sen}(\varphi_1(0, t)) = \pm 1$, então $\frac{d}{dt}P_\omega(e^{it}) = \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(0, t)s(t)$.

□

Observação 3.4. Consideremos $z = e^{it_0}$ uma raiz do polinômio característico P_ω . Pelo Lema acima, $(0, t_0)$ é um ponto singular de uma 1-forma linear polar, isto é, $\varphi_j(0, t_0) = \frac{\pi}{2} + q\pi$, para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, e $q \in \mathbb{Z}$. Para cada $p \in \mathbb{Z}$, $e^{i(t_0+p\pi)} = \pm z$ é também uma raiz de P_ω . Assim, existe $j_p \in \{1, \dots, n\}$ e $q_p \in \mathbb{Z}$ tais que $\varphi_{j_p}(0, t_0 + p\pi) = \frac{\pi}{2} + q_p\pi$. Isto implica que

$$\varphi_j(0, t_0) - \varphi_{j_p}(0, t_0 + p\pi) = (q - q_p)\pi.$$

Por outro lado,

$$\varphi_j(0, t_0) - \varphi_{j_p}(0, t_0 + p\pi) = \theta_{j_p}(0, t_0 + p\pi) - \theta_j(0, t_0) - p\pi.$$

Assim, $X_j(0, t_0) = \pm X_{j_p}(0, t_0 + p\pi)$. Então, pela Observação 3.2, $X_j(0, t) = \pm X_{j_p}(0, t + p\pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\varphi_j(0, t) - \varphi_{j_p}(0, t + p\pi) = (q - q_p)\pi$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí, derivando com respeito a t ,

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(0, t) - \frac{\partial \varphi_{j_p}}{\partial t}(0, t + p\pi) = 0 \implies \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(0, t_0) = \frac{\partial \varphi_{j_p}}{\partial t}(0, t_0 + p\pi)$$

Assim, $(0, t_0)$ é um ponto singular de $\pi^*\lambda_j$ do tipo sela ou nó se, e somente se, $(0, t_0 + p\pi)$ é um ponto singular de $\pi^*\lambda_{j_p}$ do tipo sela ou nó, respectivamente. Concluimos que, o tipo de singularidade depende apenas da direção determinada por $z = e^{it_0}$.

Definição 3.4.3. Seja $z = e^{it_0}$ uma raiz do polinômio característico P_ω . Dizemos que $z = e^{it_0}$ é uma direção característica do tipo sela (nó) de ω , se $(0, t_0)$ um ponto singular de uma forma polar $\pi^*(\lambda_j)$ do tipo sela (nó).

Observe que z e $-z$ definem a mesma direção.

Definição 3.4.4. Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real e p uma singularidade isolada de ω . Dizemos que ω é não degenerado em p se ω é semi-homogêneo e o polinômio característico tem apenas raízes simples.

Teorema 3.4.3. Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real e p ponto singular não degenerado de ω . Então,

$$\text{ind}(\omega, p) = 1 - \frac{S^+ - S^-}{n},$$

onde S^+ e S^- denota o número de direções características do tipo sela e nó, respectivamente.

3. Índice de n -formas diferenciáveis totalmente reais

Demonstração. Denotamos por S_j^+ e S_j^- o número de pontos singulares $(0, t)$ do tipo sela e nó, respectivamente, da forma linear polar $\pi^*\lambda_j$ tais que $t \in [0, 2\pi n)$.

Seja $z = e^{it_0}$ uma direção característica do tipo sela. Então, $(0, t_0)$ é um ponto singular de uma forma linear polar $\pi^*(\lambda_j)$ do tipo sela. Por outro lado, observe que existe $q_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $q_0\pi \leq t_0 \leq (q_0 + 1)\pi$. Assim, $0 \leq t_0 - q_0\pi \leq \pi$. Logo, pela Observação 3.4, temos que $(0, t_0 - q_0\pi)$, $(0, t_0 - q_0\pi + \pi)$, ..., $(0, t_0 - q_0\pi + (2n - 1)\pi)$ são pontos singulares do tipo sela de alguma forma polar. Além disso, os $2n$ elementos $t_0 - q_0\pi, t_0 - q_0\pi + \pi, \dots, t_0 - q_0\pi + (2n - 1)\pi \in [0, 2\pi n]$. Logo,

$$2nS^+ = \sum_{j=1}^n S_j^+.$$

Analogamente, temos que

$$2nS^- = \sum_{j=1}^n S_j^-.$$

Lembrando que esses pontos são indicados pelos pontos $(0, t)$ tal que $\varphi_j(0, t) = \pi/2 + q\pi$, com $q \in \mathbb{Z}$. Além disso, é do tipo sela quando φ_j é crescente e do tipo nó quando é decrescente. Isto implica que

$$\varphi_j(0, 2\pi n) - \varphi_j(0, 0) = \pi(S_j^+ - S_j^-) \quad (3.29)$$

para todo $j = 1, \dots, n$. De fato, pelo Lema 3.2.1, temos que $X_j(0, 2\pi n) = X_j(0, 0)$. Assim, $\theta_j(0, 2\pi n) - \theta_j(0, 0) = k\pi$. Usando $\varphi_j(0, t) = \frac{\pi}{2} - \theta_j(0, t) + t$. Temos que $\varphi_j(0, 2\pi n) - \varphi_j(0, 0) = k_1\pi$, onde $k_1 \in \mathbb{Z}$. Assim, afirmamos que $k_1 = S_j^+ - S_j^-$. Vejamos alguns casos em que $k_1 = 1$ nos gráficos abaixo.

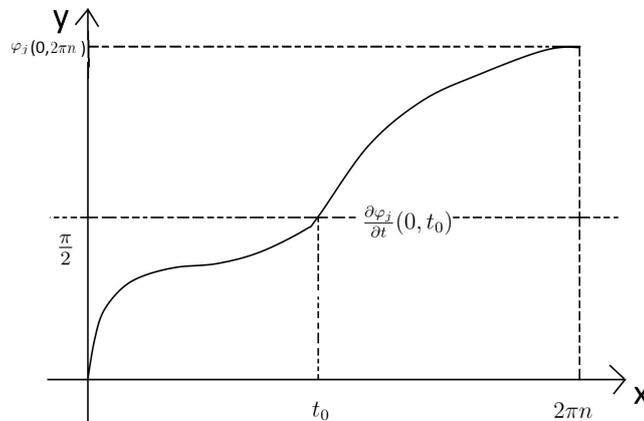


Figura 3.10: $S_j^+ - S_j^- = 1 - 0 = 1$

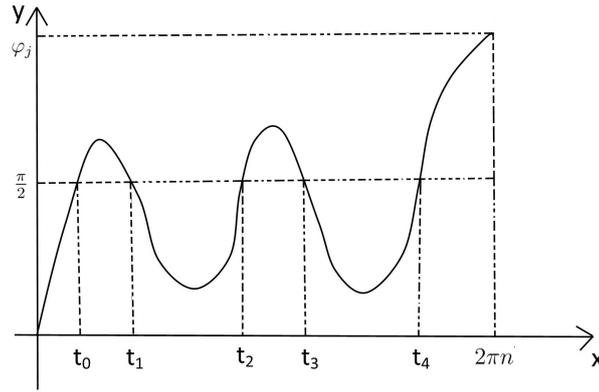


Figura 3.11: $S_j^+ - S_j^- = 3 - 2 = 1$

Isso é válido para qualquer $k_1 \in \mathbb{Z}$. Agora, pelo Corolário 3.3.3, temos que

$$\text{ind}(\omega, p) = \frac{\theta_j(0, 2\pi n) - \theta_j(0, 0)}{2\pi n}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{ind}(\omega, p) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j(0, 2\pi n) - \theta_j(0, 0)}{2\pi n} \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j(0, 2\pi n) - \phi_j(0, 0)}{2\pi n} \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j(0, 2\pi n) - 2\pi n - \varphi_j(0, 0)}{2\pi n} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j(0, 2\pi n) - \varphi_j(0, 0)}{2\pi n} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{S_j^+ - S_j^-}{2n} \\ &= 1 - \frac{S^+ - S^-}{n}. \end{aligned}$$

□

Definição 3.4.5. Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real, p ponto singular não degenerado de ω , e^{it_0} uma raiz do polinômio característico P_ω e $(0, t_0)$ uma singularidade de $\pi^*\lambda_j$. Então,

- (1) se $(0, t_0)$ é uma singularidade do tipo sela de $\pi^*(\lambda_j)$ então, o blow down da variedade estável/instável de $\pi^*(\lambda_j)$ é chamado de curva característica de ω .
- (2) se $(0, t_0)$ é uma singularidade do tipo nó de $\pi^*(\lambda_j)$ então a curva característica

de ω é o blow-down de uma curva integral de $\pi^*(\lambda_j)$, denotada por c , tal que a derivada da curva c na origem é a direção e^{it_0} .

Definição 3.4.6. Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real e p um ponto singular não degenerado de ω . Dizemos que S é um **setor** de ω se S é uma região limitada por duas curvas características de ω consecutivas S_1 e S_2 . Então,

- (1) o setor S é hiperbólico, se S_1 e S_2 são do tipo sela;
- (2) o setor S é parabólico, se S_1 é do tipo sela e S_2 é do tipo nó, ou vice e versa;
- (3) o setor S é elíptico, se S_1 e S_2 são do tipo nó.

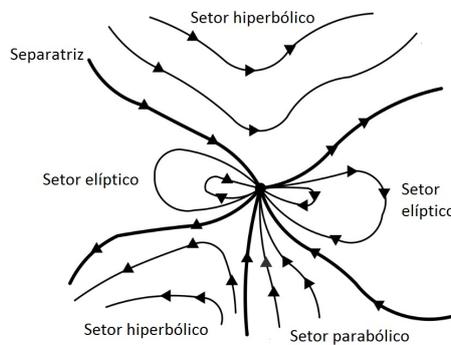


Figura 3.12: Setores

Denotaremos por h e e o número de setores hiperbólicos e elípticos, respectivamente. Então, $e - h = 2(S^- - S^+)$. Assim, obtemos a seguinte consequência imediata do Teorema 3.4.3, que generaliza a conhecida fórmula de Bendixon para campos de vetores.

Corolário 3.4.4. Sejam ω uma n -forma diferencial totalmente real e p ponto singular não degenerado de ω . Então,

$$ind(\omega, p) = 1 + \frac{e - h}{2n}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] J. W. BRUCE AND D. L. FIDAL, *On binary differential equations and umbilics*, Proc. Roy. Soc Edinburg Sect.A **111**, (1989), no. 1-2, 147-168.
- [2] J. W. BRUCE AND F. TARI, *On binary differential equations*, Non-linearity, (1995), no. 2, 255-271.
- [3] C. CAMACHO E A. L. NETO, *Introdução à Teoria das Folheações*, Rio de Janeiro, IMPA, 1977
- [4] C. CAMACHO E A. L. NETO, *Teoria Geométrica das Folheações*, Rio de Janeiro, IMPA, 1979.
- [5] M. P. DO CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces*, Translated from the Portuguese. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [6] M. P. DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: IMPA, 2º Ed., 1988.
- [7] L. S. CHALLAPA, *Index of quadratic differential forms*, Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, v. 459, (2008), 177-191
- [8] L. S. CHALLAPA, *Índice de equações diferenciais binárias*, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC - USP, (2006), 49-69.
- [9] T. FUKUI AND J. J. NUÑO-BALLESTEROS, *Isolated singularities of binary differential equations of degree n* , Publ. Mat. **56**, (2012), no. 1, 65-89.
- [10] R. GARCIA, C. GUTIERREZ E J. SOTOMAYOR, *Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in \mathbb{R}^3* , Bull. Sci. Math. **123**, (1999), no. 8 599-622.
- [11] V. GUÍÑEZ, *Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society, **309**, (1988), 477-502.
- [12] K. HOFFMAN AND R. KUNZE, *Linear algebra*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 2º Ed., 1961.

- [13] H. HOPF, *Differential geometry in the large*, Lectures Notes in Mathematics **1000**, (1971)
- [14] E. L. LIMA, *Análise Real*, v.2, 5° Ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2010.
- [15] E. L. LIMA, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, 3° Ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2006.
- [16] E. L. LIMA, *Variedades Diferenciáveis*, Rio de Janeiro, IMPA, 2007.
- [17] F. MORGAN, *Riemannian geometry: a beginner's guide*, Jones and Bartlett Publishers, 1992.
- [18] H. TVERBERG, *A proof of the Jordan Curve Theorem*, Bull, London Math Soc, **12**, (1980). 34-38.