Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre uma Classe de Problemas Elípticos Envolvendo o Crescimento do Tipo Trudinger-Moser

Diego Dias Felix

João Pessoa – PB
30 de Julho de 2015

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre uma Classe de Problemas Elípticos Envolvendo o Crescimento do Tipo Trudinger-Moser

por

Diego Dias Felix

sob a orientação do

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

João Pessoa – PB
30 de Julho de 2015

F316s Felix, Diego Dias.
Sobre uma classe de problemas elípticos envolvendo o crescimento do tipo Trudinger-Moser / Diego Dias Felix.- João Pessoa, 2015.
62f.
Orientador: Everaldo Souto de Medeiros
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Crescimento crítico. 3. Desigualdade de Trudinger-Moser. 4. Método variacional.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Sobre uma Classe de Problemas Elípticos Envolvendo o Crescimento do Tipo Trudinger-Moser

por

Diego Dias Felix [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada em 30 de Julho de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros – UFPB
(Orientador)

Luciana Freitas

Prof. Dr. Luciana Roze de Freitas – UEPB
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais, Antônio Felix da Costa e Joana Darque Dias Felix.

Agradecimentos

AGRADEÇO:

A DEUS por todas as coisas maravilhosas que me foram concedidas, onde dentre tantas ressalto duas: a minha FAMÍLIA e o curso de Matemática. Sou grato a DEUS por ter mim dado fôlego para persistir tanto nesse mestrado, sem DEUS não teria chegado até aqui, a ELE devo a minha vida, tudo que sou e tudo que tenho.

A meus pais, Antônio Felix da Costa e Joana Darque Dias Felix e meus irmãos Diogo Dias Felix e Hugo Dias Felix, os quais mesmo distante sempre estiveram presentes, em meu coração, dando-me força e coragem para superar todas as barreiras encontradas em minha jornada. EU AMO VOCÊS!

A minha outra Mãe, Dona Mocinha, uma senhora que deu oportunidade para um desconhecido, vivendo em seu lar, lutar por um futuro melhor... Faltam palavras para expressar a minha gratidão por tudo que a senhora realizou em minha vida; Dona Mocinha, a senhora é uma benção de DEUS em minha vida, Muito Obrigado!

A Waleska, pelo amor, carinho, orações, compreensão e todo o apoio, sempre acreditando que eu chegaria ao sucesso. Muito obrigado minha "Denga".

Ao Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros, meu orientador, pelo suporte, correções e incentivos, por todo apoio e conhecimento que, brilhantemente, deu-me durante todo curso e, especialmente, pela confiança em mim depositada ao assumir a orientação.

Aos professores Luciana Roze de Freitas e Uberlandio Batista Severo, por terem aceitado participar da minha banca, pelas correções e pelas sugestões.

Ao motorista Osvaldo, por nossa amizade e por todos os favores feitos.

A todos os meus amigos, em especial aos que fizeram parte da turma do mestrado, Caio, Francielia, Luando, Mauri e Rossane. Não posso esquecer de Marcius e Eudes "o presidente e o vice da diversão"(Raaaaaaa...).

A meu grande amigo João, pelas palavras ditas com um sincero sorriso naquela tarde de sexta feira, 29/05/2015, quando viajávamos de volta as nossas casas que resumidamente diziam: "Eu não tenho dúvida da sua vitória"; essas palavras me renovaram para seguir com foco, força e fé rumo a conclusão desse mestrado.

A todos os Professores que contribuíram para minha formação.

Por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos uma classe de problemas elípticos quase lineares envolvendo não linearidades com crescimento polinomial subcrítico, exponencial subcrítico e exponencial crítico. Nosso foco principal é tratar não linearidades que não satisfazem a condição de superquadraticidade de Ambrosetti-Rabinowitz. A nossa ferramenta é o Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami.

Palavras-chave: Crescimento Crítico, Desigualdade de Trudinger-Moser, Método Variacional.

Abstract

In this work, we study a class of quasilinear elliptic problem involving nonlinearities with subcritical polynomial growth, subcritical exponential growth and critical exponential growth. Our main focus is to treat nonlinearities which do not satisfy the condition of super-quadratic of Ambrosetti-Rabinowitz. Our main tool is the Mountain Pass Theorem with the Cerami condition.

Keywords: Critical Growth, Trudinger-Moser Inequality, Variational Method.

Sumário

Notações

A seguir, listamos as principais notações utilizadas neste trabalho.

➢ Ω denota um domínio limitado em $\mathbb{R}^N,\ N \geqslant 2$;

➢ $d =$ raio da maior bola aberta contida em Ω;

➢ $(X, \|\cdot\|_X)$ denota um espaço de Banach;

➢ X^* denota o dual topológico do espaço de Banach X;

➢ c, c_1, c_2, $\ldots$ denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;

➢ $\Box$ denota o final de uma demonstração;

➢ $|\cdot|$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^N, N = 1, 2, 3...$;

➢ $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em um espaço normado;

➢ $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ denota o gradiente da função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

➢ $|\nabla u|^{p-2} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]^{\frac{p-2}{2}}$

➢ $\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ denota o p-laplaciano de u;

➢ $C_0^\infty(\Omega)$ denota o conjunto de funções contínuas com suporte compacto;

➢ $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$;

➢ $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é mensurável e $\|u\|_p < \infty\}$;

➢ $\|u\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : |\{x \in \Omega : |u(x)| > C\}| = 0\}$;

➢ $L^{\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é mensurável e $\|u\|_{\infty} < \infty\}$;

➢ $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega)\,; \exists g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi,\ \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) \text{ e } \forall i = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$;

➢ $\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \sum\limits_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$ denota a norma do espaço $W^{1,p}(\Omega)$;

➢ $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ sob a norma $\| \cdot \|_{1,p}$;

➢ $\|u\| = \|\nabla u\|_p$ denota a norma do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$;

➢ $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\|u\|^p}{\|u\|_p^p} : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}$ é o primeiro autovalor do *operador* $p-$*Laplaciano*;

➢ $u^+ := \max\{u, 0\}$ (resp. $u^- := \max\{-u, 0\}$) denota a parte positiva (resp. negativa) de u;

➢ $p^* := \dfrac{Np}{N-p}$ denota o expoente crítico de Sobolev de p, com $1 \leqslant p < N$;

➢ $N' = \dfrac{N}{N-1}$ é o expoente conjugado Lebesgue de N;

➢ ω_{N-1} denota a medida da esfera unitária $(N-1)$-dimensinal;

➢ $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ denota a constante crítica na desigualdade de Trudinger-Moser.

Introdução

Nesta dissertação, baseada no artigo de Lam-Lu [18], vamos estudar a existência de solução não negativa e não trivial para a seguinte classe de equações elípticas não linear

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave e

$$-\Delta_p u := -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$$

é o *operador* $p-$ *Laplaciano* com $1 < p \leqslant N$. O principal objetivo é estabelecer resultados de existência de soluções não negativas e não triviais para o problema (P) quando o termo não linear $f(x,s)$ possui crescimento exponencial subcrítico e crítico motivados pela Desigualdade de Trudinger-Moser e subcrítico do tipo Sobolev, sem satisfazer a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, ou seja, existem constantes $\theta > p$ e $s_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(x,s) = \theta \int_0^s f(x,t)\,dt \leqslant sf(x,s),\ \forall |s| \geqslant s_0,\ \forall x \in \Omega. \tag{1}$$

Estudaremos o problema (P) quando $f(x,s)$ satisfaz uma das três condições:

1. Para $1 < p < N$, $f(x,s)$ tem *melhor crescimento polinomial subcrítico*, ou seja,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p^*-1}} = 0 \text{ uniformemente em } x \in \Omega,$$

onde p^* denota o expoente crítico de Sobolev dado por $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$.

2. Para $p = N$, $f(x,s)$ tem *crescimento exponencial subcrítico*, ou seja,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{e^{\alpha|s|^{N'}}} = 0 \text{ uniformemente em } x \in \Omega \text{ para todo } \alpha > 0,$$

onde $N' = \dfrac{N}{N-1}$.

3. Para $p = N$, $f(x,s)$ tem *crescimento exponencial crítico*, ou seja, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{e^{\alpha|s|^{N'}}} = \begin{cases} 0, & \text{uniformemente em } x \in \Omega \text{ para todo } \alpha > \alpha_0. \\ \infty, & \text{uniformemente em } x \in \Omega \text{ para todo } \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

Além disso, vamos supor as seguintes hipóteses sobre $f(x,s)$:

(f_1) $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, $f(x,s) \geqslant 0,\ \forall (x,s) \in \Omega\times[0,\infty)$ e $f(x,0) = 0,\ \forall x \in \Omega$;

(f_2) $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^p} = \infty$ uniformemente em $x \in \Omega$, onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$;

(f_3) Existem $C_* \geqslant 0$, $\theta \geqslant 1$ tais que $H(x,t) \leqslant \theta H(x,s) + C_*$ para todo $0 < t < s$, $\forall x \in \Omega$ onde $H(x,s) = sf(x,s) - pF(x,s)$;

(f_4) $\displaystyle\overline{\lim_{s\to 0^+}} \frac{pF(x,s)}{s^p} < \lambda_1(\Omega)$ uniformemente em $x \in \Omega$, onde $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor do *operador* $p -$ *Laplaciano*, ou seja,

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \frac{\|u\|^p}{\|u\|_p^p} : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\};$$

(f_5) Seja d o raio da maior bola aberta contida em Ω. Vamos assumir que

$$\lim_{s\to\infty} sf(x,s)e^{-\alpha_0|s|^{N'}} \geqslant \beta > \left(\frac{N}{d}\right)^N \frac{1}{\mathcal{M}\alpha_0^{N-1}} \text{ uniformemente em } x \in \Omega,$$

onde

$$\mathcal{M} = \lim_{n\to\infty} n \int_0^1 e^{n\left(t^{N'}-t\right)}\,dt;$$

(f_6) $f(x,s)$ está na classe L_0, isto é, para qualquer $\{u_n\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$, se

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup 0 \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \\ f(x,u_n) \to 0 \text{ em } L^1(\Omega) \end{cases}$$

então $F(x,u_n) \to 0$ em $L^1(\Omega)$.

Uma vez que estamos interessados em encontrar uma solução não negativa, iremos considerar, além de (f_1), que a não linearidade $f(x,s)$ satisfaz

$$f(x,s) = 0, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (-\infty, 0].$$

Apesar da condição de Ambrosetti-Rabinowitz desempenhar um papel importante no estudo do problema (P), por exemplo, assegura a limitação da sequência de Palais-Smale, ela é muito restritiva e exclui muitas não linearidades interessantes e importantes. Observemos que a condição de Ambrosetti-Rabinowitz implica uma outra mais fraca, $f(x,s)$ é *p-superlinear no infinito*, isto é,

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)}{|s|^{p-1}}=\infty \text{ uniformemte em } x\in\Omega.$$

Também vale observar que existem muitas funções que satisfazem a condição p-superlinear no infinito, mas não satisfazem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Um exemplo de tais funções é

$$f(x,s)=|s|^{p-2}s\log(1+|s|),\ s\in\mathbb{R} \quad \text{e} \quad p>1.$$

Além disso, a condição (f_2) é apenas uma consequência da condição p-superlinear no infinito de $f(x,s)$. A condição (f_3) foi introduzida pela primeira vez por Jeanjean [17] e foi utilizada em trabalhos posteriores (veja por exemplo [20, 24, 25, 30, 32]). Em artigos anteriores (veja [16, 20, 25, 30]), os autores assumem muitas vezes que

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{f(x,s)}{|s|^{p-1}}=0 \text{ uniformemte em } x\in\Omega$$

que é mais forte que a condição (f_4). Em (f_5), observe que $0<\mathcal{M}<\infty$. De fato, para simplificar as contas, assumiremos que $N=2$. Note que

$$\begin{cases} -nt\leqslant n(t^2-t), & \forall t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ n(t-1)\leqslant n(t^2-t), & \forall t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{n(t^2-1)} &\geqslant \int_0^{\frac12} e^{-nt}+\int_{\frac12}^1 e^{n(t-1)}\\ &= -\frac{1}{n}e^{-nt}\Big|_0^{\frac12}+\frac{1}{n}e^{n(t-1)}\Big|_{\frac12}^1\\ &= -\frac{1}{ne^{\frac{n}{2}}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{ne^{\frac{n}{2}}}\\ &= \frac{2}{n}-\frac{2}{ne^{\frac{n}{2}}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$n\int_0^1 e^{n(t^2-1)}\geqslant 2-\frac{2}{e^{\frac{n}{2}}}. \tag{2}$$

Desde que

$$\begin{cases} -\dfrac{n}{2}t \geqslant n(t^2 - t), & \forall t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \dfrac{n}{2}(t-1) \geqslant n(t^2 - t), & \forall t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

analogamente ao que foi feito anteriormente, obtemos

$$4 - \frac{4}{e^{\frac{n}{4}}} \geqslant n \int_0^1 e^{n(t^2-1)}. \tag{3}$$

De (2) e (3), obtemos que $2 \leqslant \mathcal{M} \leqslant 4$.

Agora, enunciaremos os principais resultados deste trabalho:

Teorema 0.1. *Seja* $1 < p < N$ *e assuma que* $f(x, s)$ *tem o melhor crescimento polinomial subcrítico e satisfaz* (f_1), (f_2), (f_3) *e* (f_4). *Então, o problema* (P) *tem uma solução não trivial e não negativa.*

Teorema 0.2. *Suponha que* $p = N$ *e* $f(x, s)$ *tem o crescimento exponencial subcrítico e satisfaz* (f_1), (f_2), (f_3) *e* (f_4). *Então, o problema* (P) *tem uma solução não trivial e não negativa.*

Teorema 0.3. *Suponha que* $p = N$ *e* $f(x, s)$ *tem o crescimento exponencial crítico em* $\alpha_0 > 0$ *e satisfaz* (f_1), (f_2), (f_3), (f_4), (f_5) *e* (f_6), *com* $C_* = 0$ *e* $\theta = 1$ *em* (f_3). *Então, o problema* (P) *tem uma solução não trivial e não negativa.*

A seguir, detalharemos como este trabalho está organizado.

No *Capítulo* 1, apresentaremos alguns resultados que serão utilizados ao longo do trabalho, sendo que alguns serão enunciados sem demonstração e com as devidas referências para consultas. Na *Seção* 1.1, destacamos o Corolário 1.2, o Lema 1.3 - devido a de Figueiredo-Miyagaki-Ruf [10], e o Lema 1.4 - a Desigualdade de Trudinger-Moser. Na *Seção* 1.2, enunciaremos as versões do Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami que serão as nossas principais ferramentas.

No *Capítulo* 2, estudaremos o Problema (P) quando a não linearidade $f(x, s)$ tem crescimento subcrítico (polinomial e exponencial), sem satisfazer a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Para garantir a existência de uma solução fraca não negativa e não trivial, associaremos ao problema um funcional energia e mostraremos que este tem a geometria do passo da montanha e satisfaz a condição de Cerami. Daí, utilizaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha que nos garante a existência de um um ponto crítico para o funcional no nível minimax do passo da montanha o qual será a nossa solução fraca não trivial. Para concluir, mostraremos através de alguns cálculos que essa solução é não negativa.

No *Capítulo* 3, estudaremos o Problema (P) quando a não linearidade $f(x, s)$ tem crescimento exponencial crítico, sem satisfazer a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Mostraremos que o funcional energia associado ao problema tem a geometria do passo da montanha. Assim, utilizaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para garantir a existência de uma sequência de Cerami no nível minimax do passo da montanha. Em seguida, mostraremos que essa sequência de Cerami é limitada, o que não será simples, uma vez que $f(x, s)$ não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Além disso, mostraremos também que a sequência em questão, a menos de subsequência, converge fortemente para uma solução fraca não-trivial do problema estudado. Para concluir, mostraremos através de alguns cálculos que essa solução é não negativa.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, provaremos alguns resultados e enunciaremos outros, citando onde podemos encontrar as provas, entres os quais estaremos enunciando a Desigualdade de Trudinger-Moser. Também apresentaremos uma versão adaptada do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [1], introduzida por G. Cerami [6, 7].

1.1 Primeiros Resultados

Esta seção consta de algumas definições, da prova de um lema importante para o estudo do caso exponencial crítico, enunciaremos a Desigualdade de Trudinger-Moser que é de fundamental importância para os nossos estudos e apresentaremos alguns resultados sobre o funcional energia associado ao problema (P).

Definição 1.1. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach real, $(X^*, \|\cdot\|_*)$ seu espaço dual e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Para $c \in \mathbb{R}$, dizemos que J satisfaz a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ se para qualquer sequência $(u_n) \subset X$ com

$$J(u_n) \to c \text{ e } \|J'(u_n)\|_* \to 0 \tag{1.1}$$

existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que (u_{n_k}) converge fortemente em X. Também dizemos que J satisfaz a condição de Cerami $(C)_c$ se para qualquer sequência $(u_n) \subset X$ com

$$J(u_n) \to c \text{ e } (1 + \|u_n\|_X)\|J'(u_n)\|_* \to 0 \tag{1.2}$$

existe uma subsequência (u_{n_k}) que converge fortemente em X.

Observação 1.1. Toda sequência (u_n) que satisfaz (1.1) é chamada de sequência de Palais-Smale e toda sequência (u_n) que satisfaz (1.2) é chamada de sequência de Cerami.

Observação 1.2. Note que toda sequência de Cerami é uma sequência de Palais-Smale.

Prova: De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} \|J'(u_n)\|_* &= \frac{(1+\|u_n\|_X)}{(1+\|u_n\|_X)}\|J'(u_n)\|_* \\ &\leqslant (1+\|u_n\|_X)\|J'(u_n)\|_* \to 0. \end{aligned}$$

□

Segue da Observação 1.2 que:

Observação 1.3. Se J satisfaz a condição $(PS)_c$, então J satisfaz a condição $(C)_c$. Com efeito, se (u_n) é uma sequência que satisfaz (1.2), pela Observação 1.2, (u_n) satisfaz (1.1). Como por hipótese (u_n) satisfaz $(PS)_c$, então existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que (u_{n_k}) converge fortemente.

A seguir, apresentaremos algumas desigualdades que podem ser encontradas em Lindqvist [23] ou Xavier [34], das quais obteremos um corolário que será muito importante para mostrarmos, em alguns casos, que o limite fraco da sequência de Cerami é também o limite forte e, então, obter a solução não trivial para o problema (P).

Lema 1.1. Se $a, b \in \mathbb{R}^N$, então

i) $|b|^p \geqslant |a|^p + p|a|^{p-2}\langle a, b-a\rangle$, se $p > 1$;

ii) $|b|^p \geqslant |a|^p + p|a|^{p-2}\langle a, b-a\rangle + \dfrac{|b-a|^p}{2^{p-1}}$, se $p \geqslant 2$.

Demonstração: Uma vez que a aplicação $w \to |w|^p$ é convexa, usando o Teorema 9 de Lima [22], obtemos o item (i). Sabemos pela desigualdade de Clarkson para $p \geqslant 2$ (veja Brezis [5], pág 95) que

$$|a|^p + |b|^p \geqslant 2\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + 2\left|\frac{a-b}{2}\right|^p. \tag{1.3}$$

Substituindo b por $\dfrac{a+b}{2}$ em (i) obtemos

$$2\left|\frac{a+b}{2}\right|^p > 2|a|^p + p|a|^{p-2}\langle a, b-a\rangle. \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4) obtemos (ii). □

Como consequência do Lema 1.1, temos

Corolário 1.2. Dados a, $b \in \mathbb{R}^N$ existe uma constante positiva C_p tal que

$$\left\langle |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b, a-b\right\rangle \geqslant C_p|a-b|^p, \text{ se } p \geqslant 2.$$

Demonstração: No Lema 1.1, item (ii), trocando a por b obtemos

$$|a|^p \geqslant |b|^p + p|b|^{p-2}\langle b, a-b\rangle + \frac{|a-b|^p}{2^{p-1}}.$$

Isso juntamente com (ii) implica que

$$0 \geqslant p\left(|a|^{p-2}\langle a, b-a\rangle + |b|^{p-2}\langle b, a-b\rangle\right) + 2^{2-p}|a-b|^p,$$

ou seja,

$$-|a|^{p-2}\langle a, b-a\rangle - |b|^{p-2}\langle b, a-b\rangle \geqslant \frac{2^{2-p}}{p}|a-b|^p.$$

Logo,

$$\left\langle |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b, a-b\right\rangle \geqslant C_p|a-b|^p \text{ se } p \geqslant 2,$$

o que prova o resultado. □

O próximo resultado é devido a de Figueiredo-Miyagaki-Ruf [10] e apresentaremos uma prova que pode ser encontrada em de Souza [12]. Ele será útil para provarmos que a solução fraca é não trivial quando a não linearidade $f(x,s)$ possui o crescimento exponencial crítico.

Lema 1.3. Seja (u_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ convergindo para u em $L^1(\Omega)$. Assuma que $f(x,u_n)$ e $f(x,u)$ são também funções de $L^1(\Omega)$. Se

$$\int_\Omega |f(x,u_n(x))u_n(x)|\,dx \leqslant c_1, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

então $f(x,u_n)$ converge para $f(x,u)$ em $L^1(\Omega)$.

Demonstração: É suficiente provar que $\int_\Omega |f(x,u_n(x))|\,dx \to \int_\Omega |f(x,u(x))|\,dx$ (veja Royden [29], pag. 89). Como $f(x,u(x)) \in L^1(\Omega)$, então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que (veja Royden [29], pag. 92)

$$\int_A |f(x,u(x))|\,dx \leqslant \epsilon \text{ se } |A| < \delta. \tag{1.5}$$

Usando o fato que $u \in L^1(\Omega)$, encontramos $M_1 > 0$ tal que

$$|\{x \in \Omega : |u(x)| \geqslant M_1\}| \leqslant \delta. \tag{1.6}$$

Caso contrário, para todo $N > 0$ tem-se que

$$|B| = |\{x \in \Omega : |u(x)| \geqslant N\}| > \delta,$$

isso implica que
$$\int_\Omega |u(x)|\ dx \geqslant \int_B |u(x)|\ dx \geqslant \int_B N \geqslant N\delta.$$
Assim, fazendo $N \to \infty$ obtemos
$$\int_\Omega |u(x)|\ dx = \infty,$$
o que contradiz o fato de que $u \in L^1(\Omega)$. Seja $M = \max\left\{M_1, \dfrac{c_1}{\epsilon}\right\}$. Note que
$$\int_\Omega |f(x,u_n(x))|\, dx = \int_{|u_n(x)|\geqslant M} |f(x,u_n(x))|\, dx + \int_{|u_n(x)|<M} |f(x,u_n(x))|\, dx$$
e
$$\int_\Omega |f(x,u(x))|\, dx = \int_{|u(x)|\geqslant M} |f(x,u(x))|\, dx + \int_{|u(x)|<M} |f(x,u(x))|\, dx,$$
consequentemente,
$$\left|\int_\Omega |f(x,u_n(x))|\, dx - \int_\Omega |f(x,u(x))|\, dx\right| \leqslant I_1 + I_2 + I_3, \tag{1.7}$$
onde
$$\begin{cases} I_1 = \int_{|u_n(x)|\geqslant M} |f(x,u_n(x))|\, dx, \\ I_2 = \int_{|u(x)|\geqslant M} |f(x,u(x))|\, dx, \\ I_3 = \left|\int_{|u_n(x)|<M} |f(x,u_n(x))|\, dx - \int_{|u(x)|<M} |f(x,u(x))|\, dx\right|. \end{cases} \tag{1.8}$$
Avaliando as integrais em (1.8), obtemos
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|u_n(x)|\geqslant M} \frac{|f(x,u_n(x))u_n(x)|}{|u_n(x)|}\, dx \\ &\leqslant \int_{|u_n(x)|\geqslant M} \frac{|f(x,u_n(x))u_n(x)|}{|M|}\, dx \\ &\leqslant \frac{c_1}{M} \\ &\leqslant \epsilon. \end{aligned} \tag{1.9}$$
Desde que $M \geqslant M_1$, então
$$\{x \in \Omega : |u(x)| \geqslant M\} \subseteq \{x \in \Omega : |u(x)| \geqslant M_1\}.$$
Pela escolha de M_1, temos
$$I_2 = \int_{|u(x)|\geqslant M} |f(x,u(x))|\, dx \leqslant \epsilon. \tag{1.10}$$

Afirmação 1.1. $I_3 \to 0$ quando $n \to \infty$.
De fato, observe que

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \left| \int_\Omega |f(x,u_n)| \mathcal{X}_{|u_n|<M}\, dx - \int_\Omega |f(x,u)| \mathcal{X}_{|u|<M}\, dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \left(|f(x,u_n)| - |f(x,u)|\right) \mathcal{X}_{|u_n|<M}\, dx + \int_\Omega |f(x,u)| \big(\mathcal{X}_{|u_n|<M} - \mathcal{X}_{|u|<M}\big)\, dx \right| \\
&\leqslant \left| \int_\Omega \left(|f(x,u_n)| - |f(x,u)|\right) \mathcal{X}_{|u_n|<M}\, dx \right| + \left| \int_\Omega |f(x,u)| \big(\mathcal{X}_{|u_n|<M} - \mathcal{X}_{|u|<M}\big)\, dx \right|.
\end{aligned}
$$

Note que $g_n(x) = \left(|f(x,u_n(x))| - |f(x,u(x))|\right) \mathcal{X}_{|u_n(x)|<M}$ tende a 0 q.t.p. em Ω. Além disso,

$$
|g_n(x)| \leqslant \begin{cases} 0, & \text{se } |u_n(x)| \geqslant M \\ C + |f(x,u(x))|, & \text{se } |u_n(x)| < M, \end{cases}
$$

onde $C = \sup\left\{|f(x,t)| : x \in \overline{\Omega}, |t| < M\right\}$. Como g_n tende a 0 q.t.p. em Ω e está limitada por uma função em $L^1(\Omega)$, então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$
\left| \int_\Omega \left(|f(x,u_n)| - |f(x,u)|\right) \mathcal{X}_{|u_n|<M}\, dx \right| \to 0. \tag{1.11}
$$

Por outro lado, temos

$$
\{x \in \Omega : |u_n(x)| < M\} \setminus \{x \in \Omega : |u(x)| < M\} \subseteq \{x \in \Omega : |u(x)| \geqslant M\}.
$$

Assim, por (1.10), tem-se que

$$
\left| \int_\Omega |f(x,u)| \big(\mathcal{X}_{|u_n|<M} - \mathcal{X}_{|u|<M}\big)\, dx \right| \leqslant \int_{|u(x)| \geqslant M} |f(x,u(x))|\, dx \leqslant \epsilon. \tag{1.12}
$$

isso juntamente com (1.11) conclui a afirmação.

Portanto, de (1.7), (1.9), (1.10) e a Afirmação 1.1, concluímos a prova do Lema 1.3. □

Agora, enunciaremos a Desigualdade de Trudinger-Moser (veja [26, 31].)

Lema 1.4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, então

$$
e^{\alpha |u|^{N'}} \in L^1(\Omega) \text{ para todo } \alpha > 0.
$$

Além disso,

$$\sup_{u \in W_0^{1,N}(\Omega),\, \|u\| \leqslant 1} \int_\Omega e^{\left(\alpha |u|^{N'}\right)}\, dx \leqslant C(\Omega) \text{ para } \alpha \leqslant \alpha_N, \tag{1.13}$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e ω_{N-1} é a medida da esfera unitária $(N-1)$-dimensional. Observamos ainda que a desigualdade em (1.13) é ótima, ou seja, o supremo em (1.13) é infinito para $\alpha > \alpha_N$.

A seguir, afirmaremos alguns resultados sobre o funcional energia J associado ao problema (P) para usarmos no decorrer deste trabalho. Para uma consulta desses resultados, veja de Moraes [11].

Considere o funcional energia associado ao problema (P), $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt$.

Em virtude das imersões de Sobolev para $1 < p < N$ ou Desigualdade de Trudinger-Moser para $p = N$, o funcional J está bem definido. Além disso, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e

$$J'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Por uma solução fraca de (P), entendemos uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v = 0, \tag{1.14}$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ou seja, u é um ponto crítico do funcional energia J. Além disso, cada ponto crítico de J é uma solução fraca do problema (P).

1.2 Formulação Variacional

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados do Método Variacional. Enunciaremos o Teorema do Passo da Montanha quando o funcional J satisfaz a condição de Cerami. Para consulta dos próximos resultados veja Costa [9].

Seja $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 em um espaço de Banach X. Um número $c \in \mathbb{R}$ é chamado um valor crítico de J se $J(u) = c$ para algum ponto crítico $u \in X$. Seja K_c o conjunto de todos os *pontos críticos no nível* c, ou seja,

$$K_c = \{u \in X : J'(u) = 0 \text{ e } J(u) = c\}.$$

Além disso, vamos denotar por J^c o conjunto de todos os pontos de X abaixo do nível

c, isto é,

$$J^c = \{u \in X : J(u) \leqslant c\}.$$

Agora, vamos apresentar um resultado importante, conhecido como *Lema de Deformação*, que a grosso modo afirma quando (e como) pode-se deformar J^{c_1} em J^{c_2} para $c_1 > c_2$ ou ($c_1 < c_2$). Desde que X não é um espaço de Hilbert em geral, e uma vez que só estamos assumindo $J \in C^1$, vamos precisar usar a noção de campo pseudo-gradiente, devido a Palais [27].

Definição 1.2. Seja X um espaço de Banach e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Um campo *pseudo-gradiente* para J é uma aplicação localmente Lipschitziana $V : Y \to X$ que verifica

$$\|V(u)\| \leqslant \alpha \|J'(u)\|_* \text{ e } \langle J'(u), V(u)\rangle \geqslant \beta \|J'(u)\|_*,$$

onde $0 < \beta < \alpha$ e $Y = \{u \in X : J'(u) \neq 0\}$.

Exemplo 1.1. Seja X um espaço de Hilbert e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. O gradiente de J, $\nabla J : X \to X$, é definido através do Teorema da Representação de Riesz (veja Brezis [5]) de forma que $\nabla J(u) \in X$ é o único vetor tal que

$$\langle J'(u), h\rangle = h \cdot \nabla J(u), \quad \forall h \in X \text{ e } \|J'(u)\|_* = \|\nabla J(u)\|.$$

Portanto, ∇J é um campo *pseudo-gradiente* para J.

Dados $S \subset X$ e $\delta > 0$, a vizinhança de S com raio $\delta > 0$ denotamos por

$$S_\delta = \{u \in X : d(u, S) \leqslant \delta\},$$

onde $d(u, S) = inf\,\{\|u - v\| : v \in S\}$.

O próximo resultado garante que todo $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ possui um campo pseudo-gradiente.

Lema 1.5. Sejam X um espaço de Banach e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Então, existe um campo pseudo gradiente para J.

Demonstração: Veja a prova em Willem [33], pág, 19. □

A seguir, apresentaremos um resultado conhecido como Lema de Deformação que é bastante útil na prova do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 1.6. Sejam X um espaço de Banach e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (C) em $]c_1, c_2[$. Se $c \in]c_1, c_2[$ e S é qualquer vizinhança de K_c, então existe um homeomorfismo $\eta : X \longrightarrow X$ e constantes $\overline{\epsilon}$, $\epsilon > 0$ tais que $[c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}] \subset]c_1, c_2[$ satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $\eta\left(J^{c+\epsilon} \setminus S\right) \subset J^{c-\epsilon}$;

ii) $\eta\left(J^{c+\epsilon}\right) \subset J^{c-\epsilon}$ se $K_c = \varnothing$;

iii) $\eta(u) = u$ se $u \notin J^{-1}\left([c-\overline{\epsilon}, c+\overline{\epsilon}]\right)$.

Demonstração: Veja a prova em Bartolo-Benci-Fortunato [3], pág 5. □

Agora, devido a Cerami [6, 7], iremos apresentar uma versão do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [1, 28] que provou ser uma ferramenta poderosa no estudo de muitos problemas em equações diferenciais.

Teorema 1.7. *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach real e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, satisfazendo a condição $(C)_c$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$, $J(0) = 0$ e*

i) *existem constantes ρ, $\alpha > 0$ tais que $J|_{\partial B_\rho} \geqslant \alpha$,*

ii) *existe $e \in X \setminus B_\rho$ tal que $J(e) \leqslant 0$.*

Então,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} J(\gamma(t)) \geqslant \alpha,$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X),\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}$$

é um valor crítico de J.

Demonstração: Veja a prova em Grossinho [15], pág 16. □

Teorema 1.8. *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach real e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, satisfazendo $J(0) = 0$ e*

i) *existem constantes ρ, $\alpha > 0$ tais que $J|_{\partial B_\rho} \geqslant \alpha$,*

ii) *existe um $e \in X \setminus B_\rho$ tal que $J(e) \leqslant 0$.*

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} J(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X),\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}.$$

Então, J possui uma sequência $(C)_c$.

Demonstração: Veja a prova em Willem [33]. □

Capítulo 2

Crescimento Subcrítico

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução não trivial e não negativa para a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \quad\quad\quad\;\; \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$ e

$$-\Delta_p u := -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$$

é o *operador* $p-$*Laplaciano* com $1 < p \leqslant N$, e a não linearidade $f(x,s)$ tem crescimento subcrítico (polinomial e exponencial) satisfazendo as seguintes hipóteses:

(f_1) $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, $f(x,s) \geqslant 0,\ \forall (x,s) \in \Omega\times[0,\infty)$ e $f(x,0) = 0,\ \forall x \in \Omega$;

(f_2) $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^p} = \infty$ uniformemente em $x \in \Omega$ onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$;

(f_3) Existem $C_* \geqslant 0$, $\theta \geqslant 1$ tais que $H(x,t) \leqslant \theta H(x,s) + C_*$ para todo $0 < t < s$, $\forall x \in \Omega$ onde $H(x,s) = sf(x,s) - pF(x,s)$;

(f_4) $\displaystyle\overline{\lim_{s\to 0^+}} \frac{pF(x,s)}{s^p} < \lambda_1(\Omega)$ uniformemente em $x \in \Omega$, onde $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor do *operador* $p -$ *Laplaciano*, ou seja,

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{\|u\|^p}{\|u\|_p^p} : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}\right\}.$$

2.1 Caso Polinomial

Com o estudo do crescimento polinomial obtemos um resultado de existência de solução não trivial e não negativa quando $1 < p < N$ e $f(x,s)$ satisfaz uma determinada condição de crescimento polinomial subcrítico mais fraco do que os da literatura, a saber,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p^*-1}} = 0. \tag{2.1}$$

Esta condição é conhecida como *melhor crescimento polinomial subcrítico.*

Nesta seção, estudaremos o problema (P) quando $f(x,s)$ satisfaz (2.1) com o objetivo de provar o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Seja* $1 < p < N$ *e assuma que* $f(x,s)$ *tem o melhor crescimento polinomial subcrítico e satisfaz* (f_1), (f_2), (f_3) *e* (f_4). *Então, o problema* (P) *tem uma solução não trivial.*

Vamos mostrar que podemos usar o Teorema 1.7, conhecido como Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami, para obter o nosso resultado. Para isto, mostraremos que as hipóteses sobre a não linearidade $f(x,s)$ garantem que o funcional J associado ao problema (P) tem a geometria do passo da montanha.

Lema 2.2. Considere $f(x,s)$ com o melhor crescimento polinomial subcrítico e satisfazendo (f_1), (f_2), (f_3) e (f_4). Então,

i) existem constantes ρ, $\alpha > 0$ tais que $J|_{\partial B_\rho} \geqslant \alpha$,

ii) existe $e \in X \setminus B_\rho$ tal que $J(e) \leqslant 0$.

Demonstração: Temos por (f_4) que existe $\delta > 0$ e $\tau > 0$ tal que

$$\frac{pF(x,s)}{|s|^p} \leqslant \lambda_1 - \tau, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (0,\delta).$$

ou seja,

$$F(x,s) \leqslant \frac{(\lambda_1 - \tau)}{p}|s|^p, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (0,\delta). \tag{2.2}$$

Usando (2.1), dado $\epsilon > 0$ exite $s_0 > 0$ tal que

$$f(x,s) < \epsilon |s|^{p^*-1}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0, \infty),$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s} f(x,t)\,dt &\leqslant \int_{s_0}^{s} \epsilon |t|^{p^*-1}\,dt \\ &\leqslant \frac{\epsilon |s|^{p^*}}{p^*} - \frac{\epsilon |s_0|^{p^*}}{p^*}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
F(x,s) &= \int_0^{s_0} f(x,t)\,dt + \int_{s_0}^{s} f(x,t)\,dt \\
&\leqslant F(x,s_0) - \frac{\epsilon|s_0|^{p^*}}{p^*} + \frac{\epsilon|s|^{p^*}}{p^*}, \\
&\leqslant c_1\frac{|s|^{p^*}}{|s|^{p^*}} + \frac{\epsilon|s|^{p^*}}{p^*} \\
&\leqslant c_1\frac{|s|^{p^*}}{|s_0|^{p^*}} + \frac{\epsilon|s|^{p^*}}{p^*} \\
&\leqslant \left(\frac{c_1}{|s_0|^{p^*}} + \frac{\epsilon}{p^*}\right)|s|^{p^*} \\
&\leqslant c_2|s|^{p^*}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0,\infty). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Temos que

$$F(x,s) = 0, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (-\infty, 0]. \qquad (2.4)$$

Pela continuidade de F obtemos $c_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
F(x,s) &\leqslant c_3 \\
&\leqslant c_4|s|^{p^*} \quad \forall (x,s) \in \Omega \times [\delta, s_0], \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

onde

$$c_4 = \max_{\delta \leqslant s \leqslant s_0} \frac{c_3}{|s|^{p*}}.$$

Por (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) temos que

$$F(x,s) \leqslant \frac{1}{p}(\lambda_1 - \tau)|s|^p + c_4|s|^{p^*}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \qquad (2.6)$$

Segue, pela definição de λ_1, das imersões de Sobolev e (2.6) que

$$\begin{aligned}
J(u) &\geqslant \frac{1}{p}\|u\|^p - \left(\frac{\lambda_1 - \tau}{p}\right)\int_\Omega |u|^p\,dx - c_4\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx \\
&= \frac{1}{p}\|u\|^p - \left(\frac{\lambda_1 - \tau}{p}\right)\|u\|_p^p - c_4\|u\|_{p*}^{p*} \\
&\geqslant \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda_1 - \tau}{\lambda_1}\right)\|u\|^p - c_5\|u\|^{p^*} \\
&= \frac{1}{p}\left[1 - \left(\frac{\lambda_1 - \tau}{\lambda_1}\right)\right]\|u\|^p - c_5\|u\|^{p^*}.
\end{aligned}$$

Desde que $\tau > 0$ e $p^* > p$, podemos escolher $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ suficientemente pequenos, tais que

$$J(u) \geqslant \frac{1}{p}\left[1-\left(\frac{\lambda_1-\tau}{\lambda_1}\right)\right]\|u\|^p - c_3\|u\|^{p^*} \geqslant \alpha \text{ sempre que } \|u\| = \rho.$$

Logo, J satisfaz o item (i).
Agora, provaremos que J satisfaz o item (ii). Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \geqslant 0$. Por (f_2) temos que para cada $M > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$F(x,s) \geqslant Ms^p, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0, \infty). \tag{2.7}$$

Como F é contínua, então F é limitada no compacto $\overline{\Omega} \times [0, s_0]$, ou seja, existe $c > 0$ tal que

$$|F(x,s)| < c, \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times [0, s_0]. \tag{2.8}$$

Escolhendo $d > c + Ms_0^p$, por (2.8) obtemos

$$F(x,s) \geqslant -c \geqslant Ms^p - d, \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times [0, s_0]. \tag{2.9}$$

Logo, de (2.7) e (2.9), temos que

$$F(x,s) \geq Ms^p - d, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{1}{p}\|tu\|^p - \int_\Omega F(x,tu)\,dx \\ &\leq \frac{t^p}{p}\|u\|^p - Mt^p \int_\Omega |u|^p\,dx + \int_\Omega d\,dx \\ &= t^p\left(\frac{\|u\|^p}{p} - M\|u\|_p^p\right) + d\,|\Omega|\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Portanto, escolhendo $M > 0$ tal que $M > \dfrac{\|u\|^p}{p\|u\|_p^p}$ obtemos que $J(tu) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ como queríamos provar. $\square$

A seguir, mostraremos que o funcional J associado ao problema (P) satisfaz a condição de Cerami para todo $c \in \mathbb{R}$.

Lema 2.3. Assuma que $f(x,s)$ tem o melhor crescimento polinomial subcrítico e satisfaz (f_1), (f_2), (f_3) e (f_4). Então, toda sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ de Cerami para J é limitada.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência de Cerami no nível c, ou seja,

$$\begin{cases} J(u_n) \to c \\ (1 + \|u_n\|)\|J'(u_n)\|_* \to 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Desde que

$$J'(u_n)v = \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v - \int_\Omega f(x, u_n)v,$$

temos

$$\|J'(u_n)\|_* = \sup_{v \neq 0} \frac{|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v - \int_\Omega f(x, u_n)v|}{\|v\|}. \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12), tem-se que

$$\begin{cases} \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \int_\Omega F(x, u_n) \to c \\ (1 + \|u_n\|)|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v - \int_\Omega f(x, u_n)v| \leqslant \epsilon_n \|v\|, \end{cases} \tag{2.13}$$

onde $\epsilon_n \to 0$, quando $n \to \infty$.
Afirmamos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, suponha por contradição que $\|u_n\| \to \infty$. Defina $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ e note que $\|v_n\| = 1$. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, podemos supor, a menos de subsequência, que $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois (v_n) é limitada. Além disso,

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \|\nabla v_n\|_p^p \\ &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right|^p \\ &\geqslant \sum_{i=1}^N \int_{v_n \geqslant 0} \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right|^p \\ &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial v_n^+}{\partial x_i}\right|^p \\ &= \|\nabla v_n^+\|_p^p \\ &= \|v_n^+\|^p. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Logo, (v_n^+) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} v_n^+ \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega) \\ v_n^+ \to u \text{ em } L^p(\Omega),\ 1 \leqslant p < p^* \\ v_n^+(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{2.15}$$

Desde que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta, temos

$$\begin{cases} v_n \to v \text{ em } L^p(\Omega) \\ v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{2.16}$$

Por outro lado, sabemos que

$$v_n^+ = \frac{v_n + |v_n|}{2} \quad \text{e} \quad v^+ = \frac{v + |v|}{2}. \tag{2.17}$$

Assim, segue de (2.16) e (2.17) que

$$v_n^+(x) \to v^+(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Isso juntamente com (2.15) e a unicidade do limite q.t.p., implica que

$$v^+(x) = u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Portanto,

$$v_n^+ \rightharpoonup v^+. \tag{2.18}$$

Usando a compacidade da imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leqslant q < p^*$, obtemos que

$$\begin{cases} v_n^+ \to v^+ \text{ em } L^q(\Omega), \quad q \in [1, p^*) \\ v_n^+(x) \to v^+(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

Afirmamos que $v^+ = 0$ q.t.p. em Ω. Com efeito, suponha, por contradição, que

$$\Omega^+ = \big\{x \in \Omega : v^+(x) > 0\big\}$$

tenha medida positiva. Então, por (2.19) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$v_n^+(x) > 0 \text{ q.t.p. em } \Omega^+, \quad \forall n > n_0.$$

Segue que

$$\lim_{n\to\infty} u_n^+(x) = \lim_{n\to\infty} v_n^+(x)\|u_n\| = \infty \text{ q.t.p. em } \Omega^+.$$

Assim, por (f_2) temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x, u_n^+(x))}{|u_n^+(x)|^p} = \infty.$$

Desde que $v_n^+(x) \nrightarrow 0$ q.t.p. em Ω^+, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x, u_n^+(x))}{|u_n^+(x)|^p}|v_n^+(x)|= \infty \text{ q.t.p. em } \Omega^+. \tag{2.20}$$

No que segue, vamos precisar da seguinte afirmação:

Afirmação 2.1. Se A tem medida finita e $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \infty$ q.t.p. em A, então

$$\int_A \varliminf_{n\to\infty} g_n(x) = \infty.$$

De fato, dado qualquer $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$g_n(x) > M, \quad \forall n > n_0 \text{ q.t.p. em } A,$$

o que implica que

$$\varliminf_{n\to\infty} g_n(x) \geqslant M \text{ q.t.p. em } A,$$

o que acarreta que

$$\int_A \varliminf_{n\to\infty} g_n(x) > M|A|. \tag{2.21}$$

Como $M > 0$ é arbitrário, então fazendo $M \to \infty$ em (2.21), obtemos

$$\int_A \varliminf_{n\to\infty} g_n(x) = \infty.$$

De (2.20) e pela Afirmação 2.1, temos que

$$\int_{\Omega^+} \varliminf_{n\to\infty} \frac{F(x, u_n^+(x))}{|u_n^+(x)|^p}|v_n^+(x)|^p= \infty. \tag{2.22}$$

Além disso, de (2.13), temos que

$$\|u_n\|^p = pc + p\int_\Omega F(x, u_n^+(x))\, dx + o(1).$$

Assim,

$$\int_\Omega F(x, u_n^+(x))\, dx \to \infty,$$

pois, $\|u_n\| \to \infty$. Por outro lado,

$$\int_\Omega F(x, u_n^+(x))\, dx = \int_{\Omega^+} F(x, u_n^+(x))\, dx.$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_n^+(x))}{\|u_n\|^p}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|u_n\|^p}\int_{\Omega^+}F(x,u_n^+(x))\,dx\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\Omega^+}F(x,u_n^+(x))}{pc+p\int_\Omega F(x,u_n^+(x))\,dx+o(1)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{pc}{\int_{\Omega^+}F(x,u_n^+(x))\,dx}+p+\dfrac{o(1)}{\int_{\Omega^+}F(x,u_n^+(x))\,dx}}\\
&= \frac{1}{p}. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Por (f_1) temos que $F(x,s)\geqslant 0,\ \ \forall (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}$. Dessa forma, $\left\{\dfrac{F(x,u_n^+)}{|u_n^+|^p}|v_n^+|^p\right\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não negativas e pelo Lema de Fatou tem-se

$$
\int_\Omega \varliminf_{n\to\infty}\frac{F(x,u_n^+(x))}{|u_n^+(x)|^p}|v_n^+(x)|^p \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_n^+(x))}{|u_n^+(x)|^p}|v_n^+(x)|^p.
$$

Isso juntamente com (2.22) e (2.23) implica uma contradição. Portanto, $v^+=0$ q.t.p. em Ω. Segue, pela condição (2.1), que dado $\epsilon>0$ existe $s_0>0$ tal que

$$
f(x,s)\leqslant \epsilon|s|^{p^*-1},\quad \forall (x,s)\in\Omega\times(s_0,\infty).
$$

Logo,

$$
\int_{s_0}^{s} f(x,t)\,dt\leqslant \frac{\epsilon|s|^{p^*}}{p^*}-\frac{\epsilon|s_0|^{p^*}}{p^*},\quad \forall (x,s)\in\Omega\times(s_0,\infty).
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
F(x,s) &= \int_0^{s_0} f(x,t)\,dt+\int_{s_0}^{s} f(x,t)\,dt\\
&\leqslant F(x,s_0)-\frac{\epsilon|s_0|^{p^*}}{p^*}+\frac{\epsilon|s|^{p^*}}{p^*}\\
&= c_1+\frac{\epsilon|s|^{p^*}}{p^*},\quad \forall (x,s)\in\Omega\times[s_0,\infty). \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Por (f_4), existem δ, $c_2>0$ tais que

$$
F(x,s)\leqslant c_2|s|^p,\quad \forall (x,s)\in\Omega\times(0,\delta) \qquad (2.25)
$$

Como F é contínua, existe $c_3>0$ tal que

$$
F(x,s)\leqslant c_3\quad \forall (x,s)\in\overline{\Omega}\times[\delta,s_0]. \qquad (2.26)
$$

Além disso,

$$F(x,s)=0, \quad \forall (x,s)\in\Omega\times(-\infty,0]. \tag{2.27}$$

De (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27), temos que

$$\begin{aligned} F(x,s) &\leqslant c_1+c_3+c_2|s|^p+\frac{\epsilon}{p^*}|s|^{p^*} \\ &\leqslant \left(\frac{c_1+c_3}{|s|^p}+c_2\right)|s|^p+\frac{\epsilon}{p^*}|s|^{p^*} \\ &\leqslant c|s|^p+\frac{\epsilon}{p^*}|s|^{p^*}, \quad \forall (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde

$$c=\max_{\delta\leqslant s\leqslant s_0}\left(\frac{c_1+c_3}{|s|^p}\right).$$

Assim, por (2.28), dado $R>0$ existe $c=c(R)>0$ tal que

$$F(x,s)\leqslant c|s|^p+\frac{1}{R^{p^*}}|s|^{p^*}, \quad \forall (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Seja $t_n\in[0,1]$ tal que

$$J(t_nu_n)=\max_{t\in[0,1]}J(tu_n).$$

Como $\|u_n\|\to\infty$, temos para n suficientemente grande que

$$J(t_nu_n)\geqslant J\left(\frac{R}{\|u_n\|}u_n\right)=J(Rv_n). \tag{2.30}$$

Observando que

$$\int_\Omega F(x,v_n)\,dx=\int_\Omega F(x,v_n^+)\,dx,$$

obtemos

$$\begin{aligned} pJ(Rv_n) &= R^p\|v_n\|^p-p\int_\Omega F(x,Rv_n)\,dx \\ &= R^p-p\int_\Omega F(x,Rv_n^+)\,dx \\ &\geqslant R^p-pcR\int_\Omega |v_n^+|^p\,dx-p\int_\Omega |v_n^+|^{p^*}\,dx. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Desde que $v_n^+\rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\|v_n^+\|\leqslant C \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^{p^*}(\Omega)$, então

$$\int_\Omega |v_n^+|^{p^*}\, dx \leqslant C(\Omega).$$

Por outro lado, a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*)$ é compacta. Logo,

$$\int_\Omega |v_n^+|^p\, dx \to 0.$$

Assim, fazendo $n \to \infty$, depois $R \to \infty$ em (2.31) e usando (2.30), obtemos

$$J(t_n u_n) \to \infty. \tag{2.32}$$

Como $J(0) = 0$ e $J(u_n) \to c$, podemos supor que $t_n \in (0, 1)$. Pelo fato de t_n ser um ponto de máximo local, temos que

$$J'(t_n u_n) t_n u_n = 0, \tag{2.33}$$

isto é,

$$t_n^p \|u_n\|^p = \int_\Omega f(x, t_n u_n) t_n u_n\, dx.$$

Além disso, por (2.11) temos que

$$\begin{cases} \|u_n\|^p = p\int_\Omega F(x, u_n)\, dx + pc + o_n(1) \\ \|u_n\|^p = \int_\Omega f(x, u_n) u_n\, dx + o_n(1). \end{cases}$$

Assim,

$$\int_\Omega [f(x, u_n) u_n - pF(x, u_n)]\, dx = pc + o_n(1).$$

Isso juntamente com (f_3) implica que

$$\begin{aligned} pJ(t_n u_n) &= t_n^p \|u_n\|^p - p\int_\Omega F(x, t_n u_n)\, dx \\ &= \int_\Omega [f(x, t_n u_n) t_n u_n - pF(x, t_n u_n)]\, dx \\ &\leqslant \int_\Omega (\theta[f(x, u_n) u_n - pF(x, u_n)] + C_*)\, dx \\ &\leqslant \theta \int_\Omega [f(x, u_n) u_n - pF(x, u_n)]\, dx + C_* |\Omega| \\ &\leqslant \theta \int_\Omega (pc + o(1))\, dx + C_* |\Omega| \\ &= O(1), \end{aligned}$$

contradizendo (2.32). Isso prova que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Lema 2.4. Suponha que $f(x,s)$ tem o melhor crescimento polinomial subcrítico e satisfaz (f_1), (f_2), (f_3) e (f_4). Então, o funcional J satisfaz a condição de Cerami para todo $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência de Cerami no nível c para o funcional J. Pelo Lema 2.3 já sabemos que toda sequência de Cerami é limitada. Desde que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Afirmamos que, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, note que

$$J'(u_n)(u_n-u) - J'(u)(u_n-u) = A(n) - B(n), \tag{2.34}$$

onde

$$A(n) = \int_\Omega [|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u]\nabla(u_n-u)\,dx$$

e

$$B(n) = \int_\Omega [f(x,u) - f(x,u_n)](u_n-u)\,dx.$$

Observe que o lado esquerdo de (2.34) tende a zero. De fato, usando que $\|J'(u_n)\| \to 0$, $u_n - u \rightharpoonup 0$ e $J'(u) \in W_0^{-1,p}(\Omega)$ temos

$$J'(u_n)(u_n-u) \to 0 \quad \text{e} \quad J'(u)(u_n-u) \to 0.$$

Afirmamos que $B(n) \to 0$ quando $n \to \infty$. De fato, uma vez que $f(x,s)$ satisfaz (2.1), dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar uma contante $c(\epsilon) > 0$ tal que

$$f(x,s) \leqslant \epsilon|s|^{p^*-1} + c(\epsilon), \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.35}$$

Com efeito, dado $\epsilon > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$f(x,s) \leqslant \epsilon|s|^{p^*-1}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0, \infty). \tag{2.36}$$

Como $f(x,s)$ é contínua e $f(x,s) = 0, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (-\infty, 0]$, existe $c > 0$ tal que

$$f(x,s) \leqslant c, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (-\infty, s_0]. \tag{2.37}$$

Observando que a constante c acima depende de s_0 que por sua vez depende de ϵ e usando (2.36) e (2.37) concluímos que vale (2.35).

Segue por (2.35) que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\,dx\right| &\leqslant \int_\Omega |f(x,u_n)||(u_n-u)|\,dx\\ &\leqslant \int_\Omega \left(c+\epsilon|u_n|^{p^*-1}\right)|u_n-u|\,dx\\ &= c\int_\Omega |u_n-u|\,dx+\epsilon\int_\Omega |u_n-u||u_n|^{p^*-1}\,dx,\end{aligned}$$

usando que $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q\in[1,p^*]$ e a desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $\dfrac{p^*}{p^*-1}$ e p^* obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\,dx\right| &\leqslant c\int_\Omega |u_n-u|\,dx\\ &+ \epsilon\left(\int_\Omega |u_n-u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}dx\left(\int_\Omega \left(|u_n|^{p^*-1}\right)^{\frac{p^*}{p^*-1}}\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}}dx\\ &\leqslant c\int_\Omega |u_n-u|\,dx+\epsilon C(\Omega).\end{aligned}$$

Uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, usando que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q\in[1,p^*)$ é compacta, obtemos

$$\int_\Omega |u_n-u|\,dx\to 0.$$

Como $\epsilon>0$ é arbitrário, concluímos que

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\,dx\to 0. \tag{2.38}$$

Analogamente, obtemos que

$$\int_\Omega f(x,u)(u_n-u)\,dx\to 0. \tag{2.39}$$

Segue por (2.38) e (2.39) que $B(n)\to 0$.
Logo,

$$\int_\Omega \left[|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right]\nabla(u_n-u)\,dx\to 0. \tag{2.40}$$

Usando o Corolário 1.2, obtemos

$$C_p\int_\Omega |\nabla u_n-\nabla u|^p\,dx\leqslant \int_\Omega \left[|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right]\nabla(u_n-u)\,dx\to 0.$$

Portanto,

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

e assim J satisfaz $(C)_c$. $\square$

Prova do Teorema 2.1: Pelos Lemas 2.2 e 2.4, aplicando o Teorema 1.7, J possui um ponto crítico u não trivial no nível c. Resta verificar que u é não negativa. Note que

$$u = u^+ - u^-.$$

Escolhendo $v = u^-$ como função teste em (1.14) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u^- - \int_\Omega f(x,u)u^- = 0,$$

assim,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega |\nabla u^-|^p &= \int_\Omega f(x,u)u^- \\ &= \int_\Omega f(x,u^+)u^- \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que $u^- = 0$. Consequentemente, $u = u^+ \geqslant 0$. Portanto, o Teorema 2.1 está provado.

2.2 Caso Exponencial

Nesta seção, estudaremos o problema (P) no caso $p = N \geqslant 2$ e quando $f(x,s)$ satisfaz o *crescimento exponencial subcrítico*, ou seja,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{|f(x,s)|}{e^{\alpha|s|^{N'}}} = 0 \text{ uniformemente em } x \in \Omega \text{ para todo } \alpha > 0, \tag{2.41}$$

sem satisfazer a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Iremos provar o seguinte resultado.

Teorema 2.5. *Suponha que $p = N$ e $f(x,s)$ tem o crescimento exponencial subcrítico e satisfaz (f_1), (f_2), (f_3) e (f_4). Então, o problema* (P) *tem uma solução não trivial.*

Análogo ao que foi feito na seção anterior usaremos o Teorema 1.7 para obtermos esse resultado. Inicialmente, verifiquemos as propriedades geométricas do Teorema do Passo da Montanha para o funcional J.

Lema 2.6. Suponha que $f(x,s)$ satisfaz (f_2). Então $J(tu) \to -\infty$ quando t $\to \infty$ para toda função não negativa $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\}$.

Demonstração: Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $u \geq 0$. Por (f_2) temos que para cada $M > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$F(x,s) \geqslant Ms^N, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0, \infty). \tag{2.42}$$

Como F é contínua, então F é limitada no compacto $\overline{\Omega} \times [0, s_0]$, ou seja, existe $c > 0$ tal que

$$|F(x,s)| < c, \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times [0, s_0]. \tag{2.43}$$

Tome $d > c + Ms_0^N$. Assim, por (2.43), obtemos

$$F(x,s) \geq -c \geq Ms^N - d, \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times [0, s_0]. \tag{2.44}$$

Logo, de (2.42) e (2.44), temos que

$$F(x,s) \geq Ms^N - d, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{1}{N}\|tu\|^N - \int_\Omega F(x,tu)\,dx \\ &\leq \frac{t^N}{N}\|u\|^N - Mt^N \int_\Omega |u|^N\,dx + \int_\Omega d\,dx \\ &= t^N \left(\frac{\|u\|^N}{N} - M\|u\|_N^N \right) + d\,|\Omega|\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Portanto, escolhendo $M > 0$ tal que $M > \dfrac{\|u\|^N}{N\|u\|_N^N}$ obtemos que $J(tu) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ como queríamos provar. $\square$

Lema 2.7. Suponha que $f(x,s)$ tem o crescimento exponencial subcrítico e satisfaz (f_1) e (f_4). Então, existem $\rho, \delta > 0$ tais que $J(u) \geqslant \delta$ se $\|u\| = \rho$.

Demonstração: Temos por (f_4) que existe $\delta > 0$ e $\tau > 0$ tal que

$$F(x,s) \leqslant \frac{(\lambda_1 - \tau)}{N}|s|^N, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (0, \delta). \tag{2.46}$$

Pela condição (2.41), dado $\epsilon > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$f(x,s) \leqslant \epsilon e^{\alpha |s|^{N'}}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0, \infty) \text{ e } \alpha > 0.$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
F(x,s) &= \int_0^{s_0} f(x,t)\,dt + \int_{s_0}^{s} f(x,t)\,dt \\
&\leqslant F(x,s_0) + \epsilon \int_{s_0}^{s} e^{\alpha|t|^{N'}}\,dt \\
&\leqslant F(x,s_0) + \epsilon(s-s_0)e^{\alpha|s|^{N'}} \\
&\leqslant F(x,s_0) + \epsilon c e^{\alpha|s|^{N'}} e^{\alpha|s|^{N'}} \\
&\leqslant F(x,s_0) + \epsilon c e^{2\alpha|s|^{N'}} \\
&\leqslant \left(\frac{F(x,s_0)}{e^{2\alpha|s_0|^{N'}}} + c\epsilon\right) e^{2\alpha|s|^{N'}} \\
&\leqslant \frac{O(1)}{|s_0|^q} e^{2\alpha|s|^{N'}} |s|^q \\
&= O(1)e^{2\alpha|s|^{N'}}|s|^q, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0,\infty) \text{ e } q > N. \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

Usando que $F(x,s)$ é contínua e $F(x,s) = 0$ para todo $(x,s) \in \Omega \times (-\infty, 0]$, obtemos $c_1 > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
F(x,s) &\leqslant c_1 \\
&\leqslant c_2 e^{\kappa|s|^{N'}}|s|^q, \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times ((-\infty,0] \cup [\delta, s_0]), \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

onde

$$
c_2 = \max_{\delta \leqslant s \leqslant s_0} \frac{c_1}{e^{\kappa|s|^{N'}}|s|^q}.
$$

Logo, de (2.46), (2.47) e (2.48), obtemos

$$
F(x,s) \leqslant \frac{(\lambda_1 - \tau)|s|^N}{N} + ce^{\kappa|s|^{N'}}|s|^q \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ e } q > N. \qquad (2.49)
$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega e^{\kappa|u|^{N'}}|u|^q\,dx &\leqslant \left(\int_\Omega e^{\kappa r|u|^{N'}}\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega |u|^{r'q}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leqslant \int_\Omega e^{\kappa r\|u\|^{N'}\left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{N'}}\,dx \left(\int_\Omega |u|^{r'q}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}}.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Trudinger-Moser 1.13, se $r > 1$ suficientemente próximo a 1 e $\|u\| < \sigma$, onde $\kappa r\sigma^{N'} < \alpha_N$, então

$$
\int_\Omega e^{\kappa r\|u\|^{N'}\left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{N'}}\,dx \leqslant C(\Omega).
$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega e^{\kappa|u|^{N'}}|u|^q\,dx \leqslant C\left(\int_\Omega |u|^{r'q}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}}. \tag{2.50}$$

Segue por (2.49) que

$$J(u) \geqslant \frac{1}{N}\|u\|^N - \frac{(\lambda_1-\tau)}{N}\|u\|_N^N - C\int_\Omega e^{\kappa|u|^{N'}}|u|^q\,dx.$$

Usando as imersões de Sobolev, a definição de λ_1 e (2.50), obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\geqslant \frac{1}{N}\left[1-\frac{(\lambda_1-\tau)}{\lambda_1}\right]\|u\|^N - C\|u\|_{r'q}^q \\ &\geqslant \frac{1}{N}\left[1-\frac{(\lambda_1-\tau)}{\lambda_1}\right]\|u\|^N - C\|u\|^q. \end{aligned}$$

Desde que $\tau > 0$ e $q > N$, podemos escolher $\rho > 0$ e $\sigma > 0$, suficientemente pequenos, tais que

$$\begin{aligned} J(u) &\geqslant \frac{1}{N}\left[1-\left(\frac{\lambda_1-\tau}{\lambda_1}\right)\right]\|u\|^N - C\|u\|^q \\ &= \left[\frac{1}{N}\left(1-\left(\frac{\lambda_1-\tau}{\lambda_1}\right)\right) - C\|u\|^{q-N}\right]\|u\|^N \\ &\geqslant \sigma \text{ sempre que } \|u\| = \rho. \end{aligned}$$

□

Agora, mostraremos que o funcional J associado ao problema (P) satisfaz a condição de Cerami para todo $c \in \mathbb{R}$.

Lema 2.8. Assuma que (f_1), (f_2), (f_3), e (f_4) valem. Se $f(x,s)$ tem o crescimento exponencial subcrítico, então toda sequência $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ de Cerami para J é limitada.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ de Cerami no nível c, ou seja,

$$\begin{cases} J(u_n) \to c \\ (1+\|u_n\|)\|J'(u_n)\|_* \to 0, \end{cases} \tag{2.51}$$

isto é,

$$\begin{cases} \frac{1}{N}\|u_n\|^N - \int_\Omega F(x,u_n) \to c \\ (1+\|u_n\|)|\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla v - \int_\Omega f(x,u_n)v| \leqslant \epsilon_n\|v\|, \end{cases} \tag{2.52}$$

onde $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$.
Afirmamos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. De fato, suponha por contradição que

$\|u_n\| \to \infty$. Defina $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ e note que $\|v_n\| = 1$. Como $W_0^{1,N}(\Omega)$ é reflexivo, podemos supor, a menos de subsequência, que $v_n \rightharpoonup v \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Seguindo de forma análoga ao que foi feito na prova do Lema 2.3 mostramos que $v_n^+ \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Primeiro mostramos que $v_n^+ \rightharpoonup v^+$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, depois supondo que

$$\Omega^+ = \Big\{x \in \Omega : v^+(x) > 0\Big\}$$

tem medida positiva, obtemos uma contradição, assim, $v^+ = 0$ q.t.p. em Ω. Usando que a imersão $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta para todo $q \in [1, \infty)$, temos que

$$\begin{cases} v_n^+ \to v^+ \text{ em } L^q(\Omega), \quad q \in [1, \infty) \\ v_n^+(x) \to v^+(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{2.53}$$

Note que, dado qualquer $R > 0$ existe $C = C(R) > 0$ tal que

$$F(x, s) \leqslant C|s| + e^{\left(\frac{\alpha_N}{R^{N'}}|s|^{N'}\right)} \quad \forall (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.54}$$

De fato, pela condição (2.41), dado $\epsilon > 0$ para qualquer $R > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$f(x, s) \leqslant \epsilon e^{\left(\frac{\alpha_N}{2R^{N'}}|s|^{N'}\right)}, \quad \forall (x, s) \in \Omega \times (s_0, \infty).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} F(x, s) &\leqslant F(x, s_0) + \epsilon c_1 e^{\left(\frac{\alpha_N}{2R^{N'}}|s|^{N'}\right)} \\ &\leqslant \left(\frac{F(x, s_0)}{\epsilon e^{\left(\frac{\alpha_N}{2R^{N'}}|s_0|^{N'}\right)}} + c_1\right) \epsilon e^{\left(\frac{\alpha_N}{2R^{N'}}|s|^{N'}\right)} \\ &\leqslant \epsilon c_2 e^{\left(\frac{\alpha_N}{2R^{N'}}|s|^{N'}\right)} e^{\left(\frac{\alpha_N}{2R^{N'}}|s|^{N'}\right)} \\ &\leqslant \epsilon c_2 e^{\left(\frac{\alpha_N}{R^{N'}}|s|^{N'}\right)}, \quad \forall (x, s) \in \Omega \times (s_0, \infty). \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal modo que $\epsilon c_2 < 1$ obtemos

$$F(x, s) \leqslant e^{\left(\frac{\alpha_N}{R^{N'}}|s|^{N'}\right)}, \quad \forall (x, s) \in \Omega \times (s_0, \infty). \tag{2.55}$$

Por (2.46), existe $c_3 > 0$ tal que

$$F(x, s) \leqslant c_3|s|^N, \quad \forall (x, s) \in \Omega \times (0, \delta). \tag{2.56}$$

Além disso,

$$F(x, s) = 0, \quad \forall (x, s) \in \Omega \times (-\infty, 0]. \tag{2.57}$$

Usando que $F(x,s)$ é continua, obtemos $c_4 > 0$ tal que

$$F(x,s) \leqslant c_4, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times [\delta, s_0]. \tag{2.58}$$

Portanto, de (2.55), (2.56), (2.57) e (2.58), obtemos que

$$F(x,s) \leqslant C|s|^N + e^{\left(\frac{\alpha_N}{R^{N'}}|s|^{N'}\right)}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.59}$$

onde

$$C = \max_{\delta \leqslant s \leqslant s_0} \left(\frac{c_4}{|s|^N} + c_3 \right).$$

Para concluirmos basta observar que C depende de s_0 que depende de R.
Seja $t_n \in [0,1]$ tal que

$$J(t_n u_n) = \max_{t \in [0,1]} J(t u_n).$$

Desde que $\|u_n\| \to \infty$, temos para n suficientemente grande que

$$J(t_n u_n) \geqslant J\left(\frac{R}{\|u_n\|} u_n \right) = J(R v_n). \tag{2.60}$$

Por (2.54) e observando que

$$\int_\Omega F(x, v_n(x))\, dx = \int_\Omega F(x, v_n^+(x))\, dx,$$

obtemos

$$\begin{aligned} NJ(Rv_n) &= R^N - N \int_\Omega F(x, R v_n^+(x))\, dx \\ &\geqslant R^N - NCR \int_\Omega |v_n^+(x)|\, dx - N \int_\Omega e^{\left(\frac{\alpha_N}{R^{N'}}|R v_n^+(x)|^{N'}\right)}\, dx \\ &= R^N - NCR \int_\Omega |v_n^+(x)|\, dx - N \int_\Omega e^{\alpha_N |v_n^+(x)|^{N'}}\, dx. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Como $e^{\alpha_N |v_n^+(x)|^{N'}} \geqslant e^{\alpha_N |v_n(x)|^{N'}}, \quad \forall x \in \Omega$, então

$$\int_\Omega e^{\alpha_N |v_n^+(x)|^{N'}}\, dx \geqslant \int_\Omega e^{\alpha_N |v_n(x)|^{N'}}\, dx.$$

Isso juntamente com (2.61) implica que

$$NJ(Rv_n) \geqslant R^N - NCR \int_\Omega |v_n^+(x)|^{N'}\, dx - \int_\Omega e^{\alpha_N |v_n(x)|^{N'}}\, dx. \tag{2.62}$$

Uma vez que $\|v_n\| = 1$, pelo Lema 1.4, temos que

$$\int_\Omega e^{\alpha_N |v_n(x)|^{N'}}\, dx \leqslant C(\Omega). \tag{2.63}$$

Como $v_n^+ \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e a imersão $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ é compacta, então

$$\int_\Omega |v_n(x)|\, dx \to 0. \tag{2.64}$$

Assim, usando (2.60), (2.62) e (2.63), obtemos

$$NJ(t_n u_n) \geqslant R^N - NCR \int_\Omega |v_n^+(x)|^{N'}\, dx - C(\Omega). \tag{2.65}$$

Tomando o limite em (2.65) com $n \to \infty$ e usando (2.64), temos que

$$\lim_{n\to\infty} NJ(t_n u_n) \geqslant R^N - NC(\Omega).$$

Agora, fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$NJ(u_n) \to \infty. \tag{2.66}$$

Como $J(0) = 0$ e $J(u_n) \to c$, podemos supor que $t_n \in (0, 1)$. Pelo fato de t_n ser um ponto de máximo local, temos que

$$J'(t_n u_n) t_n u_n = 0, \tag{2.67}$$

donde

$$t_n^N \|u_n\|^N = \int_\Omega f(x, t_n u_n) t_n u_n\, dx. \tag{2.68}$$

Além disso, por (2.52), temos que

$$\left(\|u_n\|^N - N \int_\Omega F(x, u_n)\, dx - Nc \right) \to 0$$

e

$$\left(\|u_n\|^N - \int_\Omega f(x, u_n) u_n\, dx \right) \to 0.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \int_\Omega [f(x, u_n)u_n - NF(x, u_n)]\, dx &= \|u_n\|^N + Nc - \|u_n\|^N + o_n(1) \\ &= Nc + o_n(1). \end{aligned} \tag{2.69}$$

Portanto,

$$NJ(t_n u_n) = t_n^N \|u_n\|^N - N \int_\Omega F(x, t_n u_n)\, dx.$$

Usando (2.68), obtemos

$$NJ(t_n u_n) = \int_\Omega [f(x, t_n u_n) u_n - NF(x, t_n u_n)]\, dx,$$

isso juntamente com (f_3) implica que existe $C_* \geqslant 0$ e $\theta \geqslant 1$ tais que

$$NJ(t_n u_n) \leqslant \int_\Omega (\theta[f(x, u_n) u_n - NF(x, u_n)] + C_*)\ dx.$$

Por (2.69), temos que

$$NJ(t_n u_n) \leqslant \theta \int_\Omega (Nc + o(1))\, dx + \int_\Omega C_*\, dx \leqslant O(1),$$

o que é uma contradição a (2.66). Isso prova que (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. □

Lema 2.9. Suponha que $f(x, s)$ tem crescimento exponencial subcrítico e satisfaz (f_1), (f_2), (f_3) e (f_4). Então, o funcional J satisfaz a condição de Cerami para todo $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ uma sequência de Cerami no nível c para o funcional J. Pelo Lema 2.8 já sabemos que toda sequência de Cerami é limitada. Desde que $W_0^{1,N}(\Omega)$ é reflexivo e $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para $p \geqslant 1$, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\begin{cases} \|u_n\| \leqslant K \\ u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \\ u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \\ u_n \to u \text{ em } L^q(\Omega), \quad \forall q \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.70}$$

Afirmamos que a menos de subsequência $u_n \to u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. De fato, note que

$$J'(u_n)(u_n - u) - J'(u)(u_n - u) = A(n) - B(n), \tag{2.71}$$

onde

$$A(n) = \int_\Omega [|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u] \nabla (u_n - u)\, dx$$

e

$$B(n) = \int_\Omega [f(x, u) - f(x, u_n)](u_n - u)\, dx.$$

Observe que o lado direto de (2.34) tende a zero. De fato, usando que $\|J'(u_n)\| \to 0$,

$u_n - u \rightharpoonup 0$ e $J'(u) \in W_0^{-1,p}(\Omega)$ temos

$$J'(u_n)(u_n - u) \to 0 \quad \text{e} \quad J'(u)(u_n - u) \to 0.$$

Afirmamos que $B(n) \to 0$ quando $n \to \infty$. De fato, uma vez que $f(x,s)$ satisfaz (2.41), podemos encontrar uma constante $c_k > 0$ tal que

$$f(x,s) \leqslant c_k e^{\frac{\alpha_N}{2kN'}|s|^{N'}}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.72}$$

Com efeito, temos pela condição (2.41) que

$$f(x,s) \leqslant \epsilon e^{\frac{\alpha_N}{2kN'}|s|^{N'}}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0, \infty). \tag{2.73}$$

Como $f(x,s)$ é contínua e $f(x,s) = 0$ para todo $(x,s) \in \Omega \times (-\infty, 0]$, existe $c_1 = c_1(s_0)$ tal que

$$f(x,s) \leqslant c_1, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (-\infty, s_0],$$

o que implica que

$$f(x,s) \leqslant \frac{c_1}{e^{\frac{\alpha_N}{2kN'}|s_0|^{N'}}} e^{\frac{\alpha_N}{2kN'}|s|^{N'}} \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (-\infty, s_0]. \tag{2.74}$$

Por (2.73) e (2.74) obtemos (2.72). Para concluir basta observar que c depende de s_0 que depende de k. Pela desigualdade de Hölder e (2.72), segue que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)\, dx \right| &\leqslant \int_\Omega |f(x,u_n)|\, |u_n - u| \; dx \\
&\leqslant \left(\int_\Omega |f(x,u_n)|^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_n - u| \; dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int_\Omega \left(e^{\frac{\alpha_N}{2kN'}|u|^{N'}} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n - u\|_2 \\
&\leqslant c \left(\int_\Omega e^{\frac{\alpha_N}{kN'}\|u_n\|^{N'} \left(\frac{|u|}{\|u_n\|} \right)^{N'}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n - u\|_2 \\
&\leqslant C \|u_n - u\| \to 0.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Analogamente, obtemos que

$$\int_\Omega f(x,u)(u_n - u)\, dx \to 0. \tag{2.76}$$

Segue por (2.75) e (2.76) que $B(n) \to 0$. Dessa forma,

$$\int_\Omega \left[|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{N-2}\nabla u\right] \nabla(u_n - u)\, dx \to 0. \tag{2.77}$$

Usando o Corolário 1.2, obtemos

$$C_N \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^N \, dx \leqslant \int_\Omega \left[|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{N-2}\nabla u\right] \nabla(u_n - u)\, dx \to 0.$$

Portanto,

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega)$$

e assim J satisfaz $(C)_c$. □

Prova do Teorema 2.5: Pelos Lemas 2.6, 2.7 e 2.9, aplicando o Teorema 1.7, J posui um ponto crítico u não trivial no nível c. Resta verificar que u é não negativa. Note que

$$u = u^+ - u^-.$$

Escolhendo $v = u^-$ como função teste em (1.14) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla u^- - \int_\Omega f(x,u)u^- = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega |\nabla u^-|^N &= \int_\Omega f(x,u)u^- \\ &= \int_\Omega f(x,u^+)u^- \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que $u^- = 0$. Logo, $u = u^+ \geqslant 0$. Portanto, o Teorema 2.5 está provado. □

Capítulo 3

Crescimento Exponencial Crítico

Neste capítulo, estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u \ = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ \qquad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$ e,

$$-\Delta_p u := -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$$

é o *operador* $p-$ *Laplaciano* com $p = N$, e a não linearidade $f(x,s)$ tem *crescimento exponencial crítico* em $\alpha_0 > 0$, ou seja, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{|f(x,s)|}{e^{\alpha|s|^{N'}}} = \begin{cases} 0, & \text{uniformemente em } x \in \Omega \text{ para todo } \alpha > \alpha_0 \\ \infty, & \text{uniformemente em } x \in \Omega \text{ para todo } \alpha < \alpha_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

e satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1) $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, $f(x,s) \geqslant 0$, $\forall (x,s) \in \Omega\times[0,\infty)$ e $f(x,0) = 0$, $\forall x \in \Omega$;

(f_2) $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^N} = \infty$ uniformemente em $x \in \Omega$ onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$;

(f_3) $H(x,t) \leqslant H(x,s)$ para todo $0 < t < s$, $\forall x \in \Omega$ onde $H(x,s) = sf(x,s) - NF(x,s)$;

(f_4) $\displaystyle\overline{\lim_{s\to 0^+}} \frac{NF(x,s)}{|s|^N} < \lambda_1(\Omega)$ uniformemente em $x \in \Omega$, onde $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor do *operador* $N-$ *Laplaciano*, ou seja,

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \frac{\|u\|^N}{\|u\|_N^N} : u \in W_0^{1,N} \setminus \{0\} \right\};$$

(f_5) Se d é o raio da maior bola aberta contida em Ω, vamos assumir que

$$\lim_{s\to\infty} sf(x,s)e^{-\alpha_0|s|^{N'}} \geqslant \beta > \left(\frac{N}{d}\right)^N \frac{1}{\mathcal{M}\alpha_0^{N-1}} \text{ uniformemente em } x \in \Omega,$$

onde

$$\mathcal{M} = \lim_{n\to\infty} n \int_0^1 e^{n\left(t^{N'}-t\right)}\, dt;$$

(f_6) f está na classe L_0, isto é, para qualquer $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$, se $\begin{cases} u_n \rightharpoonup 0 \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \\ f(x,u_n) \to 0 \text{ em } L^1(\Omega) \end{cases}$

então $F(x,u_n) \to 0$ em $L^1(\Omega)$.

Iremos provar o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Suponha que* $p = N$ *e* $f(x,s)$ *tem o crescimento exponencial crítico em* $\alpha_0 > 0$ *e satisfaz* (f_1), (f_2), (f_3), (f_4), (f_5) *e* (f_6), *com* $C_* = 0$ *e* $\theta = 1$ *em* (f_3). *Então, o problema* (P) *tem uma solução não trivial e não negativa.*

Nos próximos dois lemas mostraremos que o funcional energia J associado ao problema (P) satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 1.8.

Lema 3.2. Suponha que $f(x,s)$ satisfaz (f_2). Então, para toda função não negativa $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\}$ tem-se

$$J(tu) \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Demonstração: Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $u \geq 0$. Por (f_2) temos que para cada $M > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$F(x,s) > Ms^N, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0,\infty). \tag{3.2}$$

Como F é contínua, então F é limitada no compacto $\overline{\Omega} \times [0,s_0]$, ou seja, existe $c > 0$ tal que

$$|F(x,s)| < c, \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times [0,s_0]. \tag{3.3}$$

Tome $d > c + Ms_0^N$. Assim, por (3.3), obtemos

$$F(x,s) \geq -c \geq Ms^N - d, \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times [0,s_0]. \tag{3.4}$$

Dessa forma, de (3.2) e (3.4), temos que

$$F(x,s) \geq Ms^N - d, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{1}{N}\|tu\|^N - \int_\Omega F(x,tu)\,dx \\ &\leq \frac{t^N}{N}\|u\|^N - Mt^N\int_\Omega |u|^N + \int_\Omega d\,dx \\ &= t^N\left(\frac{\|u\|^N}{N} - M\|u\|_N^N\right) + O(1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por outro lado, se escolhermos $M > \dfrac{\|u\|^N}{N\|u\|_N^N}$, temos que

$$\frac{\|u\|^N}{N} - M\|u\|_N^N < 0.$$

Isso juntamente com (3.5), implicam que $J(tu) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ o que prova o Lema 3.2. $\square$

Lema 3.3. Suponha que $f(x,s)$ tem o crescimento exponencial crítico e satisfaz (f_1) e (f_4). Então, existem $\rho, \delta > 0$ tais que $J(u) \geqslant \delta$ se $\|u\| = \rho$.

Demonstração: Temos por (f_4) que existe $\delta > 0$ e $\tau > 0$ tal que

$$\frac{NF(x,s)}{|s|^N} \leqslant \lambda_1 - \tau, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (0,\delta).$$

ou seja,

$$F(x,s) \leqslant \frac{(\lambda_1 - \tau)}{N}|s|^N, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (0,\delta). \tag{3.6}$$

Pela condição (3.1), dado $\epsilon > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$f(x,s) < \epsilon e^{\alpha|s|^{N'}}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0,\infty) \text{ e } \alpha > \alpha_0.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
F(x,s) &= \int_0^{s_0} f(x,t)\,dt + \int_{s_0}^{s} f(x,t)\,dt \\
&\leqslant F(x,s_0) + \epsilon \int_{s_0}^{s} e^{\alpha|t|^{N'}}\,dt \\
&\leqslant F(x,s_0) + \epsilon(s-s_0)e^{\alpha|s|^{N'}} \\
&\leqslant F(x,s_0) + \epsilon c e^{\alpha|s|^{N'}} e^{\alpha|s|^{N'}} \\
&\leqslant \left(\frac{F(x,s_0)}{e^{2\alpha|s_0|^{N'}}} + c\epsilon\right) e^{2\alpha|s|^{N'}} \\
&\leqslant \frac{O(1)}{|s_0|^q} e^{2\alpha|s|^{N'}} |s|^q \\
&= O(1) e^{2\alpha|s|^{N'}} |s|^q, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0,\infty) \text{ e } q > N. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Usando que $F(x,s)$ é contínua e $F(x,s) = 0$ para todo $(x,s) \in \Omega \times (-\infty, 0]$, obtemos $c_1 > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
F(x,s) &\leqslant c_1 \\
&\leqslant c_2 e^{2\alpha|s|^{N'}} |s|^q, \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \left((-\infty,0] \cup [\delta, s_0]\right), \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

onde

$$
c_2 = \max_{\delta \leqslant s \leqslant s_0} \frac{c_1}{e^{2\alpha|s|^{N'}} |s|^q}.
$$

Logo, de (3.6), (3.7) e (3.8), obtemos para $\kappa = 2\alpha$ e $q > N$

$$
F(x,s) \leqslant \frac{(\lambda_1 - \tau)|s|^N}{N} + c e^{\kappa|s|^{N'}} |s|^q \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \qquad (3.9)
$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega e^{\kappa|u|^{N'}} |u|^q\,dt &\leqslant \left(\int_\Omega e^{\kappa r|u|^{N'}}\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega |u|^{r'q}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leqslant \int_\Omega e^{\kappa r\|u\|^{N'}\left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{N'}}\,dx \left(\int_\Omega |u|^{r'q}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 1.4, se $r > 1$ é suficientemente próximo de 1 e $\|u\| < \sigma$, onde $\kappa r \sigma^{N'} < \alpha_N$, então

$$
\int_\Omega e^{\kappa r\|u\|^{N'}\left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{N'}}\,dx \leqslant C(\Omega).
$$

Isso juntamente com (3.10) implica que

$$\int_\Omega e^{\kappa|u|^{N'}}|u|^q\,dx \leqslant C\left(\int_\Omega |u|^{r'q}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}}. \tag{3.11}$$

Segue por (3.9) que

$$J(u) \geqslant \frac{1}{N}\|u\|^N - \frac{(\lambda_1-\tau)}{N}\|u\|_N^N - C\int_\Omega e^{\kappa|u|^{N'}}|u|^q\,dx.$$

Usando as imersões de Sobolev, a definição de λ_1 e (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\geqslant \frac{1}{N}\left[1-\frac{(\lambda_1-\tau)}{\lambda_1}\right]\|u\|^N - C\|u\|_{r'q}^q \\ &\geqslant \frac{1}{N}\left[1-\frac{(\lambda_1-\tau)}{\lambda_1}\right]\|u\|^N - C\|u\|^q. \end{aligned}$$

Desde que $\tau > 0$ e $q > N$, podemos escolher $\rho > 0$ e $\sigma > 0$, suficientemente pequenos, tais que

$$J(u) \geqslant \frac{1}{N}\left[1-\left(\frac{\lambda_1-\tau}{\lambda_1}\right)\right]\|u\|^N - C\|u\|^q \geqslant \sigma \text{ sempre que } \|u\| = \rho.$$

□

Como consequência dos Lemas 3.2 e 3.3, temos que o nível minimax definido por

$$C_M := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leqslant t\leqslant 1} J(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],X),\ \gamma(0)=0,\ \gamma(1)=e\}$$

é positivo. No que segue vamos fazer uma escolha adequada de e com o objetivo de estimar o nível C_M. Para isto, considere a sequência de funções de Moser definidas por

$$\widetilde{M}_n(x) = \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N}}\begin{cases} (\log n)^{\frac{N-1}{N}} & \text{se } |x| \leqslant \frac{1}{N} \\ \log \dfrac{|x|^{-1}}{(\log n)^{\frac{1}{N}}} & \text{se } \frac{1}{N} \leqslant |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Note que $\widetilde{M}_n \in W_0^{1,N}(B_1(0))$ e $\|\widetilde{M}_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que d é o raio interno de Ω, podemos encontrar $x_0 \in \Omega$ tal que $B_d(x_0) \subseteq \Omega$. Defina

$$M_n(x) = \widetilde{M}_n\left(\frac{x-x_0}{d}\right).$$

Observe que as funções M_n estão em $W_0^{1,N}(\Omega)$, $\|M_n\| = 1$ e $suppM_n = B_d(x_0)$.

Lema 3.4. Assuma que (f_1), (f_2), (f_3), (f_4) e (f_5) valem. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max\{J(tM_n) : t \geqslant 0\} < \frac{1}{N}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Demonstração: Suponha, por contradição, que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\max\{J(tM_n) : t \geqslant 0\} \geqslant \frac{1}{N}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Pelo Lema 3.2, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n > 0$ tal que

$$J(t_n M_n) = \max\{J(tu_n) : t \geqslant 0\}. \tag{3.12}$$

Assim,

$$J(t_n M_n) = \frac{1}{N}t_n^N - \int_\Omega F(x, t_n u_n)\, dx \geqslant \frac{1}{N}\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}, \tag{3.13}$$

e usando que $F(x,s) \geqslant 0$, obtemos

$$t_n^N \geqslant \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}. \tag{3.14}$$

Desde que vale (3.12) temos que $J'(t_n M_n) \equiv 0$. Consequentemente,

$$J'(t_n M_n)t_n M_n = 0.$$

Isso implica que

$$t_n^N = \int_{B_d(x_0)} t_n M_n f(x, t_n M_n). \tag{3.15}$$

Por (f_5), dado $\epsilon > 0$ existe s_ϵ tal que

$$sf(x,s) \geqslant (\beta_0 - \epsilon)e^{\alpha_0 |s|^{N'}}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_\epsilon, \infty). \tag{3.16}$$

Assim, de (3.15) e (3.16), para n suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned} t_n^N &\geqslant (\beta_0 - \epsilon)\int_\Omega e^{\alpha_0 |t_n M_n|^{N'}} \\ &= (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N}\left(\frac{r}{n}\right)^N e^{\alpha_0 t_n^{N'}} \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n \\ &= (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N} d^N e^{\left(\frac{\alpha_0 t_n^{N'}}{\alpha_N} - 1\right)} N \log n, \end{aligned}$$

o que implica que (t_n) é uma sequência limitada. Além disso, usando (3.14), obtemos

$$t_n^N \to \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}. \tag{3.17}$$

Seja $A_n = \{x \in B_d(x_0) : t_n M_n \geqslant s_\epsilon\}$ e $B_n = B_d(x_0) \setminus A_n$. Usando (3.15) e (3.16), podemos estimar

$$t_n^N \geqslant (\beta_0 - \epsilon)\int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^{N'}|M_n|^{N'}} + \int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) - (\beta_0 - \epsilon)\int_{B_n} e^{\alpha_0 t_n^{N'}|M_n|^{N'}}.$$

Note que $M_n(x) \to 0$ para todo $x \in B_d(x_0)$ e a função característica $\mathcal{X}_{B_n} \to 1$ q.t.p. em $B_d(x_0)$. Logo, tendo em vista o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos:

$$\int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) \to 0$$

e

$$\int_{B_n} e^{\alpha_0 t_n^{N'}|M_n|^{N'}} \to \frac{\omega_{N-1}}{N} d^N.$$

Note também que

$$\int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^{N'}|M_n|^{N'}} \geqslant \int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_N |M_n|^{N'}} = d^N \int_{B_1(x_0)} e^{\alpha_N |\widetilde{M}_n|^{N'}}$$

e denotando a última integral por I_n, temos

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{|x|\leqslant \frac{1}{N}} e^{\frac{\alpha N}{\omega_{N-1}^{N'}}\log n} + \int_{\frac{1}{N}\leqslant|x|\leqslant 1} e^{\frac{\alpha N}{\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}}\frac{(\log|x|^{-1})^{N'}}{(\log n)^{\frac{1}{N-1}}}} \\ &= \frac{\omega_{N-1}}{N}\frac{1}{n^N}e^{N(\log n)} + \omega_{N-1}\int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{N\frac{\left(\log|x|^{-1}\right)^{N'}}{(\log n)^{\frac{1}{N-1}}}} \\ &= \frac{\omega_{N-1}}{N}\left\{1 + \int_0^1 N\log n e^{N\log n(\tau^{N'}-\tau)}\, d\tau\right\} \end{aligned}$$

onde, no último integrando, estamos usando a mudança de variável $\tau = \dfrac{\log|x|^{-1}}{\log n}$. Assim, passando o limite e usando (3.17), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1} &\geqslant (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N}d^N \lim_{n\to\infty} N\log n\int_0^1 e^{N\log n(\tau^{N'}-\tau)}\, d\tau \\ &= (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N}d^N\mathcal{M}, \quad \forall\epsilon > 0, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\beta_0 \leqslant \left(\frac{N}{d}\right)^N \frac{1}{\mathcal{M}\alpha_0^{N-1}},$$

contradizendo (f_5) e isto completa a prova do lema. □

Pelo Lema 3.4, existe $n_0 > 0$ tal que

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} J(tM_{n_0}) < \frac{1}{N}\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Fixando na definição de C_M, $e = M_{n_0}$, temos

Lema 3.5.

$$C_M < \frac{1}{N}\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Demonstração: Pelo Lema 3.4, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \{J(tM_{n_0}) : t \geqslant 0\} < \frac{1}{N}\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Tomando o caminho $\gamma(t) = tM_{n_0}$, temos que

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} J(\gamma(t)) < \frac{1}{N}\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1},$$

o que prova o lema. □

Lema 3.6. Toda sequência de Cerami no nível C_M é limitada.

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência de Cerami no nível C_M. Afirmamos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Suponha, por contradição, que $\|u_n\| \to \infty$. Defina $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ e note que $\|v_n\| = 1$. Como $W_0^{1,N}(\Omega)$ é reflexivo, então podemos supor que $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, pois (v_n) é limitada. Seguindo de forma análoga ao que foi feito na prova do Lema 2.3 podemos mostrar que $v_n^+ \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Sabemos que as imersões $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta para todo $q \in [1,\infty)$. Assim sendo, tem-se que

$$\begin{cases} v_n^+ \to v^+ \text{ em } L^q(\Omega), \quad q \in [1,\infty) \\ v_n^+(x) \to v^+(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{3.18}$$

Dado $R \in \left(0, \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-1}{N}}\right)$ temos que

$$R < \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-1}{N}} \Rightarrow \frac{\alpha_N}{R^{N'}} - \alpha_0 > 0.$$

Escolha $\epsilon = \dfrac{\alpha_N}{R^{N'}} - \alpha_0 > 0$. Pela condição (3.1), existe $s_0 > 0$ tal que

$$f(x,s) \leqslant \epsilon e^{\left(\alpha_0+\frac{\epsilon}{2}\right)|s|^{N'}}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0,\infty).$$

Segue que

$$\begin{aligned} F(x,s) &\leqslant F(x,s_0) + \epsilon c_1 e^{\left(\alpha_0+\frac{\epsilon}{2}\right)|s|^{N'}} \\ &\leqslant \left(\frac{F(x,s_0)}{\epsilon e^{\left(\alpha_0+\frac{\epsilon}{2}\right)|s_0|^{N'}}} + c_1 \right) \epsilon e^{\left(\alpha_0+\frac{\epsilon}{2}\right)|s|^{N'}} \\ &\leqslant c_2 e^{\left(\frac{\epsilon}{2}|s|^{N'}\right)} \epsilon e^{\left(\alpha_0+\frac{\epsilon}{2}\right)|s|^{N'}} \\ &\leqslant \epsilon c_2 e^{(\alpha_0+\epsilon)|s|^{N'}}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0,\infty). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por (f_4), temos que

$$F(x,s) \leqslant c_3|s|^N, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (0,\delta). \tag{3.20}$$

Além disso,

$$F(x,s) = 0, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (-\infty,0]. \tag{3.21}$$

Usando que $F(x,s)$ é continua, obtemos $c_4 > 0$ tal que

$$F(x,s) \leqslant c_4, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times [\delta,s_0]. \tag{3.22}$$

Assim, de (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22), obtemos

$$F(x,s) \leqslant C|s|^N + \left(\frac{\alpha_N}{R^{N'}} - \alpha_0 \right) e^{(\alpha_0+\epsilon)|s|^{N'}}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{3.23}$$

onde

$$C = \max_{\delta \leqslant s \leqslant s_0} \left(\frac{c_4}{|s|^N} + c_3 \right).$$

Seja $t_n \in [0,1]$ tal que

$$J(t_n u_n) = \max_{t\in[0,1]} J(tu_n).$$

Desde que $\|u_n\| \to \infty$, temos para n suficientemente grande que

$$J(t_n u_n) \geqslant J\left(\frac{R}{\|u_n\|} u_n \right) = J(Rv_n). \tag{3.24}$$

De (3.23) e observando que

$$\int_\Omega F(x,v_n(x))\,dx = \int_\Omega F(x,v_n^+(x))\,dx,$$

obtemos

$$\begin{aligned} NJ(Rv_n) &= R^N - N\int_\Omega F(x, Rv_n^+(x)) \\ &\geqslant R^N - NCR\int_\Omega |v_n^+(x)|^N - N\left(\frac{\alpha_N}{R^{N'}} - \alpha_0\right)\int_\Omega e^{(\alpha_0+\epsilon)R^{N'}|v_n^+(x)|^{N'}} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Como $e^{(\alpha_0+\epsilon)R^{N'}|v_n^+(x)|^{N'}} \geqslant e^{(\alpha_0+\epsilon)R^{N'}|v_n(x)|^{N'}}$, para todo $x \in \Omega$, então

$$\int_\Omega e^{(\alpha_0+\epsilon)R^{N'}|v_n^+(x)|^{N'}}\,dx \geqslant \int_\Omega e^{(\alpha_0+\epsilon)R^{N'}|v_n(x)|^{N'}}\,dx.$$

Assim, por (3.25), temos que

$$NJ(Rv_n) \geqslant R^N - NCR\int_\Omega |v_n^+(x)|^N\,dx - N\left(\frac{\alpha_N}{R^{N'}} - \alpha_0\right)\int_\Omega e^{(\alpha_0+\epsilon)R^{N'}|v_n(x)|^{N'}}\,dx. \tag{3.26}$$

Uma vez que $\|v_n\| = 1$, pelo Lema 1.4, obtemos que

$$\int_\Omega e^{(\alpha_0+\epsilon)R^{N'}|v_n(x)|^{N'}}\,dx = \int_\Omega e^{\alpha_N|v_n(x)|^{N'}}\,dx \leqslant C(\Omega), \tag{3.27}$$

graças a escolha de ϵ. Como $v_n^+ \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e a imersão $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, \infty)$ é compacta, então

$$\int_\Omega |v_n^+(x)|^N\,dx \to 0. \tag{3.28}$$

Assim, usando (3.24), (3.26) e (3.27), obtemos

$$NJ(t_nu_n) \geqslant R^N - NCR\int_\Omega |v_n^+(x)|^N\,dx - N\left(\frac{\alpha_N}{R^{N'}} - \alpha_0\right)C(\Omega).$$

Tomando o limite com $n \to \infty$ e usando (3.28), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} NJ(t_nu_n) \geqslant R^N - N\left(\frac{\alpha_N}{R^{N'}} - \alpha_0\right)C(\Omega).$$

Agora, fazendo $R \to \left(\dfrac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-1}{N}}$, obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} J(t_nu_n) \geqslant \frac{1}{N}\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1} > C_M. \tag{3.29}$$

Como $J(0) = 0$ e $J(u_n) \to C_M$, então podemos supor que $t_n \in (0, 1)$. Pelo fato de t_n

ser um ponto de máximo local, temos que

$$J'(t_n u_n)t_n u_n = 0. \tag{3.30}$$

Assim,

$$t_n^N \|u_n\|^N = \int_\Omega f(x, t_n u_n) t_n u_n \, dx. \tag{3.31}$$

Além disso, temos que

$$\|u_n\|^N - N \int_\Omega F(x, u_n) \, dx - NC_M \to 0$$

e

$$\|u_n\|^N - \int_\Omega f(x, u_n) u_n \, dx \to 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega [f(x, u_n)u_n - NF(x, u_n)] \, dx &= \|u_n\|^N + NC_M - \|u_n\|^N + o_n(1) \\ &= NC_M + o_n(1). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Temos que

$$NJ(t_n u_n) = t_n^N \|u_n\|^N - N \int_\Omega F(x, t_n u_n) \, dx.$$

Usando (3.31), obtemos

$$NJ(t_n u_n) = \int_\Omega [f(x, t_n u_n) t_n u_n - NF(x, t_n u_n)] \, dx. \tag{3.33}$$

Observe que a hipótese (f_3) do artigo de Lam-Lu [18] assume que $C_* = 0$ e $\theta = 1$. Assim, usando (3.32) e (3.33), temos que

$$\begin{aligned} NJ(t_n u_n) &\leqslant \int_\Omega ([f(x, u_n)u_n - NF(x, u_n)]) \, dx \\ &= NC_M + o_n(1), \end{aligned} \tag{3.34}$$

o que contradiz (3.29). Isso prova que (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. □

Prova do Teorema 3.1: Pelo Teorema 1.8 e os Lemas 3.2 e 3.3, existe uma sequência (u_n) de Cerami no nível C_M, isto é,

$$\begin{cases} \frac{1}{N}\|u_n\|^N - \int_\Omega F(x, u_n) \to C_M \\ (1 + \|u_n\|) \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla v - \int_\Omega f(x, u_n) v \right| \leqslant \epsilon_n \|v\|, \end{cases} \tag{3.35}$$

com $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Usando o Lema 3.6, garantimos que essa sequência é limitada. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \\ u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \\ u_n \to u \text{ em } L^q(\Omega), \quad \forall q \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.36}$$

Nosso objetivo agora é mostrar que u é solução fraca não trivial do problema (P). Para isto, observe que (3.35) implica que

$$\int_\Omega F(x, u_n)\, dx \leqslant C \text{ e } \int_\Omega f(x, u_n) u_n\, dx \leqslant C. \tag{3.37}$$

Pelo Lema 1.3 obtemos que

$$f(x, u_n) \to f(x, u) \text{ em } L^1(\Omega). \tag{3.38}$$

Argumentando como em do Ó [13], Lema 4, (veja também Boccardo [4]) obtemos

$$|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{N-2} \nabla u \quad \text{em} \quad \left(L^{N'}(\Omega)\right)^N. \tag{3.39}$$

Dessa convergência, usando as hipóteses de crescimento em $f(x, s)$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, (3.35) e passando o limite, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla \phi - \int_\Omega f(x, u)\phi = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.40}$$

Utilizando um argumento de densidade, temos que (3.40) vale para toda $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim, u é solução fraca do problema (P).
Agora, mostraremos que $u \neq 0$. Suponha, por contradição, que $u = 0$. Usando o Lema 1.3, obtemos

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup 0 \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \\ f(x, u_n) \to 0 \text{ em } L^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.41}$$

então, por (f_6), obtemos que

$$F(x, u_n) \to 0 \text{ em } L^1(\Omega).$$

Isso juntamente com (3.35) implica que

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n\|^N = NC_M. \tag{3.42}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ temos para n suficientemente grande que

$$\|u_n\|^N \leqslant NC_M + \epsilon.$$

Vimos que $NC_M < \left(\dfrac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}$, então

$$\|u_n\|^N \leqslant \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1} - \epsilon < \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1},$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo, existe $q > 1$, suficientemente próximo a 1, tal que

$$\|u_n\|^N \leqslant q^{N-1}\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1},$$

o que implica que

$$q\alpha_0\|u_n\|^{N'} < \alpha_N.$$

Pela condição (3.1), para $\beta = q\alpha_0 > \alpha_0$, tem-se que dado $\epsilon > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$|f(x,s)|^q \leqslant \epsilon e^{\beta|s|^{N'}}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times (s_0, \infty). \tag{3.43}$$

Por (f_1), existe $c_1 > 0$ tal que

$$|f(x,s)|^q \leqslant \frac{c_1}{e^{\beta|s_0|^{N'}}} e^{\beta|s|^{N'}}, \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times (-\infty, s_0]. \tag{3.44}$$

De (3.43) e (3.44), obtemos

$$|f(x,s)|^q \leqslant c e^{\beta|s|^{N'}} \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Logo, pelo Lema 1.4, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x,u_n(x))|^q\,dx &\leqslant c\int_\Omega e^{q\alpha_0|u_n(x)|^{N'}}\,dx \qquad (3.45)\\
&\leqslant c\int_\Omega e^{q\alpha_0\|u_n\|^{N'}\left(\frac{|u_n(x)|}{\|u_n\|}\right)^{N'}}\,dx\\
&\leqslant C(\Omega).
\end{aligned}$$

Note que

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla v - \int_\Omega f(x,u_n)v\right| \leqslant \epsilon_n\|v\|, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega), \tag{3.46}$$

onde $\epsilon_n \to 0$. Fazendo $v = u_n$ em (3.46), obtemos

$$\left| \int_\Omega |\nabla u_n|^N - \int_\Omega f(x, u_n)u_n \right| \leqslant \epsilon_n \|u_n\|,$$

isso implica que $u_n \to 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, o que contradiz (3.42). Portanto, $u \neq 0$.
Já mostramos que u é uma solução fraca não trivial para o problema P. Para concluirmos o Teorema 3.1, resta verificar que u é não negativa. Note que

$$u = u^+ - u^-.$$

Escolhendo $v = u^-$ como função teste em (1.14) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla u^- - \int_\Omega f(x, u)u^- = 0,$$

assim,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega |\nabla u^-|^N &= \int_\Omega f(x,u)u^- \\ &= \int_\Omega f(x,u^+)u^- \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que $u^- = 0$. Logo, $u = u^+ \geqslant 0$. Portanto, o Teorema 3.1 está provado.

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P. H., *Dual variational methods in critical point theory and applications.*, J. Functional Analysis 14 (1973), 349-381.

[2] Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, 1966.

[3] Bartolo, P.; Benci, V.; Fortunato, D., *Abstract critical point theorems and applications to somi nonlinear problems with "strong"resonance at infinity*, Nonlinear Anal. T. M. A., 1983;7,9:981-1012.

[4] Boccardo, L.; Murat, F., *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations.* Nonlinear Anal. 19 (1992), no. 6, 581-597.

[5] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations.* Springer, London, 1987.

[6] Cerami, G., *An existence criterion for the critical points on unbounded manifolds.* (Italian), Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A 112 (1978), no. 2, 332-336 (1979).

[7] Cerami, G., *On the existence of eigenvalues for a nonlinear boundary value problem.* (Italian), Ann. Mat. Pura Appl. (4) 124 (1980), 161-179.

[8] Clark, D. C., *A variant of the Lusternik-Schnirelman theory.* Ind. Univ. Math. J. 22 (1972), 65-74.

[9] Costa, G. D., *An Invitation to Variational Methods in Diferential Equations.* Birkhäuser, Boston, 2007.

[10] de Figueiredo, D. G.; Miyagaki, O. H.; Ruf, B., *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range.* Calc. Var. Partial Differential Equations 3 (1995), no. 2, 139-153.

[11] de Moraes, E. de F. G., *Autovalor principal para problemas elípticos com peso indefinido em* $\mathbb{R}^N$ *e aplicações*, 2006. 104 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2006.

[12] de Sousa, M.; do Ó, J. M. B., *On a singular and nonhomogeneous N-Laplacian equation involving critical growth*, J. Math. Anal. Appl. 380 (2011) 241-263.

[13] do Ó, J. M. B., *Semilinear Dirichlet problems for the N-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$ *with nonlinearities in the critical growth range.*, Differential Integral Equations 9 (1996), no. 5, 967-979.

[14] Evans, L. C. , *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

[15] Grossinho, M. R.; Tersian, S. A., *An introduction to minimax theorems and their applications to differential equations.*, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[16] Iturriaga, L.; Lorca, S.; Ubilla, P., *A quasilinear problem without the Ambrosetti-Rabinowitz-type condition.*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 140 (2010), no. 2, 391-398.

[17] Jeanjean, L., *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on* $\mathbb{R}^N$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 129 (1999), no. 4, 787-809.

[18] Lam, N.; Lu, G., *N-Laplacian equations in* $\mathbb{R}^N$ *with subcritical and critical growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition.*, 1991 Mathematics Subject Classification. 35B38, 35J92, 35B33, 35J62.

[19] Lam, N.; Lu, G., *Superlinear elliptic equations with subcritical and critical exponential growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition.*, to appear.

[20] Li, G.; Yang, C., *The existence of a nontrivial solution to a nonlinear elliptic boundary value problem of p-Laplacian type without the Ambrosetti-Rabinowitz condition.*, Nonlinear Anal. 72 (2010), no. 12, 4602-4613

[21] Lima, E. L., *Curso de Análise: vol 1*, 13 edição. Rio de Janeiro. IMPA 2011.

[22] Lima, E. L., *Curso de Análise: vol 2*, 11 edição. Rio de Janeiro. IMPA 2012.

[23] Lindqvist, P., *On the Equation* $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0.$, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 109, No. 1 (May, 1990), pp. 157-164.

[24] Liu, Z.; Wang, Z., *On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition.*, Adv. Nonlinear Stud. 4 (2004), no. 4, 563-574.

[25] Miyagaki, O. H.; Souto, M. A. S., *Superlinear problems without Ambrosetti and Rabinowitz growth condition.*, J. Differential Equations 245 (2008), no. 12, 3628-3638.

[26] Moser, J., *A sharp form of an inequality by N. Trudinger.*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1970/71), 1077-1092.

[27] Palais, R.S., *Critical point theory and the minimax principle*, in Proc. Symp. Pure Math. XV, AMS, 1970, 1970, 185-212.

[28] Rabinowitz, P. H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.*, CBMS, no. 65 AMS.

[29] Royden, H. L.; Fitzpatrick, P.M., *Real Analysis*, Fourth Edition (ISBN 978-0-13-143747-0), Copyright © 2010.

[30] Sun, M., *Multiple solutions of a superlinear p-Laplacian equation without AR-condition.*, Appl. Anal. 89 (2010), no. 3, 325-336.

[31] Trudinger, N. S., *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications.*, J. Math. Mech. 17 (1967) 473-483.

[32] Wang, Z.; Zhou, H., *Positive solutions for a nonhomogeneous elliptic equation on $\mathbb{R}^N$ without (AR) condition.*, J. Math. Anal. Appl. 353 (2009), no. 1, 470-479

[33] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[34] Xavier, M. S., *Multiplicidade de soluções para um problema quasilinear com simetria envolvendo o expoente crítico de Sobolev*, 2000. 68 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2000.