Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Módulos Totalmente Reflexivos e Dimensão de Gorenstein

Thyago Santos de Souza

João Pessoa – PB

Agosto de 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Módulos Totalmente Reflexivos e Dimensão de Gorenstein

por

Thyago Santos de Souza

sob a orientação do

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

João Pessoa – PB
Agosto de 2016

S729m Souza, Thyago Santos de.
Módulos totalmente reflexivos e dimensão de Gorenstein / Thyago Santos de Souza.- João Pessoa, 2016.
77f.
Orientador: Cleto Brasileiro Miranda Neto
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Módulos totalmente reflexivos. 3. Fórmula de Auslander-Bridger. 4. Dimensão de Gorenstein. 5. Anéis G-regulares.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Módulos Totalmente Reflexivos e Dimensão de Gorenstein

por

Thyago Santos de Souza [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 09 de Agosto de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB

(Orientador)

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos – UFS

(Examinador Externo)

Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza – UFPB

(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais, que não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

Agradecimentos

A Deus, por me conceder coragem, persistência e sabedoria para superar todos os desafios e alcançar os meus sonhos.

Aos meus pais, José Adeilton de Souza e Maria das Graças da C. Santos, que não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida. À minha irmã, Thaysa, por sempre me ajudar em tudo que preciso. À minha avó, Dona Lia, por transmitir sua experiência e permanecer incondicionalmente ao meu lado.

Ao meu orientador e amigo, Cleto B. Miranda Neto, por toda a sua valiosa ajuda, incentivo e pelas discussões sempre muito instigantes. Aos professores Zaqueu Alves Ramos e Fernando Antonio X. de Souza, por participarem da banca, e a todos os demais professores do departamento, em especial a Antônio de Andrade e Silva, Jacqueline F. Rojas, Manassés X. de Souza e Uberlandio B. Severo, pelo incentivo durante essa etapa.

Aos meus companheiros de curso, que nesses últimos anos sempre estiveram ao meu lado compartilhando felicidades e superando desafios. Às minhas amigas, Fabiana e Letícia, que, há muito tempo, me ensinam o valor da persistência e dedicação. Aos meus amigos e irmãos: Ilaneide, Ivaneide, Maria Letícia, Natalia Ales, Natália Tavares, Pedro, Robson e Rodolfo pelos grandes e inesquecíveis momentos compartilhados.

Ao CNPq, pelo fundamental auxílio financeiro.

"A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza."

Bertrand Russell

Resumo

Nesta dissertação, estudamos os chamados módulos totalmente reflexivos e a noção de dimensão de Gorenstein sobre anéis comutativos Noetherianos. A principal finalidade é demonstrar a importante fórmula de Auslander-Bridger e o Teorema de Gorenstein, o que permitirá caracterizar anéis locais Gorenstein através de reflexividade total, bem como apresentar condições suficientes para a propriedade de G-regularidade. Fornecemos, também, exemplos e contra-exemplos interessantes.

Palavras-chave: módulos totalmente reflexivos, fórmula de Auslander-Bridger, dimensão de Gorenstein, anéis G-regulares.

Abstract

In this dissertation, we study the so-called totally reflexive modules and the notion of Gorenstein dimension over Noetherian commutative rings. The main purpose is to prove the important Auslander-Bridger formula and the Gorenstein theorem, which will allow us to characterize Gorenstein local rings through total reflexivity, as well as to provide sufficient conditions for the property of G-regularity. We furnish, moreover, interesting examples and counterexamples.

Keywords: totally reflexive modules, Auslander-Bridger formula, Gorenstein dimension, G-regular rings.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- R, S denotam anéis;
- M, N, P, K denotam módulos finitamente gerados;
- $\mathrm{z}_R(M)$ denota o conjunto dos divisores-de-zero do R-módulo M;
- $\mathrm{Ann}_R(M)$ denota o anulador do R-módulo M;
- $\mathrm{Ass}_R\, M$ denota o conjunto dos primos associados do R-módulo M;
- $(R, \mathfrak{m}, k)$ denota um anel local R com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo residual k;
- $\mathrm{pd}_R\, M$ denota a dimensão projetiva do R-módulo M;
- $\mathrm{id}_R\, M$ denota a dimensão injetiva do R-módulo M;
- $\text{G-dim}_R\, M$ denota a dimensão de Gorenstein do R-módulo finitamente gerado M;
- $\square$ denota o final de uma demonstração.

Introdução

Em 1967, no memorável artigo [2], Maurice Auslander introduziu a noção de *módulo totalmente reflexivo*, a qual originalmente batizou de *módulo de G-dimensão zero*, através do seu conceito de *dimensão de Gorenstein*. Pouco depois, juntamente com Mark Bridger, desenvolveu a teoria da *G-dimensão* [3] em maior profundidade e explorando várias propriedades. Desde então, tal classe de módulos tem sido amplamente estudada. O termo "totalmente reflexivo"foi introduzido em 2002, por Avramov e Martsinkovsky em [5]. Embora esse conceito remonte à década de 60, o tema continua bastante atual, despertando crescente interesse e sendo fonte de vários trabalhos, dentre os quais podemos destacar os artigos [4], [16] e [17].

Os módulos totalmente reflexivos, em particular, podem ser utilizados como uma generalização dos tradicionais módulos projetivos, tornando possível a introdução de uma nova dimensão de caráter homológico para módulos finitamente gerados sobre anéis Noetherianos. Tal dimensão, chamada G-dimensão, possui muitas propriedades análogas às propriedades da dimensão projetiva usual, o que pode ser fortemente ilustrado através da *fórmula de Auslander-Bridger*, que generaliza a clássica fórmula de Auslander-Buchsbaum para o novo contexto da G-dimensão.

Os anéis locais Gorenstein são caracterizados pelo fato de que todo módulo finitamente gerado tem G-dimensão finita, resultado expresso no *Teorema de Gorenstein*. Esse é o resultado análogo, para a propriedade de Gorenstein, ao Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre que fornece a clássica caracterização homológica de regularidade. Como consequência, obtém-se que, sobre anéis Gorenstein os módulos totalmente reflexivos são exatamente os módulos Cohen-Macaulay maximais.

Os chamados anéis *G-regulares* constituem um tipo bastante peculiar de anel, sobre os quais, por definição, os módulos totalmente reflexivos são necessariamente livres. Prova-se que tais anéis são caracterizados pelo fato de que a G-dimensão coincide com a dimensão projetiva para todo módulo finitamente gerado. Os anéis locais regulares são exemplos triviais de anéis G-regulares.

Os principais objetivos desta dissertação são apresentar os módulos totalmente reflexivos, demonstrar a fórmula de Auslander-Bridger e o Teorema de Gorenstein, usando-os para caracterizar os anéis locais Gorenstein via reflexividade total, bem como estudar os anéis G-regulares e suas principais propriedades. Por fim, deve-se mencionar também que uma das metas é a de contribuir para a literatura matemática nacional sobre este belíssimo assunto, que atualmente se encontra, no máximo, bastante escassa.

O trabalho está dividido em três capítulos e dois apêndices.

No *Capítulo* 1, introduzimos a definição de módulos totalmente reflexivos, provamos algumas caracterizações, estudamos o comportamento ao longo de sequências exatas curtas e mostramos algumas condições necessárias para a reflexividade total.

No *Capítulo* 2, apresentamos o fundamental conceito de dimensão de Gorenstein (G-dimensão), bem como algumas de suas propriedades, e concluímos com demonstrações da clássica fórmula de Auslander-Bridger e do Teorema de Gorenstein através da noção de G-dimensão.

No *Capítulo* 3, estudamos o comportamento dos módulos totalmente reflexivos sobre anéis Gorenstein, e demonstramos uma caracterização para anéis locais Gorenstein via reflexividade total. Concluímos apresentando o conceito, alguns resultados e exemplos explícitos de anéis G-regulares, com base nos artigos [23] e [24]. Detectamos e exemplificamos, em particular, uma curiosa patologia: a propriedade de G-regularidade nem sempre é preservada por localização.

Finalmente, para facilitar a leitura do trabalho e torná-la mais objetiva, bem como um pouco mais auto-suficiente, adicionamos dois apêndices: O *Apêndice* A é dedicado a alguns resultados introdutórios da álgebra homológica; no *Apêndice* B, listamos alguns conceitos e resultados básicos de álgebra comutativa que auxiliaram na elaboração desta dissertação.

Convenção: Nesta dissertação, todos os anéis são considerados comutativos, Noetherianos e com identidade 1.

Capítulo 1

Módulos Totalmente Reflexivos

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados clássicos envolvendo módulos totalmente reflexivos. As principais referências utilizadas foram [10], [11] e [18].

1.1 Definições e exemplos

Nesta seção, introduziremos o conceito de *módulo totalmente reflexivo* e noções relacionadas, incluindo alguns exemplos e uma importante caracterização.

Definição 1.1. Um R-módulo finitamente gerado M é dito *totalmente reflexivo* se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) M é reflexivo, isto é, $M \cong M^{**}$ através do homomorfismo canônico;

(2) $\operatorname{Ext}_R^i(M, R) = 0$, para todo $i > 0$;

(3) $\operatorname{Ext}_R^i(M^*, R) = 0$, para todo $i > 0$.

Jorgensen e Sega [14] demonstraram que as três condições acima são, de fato, independentes.

Como primeiro exemplo de módulos totalmente reflexivos destacamos a classe dos módulos projetivos finitamente gerados, que chamaremos *módulos totalmente reflexivos triviais*.

Exemplo 1.1. Seja P um R-módulo projetivo finitamente gerado. Então, P é totalmente reflexivo (em particular, todo módulo livre finitamente gerado é totalmente reflexivo). De fato, como P é um módulo projetivo, segue que P^* também é projetivo e finitamente gerado, e assim, é imediato que $\mathrm{Ext}^i_R(P,R) = 0 = \mathrm{Ext}^i_R(P^*,R)$, para todo $i > 0$. Além disso, pela Proposição A.2, temos $P^{**} \cong P \otimes_R \mathrm{Hom}_R(R,R)$, e de acordo com o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\sigma_P} & P^{**} \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ P \otimes_R R & \xrightarrow{\cong} & P \otimes_R \mathrm{Hom}_R(R,R) \end{array}$$

segue que o homomorfismo canônico σ_P é um isomorfismo.

Agora, veremos outra importante definição que está intimamente ligada à noção de módulo totalmente reflexivo.

Definição 1.2. Um complexo acíclico infinito de R-módulos livres finitamente gerados

$$\mathbb{F}: \quad \cdots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to \cdots$$

é dito *totalmente acíclico* quando o seu complexo dual $\mathbb{F}^* = \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, R)$ também é acíclico. Um R-módulo, M, possui uma *resolução completa* quando existe um complexo totalmente acíclico, $\mathbb{F}$, tal que $M \cong \mathrm{coker}\,(F_1 \to F_0)$. Neste caso, dizemos que $\mathbb{F}$ é uma resolução completa de M.

A seguinte caracterização de módulos totalmente reflexivos é largamente utilizada em trabalhos científicos sobre o tema.

Teorema 1.1. *Seja M um R-módulo finitamente gerado. Então, M é totalmente reflexivo se, e somente se, M possui uma resolução completa.*

Demonstração. Suponhamos que M é totalmente reflexivo, ou seja, M satisfaz (1), (2) e (3) da Definição 1.1. Considere resoluções livres de M e M^*:

$$\mathbb{F}: \quad \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

$$\mathbb{D}: \quad \cdots \to D_1 \to D_0 \to M^* \to 0$$

Como o anel R é Noetheriano e os módulos M e M^* são finitamente gerados, segue que os R-módulos livres F_i e D_i são finitamente gerados para todo i. Aplicando $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ a $\mathbb{D}$ obtemos o complexo

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{D}, R): \quad 0 \to \mathrm{Hom}_R(M^*, R) \to \mathrm{Hom}_R(D_0, R) \to \mathrm{Hom}_R(D_1, R) \to \cdots$$

que podemos escrever

$$\mathbb{D}^*: \quad 0 \to M^{**} \to D_0^* \to D_1^* \to \cdots$$

Como $M \cong M^{**}$, temos

$$\mathbb{D}^*: \quad 0 \to M \to D_0^* \to D_1^* \to \cdots$$

Segue da propriedade de $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ e de (3) que $\mathbb{D}^*$ é exato. Agora, podemos considerar o complexo

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{F}|\mathbb{D}^*: & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & D_0^* \arrow[r] & D_1^* \arrow[r] & \cdots \\
& & & & M \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathbb{F}$ e $\mathbb{D}^*$ são exatos, segue que $\mathbb{F}|\mathbb{D}^*$ é exato. Assim, obtemos um complexo acíclico infinito de R-módulos livres finitamente gerados. Verificaremos que $\mathbb{F}|\mathbb{D}^*$ é totalmente acíclico. Aplicando $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ em $\mathbb{F}|\mathbb{D}^*$, obtemos

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}|\mathbb{D}^*, R): \quad \cdots \to D_1^{**} \to D_0^{**} \to F_0^* \to F_1^* \to \cdots$$

que é isomorfo a

$$\mathbb{D}|\mathbb{F}^*: \quad \cdots \to D_1 \to D_0 \to F_0^* \to F_1^* \to \cdots$$

Agora, aplicando $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ em $\mathbb{F}$, temos

$$\mathbb{F}^*: \quad 0 \to M^* \to F_0^* \to F_1^* \to \cdots$$

que, pela propriedade de $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ e (2), é exato. Logo,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{D}|\mathbb{F}^* : & \cdots \arrow[r] & D_1 \arrow[r] & D_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_0^* \arrow[r] & F_1^* \arrow[r] & \cdots \\
& & & & M^* \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

é exato. Assim $(\mathbb{F}|\mathbb{D}^*)^* = \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}|\mathbb{D}^*, R) \cong \mathbb{D}|\mathbb{F}^*$ é exato, e portanto, $\mathbb{F}|\mathbb{D}^*$ é totalmente acíclico. Por fim, como $\mathbb{F}$ é exata, temos $M \cong \mathrm{coker}\,(F_1 \to F_0)$. Assim, $\mathbb{F}$ é uma resolução completa de M.

Reciprocamente, suponhamos que M possui uma resolução completa, isto é, existe um complexo totalmente acíclico

$$\mathbb{F} : \quad \cdots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to \cdots$$

talque $M \cong \mathrm{coker}\,(F_1 \to F_0)$. Então,

$$\cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0 \qquad \text{e} \qquad 0 \to M^* \to F_0^* \to F_1^* \to \cdots$$

são acíclicos. Como F_i é livre para cada $i \geq 0$, segue que $\cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ é uma resolução livre de M e sendo $F_0^* \to F_1^* \to F_2^* \to \cdots$ exata, segue que $\mathrm{Ext}_R^i(M, R) = 0$, para todo $i > 0$. Pela exatidão de $\mathbb{F}^*$ e de $0 \to M^* \to F_0^* \to F_1^* \to \cdots$, temos

$$M^* \cong \ker(F_0^* \to F_1^*) = \mathrm{Im}\,(F_{-1}^* \to F_0^*) \cong \frac{F_{-1}^*}{\ker(F_{-1}^* \to F_0^*)} = \frac{F_{-1}^*}{\mathrm{Im}\,(F_{-2}^* \to F_{-1}^*)} = \mathrm{coker}\,(F_{-2}^* \to F_{-1}^*)$$

Assim, obtemos o complexo exato

$$\mathbb{G} : \quad \cdots \to F_{-2}^* \to F_{-1}^* \to M^* \to 0$$

Como cada F_i^* é livre, segue que $\mathbb{G}$ é uma resolução livre de M^* com

$$\mathbb{G}^* : \quad 0 \to M^{**} \to F_{-1} \to F_{-2} \to \cdots$$

que é exata. Daí, $\operatorname{Ext}_R^i(M^*, R) = 0$, para todo $i > 0$. Além disso,

$$M^{**} \cong \ker(F_{-1} \to F_{-2}) \cong M.$$

Logo, pela Proposição A.1, temos que σ_M é um isomorfismo, e portanto, M é totalmente reflexivo.

$\square$

Usaremos a caracterização acima para produzir mais exemplos.

Exemplo 1.2. Se existem elementos a e b em R tais que $\operatorname{Ann}_R(a) = (b)$ e $\operatorname{Ann}_R(b) = (a)$, então o complexo

$$\mathbb{F}: \qquad \cdots \to R \xrightarrow{[a]} R \xrightarrow{[b]} R \xrightarrow{[a]} R \to \cdots$$

é totalmente acíclico. De fato, como $\operatorname{Im}[a] = (a) = \operatorname{Ann}_R(b) = \ker[b]$, $\operatorname{Im}[b] = (b) = \operatorname{Ann}_R(a) = \ker[a]$ e $\operatorname{Hom}_R(R, R) \cong R$ temos que $\mathbb{F}$ e $\mathbb{F}^* \cong \mathbb{F}$ são exatos. Além disso, como podemos enumerar o complexo conforme acharmos conveniente, segue que $\mathbb{F}$ é uma resolução completa dos módulos $R/(a) \cong (b)$ e $R/(b) \cong (a)$, portanto, eles são totalmente reflexivos. Os elementos a e b cujos anuladores satisfazendo a propriedade acima são chamados um *par exato de divisores-de-zero.*

Quanto à existência de tais pares, pelo menos no caso em que $R = S/(ab)$, onde S é um domínio e a, $b \in S$ são elementos não-nulos e não-invertíveis, denotamos por $\overline{a}$, $\bar{b} \in R$ as imagens de a e b em R, respectivamente. Como S é um domínio e $a \neq 0$ temos $\operatorname{Ann}_R(\overline{a}) = (\bar{b})$. De forma análoga, $\operatorname{Ann}_R(\bar{b}) = (\overline{a})$. Logo $\overline{a}$ e $\bar{b}$ formam um par exato de divisores-de-zero. Portanto, $(\overline{a})$ e $(\bar{b})$ são módulos totalmente reflexivos.

Exemplo 1.3. Sejam S um anel e $R = S[X]/(X^m)$ com $m > 1$ inteiro. Tome $n \in \{1, \ldots, m-1\}$ e denotamos por x^n a classe residual de X^n em R. Como X^n e X^{m-n} são não-divisores-de-zero em $S[X]$, segue que $\operatorname{Ann}_R(x^n) = (x^{m-n})$ e $\operatorname{Ann}_R(x^{m-n}) = (x^n)$. Assim, pelo Exemplo 1.2 temos que (x^n) e (x^{m-n}) são módulos totalmente reflexivos. Em particular, (x^n) é totalmente reflexivo para todo $n \in \{1, \ldots, m-1\}$. Ainda pelo Exemplo 1.2 temos que

$$\cdots \to R \xrightarrow{x^{m-n}} R \xrightarrow{x^n} R \xrightarrow{x^{m-n}} R \to (x^n) \to 0$$

é uma resolução livre minimal de (x^n). Tomemos agora $S = k$, com k um corpo. Então, R é local.

Pela Proposição B.11 e Corolário B.12 obtemos que $\mathrm{pd}_R\,(x^n) = \infty$. Assim, (x^n) não é projetivo, e portanto, trata-se de um módulo totalmente reflexivo não-trivial.

Concluiremos esta seção mostrando que o produto tensorial por uma álgebra plana preserva a reflexividade total.

Proposição 1.2. Se M é um R-módulo totalmente reflexivo e S é uma R-álgebra plana, então $M \otimes_R S$ é um S-módulo totalmente reflexivo. Em particular, qualquer módulo de frações de um módulo totalmente reflexivo é totalmente reflexivo.

Demonstração. Como M é totalmente reflexivo, então pelo Teorema 1.1 existe um complexo totalmente acíclico

$$\mathbb{F}: \quad \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \to F_{-1} \to \cdots$$

talque $M \cong \operatorname{coker} \varphi$. Como S é uma R-álgebra plana temos que o complexo de S-módulos

$$\mathbb{F} \otimes_R S: \quad \cdots \to F_1 \otimes_R S \xrightarrow{\varphi \otimes S} F_0 \otimes_R S \to F_{-1} \otimes_R S \to \cdots$$

é acíclico, com cada $F_i \otimes_R S$ um S-módulo livre e finitamente gerado. Note que

$$\mathrm{Hom}_S(F_i \otimes_R S, S) \cong \mathrm{Hom}_S(F_i \otimes_R S, R \otimes_R S) \cong \mathrm{Hom}_R(F_i, R) \otimes_R S$$

Mas este último complexo $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, R) \otimes_R S$ é acíclico, pois $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, R)$ é acíclico e S é R-plano. Assim, $\mathbb{F} \otimes_R S$ é totalmente acíclico. Além disso, temos $\operatorname{coker}(\varphi \otimes S) \cong \operatorname{coker} \varphi \otimes_R S \cong M \otimes_R S$. Portanto, $\mathbb{F} \otimes_R S$ é uma resolução completa de $M \otimes_R S$, e assim, usando novamente o Teorema 1.1 o resultado segue. Para a afirmação em particular, basta usar que, se $U \subseteq R$ é um conjunto multiplicativo, então $U^{-1}R$ é uma R-álgebra plana e $M \otimes_R U^{-1}R \cong U^{-1}M$. □

1.2 Comportamento ao longo de sequências exatas

Nesta seção, estudaremos o comportamento de módulos totalmente reflexivos ao longo de uma sequência exata curta e veremos algumas consequências. Concluiremos com uma caracterização de tal classe de módulos via complexos totalmente acíclicos.

Proposição 1.3. Seja $0 \to K \to M \to N \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos finitamente gerados. Então vale:

(1) Se K e N são totalmente reflexivos, então M é totalmente reflexivo,

(2) Se M e N são totalmente reflexivos, então K é totalmente reflexivo,

(3) Se K e M são totalmente reflexivos e $\mathrm{Ext}^1_R(N,R) = 0$, então N é totalmente reflexivo.

Demonstração. A sequência exata curta induz a sequência exata longa

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N,R) \to \mathrm{Hom}_R(M,R) \to \mathrm{Hom}_R(K,R) \to \mathrm{Ext}^1_R(N,R) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i_R(N,R) \to \mathrm{Ext}^i_R(M,R) \to \mathrm{Ext}^i_R(K,R) \to \cdots$$

Vamos usar essa sequência para provar os três itens.
(1): Como K e N são totalmente reflexivos, segue que

(I) $K \cong K^{**}$ e $N \cong N^{**}$ pelos homomorfismos canônicos;

(II) $\mathrm{Ext}^i_R(K,R) = 0 = \mathrm{Ext}^i_R(N,R)$, para todo $i > 0$;

(III) $\mathrm{Ext}^i_R(K^*,R) = 0 = \mathrm{Ext}^i_R(N^*,R)$, para todo $i > 0$.

Assim, por (II) a sequência exata longa se reduz a

$$0 \to N^* \to M^* \to K^* \to 0 \to \mathrm{Ext}^1_R(M,R) \to 0 \to \cdots \to 0 \to \mathrm{Ext}^i_R(M,R) \to 0 \to \cdots$$

Logo, pela exatidão da sequência segue que $\mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0$ para todo $i > 0$. Ainda pela exatidão tem-se que $0 \to N^* \to M^* \to K^* \to 0$ é uma sequência exata curta. Assim, temos uma outra sequência exata longa induzida

$$0 \to K^{**} \to M^{**} \to N^{**} \to \mathrm{Ext}^1_R(K^*,R) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i_R(K^*,R) \to \mathrm{Ext}^i_R(M^*,R) \to \mathrm{Ext}^i_R(N^*,R) \to \cdots$$

Daí, por (III) temos $\mathrm{Ext}^i_R(M^*,R) = 0$, para todo $i > 0$. Além disso, obtemos a sequência exata curta $0 \to K^{**} \to M^{**} \to N^{**} \to 0$. Assim, obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \sigma_K & & \downarrow \sigma_M & & \downarrow \sigma_N & & \\ 0 & \longrightarrow & K^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & M^{**} & \xrightarrow{g^{**}} & N^{**} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como cada linha é uma sequência exata e vale $\sigma_M \circ f = f^{**} \circ \sigma_K$ e $\sigma_N \circ g = g^{**} \circ \sigma_M$, o Lema da Serpente nos dá a sequência exata

$$0 \to \ker \sigma_K \to \ker \sigma_M \to \ker \sigma_N \to \operatorname{coker} \sigma_K \to \operatorname{coker} \sigma_M \to \operatorname{coker} \sigma_N \to 0$$

Sendo σ_K e σ_N isomorfismos segue que $\ker \sigma_K = 0 = \operatorname{coker} \sigma_K$ e $\ker \sigma_N = 0 = \operatorname{coker} \sigma_N$. Pela exatidão da sequência acima temos $\ker \sigma_M = 0 = \operatorname{coker} \sigma_M$. Logo, σ_M é um isomorfismo. Portanto, M é totalmente reflexivo.

(2): Sendo M e N módulos totalmente reflexivos, de forma análoga ao item anterior obtemos a sequência exata longa

$$0 \to N^* \to M^* \to K^* \to 0 \to 0 \to \operatorname{Ext}^1_R(K, R) \to \cdots \to 0 \to \operatorname{Ext}^i_R(K, R) \to 0 \to \cdots$$

Logo, $\operatorname{Ext}^i_R(K, R) = 0$, para todo $i > 0$. A sequência exata curta $0 \to N^* \to M^* \to K^* \to 0$ induz a sequência exata longa

$$\begin{aligned} 0 \to K^{**} \to M^{**} \to N^{**} \to \operatorname{Ext}^1_R(K^*, R) \to \cdots \\ \cdots \to \operatorname{Ext}^{i-1}_R(N^*, R) \to \operatorname{Ext}^i_R(K^*, R) \to \operatorname{Ext}^i_R(M^*, R) \to \cdots \end{aligned}$$

Como $\operatorname{Ext}^i_R(M^*, R) = 0 = \operatorname{Ext}^i_R(N^*, R)$, para todo $i > 0$, temos que $\operatorname{Ext}^i_R(K^*, R) = 0$, para todo $i > 1$. Note ainda que

$$\operatorname{Ext}^1_R(K^*, R) = \operatorname{Im}(N^{**} \to \operatorname{Ext}^1_R(K^*, R)) \cong \frac{N^{**}}{\ker(N^{**} \to \operatorname{Ext}^1_R(K^*, R))} = \frac{N^{**}}{\operatorname{Im} g^{**}} = 0,$$

pois g sobrejetiva, σ_M e σ_N bijetivas implicam g^{**} sobrejetiva. Finalmente, usando a sequência exata curta $0 \to K^{**} \to M^{**} \to N^{**} \to 0$ e o Lema da Serpente obtem-se que σ_K é um isomorfismo.

Portanto K é totalmente reflexivo.

(3): Com K e M totalmente reflexivos a sequência exata longa nos dá $\mathrm{Ext}^i_R(N,R) = 0$, para todo $i > 1$, e junto com a hipótese temos para todo $i > 0$. Novamente a sequência exata curta induz a sequência exata longa

$$0 \to K^{**} \to M^{**} \to N^{**} \to \mathrm{Ext}^1_R(K^*,R) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i_R(M^*,R) \to \mathrm{Ext}^i_R(N^*,R) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_R(K^*,R) \to \cdots$$

Como $\mathrm{Ext}^i_R(K^*,R) = 0 = \mathrm{Ext}^i_R(M^*,R)$, para todo $i > 0$ tem-se $\mathrm{Ext}^i_R(N^*,R) = 0$, para todo $i > 0$. Usando mais uma vez o Lema da Serpente, concluímos que σ_N é um isomorfismo. Portanto N é totalmente reflexivo. □

Abaixo seguem algumas consequências úteis dessa proposição.

Corolário 1.4. Seja $0 \to K \to M \to N \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos finitamente gerados.

(1) Se N é totalmente reflexivo, então a sequência $0 \to N^* \to M^* \to K^* \to 0$ é exata, e neste caso K é totalmente reflexivo se, e somente se, M é totalmente reflexivo.

(2) Se M é totalmente reflexivo, então existem os isomorfismos $\mathrm{Ext}^i_R(K,R) \cong \mathrm{Ext}^{i+1}_R(N,R)$ para $i > 0$.

(3) Se a sequência cinde, então M é totalmente reflexivo se, e somente se, K e N são totalmente reflexivos.

Demonstração. (1): Pela demonstração do item (1) da Proposição 1.3 temos que a sequência $0 \to N^* \to M^* \to K^* \to 0$ é exata. A última afirmação segue imediatamente dos itens (1) e (2) da Proposição 1.3.

(2): Como $\mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0$ para $i > 0$, temos que a sequência exata longa da proposição anterior pode ser escrita da seguinte forma

$$0 \to N^* \to M^* \to K^* \to \mathrm{Ext}^1_R(N,R) \to \cdots \to 0 \to \mathrm{Ext}^i_R(K,R) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_R(N,R) \to 0 \to \cdots$$

Logo, por exatidão o resultado segue.

(3): Se K e N são totalmente reflexivos, basta usar a Proposição 1.3(1). Reciprocamente, suponha M totalmente reflexivo. Como $M \cong K \oplus N$ e $\operatorname{Ext}^i_R(-, R)$ é aditivo, então para todo $i > 0$ temos isomorfismos

$$0 = \operatorname{Ext}^i_R(M, R) \cong \operatorname{Ext}^i_R(K, R) \oplus \operatorname{Ext}^i_R(N, R)$$

e

$$0 = \operatorname{Ext}^i_R(M^*, R) \cong \operatorname{Ext}^i_R(K^*, R) \oplus \operatorname{Ext}^i_R(N^*, R).$$

Logo, $\operatorname{Ext}^i_R(K, R) = 0 = \operatorname{Ext}^i_R(K^*, R)$ e $\operatorname{Ext}^i_R(N, R) = 0 = \operatorname{Ext}^i_R(N^*, R)$ para todo $i > 0$. Além disso, como $M^* \cong K^{**} \oplus N^{**}$ temos que $\sigma_M = \sigma_K \oplus \sigma_N$, a menos de isomorfismos, logo σ_K e σ_N são isomorfismos. Portanto, K e N são totalmente reflexivos. $\square$

A reflexividade total é preservada por soma direta.

Corolário 1.5. Sejam $M_1, \ldots, M_r$ R-módulos finitamente gerados. Então $\bigoplus_{i=1}^r M_i$ é totalmente reflexivo se, e somente se, $M_1, \ldots, M_r$ são totalmente reflexivos.

Demonstração. Vamos usar indução em r. Para $r = 2$ basta considerar a sequência exata curta

$$0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$$

e usar o Corolário 1.4(3). Agora suponha que o resultado seja válido para $r - 1$. Considere a sequência exata curta

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{r-1} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{r} M_i \to M_r \to 0.$$

Como ela cinde, temos pelo Corolário 1.4(3) que $\bigoplus_{i=1}^r M_i$ é totalmente reflexivo se, e somente se, $\bigoplus_{i=1}^{r-1} M_i$ e M_r são totalmente reflexivos se, e somente se, $M_1, \ldots, M_{r-1}, M_r$ são totalmente reflexivos, pela hipótese de indução. $\square$

Já o produto tensorial de dois módulos totalmente reflexivos nem sempre é totalmente reflexivo; veja Exemplo 3.1 no Capítulo 3. Agora, veremos uma condição suficiente para que o quociente de módulos totalmente reflexivos seja totalmente reflexivo.

Corolário 1.6. Sejam $N \subseteq M$ R-módulos finitamente gerados. Suponha que M e N são totalmente reflexivos e $\operatorname{Ext}^1_R(M/N, R) = 0$. Então, M/N é totalmente reflexivo.

Demonstração. Como M é finitamente gerado segue que M/N é finitamente gerado. Agora considere a sequência exata curta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ e use a Proposição 1.3(3). $\square$

Dado um complexo totalmente acíclico, podemos obter uma família de módulos totalmente reflexivos; tal família consiste das sizigias desse complexo. Esse resultado é um caso particular da seguinte caracterização para módulos totalmente reflexivos.

Proposição 1.7. Um R-módulo M é totalmente reflexivo se, e somente se, é um módulo de sizigias de um complexo totalmente acíclico.

Demonstração. Sendo M totalmente reflexivo, existe

$$\mathbb{F}: \quad \cdots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to \cdots$$

um complexo totalmente acíclico tal que $M \cong \operatorname{coker}(F_1 \to F_0)$. Pela exatidão de $\mathbb{F}$ e pelo Teorema do Isomorfismo, temos

$$M \cong \operatorname{coker}(F_1 \to F_0) = \frac{F_0}{\operatorname{Im}(F_1 \to F_0)} = \frac{F_0}{\ker(F_0 \to F_{-1})} \cong \operatorname{Im}(F_0 \to F_{-1}) = \ker(F_{-1} \to F_{-2})$$

Portanto, M é um módulo de sizigias do complexo totalmente acíclico $\mathbb{F}$.

Reciprocamente, suponha que M é um módulo de sizigias do complexo totalmente acíclico

$$\mathbb{G}: \quad \cdots \to G_1 \to G_0 \to G_{-1} \to \cdots$$

ou seja, existe i inteiro tal que $M = \ker \varphi_i$, onde $\varphi_i : G_i \to G_{i-1}$. Então, pela exatidão de $\mathbb{G}$ e pelo Teorema do Isomorfismo, temos

$$M = \ker \varphi_i = \operatorname{Im} \varphi_{i+1} \cong \frac{G_i}{\ker \varphi_{i+1}} = \frac{G_i}{\operatorname{Im} \varphi_{i+2}} = \operatorname{coker} \varphi_{i+2}$$

Assim $M \cong \text{coker}\varphi_{i+2} = \text{coker}(F_1 \to F_0)$, onde

$$\mathbb{F}: \qquad \cdots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to \cdots$$

é tal que $F_j = G_{i+j+1}$, ou seja, $\mathbb{F}$ é uma reenumeração de $\mathbb{G}$. Logo existe um complexo totalmente acíclico $\mathbb{F}$ tal que $M \cong \text{coker}\,(F_1 \to F_0)$. Portanto M é um módulo totalmente reflexivo. □

1.3 Módulos livres de torção

Veremos que as propriedades de módulos livres de torção nos fornecem uma condição necessária para que um módulo finitamente gerado seja totalmente reflexivo. Em seguida, demonstraremos mais uma propriedade importante de tal classe de módulos.

Definição 1.3. Para um R-módulo M, o seu *submódulo de torção*, denotado por $\tau(M)$, é definido como

$$\tau(M) = \{x \in M \mid \exists r \in R\backslash \mathrm{z}(R) \text{ tal que } rx = 0\}.$$

O módulo M é de *torção* se $\tau(M) = M$ e *livre de torção* se $\tau(M) = 0$. Note que M é livre de torção se, e somente se, todos os divisores-de-zero de M são também divisores-de-zero de R, e podemos escrever

$$\tau(M) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{z}_R(M) \subseteq \mathrm{z}(R).$$

É fácil verificar que módulos livres são livres de torção, e que submódulos de módulos livres de torção ainda são livres de torção.

Proposição 1.8. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Então M^* é livre de torção.

Demonstração. Se $M = 0$, a afirmação é trivial. Para $M \neq 0$ existe um inteiro $\beta \geq 1$ tal que $M \cong R^\beta/N$ para algum N submódulo de R^β. Assim obtemos a sequência exata $R^\beta \xrightarrow{\pi} M \to 0$ aplicando $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ obtemos a sequência exata

$$0 \to M^* \xrightarrow{\pi^*} R^\beta.$$

Logo, $M^* \cong \operatorname{Im} \pi^*$. Como R^β é livre de torção, pois é livre, e $\operatorname{Im} \pi^*$ é um submódulo de R^β, segue que M^* é livre de torção. □

Agora podemos provar uma condição necessária para um módulo ser totalmente reflexivo.

Corolário 1.9. Todo módulo reflexivo é livre de torção. Em particular, todo módulo totalmente reflexivo é livre de torção.

Demonstração. Seja M reflexivo, então $M \cong M^{**}$. Como M é finitamente gerado temos que M^* é finitamente gerado. Assim, pela proposição anterior temos que $M^{**} = (M^*)^*$ é livre de torção. Portanto M é livre de torção. □

Provaremos mais uma propriedade de módulos totalmente reflexivos.

Proposição 1.10. Se M é totalmente reflexivo, então M^* é totalmente reflexivo.

Demonstração. Por hipótese temos que σ_M é um isomorfismo, e

$$\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0 = \operatorname{Ext}^i_R(M^*, R) \text{ para todo } i > 0.$$

Como σ_M é um isomorfismo é fácil verificar que σ_{M^*} também é um isomorfismo. Assim,

(1) M^* é reflexivo,

(2) $\operatorname{Ext}^i_R(M^*, R) = 0$, para todo $i > 0$,

(3) $\operatorname{Ext}^i_R(M^{**}, R) \cong \operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0$, para todo $i > 0$.

Portanto M^* é totalmente reflexivo. □

A recíproca da proposição acima não vale. Tome $M \neq 0$ um módulo de torção e G totalmente reflexivo. Então,

$$(G \oplus M)^* = \operatorname{Hom}_R(G \oplus M, R) \cong \operatorname{Hom}_R(G, R) \oplus \operatorname{Hom}_R(M, R).$$

Como $M = \tau(M)$, temos que $\operatorname{Hom}_R(M, R) = 0$. Logo,

$$(G \oplus M)^* \cong \operatorname{Hom}_R(G, R) = G^*.$$

Sendo G totalmente reflexivo, segue da Proposição 1.10 que $G^* \cong (G \oplus M)^*$ é totalmente reflexivo. Mas $G \oplus M$ não é totalmente reflexivo, pois, como $M = \tau(M)$, temos que, dado $m \in M$ não-nulo, existe $r \in R \backslash \mathrm{z}(R)$ tal que $rm = 0$. Logo, $(0, m) \in G \oplus M$ é não-nulo, e

$$r(0, m) = (0, rm) = (0, 0) = 0_{G \oplus M}.$$

Assim, $r \in \mathrm{z}_R(G \oplus M)$, mas $r \notin \mathrm{z}(R)$. Logo, pelo comentário seguinte à Definição 1.3, $G \oplus M$ não é livre de torção, e portanto, não é totalmente reflexivo.

Capítulo 2

Dimensão de Gorenstein

Neste capítulo, apresentaremos o conceito de dimensão de Gorenstein, bem como algumas de suas propriedades. Concluiremos com uma demonstração da clássica fórmula de Auslander-Bridger (que generaliza a fórmula de Auslander-Buchsbaum, vide Teorema B.14) bem como o Teorema de Gorenstein através da noção de G-dimensão. As principais referências utilizadas foram [3], [10] e [11].

2.1 G-dimensão (Parte I)

Introduziremos a noção de *dimensão de Gorenstein*, também chamada de *G-dimensão*, e estabeleceremos sua relação com os módulos totalmente reflexivos. Além disso, veremos que, para certos módulos, é suficiente verificar uma certa condição dentre as exigidas na Definição 1.1.

Definição 2.1. Uma *G-resolução* de um R-módulo finitamente gerado M é uma sequência exata

$$\cdots \to G_i \to G_{i-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0,$$

onde cada G_i é totalmente reflexivo. A resolução é dita de *comprimento* n se $G_n \neq 0$ e $G_i = 0$ para $i > n$.

Note que, como R é Noetheriano, todo R-módulo finitamente gerado admite uma G-resolução, precisamente tem uma resolução por módulos livres de posto finito, que, como já vimos no Exemplo 1.1, são totalmente reflexivos.

Definição 2.2. Para um R-módulo finitamente gerado $M \neq 0$ a *G-dimensão*, denotada por $\text{G-dim}_R M$, é o menor inteiro $n \geq 0$ tal que existe uma G-resolução de M de comprimento n. Se não existe tal inteiro, dizemos que $\text{G-dim}_R M$ é infinita. Por convenção, definimos $\text{G-dim}_R 0 = -\infty$, e escrevemos $\text{G-dim}_R M < \infty$ quando M possui uma G-resolução de comprimento finito. Assim, em particular, o módulo nulo tem G-dimensão finita.

Note que para todo R-módulo finitamente gerado M tem-se

$$\text{G-dim}_R M \in \{-\infty\} \cup \{n \geq 0 \mid n \text{ é inteiro}\} \cup \{\infty\}.$$

Se $\text{G-dim}_R M \leq n$ então M tem uma G-resolução de comprimento m para todo $m \geq n$ (para ver isso, basta adicionar somandos diretos livres à resolução de comprimento n).

A seguir apresentaremos uma importante caracterização, a qual assegura que os módulos totalmente reflexivos não-nulos são exatamente os módulos de G-dimensão zero.

Proposição 2.1. Seja $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Então M é totalmente reflexivo se, e somente se, $\text{G-dim}_R M = 0$

Demonstração. Se M é totalmente reflexivo, então a sequência exata

$$0 \to M \to M \to 0$$

é uma G-resolução de M. Assim, segue por definição que $\text{G-dim}_R M = 0$.

Por outro lado, se a G-dimensão de M é zero, então existe uma G-resolução de M tal que $G_i = 0$ para todo $i > 0$. Daí, podemos escrever essa G-resolução como

$$0 \to G_0 \to M \to 0$$

Portanto, $M \cong G_0$ é totalmente reflexivo. $\square$

Para que um dado módulo de G-dimensão finita seja totalmente reflexivo, é suficiente verificar apenas a condição (2) da Definição 1.1. Tal resultado será exposto no próximo teorema. Precisaremos, primeiramente, de um resultado auxiliar.

Proposição 2.2. Seja M um R-módulo finitamente gerado e considere uma G-resolução de M

$$\cdots \to G_i \to G_{i-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0.$$

Definimos $K_0 = M$, $K_1 = \ker(G_0 \to M)$, e $K_j = \ker(G_{j-1} \to G_{j-2})$ para $j \geq 2$. Então, para $i > 0$ temos

$$\mathrm{Ext}_R^i(K_j, R) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+j}(M, R).$$

Além disso, se K_n é totalmente reflexivo para algum $n \geq 1$, então para $j < n$ temos

$$\text{G-dim}_R\, K_j \leq n - j,$$

valendo a igualdade se $\text{G-dim}_R\, M = n$.

Demonstração. Se $j = 0$ o isomorfimo é, na verdade, uma igualdade $\mathrm{Ext}_R^i(K_0, R) = \mathrm{Ext}_R^i(M, R)$. Para cada $j \geq 1$, temos uma sequência exata curta

$$0 \to K_j \to G_{j-1} \to K_{j-1} \to 0,$$

pois $K_{j-1} = \ker(G_{j-2} \to G_{j-3}) = \mathrm{Im}\,(G_{j-1} \to G_{j-2})$. Como G_{j-1} é totalmente reflexivo, aplicando o Corolario 1.4 (2) obtemos os isomorfimos

$$\mathrm{Ext}_R^i(K_j, R) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(K_{j-1}, R), \quad \text{para todo} \quad i > 0.$$

Fazendo o mesmo para G_{j-2}, temos $\mathrm{Ext}_R^i(K_{j-1}, R) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(K_{j-2}, R)$. Repetimos esse processo até atingirmos $\mathrm{Ext}_R^i(K_1, R) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(K_0, R) = \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, R)$. Assim,

$$\mathrm{Ext}_R^i(K_j, R) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(K_{j-1}, R) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+2}(K_{j-2}, R) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}_R^{i+j}(M, R).$$

Agora, suponha que existe $n \geq 1$ tal que K_n é totalmente reflexivo. Como $K_n = \ker(G_{n-1} \to G_{n-2})$, obtemos a sequência exata

$$0 \to K_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0,$$

que é uma G-resolução de M de comprimento n, e assim $\text{G-dim}_R M \leq n$. Tome $j < n$. Por exatidão e pelo Teorema do Isomorfismo temos

$$K_j = \ker(G_{j-1} \to G_{j-2}) = \operatorname{Im}(G_j \to G_{j-1}) \cong \frac{G_j}{\ker(G_j \to G_{j-1})} = \frac{G_j}{\operatorname{Im}(G_{j+1} \to G_j)}.$$

Logo, $K_j \cong \operatorname{coker}(G_{j+1} \to G_j)$. Assim, obtemos a sequência exata

$$0 \to K_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_j \to K_j \to 0.$$

Como K_n e G_i são totalmente reflexivos segue que a sequência acima é uma G-resolução de K_j de comprimento $n - j$, portanto, $\text{G-dim}_R K_j \leq n - j$.

Finalmente, suponhamos que $\text{G-dim}_R M = n$, e por absurdo que $\text{G-dim}_R K_j < n - j$ para algum $j < n$. Escreva $\text{G-dim}_R K_j = m$, logo K_j possui uma G-resolução de comprimento m

$$0 \to \widetilde{G}_m \to \widetilde{G}_{m-1} \to \cdots \to \widetilde{G}_0 \to K_j \to 0.$$

Assim obtemos uma G-resolução de M

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{G}_m \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \widetilde{G}_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & G_{j-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & & K_j \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

de comprimento $m + j < n - j + j = n$, o que contradiz a minimalidade de n. Portanto, $\text{G-dim}_R K_j = n - j$ para $j < n$. $\square$

Teorema 2.3. *Seja M um R-módulo finitamente gerado com G-dimensão finita. Se $\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0$ para todo $i > 0$, então M é totalmente reflexivo.*

Demonstração. Como $\text{G-dim}_R M < \infty$, então M possui uma G-resolução de comprimento finito, isto é, existe $n \geq 0$ tal que $\text{G-dim}_R M \leq n$. Se $n = 0$ o resultado segue. Assim, podemos supor $n \geq 1$. Procederemos por indução sobre n.

Primeiro assumimos que $\text{G-dim}_R M \leq 1$, então temos a sequência exata curta

$$0 \to G_1 \to G_0 \to M \to 0,$$

onde os módulos G_1 e G_0 são totalmente reflexivos. Como $\text{Ext}_R^1(M, R) = 0$ segue da Proposição 1.3(3) que M é totalmente reflexivo.

Agora, seja $n > 1$ e suponha que $\text{G-dim}_R M \leq n - 1$ impica M totalmente reflexivo. Como $\text{G-dim}_R M \leq n$, o módulo M tem uma G-resolução de comprimento n:

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0.$$

Aplicando a Proposição 2.2 com $j = n-1$ temos $\text{Ext}_R^i(K_{n-1}, R) \cong \text{Ext}_R^{i+n-1}(M, R) = 0$ para todo $i > 0$. Como $j < n$, segue novamente da Proposição 2.2 que $\text{G-dim}_R K_{n-1} \leq n-(n-1) = 1$. Logo, pelo que já provamos, segue que K_{n-1} é totalmente reflexivo. Como $K_{n-1} = \ker(G_{n-2} \to G_{n-3})$, obtemos uma G-resolução de M de comprimento $n - 1$

$$0 \to K_{n-1} \to G_{n-2} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0,$$

o que mostra que $\text{G-dim}_R M \leq n-1$. Portanto, por hipótese de indução, temos que M é totalmente reflexivo. □

O teorema acima nos garante que, a fim de que um módulo com G-dimensão finita seja totalmente reflexivo, é suficiente verificar o anulamento dos módulos $\text{Ext}_R^i(M, R)$, de modo que, neste caso, a condição (2) da Definição 1.1 implica em (1) e (3).

Agora mostraremos que, para módulos de G-dimensão finita, é possivel expressar a dimensão de Gorenstein em termos de $\text{Ext}_R^i(-, R)$.

Teorema 2.4. *Seja M um R-módulo finitamente gerado e seja $n \geq 0$ um inteiro. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\text{G-dim}_R M \leq n$.

(2) $\text{G-dim}_R M < \infty$ *e* $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ *para todo* $i > n$.

Além disso, se $\text{G-dim}_R M < \infty$, *então*

$$\text{G-dim}_R M = \sup\{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}.$$

Demonstração. Para $n = 0$ as duas condições são equivalentes pelo Teorema 2.3; ambas dizem que M é totalmente reflexivo. Assim, podemos assumir que n é positivo.

(1) $\Rightarrow$ (2): Se $\text{G-dim}_R M \leq n$, então $\text{G-dim}_R M < \infty$ e M tem uma G-resolução de comprimento n:

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0.$$

Pela Proposição 2.2 e pelo fato de que $K_n \cong G_n$ é totalmente reflexivo, temos $\operatorname{Ext}^{j+n}_R(M, R) \cong \operatorname{Ext}^j_R(K_n, R) = 0$ para todo $j > 0$, que podemos reescrever como $\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0$ para todo $i > n$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Como $\text{G-dim}_R M < \infty$, então M tem uma G-resolução de comprimento finito, digamos p:

$$0 \to G_p \to G_{p-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0.$$

Se $p \leq n$ não há o que provar, então assumimos $p > n$. Definindo K_n como na Proposição 2.2, obtemos uma sequência exata

$$0 \to K_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0,$$

onde $\text{G-dim}_R K_n \leq p - n$, novamente pela Proposição 2.2. Assim obtemos $\operatorname{Ext}^i_R(K_n, R) \cong \operatorname{Ext}^{i+n}_R(M, R) = 0$ para todo $i > 0$. Logo, pelo Teorema 2.3, segue que K_n é totalmente reflexivo. Portanto, M tem uma G-resolução de comprimento n, como desejado.

Agora, assuma que $n = \text{G-dim}_R M < \infty$ e seja $\mathcal{C} = \{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}$. Note que $n \in \mathcal{C}$, pois caso contrário, teríamos, por (1) $\Rightarrow$ (2) que $\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0$ para todo $i > n - 1$. Daí, $\text{G-dim}_R M \leq n - 1$, por (2) $\Rightarrow$ (1), o que contrária a minimalidade de n. Tome $i \in \mathcal{C}$, pela implicação (1) $\Rightarrow$ (2), temos que $i \leq n$. Portanto $n \doteq \sup \mathcal{C}$. $\square$

Os Teoremas 2.3 e 2.4 nos dizem que, para que um módulo com G-dimensão menor igual a n seja totalmente reflexivo, é suficiente verificar o anulamento dos módulos $\operatorname{Ext}^i_R(-, R)$ para $1 \leq i \leq n$.

2.2 G-dimensão (Parte II)

Daremos continuidade à sequência de resultados envolvendo G-dimensão.

Proposição 2.5. Seja M um R-módulo finitamente gerado com $\text{G-dim}_R M < \infty$ e não-nula. Então, existe uma sequência exata curta de R-módulos finitamente gerados

$$0 \to K \to T \to M \to 0$$

com T totalmente reflexivo e $\text{G-dim}_R K = \text{G-dim}_R M - 1$.

Demonstração. Se $\text{G-dim}_R M = 1$, então existe uma G-resolução de M de comprimento 1:

$$0 \to G_1 \to G_0 \to M \to 0.$$

Tome $K = G_1$ e $T = G_0$, assim, $\text{G-dim}_R K = 0 = \text{G-dim}_R M - 1$.

Se $\text{G-dim}_R M = n > 1$, então existe uma G-resolução de comprimento n:

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$$

com $K_1 = \ker(G_0 \to M) \neq 0$. Como $1 < n$, temos pela Proposição 2.2 que $\text{G-dim}_R K_1 = n - 1 = \text{G-dim}_R M - 1$. Tomando $K = K_1$ e $T = G_0$ obtemos o resultado desejado. $\square$

Proposição 2.6. Seja $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos finitamente gerados com M totalmente reflexivo.

(1) Se $\text{G-dim}_R M' \leq d$, então $\text{G-dim}_R M'' \leq d + 1$.

(2) Se $\text{G-dim}_R M' < \infty$ e $\text{G-dim}_R M'' > 0$, então $\text{G-dim}_R M' = \text{G-dim}_R M'' - 1$.

Demonstração. (1): Tome uma G-resolução de M' de comprimento d:

$$0 \to G_d \to \cdots \to G_0 \to M' \to 0.$$

Daí, obtemos a sequência exata $0 \to G_d \to \cdots \to G_0 \to M \to M'' \to 0$ que é uma G-resolução de M'' de comprimento $d + 1$.

(2): Sendo M totalmente reflexivo, temos pelo Corolário 1.4(2) que existem os isomorfismos $\operatorname{Ext}_R^i(M', R) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+1}(M'', R)$ para todo $i > 0$. Pelo item (1), temos que $\operatorname{G-dim}_R M' < \infty$ implica $\operatorname{G-dim}_R M'' < \infty$. Sejam $d' = \operatorname{G-dim}_R M'$ e $d'' = \operatorname{G-dim}_R M''$, pelo Teorema 2.4 temos

$$d' = \sup\{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}_R^i(M', R) \neq 0\}$$

e

$$d'' = \sup\{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}_R^i(M'', R) \neq 0\}.$$

Logo, $\operatorname{Ext}_R^i(M'', R) = 0$ para $i > d''$ que implica $\operatorname{Ext}_R^i(M', R) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+1}(M'', R) = 0$ para $i > d''-1$. Assim, $d' \leq d'' - 1$, pelo Teorema 2.4. Por outro lado, como $\operatorname{Ext}_R^i(M', R) = 0$ para $i > d'$ temos $\operatorname{Ext}_R^{i+1}(M'', R) = 0$ para $i > d'$, que podemos escrever como $\operatorname{Ext}_R^j(M'', R) = 0$ para $j > d' + 1$. Novamente pelo Teorema 2.4 temos $d'' \leq d' + 1$. Portanto, $d' = d'' - 1$ como queríamos. □

Observação 2.1. O item (2) do resultado acima vale na ausência da hipótese $\operatorname{G-dim}_R M' < \infty$; veja [3] Corolário 3.15(b) ou [10] Corolário 1.2.9(c).

A proposição abaixo mostra a relação entre a G-dimensão e a dimensão projetiva.

Proposição 2.7. Para todo R-módulo finitamente gerado M com $\operatorname{pd}_R M < \infty$ vale

$$\operatorname{G-dim}_R M = \operatorname{pd}_R M.$$

Em particular, neste caso, temos $\operatorname{G-dim}_R M < \infty$.

Demonstração. Se $M = 0$ não há nada a fazer. Seja $M \neq 0$ com $p = \operatorname{pd}_R M$. Assim, temos uma resolução projetiva de comprimento p:

$$0 \to P_p \to P_{p-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$$

Essa resolução é, em particular, uma G-resolução, então $\operatorname{G-dim}_R M \leq p$. Por hipótese, temos

$$\operatorname{Ext}_R^{p+1}(M, -) = 0,$$

e pela Proposição A.6 existe um R-módulo T finitamente gerado tal que $\operatorname{Ext}_R^p(M, T) \neq 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ na sequência exata curta $0 \to K \to R^\beta \to T \to 0$, obtemos a sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^p_R(M, K) \to \mathrm{Ext}^p_R(M, R^\beta) \to \mathrm{Ext}^p_R(M, T) \to 0,$$

mostrando que $\mathrm{Ext}^p_R(M, R^\beta) \neq 0$ e, portanto, $\mathrm{Ext}^p_R(M, R) \neq 0$. Como $\text{G-dim}_R M \leq p$ segue do Teorema 2.4 que $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0$ para todo $i > p$. Sendo $\mathrm{Ext}^p_R(M, R) \neq 0$, e aplicando novamente o teorema temos

$$\text{G-dim}_R M = \sup\{i \geq 0 \mid \mathrm{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\} = p = \mathrm{pd}_R M.$$

□

Os módulos totalmente reflexivos não-trivais possuem a seguinte propriedade:

Corolário 2.8. Todo módulo totalmente reflexivo não-trivial tem dimensão projetiva infinita.

Demonstração. Seja M totalmente reflexivo não-trivial, isto é, M é totalmente reflexivo mas não é projetivo. Suponhamos, por absurdo, que $\mathrm{pd}_R M$ é finita. Assim, temos pela Proposição 2.7 que $\text{G-dim}_R M = \mathrm{pd}_R M$. Sendo M totalmente reflexivo, temos pela Proposição 2.1 que $\text{G-dim}_R M = 0$. Assim, $\mathrm{pd}_R M = 0$, ou seja, M é projetivo, o que é uma contradição. Portanto, $\mathrm{pd}_R M$ é infinita. □

Lema 2.9. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Se $x \in R$ é M- e R-regular, vale

(1) $\mathrm{Tor}^R_i(M, R/(x)) = 0$ para todo $i > 0$.

(2) Se $\mathrm{Ext}^1_R(M, R) = 0$, então $\mathrm{Hom}_{R/(x)}(M/xM, R/(x)) \cong M^*/xM^*$.

(3) Se $\mathrm{Ext}^1_R(M, R) = \mathrm{Ext}^1_R(M^*, R) = 0$, então

$$\mathrm{Hom}_{R/(x)}(\mathrm{Hom}_{R/(x)}(M/xM, R/(x)), R/(x)) \cong M^{**}/xM^{**}.$$

Demonstração. Defina $\overline{R} = R/(x)$ e $\overline{M} = M/xM$. Como x é M- e R-regular temos duas sequências exatas

$$(\dagger) \qquad 0 \to R \xrightarrow{x} R \to \overline{R} \to 0 \quad \text{e}$$

$$(\ddagger) \qquad 0 \to M \xrightarrow{x} M \to \overline{M} \to 0.$$

(1): A sequência exata (†) induz uma sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_i^R(M,R) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,R) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,\overline{R}) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(M,\overline{R}) \to M \xrightarrow{x} M \to \overline{M} \to 0.$$

Obviamente os módulos $\mathrm{Tor}_i^R(M,\overline{R}) = 0$ para todo $i > 1$, pois $\mathrm{Tor}_i^R(M,R) = 0$ para todo $i > 0$. E pela exatidão de (‡) temos $\mathrm{Tor}_1^R(M,\overline{R}) = 0$.

(2): Assumimos que $\mathrm{Ext}_R^1(M,R) = 0$. A sequência (†) induz uma sequência exata longa

$$0 \to M^* \xrightarrow{x} M^* \to \mathrm{Hom}_R(M,\overline{R}) \to \mathrm{Ext}_R^1(M,R) \to \cdots,$$

de onde obtemos uma sequência exata curta. Por exatidão, $\mathrm{Hom}_R(M,\overline{R}) \cong M^*/xM^*$. Segue do Lema B.3 que $\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{R}) \cong \mathrm{Hom}_R(M,\overline{R})$, e assim $\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{R}) \cong M^*/xM^*$ como queríamos.

(3): Segue da Proposição 1.8 que M^* é livre de torção, logo x é M^*-regular. Aplicando (2) duas vezes, primeiro para M e depois para M^*, estabelecemos o isomorfismo desejado:

$$\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{R}),\overline{R}) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(M^*/xM^*,\overline{R}) \cong M^{**}/xM^{**}.$$

A prova está completa. □

Lema 2.10. Sejam M um R-módulo finitamente gerado, e $x \in R$ um elemento R-regular. Se M é totalmente reflexivo, então M/xM é um $R/(x)$-módulo totalmente reflexivo.

Demonstração. Tome $\overline{R} = R/(x)$ e $\overline{M} = M/xM$. Sendo M totalmente reflexivo, segue que $\mathrm{Ext}_R^i(M,R) = 0 = \mathrm{Ext}_R^i(M^*,R)$ para todo $i > 0$ e σ_M é um isomorfismo. Como M é livre de torção, temos que x também é M-regular. A sequência exata curta $0 \to R \xrightarrow{x} R \to \overline{R} \to 0$ induz a sequência exata longa

$$0 \to M^* \to M^* \to \mathrm{Hom}_R(M,\overline{R}) \to \mathrm{Ext}_R^1(M,R) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^i(M,R) \to \mathrm{Ext}_R^i(M,\overline{R}) \to \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,R) \to \cdots.$$

Assim, $\mathrm{Ext}_R^i(M,\overline{R}) = 0$ para todo $i > 0$. Logo, pelo Lema B.3 tem-se $\mathrm{Ext}_{\overline{R}}^i(\overline{M},\overline{R}) \cong \mathrm{Ext}_R^i(M,\overline{R}) =$

0 para todo $i > 0$. Como M^* é livre de torção, segue que x é M^*-regular, e similarmente vemos que $\operatorname{Ext}^i_{\overline{R}}(M^*/xM^*, \overline{R}) = 0$ para todo $i > 0$. Pelo Lema 2.9(2) obtemos que

$$\operatorname{Ext}^i_{\overline{R}}(\operatorname{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{R}), \overline{R}) = 0, \quad \text{para todo } \ i > 0.$$

Sendo σ_M um isomorfismo segue que $\sigma_M \otimes \overline{R}$ é um isomorfismo. Pelo Lema 2.9(3) temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R \overline{R} & \xrightarrow{\sigma_M \otimes \overline{R}} & M^{**} \otimes_R \overline{R} \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \overline{M} & \xrightarrow{\sigma_{\overline{M}}} & \operatorname{Hom}_{\overline{R}}(\operatorname{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{R}), \overline{R}) \end{array}$$

mostrando que $\sigma_{\overline{M}}$ é um isomorfismo. Portanto $\overline{M}$ é um $\overline{R}$-módulo totalmente reflexivo. □

Proposição 2.11. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Se $x \in R$ é M- e R-regular, então

$$\text{G-dim}_{R/(x)} M/xM \leq \text{G-dim}_R M.$$

Demonstração. Se $\text{G-dim}_R M = \infty$ a desigualdade é óbvia, então assumimos que M tem G-dimensão finita, digamos n, e considere uma G-resolução de M de comprimento minimal:

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0.$$

Sendo cada G_i totalmente reflexivo, segue que também são livres de torção, então x é G_i-regular para todo i. Logo, pela Proposição B.2 obtemos a sequência exata

$$0 \to G_n/xG_n \to G_{n-1}/xG_{n-1} \to \cdots \to G_0/xG_0 \to M/xM \to 0.$$

Pelo Lema 2.10 temos que cada G_i/xG_i é totalmente reflexivo. Assim, a sequência acima é uma G-resolução de M/xM de comprimento n. Portanto, $\text{G-dim}_{R/(x)} M/xM \leq n = \text{G-dim}_R M$ como desejado. □

2.3 A fórmula de Auslander-Bridger

Nesta seção, todo anel será assumido local.

Segue diretamente da definição que se M é livre de torção (por exemplo, quando M é totalmente reflexivo) então todo elemento R-regular é também M-regular. Além disso, do Lema de Nakayama e do Lema 2.10 segue, por um simples argumento indutivo, que se M é totalmente reflexivo então toda R-sequência é também uma M-sequência; em particular, $\operatorname{depth}_R M \geq \operatorname{depth} R$, e com o fundamental auxílio da fórmula de Auslander-Bridger (a ser apresentada no Teorema 2.16) veremos que vale a igualdade.

Lema 2.12. Sejam M um R-módulo finitamente gerado e $x \in R$ um elemento M- e R-regular. Então M é totalmente reflexivo se, e somente se, M/xM é um $R/(x)$-módulo totalmente reflexivo.

Demonstração. A primeira implicação foi provada no Lema 2.10. Defina $\overline{R} = R/(x)$ e $\overline{M} = M/xM$. Assumimos que $\overline{M}$ é um $\overline{R}$-módulo totalmente reflexivo, ou seja, o mapa canônico $\sigma_{\overline{M}}$ é um isomorfismo e $\operatorname{Ext}^i_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{R}) = 0 = \operatorname{Ext}^i_{\overline{R}}(\operatorname{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{R}), R)$ para todo $i > 0$. Agora, $\operatorname{Ext}^i_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{R}) \cong \operatorname{Ext}^i_R(M, \overline{R})$, e então $\operatorname{Ext}^i_R(M, \overline{R}) = 0$ para todo $i > 0$. A sequência exata curta $0 \to R \xrightarrow{x} R \to \overline{R} \to 0$ induz a sequência exata longa

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^i_R(M, R) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^i_R(M, R) \to \operatorname{Ext}^i_R(M, \overline{R}) \to \cdots$$

e evidentemente, pelo Lema de Nakayama, temos $\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0$ para todo $i > 0$. Segue do Lema 2.9(2) que $\operatorname{Hom}_{R/(x)}(M/xM, R/(x)) \cong M^*/xM^*$, e como x também é M^*-regular podemos de forma análoga concluir que $\operatorname{Ext}^i_R(M^*, R) = 0$ para todo $i > 0$. Do Lema 2.9(3), segue que $M^{**} \otimes_R \overline{R} \cong \operatorname{Hom}_{\overline{R}}(\operatorname{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{R}), \overline{R})$, daí $\sigma_M \otimes \overline{R}$ é um isomorfismo, como podemos ver no diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
M \otimes_R \overline{R} & \xrightarrow{\sigma_M \otimes \overline{R}} & M^{**} \otimes_R \overline{R} \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
\overline{M} & \xrightarrow{\sigma_{\overline{M}}} & \operatorname{Hom}_{\overline{R}}(\operatorname{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{R}), \overline{R})
\end{array}$$

Agora, para mostrar que σ_M é bijetivo, consideramos a sequência exata

$$0 \to K \to M \xrightarrow{\sigma_M} M^{**} \to C \to 0,$$

onde $K = \ker \sigma_M$ e $C = \operatorname{coker} \sigma_M$. Tensorizando com $\overline{R}$ obtemos a sequência exata

$$\overline{M} \xrightarrow{\sigma_M \otimes \overline{R}} M^{**}/xM^{**} \to C/xC \to 0,$$

o que mostra que $C/xC = 0$, já que $\sigma_M \otimes \overline{R}$ é sobrejetiva, e assim $C = 0$ pelo Lema de Nakayama. Logo, a sequência exata curta $0 \to K \to M \xrightarrow{\sigma_M} M^{**} \to 0$ induz a sequência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots \to \operatorname{Tor}_i^R(K, \overline{R}) \to \operatorname{Tor}_i^R(M, \overline{R}) \to \operatorname{Tor}_i^R(M^{**}, \overline{R}) \to \cdots \\ \cdots \to \operatorname{Tor}_1^R(M^{**}, \overline{R}) \to K/xK \to \overline{M} \xrightarrow{\sigma_M \otimes \overline{R}} M^{**}/xM^{**} \to 0. \end{aligned}$$

Como x é M^{**}-regular, temos pelo Lema 2.9(1) que $\operatorname{Tor}_1^R(M^{**}, \overline{R}) = 0$ e assim obtemos a sequência exata curta

$$0 \to K/xK \to \overline{M} \xrightarrow{\sigma_M \otimes \overline{R}} M^{**}/xM^{**} \to 0$$

o que mostra que $K/xK = 0$, já que $\sigma_M \otimes \overline{R}$ é injetiva, e assim $K = 0$. Portanto, σ_M é um isomorfismo e o resultado está provado. $\square$

Proposição 2.13. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Se $x \in R$ é M- e R-regular, então

$$\text{G-dim}_{R/(x)} M/xM = \text{G-dim}_R M.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.11 temos $\text{G-dim}_{R/(x)} M/xM \leq \text{G-dim}_R M$, portanto é suficiente provar a desigualdade $\text{G-dim}_R M \leq \text{G-dim}_{R/(x)} M/xM$. Esta desigualdade obviamente vale se M/xM tem G-dimensão infinita sobre $R/(x)$, então podemos assumir que

$$\text{G-dim}_{R/(x)} M/xM = n < \infty$$

e proceder por indução sobre n. O Lema 2.12 fornece a indução para $n = 0$. Seja $n > 0$ e vamos assumir que a desigualdade vale para $R/(x)$-módulos de G-dimensão menor ou igual a $n-1$. Pela Proposição 2.11 a G-dimensão de M sobre R é maior ou igual a n, então podemos considerar uma sequência exata curta de R-módulos

$$(\dagger) \qquad 0 \to K \to G \to M \to 0,$$

onde G é totalmente reflexivo e $K \neq 0$, pois $\text{G-dim}_R M > 0$. É claro que G é livre de torção, e como K pode ser visto como um submódulo de G segue que K também é livre de torção. Pelo Lema 2.9(1) temos $\text{Tor}_1^R(M, R/(x)) = 0$, logo a sequência exata longa induzida pela sequência exata curta acima nos dá a sequência exata curta

$$0 \to K/xK \to G/xG \to M/xM \to 0.$$

Note que G/xG é um $R/(x)$-módulo totalmente reflexivo, pelo Lema 2.12. Logo, pela Proposição 2.6(2) e Observação 2.1, temos $\text{G-dim}_{R/(x)} K/xK = n-1$, e como x é K-regular, segue da hipótese de indução que $\text{G-dim}_R K \leq n-1$. Da Proposição 2.6(2), Observação 2.1 e de (†) concluímos que

$$\text{G-dim}_R M = \text{G-dim}_R K + 1 \leq n.$$

Como queríamos. □

Corolário 2.14. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Se $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_t$ é uma sequência M- e R-regular, então

$$\text{G-dim}_R M = \text{G-dim}_{R/(\mathbf{x})} M/(\mathbf{x})M.$$

Demonstração. É imediato da Proposição 2.13, por indução sobre o comprimento t da sequência. □

Lema 2.15. Se $\operatorname{depth} R = 0$, então todo R-módulo finitamente gerado com G-dimensão finita é totalmente reflexivo.

Demonstração. Sejam $n > 0$ e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado com $\text{G-dim}_R M \leq n$. Procederemos por indução sobre n. Primeiro assumimos que $\text{G-dim}_R M \leq 1$, então temos pelo Teorema 2.4 que $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ para todo $i > 1$, e assim, usando o Teorema 2.3 é suficiente provar que $\text{Ext}_R^1(M, R) = 0$. Por hipótese, M tem uma G-resolução de comprimento 1:

$$(\dagger) \qquad 0 \to G_1 \to G_0 \to M \to 0.$$

Essa sequência exata curta induz a sequência exata longa

$$0 \to M^* \to G_0^* \to G_1^* \to \text{Ext}_R^1(M, R) \to \text{Ext}_R^1(G_0, R) \to \cdots .$$

Como G_0 é totalmente reflexivo, obtemos a sequência exata

$$0 \to M^* \to G_0^* \to G_1^* \to \operatorname{Ext}_R^1(M, R) \to 0.$$

Dualizando, temos a sequência exata

$$0 \to \operatorname{Ext}_R^1(M, R)^* \to G_1 \to G_0$$

e quando comparamos com (†), concluímos que $\operatorname{Ext}_R^1(M, R)^* = 0$. Agora, pela Proposição B.10 temos

$$\emptyset = \operatorname{Ass}_R(\operatorname{Ext}_R^1(M, R)^*) = \operatorname{Ass} R \cap \operatorname{Supp}_R(\operatorname{Ext}_R^1(M, R)),$$

e como $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} R$, pois $\operatorname{depth} R = 0$, concluímos que $(\operatorname{Ext}_R^1(M, R))_{\mathfrak{m}} = 0$, logo $\operatorname{Ext}_R^1(M, R) = 0$.

Agora, seja $n > 1$ e suponha que todo módulo com G-dimensão menor ou igual a $n - 1$ é totalmente reflexivo. Considere uma G-resolução de M de comprimento n:

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0.$$

Definimos K_{n-1} como na Proposição 2.2; logo $\operatorname{G-dim}_R K_{n-1} \leq 1$, pela mesma proposição. Então K_{n-1} é totalmente reflexivo, e obtemos uma G-resolução de M

$$0 \to K_{n-1} \to G_{n-2} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0,$$

logo $\operatorname{G-dim}_R M \leq n - 1$. Assim, pela hipótese de indução temos M totalmente reflexivo. □

Note que a G-dimensão se comporta como um refinamento da dimensão projetiva, pois, como vimos na Proposição 2.7, vale $\operatorname{G-dim}_R M = \operatorname{pd}_R M$ se $\operatorname{pd}_R M < \infty$. Tal noção possui muitas propriedades análogas às propriedades da dimensão projetiva, o que pode ser fortemente ilustrado através da fórmula de Auslander-Bridger, enunciada e provada abaixo, que fornece uma versão da tradicional fórmula de Auslander-Buchsbaum B.14 no novo contexto da G-dimensão.

Teorema 2.16 (Fórmula de Auslander-Bridger). *Seja R um anel local. Se M é um R-módulo finitamente gerado com G-dimensão finita, então*

$$\text{G-dim}_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R M.$$

Demonstração. Como $\operatorname{depth}_R 0 = \infty$ e $\text{G-dim}_R 0 = -\infty$ a igualdade é trivial para $M = 0$. Logo podemos supor $M \neq 0$ e procedemos por indução em depth de R.

Primeiro suponha que $\operatorname{depth} R = 0$, então M é totalmente reflexivo, pelo Lema 2.15, ou seja, $\text{G-dim}_R M = 0$. Logo basta provar que $\operatorname{depth}_R M = 0$. Como $M \cong M^{**}$, pela Proposição B.10, temos

$$\text{Ass}_R M = \text{Ass}_R M^{**} = \text{Ass}\, R \cap \text{Supp}_R M^*.$$

Seja $\mathfrak{m}$ o ideal maximal de R. Como $\operatorname{depth} R = 0$ e $M^* \neq 0$, temos $\mathfrak{m} \in \text{Ass}\, R$ e $(M^*)_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Assim, $\mathfrak{m} \in \text{Ass}_R M$, logo $\operatorname{depth}_R M = 0$, pela Proposição B.7.

Agora, seja $\operatorname{depth} R = n > 0$ e suponha que a igualdade desejada seja válida para R-módulos finitamente gerados sobre anéis com depth igual a $n - 1$. Existem dois casos a considerar: $\operatorname{depth}_R M > 0$ e $\operatorname{depth}_R M = 0$. No primeiro caso escolhemos um elemento $x \in \mathfrak{m}$ que seja M- e R-regular (veja Proposição B.9), então $\operatorname{depth} R/(x) = \operatorname{depth} R - 1 = n - 1$ e $\operatorname{depth}_{R/(x)} M/xM = \operatorname{depth}_R M - 1$, pela Proposição B.6. Logo, pela Proposição 2.13 e pela hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} \text{G-dim}_R M &= \text{G-dim}_{R/(x)} M/xM \\ &= \operatorname{depth} R/(x) - \operatorname{depth}_{R/(x)} M/xM \\ &= \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R M. \end{aligned}$$

Finalmente consideramos o caso $\operatorname{depth}_R M = 0$; assim M não é totalmente reflexivo, pois caso contrário teríamos $\operatorname{depth}_R M \geq \operatorname{depth} R > 0$, o que seria uma contradição. Então, pela Proposição 2.5 existe uma sequência exata curta de R-módulos finitamente gerados

$$0 \to K \to T \to M \to 0,$$

onde T é totalmente reflexivo e $\text{G-dim}_R K = \text{G-dim}_R M - 1$. Como $\operatorname{depth} R > 0$ implica $\operatorname{depth}_R T > 0$, temos $\operatorname{depth}_R K = 1$. Segue do primeiro caso que

$$\text{G-dim}_R K = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R K = \operatorname{depth} R - 1,$$

e, portanto, $\text{G-dim}_R M = \operatorname{depth} R$ como queríamos. □

Para encerrar esta seção, veremos uma importante caracterização da propriedade de Gorenstein através da noção de G-dimensão. Esse é o resultado análogo, para propriedade de Gorenstein, ao Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre B.18 que fornece a clássica caracterização de regularidade. A definição de anel Gorenstein (Cohen-Macaulay, regular), bem como algumas de suas propriedades são apresentadas no *Apêndice* B.

Teorema 2.17 (Teorema de Gorenstein via G-dimensão). *Seja R um anel local com corpo residual k. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) R é Gorenstein.

(2) $\text{G-dim}_R k < \infty$.

(3) $\text{G-dim}_R M < \infty$ *para todo R-módulo M finitamente gerado.*

Demonstração. Evidentemente, (3) $\Rightarrow$ (2), então é suficiente provar que (2) $\Rightarrow$ (1) e (1) $\Rightarrow$ (3).

(2) $\Rightarrow$ (1): Suponhamos que $\text{G-dim}_R k < \infty$. Segue do Teorema 2.4 e da Proposição B.20 que

$$\text{G-dim}_R k = \sup\{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}^i_R(k, R) \neq 0\} = \operatorname{id}_R R.$$

Portanto, $\operatorname{id}_R R < \infty$, ou seja, R é Gorenstein.

(1) $\Rightarrow$ (3): Suponha que R é Gorenstein, e seja $d = \operatorname{id}_R R < \infty$. Pela Fómula de Bass B.21 temos $d = \operatorname{depth} R$. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Claramente, podemos supor que $M \neq 0$. Procederemos por indução sobre d para provar que $\text{G-dim}_R M \leq d$. Se $d = 0$, então R é um R-módulo injetivo, e assim $\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0 = \operatorname{Ext}^i_R(M^*, R)$ para todo $i > 0$, pela Proposição B.19. Além disso, temos um isomorfimo $M^{**} \cong M \otimes_R \operatorname{Hom}_R(R, R)$ (veja Proposição A.2), e assim

o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sigma_M} & M^{**} \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ M \otimes_R R & \xrightarrow{\cong} & M \otimes_R \operatorname{Hom}_R(R,R) \end{array}$$

fornece que σ_M é um isomorfismo. Logo, M é totalmente reflexivo, o que implica $\text{G-dim}_R M \leq 0$.

Agora, seja $d > 0$ e suponha que a afirmação vale para anéis com depth igual a $d-1$. Se $\operatorname{depth}_R M > 0$ escolhemos um elemento x no ideal maximal de R que seja M- e R-regular (veja Proposição B.9), e então $\operatorname{depth} R/(x) = \operatorname{depth} R - 1 = d - 1$, pela Proposição B.6. Pela Proposição 2.13 e pela hipótese de indução temos

$$\text{G-dim}_R M = \text{G-dim}_{R/(x)} M/xM \leq d-1.$$

Se $\operatorname{depth}_R M = 0$, o módulo M não é totalmente reflexivo, então podemos considerar uma sequência exata curta

$$0 \to K \to T \to M \to 0,$$

onde T é totalmente reflexivo e $K \neq 0$. Logo $\operatorname{depth}_R K = 1$, de modo que o primeiro caso implica $\text{G-dim}_R K \leq d-1$, e portanto, $\text{G-dim}_R M \leq d$, pela Proposição 2.6(1). Portanto, o resultado está provado. $\square$

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações fundamentais da teoria desenvolvida até o momento. As principais referências utilizadas foram [22], [23] e [24].

3.1 Anéis Gorenstein

Estudaremos o comportamento dos módulos totalmente reflexivos sobre anéis Gorenstein. Tais módulos, como será verificado adiante, são amplamente estudados, inclusive na atualidade. Primeiramente, daremos caracterizações para a propriedade de Cohen-Macaulaycidade.

Teorema 3.1. *Seja R um anel local. Então R é Cohen-Macaulay se, e somente se, todo R-módulo totalmente reflexivo não-nulo é Cohen-Macaulay maximal.*

Demonstração. Se R é um anel Cohen-Macaulay, então $\operatorname{depth} R = \dim R$. Seja $M \neq 0$ um R-módulo totalmente reflexivo. Logo, $\text{G-dim}_R M = 0 < \infty$. Pela fórmula de Auslander-Bridger 2.16, temos

$$\text{G-dim}_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R M.$$

Assim, $\operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth} R = \dim R$. Portanto, M é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal.

Por outro lado, se a condição de ser totalmente reflexivo e não-nulo implica em Cohen-Macaulaycidade maximal, então, como R é um módulo totalmente reflexivo, temos que R é Cohen-Macaulay maximal, e portanto, R é um anel Cohen-Macaulay. $\square$

Teorema 3.2. *Seja R um anel local. Então R é Cohen-Macaulay se, e somente se, existe um R-módulo Cohen-Macaulay maximal e totalmente reflexivo.*

Demonstração. Se R é Cohen-Macaulay, o próprio R é um módulo Cohen-Macaulay maximal e totalmente reflexivo. Reciprocamente, se existe um R-módulo, M Cohen-Macaulay maximal e totalmente reflexivo, então a fórmula de Auslander-Bridger 2.16 fornece

$$0 = \operatorname{G-dim}_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R M.$$

Logo, $\operatorname{depth} R = \operatorname{depth}_R M = \dim R$. □

A fim de provarmos o principal teorema desta seção, precisamos primeiramente dos lemas a seguir.

Lema 3.3. Sejam R um anel local e K_i o i-ésimo módulo de sizigias de um R-módulo finitamente gerado M. Então, para todo $i \geq 0$ temos

$$\operatorname{depth}_R K_i \geq \min\{i, \operatorname{depth} R\}.$$

Demonstração. Claramente podemos supor que $i \geq 1$, pois $K_0 = M$. Seja

$$\cdots \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$$

uma resolução livre de M. Logo $K_1 = \ker(F_0 \to M)$ e $K_i = \ker(F_{i-1} \to F_{i-2})$ para $i > 1$. Vamos usar indução sobre i. Para $i = 1$, temos a sequência exata curta

$$0 \to K_1 \to F_0 \to M \to 0.$$

Logo, $\operatorname{depth}_R K_1 \geq \min\{\operatorname{depth}_R F_0, \operatorname{depth}_R M + 1\}$, pela Proposição B.5. Sendo F_0 livre de posto finito segue que $\operatorname{depth}_R F_0 = \operatorname{depth} R$, e como $\operatorname{depth}_R M + 1 \geq 1$ temos $\operatorname{depth}_R K_1 \geq \min\{\operatorname{depth} R, 1\}$. Seja $i > 1$ e suponha que $\operatorname{depth}_R K_{i-1} \geq \min\{i-1, \operatorname{depth} R\}$. Considere a sequência exata curta

$$0 \to K_i \to F_{i-1} \to K_{i-1} \to 0.$$

Logo, novamente pela Proposição B.5, temos

$$\operatorname{depth}_R K_i \geq \min\{\operatorname{depth}_R F_{i-1}, \operatorname{depth}_R K_{i-1} + 1\} \geq \min\{\operatorname{depth} R, i\},$$

pois $\operatorname{depth}_R F_{i-1} = \operatorname{depth} R$ e, por hipótese de indução, temos $\operatorname{depth}_R K_{i-1}+1 \geq i$ ou $\operatorname{depth}_R K_{i-1}+1 \geq \operatorname{depth} R + 1$. Assim, está provado o lema. □

Lema 3.4. Sejam R um anel local Cohen-Macaulay com $\dim R = d$ e M um R-módulo finitamente gerado. Então o d-ésimo módulo de sizigias de M é o módulo nulo ou Cohen-Macaulay maximal.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $d > 0$, pois caso contrário todo R-módulo é Cohen-Macaulay maximal. Seja

$$\cdots \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$$

uma resolução livre de M. Seja K_i o i-ésimo módulo de sizigias de M. Pelo Lema 3.3, temos que $\operatorname{depth}_R K_i \geq \min\{i, \operatorname{depth} R\}$ para todo $i \geq 1$. Se $K_d = 0$ não há o que fazer. Assuma $K_d \neq 0$, como R é Cohen-Macaulay temos $\operatorname{depth} K_d \geq \min\{d, \operatorname{depth} R\} = d$. Pela Proposição B.7 temos $d \leq \operatorname{depth}_R K_d \leq \dim K_d \leq \dim R = d$. Portanto K_d é Cohen-Macaulay maximal. □

Teorema 3.5. *Seja R um anel local. Então R é Gorenstein se, e somente se, os R-módulos totalmente reflexivos e não-nulos são precisamente os Cohen-Macaulay maximais.*

Demonstração. Suponhamos que R é um anel Gorenstein. Logo R é um anel Cohen-Macaulay, e pelo Teorema 3.1 temos que todo R-módulo totalmente reflexivo e não-nulo é Cohen-Macaulay maximal. Queremos mostrar que todo Cohen-Macaulay maximal não-nulo é totalmente reflexivo. Seja $M \neq 0$ tal que $\operatorname{depth}_R M = \dim R$. Como R é Cohen-Macaulay temos $\operatorname{depth} R = \dim R$. Logo, $\operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth} R$. Sendo M finitamente gerado e R Gorenstein, segue do Teorema de Gorenstein 2.17 que $\operatorname{G-dim}_R M < \infty$. Pela fórmula de Auslander-Bridger 2.16 temos

$$\operatorname{G-dim}_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R M = 0.$$

Portanto M é totalmente reflexivo.

Reciprocamente, suponha que um R-módulo $M \neq 0$ é totalmente reflexivo se, e somente se, é Cohen-Macaulay maximal. Em particular, R já é Cohen-Macaulay. Sejam k o corpo residual de R e

$$\cdots \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_0 \to k \to 0$$

um resolução livre de k. Sendo R local temos que $\dim R < \infty$; digamos $d = \dim R$. Como R é Cohen-Macaulay temos, pelo Lema 3.4, que o d-ésimo módulo de sizigias de k, denotado por K_d, é nulo ou Cohen-Macaulay maximal.

Se $K_d = 0$, então $0 \to F_{d-1} \to \cdots \to F_0 \to k \to 0$ é uma G-resolução de k de comprimento finito.

Se K_d é Cohen-Macaulay maximal, então por hipótese temos que K_d é totalmente reflexivo. Logo $0 \to K_d \to F_{d-1} \to \cdots \to F_0 \to k \to 0$ é uma G-resolução de k de comprimento finito.

Em todo caso temos $\text{G-dim}_R\, k < \infty$. Portanto, pelo Teorema de Gorenstein segue que R é um anel Gorenstein. □

Exemplo 3.1. Sejam k um corpo e $R = k[[X,Y]]/(XY)$. Como o anel local $k[[X,Y]]$ é Gorenstein e XY é um elemento $k[[X,Y]]$-regular, a Proposição B.23, nos diz que R é um anel Gorenstein. Sejam x e y as imagens de X e Y em R, respectivamente. Pelo Exemplo 1.2, temos que (x) e (y) são totalmente reflexivos, como R-módulos. Note que

$$M = (x) \otimes_R (y) \cong R/(y) \otimes_R R/(x) \cong R/(x,y) \cong k[[X,Y]]/(X,Y) \cong k.$$

Logo, $\operatorname{depth}_R M = 0 \neq 1 = \dim R$. Assim, $(x) \otimes_R (y)$ não é Cohen-Macaulay maximal e, portanto, pelo Teorema 3.5 não pode ser totalmente reflexivo. Isso mostra que a propriedade de reflexividade total não é preservada por produto tensorial. Entretanto sob certas condições (por exemplo, se R é uma interseção completa local e $\operatorname{Tor}_i^R(M_1, M_2) = 0$ para todo $i > 0$) tem-se uma reposta afirmativa; veja [20].

Corolário 3.6. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Artiniano.

(1) Se R é Gorenstein, então todo módulo finitamente gerado é totalmente reflexivo.

(2) R é Gorenstein se, e somente se, $\mathfrak{m}$ é totalmente reflexivo.

Demonstração. (1): Como R é Artiniano, segue que $\dim R = 0$. Assim, todo módulo finitamente gerado não-nulo é Cohen-Macaulay maximal. Sendo R Gorenstein, o resultado está provado, pelo Teorema 3.5.

(2): Suponhamos que R é Gorenstein, como $\dim R = 0$, temos

$$0 \leq \operatorname{depth}_R \mathfrak{m} \leq \dim \mathfrak{m} \leq \dim R = 0.$$

Assim, $\mathfrak{m}$ é Cohen-Macaulay maximal, e pelo Teorema 3.5 segue que $\mathfrak{m}$ é totalmente reflexivo.

Reciprocamente, como $\mathfrak{m}$ é totalmente reflexivo temos uma G-resolução de k de comprimento 1 dada por

$$0 \to \mathfrak{m} \to R \to k \to 0.$$

Logo, $\operatorname{G-dim}_R k \leq 1 < \infty$. Pelo Teorema de Gorenstein 2.17 segue que R é Gorenstein. □

Corolário 3.7. Seja R um anel local Gorenstein com $\dim R = 1$. Se M é um R-módulo finitamente gerado, então M é totalmente reflexivo ou $\operatorname{G-dim}_R M = 1$. Além disso, se $\operatorname{Ext}^1_R(M, R) = 0$, então M é totalmente reflexivo.

Demonstração. Dado $M \neq 0$, como R é local e Gorenstein temos que $\operatorname{G-dim}_R M < \infty$, pelo Teorema de Gorenstein 2.17. Segue, da fórmula de Auslander-Bridger 2.16 e da Cohen-Macaulaycidade de R, que

$$\operatorname{G-dim}_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R M = 1 - \operatorname{depth}_R M.$$

Sabemos que

$$0 \leq \operatorname{depth}_R M \leq \dim M \leq \dim R = 1.$$

Assim, temos dois casos: Se $\operatorname{depth}_R M = 1$ temos $\operatorname{G-dim}_R M = 1 - 1 = 0$, logo M é totalmente reflexivo. Se $\operatorname{depth}_R M = 0$, então $\operatorname{G-dim}_R M = 1 - 0 = 1$.

Agora, se $\operatorname{Ext}^1_R(M, R) = 0$, suponha por contradição que M não é totalmente reflexivo. Pelo que já provamos, temos $\operatorname{G-dim}_R M = 1$, e logo temos uma G-resolução de M de comprimento 1

$$0 \to G_1 \to G_0 \to M \to 0.$$

Como os módulos G_1 e G_0 são totalmente reflexivos e $\operatorname{Ext}^1_R(M, R) = 0$ segue da Proposição 1.3 (3) que M é totalmente reflexivo, o que é uma contradição. $\square$

A seguinte proposição nos diz que, sobre certos anéis Gorenstein, reflexividade implica em reflexividade total.

Proposição 3.8. Sejam R um anel local Gorenstein com $\dim R \leq 2$ e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Se M é reflexivo, então é totalmente reflexivo. Em particular, se R é regular e $\dim R \leq 2$, então todo módulo reflexivo é livre.

Demonstração. Pela Proposição B.15, e da hipótese $M \cong \operatorname{Hom}_R(M^*, R)$, temos que

$$\operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth}_R \operatorname{Hom}_R(M^*, R) \geq \min\{2, \operatorname{depth} R\} = \operatorname{depth} R.$$

Mas $\operatorname{depth}_R M \leq \dim R = \operatorname{depth} R$. Logo, tem-se a igualdade. Como R é Gorenstein temos $\operatorname{G-dim}_R M < \infty$, pelo Teorema de Gorenstein 2.17, e assim, pela fórmula de Auslander-Bridger 2.16 obtemos $\operatorname{G-dim}_R M = 0$. Portanto, M é totalmente reflexivo. Em particular, se R é regular, então $\operatorname{pd}_R M < \infty$ que implica $\operatorname{pd}_R M = \operatorname{G-dim}_R M = 0$ mostrando que M é livre. $\square$

De um modo mais geral podemos limitar a dimensão de Gorenstein de um módulo sobre um anel Gorenstein. Mais precisamente, se R é um anel local Gorenstein e M um R-módulo finitamente gerado, temos $\operatorname{G-dim}_R M \leq \dim R$. Com efeito, basta lembrar que R é Cohen-Macaulay e usar a fórmula de Auslander-Bridger 2.16

$$\operatorname{G-dim}_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R M = \dim R - \operatorname{depth}_R M \leq \dim R.$$

Para estender parte do Teorema 3.5 para o contexto global, provaremos a seguinte proposição, a qual garante que a propriedade de reflexividade total é uma propriedade local.

Proposição 3.9. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Então as seguinte afirmações são equivalentes:

(1) M é um R-módulo totalmente reflexivo,

(2) M_P é um R_P-módulo totalmente reflexivo para todo ideal $P \subset R$ primo,

(3) $M_{\mathfrak{m}}$ é um $R_{\mathfrak{m}}$-módulo totalmente reflexivo para todo ideal $\mathfrak{m} \subset R$ maximal.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Segue da Proposição 1.2.

(2) $\Rightarrow$ (3): Esta implicação é clara.

(3) $\Rightarrow$ (1): Como $M_{\mathfrak{m}}$ é um $R_{\mathfrak{m}}$-módulo totalmente reflexivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$, segue que $M_{\mathfrak{m}} \cong (M_{\mathfrak{m}})^{**} \cong (M^{**})_{\mathfrak{m}}$ para todo maximal, e logo $M \cong M^{**}$. Para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ e inteiro $i > 0$ temos

$$(\mathrm{Ext}^i_R(M,R))_{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{Ext}^i_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}}) = 0,$$

$$(\mathrm{Ext}^i_R(M^*,R))_{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{Ext}^i_{R_{\mathfrak{m}}}((M^*)_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}}) \cong \mathrm{Ext}^i_{R_{\mathfrak{m}}}((M_{\mathfrak{m}})^*, R_{\mathfrak{m}}) = 0.$$

Assim, $\mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0 = \mathrm{Ext}^i_R(M^*,R)$ para $i > 0$. Portanto, M é totalmente reflexivo. □

Para finalizar esta seção, veremos que os módulos totalmente reflexivos sobre anéis Gorenstein são exatamente os módulos Cohen-Macaulay maximais.

Corolário 3.10. Sejam R um anel Gorenstein e $M \neq 0$ um R-módulo. Então M é totalmente reflexivo se, e somente se, é Cohen-Macaulay maximal.

Demonstração. Sabemos que R é Gorenstein se, e somente se, $R_{\mathfrak{m}}$ é Gorenstein para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$. Assim, pela Proposição 3.9 e pelo Teorema 3.5 temos

$M \neq 0$ é um R-módulo totalmente reflexivo,

$\Leftrightarrow$ $M_{\mathfrak{m}} \neq 0$ é um $R_{\mathfrak{m}}$-módulo totalmente reflexivo para todo ideal $\mathfrak{m} \subset R$ maximal,

$\Leftrightarrow$ $M_{\mathfrak{m}} \neq 0$ é um $R_{\mathfrak{m}}$-módulo Cohen-Maxaulay para todo ideal $\mathfrak{m} \subset R$ maximal.

$\Leftrightarrow$ $M \neq 0$ é um R-módulo Cohen-Macaulay.

□

Agora que sabemos que os módulos totalmente reflexivos sobre anéis Gorenstein são precisamente os módulos Cohen-Macaulay maximais, que por sua vez já foram extensivamente estudados, o próximo passo natural é investigar tais módulos sobre anéis não-Gorenstein. Atualmente esse tema é fonte de vários trabalhos, dentre os quais podemos destacar [18] e as referências lá sugeridas.

3.2 Anéis G-regulares

Nesta seção, estudaremos um tipo bastante peculiar de anel, sobre os quais os módulos totalmente reflexivos são necessariamente livres.

Definição 3.1. Um anel local R é dito *G-regular* se todo R-módulo totalmente reflexivo é livre.

O resultado abaixo nos diz que em anéis locais Gorenstein, as propriedades de regularidade e G-regularidade são equivalentes.

Teorema 3.11. *Seja R um anel local. Então R é regular se, e somente se, R é Gorenstein e G-regular. Em particular, sobre um anel regular todos os módulos totalmente reflexivos são trivais.*

Demonstração. Sabemos que regular implica Gorenstein, então basta mostrar que R é G-regular. Como R é regular, segue do Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre B.18 que $\operatorname{pd}_R M < \infty$ para todo M finitamente gerado. Assim, dado $M \neq 0$ totalmente reflexivo temos que $\operatorname{pd}_R M < \infty$ e $\operatorname{G-dim}_R M = 0$. Logo, $\operatorname{pd}_R M = \operatorname{G-dim}_R M = 0$, que mostra que M é projetivo, logo livre, já que R é local. Portanto, R é G-regular.

Inversamente, suponha que R é Gorenstein e G-regular. Em particular, R é Cohen-Macaulay. Sejam k o corpo residual de R e

$$\cdots \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_0 \to k \to 0$$

uma resolução livre de k. Pelo Lema 3.4 temos que o n-ésimo módulo de sizigias K_n de k é nulo ou Cohen-Macaulay maximal, onde $n = \dim R$.

Se $K_n = 0$, então $0 \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to k \to 0$ é uma resolução livre de k de comprimento finito.

Se K_n é Cohen-Macaulay maximal, então pelo Teorema 3.5 temos K_n totalmente reflexivo, e portanto livre, pois R é G-regular. Assim $0 \to K_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to k \to 0$ é uma resolução livre de k de comprimento finito.

Portanto, $\operatorname{pd}_R k < \infty$ e, pelo Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre, R é regular. □

O Teorema 3.11, nos diz, em particular, que sobre anéis locais Gorenstein não-regulares, por exemplo no anel $k[[X,Y]]/(XY)$, sempre existe um módulo totalmente reflexivo não-trivial.

Temos a seguinte caracterização para anéis locais G-regulares:

Proposição 3.12. Seja R um anel local. Então, R é G-regular se, e somente se, para todo R-módulo finitamente gerado M tem-se $\text{G-dim}_R M = \text{pd}_R M$.

Demonstração. Suponha que R é um anel local G-regular. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Se $\text{pd}_R M < \infty$, a Proposição 2.7 garante a igualdade. Se $\text{pd}_R M = \infty$, então $\text{G-dim}_R M = \infty$, pois caso contrário existiria $n \geq 0$ inteiro tal que $\text{G-dim}_R M \leq n$, ou seja, teríamos uma G-resolução de M de comprimento n:

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0.$$

Como R é G-regular, cada G_i é livre. Logo, a sequência acima é uma resolução projetiva de M de comprimento n, isto é, $\text{pd}_R M \leq n$ que não pode ocorrer. Portanto, $\text{G-dim}_R M = \infty = \text{pd}_R M$.

Reciprocamente, dado $M \neq 0$ totalmente reflexivo, temos $\text{pd}_R M = \text{G-dim}_R M = 0$, o que implica M projetivo. Como R é local, segue que M é livre. Portanto, R é G-regular. □

Proposição 3.13. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ e $(S, \mathfrak{n})$ anéis locais e $\varphi : R \to S$ um homomorfismo local (isto é, $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$) e plano. Se S é G-regular, então R é G-regular.

Demonstração. Seja M um R-módulo totalmente reflexivo, como S é uma R-álgebra plana, segue da Proposição 1.2 que $M \otimes_R S$ é um S-módulo totalmente reflexivo. Sendo S um anel G-regular segue que $M \otimes_R S$ é um S-módulo livre. Logo, $\text{pd}_S (M \otimes_R S) = 0$. Assim, pelas Proposições A.9 e A.10 temos $\text{pd}_R M = \text{pd}_S (M \otimes_R S) = 0$ que implica que M é um R-módulo livre. Portanto, R é um anel G-regular. □

Vamos relacionar sequências regulares com anéis G-regulares.

Proposição 3.14. Sejam R um anel local e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma R-sequência. Se $R/(\mathbf{x})$ é G-regular, então R é G-regular.

Demonstração. Por um argumento simples de indução, podemos supor que $n = 1$. Denotemos $x_1 = x$ por simplicidade. Seja M um R-módulo totalmente reflexivo. Como x é um elemento R-regular, temos que M/xM é um $R/(x)$-módulo totalmente reflexivo, pelo Lema 2.10. Por hipótese

$R/(x)$ é G-regular; logo M/xM é livre. Como M é livre de torção, segue que x é M-regular. Logo, pelo Lema B.13 temos $\mathrm{pd}_R M = \mathrm{pd}_{R/(x)} M/xM = 0$. Portanto, M é livre e, assim, concluímos que R é G-regular. □

O exemplo abaixo mostra que a recíproca da Proposição 3.14, em geral, não vale.

Exemplo 3.2. Seja k um corpo e $R = k[[t]]$ o anel das séries formais. Como R é regular segue que R é G-regular. Por outro lado, sendo $t^2 \in R$ um elemento R-regular temos que $R/(t^2)$ é um anel Gorenstein, mas não é domínio, logo não é regular. Pelo Teorema 3.11, R não é G-regular.

Corolário 3.15. Sejam $R \to S$ um homomorfismo plano local de anéis locais, e $\mathfrak{m}$ o ideal maximal de R. Se R é regular e $S/\mathfrak{m}S$ é G-regular, então S também é G-regular

Demonstração. Seja $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_d$ um sistema regular de parâmetros de R. Como $(\mathbf{x}) = \mathfrak{m}$, temos que $S/\mathbf{x}S = S/\mathfrak{m}S$ é G-regular, por hipótese. Sendo S plano sobre R, segue da Proposição B.1 que $\mathbf{x}$ é S-regular. Assim, pela Proposição 3.14 o resultado segue. □

Corolário 3.16. Seja n um inteiro positivo. Um anel local R é G-regular se, e somente se, o anel local $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ é G-regular.

Demonstração. Suponhamos que R é G-regular. Como $\mathbf{x} = X_1, \ldots, X_n$ é uma $R[[X_1, \ldots, X_n]]$-sequência, o anel $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ é local e $R[[X_1, \ldots, X_n]]/(\mathbf{x}) \cong R$ é G-regular, então pela Proposição 3.14 segue que $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ é G-regular.

Reciprocamente, se o anel local $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ é G-regular. Como $R \to R[[X_1, \ldots, X_n]]$ é um homomorfismo plano local, a Proposição 3.13 garante que R é G-regular. □

Em anéis locais Cohen-Macaulay com módulo canônico (por exemplo, anéis locais Cohen-Macaulay completos), mostraremos uma condição suficiente para a G-regularidade.

Teorema 3.17. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Cohen-Macaulay com módulo canônico ω_R. Se k é um somando direto de algum módulo de sizigias de ω_R, então R é G-regular.*

Demonstração. Seja M um R-módulo totalmente reflexivo e K_n o n-ésimo módulo de sizigias de ω_R. Suponha que k é um somando direto de K_n. Afirmamos que $\mathrm{Ext}^1_R(M, \omega_R) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, K_n)$

para todo $n \geq 0$. De fato, vamos usar indução sobre n. Para $n = 0$, a afirmação é clara. Seja $n > 0$ e suponha que $\mathrm{Ext}^1_R(M, \omega_R) \cong \mathrm{Ext}^n_R(M, K_{n-1})$. Considere a sequência exata

$$0 \to K_n \to F_{n-1} \to K_{n-1} \to 0$$

onde F_{n-1} é um módulo livre de posto finito. Daí, obtemos a sequência exata longa:

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{Hom}_R(M, K_n) \to \mathrm{Hom}_R(M, F_{n-1}) \to \mathrm{Hom}_R(M, K_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^1_R(M, K_n) \to \cdots \\ \cdots \to \mathrm{Ext}^n_R(M, F_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^n_R(M, K_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, K_n) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, F_{n-1}) \to \cdots \end{gathered}$$

Sendo M totalmente reflexivo temos $\mathrm{Ext}^n_R(M, R) = 0$ para todo $n > 0$, o que implica $\mathrm{Ext}^n_R(M, F_{n-1}) = 0$ para todo $n > 0$. Logo, $\mathrm{Ext}^n_R(M, K_{n-1}) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, K_n)$. Por hipótese de indução temos $\mathrm{Ext}^1_R(M, \omega_R) \cong \mathrm{Ext}^n_R(M, K_{n-1}) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, K_n)$.

Como $\mathrm{Ext}^1_R(M, \omega_R) = 0$, pois M é Cohen-Macaulay maximal, segue que $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, K_n) = 0$, o que implica $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, k) = 0$, e assim, $\mathrm{pd}_R M < \infty$. Sendo M totalmente reflexivo, segue que M tem que ser livre, pela Proposição 2.7. □

Em seguida, mostraremos que certos anéis locais Artinianos são G-regulares.

Teorema 3.18. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local não-Gorenstein com $\mathfrak{m}^2 = 0$. Então, R é G-regular.*

Demonstração. Seja $M \neq 0$ um R-módulo totalmente reflexivo. Como R é um anel Artiniano e M é finitamente gerado temos, pelo Teorema B.28, que M é um R-módulo Noetheriano e Artiniano. Aplicando o Teorema B.29, segue que M possui submódulos indecomponíveis $M_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, tais que

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Como M é totalmente reflexivo, segue do Corolário 1.5 que $M_1, \ldots, M_n$ são totalmente reflexivos. Fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$ e escreva $N = M_i$, logo $N \neq 0$ é um módulo indecomponível com $\text{G-dim}_R N = 0$. Sendo N totalmente reflexivo temos, pela Proposição 1.7, que N é um módulo de sizigias de um complexo totalmente acíclico, e logo existe um R-módulo livre finitamente gerado F tal que $N \subseteq F$.

Se $N \subseteq \mathfrak{m}F$, então, como $\mathfrak{m}^2 = 0$, teríamos $\mathfrak{m}N = 0$, o que implicaria $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Ann}_R N$, e assim N seria um k-espaço vetorial indecomponível, logo $\dim_k N = 1$, e portanto $N \cong k$. Daí, $\text{G-dim}_R\, k = \text{G-dim}_R\, N = 0$. Pelo Teorema de Gorenstein 2.17, teríamos que R é um anel Gorenstein, contradizendo a hipótese.

Assim, $N \nsubseteq \mathfrak{m}F$. Logo, existe $x \in N$ tal que $x \notin \mathfrak{m}F$. Como $x \in F$, escreva $x = \sum_{j=1}^{r} a_j e_j$, onde $a_j \in R$ e $\{e_1, \ldots, e_r\}$ é uma base de F. Se a_j fosse não-invertível para todo j, teríamos $a_j \in \mathfrak{m}$ para todo j, implicando em $x \in \mathfrak{m}F$. Logo, existe $l \in \{1, \ldots, r\}$ tal que a_l é invertível. Seja $\varphi : R \to Rx$ o homomorfismo dado por $\varphi(b) = bx$, $b \in R$. Se $b_1, b_2 \in R$ são tais que $b_1 x = b_2 x$ então, em particular, $b_1 a_l = b_2 a_l$. Como a_l é invertível, temos $b_1 = b_2$ e assim φ é injetor. Note que φ é sobrejetor. Logo, $R \cong Rx$. Como Rx é um somando direto de F contido em N, segue que Rx também é um somando direto de N. Como N é um módulo indecomponível segue que $N \cong R$.

Portanto, $M_i \cong R$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e, assim, $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \cong R^n$ é um R-módulo livre. □

Como corolário, veremos que, indepedentemente de Artinianidade, certos anéis locais Cohen-Macaulay também podem ser G-regulares.

Corolário 3.19. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay não-Gorenstein. Se existe um sistema de parâmetros $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ tal que $\underline{x}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, então R é G-regular.

Demonstração. Seja $M \neq 0$ um R-módulo totalmente reflexivo. Como R é Cohen-Macaulay segue que M é Cohen-Macaulay maximal. Sejam $\overline{R} = R/(\underline{x})$ e $\overline{M} = M/\underline{x}M$. Sejam $a_1, \ldots, a_r \in R$ geradores de $\mathfrak{m}$. Então, o ideal maximal de $\overline{R}$ é dado por $\overline{\mathfrak{m}} = (\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r)$, e assim $\overline{\mathfrak{m}}^2 = (\overline{a}_1^2, \overline{a_1 a_2}, \ldots, \overline{a_i a_j}, \ldots, \overline{a}_r^2)$. Como $a_i a_j \in \mathfrak{m}^2 = \underline{x}\mathfrak{m}$ temos $\overline{a_i a_j} = \overline{0}$ para todo i,j, o que implica $\overline{\mathfrak{m}}^2 = 0$. Como $\underline{x}$ é um sistema de parâmetros e R é Cohen-Macaulay, segue que $\underline{x}$ é uma sequência R-regular. Sendo $\underline{x}$ também uma sequência M-regular, então $\text{G-dim}_{\overline{R}}\, \overline{M} = \text{G-dim}_R\, M = 0$. Como R é não-Gorenstein e $\underline{x}$ é um sistema de parâmetros, segue que $\overline{R}$ é não-Gorenstein. Assim, $(\overline{R}, \overline{\mathfrak{m}})$ é um anel local não-Gorenstein com $\overline{\mathfrak{m}}^2 = 0$, e como $\text{G-dim}_{\overline{R}}\, \overline{M} = 0$ segue do Teorema 3.18 que $\overline{M}$ é $\overline{R}$-livre. Agora seja $r = \dim_k (M \otimes_R k)$, onde $k = R/\mathfrak{m}$, que claramente coincide com $\dim_k (\overline{M} \otimes_{\overline{R}} k)$. Então podemos obter uma sequência exata curta

$$0 \to N \to R^r \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

tal que $\pi \otimes \overline{R}$ é um isomorfismo. Como $\underline{x}$ é uma M-sequência então $\operatorname{Tor}_1^R(M, \overline{R}) = 0$. Tensorizando a sequência exata curta acima com o R-módulo $\overline{R}$, obtemos a sequência exata longa

$$\cdots \to \operatorname{Tor}_1^R(N, \overline{R}) \to \operatorname{Tor}_1^R(R^r, \overline{R}) \to \operatorname{Tor}_1^R(M, \overline{R}) \to N \otimes_R \overline{R} \to R^r \otimes_R \overline{R} \xrightarrow{\pi \otimes \overline{R}} M \otimes_R \overline{R} \to 0,$$

e consequentemente a sequência exata curta

$$0 \to N \otimes_R \overline{R} \to R^r \otimes_R \overline{R} \xrightarrow{\pi \otimes \overline{R}} M \otimes_R \overline{R} \to 0.$$

Por exatidão, temos $N \otimes_R \overline{R} \cong \ker(\pi \otimes \overline{R}) = 0$. Assim, $N/\underline{x}N \cong N \otimes_R \overline{R} = 0$ o que implica $N = \underline{x}N$. Pelo Lema de Nakayama, temos $N = 0$, e portanto $M \cong R^r$ é R-livre. □

Vamos concluir com dois exemplos explícitos de anéis locais G-regulares.

Exemplo 3.3. Sejam k um corpo e $R = k[[X, Y]]/(X^2, XY, Y^2)$. Note que R é local com ideal maximal $\mathfrak{m} = (X, Y)/(X^2, XY, Y^2) = (x, y)$, e logo $\mathfrak{m}^2 = (x^2, xy, y^2) = 0$. Como $\dim R = 0$, segue que R é Cohen-Macaulay, e daí (0) é um ideal de parâmetros. Afirmamos que $(0) = (x) \cap (y)$ com $(x) \neq 0$ e $(y) \neq 0$. De fato, dado $f \in (x) \cap (y)$ existem $f_1, f_2 \in k[[X, Y]]$ tais que $f = \overline{f_1}x = \overline{f_2}y$. Daí,

$$f_1X - f_2Y \in (X^2, XY, Y^2) \Rightarrow \exists g_1, g_2, g_3 \in k[[X, Y]] \text{ tais que } f_1X - f_2Y = g_1X^2 + g_2XY + g_3Y^2$$

$$\Rightarrow (f_1 - g_1X)X = f_2Y + g_2XY + g_3Y^2 \in (Y) \Rightarrow f_1 - g_1X \in (Y), \text{ pois } X \notin (Y)$$

$$\Rightarrow \text{ existe } h \in k[[X, Y]] \text{ tal que } f_1 = g_1X + hY \Rightarrow f = \overline{f_1X} = \overline{g_1}x^2 + \overline{h}xy = 0.$$

Logo, (0) é um ideal de parâmetros redutível. Aplicando o Teorema B.22 segue que R é não-Gorenstein. Portanto, pelo Teorema 3.18 segue que R é G-regular.

Exemplo 3.4. Sejam k um corpo e $R = k[[X, Y, Z]]/(X^2, XZ, YZ)$, que é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)/(X^2, XZ, YZ) = (x, y, z)$. Note que $\dim R = 1$ e que o elemento $y - z \in \mathfrak{m}$ é R-regular. Logo, $\operatorname{depth} R = 1$ e assim R é Cohen-Macaulay. Segue que $y - z$ é um sistema de parâmatros, ou seja, $(y - z)$ é um ideal de parâmetros. Afirmamos que

$$(y - z) = (y, z) \cap (x, y - z).$$

A inclusão $(y-z) \subseteq (y,z) \cap (x, y-z)$ é clara. Reciprocamente, dado $f \in (y,z) \cap (x, y-z)$, existem $f_1, f_2, g_1, g_2 \in k[[X,Y,Z]]$ tais que $f = \overline{f_1}y + \overline{f_2}z = \overline{g_1}x + \overline{g_2}(y-z)$. Daí,

$f_1Y + f_2Z - g_1X - g_2(Y-Z) \in (X^2, XZ, YZ)$

$\Rightarrow$ existem $h_1, h_2, h_3 \in k[[X,Y,Z]]$ tais que $f_1Y + f_2Z - g_1X - g_2(Y-Z) = h_1X^2 + h_2XZ + h_3YZ$

$\Rightarrow (g_1 + h_1X)X = f_1Y + f_2Z - g_2(Y-Z) - h_2XZ - h_3YZ \in (Y,Z)$

$\Rightarrow g_1 + h_1X \in (Y,Z)$, pois (Y,Z) é um ideal primo e $X \notin (Y,Z)$

$\Rightarrow$ existem $h_4, h_5 \in k[[X,Y,Z]]$ tais que $g_1 = -h_1X + h_4Y + h_5Z$.

Como $xy = -xz + xy = x(y-z)$ temos

$$\overline{g_1}x = \overline{g_1X} = -\overline{h_1}x^2 + \overline{h_4}xy + \overline{h_5}xz = \overline{h_4}x(y-z),$$

logo $f \in (y-z)$, mostrando a outra inclusão. Assim, $(y-z)$ é um ideal de parâmetros redutível e pelo Teorema B.22 temos que R é não-Gorenstein. Note ainda que

$$\begin{aligned}
(y-z)\mathfrak{m} &= ((y-z)x, (y-z)y, (y-z)z) \\
&= (xy - xz, y^2 - yz, yz - z^2) \\
&= (xy, y^2, z^2) \\
&= (x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2) \\
&= (x^2, xy, xz, yx, y^2, yz, zx, zy, z^2) \\
&= \mathfrak{m}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $(y-z)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, e pelo Corolário 3.19 segue que R é G-regular. Além disso, localizando o anel R no ideal primo $\mathfrak{p} = (X,Z)$, como $Y \notin \mathfrak{p}$, temos

$$R_{\mathfrak{p}} \cong k[[X,Y,Z]]_{(X,Z)}/(X^2, Z)_{(X,Z)} \cong k[[X,Y]]_{(X)}/(X^2).$$

Como $k[[X,Y]]_{(X)}/(X^2)$ é um anel Gorenstein, mas não é regular, segue do Teorema 3.11 que esse anel não é G-regular. Portanto, G-regularidade não é preservada por localização, em geral.

Apêndice A

Um Pouco de Álgebra Homológica

Enunciaremos alguns dos conceitos e resultados básicos utilizados neste trabalho. Buscamos, com isso, tornar a dissertação acessível ao leitor que já tem um conhecimento compatível com um curso básico de álgebra comutativa e homológica.

Definição A.1. Um *complexo* $\mathbb{G}$ é uma sequência de módulos e homomorfismos

$$\mathbb{G}: \qquad \cdots \to G_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} G_n \xrightarrow{d_n} G_{n-1} \to \cdots ,$$

tal que a composição $d_n \circ d_{n+1}$ é nula para todo inteiro n. Cada d_i é chamada uma *diferencial* de $\mathbb{G}$. Uma notação compacta para $\mathbb{G}$ e suas diferenciais é $(\mathbb{G}, d)$.

Note que a condição $d_n \circ d_{n+1} = 0$ é equivalente a $\mathrm{Im}\,(d_{n+1}) \subseteq \ker(d_n)$, de modo que podemos considerar o módulo quociente $\ker(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$.

Definição A.2. Seja n um número inteiro. Para um complexo $(\mathbb{G}, d)$ sua *n-ésima homologia* é

$$\mathrm{H}_n(\mathbb{G}) = \ker(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1}).$$

Se $\mathrm{H}_n(\mathbb{G}) = 0$ para todo n, então o complexo $\mathbb{G}$ é dito *exato* ou *acíclico*. Obviamente, isto é equivalente a dizer que $\ker(d_n) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$ para todo n. Portanto, a homologia de um complexo mede o quão “longe”o complexo está de ser exato. Se o complexo

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

é exato, dizemos que é uma *sequência exata curta.* Note que isso implica que i é injetivo e p é sobrejetivo. Um sequência exata curta *cinde* quando existe um homomorfismo $h : M'' \to M$ tal que $p \circ h = 1_{M''}$. Neste caso, $M \cong M' \oplus M''$.

Também consideramos complexos com índices crescentes,

$$\mathbb{G} : \quad \cdots \to G^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} G^n \xrightarrow{d_n} G^{n+1} \to \cdots ,$$

e para esses complexos definimos a n-ésima *cohomologia* como $\mathrm{H}^n(\mathbb{G}) = \ker(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n-1})$.

Definição A.3. O *dual* de um R-módulo M é o módulo $\mathrm{Hom}_R(M, R)$, denotado por M^*. O *bidual de* M é M^{**}. O mapa bilinear $M \times M^* \to R$, dado por $(x, \psi) \mapsto \psi(x)$ induz um homomorfismo natural $\sigma_M : M \to M^{**}$, chamado *homomorfismo canônico.* Quando σ_M é um isomorfismo, M é dito *reflexivo.*

É fácil ver que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sigma_M} & M^{**} \\ \downarrow\cong & & \uparrow \\ M \otimes_R R & \xrightarrow{\cong} & M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(R, R) \end{array}$$

Proposição A.1. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Se M é isomorfo a M^{**}, então o homomorfismo canônico σ_M é um isomorfismo.

Demonstração. Ver [10], Proposição 1.1.9(b). □

Definição A.4. Seja R um anel. Dizemos que um R-módulo P é *projetivo* se P for um somando direto de um módulo livre.

Dessa definição segue que o dual de um módulo projetivo é, também, projetivo. É claro que todo módulo livre é projetivo, e a recíproca vale, por exemplo, quando o anel é local (vide [15], Teorema 2.5).

Definição A.5. Seja R um anel. Dizemos que um R-módulo I é *injetivo* se I for um somando direto de qualquer R-módulo que o contém.

Proposição A.2. Sejam S uma R-álgebra, M um R-módulo e N, P S-módulos (logo, R-módulos). Então, o homomorfismo

$$\varphi : P \otimes_S \operatorname{Hom}_R(N, M) \to \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_S(P, N), M)$$

dado por

$$\varphi(p \otimes f)(g) = fg(p)$$

é um isomorfismo se satisfaz pelo menos uma das condições abaixo:

(1) P é finitamente gerado e projetivo;

(2) P é finitamente gerado e M é injetivo.

Demonstração. Ver [9], Capítulo VI Proposições 5.2 e 5.3. □

Definição A.6. Uma *resolução projetiva* de um R-módulo M é uma sequência exata

$$\mathbb{P}: \quad \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

com P_i projetivo, para todo $i \geq 0$ (Se omitirmos a aplicação nula $M \to 0$ da resolução, então ela é dita uma *resolução projetiva truncada à direita*). Se tal resolução é de comprimento finito n,

$$\mathbb{P}: \quad 0 \to P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

então dizemos que M tem *dimensão projetiva finita*, denotada por $\operatorname{pd}_R M = n$, se n for o menor inteiro tal que M tem uma resolução projetiva de comprimento n. Se tal n não existe, então $\operatorname{pd}_R M = \infty$. Por convenção, definimos $\operatorname{pd}_R 0 = -\infty$.

Lembre-se que um R-módulo F é dito livre quando F é isomorfo a uma soma direta de cópias do anel R. Além disso, todo módulo M é o quociente de um módulo livre (vide [19], Teorema 2.35). Isto é, para qualquer módulo M, existe um módulo livre F e um epimorfismo $\pi : F \to M$.

Uma *resolução livre* é definida de maneira totalmente análoga, substituindo módulos projetivos por módulos livres. Todo módulo tem uma resolução livre, e portanto, uma resolução projetiva. Uma resolução livre pode ser facilmente construída, como veremos a seguir.

Como todo módulo é o quociente de um módulo livre, começamos com uma projeção natural $\pi : F_0 \to M$, com F_0 livre, e obtemos a sequência exata curta

$$0 \to K_0 \xrightarrow{i_0} F_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0,$$

onde K_0 é o núcleo de π, e i_0 é a injeção natural. Repetimos este procedimento com K_0 no lugar de M e tomamos d_1 como sendo a composição $i_0 \circ \pi_1$.

$$\begin{tikzcd}
& & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "\pi_1"] & & F_0 \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] & 0 \\
& K_1 \arrow[ur] & & K_0 \arrow[ur, "i_0"'] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Este processo continua infinitamente ou até que se tenha $K_n = 0$ para algum n.

Definição A.7. Sejam R um anel e M um R-módulo. Uma sequência exata

$$I : \quad 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$$

com I^i módulos injetivos é uma *resolução injetiva* de M. A *dimensão injetiva* de M, denotada por $\operatorname{id}_R M$, é o menor inteiro n para o qual existe uma resolução injetiva I de M com $I^m = 0$ para $m > n$. Se não existe tal n, a dimensão injetiva de M é infinita.

Todo módulo pode ser mergulhado em um módulo injetivo (vide [7], Teorema 3.1.8). Isto é, para cada módulo M, existe um módulo injetivo I e uma injeção $\iota : M \to I$. Usando um procedimento semelhante ao que fornece a existência de uma resolução livre, podemos obter uma resolução injetiva de M.

Definição A.8. Seja M um R-módulo e suponha que $(\mathbb{F}, d)$ é uma resolução projetiva (truncada à direita) de M. Dado um R-módulo N, podemos considerar o complexo

$$\mathbb{F} \otimes_R N : \quad \cdots \to F_i \otimes_R N \xrightarrow{d_i \otimes N} F_{i-1} \otimes_R N \xrightarrow{d_{i-1} \otimes N} \cdots \to F_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \otimes N} F_0 \otimes_R N \to 0,$$

onde para cada $a\otimes b \in F_i\otimes_R N$ temos $a\otimes b \mapsto d_i(a)\otimes b$. O *i-ésimo Tor do par M, N* é o R-módulo

$$\operatorname{Tor}_i^R(M,N) := \mathrm{H}_i(\mathbb{F}\otimes_R N).$$

Esta definição é independente da escolha da resolução projetiva, veja [19], Corolário 6.21. Logo, $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)=0$ para todo $i>0$ quando M é projetivo. Também, temos isomorfismos $\operatorname{Tor}_0^R(M,N)\cong M\otimes_R N$ (vide [19], Teorema 6.29) e $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)\cong \operatorname{Tor}_i^R(N,M)$ para todo $i>0$ (vide [19], Teorema 7.1).

Corolário A.3 (Sequência exata longa dos Tor). Se

$$0\to M'\to M\to M''\to 0$$

é uma sequência exata curta de R-módulos, então para todo R-módulo N tem-se uma sequência exata longa de R-módulos

$$\cdots\to \operatorname{Tor}_1^R(M',N)\to \operatorname{Tor}_1^R(M,N)\to \operatorname{Tor}_1^R(M'',N)\to M'\otimes_R N\to M\otimes_R N\to M''\otimes_R N\to 0.$$

Demonstração. Ver [19], Corolário 6.30. □

De forma semelhante, podemos definir os módulos Ext.

Definição A.9. Sejam M, N R-módulos e suponha que $(\mathbb{F},d)$ é uma resolução projetiva (truncada à direita) de M. Considere o

$$\operatorname{Hom}_R(\mathbb{F},N):\ \ 0\to \operatorname{Hom}_R(F_0,N)\xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(d_1,N)}\operatorname{Hom}_R(F_1,N)\xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(d_2,N)}\operatorname{Hom}_R(F_2,N)\to\cdots,$$

onde, para $f\in \operatorname{Hom}_R(F_i,N)$, tem-se $f\mapsto f\circ d_i$. O *i-ésimo Ext de M com respeito a N* é o R-módulo

$$\operatorname{Ext}_R^i(M,N) := \mathrm{H}^i(\operatorname{Hom}_R(\mathbb{F},N)).$$

Esta definição é independente da escolha da resolução projetiva, veja [19], Corolário 6.57. Disso, segue que se $\operatorname{pd}_R M=d$, então $\operatorname{Ext}_R^i(M,N)=0$ para todo R-módulo N e todo $i>d$.

Também temos um isomorfismo $\mathrm{Hom}_R(M,N) \cong \mathrm{Ext}^0_R(M,N)$. De [19], Proposições 7.21 e 7.22, segue que o Ext comuta com somas diretas finitas tanto à esquerda quanto à direita.

Corolário A.4 (Sequência exata longa dos Ext). Temos:

(1) Uma dada sequência exata curta de R-módulos

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

induz uma sequência exata longa

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N') \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,N'') \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N') \to \cdots \\ \cdots \to \mathrm{Ext}^i_R(M,N') \to \mathrm{Ext}^i_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^i_R(M,N'') \to \cdots \end{gathered}$$

(2) Uma dada sequência exata curta de R-módulos

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

induz uma sequência exata longa

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{Hom}_R(M'',N) \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M',N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M'',N) \to \cdots \\ \cdots \to \mathrm{Ext}^i_R(M'',N) \to \mathrm{Ext}^i_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^i_R(M',N) \to \cdots \end{gathered}$$

Demonstração. Ver [19], Corolários 6.46 e 6.62. □

Proposição A.5. Sejam R um anel e $U \subseteq R$ um conjunto multiplicativo. Se M é um R-módulo finitamente gerado, então existem isomorfismos $U^{-1}\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \cong \mathrm{Ext}^i_{U^{-1}R}(U^{-1}M, U^{-1}N)$ para todo $i \geq 0$ e todo R-módulo N.

Demonstração. Ver [19], Proposição 7.39. □

Proposição A.6. Sejam R um anel e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Então $\mathrm{pd}_R\, M \leq d$ se, e somente se, $\mathrm{Ext}^{d+1}_R(M,T) = 0$ para todo R-módulo T finitamente gerado. Em particular, se $\mathrm{pd}_R\, M = d$, então existe um R-módulo T finitamente gerado tal que $\mathrm{Ext}^d_R(M,T) \neq 0$.

Demonstração. Ver [9], Capítulo VI Proposição 2.5. □

Para encerrar, enunciaremos alguns resultados envolvendo álgebras planas.

Definição A.10. Um R-módulo M é *R-plano*, ou simplesmente *plano*, se para toda sequência exata de R-módulos, $\mathbb{G}$, a sequência tensorizada $\mathbb{G} \otimes_R M$ é também exata. M é *fielmente plano* quando também vale a recíproca. Se S é uma R-álgebra que é R-plano, dizemos que S é uma *R-álgebra plana.*

Proposição A.7. Seja R um anel. O anel das séries formais $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ é uma R-álgebra plana.

Demonstração. Ver [8], Capítulo III, seção 3, Corolário 3. □

Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local, então $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ também o é, com ideal maximal gerado por $\mathfrak{m} \cup \{X_1, \ldots, X_n\}$; veja [21] Capítulo 3, Exercício 3.19.

Proposição A.8. Sejam S uma R-álgebra plana, M e N R-módulos, com M finitamente gerado. Então

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_R S \cong \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, N \otimes_R S).$$

Demonstração. Ver [15], Teorema 7.11. □

Proposição A.9. Se $(R, \mathfrak{m})$ e $(S, \mathfrak{n})$ são anéis locais e $f : R \to S$ é um homomorfismo satisfazendo $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$, então S é R-plano se, e somente se, S é fielmente R-plano.

Demonstração. Ver [15], Teorema 7.2 ou 7.3(ii). □

Proposição A.10. Sejam R um anel local e S uma R-álgebra local fielmente plana. Então

$$\mathrm{pd}_R\, M = \mathrm{pd}_S\,(M \otimes_R S).$$

Demonstração. Ver [6], Teorema 7.8 (6). □

Apêndice B

Preliminares de Álgebra Comutativa

Começaremos relembrando a fundamental noção de dimensão de Krull. Para um anel R, o supremo dos comprimentos de todas as cadeias estritamente crescentes

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n,$$

de ideais primos de R é chamado *dimensão de Krull* de R, denotada por $\dim R$. Pode ocorrer que $\dim R = \infty$. Para um R-módulo M, defina $\dim M := \dim (R/\mathrm{Ann}_R(M))$. Logo, $\dim M \leq \dim R$.

Seja M um módulo sobre um anel R. Dizemos que $x \in R$ é um *elemento M-regular* se $xz = 0$, para $z \in M$, implica em $z = 0$. Em outras palavras, x é um *não-divisor-de-zero* de M. Sequências regulares são compostas por sucessivos elementos regulares:

Definição B.1. Para um R-módulo M, uma sequência $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ de elementos de R é dita uma *sequência M-regular* ou simplesmente uma *M-sequência* se satisfizer as seguintes condições:

(1) x_1 é M-regular e x_i é $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})$-regular para $i = 2, \ldots, n$;

(2) $M/(\mathbf{x})M \neq 0$.

Dizemos que $\mathbf{x}$ é uma *M-sequência fraca* se satisfaz a condição (1).

Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e $\mathbf{x} \subseteq \mathfrak{m}$, então (2) é automaticamente satisfeita devido ao *Lema de Nakayama*, que no caso local diz o seguinte: Se M é um R-módulo finitamente gerado e $I \subseteq \mathfrak{m}$ é um ideal tal que $IM = M$, então $M = 0$.

Proposição B.1. Sejam R um anel, M um R-módulo, e $\mathbf{x} \subset R$ uma M-sequência fraca. Suponha que $\varphi : R \to S$ é um homomorfismo e que N é um S-módulo R-plano. Então $\mathbf{x}$ e $\varphi(\mathbf{x})$ são $(M \otimes_R N)$-sequências fracas. Se $x(M \otimes_R N) = (M \otimes_R N)$, então $\mathbf{x}$ e $\varphi(\mathbf{x})$ são $(M \otimes_R N)$-sequências.

Demonstração. Ver [7], Proposição 1.1.2. □

Proposição B.2. Sejam R um anel e

$$\mathbb{G} : \cdots \to G_m \to G_{m-1} \to \cdots \to G_0 \to G_{-1} \to 0$$

um complexo exato de R-módulos. Se $\mathbf{x}$ é uma G_i-sequência fraca para todo i, então o complexo $\mathbb{G} \otimes_R R/(\mathbf{x})$ também é exato.

Demonstração. Ver [7], Proposição 1.1.5. □

Lema B.3. Sejam R um anel e M um R-módulo finitamente gerado. Se $x \in R$ é M- e R-regular, então $\operatorname{Ext}^i_R(M, R/(x)) \cong \operatorname{Ext}^i_{R/(x)}(M/(x)M, R/(x))$ para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Ver [3], Lema 4.7 (b). □

Uma M-sequência $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ contida em um ideal I, é chamada *sequência maximal em I* se $x_1, \ldots, x_n, y$ não é uma M-sequência para qualquer $y \in I$.

Teorema B.4 (Rees). *Sejam R um anel, M um R-módulo finitamente gerado, e I um ideal tal que $IM \neq M$. Então toda M-sequência maximal em I tem o mesmo comprimento n, dado por*

$$n = \min\{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}.$$

Demonstração. Ver [7], Teorema 1.2.5. □

Definição B.2. Dados um anel local $(R, \mathfrak{m}, k)$ e um R-módulo finitamente gerado $M \neq 0$, defina a *profundidade de M*, denotada por $\operatorname{depth}_R M$ como sendo o comprimento de uma M-sequência maximal em $\mathfrak{m}$, ou seja,

$$\operatorname{depth}_R M = \min\{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}^i_R(k, M) \neq 0\}.$$

Convencionamos que $\operatorname{depth}_R 0 = \infty$.

Proposição B.5. Sejam R um anel local e $0 \to U \to M \to N \to 0$ uma sequência exata de R-módulos finitamente gerados. Então

$$\operatorname{depth}_R M \geq \min\{\operatorname{depth}_R U, \operatorname{depth}_R N\},$$

$$\operatorname{depth}_R U \geq \min\{\operatorname{depth}_R M, \operatorname{depth}_R N + 1\},$$

$$\operatorname{depth}_R N \geq \min\{\operatorname{depth}_R U, \operatorname{depth}_R M - 1\}.$$

Em particular, se $\operatorname{depth}_R M > \operatorname{depth}_R N$, então $\operatorname{depth}_R U = \operatorname{depth}_R N + 1$.

Demonstração. Ver [7], Proposição 1.2.9. □

Proposição B.6. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma M-sequência em $\mathfrak{m}$, então

$$\operatorname{depth}_{R/(\mathbf{x})} M/\mathbf{x}M = \operatorname{depth}_R M/\mathbf{x}M = \operatorname{depth}_R M - n.$$

Demonstração. Ver [7], Proposição 1.2.10(d). □

O profundidade de um módulo não-nulo é sempre limitada pela sua dimensão, conforme assegura o seguinte resultado:

Proposição B.7. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Então $\operatorname{depth}_R M \leq \dim M$. Além disso, $\operatorname{depth}_R M \leq \dim R/\mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$. Em particular, se $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R M$ então $\operatorname{depth}_R M = 0$.

Demonstração. Ver [7], Proposições 1.2.12 e 1.2.13. □

Proposição B.8. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Se $\operatorname{depth}_R M = 0$, então $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R M$.

Demonstração. Como $\operatorname{depth}_R M = 0$, então não existe elemento M-regular $x \in R$ tal que $M/xM \neq 0$. Dado $x \in \mathfrak{m}$, pelo Lema de Nakayama temos que $M/xM \neq 0$, logo x não pode ser M-regular. Assim, $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{z}_R(M)$. Sendo R Noetheriano e $M \neq 0$ temos que $\mathrm{z}_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M} \mathfrak{p}$. Pelo Lema da esquiva temos $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$. A maximalidade de $\mathfrak{m}$ nos dá $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Portanto, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R M$. □

Proposição B.9. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Se $\operatorname{depth}_R M > 0$ e $\operatorname{depth} R > 0$, então $\mathfrak{m}$ contém um elemento R- e M-regular.

Demonstração. Como R é Noetheriano e $M \neq 0$ é finitamente gerado, podemos escrever $\mathrm{z}_R(M) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ onde $\operatorname{Ass}_R M = \{\mathfrak{p}_i\}_{i=1}^{n}$ e $\mathrm{z}(R) = \bigcup_{j=1}^{m} \mathfrak{q}_j$ onde $\operatorname{Ass} R = \{\mathfrak{q}_j\}_{j=1}^{m}$. Daí, $\mathrm{z}_R(M) \cup \mathrm{z}(R)$ é uma união finita de primos, logo está contida propriamente em R. Como $\operatorname{depth}_R M > 0$ e $\operatorname{depth} R > 0$, temos pela Proposição B.7 que $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}_R M \cup \operatorname{Ass} R$, logo $\mathfrak{m} \nsubseteq \mathrm{z}_R(M) \cup \mathrm{z}(R)$ que implica $\mathfrak{m} \cap R \backslash (\mathrm{z}_R(M) \cup \mathrm{z}(R)) \neq \emptyset$. □

Proposição B.10. Sejam R um anel e M, N R-módulos finitamente gerados. Então

$$\operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(M, N) = \operatorname{Supp}_R M \cap \operatorname{Ass}_R N.$$

Demonstração. Ver [12], Exercício 3.3 ou [7], Exercício 1.2.27. □

Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local $(R, \mathfrak{m}, k)$. Logo o *número mínimo de geradores de* M, $\mu(M) = \dim_k (M \otimes_R k)$, está bem definido. Seja $\beta_0 = \mu(M)$. Escolha um conjunto minimal de geradores $\{x_1, \ldots, x_{\beta_0}\}$ de M, e defina o homomorfismo $\varphi_0 : R^{\beta_0} \to M$ dado por $\varphi_0(e_i) = x_i$, onde $\{e_1, \ldots, e_{\beta_0}\}$ é a base canônica de R^{β_0}. Em seguida, tome $\beta_1 = \mu(\ker \varphi_0)$ e defina analogamente o homomorfismo $R^{\beta_1} \to \ker \varphi_0$. Procedendo desta maneira construimos uma *resolução livre minimal*

$$\mathbb{F} : \quad \cdots \to R^{\beta_n} \xrightarrow{\varphi_n} R^{\beta_{n-1}} \to \cdots \to R^{\beta_1} \xrightarrow{\varphi_1} R^{\beta_0} \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0.$$

Verifica-se que $\mathbb{F}$ é determinado por M a menos de isomorfismos de complexos.

Proposição B.11. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local, M um R-módulo finitamente gerado, e

$$\mathbb{F} : \quad \cdots \to F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

uma resolução livre de M. Então, $\mathbb{F}$ é minimal se, e somente se, $\dim_k (\operatorname{Tor}_i^R(M, k)) =$ posto de F_i para todo $i \geq 0$ se, e somente se, $\dim_k (\operatorname{Ext}_R^i(M, k)) =$ posto de F_i para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Ver [7], Proposição 1.3.1. □

Corolário B.12. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado. Então

$$\operatorname{pd}_R M = \sup\{i \geq 0 \mid \operatorname{Tor}_i^R(M, k) \neq 0\}.$$

Demonstração. Ver [7], Corolário 1.3.2. □

Lema B.13. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado. Se $x \in \mathfrak{m}$ é R- e M-regular, então

$$\operatorname{pd}_R M = \operatorname{pd}_{R/(x)} M/xM.$$

Demonstração. Ver [7], Lema 1.3.5. □

A fundamental fórmula de Auslander-Buchsbaum assegura o seguinte:

Teorema B.14 (Fórmula de Auslander-Buchsbaum). *Seja R um anel local. Se M é um R-módulo finitamente gerado com* $\operatorname{pd}_R M < \infty$*, então*

$$\operatorname{pd}_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R M.$$

Demonstração. Ver [7], Teorema 1.3.3. □

Proposição B.15. Sejam R um anel local, e M, N R-módulos finitamente gerados. Então

$$\operatorname{depth}_R \operatorname{Hom}_R(M, N) \geq \min\{2, \operatorname{depth} N\}.$$

Demonstração. Ver [7], Exercício 1.4.19. □

As principais aplicações do nosso estudo ocorrem sobre as classes de anéis Cohen-Macaulay, regulares e Gorenstein. Vamos definir tais anéis, exibir algumas de suas propriedades e discutir a hierarquia entre essas classes no caso local.

Definição B.3. Um anel local R é dito um *Cohen-Macaulay* se $\operatorname{depth} R = \dim R$. Um R-módulo finitamente gerado $M \neq 0$ é um *módulo Cohen-Macaulay* se $\operatorname{depth}_R M = \dim M$. Se $\operatorname{depth}_R M = \dim R$ então M é dito um *módulo Cohen-Macaulay maximal*.

Em geral, Se R é um anel arbitrário, dizemos que M é um módulo Cohen-Macaulay (resp. Cohen-Macaulay maximal) se $M_{\mathfrak{p}}$ o for, para todo $\mathfrak{p} \subset R$ primo (O módulo nulo é considerado Cohen-Macaulay). É bem sabido que basta verificar tal propriedade localmente no ideais maximais pertencentes ao suporte de M. Dizemos que o anel R é Cohen-Macaulay se o for localmente em cada ideal primo (mas uma vez basta checar nos ideais maximais).

Teorema B.16. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $M \neq 0$ um R-módulo Cohen-Macaulay. Então $\boldsymbol{x}$ é uma M-sequência se, e somente se, $\boldsymbol{x}$ é parte de um sistema de parâmetros de M.*

Demonstração. Ver [7], Teorema 2.1.2(d). □

A definição de anel regular é dada abaixo. Mais adiante, através do Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre, teremos uma importante caracterização via dimensão projetiva.

Definição B.4. Um anel local $(R, \mathfrak{m})$ é *regular* se possui um sistema de parâmetros gerando $\mathfrak{m}$; tal sistema de parâmatros é chamado um *sistema regular de parâmetros.*

Se k um corpo, então os anéis locais k, $k[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}$ e $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ são regulares; veja [7] seção 2.2.

Proposição B.17. Se $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular, então R é um domínio.

Demonstração. Ver [7], Proposição 2.2.3. □

Teorema B.18 (Auslander-Buchsbaum-Serre). *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) R é regular;

(2) $\operatorname{pd}_R M < \infty$ para todo R-módulo finitamente gerado M;

(3) $\operatorname{pd}_R k < \infty$.

Demonstração. Ver [7], Teorema 2.2.7. □

Na seguinte proposição caracterizamos a dimensão injetiva de um módulo.

Proposição B.19. Sejam R um anel e M um R-módulo. Então $\operatorname{id}_R M \leq n$ se, e somente se, $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(N, M) = 0$ para todo R-módulo finitamente gerado N.

Demonstração. Ver [7], Proposição 3.1.10. □

Sobre anéis locais é possivel obter uma fórmula para a dimensão injetiva.

Proposição B.20. Sejam R um anel local e M um R-módulo finitamente gerado. Então

$$\operatorname{id}_R M = \sup\{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}^i_R(k, M) \neq 0\}.$$

Demonstração. Ver [7], Proposição 3.1.14. □

Teorema B.21 (Bass). *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado com dimensão injetiva finita. Então*

$$\dim M \leq \operatorname{id}_R M = \operatorname{depth} R.$$

Demonstração. Ver [7], Teorema 3.1.17. □

Agora, introduziremos uma outra classe importante de anéis.

Definição B.5. Um anel local R é dito um *anel Gorenstein* se $\operatorname{id}_R R < \infty$. Um anel arbitrário é dito Gorenstein se sua localização em todo ideal maximal for um anel local Gorenstein.

Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel de dimensão d, então um ideal $\mathfrak{m}$-primário Q gerado por d elementos é chamado um *ideal de parâmetros*, ou seja, é um ideal gerado por um sistema de parâmetros. Um ideal I é *irredutível* se $I = J \cap J'$ com J e J' ideais implica $I = J$ ou $I = J'$. Caso contrário, dizemos que I é *redutível*. Com essas definições podemos exibir uma caracterização bastante útil para anéis locais Gorenstein.

Teorema B.22. *Seja R um anel local. Então, R é um anel Gorenstein se, e somente se, R é um anel Cohen-Macaulay e todo ideal de parâmatros de R é irredutível.*

Demonstração. Ver [15], Teorema 18.1 (1) $\Leftrightarrow$ (5). □

Proposição B.23. Sejam R um anel e $\mathbf{x}$ uma R-sequência. Se R é Gorenstein, então $R/(\mathbf{x})$ é Gorenstein. A recíproca vale quando R é local.

Demonstração. Ver [7], Proposição 3.1.19(b). □

Vamos agora enunciar um resultado sobre como a classe do anéis Gorenstein se posiciona na hierarquia dos anéis locais.

Proposição B.24. Seja R um anel local. Então temos as seguintes implicações:

$$R \text{ é regular} \Rightarrow R \text{ Gorenstein} \Rightarrow R \text{ Cohen-Macaulay.}$$

Demonstração. Ver [7], Proposição 3.1.20. □

Falaremos um pouco sobre o módulo canônico de anéis locais Cohen-Macaulay.

Definição B.6. Seja R um anel local Cohen-Macaulay. Um módulo Cohen-Macaulay maximal C de tipo 1 (veja [7], seção 3.3) e com dimensão injetiva finita é chamado um *módulo canônico* de R.

É provado em [7] Teorema 3.3.4 que o módulo canônico é único a menos de isomorfismo, e denotado por ω_R. Sobre a sua existêcia temos:

Proposição B.25. Seja R um anel local Cohen-Macaulay. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) R admite um módulo canônico;

(2) R é imagem homomorfa de um anel local Gorenstein.

Demonstração. Ver [7], Proposição 3.3.6. □

Como exemplo de anéis que admitem módulo canônico, temos a classe dos anéis locais Cohen-Macaulay completos (vide [7], Corolário 3.3.8).

Proposição B.26. Sejam R um anel local Cohen-Macaulay de dimensão d, e C um R-módulo finitamente gerado. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) C é um módulo canônico de R;

(2) Para todo R-módulo Cohen-Macaulay maximal, temos:

(a) $\mathrm{Hom}_R(M, C)$ é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal,

(b) $\operatorname{Ext}_R^i(M, C) = 0$, para todo $i > 0$,

(c) o homomorfismo natural $M \to \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, C), C)$ é um isomorfismo.

Demonstração. Ver [7], Proposição 3.3.10. □

Para concluir, vamos enunciar alguns resultados sobre módulos indecomponíveis.

Definição B.7. Um módulo M é *decomponível* se $M = M_1 \oplus M_2$, onde $M_i \neq 0$ são submódulos de M. Caso contrário, M é dito *indecomponível*.

Exemplo B.1. Seja $V \neq 0$ um espaço vetorial sobre um corpo k. Então V é indecomponível se, e somente se, V tem dimensão 1.

Temos a seguinte caracterização para módulo indecomponíveis.

Proposição B.27. Um módulo $M \neq 0$ é indecomponível se, e somente se, o anel $\operatorname{End} M$ de endomorfismos de M não contém elementos idempotentes diferentes de 0 e 1.

Demonstração. Ver [13], Proposição 3.1. □

Teorema B.28. *Seja R um anel Noetheriano (resp. Artiniano). Então, todo R-módulo finitamente gerado M é Noetheriano (resp. Artiniano).*

Demonstração. Ver [13], Teorema 3.4. □

Teorema B.29. *Se $M \neq 0$ é um módulo Artiniano e Noetheriano, então M contém submódulos indecomponíveis M_i, $1 \leq i \leq n$, tais que $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$. Além disso, essa decomposição em indecomponíveis é única, a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Ver [13], Teorema 3.8 e Teorema de Krull-Schmidt. □

Referências Bibliográficas

[1] Atiyah, M. F. e MacDonald, I. G., *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[2] Auslander, M., *Anneaux de Gorenstein, et torsion en algèbre commutative*, Secrétariat mathématique, Paris, 1967, Séminaire d'Algèbre Commutative dirigé par Pierre Samuel, 1966/67. Texte rédigé, d'après des exposés de Maurice Auslander, par Marquerite Mangeney, Christian Peskine et Lucien Szpiro. École Normale Supérieure de Jeunes Filles.

[3] Auslander, M. e Bridger, M., *Stable module theory.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[4] Atkins, J. C. e Vraciu, A., *On the existence of non-free totally reflexive modules.* Commutative Algebra. 2016. arXiv:1602.08385 [math.AC].

[5] Avramov, L. e Martsinkovsky, A., *Absolute, relative, and Tate cohomology of modules of finite Gorenstein dimension*, Proc. London Math. Soc. (3) 85 (2002), no. 2, 393-440.

[6] Avramov, L. L., *Homological dimensions and related invariants of modules over local rings.* Representations of algebra. Vol. I, II, 1-39, Beijing Norm. Univ. Press, Beijing, 2002.

[7] Bruns, W. e Herzog, J., *Cohen-Macaulay rings.* Revised edition, Cambridge University Press, 1998.

[8] Bourbaki, N., *Algèbre Commutative: Chapitres 1 à 4.* Réimpression inchangée de l'édition originale de 1985, Springer-Verlag Berlin, 2006.

[9] Cartan, H. e Eilenberg, S., *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.

[10] Christensen, L. W., *Gorenstein dimensions*. Springer-Verlag Berlin, 2000.

[11] Christensen, L.; Foxby, H. e Holm, H., B*eyond totally reflexive modules and back, a survey on Gorenstein dimensions*, Commutative algebra Noetherian and non-Noetherian perspectives, 101-143, Springer, New York, 2011.

[12] Eisenbud, D., *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*. Springer-Verlag New York, 1995.

[13] Jacobson, N., *Basic Algebra II*. Second Edition, W. H. Freeman and Company, New York, 1989.

[14] Jorgensen, D.A., Sega, L.M.: *Independence of the total reflexivity conditions for modules*. Algebr. Represent. Theory 9, 217-226, 2006.

[15] Matsumura, H., *Commutative Ring Theory*. Cambridge University Press, 1986.

[16] Rahmati, H.; Striuli, J., Wiegand, R., *A construction of totally reflexive modules*. Algebras and Representation Theory Volume 19, Issue 1 , pp 103-111, 2016.

[17] Rangel, D. A., *A description of totally reflexive modules for a class of non-Gorenstein rings*. Commutative Algebra. 2015. arXiv:1510.04922 [math.AC].

[18] Rangel, D. A., *Representation theory of totally reflexive modules over non-Gorenstein rings*. Texas: The University of Texas at Arlington, 2014. 95 f. Tese.

[19] Rotman, J., *An introduction to homological algebra*. Academic Press, 1979.

[20] Salimi, M.; Tavasoli, E. e Yassemi, S., *k-Torsionless Modules with Finite Gorenstein Dimension*. Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 62, No. 3, 663-672, 2012.

[21] Sharp, R. Y., *Steps in Commutative Algebra*. Second Edition, Cambridge University Press, 2000.

[22] Takahashi, R.; Celikbas, O. e Gheibi, M., *Brauer-Thrall for totally reflexive modules over local rings of higher dimension*. Algebras and Representation Theory, Volume 17, Issue 3, 2014.

[23] Takahashi, R., *On G-regular local rings*. Comm. Algebra 36, 4472-4491, 2008.

[24] Yoshino, Y., *Modules of G-dimension zero over local rings with the cube of maximal ideal being zero*, Commutative algebra, singularities and computer algebra (Sinaia, 2002), 255-273, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 115, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.

.