Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Formas Gerais do Teorema da Dominação de Pietsch

Luiz Ancelmo Dias Gomes

2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Gradução em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Formas Gerais do Teorema da Dominação de Pietsch

por

Luiz Ancelmo Dias Gomes

sob orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

Março de 2016

João Pessoa-PB

G633f Gomes, Luiz Ancelmo Dias.
Formas gerais do Teorema da Dominação de Pietsch / Luiz Ancelmo Dias Gomes.- João Pessoa, 2016.
57f.
Orientador: Joedson Silva dos Santos
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Operadores absolutamente somantes. 3. Teorema da Dominação de Pietsch. 4. Espaços de Banach.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Formas Gerais do Teorema da Dominação de Pietsch

por

Luiz Ancelmo Dias Gomes

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos - UFPB

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Suplente)

Dedicatória

À Deus e minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todos os milagres realizados em minha vida. Aos meus pais, José Ancelmo Pereira Gomes e Maria Dagraça Dias Gomes pelos ensinamentos e sacrifícios desde que nasci. A todos os parentes e amigos, que de uma maneira ou de outra me ajudaram a realizar esta conquista.

Agradeço ao meu orientador Joedson Silva dos Santos, por confiar em meu potencial desde a minha graduação, pela sua competência e prestatividade como orientador e pela amizade verdadeira. Agradeço também sua esposa Joílma pela receptividade e hospitalidade sempre que precisei ir a sua casa.

A todos os professores que tive o privilégio de conhecer na UFS e UFPB, em especial, Adecarlos Costa Carvalho, Alan Almeida Santos, Arlúcio da Cruz Viana, Cleto Brasileiro Miranda Neto, Éder Mateus de Souza, Everaldo Souto de Medeiros, Flank David Morais Bezerra, Marta Élid Amorim Mateus, Pedro Antonio Gómez Venegas e Uberlandio Batista Severo. A banca examinadora Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva e Jamilson Ramos Campos.

A todos os amigos que fiz tanto na graduação quanto na pós-graduação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos uma versão geral do Teorema da Dominação de Pietsch, devido a Pellegrino, Santos e Seoane-Sepúlveda, que melhora a versão unificada presente em [3] e recupera conhecidos teoremas de dominação do tipo Pietsch onde a abordagem unificada parece não funcionar.

Palavras-Chave:

Operadores absolutamente somantes, teorema da dominação de Pietsch, espaços de Banach.

Abstract

In this work we study a general version of the Pietsch Domination Theorem, due to Pellegrino, Santos and Seoane-Sepúlveda, that improves the unified version present in [3] and recovers known Pietsch Domination-type theorems where the unified approach seems not to work.

Key-Words:

Absolutely summing operators, theorem Pietsch domination, Banach spaces.

Contents

Introdução

Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço normado X é **incondicionalmente somável** quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge para toda permutação $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge, dizemos que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é **absolutamente somável**. Ocorre que no conjunto dos números reais, as sequências incondicionalmente somáveis são exatamente as absolutamente somáveis, esse resultado deve-se a Dirichlet. O mesmo vale em espaços de dimensão finita. Na verdade, em espaços vetoriais normados esses conceitos servem para caracterizar espaços de Banach, a saber: um espaço vetorial normado X é Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável. Por outro lado, em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, existe uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável (veja o Teorema de Dvoretzky-Rogers em [6]). Então, é natural pensarmos em operadores entre espaços de Banach de dimensão infinita que levam sequências incondicionalmente somáveis em sequências absolutamente somáveis. Diante desta situação, Alexander Grothendieck, nos anos 50, abriu as portas da teoria dos operadores absolutamente somantes.

Foi somente na década de 60, com os trabalhos de Pietsch [16], Lindenstrauss e Pełczyński [10] e Mitjagin e Pełczyński [13], que a teoria de operadores absolutamente somantes foi apresentada de forma mais clara e acessível. Em 1967, Albrecht Pietsch mostrou um resultado que caracteriza os operadores absolutamente somantes; hoje conhecido como o Teorema da Dominação de Pietsch (TDP). Esta caracterização fornece, de forma inusitada, uma conexão entre a teoria desses operadores e a teoria da medida.

Desde então, vários autores vêm introduzindo novas classes de operadores que generalizam o conceito dos operadores absolutamente somantes. Tais classes estão sendo estudadas do ponto de vista de ideais de operadores tanto no ambiente linear quanto no contexto não-linear. Um fato interessante é que várias dessas classes satisfazem um teorema de dominação do tipo Pietsch. Diante disso, algumas tentativas foram realizadas no sentido de unificar todos os possíveis teoremas do tipo dominação de Pietsch. A primeira tentativa nesse sentido foi mostrada em [3], em 2010, onde na ocasião os autores o chamaram de Teorema da Dominação de Pietsch Unificado (TDPU). Há, no entanto, exemplos de classes de aplicações onde este teorema não se mostrou operante. Motivado por tais exemplos, este trabalho apresenta uma versão potencialmente definitiva deste teorema, batizada de Teorema da Dominação de Pietsch Generalizado (TDPG). Esta versão melhora o TDPU e recupera conhecidos teoremas da dominação do tipo Pietsch onde a abordagem unificada parece não funcionar.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O capítulo 1, foi escrito para fornecer uma discreta introdução ao assunto. Nele apresentaremos alguns dos principais resultados necessários para um estudo da teoria linear de operadores absolutamente somantes, dentre eles o Teorema da Dominação de Pietsch.

No capítulo 2, trataremos da versões unificada e generalizada do Teorema da Dominação de Pietsch. Embora a versão unificada pareça ser inoperante em alguns casos ela é muito aplicada e, por isso, vamos mostrar um significante melhoramento dessa abordagem unificada.

O capítulo 3 tratará de algumas aplicações do TDPG e do TDPU. Veremos que a versão generalizada recupera o teorema da dominação de Pietsch para o caso das aplicações multilineares $(q_1, \ldots, q_n)$-dominadas [8], das aplicações Lipschitz (p, r, s)-somantes [5] e das aplicações Lipschitz-Cohen fortemente p-somantes [18]. Veremos também uma recente aplicação da versão unificada do teorema da dominação de Pietsch para a classe das aplicações Lipschitz $\tau(p)$-somantes [12].

Os anexos referem-se a resultados básicos que serão úteis ao longo deste trabalho.

Notações e Terminologia

- Exceto quando mencionado o contrário, $X, X_1, \ldots, X_n$, Y e H denotarão espaços de Banach;
- Por $\mathbb{K}$ denotaremos o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Fica convencionado que todo espaço vetorial será munido do corpo de escalares $\mathbb{K}$;
- Sendo X um espaço vetorial normado, indicaremos por $\|\cdot\|_X$ a norma definida em X. Quando não houver ambiguidade, denotamos simplesmente por $\|\cdot\|$;
- O espaço dos operadores lineares limitados de X em Y será expresso por $\mathcal{L}(X;Y)$. Quando $Y = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{L}(X;\mathbb{K}) = X^*$ e chamaremos de **dual topológico de** X;
- Os elementos de X^* serão representados por x^*, y^*, a^*, etc. Denotaremos: $x^*(y) := \langle x^*, y\rangle$;
- Indicaremos por B_X a bola fechada unitária de X;
- Se $1 < p < \infty$, denotamos por p^* o **expoente conjugado** de p, ou seja, $1/p+1/p^* = 1$;
- Sendo $1 \leq p < \infty$, simbolizamos por ℓ_p o espaço das sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{K}$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ converge;
- Dado um conjunto A, a função identicamente igual a 1 em A será denotada por $\mathbf{1}_A$. Quando o conjunto A estiver claro no contexto, escrevemos simplesmente $\mathbf{1}$.

Chapter 1

Operadores Lineares Absolutamente Somantes

1.1 Resultados Preliminares

Veremos nesta seção alguns dos principais resultados da teoria linear dos operadores absolutamente somantes.

Definição 1.1.1 Sejam $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é **fortemente p-somável** se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p$ converge.

Denotaremos por $\ell_p(X)$ o conjunto de todas as sequências fortemente p-somáveis em X. Se $1 \leq p < \infty$, definimos a seguinte norma em $\ell_p(X)$:

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$, definimos

$$\ell_\infty(X) := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} \ ; \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\right\}$$

com a norma

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|.$$

Pode-se mostrar de forma similar ao caso escalar que, se $1 \leq p \leq \infty$, então $(\ell_p(X), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach. Além disso, se $p \leq q$, então $\ell_p(X) \subset \ell_q(X)$.

Definição 1.1.2 Sejam $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é **fracamente p-somável** se para todo $x^* \in X^*$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n\rangle|^p$ converge. Ou seja, para todo $x^* \in X^*$, a sequência $(\langle x^*, x_n\rangle)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$.

Denotaremos por $\ell_{p,w}(X)$ o conjunto das sequências fracamente p-somáveis em X. Se $1 \leq p < \infty$, definimos uma norma para $\ell_{p,w}(X)$ como sendo

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w} := \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n \rangle\rangle|^p \right)^{1/p}.$$

Se $p = \infty$, definimos

$$\ell_{\infty,w}(X) := \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} \; ; \; \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle x^*, x_n \rangle| < \infty, \; \textit{para todo } x^* \in X^* \right\}$$

com a norma

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty,w} := \sup_{x^* \in B_{X^*}} \| \left(\langle x^*, x_n \rangle \right)_{n=1}^{\infty} \|_{\infty}.$$

É conhecido que, se $1 \leq p \leq \infty$, então $(\ell_{p,w}(X), \|\cdot\|_{p,w})$ é um espaço de Banach (veja [19, Proposição 2.3.4]).

Observação 1.1.3 Quando $p = \infty$ temos $\ell_{w,\infty}(X) = \ell_{\infty}(X)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \\
&= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x^*, x_n \rangle| \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle x^*, x_n \rangle| \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|(\langle x^*, x_n \rangle)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} \\
&= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty,w}.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Observação 1.1.4 Se $u : X \longrightarrow Y$ é um operador linear limitado, então as aplicações

$$\widehat{u}^s : \ell_p(X) \longrightarrow \ell_p(Y) \; ; \; (x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (ux_n)_{n=1}^{\infty}$$

e

$$\widehat{u}^w : \ell_{p,w}(X) \longrightarrow \ell_{p,w}(Y) \; ; \; (x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (ux_n)_{n=1}^{\infty}$$

são operadores lineares limitados tais que $\|\widehat{u}^s\| = \|\widehat{u}^w\| = \|u\|$. Com efeito, fica claro que $\widehat{u}^w$ é linear. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}^w\| &= \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p,w}(X)}} \|\widehat{u}^w \left((x_n)_{n=1}^{\infty} \right)\|_{p,w} \\
&= \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p,w}(X)}} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y^*, ux_n \rangle|^p \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|u\| \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p,w}(X)}} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \|y^*\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y^*, ux_n \rangle|^p}{\|y^*\| \|u\|} \right)^{1/p} \\
&\leq \|u\| \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p,w}(X)}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n \rangle|^p \right)^{1/p} \\
&= \|u\| \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p,w}(X)}} \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w} \\
&= \|u\|. \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

Com isso, também fica claro que $\widehat{u}^w$ está bem definida.

Por outro lado, dado $x \in B_X$, vemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x, 0, 0, \ldots) \in B_{\ell_{p,w}(X)}$. Logo

$$
\begin{aligned}
\|u\| &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|ux\| \\
&= \sup_{\|(x,0,0,\ldots)\|_{p,w} \leq 1} \|\widehat{u}^w((x_n)_{n=1}^{\infty})\|_{p,w} \\
&\leq \|\widehat{u}^w\|. \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

Analogamente, mostra-se que $\|\widehat{u}^s\| = \|u\|$.

Observação 1.1.5 $\ell_p(X) \subset \ell_{p,w}(X)$. De fato, se $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$, então

$$
\begin{aligned}
\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n \rangle|^p \right)^{1/p} &\leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x^*\|^p \|x_n\|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty. \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

A inclusão da observação acima é sempre estrita quando X tem dimensão infinita (veja [6, Teorema 10.5]).

Seja $1 \leq p < \infty$, defina

$$
\ell_{p,u}(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X) \ ; \ \lim_{n \to \infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{p,w} = 0 \right\}.
$$

Tal conjunto é um subespaço fechado de $\ell_{p,w}(X)$ (veja [19, Proposição 2.3.6]) e nos auxiliará em alguns resultados importantes no decorrer do texto.

Em virtude das Observações 1.1.4 e 1.1.5, vemos que todo operador linear limitado $u : X \longrightarrow Y$ induz um operador limitado $\overline{u} : \ell_p(X) \longrightarrow \ell_{p,w}(Y)$, onde $\overline{u}(x_n)_{n=1}^{\infty} = (ux_n)_{n=1}^{\infty}$ que leva sequências fortemente p-somáveis de X à sequências fracamente p-somáveis de Y. Em geral, não é qualquer operador linear limitado u que induz a correspondência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (ux_n)_{n=1}^{\infty}$ a levar sequências fracamente p-somáveis em sequências fortemente p-somáveis.

Exemplo 1.1.6 Seja X um espaço de Banach com dimensão infinita e $id : X \longrightarrow X$ a identidade em X. Por [6, Teorema 10.5], existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X) \setminus \ell_p(X)$. Assim,

$$\widehat{id} : \ell_{p,w}(X) \longrightarrow \ell_p(X) \ ; \ \widehat{id}((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (id(x_n))_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$$

não pode ser definida.

Lema 1.1.7 *Se $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares tal que $\left|\sum_{n\in M} \lambda_n\right| \leq 1$ para todo conjunto finito $M \subset \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 4$.*

Demonstração. Observe que dado $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{k} |\lambda_n| \leq \sum_{n=1}^{k} |Re(\lambda_n)| + \sum_{n=1}^{k} |Im(\lambda_n)|$$

$$= \sum_{n\in M_{Re}^{+}} Re(\lambda_n) + \sum_{n\in M_{Re}^{-}} (-Re(\lambda_n)) + \sum_{n\in M_{Im}^{+}} Im(\lambda_n) + \sum_{n\in M_{Im}^{-}} (-Im(\lambda_n))$$

onde

$$M_{Re}^{+} = \{n \in \{1, \ldots, k\} \ ; \ Re(\lambda_n) \geq 0\},$$
$$M_{Re}^{-} = \{n \in \{1, \ldots, k\} \ ; \ Re(\lambda_n) < 0\},$$
$$M_{Im}^{+} = \{n \in \{1, \ldots, k\} \ ; \ Im(\lambda_n) \geq 0\}$$

e

$$M_{Im}^{-} = \{n \in \{1, \ldots, k\} \ ; \ Im(\lambda_n) < 0\}.$$

Por hipótese, tem-se que $\left|\sum_{n\in M} \lambda_n\right| \leq 1$, para todo $M \subset \mathbb{N}$ finito. Assim tomando $M = M_{Re}^{+}$ temos

$$\left|\sum_{n\in M_{Re}^{+}} Re(\lambda_n)\right| \leq 1.$$

Analogamente $\left|\sum_{n\in M_{Re}^{-}} Re(\lambda_n)\right|$, $\left|\sum_{n\in M_{Im}^{+}} Re(\lambda_n)\right|$, $\left|\sum_{n\in M_{Im}^{-}} Re(\lambda_n)\right| \leq 1$. Logo $\sum_{n=1}^{k} |\lambda_n| \leq 4$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 4$. ∎

O próximo resultado nos possibilitará tratar das sequências incondicionalmente somáveis em termos mais práticos.

Proposição 1.1.8 *Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X é incondinionalmente somável se, e somente se, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{1,u}(X)$.*

Demonstração. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X uma sequência incondionalmente somável. Logo (por [19, Teorema 1.1.2]), dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $M \subset \mathbb{N}$ finito, onde $M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, \ldots\}$, tem-se $\left\|\sum_{j\in M} x_j\right\| < \varepsilon/8$.

Note que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in M}\langle x^*,x_j\rangle\right| &\leq \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left|\sum_{j\in M}\langle x^*,x_j\rangle\right| \\ &= \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left|\left\langle x^*,\sum_{j\in M}x_j\right\rangle\right| \\ &= \left\|\sum_{j\in M}x_j\right\| < \frac{\varepsilon}{8}. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.1.7 tem-se que

$$\sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty}|x^*(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, se $n > n_\varepsilon$, então

$$\begin{aligned}\left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{1,w} &= \sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{j=n}^{\infty}|\langle x^*,x_j\rangle| \\ &\leq \sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty}|\langle x^*,x_j\rangle| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{1,w} = 0.$$

Logo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{1,u}(X)$.

Reciprocamente, suponha que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{1,u}(X)$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_\varepsilon$ implica $\left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{1,w} < \varepsilon$. Dado $M \subset \mathbb{N}$ finito tal que $M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1 \ldots\}$, segue que

$$\left\|\sum_{j\in M}x_j\right\| \leq \sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{j\in M}|\langle x^*,x_j\rangle| \leq \sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{j=n}^{\infty}|\langle x^*,x_j\rangle| < \varepsilon,$$

sempre que $n \geq n_\varepsilon$. De [19, Teorema 1.1.2], segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. ■

São do nosso interesse nesta seção os operadores lineares que levam sequências de $\ell_{1,u}(X)$ em sequências de $\ell_1(Y)$. Definimos tais operadores como **absolutamente somantes**. De forma mais geral, segue a definição.

Definição 1.1.9 Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $u : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo. Dizemos que u é **absolutamente** $(p;q)$**-somante** (ou simplesmente $(p;q)$**-somante**) quando existe um operador induzido

$$\widehat{u} : \ell_{q,w}(X) \longrightarrow \ell_p(Y) \ ; \ \widehat{u}((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (ux_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Denotamos por $\Pi_{p,q}(X;Y)$ o conjunto dos operadores $(p;q)$-somantes de X em Y. Se $p=q$, escrevemos $\Pi_p(X;Y)$ em vez de $\Pi_{p,q}(X;Y)$.

Proposição 1.1.10 *Seja $u \in \mathcal{L}(X;Y)$. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

(i) *u é $(p;q)$-somante;*

(ii) *Existe $K>0$ tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} \leq K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q} \tag{1.6}$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$;

(iii) *Existe $K>0$ tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} \leq K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q}$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$;

(iv) *Existe $K>0$ tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} \leq K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q}$$

se $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$;

(v) *$(ux_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$ sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$.*

Além disso, denotando por $\pi_{p,q}(u)$ o ínfimo das constantes K que satisfazem (1.6), *tem-se que $\pi_{p,q}(u) = \|\widehat{u}\|$.*

Demonstração.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Suponha $u : X \longrightarrow Y$ $(p;q)$-somante. Logo existe um operador

$$\widehat{u} : \ell_{q,w}(X) \longrightarrow \ell_p(Y)$$

tal que $\widehat{u}((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (ux_n)_{n=1}^{\infty}$. Queremos mostrar que $\widehat{u}$ é limitado. Como $\ell_{q,w}(X)$ e $\ell_p(Y)$ são espaços de Banach, basta mostrar que $\widehat{u}$ tem gráfico fechado. De fato, suponha que $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\ell_{q,w}(X)$ e que $\widehat{u}\left(\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}\right)$ converge para $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$.

De $x^{(k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_1 \Rightarrow \|x^{(k)} - x\|_{q,w} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle x^*, x_n^{(k)} - x_n \right\rangle \right|^q \right)^{1/q} < \varepsilon.$$

Logo, para todo $x^* \in B_{X^*}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$k \geq k_1 \Rightarrow \left| \left\langle x^*, x_n^{(k)} - x_n \right\rangle \right| < \varepsilon.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left| \left\langle x^*, x_n^{(k)} - x_n \right\rangle \right| = \|x_n^{(k)} - x_n\| \leq \varepsilon.$$

Logo

$$x_n^{(k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_n, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

e portanto

$$u(x_n^{(k)}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(x_n), \;\; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Como $\widehat{u}\left(\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}\right)$ converge para $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_2 \;\Rightarrow\; \left\| \widehat{u}\left(x^{(k)}\right) - y \right\|_p < \varepsilon.$$

Daí

$$k \geq k_2 \;\Rightarrow\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| u x_n^{(k)} - y_n \right\|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$k \geq k_2 \;\Rightarrow\; \left\| u\left(x_n^{(k)}\right) - y_n \right\| < \varepsilon.$$

Assim sendo,

$$u\left(x_n^{(k)}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_n, \;\; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Por (1.7), (1.8) e pela unicidade do limite, tem-se que $u(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim $\widehat{u}(x) = y$ e portanto $\widehat{u}$ é limitado.

Logo, para qualquer sequência finita $(x_k)_{k=1}^n$ em X

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} \|u x_k\|^p \right)^{1/p} &\leq \|(u x_k)_{k=1}^n\|_p \\
&= \|\widehat{u}((x_k)_{k=1}^n)\|_p \\
&\leq \|\widehat{u}\| \|(x_k)_{k=1}^n\|_{q,w} \\
&= \|\widehat{u}\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x^*, x_k \rangle|^q \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\pi_{p,q}(u) \leq \|\widehat{u}\|. \tag{1.9}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, exista $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} \leq K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q}.$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$, então

$$\begin{aligned}
\|(ux_k)_{k=1}^{\infty}\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q}\right] \\
&= K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q} \\
&= K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ De (iii) segue que $(ux_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$, se $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$. Logo u é $(p;q)$-somante. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}\| &= \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{q,w}(X)}} \|\widehat{u}((x_n)_{n=1}^{\infty})\|_p \\
&= \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{q,w}(X)}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{q,w}(X)}} K\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\widehat{u}\| \leq \pi_{p,q}(u)$. De (1.9), segue que $\|\widehat{u}\| = \pi_{p,q}(u)$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Decorre da definição de $\ell_{q,u}(X)$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Óbvio.

$(v) \Rightarrow (ii)$ Suponha que $(ux_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$. Definindo

$$\overline{u} : \ell_{q,u}(X) \longrightarrow \ell_p(Y)$$

onde $\overline{u}((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (ux_n)_{n=1}^{\infty}$. Tem-se por (v) que $\overline{u}$ está bem definido e claramente temos que é linear. Analogamente ao caso de $\widehat{u}$, mostra-se que $\overline{u}$ é limitado.

Assim, dado $x_1, \ldots, x_n \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \in \ell_{q,w}(X)$. Logo,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} &= \|(ux_k)_{k=1}^{n}\|_p \\ &= \|\overline{u}((x_k)_{k=1}^{n})\|_p \\ &\leq \|\overline{u}\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

■

Observação 1.1.11 Se $p < q$ então o único operador $(p;q)$-somante é o nulo. De fato, podemos supor que $X \neq \{0\}$. Como $p < q$ então existe uma sequência $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q - \ell_p$ (a saber, tome $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{k^{\alpha/q}}\right)_{k=1}^{\infty}$, com $1 < \alpha < q/p$). Seja $0 \neq x \in X$. Logo $(\lambda_k x)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$. De fato,

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, \lambda_k x\rangle|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^q\right)^{1/q} \cdot \|x\| < \infty.$$

Suponha que exista $0 \neq u \in \Pi_{p,q}(X;Y)$. Logo, pela Proposição 1.1.10 , existe $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x)\|^p\right)^{1/p} &\leq K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x^*, \lambda_k x\rangle|^q\right)^{1/q}, \\ \therefore \|ux\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p\right)^{1/p} &\leq K \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{1/q}, \\ \therefore \|ux\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p\right)^{1/p} &\leq K\|x\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Dividindo os membros de (1.10) por $\|x\|$ e passando ao supremo quando $x \in B_X$ tem-se que

$$\|u\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p\right)^{1/p} \leq K \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{1/q} < \infty \ (\textit{absurdo!}).$$

Logo, $u \equiv 0$.

Corolário 1.1.12 *Seja $u \in \mathcal{L}(X;Y)$. Então $u \in \Pi_{p,1}(X;Y)$ se, e somente se, $(ux_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. Em particular, u é absolutamente somante se, e somente se, u é $(1;1)$-somante.*

Observação 1.1.13 Como $\|\widehat{u}\| = \pi_{p,q}(u)$ e $\|\widehat{u}((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_p \leq \|\widehat{u}\| \| (x_k)_{k=1}^{\infty} \|_{q,w}$, então

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q}.$$

Ou seja, o ínfimo $\pi_{p,q}(u)$ é atingido.

Teorema 1.1.14 ***(Desigualdade de Grothendiech)*** *Existe uma constante positiva K_G tal que, para todo espaço de Hilbert H, todo $n \in \mathbb{N}$, toda matriz $(a_{ij})_{n\times n}$ e quaisquer $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in B_H$ a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| \leq K_G \sup_{|s_i|,|t_j|\leq 1} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \tag{1.11}$$

Demonstração. Veja [6, Theorem 1.14]. ■

Teorema 1.1.15 ***(Teorema de Grothendiech)*** *$\mathcal{L}(\ell_1, \ell_2) = \Pi_1(\ell_1, \ell_2)$ e $\pi_1(T) \leq K_G\|T\|$ para cada $T \in \mathcal{L}(\ell_1, \ell_2)$.*

Demonstração. Veja [6, Theorem 1.13]. ■

Proposição 1.1.16 $(\Pi_{p,q}(X;Y), \pi_{p,q}(\cdot))$ *é um espaço vetorial normado.*

Demonstração. Sejam $u, v \in \Pi_{p,q}(X;Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Mostraremos que $u + \lambda v$ satisfaz a desigualdade (1.6) para todo $u, v \in \Pi_{p,q}(X;Y)$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pela Proposição 1.1.10 temos que

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q}$$

e

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|vx_k\|^p\right)^{1/p} \leq \pi_{p,q}(v) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_m \in X$. Logo

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{m} \|(u+\lambda v)x_k\|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^{m} \|ux_k\| + |\lambda|\|vx_k\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{m} \|ux_k\|^p\right)^{1/p} + |\lambda|\left(\sum_{k=1}^{m} \|vx_k\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq (\pi_{p,q}(u) + |\lambda|\pi_{p,q}(v)) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Portanto $u + \lambda v \in \Pi_{p,q}(X;Y)$. Além disso, $\pi_{p,q}(\cdot)$ define uma norma sobre $\Pi_{p,q}(X;Y)$. Com efeito, sejam $u, v \in \Pi_{p,q}(X;Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Como $K > 0$ na Proposição 1.1.10, $\pi_{p,q}(u) \geq 0$ para todo $u \in \Pi_{p,q}(X;Y)$. Mais ainda,

$$\pi_{p,q}(u) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|\widehat{u}\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \widehat{u} = 0 \;\Leftrightarrow\; u = 0.$$

Por fim, da desigualdade (1.12) (tomando $\lambda = 1$) segue que

$$\pi_{p,q}(u+v) \leq \pi_{p,q}(u) + \pi_{p,q}(v).$$

Note também que

$$\pi_{p,q}(\lambda v) = \left\|\widehat{\lambda u}\right\| = |\lambda| \, \|\widehat{u}\| = |\lambda| \pi_{p,q}(v).$$

Logo $\pi_{p,q}(\cdot)$ de fato é uma norma e portanto $(\Pi_{p,q}(X;Y), \pi_{p,q}(\cdot))$ é um espaço vetorial normado. ■

Observação 1.1.17 Se $u \in \Pi_{p,q}(X;Y)$, então $\|u\| \leq \pi_{p,q}(u)$. De fato, tomando $n = 1$ na desigualdade (1.6),

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|ux\| \\
&\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \pi_{p,q}(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle| \\
&= \pi_{p,q}(u) \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \\
&\leq \pi_{p,q}(u).
\end{aligned}$$

Lema 1.1.18 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e p^* o conjugado de p. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$ e $(a_n)_n \in \ell_{p^*}$, então $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ converge.*

Demonstração. Seja $n > m$, temos

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i \right\| &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left| \sum_{i=m+1}^{n} a_i \langle x^*, x_i\rangle \right| \\
&\leq \left(\sum_{i=m+1}^{n} |a_i|^{p^*} \right)^{1/p^*} \cdot \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=m+1}^{n} |\langle x^*, x_i\rangle|^p \right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Assim, fazendo $n, m \to \infty$ segue que $\|s_n - s_m\| \longrightarrow 0$. Como X é um espaço de Banach tem-se que $(s_n)_n$ converge. ■

O próximo resultado estabelecerá uma caracterização das sequências fracamente p-somáveis.

Lembre-se que, se $1 < p < \infty$, então $\mathcal{L}(\ell_p; \mathbb{K}) = (\ell_p)^* = \ell_{p^*}$.

Lema 1.1.19 *Seja* $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$. *Então o operador* $u_x : \ell_{p^*} \longrightarrow X$ *tal que* $u_x((a_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ *é contínuo.*

Demonstração. Pelo Lema 1.1.18, u_x está bem definido. Além disso, sabemos que, para todo $a^* \in (\ell_p)^*$, existe $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}$ com $\|a\|_{p^*} = \|a^*\|$ e $\langle a^*, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$, para todo $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sup_{a \in B_{\ell_{p^*}}} \|u(a)\| \\
&= \sup_{a \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \\
&= \sup_{a \in B_{\ell_{p^*}}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left| \left\langle x^*, \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\rangle \right| \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{a \in B_{\ell_{p^*}}} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \langle x^*, x_i\rangle \right| \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{a^* \in B_{(\ell_p)^*}} |\langle a^*, (\langle x^*, x_i\rangle)_{i=1}^{\infty}\rangle| \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|(\langle x^*, x_i\rangle)_{i=1}^{\infty}\|_p \\
&= \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{p,w}. \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Em particular, u_x é contínuo. ■

Proposição 1.1.20 *A correspondência* $u \mapsto (ue_n)_n$ *(onde* $e_n = (\delta_{n,j})_{j=1}^{\infty}$*) produz um isomorfismo isométrico de* $\mathcal{L}(\ell_{p^*}; X)$ *em* $\ell_{p,w}(X)$ *quando* $1 < p < \infty$. *Se* $p = 1$, *então* $\mathcal{L}(c_0; X)$ *é isometricamente isomorfo a* $\ell_{1,w}(X)$.

Demonstração. Suponha $1 < p < \infty$ e considere o operador linear

$$T : \mathcal{L}(\ell_{p^*}; X) \longrightarrow \ell_{p,w}(X)$$

definido por $Tu = (ue_n)_n$.

Afirmação 1: $(e_n)_n \in \ell_{p,w}(\ell_{p^*})$.

De fato, é claro que para todo $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in \ell_{p^*}$. Como ℓ_p é isometricamente isomorfo a $(\ell_{p^*})^*$, para cada $a^* \in B_{(\ell_{p^*})^*}$ existe uma (única) sequência $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (\langle a^*, e_n\rangle)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ onde $\|a\|_p = \|a^*\|$ e $\langle a^*, (y_n)_{n=1}^{\infty}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$, para todo $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p^*}$. Assim

$$\|(e_n)_n\|_{p,w} = \sup_{a^* \in B_{(\ell_{p^*})^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle a^*, e_n\rangle|^p \right)^{1/p}$$

$$= \sup_{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} = 1.$$

Afirmação 2: T está bem definido.

Dado $u \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}; X)$

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{p,w} &= \|(ue_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x^*, ue_j \rangle|^p \right)^{1/p} \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x^* \circ u, e_j \rangle|^p \right)^{1/p} \\
&= \|u\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|x^*\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle x^* \circ u, e_j \rangle|^p}{\|x^*\|^p \|u\|^p} \right)^{1/p} \\
&\leq \|u\| \sup_{b^* \in B_{\left(\ell_{p^*}\right)^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle b^*, e_j \rangle|^p \right)^{1/p} < \infty.
\end{aligned}$$

pois, $(e_n)_n \in \ell_{p,w}(\ell_{p^*})$.

Afirmação 3: T é uma isometria sobre sua imagem.

Claramente T é linear. Ademais,

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{p,w} &= \|(ue_n)_n\|_{p,w} \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, ue_n \rangle|^p \right)^{1/p} \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|(\langle x^*, ue_n \rangle)_{n=1}^{\infty}\|_p \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{b^* \in B_{(\ell_p)^*}} |\langle b^*, (\langle x^*, ue_n \rangle)_{n=1}^{\infty} \rangle| \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{(b_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \langle x^*, ue_n \rangle \right| \\
&= \sup_{(b_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left| \left\langle x^*, \sum_{n=1}^{\infty} b_n ue_n \right\rangle \right| \\
&= \sup_{(b_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n ue_n \right\|.
\end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n u e_n < \infty$ (aplique o Lema 1.1.18 sabendo que $(ue_n)_n \in \ell_{p,w}(X)$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}$), segue que

$$\begin{aligned}\sup_{(b_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*}}} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n u e_n \right\| &= \sup_{(b_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*}}} \left\| u\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n\right)\right\| \\ &= \sup_{(b_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*}}} \left\| u\left((b_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right\| = \|u\|.\end{aligned}$$

Afirmação 4: T é sobrejetivo.

Dado $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$, tome $u_x : \ell_{p^*} \longrightarrow X$ tal que $u_x\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Pelo Lema 1.1.19, $u_x \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}; X)$. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_x e_n = x_n$, portanto, $Tu_x = (u_x e_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$.

O caso $p = 1$ é análogo.

■

1.2 Ideais de Operadores Lineares

Tanto a classe das aplicações lineares absolutamente somantes quanto suas generalizações são estudadas na forma de ideais de operadores. Desta maneira, podemos identificar se classes mais gerais conservam boas propriedades da classe inicial.

Definição 1.2.1 Um **ideal de operadores** $\mathcal{I}$ é uma subclasse de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach, tal que, para quaisquer espaços de Banach X e Y as componentes $\mathcal{I}(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y) \cap \mathcal{I}$ satisfazem:

(i) $\mathcal{I}(X;Y)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X;Y)$ que contém todos os operadores de posto finito;

(ii) se $u \in \mathcal{L}(X_0;X)$, $v \in \mathcal{I}(X;Y)$ e $t \in \mathcal{L}(Y;Y_0)$, então a composição $tvu \in \mathcal{I}(X_0;Y_0)$.

Definição 1.2.2 Um **ideal normado** $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de operadores $\mathcal{I}$ munido de uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que:

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a $\mathcal{I}(X;Y)$ é uma norma para quaisquer espaços de Banach X e Y;

(ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$, onde $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ é a identidade;

(iii) Se $u \in \mathcal{L}(X_0;X)$, $v \in \mathcal{I}(X;Y)$ e $t \in \mathcal{I}(Y;Y_0)$, então $\|tvu\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\|\|v\|_{\mathcal{I}}\|u\|$.

Definição 1.2.3 Um ideal normado $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um **ideal de Banach** (ou **ideal completo**) se, para todos os espaços de Banach X e Y, as componentes $(\mathcal{I}(X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ são completas.

Proposição 1.2.4 *Se* $1 \leq q \leq p < \infty$, *então* $(\Pi_{p,q}, \pi_{p,q}(\cdot))$ *é um ideal normado de operadores lineares.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $\Pi_{p,q}$ é um ideal de operadores. De fato, dados X e Y espaços de Banach, pela Proposição 1.1.16 sabemos que $\Pi_{p,q}(X;Y)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(X;Y)$.

Fixe $0 \neq z^* \in X^*$ e $y \in Y$. Considere $u : X \longrightarrow Y$ onde $u(x) = \langle z^*, x\rangle y$. Note que u é $(p;q)$-somante, pois dados $m \in \mathbb{N}$ *e* $x_1, \ldots, x_m \in X$ temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m}\|ux_j\|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^{m}|\langle z^*, x_j\rangle|^p\|y\|^p\frac{\|z^*\|^p}{\|z^*\|^p}\right)^{1/p}\\ &\leq \|y\|\|z^*\|\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{|\langle z^*, x_j\rangle|^q}{\|z^*\|^q}\right)^{1/q}\\ &\leq \|y\|\|z^*\|\sup_{y^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\langle y^*, x_j\rangle|^q\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.1.10, u é $(p;q)$-somante. Além disso, $\pi_{p,q}(u) \leq \|y\|\|z^*\| = \|u\| \leq \pi_{p,q}(u)$. Portanto, $\pi_{p,q}(u) = \|y\|\|z^*\|$.

Dado $w \in \mathcal{L}(X;Y)$ operador linear de posto finito, seja $\epsilon = \{y_j\}_{j=1}^m$ uma base de $Im(w)$. Nos anexos em (A2) vemos que $w(\cdot) = \sum_{j=1}^m \left\langle z_j^*, \cdot\right\rangle y_j$ para certos $z_1^*, \ldots, z_m^* \in X^*$. Como cada parcela desta soma é $(p;q)$-somante, segue que $w \in \Pi_{p,q}(X;Y)$. Consequentemente, $\Pi_{p,q}(X;Y)$ contém os operadores de posto finito de X em Y.

Sejam agora $t \in \mathcal{L}(X_0;X)$, $v \in \Pi_{p,q}(X;Y)$ e $u \in \mathcal{L}(Y;Y_0)$ com X_0 e Y_0 espaços de Banach. Considere os operadores

$$\ell_{q,w}(X_0) \xrightarrow{\widehat{t}^w} \ell_{q,w}(X) \xrightarrow{\widehat{v}} \ell_p(Y) \xrightarrow{\widehat{u}^s} \ell_p(Y_0).$$

Pela Observação 1.1.4 e pela Proposição 1.1.10, sabemos que $\|\widehat{t}^w\| = \|t\|$, $\|\widehat{v}\| = \pi_{p,q}(v)$ e $\|\widehat{u}^s\| = \|u\|$. Além disso,

$$\widehat{u}^s\ \widehat{v}\ \widehat{t}^w : \ell_{q,w}(X_0) \longrightarrow \ell_p(Y_0)$$

é tal que

$$\widehat{u}^s\ \widehat{v}\ \widehat{t}^w\left((x_n)_{n=1}^\infty\right) = \widehat{u}^s\ \widehat{v}\left((tx_n)_{n=1}^\infty\right) = \widehat{u}^s\left((vtx_n)_{n=1}^\infty\right) = (uvtx_n)_{n=1}^\infty = \widehat{uvt}(x_n)_{n=1}^\infty.$$

Assim, $\widehat{uvt} : \ell_{q,w}(X_0) \longrightarrow \ell_p(Y_0)$ está bem definido, ou seja, $uvt \in \Pi_{p,q}(X_0;Y_0)$ com $\pi_{p,q}(uvt) = \|\widehat{uvt}\| = \|\widehat{u}^s\ \widehat{v}\ \widehat{t}^w\| \leq \|\widehat{u}^s\|\|\widehat{v}\|\|\widehat{t}^w\| = \|\widehat{u}^s\|\pi_{p,q}(v)\|\widehat{t}^w\| = \|u\|\pi_{p,q}(v)\|t\|$.

Note ainda que para todo $x \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}|x| &= \|(x, 0\ldots)\|_p\\ &= \|(id_{\mathbb{K}}(x), id_{\mathbb{K}}(0)\ldots)\|_p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}})\|(x,0,\ldots)\|_{q,w}\\&= \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}})|x|.\end{aligned}$$

Logo $\pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \geq 1$.

Como $q \leq p$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m}|id_{\mathbb{K}}(x_j)|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{j=1}^{m}|id_{\mathbb{K}}(x_j)|^q\right)^{1/q}\\&= \left(\sum_{j=1}^{m}|x_j|^q\right)^{1/q}\\&= 1\cdot\sup_{\varphi\in B_{\mathbb{K}^*}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Logo $\pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \leq 1$, ou seja, $\pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) = 1$. Portanto $(\Pi_{p,q}, \pi_{p,q}(\cdot))$ é um ideal normado. ■

Proposição 1.2.5 *Seja* $1 \leq q \leq p < \infty$ *então* $(\Pi_{p,q}, \pi_{p,q}(\cdot))$ *é um ideal de Banach.*

Demonstração. Dados X e Y espaços de Banach, seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\Pi_{p,q}(X;Y)$. Como $\|\cdot\| \leq \pi_{p,q}(\cdot)$, segue que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X;Y)$. Logo $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $u \in \mathcal{L}(X;Y)$. Queremos mostrar que u é $(p;q)$-somante. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\widehat{u_n} : \ell_{q,w}(X) \longrightarrow \ell_p(Y);\ (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (u_n x_k)_{k=1}^{\infty}.$$

Como $\|\widehat{u_n}\| = \pi_{p,q}(u_n)$, tem-se que $(\widehat{u_n})_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(\ell_{q,w}(X);\ell_p(Y))$ que é um espaço de Banach. Logo $(\widehat{u_n})_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $w \in \mathcal{L}(\ell_{q,w}(X);\ell_p(Y))$. Denote $(y_k)_{k=1}^{\infty} = w\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right)$. Assim, seja $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)\setminus\{0\}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0 \implies \|\widehat{u_n} - w\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|_{q,w}}.$$

Daí,

$$\forall n \geq n_0 \Longrightarrow \|\widehat{u_n}\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right) - w\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right)\|_p < \frac{\varepsilon}{\|x\|_{q,w}}\cdot\|x\|_{q,w}.$$

Assim

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|u_n x_k - y_k\|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Portanto, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \implies \|u_n x_k - y_k\| < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} u_n x_k = y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ em $\mathcal{L}(X;Y)$, então $\lim_{n\to\infty} u_n x_k = ux_k$ em Y, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela unicidade do limite, $(ux_k)_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$. Concluímos que

$$\widehat{u}\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right) = (ux_k)_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty} = w\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right).$$

Assim $\widehat{u} = w \in \mathcal{L}(\ell_{q,w}(X); \ell_p(Y))$. Portanto, $u \in \Pi_{p,q}(X;Y)$ e então $\Pi_{p,q}(X;Y)$ é completo. ■

1.3 O Teorema da Dominação de Piesch

Teorema 1.3.1 *Sejam K um espaço compacto de Hausdorff e $x^* \in \mathcal{C}(K)^*$ funcional linear positivo ($\langle x^*, u\rangle \geq 0$ se $u \geq 0$) com $\langle x^*, \mathbf{1}\rangle = 1$. Então, existe uma única medida regular de probabilidade μ, definida na σ-algebra de Borel de K* [1]*, onde*

$$\langle x^*, u\rangle = \int_K u d\mu$$

para todo $u \in C(K)$.

Demonstração. Veja [1, Theorem 4.2.10]. ■

Corolário 1.3.2 *Seja $P(K)$ o conjunto formado por todas as medidas de probabilidade em K, então a aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi : P(K) &\longrightarrow \{x^* \in C(K)^* \ ; \ x^* \textit{ é positivo e } \langle x^*, \mathbb{I}\rangle = 1\} \\ \mu \quad &\mapsto \quad \Phi(\mu) : C(K) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad\qquad \varphi \quad \mapsto \quad \Phi(\mu)(\varphi) := \textstyle\int_K \varphi d\mu \end{aligned}$$

é bijetiva e além disso $\Phi(P(K)) \subset B_{C(K)^*}$.

Demonstração. Do Teorema 1.3.1 segue que Φ é bijetiva. Note ainda que, dado $\mu \in P(K)$,

$$\|\Phi(\mu)\| = \sup_{\varphi \in B_{C(K)}} \left| \int_K \varphi d\mu \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{C(K)}} \int_K |\varphi| d\mu \leq 1.$$

■

Lema 1.3.3 *Sejam X e Y espaços de Banach, $u : X \longrightarrow Y$ um operador p-somante e $M \subset X$ um subconjunto finito. Defina, para cada M,*

$$\Psi_M : B_{X^*} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \Psi_M(x^*) := \sum_{x \in M} \left(\|ux\|^p - \pi_p(u)^p |\langle x^*, x\rangle|^p\right),$$

$\mathcal{G} = \{\Psi_M \ ; \ M \subset X \ finito\}$ e $\mathcal{F}$ sua envoltória convexa. Então, para todo $\Psi \in \mathcal{F}$, existe um $x^*_\Psi \in B_{X^*}$ tal que $\Psi(x^*_\Psi) \leq 0$.

[1] a definição está presente nos apêndices.

Demonstração. É conveniente considerar M como uma sequência finita em X. Dessa forma, repetições serão admitidas quando realizamos união desses conjuntos.

Como $|J_x|$ é contínuo em B_{X^*} e $|J_x(x^*)| = |\langle x^*, x\rangle|$ para todo $x \in M$, segue que $\Psi_M \in C(B_{X^*})$. Logo $\mathcal{F} \subset C(B_{X^*})$.

Dado $\Psi \in \mathcal{F}$, existem $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in [0,1]$ tal que $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ e $\Psi = \sum_{j=1}^k \lambda_j \Psi_{M_j}$ para alguns $\Psi_{M_j} \in \mathcal{G}$. Defina

$$M_\Psi := \bigcup_{j=1}^{k} \left\{\lambda_j^{1/p} x \ ; \ x \in M_j\right\}.$$

Como $|J_x|$ é contínua em B_{X^*} (compacta na topologia fraca *), existe $x_0^* \in B_{X^*}$ tal que

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{x \in M_\Psi} |\langle x^*, x\rangle|^p = \sum_{x \in M_\Psi} |\langle x_0^*, x\rangle|^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Psi(x_0^*) &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \Psi_{M_j}(x_0^*) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \sum_{x \in M_j} (\|ux\|^p - \pi_p(u)^p |\langle x_0^*, x\rangle|^p) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in M_j} \left(\|u(\lambda_j{}^{1/p} x)\|^p - \pi_p(u)^p |\langle x_0^*, \lambda_j{}^{1/p} x\rangle|^p\right) \\
&= \sum_{y \in M_\Psi} \|u(y)\|^p - \pi_p(u)^p \sum_{x \in M_\Psi} |\langle x_0^*, y\rangle|^p \leq 0.
\end{aligned}$$

A última desigualdade segue diretamente da hipótese. Tome $x_0^* = x_\Psi^*$ e tem-se o resultado. ■

Lema 1.3.4 *Seja $P = \{f \in \mathcal{C}(B_{X^*})^2 \ ; \ f(\varphi) > 0, \text{ para todo } \varphi \in B_{X^*}\}$. Então P é aberto e convexo.*

Demonstração. Com efeito, dados $f, g \in P$ e $\lambda \in [0,1]$, $\lambda f + (1-\lambda) g$ é contínuo em B_{X^*}. Além disso, como $f(\varphi),\ g(\varphi) > 0$ para todo $\varphi \in B_{X^*}$ segue que $\lambda f(\varphi) + (1-\lambda) g(\varphi) > 0$. Logo, para todo $\lambda \in [0,1]$, $\lambda f + (1-\lambda) g \in P$. Assim, P é convexo.

Dado $f \in P$, como B_{X^*} é $\sigma(X^*; X)$-compacto, existe $x_0^* \in B_{X^*}$ tal que $f(x_0^*) = \min_{x^* \in B_{X^*}} f(x^*)$. Dado $g \in C(B_{X^*})$ tal que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon = f(x_0^*)/2$,

$$|f(x^*) - g(x^*)| \leq \|f - g\| < \varepsilon \ \forall x^* \in B_{X^*}.$$

[2] A bola X^* é compacta na topologia fraca estrela. Para mais detalhes, consultar o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki nos apêndices.

Assim, $g(x^*) > f(x^*) - \varepsilon \geq f(x_0^*) > 0$. O que implica em $B(f, \varepsilon) \subset P$. Portanto P é aberto. ■

Teorema 1.3.5 ***(Teorema da Dominação de Pietsch)*** *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e que $u : X \longrightarrow Y$ é um operador linear limitado entre espaços de Banach. Então u é p-somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*} tal que*

$$\|ux\| \leq C\left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p d\mu\right)^{1/p} \tag{1.15}$$

para todo $x \in X$.

Demonstração.

Suponha que existe $C > 0$ e uma medida μ como acima tal que (1.15) é satisfeita. Tome $x_1, \ldots, x_n \in X$. Logo

$$\|ux_j\|^p \leq C^p \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x_j\rangle| d\mu,$$

para todo $j = 1, \ldots, k$. Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \|ux_j\|^p &\leq C^p \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x_j\rangle|^p d\mu \\
&= C^p \int_{B_{X^*}} \sum_{j=1}^{k} |\langle x^*, x_j\rangle|^p d\mu \\
&\leq C^p \int_{B_{X^*}} \sup_{\varphi x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{k} |\langle x^*, x_j\rangle|^p d\mu \\
&= C^p \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{k} |\langle x^*, x_j\rangle|^p \int_{B_{X^*}} d\mu \\
&= C^p \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{k} |\langle x^*, x_j\rangle|^p.
\end{aligned}$$

Por fim, segue de (A1) nos anexos que u é p-somante.

Agora, suponha que u seja p-somante. Considere

$$\Psi_M : B_{X^*} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \Psi_M(x^*) := \sum_{x \in M} \left(\|ux\|^p - \pi_p(u)^p |\langle x^*, x\rangle|^p\right),$$

$\mathcal{G}$ o conjunto formado por todos os Ψ_M e $\mathcal{F}$ sua envoltória convexa. Pelos Lemas 1.3.3 e 1.3.4, tem-se que $\mathcal{F} \cap P = \varnothing$ e, aliados ao Teorema de Hahn-Banach (1ª versão geométrica), existem $\mu_0 \in C(B_{X^*})^*$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mu_0(\Psi_M) \leq a < \mu_0(f),$$

para todo $\Psi_M \in \mathcal{F}$ e para todo $f \in P$.

Afirmação 1: μ_0 é positiva.

Observe que tomando $M = \{0\}$, temos que $\Psi_{\{0\}} \equiv 0$, pois para todo $\varphi \in B_{X^*}$,

$$\Psi_{\{0\}}(x^*) = \|u(0)\|^p + \pi_p(u)^p |\langle x^*, 0\rangle|^p = 0.$$

Logo

$$0 \leq a < \mu_0(f)$$

para todo $f \in P$ (ou seja, para todo $f \in C(B_{X^*})$ onde $f > 0$).

Em geral, dado $h \in C(B_{X^*})$, com $h \geq 0$, defina para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n(x^*) = h(x^*) + \frac{1}{n}.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$. Como μ_0 é contínua, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_0(h_n) = \mu_0(h) \geq 0$. Logo μ_0 é positivo.

Defina agora $\mu : C(B_{X^*}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu(f) := \frac{1}{\mu_0(\mathbf{1})}\mu_0(f)$, para todo $f \in C(B_{X^*})$. Assim,

- μ está bem definido, pois $\mu_0(\mathbf{1}) > 0$ e μ_0 está bem definido;
- μ é positiva e $\mu(\mathbf{1}) = 1$. Claramente.

Pelo Teorema 1.3.1 e por $\mu(\mathbf{1}) = 1$ sabemos que μ é identificada com uma medida de Borel regular de probabilidade em B_{X^*}.

Afirmação 2: $a = 0$

De fato, já mostramos que $a \geq 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n : B_{X^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_n(x^*) = 1/n$ pertence a P. Além disso, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$. Como μ_0 é contínuo,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_0(f_n) = \mu_0(0) = 0.$$

Como $a < \mu_0(f_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $a \leq 0$ e portanto $a = 0$.

Note que dado $x \in X$,

$$\mu(\Psi_{\{x\}}) = \frac{\mu_0(\Psi_{\{x\}})}{\mu_0(\mathbf{1})} \leq a = 0,$$

e daí $\mu(\Psi_{\{x\}}) \leq 0$. Assim,

$$\int_{B_{X^*}} \Psi_{\{x\}}(x^*) d\mu = \int_{B_{X^*}} \left(\|ux\|^p - \pi_p(u)^p |\langle x^*, x\rangle|^p\right) d\mu(x^*)$$

$$= \|ux\|^p \int_{B_{X^*}} d\mu - \pi_p(u)^p \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p d\mu \leq 0$$

E então

$$\|ux\| \leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

■

Usando a inclusão dos espaços L_p, segue imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 1.3.6 *Se* $1 \leq p \leq q$, *então* $\Pi_p \subset \Pi_q$.

Chapter 2

Versões Abstratas do Teorema da Dominação de Pietsch

2.1 O Teorema da Dominação de Pietsch Unificado (TDPU)

Sejam X, Y e E conjuntos não vazios, $\mathcal{F}$ uma família de aplicações de X em Y, K um espaço topológico compacto de Hausdorff e G um espaço de Banach. Considere também as aplicações

$$R : K \times E \times G \longrightarrow [0, +\infty)$$

e

$$S : \mathcal{F} \times E \times G \longrightarrow [0, +\infty).$$

Definição 2.1.1 Sejam $0 < p < \infty$ e $f \in \mathcal{F}$. Dizemos que f é **R-S-abstrata p-somante** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} S(f, x_j, b_j)^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{t=1}^{n} R(\varphi, x_t, b_t)^{1/p} \right)^{1/p},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ e $b_1, \ldots, b_n \in G$.

Observação 2.1.2 Para que possamos abordar a versão unificada do TDP, serão consideradas as seguintes condições:

(1) Dado $f \in \mathcal{F}$ existe um $x_0 \in E$ tal que $R(\varphi, x_0, b) = S(f, x_0, b) = 0$ para todo $b \in G$;

(2) Dados $x \in E$ e $b \in G$ a aplicação

$$R_{x,b} : K \longrightarrow [0, +\infty) \ ; \ R_{x,b}(\varphi) = R(\varphi, x, b)$$

é contínua;

(3) As seguintes desigualdades são satisfeitas:

- $R(\varphi, x, \eta b) \leq \eta R(\varphi, x, b)$ para todo $\varphi \in K$, $x \in E$, $b \in G$ e $0 \leq \eta \leq 1$;
- $S(f, x, \eta b) \geq \eta S(f, x, b)$ para todo $f \in \mathcal{F}$, $x \in E$, $b \in G$ e $0 \leq \eta \leq 1$.

Teorema 2.1.3 *(**TDPU** [14]) Sejam R e S aplicações satisfazendo (1), (2) e (3) e $0 < p < \infty$. Então f é R-S-abstrata p-somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em K tal que*

$$S(f, x, b) \leq C\Big(\int_K R(\varphi, x, b)^p d\mu\Big)^{1/p} \tag{2.1}$$

para todo $x \in E$ e $b \in G$.

Demonstração. Veja [14]. ∎

Essa versão abstrata do Teorema da Dominação de Pietsch permitiu recuperar a sua versão correspondente em diversas classes de operadores, vejamos alguns exemplos.

2.1.1 Aplicações Lineares p-somantes

Teorema 2.1.4 *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e que $u : X \longrightarrow Y$ é um operador linear limitado entre espaços de Banach. Então u é p-somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*} tal que*

$$\|ux\| \leq C\Bigg(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p d\mu(x^*)\Bigg)^{1/p} \tag{2.2}$$

para todo $x \in X$.

2.1.2 Aplicações Lipschitz $\tau(p)$-somantes

Definição 2.1.5 (**Mezrag-Tallab** [12]) Sejam H um espaço de Banach, $T \in Lip_0(X; H)$ e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que T é **Lispschitz $\tau(p)$-somante** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |\langle v_j^*, Tx_j - Ty_j\rangle|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\substack{\varphi \in B_{X^\#} \\ v \in B_H}} \left(\sum_{j=1}^{N} \Big|(\varphi(x_j) - \varphi(y_j))\,\langle v_j^*, v\rangle\Big|^p\right)^{1/p}, \tag{2.3}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$ e $v_j \in H^*$, com $j = 1, \ldots, N$.

Teorema 2.1.6 *(**TDP** [12]) Uma aplicação $T \in Lip_0(X; H)$ e Lipschitz-$\tau(p)$-somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel*

μ em $B_{X^{\#}} \times B_{H^{**}}$ tal que

$$|\langle T(x) - T(y), v^* \rangle| \leq C\Big(\int_K |(\varphi(x) - \varphi(y)) \langle v^{**}, v^* \rangle|^p d\mu(\varphi, v^{**})\Big)^{1/p} \tag{2.4}$$

para todo $x, y \in X$ e $v^* \in H^*$.

2.1.3 Aplicações Multilineares p-dominadas

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ espaços vertorias normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. O conjunto $X_1 \times \cdots \times X_n$, munido com as operações usuais de soma e produto por escalar, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Podemos equipar esse espaço com a norma

$$\|\cdot\| : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow [0, \infty) \ ; \ \|x\| := \max_{i=1,\ldots,n} \|x_i\|_{X_i},$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$. E assim, $(X_1 \times \cdots \times X_n, \|\cdot\|)$ torna-se um espaço vetorial normado.

Definição 2.1.7 Sejam $X_1 \times \ldots \times X_n$ e Y espaços vetoriais normados. Uma aplicação $T : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ é **n-linear** quando para cada $i = 1, \ldots, n$, $x_i, y_i \in X_i$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, vale que

$$T(x_1, \ldots, x_i + \lambda y_i, \ldots, x_n) = T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda T(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n).$$

Definição 2.1.8 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ e Y espaços de Banach, dizemos que uma aplicação n-linear $T : X_1 \times \ldots \times X_n \longrightarrow Y$ é **contínua** quando existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ tem-se

$$\|T(x_1, \ldots, x_n)\|_Y \leq C \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|_{X_j}.$$

Denotamos por $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ o conjunto formado por todos os operadores n-lineares contínuos de $X_1 \times \cdots \times X_n$ em Y. É fácil notar que a função

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y) \longrightarrow [0, +\infty) \ ; \ \|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x_1, \ldots, x_n)\|_Y$$

define uma norma. Além disso, é também fácil verificar que $(\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Definição 2.1.9 Seja $1 \leq p < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(X_1 \times \cdots \times X_n; Y)$. Dizemos que T é p**-dominada** quando a sequência

$$\left(T\left(x_k^{(1)}, \cdots, x_k^{(n)}\right)\right)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{p}{n}}(Y)$$

sempre que

$$\left(x_j^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X_j)$$

para todo $j = 1, \cdots, n$.

O termo "dominada"é justificado pelo seguinte resultado.

Teorema 2.1.10 *Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(X_1 \times \cdots \times X_n; Y)$ é p-dominada se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e medidas de Borel regulares de probabilidade μ_k em $B_{X_k{}^*}$ tais que*

$$\left\|T(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})\right\| \leq C \prod_{k=1}^{n} \left(\int_{B_{X_k{}^*}} \left|\left\langle x^*, x^{(k)} \right\rangle\right|^p d\mu_k(x^*) \right)^{1/p}$$

para todo $x_k \in X_k$ e $k = 1, \cdots, n$.

Apesar de o último teorema apresentar diferenças estruturais em relação ao TDPU, foi provado em [4, Theorem 3.2] uma caracterização dessa última classe por um teorema de dominação do tipo Pietsch que envolve apenas uma medida regular de probabilidade. A saber, uma aplicação $T \in \mathcal{L}(X_1 \times \cdots \times X_n; Y)$ é p-dominada se, e somente se, existe uma contante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em $B_{X_1^*} \times \cdots \times B_{X_n^*}$ tal que

$$\left\|T(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})\right\| \leq C \left(\int_{B_{X_1^*} \times \cdots \times B_{X_n^*}} \left| \sum_{k=1}^{n} \left\langle x_k^*, x^{(k)} \right\rangle \right|^p d\mu(x_1^*, \ldots, x_n^*) \right)^{n/p}, \tag{2.5}$$

para todo $x^{(1)} \in X_1, \ldots, x^{(n)} \in X_n$.

Apresentaremos agora uma classe onde (até onde sabemos) o TDP inerente não pode ser recuperado pelo TDPU.

2.1.4 Aplicações Multilineares $(q_1, \ldots, q_n)$-dominadas

Definição 2.1.11 Sejam $1 \leq q_1, \ldots, q_n, q < \infty$ com $1/q = 1/q_1 + \cdots + 1/q_n$. Dizemos que uma aplicação n-linear $T \in \mathcal{L}(X_1 \times \cdots \times X_n; Y)$ é **$(q_1, \ldots, q_n)$-dominada** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{t=1}^{k} \left\|T\left(x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(n)}\right)\right\|^q \right)^{1/q} \leq C \prod_{j=1}^{n} \sup_{x^* \in B_{X_j^*}} \left(\sum_{t=1}^{k} \left|\left\langle x^*, x_t^{(j)} \right\rangle\right|^{q_j} \right)^{1/q_j} \tag{2.6}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x_t^{(j)} \in X_j$, com $(t, j) \in \{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, n\}$.

Teorema 2.1.12 *(**TDP**) Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(X_1 \times \ldots \times X_n; Y)$ é $(q_1, \ldots, q_n)$-dominada se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e medidas regulares de probabilidade de Borel μ_j em $B_{X_j{}^*}$ tais que*

$$\left\|T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right)\right\| \leq C \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{X_j{}^*}} \left|\left\langle x^*, x^{(j)} \right\rangle\right|^{q_j} d\mu_j \right)^{1/q_j} \tag{2.7}$$

para todo $x^{(j)} \in X_j$ *e* $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Veja [11] e [17]. ∎

Se tivermos $q_1 = \cdots = q_n = q$ na Definição 2.1.11 obtemos o caso das aplicações multilineares q-dominadas, e nesse caso, o teorema acima é recuperado por sua versão unificada.

Entretanto, não é possível caracterizar as aplicações multilineares $(q_1, \ldots, q_n)$-dominadas por um teorema como o que aparece em [4, Theorem 3.2], por exemplo. E assim, os parâmetros $\mathcal{F}$, E, K, G, R e S não serão suficientes para esta versão multilinear do TDP acima. Daí a necessidade de buscar uma versão ainda mais geral para o TDP.

2.2 O Teorema da Dominação de Pietsch Generalizado (TDPG)

Veremos nesta seção a forma generalizada do TDP que recupera todos os teoremas do tipo dominação de Pietsch, incluzive o TDPU e o Teorema 2.1.12. Além disso, veremos que o TDPG melhora o TDPU reduzindo uma de suas hipóteses. Também veremos que este último pode ser melhorado ainda mais.

Sejam $X_1, \ldots X_n, Y$ e $E_1, \ldots, E_m$ conjuntos arbitrários não vazios, $\mathcal{F}$ uma família de aplicações arbitrárias de $X_1 \times \cdots \times X_n$ em Y, $K_1, \ldots, K_l$ espaços topológicos compactos de Hausdorff e $G_1, \ldots, G_l$ espaços de Banach. Para cada $j = 1, \ldots, l$, considere as aplicações arbitrárias

$$R_j : K_j \times E_1 \times \cdots \times E_m \times G_j \longrightarrow [0, +\infty)$$

e

$$S : \mathcal{F} \times E_1 \times \cdots \times E_m \times G_1 \times, \cdots, \times G_l \longrightarrow [0, +\infty).$$

Definição 2.2.1 (**D. Pellegrino, J. Santos e J. B. Seoane-Sepúlveda** [15]) Sejam $0 < p_1, \ldots, p_l, p < \infty$ tal que $\sum_{j=1}^{l} 1/p_j = 1/p$. Dizemos que $f \in \mathcal{F}$ é $R_1, \ldots, R_l$-S**-abstrata** $(p_1, \ldots, p_l)$**-somante** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{t=1}^{k} S(f, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(m)}, b_t^{(1)}, \ldots, b_t^{(l)})^p \right)^{1/p} \leq C \prod_{j=1}^{l} \sup_{\varphi \in K_j} \left(\sum_{t=1}^{k} R_j(\varphi, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(m)}, b_t^{(j)})^{p_j} \right)^{1/p_j}$$

para todo $x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)} \in E_i$, $b_1^{(j)}, \ldots, b_k^{(j)} \in G_j$ e $(i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, l\}$.

A exemplo do TDPU, aqui também consideramos algumas condições às aplicações R_j e S.

(i) Dados $x^{(i)} \in E_i$, $b^{(j)} \in G_j$ e $(i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, l\}$ a aplicação

$$R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, b^{(j)}} : K_j \longrightarrow [0, +\infty) \; ; \; R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{l}, b^{(j)}}(\varphi) := R_j(\varphi, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, b^{(j)})$$

é contínua;

(ii) As seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{cases} R_j(\varphi, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, \eta b^{(j)}) & \leq & \eta R_j(\varphi, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, b^{(j)}) \\ S(f, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, \alpha_1 b^{(1)}, \ldots, \alpha_l b^{(l)}) & \geq & S(f, x^1, \ldots, x^m, b^{(1)}, \ldots, b^{(l)}) \prod_{j=1}^{l} \alpha_j \end{cases}$$

para todo $b^{(j)} \in G_j$, $\varphi \in K_j$, $x^{(i)} \in E_i$, $0 \leq \eta, \alpha_1, \ldots, \alpha_l \leq 1$ e $(i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, l\}$.

Definição 2.2.2 Uma coleção $\mathcal{H}$ de aplicações Ψ definidas em um conjunto W é dito **côncava** se, dados $\Psi_1, \ldots, \Psi_n \in \mathcal{H}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tais que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, existe $\Psi_{(\Psi_j)_{j=1}^n, (\lambda_j)_{j=1}^n} \in \mathcal{H}$ satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Psi_j(\varphi) \leq \Psi_{(\Psi_j)_{j=1}^n, (\lambda_j)_{j=1}^n}(\varphi),$$

para todo $\varphi \in W$.

Lema 2.2.3 *(**Ky Fan** [16]) Sejam W um subconjunto compacto convexo de um espaço topológico linear de Hausdorff, $\mathcal{H}$ uma família côncava de funções reais convexas e semi-contínuas inferiormente tomando valores de W. Se para todo $\Psi \in \mathcal{H}$ existe um $\varphi_\Psi \in W$ tal que $\Psi(\varphi_\Psi) \leq \varrho$, então existe um $\varphi_0 \in W$ tal que $\Psi(\varphi_0) \leq \varrho$ para todo $\Psi \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. Dado $\Psi \in \mathcal{H}$ e $\varepsilon > 0$, o conjunto $A(\Psi, \varepsilon) := \Psi^{-1}((-\infty, \varepsilon + \varrho])$ é fechado, pois Ψ é semi-contínua inferiormente. Queremos mostrar que toda interseção dos conjuntos $A(\Psi, \varepsilon)$ é não vazia. Com efeito, dado um interseção finita $\bigcap_{i=1}^{n} A(\Psi_i, \varepsilon_i)$, considere os seguintes conjuntos:

$$P := \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \xi_i \leq \varepsilon_i + \varrho, \ i = 1, \ldots, n\},$$

$$Q := \{(\Psi_1(\varphi), \ldots, \Psi_n(\varphi)) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi \in W\}$$

e $\mathcal{Q}$ a envoltória convexa de Q. É fácil verificar que P é convexo.

Afirmação: $\mathcal{Q} \cap P \neq \varnothing$

Caso $\mathcal{Q} \cap P = \varnothing$, pelo Teorema de Separação de Convexos (em dimensão finita), existiriam um vetor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1$ e

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i \leq \alpha \leq \sum_{i=1}^{n} q_i \alpha_i$$

para todo $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in P$ e $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathcal{Q}$.

Se $\varrho \geq 0$, então dado $s \leq -\varrho$, seja $t = s + \varrho \leq 0$. Logo, tem-se que $te_i \in P$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e para todo $t \leq 0$, pois

$$s \leq \varepsilon_i \Longleftrightarrow s + \varrho \leq \varepsilon_i + \varrho \Longleftrightarrow t \leq \varepsilon_i + \varrho,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Logo, $t\alpha_i \leq \alpha$ para todo $t \leq 0$ e $i = 1, \ldots, n$. Em particular, se $t < 0$, tem-se $\alpha/t \leq \alpha_i$. Passando ao limite em quando $t \to -\infty$, segue que $0 \leq \alpha_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Se $\varrho < 0$, então dado $s \leq \varrho$, defina $t = s + \varrho \leq 0$. Analogamente ao parágrafo acima, podemos concluir que $0 \leq \alpha_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Como $\mathcal{H}$ é côncavo, existe $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ tal que

$$\Psi_0(\varphi) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Psi_i(\varphi) \geq \alpha \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i > 0$$

para todo $\varphi \in W$, sendo que a última desigualdade é estrita, pois ao menos algum α_j é diferente de 0 e $\varepsilon_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Contradizendo a hipótese. Logo, $\mathcal{Q} \cap P \neq \varnothing$.

Seja $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in P \cap \mathcal{Q}$, logo existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0,1]$ tal que $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$ e $(\Psi_1(\varphi_j), \ldots, \Psi_m(\varphi_j)) \in \mathcal{Q}$ com $j = 1, \ldots, m$ tais que

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\Psi_1(\varphi_j), \ldots, \Psi_m(\varphi_j))$$

e $\xi_i \leq \varepsilon_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Seja $\varphi_1 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j$. Logo,

$$\Psi_i(\varphi_1) = \Psi_i\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Psi_i(\varphi_j) = \xi_i \leq \varepsilon_i,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Daí, $\varphi_1 \in \bigcap_{i=1}^{n} A(\Psi_i, \varepsilon_i)$. Mostramos com isso que a coleção de fechados de W

$$\{A(\Psi, \varepsilon)\ ;\ \Psi \in \mathcal{H} \ e \ \varepsilon > 0\}$$

satisfaz a propriedade da interseção finita[1]. Como W é compacto, segue que uma interseção arbitrária de fechados $\bigcap_{\substack{\Psi \in \mathcal{H} \\ \varepsilon > 0}} A(\Psi, \varepsilon)$ é sempre não vazia. Em outras palavras, existe $\varphi_0 \in W$ tal que, dado $\Psi \in \mathcal{H}$, $\Psi(\varphi_0) \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Logo, $\Psi(\varphi_0) \leq 0$ para todo $\Psi \in \mathcal{H}$. ■

Lema 2.2.4 *Sejam $0 < p_1, \ldots, p_l, p < \infty$ tais que $\sum_{j=1}^{l} 1/p_j = 1/p$, então*

$$\frac{1}{p} \prod_{j=1}^{l} {q_j}^{p} \leq \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j} {q_j}^{p_j}$$

para quaisquer $q_1, \ldots, q_l \geq 0$.

[1]Ver a Proposição 1 nos apêndices.

Demonstração. Veja [9, p. 40] ∎

Teorema 2.2.5 ***(TDPG*** *[15]) Sejam $R_1, \ldots, R_l$ e S satisfazendo (i) e (ii). Uma aplicação $f \in \mathcal{F}$ é $R_1, \ldots, R_l$-S-abstrata $(p_1, \ldots, p_l)$-somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e medidas regulares de probabilidade de Borel μ_j em K_j com $j = 1, \ldots, l$, tais que*

$$S(f, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(l)}) \leq C \prod_{j=1}^{l} \left(\int_{K_j} R_j \left(\varphi, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, b^{(j)}\right)^{p_j} d\mu_j(\varphi) \right)^{1/p_j} \tag{2.8}$$

para todo $x^{(i)} \in E_i$, $b^{(j)} \in G_j$ e $(i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, l\}$.

Demonstração. Começaremos pela recíproca. Sejam $x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)} \in E_i$ e $b_1^{(j)}, \ldots, b_k^{(j)} \in G_j$ com $(i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, l\}$. Por hipótese,

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{k} S(f, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(m)}, b_t^{(1)}, \ldots, b_t^{(l)})^p \\
&\leq C^p \sum_{t=1}^{k} \prod_{j=1}^{l} \left(\int_{K_j} R_j \left(\varphi, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(m)}, b_t^{(j)}\right)^{p_j} d\mu_j \right)^{p/p_j} \\
&\overset{(*)}{\leq} C^p \prod_{j=1}^{l} \left(\sum_{t=1}^{k} \int_{K_j} R_j \left(\varphi, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(m)}, b_t^{(j)}\right)^{p_j} d\mu_j \right)^{p/p_j} \\
&= C^p \prod_{j=1}^{l} \left(\int_{K_j} \sum_{t=1}^{k} R_j \left(\varphi, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(m)}, b_t^{(j)}\right)^{p_j} d\mu_j \right)^{p/p_j} \\
&\leq C^p \prod_{j=1}^{l} \left(\sup_{\varphi \in K_j} \sum_{t=1}^{k} R_j \left(\varphi, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(m)}, b_t^{(j)}\right)^{p_j} \int_{K_j} d\mu_j \right)^{p/p_j} \\
&= C^p \prod_{j=1}^{l} \left(\sup_{\varphi \in K_j} \sum_{t=1}^{k} R_j \left(\varphi, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(m)}, b_t^{(j)}\right)^{p_j} \right)^{p/p_j},
\end{aligned}$$

onde a desigualdade em $(*)$ é válida graças a desigualdade Hölder. Assim, f é $R_1, \ldots, R_l$-S-abstrata $(p_1, \ldots, p_l)$-somante.

Agora, suponha que $f \in \mathcal{F}$ é $R_1, \ldots, R_l - S$-abstrata $(p_1, \ldots, p_l)$-somantes. Seja $P(K_j)$ o conjunto das medidas regulares de probabilidade de Borel em K_j, para cada $j = 1, \ldots, l$. Temos que $P(K_j)$ pode ser visto como um subconjunto compacto de $B_{C(K_j)^*}$ para todo $j = 1, \ldots, l$ (veja [20, Teorema 2.3.4]).

Dados $k \in \mathbb{N}$, $x_1^{(i)} \ldots, x_k^{(i)}$ em E_i e $b_1^{(j)}, \ldots, b_k^{(j)}$ em G_j com $(i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, l\}$, defina

$$\Psi := \Psi_{(x_t^{(i)})_{t=1}^k, (b_t^{(j)})_{t=1}^k \ ; \ (i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,l\}} : P(K_1) \times \ldots \times P(K_l) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\Psi\left((\mu_j)_{j=1}^l\right) = \sum_{t=1}^{k}\left[\frac{1}{p}S\left(f,x_t^{(1)},\ldots,x_t^{(m)},b_t^{(1)},\ldots,b_t^{(l)}\right)^p - \right.$$
$$\left. -C^p\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j}\int_{K_j}R\left(\varphi,x_t^{(1)},\ldots,x_t^{(m)},b_t^{(j)}\right)^{p_j}d\mu_j\right].$$

Seja também $\mathcal{H}$ a família formada por todas as aplicações Ψ. Por simplicidade, denotaremos

$$S_{\left(x_{t_r}^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_{t_r}^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f) := S\left(f,x_{t_r}^{(1)},\ldots,x_{t_r}^{(m)}b_{t_r}^{(1)},\ldots,b_{t_r}^{(l)}\right)$$

e

$$R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^l,b^{(j)}}(\varphi) := R_j(\varphi,x^{(1)},\ldots,x^{(m)},b^{(j)}).$$

Pelo Teorema 1.3.1, cada μ_j é identificada como um funcional linear contínuo $x_j^*\in C(K_j)^*$ onde

$$\int_{K_j}R_{j,t}{}^{p_j}d\mu_j = \left\langle x_j^*,R_{j,t}{}^{p_j}\right\rangle,$$

para todo $t=1,\ldots,k$ e $j=1,\ldots,l$. Logo, cada parcela da definição de Ψ é contínua, e portanto, Ψ é contínua. Além disso, cada $\Psi\in\mathcal{H}$ é convexa. Com efeito, dados $\lambda\in[0,1]$ e $(\mu_j)_{j=1}^l$,$(\rho_j)_{j=1}^l\in P(K_1)\times\ldots\times P(K_l)$, denote $(\vartheta_j)_{j=1}^l := \lambda(\mu_j)_{j=1}^l)+(1-\lambda)(\rho_j)_{j=1}^l$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
&\Psi\left((\vartheta_j)_{j=1}^l)\right)\\
&=\sum_{t=1}^{k}\left[\frac{1}{p}\left[S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p - C^p\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j}\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j}d(\vartheta_j)\right]\\
&\overset{(A3)}{=}\sum_{t=1}^{k}\left[\frac{\lambda}{p}\left[S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p + \frac{1-\lambda}{p}\left[S_{\left(x_{t_r}^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_{t_r}^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p\right.\\
&\left.-C^p\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j}\left(\lambda\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j}d\mu_j+(1-\lambda)\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j}d\rho_j\right)\right]\\
&=\sum_{t=1}^{k}\left[\frac{\lambda}{p}\left[S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p + \frac{1-\lambda}{p}\left[S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p\right.\\
&\left.-C^p\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j}\lambda\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j}d\mu_j+(1-\lambda)\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j}\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j}d\rho_j\right]\\
&=\lambda\sum_{t=1}^{k}\left[\frac{1}{p}\left[S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p - C^p\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j}\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j}d\mu_j\right]\\
&+(1-\lambda)\sum_{t=1}^{k}\left[\frac{1}{p}S_t{}^p - C^p\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j}\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j}d\rho_j\right]
\end{aligned}$$

$$= \lambda \Psi\left((\mu_j)_{j=1}^{l}\right) + (1-\lambda)\Psi\left((\rho_j)_{j=1}^{l}\right).$$

Mostraremos agora que $\mathcal{H}$ é côncavo. Para isto, dados aplicações $\Psi_1, \ldots, \Psi_s \in \mathcal{H}$ e $0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_s \leq 1$ tais que $\sum_{r=1}^{s} \lambda_r = 1$ temos

$$\sum_{r=1}^{s} \lambda_r \Psi_r((\mu_j)_{j=1}^{l}) =$$
$$= \sum_{r=1}^{s} \lambda_r \sum_{t_r=1}^{k_r} \left[\frac{1}{p}\left[S_{\left(x_{t_r}^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, \left(b_{t_r}^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right]^p - C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j} \int_{K_j} \left[R_{j,\left(x_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}, b_{t_r}^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j} d\mu_j\right]$$
$$\overset{(ii)}{\leq} \sum_{r=1}^{s} \sum_{t_r=1}^{k_r} \left[\frac{1}{p}\left[S_{\left(x_{t_r}^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, \left(\lambda_r^{\frac{1}{p}} b_{t_r}^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right]^p - C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j} \int_{K_j} \left[R_{j,\left(x_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}, \lambda_r^{\frac{1}{p_j}} b_{t_r}^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j} d\mu_j\right]$$
$$=: \Psi_0\left((\mu_j)_{j=1}^{l}\right),$$

que é uma soma finita nos mesmos moldes da definição de Ψ. Logo $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ e portanto, $\mathcal{F}$ é côncavo.

Como cada K_j é compacto e $R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, b_t^{(j)}}$ é contínua em K_j, existe um $\varphi_j \in K_j$ tal que

$$\sup_{\varphi \in K_j} \sum_{t=1}^{k} \left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} = \sum_{t=1}^{k} \left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, b_t^{(j)}}(\varphi_j)\right)^{p_j}.$$

Dado $\Psi \in \mathcal{F}$, tome $\mu_j^{\Psi} = \delta_{\varphi_j}$ a medida de Dirac em K_j com respeito a φ_j, para cada $j = 1, \ldots, l$. Assim,

$$\Psi\left((\mu_j^{\Psi})_{j=1}^{l}\right) =$$
$$= \sum_{t=1}^{k} \left[\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, \left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^p - C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j} \int_{K_j} \left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\mu_j^{\Psi}\right]$$
$$= \sum_{t=1}^{k} \frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, \left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^p - C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j} \int_{K_j} \sum_{t=1}^{k} \left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\mu_j^{\Psi}$$
$$= \sum_{t=1}^{k} \frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, \left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^p - C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j} \int_{\{\varphi_j\}} \sum_{t=1}^{k} \left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\mu_j^{\Psi}$$
$$= \sum_{t=1}^{k} \frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, \left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^p - C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j} \left[\left(\int_{\{\varphi_j\}} \sum_{t=1}^{k} \left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\mu_j^{\Psi}\right)^{1/p_j}\right]^{p_j}$$

$$\overset{(A4)}{=} \sum_{t=1}^{k} \frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right)^p - C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j}\left[\left(\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,b_t^{(j)}}(\varphi_j)\right)^{p_j}\right)^{1/p_j}\right]^{p_j}$$

$$= \sum_{t=1}^{k} \frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right)^p - C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j}\left[\left(\sup_{\varphi\in K_j}\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j}\right)^{1/p_j}\right]^{p_j}.$$

Usando o Lema 2.2.4 com

$$q_j = \left(\sup_{\varphi\in K_j}\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j}\right)^{1/p_j}$$

segue que

$$\Psi\left((\mu_j^{\Psi})_{j=1}^{l}\right) \leq$$
$$\leq \sum_{t=1}^{k} \frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right)^p - \frac{C^p}{p} \prod_{j=1}^{l}\left[\left(\sup_{\varphi\in K_j}\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j}\right)^{1/p_j}\right]^{p} \leq 0,$$

pois f é $R_1,\ldots,R_l$-S-abstrata $(p_1,\ldots,p_l)$-somante.

Decorre do Lema 2.2.3 que existe $(\widehat{\mu_j})_{j=1}^{l} \in P(K_1)\times\ldots\times P(K_l)$ tal que $\Psi((\widehat{\mu_j})_{j=1}^{l}) \leq 0$ para todo $\Psi \in \mathcal{F}$, ou seja, para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i)} \in E_i$ e $b_1^{(j)},\ldots,b_k^{(j)} \in G_j$ com $(i,j) \in \{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,l\}$, tem-se

$$\sum_{t=1}^{k}\left[\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right)^p - C^p\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j}\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\widehat{\mu_j}\right] \leq 0. \tag{2.9}$$

Em particular, tomando $k = 1$ segue que

$$\frac{1}{p}\left(S_{\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^m,\left(b^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right)^p \leq C^p\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j}\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^m,b^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\widehat{\mu_j}. \tag{2.10}$$

Dados $x^{(i)} \in E_i$, $b^{(j)} \in G_j$ e $(i,j) \in \{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,l\}$, defina

$$\tau_j := \left(\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^m,b^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\widehat{\mu_j}\right)^{1/p_j}.$$

Seja

$$I := \{j \in \{1,\ldots,l\}\ ;\ \tau_j \neq 0\}.$$

Se $I = \varnothing$, segue de (2.10) que

$$S_{\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{m},\left(b^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f) = 0$$

e a desigualdade (2.2.5) fica evidente. Caso contrário, para cada $j \in I$, seja $\varepsilon_j > 0$ grande o suficiente de tal maneira que

$$0 < \left(\tau_j \varepsilon_j^{\frac{1}{pp_j}}\right)^{-1} < 1.$$

Seja $\varepsilon = \max\limits_{j \in \{1,\ldots,l\}} \varepsilon_j$. Assim,

$$0 < \left(\tau_j \varepsilon^{\frac{1}{pp_j}}\right)^{-1} < 1,$$

para todo $j \in I$. Defina agora

$$\theta_j := \begin{cases} \left(\tau_j \varepsilon^{\frac{1}{pp_j}}\right)^{-1} & , \ se\ j \in I \\ 1 & , \ se\ j \notin I. \end{cases}$$

Logo $\theta_j \in (0, 1]$ para todo $j = 1, \ldots, l$. Por (2.10) e (ii) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\left(S_{\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{m},\left(\theta_j b^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} &\leq C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j} \int_{K_j} \left(R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{m},\theta_j b^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\widehat{\mu_j} \\ &\leq C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{{\theta_j}^{p_j}}{p_j} \int_{K_j} \left(R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\widehat{\mu_j} \\ &= C^p \left(\sum_{j \in I} \frac{{\theta_j}^{p_j}}{p_j} {\tau_j}^{p_j} + \sum_{j \notin I} \frac{{\theta_j}^{p_j}}{p_j} {\tau_j}^{p_j}\right) \\ &\leq C^p \sum_{j \in I} \frac{1}{p_j} \left(\tau_j \varepsilon^{1/pp_j}\right)^{-p_j} {\tau_j}^{p_j} \\ &= C^p \varepsilon^{1/p} \sum_{j \in I} \frac{1}{p_j} \leq \frac{1}{p} C^p \varepsilon^{-1/p}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Portanto,

$$\left(S_{\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{m},\left(b^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} \prod_{j=1}^{l} \theta_j \leq C^p \varepsilon^{-1/p}. \tag{2.12}$$

e então

$$\left(S_{\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{m},\left(b^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} \leq C^p \varepsilon^{-1/p} \left(\prod_{j=1}^{l} \theta_j\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C^p \varepsilon^{-1/p} \prod_{j\in I} \left(\tau_j \varepsilon^{1/pp_j}\right)^p \\
&= C^p \varepsilon^{-1/p} \prod_{j\in I} {\tau_j}^p \varepsilon^{1/p_j} \\
&= C^p \varepsilon^{\left(\sum_{j\in I} 1/p_j - 1/p\right)} \prod_{j\in I} {\tau_j}^p. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Se $I \subsetneq \{1, \ldots, l\}$, então $\sum_{j\in I} (1/p_j - 1/p) < 0$. Logo, tomando o limite quando $\varepsilon \to +\infty$ em (2.13) temos que

$$S_{\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^m, \left(b^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f) = 0$$

e obtemos a desigualdade (2.2.5).

Se $I = \{1, \ldots, l\}$, então (2.13) assume a forma

$$\left(S_{\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^m, \left(b^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right)^p \leq C^p \prod_{j=1}^{l} {\tau_j}^p. \qquad (2.14)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
S_{\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^m, \left(b^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f) &\leq C \left(\prod_{j=1}^{l} {\tau_j}^p\right)^{1/p} \\
&= C \prod_{j=1}^{l} \left(\int_{K_j} \left(R_{j, \left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m, b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\widehat{\mu_j}\right)^{1/p_j}.
\end{aligned}$$

■

2.3 Melhoramento do Teorema da Dominação de Pietsch Unificado

Utilizando o TDPG teremos a seguinte versão melhorada do TDPU que não exige a primeira hipótese da Observação 2.1.2.

Teorema 2.3.1 *(**TDPU**) Sejam R e S aplicações satisfazendo (2) e (3) e $0 < p < \infty$. Então f é R-S-abstrata p-somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel em K tal que*

$$S(f, x, b) \leq C\left(\int_K R(\varphi, x, b)^p\right)^{1/p}$$

para todo $x \in E$ e $b \in G$.

Demonstração. Tome $m = n = l = 1$ no Teorema 2.2.5. ■

Podemos ir mais além nessa direção e provar a versão unificada do TDP apenas exigindo uma hipótese sobre a aplicação R e permitindo que S seja arbitrária.

Lema 2.3.2 *Uma aplicação $f : X \to Y$ é R-S-abstrata p-somante se, e somente se, existe uma constante $A > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j S(f, x_j, b_j)^p\right)^{1/p} \leq A \sup_{\varphi\in k} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(\varphi, x_j, b_j)^p\right)^{1/p} \tag{2.15}$$

para todo $x_1, \ldots, x_n \in E$, $b_1, \ldots, b_n \in G$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. A recíproca é clara, basta tomar $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 1$. Por outro lado, dados $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ e $b_1, \ldots, b_n \in G$, suponha inicialmente que $\lambda_j \in \mathbb{N}$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Logo, por hipótese, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j S(f, x_j, b_j)^p = \\
&= \underbrace{S(f, x_1, b_1)^p + \cdots + S(f, x_1, b_1)^p}_{\lambda_1 \text{ vezes}} + \cdots + \underbrace{S(f, x_n, b_n)^p + \cdots + S(f, x_n, b_n)^p)}_{\lambda_n \text{ vezes}} \\
&\leq C^p \underbrace{\sup_{\varphi\in K} R(\varphi, x_1, b_1)^p + \cdots + C^p \sup_{\varphi\in K} R(\varphi, x_1, b_1)^p}_{\lambda_1 \text{ vezes}} + \cdots + \\
&+ C^p \underbrace{\sup_{\varphi\in K} R(\varphi, x_n, b_n)^p + \cdots + C^p \sup_{\varphi\in K} R(\varphi, x_n, b_n)^p}_{\lambda_n \text{ vezes}} \\
&= C^p \sup_{\varphi\in K} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(\varphi, x_j, b_j)^p.
\end{aligned}$$

Assim a desigualdade (2.15) é válida para $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}$.

Seja agora $\lambda_j = \frac{r_j}{s_j} \in \mathbb{Q}^+$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{s_j} S(f, x_j, b_j)^p &= \frac{\prod_{i=1}^{n} s_i}{\prod_{i=1}^{n} s_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{s_j} S(f, x_j, b_j)^p \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} s_i} \sum_{j=1}^{n} \left(r_j \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} s_i \right) S(f, x_j, b_j)^p.
\end{aligned}$$

e pela primeira parte da demonstração, sabemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j}{s_j}S(f,x_j,b_j)^p &\leq C\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}s_i}\sup_{\varphi\in K}\sum_{j=1}^{n}\left(r_j\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}s_i\right)R(\varphi,x_j,b_j)^p\\ &\leq C\sup_{\varphi\in K}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{r_j\prod_{i=1;i\neq j}^{n}s_i}{\prod_{i=1}^{n}s_i}\right)R(\varphi,x_j,b_j)^p\\ &= C\sup_{\varphi\in K}\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j}{s_j}R(\varphi,x_j,b_j)^p.\end{aligned}$$

Fica então provado a desigualdade (2.15) para $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{Q}^+$.

Considere agora os escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sendo reais positivos arbitrários. Suponha por absurdo que para todo $C>0$ existam $n_C\in\mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_{n_C}\in E$, $b_1,\ldots,b_{n_C}\in G$ e $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n_C}\in\mathbb{R}^+$, tais que

$$\left(\sum_{j=1}^{n_C}\lambda_j S(f,x_j,b_j)^p\right)^{1/p} > C\sup_{\varphi\in K}\left(\sum_{j=1}^{n_C}\lambda_j R(\varphi,x_j,b_j)^p\right)^{1/p}. \tag{2.16}$$

Para cada $j=1,\ldots,n_C$, seja $\left(q_k{}^{(j)}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de números racionais que converge para λ_j respectivamente. Logo

$$q_k{}^{(j)}S(f,x_j,b_j)^p \xrightarrow{k} \lambda_j S(f,x_j,b_j)^p$$

e

$$q_k{}^{(j)}R(\varphi,x_j,b_j)^p \xrightarrow{k} \lambda_j R(\varphi,x_j,b_j)^p$$

para todo $j=1,\ldots,n_C$ e $\varphi\in K$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n_C}q_k{}^{(j)}S(f,x_j,b_j)^p \xrightarrow{k} \sum_{j=1}^{n_C}\lambda_j S(f,x_j,b_j)^p$$

e, por (A5),

$$C\sup_{\varphi\in K}\sum_{j=1}^{n_C}q_k{}^{(j)}R(\varphi,x_j,b_j)^p \xrightarrow{k} C\sup_{\varphi\in K}\sum_{j=1}^{n_C}\lambda_j R(\varphi,x_j,b_j)^p.$$

Disto e da desigualdade (2.16) segue que, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n_C}q_n{}^{(j)}S(f,x_j,b_j)^p > C\sup_{\varphi\in K}\sum_{j=1}^{n_C}q_n{}^{(j)}R(\varphi,x_j,b_j)^p$$

para $n\geq n_0$. Absurdo. Isso completa a demonstração. ∎

Teorema 2.3.3 ***(TDPU** [14])* *Suponha que $0<p<\infty$ e sejam S arbitrária e R satisfazendo (2). Então f é R-S-abstrata p-somante se, e somente se, existe uma constante*

$C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em K tal que

$$S(f,x,b) \leq C\Big(\int_K R(\varphi,x,b)^p d\mu\Big)^{1/p} \tag{2.17}$$

para todo $x \in E$ e $b \in G$.

Demonstração. A recíproca é similar à demonstração do Teorema 1.3.5. Por outro lado, seja f R-S-abstrata p-somante. Então, vale que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j S(f,x_j,b_j)^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(\varphi,x_j,b_j)^p\right)^{1/p} \tag{2.18}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_n \in E$, $b_1,\ldots,b_n \in G$ e $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}^+$.

Denote $E_1 = E \times G$, $G_1 = \mathbb{K}$ e defina

$$\overline{R} : K \times E_1 \times G_1 \longrightarrow [0,+\infty) \ ; \ \overline{R}(\varphi,(x,b),\lambda) = |\lambda| R(\varphi,x,b)$$

e

$$\overline{S} : \mathcal{F} \times E_1 \times G_1 \longrightarrow [0,+\infty) \ ; \ \overline{S}(f,(x,b),\lambda) = |\lambda| S(f,x,b).$$

Assim, da desigualdade (2.18) tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{S}(f,(x_j,b_j),\lambda_j)^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{R}(\varphi,(x_j,b_j),\lambda_j)^p\right)^{1/p}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_n \in E$, $b_1,\ldots,b_n \in G$ e $\lambda_1 \ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$. Ou seja, f é $\overline{R}$-$\overline{S}$-abstrata p-somante. Além disso, como por hipótese R é contínua, a aplicação

$$\overline{R}_{(x,b),\lambda} : K \longrightarrow [0,+\infty) \ ; \ \overline{R}_{(x,b),\lambda}(\varphi) = \overline{R}(\varphi,(x,b),\lambda) = |\lambda| R_{x,b}(\varphi)$$

também é contínua para todo $(x,b) \in E_1$ e $\lambda \in G_1$. Note ainda que

$$\overline{S}(f,(x,b),t\lambda) = |t\lambda| S(f,x,b) = t\overline{S}(f,(x,b),\lambda)$$

e que

$$\overline{R}(\varphi,(x,b),t\lambda) = t|\lambda| R(\varphi,x,b) = t\overline{R}(\varphi,(x,b),t\lambda),$$

para todo $(x,b) \in E_1$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $0 \leq t \leq 1$. Pelo Teorema 2.3.1 sabemos que existe uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em K tal que

$$\overline{S}(f,(x,b),\lambda)^p \leq C\Big(\int_K \overline{R}(\varphi,(x,b),\lambda)^p\Big)^{1/p},$$

para todo $(x, b) \in E_1$, e $\lambda \in G_1$. Tomando, em particular, $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| = 1$, segue que

$$S(f, x, b)^p \leq C\left(\int_K R(\varphi, x, b)^p\right)^{1/p},$$

para todo $x \in E$ e $b \in G$.

■

Chapter 3

Aplicações do TDPG e do TDPU

Como foi discutido anteriormente, não parece possível que haja um escolha de parâmetros adequada no TDPU que recupere o TDP para a classe das aplicações multilineares $(q_1, \ldots q_n)$-dominadas. Para este fim, faremos o uso do TDPG.

3.1 Aplicações multilineares $(q_1, \ldots, q_n)$-dominadas

Sejam $1 \leq q_1, \ldots, q_n < \infty$ com $1/q = 1/q_1 + \cdots + 1/q_n$. Dizemos que uma aplicação n-linear $T \in \mathcal{L}(X_1 \times \ldots \times X_n; Y)$ é $\mathbf{(q_1, \ldots, q_n)}$**-dominada** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{t=1}^{k} \left\|T\left(b_t^{(1)}, \ldots, b_t^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{1/q} \leq C \prod_{j=1}^{n} \sup_{x^* \in B_{X_j^*}} \left(\sum_{t=1}^{k} \left|\left\langle x^*, b_t^{(j)}\right\rangle\right|^{q_j}\right)^{1/q_j}, \tag{3.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $b_t^{(j)} \in X_j$ com $(t, j) \in \{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, n\}$.

Teorema 3.1.1 *(**TDP**) Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(X_1 \times \ldots \times X_n; Y)$ é $(q_1, \ldots, q_n)$-dominada se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e medidas regulares de probabilidade de Borel μ_j em $B_{X_j{}^*}$ tais que*

$$\left\|T\left(b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}\right)\right\| \leq C \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{X_j{}^*}} \left|\left\langle x^*, b^{(j)}\right\rangle\right|^{q_j} d\mu_j\right)^{1/q_j}, \tag{3.2}$$

para todo $x^{(j)} \in X_j$ e $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Eleja os seguintes parâmetros

$$\begin{cases} l = n \\ \mathcal{F} = \mathcal{L}(X_1 \times \cdots \times X_n; Y) \\ E_i = \mathbb{R},\ para\ todo\ i = 1, \ldots, m \\ G_j = X_j\ e\ K_j = B_{X_j^*},\ para\ todo\ j = 1, \ldots, n \\ p_j = q_j,\ para\ todo\ j = 1, \ldots, n \\ S\left(T, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}\right) = \left\|T\left(b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}\right)\right\| \\ R_j\left(x^*, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, b^{(j)}\right) = \left|\left\langle x^*, b^{(j)}\right\rangle\right|. \end{cases}$$

Fixado $(x_i)_{i=1}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e $b^{(j)} \in X_j$, tem-se que $R_{j,(x_i)_{i=1}^n, b^{(j)}}$ é contínua em $B_{X_j^*}$ para todos $j = 1, \ldots, n$. Além disso, é fácil notar que S e R_j (com $j = 1, \ldots, n$) verificam as desigualdades em *(ii)*. Assim, T é $(q_1, \ldots, q_n)$-dominada se, e somente se, T é $R_1, \ldots, R_n$-S abstrata $(q_1, \ldots, q_n)$-somante. Nesse caso, o Teorema 2.2.5 nos garante a existência de uma constante $C > 0$ e medidas regulares de probabilidade de Borel μ_j em K_j tais que, para todo $x^{(i)} \in \mathbb{R}$ e $b^{(j)} \in X_j$ com $(i, j) = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \cdots, n\}$, tem-se

$$S\left(T, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}\right) \leq C \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{K_j} R_j\left(x^*, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, b^{(j)}\right)^{p_j} d\mu_k\right)^{1/p_j}.$$

Portanto,

$$\|T(b^{(1)}, \ldots, b^{(n)})\| \leq C \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{X_j{}^*}} \left|\left\langle x^*, b^{(j)}\right\rangle\right|^{q_j} d\mu_k\right)^{1/q_j} \tag{3.3}$$

para todo $b^{(j)} \in X_j$ e $j = 1, \ldots, n$.

■

Faremos agora algumas considerações referentes às próximas aplicações do TDP.

Definição 3.1.2 (i) Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $T : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ é **Lipschitz** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$d_X(Tx, Ty) \leq C d_Y(x, y) \tag{3.4}$$

para todo $x, y \in X$;

(ii) Denotaremos por $Lip(X; Y)$ o conjunto das aplicações Lipschitz $T : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$;

(iii) Quando $Y = H$ é um espaço de Banach, dizemos que uma aplicação $T : X \longrightarrow H$ é Lipschitz se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C d(x, y) \tag{3.5}$$

para todo $x, y \in X$.

No decorrer das próximas seções, consideraremos X um espaço métrico **pontuado**, ou seja, um espaço métrico onde é fixado um elemento especial, geralmente denotado por 0.

Definição 3.1.3 Seja H é um espaço de Banach. Representaremos por $Lip_0(X;H)$ o conjunto das aplicações Lipschitz de X em H tais que $T(0) = 0$.

Observação 3.1.4 *(i) A função*

$$\|\cdot\|_{Lip_0} : Lip_0(X;H) \longrightarrow [0,+\infty) \ ; \ \|T\|_{Lip_0} := \sup_{x\neq y}\left\{\frac{\|T(x)-T(y)\|}{d(x,y)}\right\}$$

define uma norma. Além disso $(Lip_0(X;H), \|\cdot\|_{Lip_0})$ é um espaço de Banach. Quando $H = \mathbb{R}$ denotamos $Lip_0(X;\mathbb{R}) = X^{\#}$, chamado o ***dual de Lipschitz de*** *X;*

(ii) A bola $B_{X^{\#}}$ é compacta com relação a topologia da convergência pontual. Veja [5, Theorem 3.1.];

(iii) Fixado $z \in X$, a aplicação

$$\zeta_z : X^{\#} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \zeta_z(\varphi) = \varphi(z).$$

é contínua.

3.2 Aplicações Lipschitz (p, r, s)-somantes

Ao longo desta seção, assumiremos que todas as sequências são finitas.

Sejam $N \in \mathbb{N}$, $(\lambda_j)_{j=1}^N$ sequência de números reais e $(x_j)_{j=1}^N$,$(y_j)_{j=1}^N$ sequências em X. Defina

$$\omega_r^{Lip}\left((\lambda_j, x_j, y_j)_{j=1}^N\right) := \sup_{\varphi\in B_{X^{\#}}}\left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j\left(\varphi(x_j)-\varphi(y_j)\right)|^r\right)^{1/r}.$$

Definição 3.2.1 (**Domínguez** [5]) Sejam $1 \leq p, r < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$ e $T : X \longrightarrow H$ uma aplicação Lipschitz. Dizemos que T é **Lipschitz (p, r, s)-somante** se existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$, $v_j^* \in H^*, \lambda_j, \kappa_j > 0$ e $j = 1, \ldots, N$ tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j\langle {v_j}^*, T(x_j)-T(y_j)\rangle|^p\right)^{1/p} \leq C\omega_r^{Lip}\left((\lambda_j{\kappa_j}^{-1}, x_j, y_j)_{j=1}^N\right)\left\|(\kappa_j v_j^*)_{j=1}^N\right\|_{s,w}. \tag{3.6}$$

Observação 3.2.2 Em [5] é comentado sobre a possibilidade da restrição $\lambda_j = 1$ para todo $j = 1, \ldots, N$ na definição de Lipschitz (p, r, s)-somante, e que a demonstração deste fato é similar ao caso da definição de aplicações Lipschitz p-somantes em [7]. De modo que a desigualdade (3.6) torna-se equivalente a

$$\left(\sum_{j=1}^{N}|\langle v_j^*, T(x_j)-T(y_j)\rangle|^p\right)^{1/p} \leq C\omega_r^{Lip}\left((\kappa_j{}^{-1}, x_j, y_j)_{j=1}^N\right)\left\|(\kappa_j v_j^*)_{j=1}^N\right\|_{s,w}. \tag{3.7}$$

Observação 3.2.3 Quando $H = G^*$, podemos considerar $v_j \in G$ no lugar de $v_j^{**} \in G^{**}$ para todo $j = 1, \ldots, N$.

De fato, suponha que T é Lipschitz (p, r, s)-somante, ou seja, que exista $C > 0$ tal que para todos $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$, $v_j^{**} \in G$, $\lambda_j, \kappa_j > 0$. Tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j\langle v_j^{**}, T(x_j)-T(y_j),\rangle|^p\right)^{1/p} \leq C\omega_r^{Lip}\left((\lambda_j\kappa_j{}^{-1}, x_j, y_j)_{j=1}^N\right)\left\|\left(\kappa_j v_j^{**}\right)_{j=1}^N\right\|_{s,w}. \tag{3.8}$$

Dados $N \in \mathbb{N}$ e $v_j \in G$ com $j = 1, \ldots, N$, considere $v_j^{**} = J(v_j) \in G^{**}$ em (3.8), onde $J : G \to G^{**}$ é a imersão canônica. Logo,

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\kappa_j v_j^{**}\right)_{j=1}^N\right\|_{s,w} &= \sup_{v^{***}\in B_{G^{***}}}\left(\sum_{j=1}^{N}|\langle v^{***}, \kappa_j v_j^{**}\rangle|^r\right)^{1/r} \\
&\overset{A6}{=} \sup_{v^{*}\in B_{G^{*}}}\left(\sum_{j=1}^{N}|\langle \kappa_j v_j^{**}, v^*\rangle|^r\right)^{1/r} \\
&= \sup_{v^{*}\in B_{G^{*}}}\left(\sum_{j=1}^{N}|\langle J(\kappa_j v_j), v^*\rangle|^r\right)^{1/r} \\
&= \sup_{v^{*}\in B_{G^{*}}}\left(\sum_{j=1}^{N}|\langle v^*, \kappa_j v_j\rangle|^r\right)^{1/r} \\
&= \left\|(\kappa_j v_j)_{j=1}^N\right\|_{s,w}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

e

$$|\langle v_j^{**}, T(x_j)-T(y_j)\rangle| = |\langle J\left(v_j\right), T(x_j)-T(y_j)\rangle = |\langle T(x_j)-T(y_j), v_j\rangle|, \tag{3.10}$$

para todo $j = 1, \ldots, N$, e portanto,

$$\left(\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j\langle T(x_j)-T(y_j), v_j\rangle|^p\right)^{1/p} \leq C\omega_r^{Lip}\left((\lambda_j\kappa_j{}^{-1}, x_j, y_j)_{j=1}^N\right)\left\|(\kappa_j v_j)_{j=1}^N\right\|_{s,w}, \tag{3.11}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$; $x_j, y_j \in X$, $v_j \in G, \lambda_j, \kappa_j > 0$, com $j = 1, \ldots, n$.

Por outro lado, suponha que seja válida a desigualdade (3.11). Dados $N \in \mathbb{N}$ e $v_1^{**}, \ldots, v_N^{**} \in H^{**}$, considere os subespaços de dimensão finita $V = span\{v_1^{**}, ..., v_n^{**}\} \subset G^{**}$ e $U = span\{T(x_1) - T(y_1), ..., T(x_n) - T(y_n)\} \subset G^*$. Pelo princípio da reflexividade local (veja [6, p. 177]), dado $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação linear injetiva $\Psi : V \to G$ tal que

$$\max\{\| \Psi \|, \| \Psi \| \cdot \| \Psi^{-1} \|\} < 1 + \varepsilon$$

e

$$\langle u^*, \Psi(v^{**})\rangle = \langle v^{**}, u^*\rangle$$

para todo $v^{**} \in V$ e $u^* \in U$. Considere $v_j = \Psi(v_j^{**})$. Aplicando o resultado acima com $u_j^* = T(x_j) - T(y_j)$, a desigualdade (3.11) será da forma

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j \langle v_j^{**}, T(x_j) - T(y_j)\rangle|^p\right)^{1/p} \leq C\omega_r^{Lip}\left((\lambda_j {\kappa_j}^{-1}, x_j, y_j)_{j=1}^N\right) \left\|((\kappa_j v_j)_j\right\|_{s,w}. \tag{3.12}$$

Note ainda que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\left\|((\kappa_j v_j)_{j=1}^N\right\|_{s,w} = \left\|\left((\kappa_j \Psi(v_j^{**})\right)_{j=1}^N\right\|_{s,w} \leq \|\Psi\| \left\|\left(\kappa_j v_j^{**}\right)_{j=1}^N\right\|_{s,w} \leq (1+\varepsilon)\left\|\left((\kappa_j v_j^{**}\right)_j\right\|_{s,w}. \tag{3.13}$$

Logo,

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j \langle v_j^{**}, T(x_j) - T(y_j)\rangle|^p\right)^{1/p} \leq (1+\varepsilon) C\omega_r^{Lip}\left((\lambda_j {\kappa_j}^{-1}, x_j, y_j\right)_{j=1}^N \left\|\left((\kappa_j v_j^{**}\right)_{j=1}^N\right\|_{s,w}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos que T é Lipschitz (p, r, s)-somante.

Combinando as Observações 3.2.2 e 3.2.3, vemos que $T : X \longrightarrow H^*$ é Lipschitz (p, r, s)-somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que para todos $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$, $v_j \in H$ e $\kappa_j > 0$, com $j = 1, \ldots, N$,

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |\langle T(x_j) - T(y_j), v_j\rangle|^p\right)^{1/p} \leq C\omega_r^{Lip}\left(({\kappa_j}^{-1}, x_j, y_j)_{j=1}^N\right) \left\|(\kappa_j v_j)_{j=1}^N\right\|_{s,w}. \tag{3.14}$$

E esta desigualdade será a versão mais utilizada no decorrer desta seção.

A classe das aplicações Lipschitz (p, r, s)-somantes de X em H será denotada por $\Pi_{p,r,s}^L(X; H)$. Representaremos por $\pi_{p,r,s}^L(T)$ o ínfimo das constantes que satisfazem a desigualdade (3.6). A exemplo da classe dos operadores $(p; q)$-somantes, para todo espaço métrico pontuado X e espaço de Banach H, a aplicação

$$\pi^L_{p,r,s}(\cdot) : \Pi^L_{p,r,s}(X;H) \longrightarrow [0,+\infty)$$

define uma norma em $\Pi^L_{p,r,s}(X;H)$ de tal forma que $\left(\Pi^L_{p,r,s}(X;H), \pi^L_{p,r,s}(\cdot)\right)$ é um espaço vetorial normado.

Veremos agora o Teorema da Dominação de Pietsch para a classe $\Pi^L_{p,r,s}$.

Teorema 3.2.4 *(**TDP** [5]) Suponha que $1/p + 1/r + 1/s = 1$ e $T \in Lip_0(X;H^*)$. Então, serão equivalentes:*

(a) $T \in \Pi^L_{p,r,s}(X;H^*)$;

(b) Existem medidas regulares de probabilidades de Borel μ e ρ em $B_{X^\#}$ e B_{H^*} respectivamente tal que

$$|\langle T(x) - T(y), v\rangle| \leq C\left(\int_{B_{X^\#}} |\varphi(x) - \varphi(y)|^r d\mu(\varphi)\right)^{1/r} \left(\int_{B_{H^*}} |\langle v, v^*\rangle|^s d\rho(v^*)\right)^{1/s} \tag{3.15}$$

para todo $x, y \in M$ e $v \in H$.

Demonstração. Inicialmente note que, usando a desigualdade (3.14), $T \in \Pi^L_{p,r,s}(X;H^*)$ se, e somente, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=1}^N |\langle Txj - Ty_j, v_j\rangle|^p\right)^{1/p} \leq \\ &\leq C \sup_{\varphi \in B_{M^\#}} \left(\sum_{j=1}^N \left|\kappa_j^{-1}\left(\varphi(x_j) - \varphi(y_j)\right)\right|^r\right)^{1/r} \sup_{v^* \in B_{H^*}} \left(\sum_{j=1}^N |\langle v^*, v_j\rangle|^s\right)^{1/s} \end{aligned}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$, $v_j \in H$ e $\kappa_j > 0$, com $j = 1, \ldots, N$. Considere então, as seguintes escolhas de parâmetros:

$$\left\{ \begin{array}{c} l = 2 \text{ e } m = 1 \\ \mathcal{F} = Lip_0(X;H^*) \\ E = X \times X \times \mathbb{R}^+ \\ G_1 = \mathbb{R} \text{ e } G_2 = H \\ K_1 = B_{M^\#} \text{ e } K_2 = B_{H^*} \\ S\left(T, (x,y,\kappa), \lambda, v\right) = |\langle T(x) - T(y), v\rangle| \\ R_1(\varphi, (x,y,\kappa), \lambda) = \kappa^{-1}\left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| \\ R_2(v^*, (x,y,\kappa), v) = \kappa\left|\langle v^*, v\rangle\right|. \end{array} \right.$$

Assim, observe que S, R_1 e R_2 satisfazem (ii). Além disso, dados $(x,y,\kappa) \in X \times X \times \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in H$, a aplicação $R_{1,(x,y,\kappa),\lambda}(\varphi) = \kappa^{-1}|(\zeta_x - \zeta_y)(\varphi)|$ é contínua em $B_{X^\#}$ e

$R_{2,(x,y,\kappa),v}(v^*) = \kappa|\langle v^*, v\rangle|$ é contínua em B_{H^*}, uma vez que são contínuas as aplicações $J_{v^*}(\cdot) = \langle \cdot, v^*\rangle$, para todo $v^* \in B_{H^*}$.

Observe ainda que as desigualdades

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |\langle T(x_j) - T(y_j), v\rangle|^p\right)^{1/p} \leq C\omega_r^{Lip}\left((\kappa_j{}^{-1}, x_j, y_j)_{j=1}^N\right) \|(\kappa_j v_j)_{j=1}^N\|_{s,w}$$

e

$$\left(\sum_{j=1}^{N} S\left(T, (x_j, y_j, \kappa_j), \lambda_j, v_j\right)^p\right)^{1/p} \leq$$
$$\leq C \sup_{\varphi\in K_1}\left(\sum_{j=1}^{N} R_1\left(\varphi, (x_j, y_j, \kappa_j), \lambda_j\right)^r\right)^{1/r} \sup_{v^*\in K_2}\left(\sum_{j=1}^{N} R_2(v^*, (x_j, y_j, \kappa_j), v_j)^s\right)^{1/s}$$

são equivalentes.

Logo T é Lipschitz (p, r, s)-somante se, e somente se, T é R_1, R_2-S-abstrata (p, r, s)-somante. Assim, o Teorema 2.2.5 garante a existência de uma constante $C > 0$ e medidas regulares de probabilidade de Borel μ e ρ em $B_{M^\#}$ e B_{H^*} respectivamente tais que

$$S\left(T, (x, y, \kappa), \lambda, v\right) \leq C\left(\int_{K_1} R_1(\zeta, (x, y, \kappa), \lambda)^r d\mu\right)^{1/r}\left(\int_{K_2} R_2(v^*, (x, y, \kappa), v)^s d\rho\right)^{1/s}, \quad (3.16)$$

ou seja,

$$|\langle T(x) - T(y), v\rangle| \leq C\left(\int_{B_{M^\#}} |\varphi(x) - \varphi(y)|^r d\mu(\varphi)\right)^{1/r}\left(\int_{B_{H^*}} |\langle v^*, v\rangle|^s d\rho(v^*)\right)^{1/s},$$

para todo $x, y \in M$ e $v \in H$. ■

3.3 Aplicações Lipschitz-Cohen fortemente p-somantes

Definição 3.3.1 (**K. Saadi** [18]) Sejam $1 < p \leq \infty$, X um espaço métrico pontuado, H um espaço de Banach e $T : X \longrightarrow H$ uma aplicação Lipschitz. T é **Lipschitz-Cohen fortemente p-somante** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left|\langle v_j^*, Tx_j - Ty_j\rangle\right| \leq C\left\|\left(\lambda_j d(x_j, y_j)_{j=1}^N\right)\right\|_p \left\|\left(v_j^*\right)_{j=1}^N\right\|_{p^*,w}, \quad (3.17)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$, $v_j^* \in H^*$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$, com $j = 1, \ldots, N$.

Teorema 3.3.2 ***(TDP** [18]) Seja X um espaço métrico pontuado, H um espaço de Banach e $T \in Lip(X; H)$. Então, T é Lipschitz-Cohen fortemente p-somante se, e somente se, existe* *uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em $B_{H^{**}}$ tal que*

$$|\langle v^*, Tx - Ty\rangle| \leq Cd(x,y)\left(\int_{B_{H^{**}}} |\langle v^*, v\rangle|^{p^*} d\mu(v^*)\right)^{1/p^*}, \tag{3.18}$$

para todo $x, y \in X$ e $v^* \in H^*$.

Demonstração. Note que T é Lipschitz-Cohen fortemente p-somante se, e somente se,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left|\langle Tx_j - Ty_j, v_j^*\rangle\right| &\leq C\left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j d(x_j,y_j)|^p\right)^{1/p} \sup_{v^{**}\in B_{H^{**}}} \left(\sum_{j=1}^{N} \left|\langle v^{**}, v_j^*\rangle\right|^{p^*}\right)^{1/p^*} \\ &= \sup_{\xi\in[0,1]} C\left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j d(x_j,y_j)|^p\right)^{1/p} \sup_{v^{**}\in B_{H^{**}}} \left(\sum_{j=1}^{N} \left|\langle v^{**}, v_j^*\rangle\right|^{p^*}\right)^{1/p^*}\end{aligned} \tag{3.19}$$

Agora, considere as seguintes escolhas de parâmetros:

$$\begin{cases} l = 2 \ e \ m = 1 \\ \mathcal{F} = Lip(X;H) \\ E = X \times X \\ G_1 = \mathbb{R} \ e \ G_2 = H^* \\ K_1 = [0,1] \subset \mathbb{R} \ e \ K_2 = B_{H^{**}} \\ S(T,(x,y),\lambda,v^*) = |\lambda|\,|\langle v^*, Tx - Ty\rangle| \\ R_1(\xi,(x,y),\lambda) = |\lambda| d(x,y) \ e \ R_2(v^{**},(x,y),v^*) = |\langle v^{**}, v^*\rangle|. \end{cases}$$

Observe que, para todos $(x,y) \in X \times X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ fixados, $R_{1,(x,y),\lambda}$ é uma função constante em $\mathbb{R}$, logo, $R_{1,(x,y),\lambda}$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como $R_{2,(x,y),v^*}(v^{**}) = |\langle J_{v^*}, v^{**}\rangle|$, onde $J : H^* \longrightarrow H^{***}$ é a imersão canônica, segue que $R_{2,(x,y),v^*}$ é contínua em $B_{H^{**}}$. Além disso, vemos que R_1, R_2 e S satisfazem as desigualdades em *(ii)*. Assim, temos que a desigualdade (3.19) ficará da forma

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} S(T,(x_j,y_j),\lambda_j,v_j^*) \leq \\ &\leq C \sup_{\xi\in K_1}\left(\sum_{j=1}^{n} R_1(\xi,(x_j,y_j),\lambda_j)^p\right)^{1/p} \sup_{v^{**}\in K_2}\left(\sum_{j=1}^{n} R_2(v^{**},(x_j,y_j),v_j^*)^{p^*}\right)^{1/p^*}.\end{aligned}$$

Logo, T é Lipschitz-Cohen fortemente p-somante se, e somente se, T é R_1R_2,-S-abstrata (p,p^*)-somante. Pelo Teorema 2.2.5, existe uma constante $C > 0$ e medidas regulares de probabilidade de Borel ρ em $[0,1]$ e μ em $B_{H^{**}}$, tais que

$$
\begin{aligned}
S(T,(x,y),\lambda,v^*) &\leq C\Big(\int_{[0,1]} R_1(\xi,(x,y),\lambda)^p d\rho\Big)^{1/p}\Big(\int_{K_2} R_2(v^{**},(x,y),v^*)^{p^*} d\mu\Big)^{1/p^*}\\
&= C\Big(\int_0^1 R_1(\xi,(x,y),\lambda)^p d\xi\Big)^{1/p}\Big(\int_{K_2} R_2(v^{**},(x,y),v^*)^{p^*} d\mu\Big)^{1/p^*}\\
&= C\lambda d(x,y)\Big(\int_{K_2} R_2(v^{**},(x,y),v^*)^{p^*} d\mu\Big)^{1/p^*},
\end{aligned}
$$

e assim obtemos a desigualdade (3.18).

■

Vejamos agora uma aplicação do TDPU.

3.4 Aplicações Lipschitz $\tau(p)$-somantes

Definição 3.4.1 (**Mezrag-Tallab** [12]) Sejam H um espaço de Banach, $T \in Lip_0(X;H)$ e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que T é **Lispschitz $\tau(p)$-somante** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\left(\sum_{j=1}^{N} |\langle v_j^*, Tx_j - Ty_j\rangle|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\substack{\varphi\in B_{X^\#}\\ v\in B_H}} \left(\sum_{j=1}^{N} \left|(\varphi(x_j)-\varphi(y_j))\,\langle v_j^*, v\rangle\right|^p\right)^{1/p}, \tag{3.20}
$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$ e $v_j \in H^*$, com $j = 1, \ldots, N$.

Teorema 3.4.2 ***(TDP*** *[12]) Uma aplicação $T \in Lip_0(X;H)$ e Lipschitz-$\tau(p)$-somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em $B_{X^\#} \times B_{H^{**}}$ tal que*

$$
|\langle v^*, T(x) - T(y)\rangle| \leq C\Big(\int_K |(\varphi(x)-\varphi(y))\,\langle v^{**}, v^*\rangle|^p d\mu(\varphi, v^{**})\Big)^{1/p}, \tag{3.21}
$$

para todo $x, y \in X$ e $v^* \in H^*$.

Demonstração.

No Teorema 2.3.3, ponha

$$
\begin{cases}
\mathcal{F} = Lip_0(X;H)\\
K = B_{X^\#} \times B_{H^{**}}\\
E = X \times X\\
G = H^*\\
S(T,(x,y),v^*) = |\langle v^*, Tx - Ty\rangle|\\
R((\varphi, v^{**}),(x,y),v^*) = |(\varphi(x)-\varphi(y))\,\langle v^{**}, v^*\rangle|.
\end{cases}
$$

Observe que para cada $(x, y) \in X \times X$ e $v^* \in H^*$ fixados, $R_{(x,y),v^*}$ é contínua em K, pois os operadores

$$\langle \cdot, v^* \rangle : B_{H^{**}} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \langle v^{**}, v^* \rangle = J_{v^*}(v^{**})$$

e

$$\zeta_x : B_{X^\#} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \zeta_x(\varphi) = \varphi(x)$$

são contínuos em $B_{H^{**}}$ e $B_{X^\#}$, respectivamente. Por (A6) sabemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\varphi \in B_{X^\#} \\ v \in B_H}} \left[\sum_{j=1}^{N} \left| [\varphi(x_j) - \varphi(y_j)] \langle v_j^*, v \rangle \right|^p \right]^{1/p} &= \sup_{\varphi \in B_{X^\#}} \sup_{v \in B_H} \left[\sum_{j=1}^{N} \left| [\varphi(x_j) - \varphi(y_j)] \langle v_j^*, v \rangle \right|^p \right]^{1/p} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X^\#}} \sup_{v^{**} \in B_{H^{**}}} \left[\sum_{j=1}^{N} \left| [\varphi(x_j) - \varphi(y_j)] \langle v^{**}, v_j^* \rangle \right|^p \right]^{1/p} \\
&= \sup_{\substack{\varphi \in B_{X^\#} \\ v^{**} \in B_{H^{**}}}} \left[\sum_{j=1}^{N} \left| [\varphi(x_j) - \varphi(y_j)] \langle v^{**}, v_j^* \rangle \right|^p \right]^{1/p}.
\end{aligned}$$

Desse modo, T é Lipschitz $\tau(p)$-somante se, e somente se,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} S\left(T, (x_j, y_j), v_j^*)\right)^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{(\varphi, v^{**}) \in K} \left(\sum_{j=1}^{n} R\left((\varphi, v^{**}), (x_j, y_j), v_j^*)\right)^p \right)^{1/p},$$

ou seja, T é R-S abstrata p-somante. Assim, segue do Teorema 2.3.3 que

$$S(T, (x, y), v^*)) \leq C \left(\int_K R((\varphi, v^{**}), (x, y), v^*))^p d\mu(\varphi, v^{**}) \right)^{1/p}.$$

Portanto,

$$|\langle v^*, Tx - Ty \rangle| \leq C \left(\int_{B_{X^\#} \times B_{H^{**}}} |(\varphi(x) - \varphi(y)) \langle v^{**}, v^* \rangle|^p d\mu(\varphi, v^{**}) \right)^{1/p}.$$

■

Apêndices

Apresentamos neste apêndice alguns resultados básicos de Análise, Topologia e Teoria da Medida para justificar algumas etapas no decorer do texto que não eram o foco em questão e puderam ser omitidas.

Algumas definições e teoremas iniciais

Proposição 1 *(**Propriedade da Interseção Finita**) Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subespaço. Y é compacto se, e somente se, para toda coleção $\mathcal{C} = \{F_\gamma \subset X \ ; \ F_\gamma \text{ é fechado}, \ \gamma \in \Gamma\}$ tal que*

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma = \varnothing,$$

tem-se que existe uma subcoleção finita

$$\{F_{\gamma_1}, \ldots, F_{\gamma_n}\} \subset \mathcal{C}$$

onde

$$\bigcap_{j=1}^{n} F_{\gamma_j} = \varnothing.$$

Demonstração. Decorre das leis de Morgan. ■

Definição 1 Seja X um conjunto não vazio. Uma **σ-álgebra de subconjuntos de** X é uma coleção $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

(i) $\varnothing \in \Sigma$;

(ii) Para todo $M \in \Sigma$, $X \setminus M \in \Sigma$;

(iii) Para toda sequência $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ em Σ, $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_n \in \Sigma$.

Definição 2 Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Dizemos que a $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma **σ-álgebra de subconjuntos de X gerada por $\mathcal{A}$** quando:

(i) $\Sigma_{\mathcal{A}}$ é uma σ-álgebra;

(ii) $\mathcal{A} \subset \Sigma_{\mathcal{A}}$;

(iii) Se Σ é uma σ-álgebra tal que $\mathcal{A} \subset \Sigma$, então $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset \Sigma$.

Se (X, τ) é um espaço topológico e $\mathcal{A} = \tau$, então Σ_τ é dita uma **σ-álgebra de Borel de X**.

Definição 3 Um **espaço de medida** é uma tripla (X, Σ, μ), onde:

(i) X é um conjunto não vazio;

(ii) Σ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X;

(iii) $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty)$ é uma função tal que

  (a) $\mu(\varnothing) = 0$;

  (b) Para toda sequência $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ em Σ, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n)$ (σ-aditividade).

Os elementos de Σ são ditos **conjuntos mensuŕaveis** (ou **μ-mensuráveis**). A função $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$ é chamado de **medida em X**.

Definição 4 Seja X um conjunto não vazio e $\mu : X \longrightarrow [0, +\infty)$ uma medida em X.

(1) Dizemos que μ é uma **medida de probabilidade** quando $\mu(X) = 1$;

(2) Se (X, τ) é um espaço topológico e Σ é gerada por τ, dizemos que μ é uma **medida de Borel**.

(3) Se (X, τ) é um espaço topológico. Dizemos que μ é uma medida regular quando:

  (i) todo aberto de (X, τ) é um conjunto mensurável;

  (ii) os espaços compactos têm medida finita;

  (iii) Para todo conjunto mensurável $M \in \Sigma$, tem-se que

$$\mu(M) = \inf\{\mu(A) \ ; \ M \subset A \text{ é aberto}\}$$

  e

$$\mu(M) = \sup\{\mu(K) \ ; \ K \subset M \text{ é compacto}\}.$$

Definição 5 Sejam X um conjunto, X_λ espaços topológicos com

$$f_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$$

aplicações, para cada $\lambda \in \Lambda$. A **topologia fraca** induzida em X pela coleção $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é a topologia que tem como sub-base a família

$$\left\{f_\lambda^{-1}(V_\lambda)\ ;\ V_\lambda \subset X_\lambda \text{ é aberto},\ \lambda \in \Lambda\right\}.$$

Observação 1 É possível provar que a topologia fraca induzida em X é a topologia com menos abertos que permite que todas as aplicações f_λ sejam contínuas. Dessa forma, é plausível que com essa topologia, a possibilidade de encontrarmos conjuntos com boas propriedades (como a compacidade) aumente sem perder a continuidade de nenhuma aplicação.

Definição 6 *Seja X um espaço vetorial normado e X^{**} o seu bidual topológico. Considere a aplicação*

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\mapsto J_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\quad y^* \mapsto \langle J_x, y^*\rangle = \langle y^*, x\rangle \end{aligned}$$

que é chamada de **injeção canônica** de X em X^{**}. É fácil verificar que J está bem definida e que é uma isometria linear. No caso em que J é sobrejetiva, dizemos que X é um espaço **reflexivo**.

Definição 7 A **topologia fraca estrela** em X^*, denotada por $\sigma(X^*, X)$, é a topologia fraca de X^* construída a partir da família de aplicações $\{J_x\}_{x\in X}$.

Proposição 2 *A topologia fraca estrela de X^* é de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $x^*, y^* \in X^*$ com $x^* \neq y^*$. Logo, existe $z \in X$ tal que $\langle x^*, z\rangle \neq \langle y^*, z\rangle$. Como a topologia de $\mathbb{K}$ é Hausdorff, existem abertos disjuntos $U, V \subset \mathbb{K}$ tais que $\langle x^*, z\rangle \in U$ e $\langle y^*, z\rangle \in V$. Tome $A = J_z^{-1}(U)$ e $B = J_z^{-1}(V)$. Assim, $x^* \in A$, $y^* \in B$ e $A \cap B = \varnothing$. ■

Teorema 1 ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** *A bola B_{X^*} é compacta na topologia $\sigma(X^*, X)$.*

Demonstração. Veja [2, Theorem 3.16] ■

Resultados auxiliares

(A1) Sejam $p > 0$, $A \subset \mathbb{R}^+$ limitado superiormente e denote $A^p = \{a^p \ ; \ a \in A\}$, então $(\sup A)^p = \sup A^p$.

Com efeito,

$$a \leq \sup_{a \in A} a,$$

assim,

$$a^p \leq \left(\sup_{a \in A} a \right)^p$$

para todo $a \in A$. Logo,

$$\sup_{a \in A} a^p \leq \left(\sup_{a \in A} a \right)^p.$$

Por outro lado,

$$a^p \leq \sup_{a \in A} a^p.$$

Assim,

$$a \leq \left(\sup_{a \in A} a^p \right)^{1/p}$$

para todo $a \in A$. Logo,

$$\sup_{a \in A} a \leq \left(\sup_{a \in A} a^p \right)^{1/p}.$$

Assim,

$$\left(\sup_{a \in A} a \right)^p \leq \sup_{a \in A} a^p.$$

E portanto, $\left(\sup\limits_{a \in A} a \right)^p = \sup\limits_{a \in A} a^p$.

(A2) Se $w : X \longrightarrow Y$ é um operador linear de posto finito (digamos $\dim Im(w) = m$) e $\epsilon = \{y_j\}_{j=1}^m$ é uma base de $Im(w)$, então $w(\cdot) = \sum_{j=1}^m \left\langle z_j^*, \cdot \right\rangle y_j$, para alguns $z_1^*, \ldots, z_m^* \in Im(w)^*$.

De fato, seja $\epsilon^* = \{y_j^*\}_{j=1}^m$ a base dual de ϵ. Para cada $x \in X$, $w(x)$ é combinação linear dos y_j's. Assim, para cada $x \in X$, existem escalares $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_m(x)$ tais que,

$$w(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(x) y_j.$$

Note que para cada $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned}
\langle y_i^*, w(x) \rangle &= \left\langle y_i^*, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x) y_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x) \underbrace{\langle y_i^*, y_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} \\
&= \alpha_i(x).
\end{aligned}$$

Assim, escrevendo $z_j^*(x) = y_j^* \circ w(x)$, temos que z_j^* é linear limitado para todo $j = 1, \ldots, m$ e segue o resultado.

(A3) Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, μ e ρ duas medidas σ-aditivas e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então

$$\int_X g(x) d(a\mu + b\rho) = a \int_X g(x) d\mu + b \int_X f(x) d\rho,$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

De fato, $\int_X g(x) d(a\mu + b\rho) = \sup\{\int_X f(x) d(a\mu + b\rho) \ ; \ f \leq g \text{ e } f \text{ é simples}\}$.

Escrevendo $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j}$, onde χ_{E_j} é a função característica no conjunto mensurável E_j, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_X g(x) d(a\mu + b\rho) &= \sup_{(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j} \leq g)} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (a\mu + b\rho)(E_j) \\
= a \cdot \sup_{(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j} \leq g)} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(E_j) &+ b \sup_{(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j} \leq g)} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \rho(E_j) \\
&= a \int_X g(x) d\mu + b \int_X g(x) d\rho.
\end{aligned}$$

(A4) Sejam X um conjunto não vazio, $y \in X$, (X, Σ, δ_y) um espaço de medida onde δ_y é a medida de Dirac em X e g uma função mensurável, então $\int_X g(x) d\delta_y = g(y)$. Com efeito,

$$\int_X g(x) d\delta_y = \sup_{\substack{f \leq g \\ f \text{ é simples}}} \int_X f(x) d\delta_y = \sup_{\substack{f \leq g \\ f \text{ é simples}}} \int_{\{y\}} f(x) d\delta_y$$

Por definição, f pode ser escrito como combinação linear finita de funções características de conjuntos mensuráveis da forma $\{y\}$. Nesse caso, podemos escrever $f = a\chi_{\{y\}}$. Logo,

$$\int_{\{y\}} f(x) d\delta_y = a\delta_y(\{y\}) = a = f(y).$$

Assim,
$$\int_X g(x)d\delta_y = \sup_{a\leq g(y)} a = g(y).$$

(A5) Fixe $n \in \mathbb{N}$ e sejam $\left({x_k}^{(j)}\right)_{k=1}^{\infty}$ sequências reais que convergem respectivamente para x_j para cada $j = 1, \ldots, n$. Sejam também K um espaço de Hausdorff compacto e $f_1, \ldots, f_n : K \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Então, $\lim_{k\to\infty} \sup_{a\in K} \sum_{j=1}^{n} {x_k}^{(j)} f_j(a) = \sup_{a\in K} \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(a)$.

De fato, seja $M = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \left|\sup\limits_{a\in K} f_j(a)\right|$. Note que dados $j = 1, \ldots, n$ e $\varepsilon > 0$, existe ${k_0}^{(j)} \in \mathbb{N}$, tal que
$$|{x_k}^{(j)} - x_j| < \frac{\varepsilon}{2nM}$$
sempre que $k \geq {k_0}^{(j)}$. Seja $k_0 = \max\limits_{j=1,\ldots,n} {k_0}^{(j)}$. Observe que, se $k \geq k_0$, então

$$\begin{aligned}\left|\sup_{a\in K}\sum_{j=1}^{n} {x_k}^{(j)} f_j(a) - \sup_{a\in K}\sum_{j=1}^{n} x_j f_j(a)\right| &= \\ &= \left|\sum_{j=1}^{n}\left({x_k}^{(j)} \sup_{a\in K} f_j(a) - x_j \sup_{a\in K} f_j(a)\right)\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^{n}\left({x_k}^{(j)} - x_j\right) \sup_{a\in K} f_j(a)\right| \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left|{x_k}^{(j)} - x_j\right| \left|\sup_{a\in K} f_j(a)\right| \\ &\leq n\frac{\varepsilon}{2nM}M = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\end{aligned}$$

donde o resultado segue.

(A6) Seja X um espaço de Banach. Se $(x_j^*)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência fracamente p-somante em X^*, então
$$\|\left(x_j^*\right)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} = \sup_{x\in B_X}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\langle x_j^*, x\rangle\right|^p\right)^{1/p}.$$

Lembre-se que, dado uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}$, existe um funcional $x^* \in (\ell_p)^*$ tal que, $\|x^*\| = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p^*}$ e $\left\langle x^*, (y_j)_{j=1}^{\infty}\right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$, para todo $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Veja que

$$\sup_{x^{**}\in B_{X^{**}}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left\langle x^{**}, x_j^*\right\rangle\right|^p\right)^{1/p} = \sup_{x^{**}\in B_{X^{**}}}\left\|\left(\left\langle x^{**}, x_j^*\right\rangle\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{x^{**}\in B_{X^{**}}} \sup_{a^{*}\in B_{(\ell_p)^*}} \left|\left\langle a^*, \left(\left\langle x^{**}, x_j^*\right\rangle\right)_{j=1}^{\infty}\right\rangle\right| \\
&= \sup_{x^{**}\in B_{X^{**}}} \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*}}} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j \left\langle x^{**}, x_j^*\right\rangle\right| \\
&= \sup_{x^{**}\in B_{X^{**}}} \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*}}} \left|\left\langle x^{**}, \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^*\right\rangle\right| \\
&= \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*}}} \sup_{x^{**}\in B_{X^{**}}} \left|\left\langle x^{**}, \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^*\right\rangle\right| \\
&= \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*}}} \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^*\right\| \\
&= \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*}}} \sup_{x\in B_X} \left|\left\langle \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^*, x\right\rangle\right| \\
&= \sup_{x\in B_X} \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*}}} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j \left\langle x_j^*, x\right\rangle\right| \\
&= \sup_{x\in B_X} \sup_{a^{*}\in B_{(\ell_p)^*}} \left|\left\langle a^*, \left(\left\langle x_j^*, x\right\rangle\right)_{j=1}^{\infty}\right\rangle\right| \\
&= \sup_{x\in B_X} \left\|\left(\left\langle x_j^*, x\right\rangle\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \sup_{x\in B_X} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\left\langle x_j^*, x\right\rangle\right|^p\right)^{1/p}. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Portanto tem-se o resultado.

Bibliography

[1] R. ASH, *Measure, Integration, and Functional Analysis*, Academic Press, Inc., (1972), 170–177.

[2] H. Brezis, *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differenctial Equations*, Rutgers University, (2010)

[3] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO and P. RUEDA, *A unified Pietsch domination theorem*, J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), 269–276.

[4] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO and P. RUEDA, *A nonlinear Pietsch domination theorem*, Monatsh Math **158** (2009), 247–257.

[5] J. A. CHÁVEZ-DOMÍNGUEZ, *Duality for Lipschitz p-summing operators*, Journal of Functional Analysis **261**, (2011), 388–406.

[6] J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE. *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[7] J. FARMER and W. B. JOHNSON, *Lipschitz p-summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 2989-2995.

[8] S. GEISS, *Ideale Multilinearer Abbildungen*, Diplomarbiet, (1985).

[9] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, (1952).

[10] J. LINDENSTRAUSS e A. PEŁCZYŃSKI, *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 276–326.

[11] M.C. MATOS, *On multilinear mappings of nuclear type* , Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **6** (1993), 61-81.

[12] L. MEZRAG, A. TALLAB, *On the Lipschitz $\tau(p)$-summing operators*, To appear in Mathematische Nachrichten.

[13] B. MITJAGIN and A. PEŁCZYŃSKI, *Nuclear operators and approximative dimension*, Proceedings International Congress of Mathematics, Moscow, 1966.

[14] D. PELLEGRINO and J. SANTOS, *A general Pietsch domination theorem*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), 371-374.

[15] D. PELLEGRINO, J. SANTOS and J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *Some techniques on nonlinear analysis and applications*, Adv. Math. **229** (2012), 1235-1265.

[16] A. PIETSCH, *Absolut p–summierende Abbildungen in normieten Raumen*, Studia Math. **27** (1967), 333–353.

[17] A. PIETSCH, *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*, in Proceedings of the second international conference on operator algebras, ideals, and their applications in theoretical physics (Leipzig, 1983) 185-199, Teubner, Leipzig.

[18] K. SAADI, *Some properties of Lipschitz Strongly p-summing operator*, J. Math. Anal. Appl., **423** (2015), 1410-1426.

[19] J, SANTOS, *Resultados de coincidência para operadores absolutamente*, Dissertação, UFPB, (2008).

[20] J, SANTOS, *Alplicações Absolutamente Somantes e Generalizações do Teorema da Dominação de Pietsch*, Tese, UFPE, (2011).