

CAPA

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

**Multiplicidade de anéis
1-dimensionais e uma aplicação ao
problema de Waring**

Daniel Correia Lemos de Messias

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2015

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Multiplicidade de anéis 1-dimensionais e uma aplicação ao problema de Waring

por

Daniel Correia Lemos de Messias

sob a orientação do

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

João Pessoa – PB
Agosto de 2015

M585m Messias, Daniel Correia Lemos de.
Multiplicidade de anéis 1-dimensionais e uma aplicação ao problema de Waring / Daniel Correia Lemos de Messias.- João Pessoa, 2015.
37f.
Orientador: Cleto Brasileiro Miranda Neto
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Problemas de Waring. 3. Posto de Waring. 4. Multiplicidade. 5. Monômio.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Multiplicidade de anéis 1-dimensionais e uma aplicação ao problema de Waring

por


Daniel Correia Lemos de Messias ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

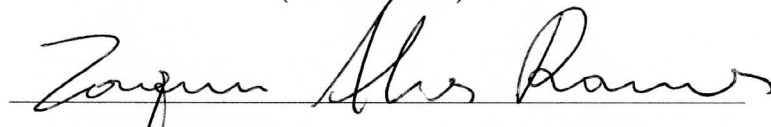
Aprovada em 28 de agosto de 2015.

Banca Examinadora:



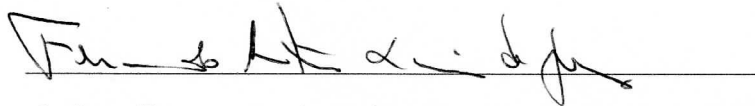
Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB

(Orientador)



Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos – UFS

(Examinador Externo)



Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza – UFPB

(Examinador Interno)

Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa – UFPB

(Suplente)

¹O autor foi bolsista do CNPQ durante a elaboração desta dissertação.

*Maria Izabel e Paulo, pais
incondicionais.*

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao amor, paciência e apoio incondicional de meus pais e das minhas irmãzinhas onde reside meu amor e admiração. A todos os amigos que me contribuirão de forma direta e indireta, em especial: Luis Alba pela atenção e contribuição fundamental para realização desse trabalho, a Agatha por me motivar a ingressar nessa aventura acadêmica, João, Marcius meus irmãos que enriquecem diariamente minha vida com suas lindas existências, a Amana pelo amor, companheirismo, tranquilidade e motivação que nunca foram negados, a todos os amigos do mestrado. A meus professores que tanto fizeram pelo meu crescimento: Uberlânbio, Bruno, Alexandre, Jaqueline, Lizandro, Adonai, Amauri, Adroaldo. A meu orientador Cleto, pela confiança, compreensão e paciência. A meus amigos da graduação que me fizeram acreditar que era possível concretizar sonhos. Não esquecendo Geraldinho e seu Bolinha, pelo combustível e por me deixar beber fiado. A Tom zé, Bob Marley e Raul seixas grandes companheiros. E a todos os fenômenos que me fizeram existir até o agora .

Resumo

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica zero e considere o anel de polinômios $S = k[x_1, \dots, x_n]$ munido da graduação padrão. O *Problema de Waring* para uma forma $F \in S$ de grau d questiona a respeito do *menor* inteiro $s \geq 1$ para o qual existem formas lineares $L_1, \dots, L_s \in S$ satisfazendo $F = \sum_{i=1}^s L_i^d$. Tal inteiro é denominado *posto de Waring de F* . Nesta dissertação, apresentamos uma solução deste problema – devida a Carlini-Catalisano-Geramita – no caso de monômios, como uma interessante aplicação de um teorema (dos mesmos autores) que estabelece uma cota inferior para a multiplicidade de k -álgebras graduadas (padrão) finitamente geradas, reduzidas e 1-dimensionais.

Palavras-chave: Problema de Waring, posto de Waring, multiplicidade, monômio.

Abstract

Let k be an algebraically closed field of characteristic zero and consider the polynomial ring $S = k[x_1, \dots, x_n]$ endowed with the standard grading. The *Waring's problem* for a form $F \in S$ of degree d asks about the *least* integer $s \geq 1$ for which there exist linear forms $L_1, \dots, L_s \in S$ satisfying $F = \sum_{i=1}^s L_i^d$. Such integer is called *Waring rank of F* . In this dissertation, we present a solution to this problem – due to Carlini-Catalisano-Geramita – in the case of monomials, as an interesting application of a theorem (due to the same authors) that establishes a lower bound for the multiplicity of (*standard*) graded, finitely generated, reduced, 1-dimensional k -algebras.

Keywords: Waring's problem, Waring rank, multiplicity, monomial.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	4
1.1 Dimensão de Krull e altura	4
1.2 Anéis e módulos graduados	5
1.3 Espaços e variedades projetivas.	7
1.4 Função de Hilbert e multiplicidade.	9
1.5 Interseções completas	10
2 Sobre a multiplicidade de anéis 1-dimensionais	12
3 Aplicação: o problema de Waring para monômios.	17
3.1 Apresentação do problema de Waring	17
3.2 Solução no caso de monômios	18
4 Outros resultados	24
4.1 Soma de monômios relativamente coprimos	24
4.2 Decomposição de Waring para monômios.	25
Referências Bibliográficas	27

Notações

A seguir, para conveniência do leitor, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- k denota um corpo.
- $T = k[y_1, \dots, y_n]$ denota o anel de polinômios nas variáveis y_i 's sobre k .
- $S = k[x_1, \dots, x_n]$ denota o anel de polinômios nas variáveis x_i 's sobre k .
- $rk(F)$ denota o posto de Waring de um polinômio homogêneo (ou forma) F .
- $\frac{\partial}{\partial x_i}$ denota derivação parcial com respeito à variável x_i .
- $\dim(-)$ denota dimensão de Krull.
- $ht(-)$ denota altura de um ideal.
- $\dim_k(-)$ denota dimensão de um espaço vetorial sobre k .
- $e(-)$ denota multiplicidade de um anel graduado.
- $HF(-, -)$ denota função de Hilbert.
- $\mu(-)$ denota o número mínimo de geradores de um módulo.

Introdução

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica zero e considere o anel de polinômios $S = \bigoplus_{j \geq 0} S_j = k[x_1, \dots, x_n]$ munido da graduação padrão. É um fato clássico que qualquer forma $F \in S_d$ se decompõe como soma de potências de formas lineares (vide [12]). Baseado nisto, o chamado *Problema de Waring para polinômios* questiona a respeito do *menor* inteiro $s \geq 1$ para o qual existem formas lineares $L_1, \dots, L_s \in S$ satisfazendo

$$F = \sum_{i=1}^s L_i^d.$$

Tal inteiro é denominado *posto de Waring de F* (ou simplesmente *posto de F*) e é denotado por $rk(F)$.

Este problema é bastante importante e tem atraído a atenção de diversos autores (vide, por exemplo, [1], [4], [5], [6], [7], [8], [12], [13], [17], [18]).

O objetivo desta dissertação é apresentar uma solução para o problema de Waring no caso de *monômios*. A demonstração que apresentamos aqui é originalmente devida a E. Carlini, M. V. Catalisano e A. V. Geramita e pode ser encontrada, por exemplo, nos trabalhos [5] e [6]. Tais autores foram capazes de solucionar o problema de Waring para monômios como uma interessante aplicação de um teorema, provado por eles, sobre a multiplicidade de k -álgebras graduadas (*standard*) finitamente geradas, reduzidas e 1-dimensionais.

Passamos a descrever objetivamente o conteúdo desta dissertação, capítulo a capítulo.

No capítulo 1, revisamos algumas preliminares algébricas que serão utilizadas ao longo do trabalho. Os tópicos são: dimensão de Krull e altura; anéis e módulos graduados; espaços e variedades projetivas; função de Hilbert e multiplicidade; interseções completas.

No capítulo 2, provamos o Teorema 2.2, devido a Carlini-Catalisano-Geramita, que

fornece uma cota inferior para a multiplicidade de uma k -álgebra graduada (*standard*) finitamente gerada, reduzida e 1-dimensional. Um ingrediente crucial para a prova deste resultado é o Lema 2.1, que trata da função de Hilbert de um certo ideal monomial auxiliar.

No capítulo 3, apresentamos o problema de Waring e fornecemos uma solução no caso de monômios. Explicitamente, tomando o monômio $M = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$, com $1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n$, então

$$rk(M) = \prod_{i=2}^n (b_i + 1).$$

Para a prova deste fato, uma das ferramentas importantes, além do Teorema 2.2, é a Proposição 3.1 (geralmente conhecida como *Lema de Apolaridade*).

Finalmente, no capítulo 4, destacamos dois resultados adicionais. O primeiro, Proposição 4.1, estuda cotas para o posto de Waring de formas que são somas de monômios dois a dois coprimos. O segundo, Teorema 4.2, fornece explicitamente uma *decomposição de Waring* (decomposição em termos de $rk(M)$ potências de formas lineares) de qualquer monômio M . Como exemplo, no caso de $M = xyz$, obtemos:

$$xyz = \frac{1}{24} \cdot (x + y + z)^3 - \frac{1}{24} \cdot (x + y - z)^3 - \frac{1}{24} \cdot (x - y + z)^3 + \frac{1}{24} \cdot (x - y - z)^3.$$

Capítulo 1

Preliminares

Iniciamos revisando algumas definições e fatos algébricos básicos que serão importantes na compreensão dos resultados apresentados neste trabalho. Para esta parte geral, consultamos e recomendamos várias fontes: [2], [3], [9], [14], [15], [16]. Para os pré-requisitos de geometria algébrica, a referência usual é [11].

1.1 Dimensão de Krull e altura

Definição 1.1. A *dimensão de Krull* (ou simplesmente *dimensão*) de um anel $A \neq 0$, denotado aqui por $\dim A$, é o supremo dos comprimentos de cadeias de ideais primos distintos em A , i.e.,

$$\dim A = \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n; \mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(A), \forall i\},$$

onde $\text{Spec}(-)$ denota o conjunto dos ideais primos de um anel.

Claramente, no caso em que A é um domínio, toma-se simplesmente $\mathfrak{p}_0 = (0)$.

Se M é um A -módulo, sua dimensão de Krull pode ser definida como $\dim M = \dim A/(0 : M)$, onde $0 : M = \{a \in A : aM = 0\}$ (o ideal anulador de M , também denotado por $\text{ann}_A(M)$).

Definição 1.2. Sejam A um anel e $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$. A *altura* de \mathfrak{p} é o número

$$ht(\mathfrak{p}) = \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}; \mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(A), \forall i\}$$

Seja $I \subset A$ um ideal qualquer. Definimos a *altura* de I como:

$$ht(I) = \inf \{ht(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A), \mathfrak{p} \supset I\} = \inf \left\{ ht(P) : P \in \text{Spec}\left(\frac{A}{I}\right) \right\}.$$

Observação 1.1. Como observado primeiramente por Nagata, a dimensão de Krull pode ser infinita mesmo sob a condição de Noetherianidade (vide, por exemplo, [9, Exercise 9.6]). Porém, se o anel Noetheriano for *local*, a dimensão é necessariamente finita. Note também (das definições acima) que

$$ht(\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{p}}$$

e assim, se A é Noetheriano, conclui-se que $ht(\mathfrak{p}) < \infty$.

Exemplo 1.1. Se k é um corpo, é claro que $\text{Spec}(k) = \{(0)\}$, e como consequência tem-se $\dim k = 0$. Considerando agora o anel dos inteiros (que evidentemente não é um corpo) temos $\dim \mathbb{Z} = 1$ pois qualquer cadeia máxima é da forma $(0) \subset (p)$, onde p é um número primo.

Exemplo 1.2. Se A é um anel Noetheriano e x_1, \dots, x_n são indeterminadas sobre A , então

$$\dim A[x_1, \dots, x_n] = \dim A + n.$$

Em particular, se k é corpo então $\dim k[x_1, \dots, x_n] = n$.

Exemplo 1.3. (O caso de uma quantidade infinita de indeterminadas.) Para qualquer anel A , tem-se $\dim A[x_1, x_2, \dots] = \infty$.

Teorema 1.1 (Teorema do ideal primo de Krull). *Seja A um anel Noetheriano. Sejam $a_1, \dots, a_r \in A$ elementos não-invertíveis e seja \mathfrak{p} um ideal primo minimal de A contendo a_1, \dots, a_r . Então, $ht(\mathfrak{p}) \leq r$.*

Demonstração. Vide [9, Theorem 10.2]. □

1.2 Anéis e módulos graduados

Definição 1.3. Um *anel graduado* (a rigor, \mathbb{N} -graduado) é um anel A munido de uma família $\{A_i\}_{i \geq 0}$ de subgrupos aditivos de A , satisfazendo $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ e $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$ para todos $i, j \geq 0$.

Observe que A_0 é um subanel A , e que cada A_i é um A_0 -módulo.

Definição 1.4. Seja A um anel graduado. Um A -módulo M é dito *graduado* se existir família $\{M_i\}_{i \geq 0}$ de subgrupos aditivos de M , satisfazendo $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ e $A_i \cdot M_j \subset M_{i+j}$ para todos $i, j \geq 0$.

Assim cada M_n é um A_0 -módulo. Um elemento $m \in M$ é um *elemento homogêneo* se $m \in M_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Neste caso, diz-se que m tem grau i e escrevemos $\text{gr}(m) = i$. Dado um elemento qualquer $m \in M$, pode-se escrevê-lo (de modo essencialmente único) como uma soma finita $m = \sum_{i=0}^d m_i$ onde $m_i \in M_i$, $i = 0, \dots, d$. O elemento m_i é chamado *componente homogênea de grau i* de m .

Definição 1.5. Um ideal $I \subset A = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A_j$ é dito *homogêneo* se I for graduado como A -módulo. Neste caso, tem-se $I = \bigoplus_{j=0}^{\infty} I_j$, onde $I_j = I \cap A_j$.

Note que, na prática, I é homogêneo se e somente se I pode ser gerado por elementos homogêneos (não necessariamente do mesmo grau).

Exemplo 1.4. (Graduação padrão ou *standard*.) Seja $S = k[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios sobre o corpo k . A maneira mais usual (e útil) de torná-lo um anel graduado consiste em atribuir grau 1 a cada x_i .

Definição 1.6. Sejam M e N A -módulos graduados e $d \in \mathbb{Z}$. Um *homomorfismo graduado de grau d* é um homomorfismo de A -módulos $f : M \rightarrow N$ tal que $f(M_i) \subset N_{i+d}$ para todo i . Quando $d = 0$ dizemos simplesmente que o homomorfismo é *graduado*.

Definição 1.7. Seja M um A -módulo graduado. Fixado $d \in \mathbb{Z}$, definimos o A -módulo \mathbb{Z} -graduado $M(d)$ através da graduação definida por:

$$M(d)_e = M_{d+e}$$

para qualquer inteiro e . É usual dizer que $M(d)$ é o *d -ésimo twist* (ou *d -ésimo shift*) de M . Observe que, se M é \mathbb{N} -graduado, então $M(d)_j = 0$ para $j < -d$ e assim $M(d) = \bigoplus_{i=-d}^{\infty} M(d)_i$. Tal noção, apesar de simples e natural, é bastante importante tanto em álgebra comutativa quanto em geometria algébrica.

1.3 Espaços e variedades projetivas.

Dado $n \geq 1$, o *espaço projetivo n -dimensional sobre o corpo k* é definido como o conjunto de todas as retas que passam pela origem em k^{n+1} e é denotado por \mathbb{P}_k^n (ou mais simplesmente por \mathbb{P}^n). Assim, cada ponto $x \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ determina uma reta $\{(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \mid \lambda \in k\} \subset k^{n+1}$, de modo que os pontos $x, y \in k^{n+1}$ estão numa mesma reta se, e somente se, $y_i = \lambda x_i, \forall i$ e para algum $\lambda \in k$.

Mais formalmente, considere a relação de equivalência \sim que identifica os pontos $x, y \in k^{n+1}$ se existir um escalar $\lambda \in k \setminus \{0\}$ tal que $y = \lambda x$. O *espaço projetivo* é o correspondente espaço quociente

$$\mathbb{P}^n = \frac{k^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}.$$

A classe de equivalência de um dado $x = (x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ é denotada por $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ (coordenadas homogêneas do ponto x).

Considere o anel (graduado *standard*) de polinômios

$$B = k[t_0, \dots, t_n] = \bigoplus_{d \geq 0} B_d = B_0 \oplus B_+ = k \oplus (t_0, \dots, t_n).$$

Para cada inteiro $d \geq 0$ temos que B_d é um k -espaço vetorial, onde uma base é dada por

$$\{t_0^{i_0} \cdots t_n^{i_n} : i_j \geq 0, j = 0, \dots, n, i_0 + \dots + i_n = d\}.$$

Em particular, por um argumento de combinatória básica (vide [14, pg. 96, Example 1]), temos

$$\dim_k(B_d) = \binom{d+n}{n}.$$

Para cada $F = \sum_{i_0+\dots+i_n=d} a_{i_0,\dots,i_n} \cdot t_0^{i_0} \cdots t_n^{i_n} \in B_d$, temos formalmente

$$F(\lambda t_0, \dots, \lambda t_n) = \lambda^d F(t_0, \dots, t_n)$$

e podemos também interpretar F como uma função polinomial, onde, por homogeneidade, faz sentido falar da propriedade de uma tal função se anular em pontos de \mathbb{P}_k^n . Uma outra consequência interessante da homogeneidade de F é a chamada *identidade de Euler*, segundo a qual $d \cdot F = \sum_{j=0}^n t_j \frac{\partial F}{\partial t_j}$.

Definição 1.8. Um conjunto $X \subset \mathbb{P}_k^n$ é uma *variedade algébrica projetiva* (sobre k) se existe ideal homogêneo $I \subset B$ tal que $X = V(I)$, ou seja,

$$X = \{p \in \mathbb{P}_k^n : F(p) = 0, \forall F \in I\}$$

Como I é um ideal homogêneo, existem formas $F_0, \dots, F_s \in B$ (em quantidade finita pois B é Noetheriano) tais que $I = (F_0, \dots, F_s)$ e assim é claro que $X = \{p \in \mathbb{P}_k^n : F_i(p) = 0, i = 1, \dots, s\}$.

Definição 1.9. O *ideal de definição* de uma variedade algébrica projetiva $X \subset \mathbb{P}_k^n$ é

$$\mathfrak{I}(X) = \{F \in B : F(p) = 0, \forall p \in X\}$$

Note que se trata de um ideal homogêneo e radical.

Definição 1.10. Seja $X \subset \mathbb{P}_k^n$ uma variedade algébrica projetiva. O *anel de coordenadas (homogêneas)* de X é o anel quociente

$$A(X) = \frac{B}{\mathfrak{I}(X)}$$

Note que $A(X)$ é uma k -álgebra reduzida finitamente gerada e graduada, herdando de B a graduação padrão. Além disso, $A(X)$ é um domínio se e somente se X é irredutível.

Lembramos que, assim como no contexto de espaços topológicos, pode-se considerar a noção de dimensão de uma variedade algébrica (munida da bem-conhecida *topologia de Zariski*), como o supremo dos comprimentos de cadeias descendentes de fechados, sendo assim uma noção dual ao conceito de altura de ideais já apresentada anteriormente (na realidade, Krull se inspirou nesta noção topológica para definir dimensão de anéis). Assim, por exemplo, X é uma curva se $\dim X = 1$, e uma superfície se $\dim X = 2$. O fato a seguir é extremamente básico nesta teoria, e relaciona a dimensão geométrica (ou topológica) com a dimensão algébrica já revista.

Proposição 1.2. *Seja $X \subset \mathbb{P}_k^n$ uma variedade algébrica projetiva. Então:*

$$\dim A(X) = \dim X + 1.$$

Corolário 1.3. *Seja $X \subset \mathbb{P}_k^n$ uma variedade algébrica projetiva. Então, $\dim A(X) = 1$ se e somente se X consiste de um conjunto finito de pontos (distintos) em \mathbb{P}_k^n .*

1.4 Função de Hilbert e multiplicidade.

Tome $A = \bigoplus_{j \geq 0} A_j$ um anel graduado tal que, por simplicidade, $A_0 = k$ é um corpo e A é uma k -álgebra finitamente gerada por elementos de grau 1 (escreve-se: $A = k[A_1]$). Seja M um A -módulo graduado finitamente gerado com dimensão de Krull d . Considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} HF(M, -) : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ i &\longmapsto HF(M, i) = \dim_k(M_i). \end{aligned} \tag{1.1}$$

A função (1.1) é a *função de Hilbert* de M .

É um fato clássico e fundamental que, para $n \gg 0$, $HF(M, n)$ é um polinômio de grau $d - 1$, com coeficientes racionais. O polinômio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $HF(M, n) = p(n)$ (para $n \gg 0$) é chamado *polinômio de Hilbert* de M e pode ser escrito na forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \binom{x+i}{i}.$$

para certos inteiros e_j 's.

Definição 1.11. A *multiplicidade* de M é o número

$$e(M) = \begin{cases} e_0, & \text{se } d > 0 \\ \dim_k(M), & \text{se } d = 0 \end{cases}$$

Em particular, pode-se considerar $e(A)$, a multiplicidade de A .

Observação 1.2. Salientamos uma situação particular importante que será útil adiante neste trabalho. Seja k um corpo e considere o anel (graduado *standard*) de polinômios $T = k[y_1, \dots, y_n]$, bem como um ideal $I \subset T$ próprio e homogêneo. Devido ao Corolário 1.3 e ao fato de que o grau do polinômio de Hilbert de T/I é igual à dimensão da variedade algébrica projetiva definida por I , a condição “ I é 1-dimensional” (no sentido usual de que $\dim T/I = 1$) é equivalente à condição “o polinômio de Hilbert

de T/I é constante”. É claro então que, se $\dim T/I = 1$ e s é a constante (inteira, positiva) correspondente ao polinômio de Hilbert, então

$$e(T/I) = s.$$

Note que, se além disso I é radical, então I é o ideal de definição de s pontos distintos em \mathbb{P}_k^{n-1} . Finalmente, se o ideal 1-dimensional I é *saturado* – no sentido de que $I = \bigcup_{t=1}^{\infty} I : (y_1, \dots, y_n)^t$ – então

$$HF(T/I, i) \leq s$$

para todo i , sendo precisamente igual a s a partir do natural i_0 onde a função de Hilbert torna-se polinomial.

1.5 Interseções completas

Definição 1.12. Seja M um módulo sobre um anel A . Dizemos que um elemento $a \in A$ é *M-regular* se a condição $am = 0$, com $m \in M$, implicar $m = 0$. Em outras palavras, a não é um divisor-de-zero de M .

Definição 1.13. Seja M um módulo sobre um anel A . Uma sequência $\{a_1, \dots, a_n\}$ de elementos de A é chamada *sequência M-regular*, ou simplesmente *M-sequência*, se:

- (1) a_1 é um elemento *M-regular*;
- (2) a_i é um elemento $\frac{M}{(a_1, \dots, a_{i-1})M}$ -regular, para $i = 2, \dots, n$;
- (3) $\frac{M}{(a_1, \dots, a_n)M} \neq 0$.

Note que, se (A, \mathfrak{m}) é local, $M \neq 0$ é finitamente gerado sobre A , e $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathfrak{m}$, então a condição (3) acima é automaticamente satisfeita devido ao Lema de Nakayama.

Exemplo 1.5. Seja $S = k[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios. A sequência x_1, \dots, x_q , onde $1 \leq q \leq n$, é claramente uma *S-sequência*.

No exemplo a seguir ilustramos o fato de que a regularidade de uma sequência depende, em geral, da ordem dos elementos da sequência.

Exemplo 1.6. Seja S como no exemplo anterior. Defina $\ell = 1 - x_1$. Um cálculo direto mostra que a sequência $\{x_1, x_2\ell, \dots, x_n\ell\}$ é uma S -sequência; no entanto, modificando a ordem dos seus elementos, vemos que a sequência $\{x_2\ell, \dots, x_n\ell, x_1\}$ não é uma S -sequência.

Porém, o fenômeno acima não ocorre em anéis Noetherianos *locais*, como destacado no resultado a seguir (mais adiante neste trabalho usaremos a versão *graduada* deste fato, particularmente para k -álgebras graduadas *standard* finitamente geradas por elementos de grau 1).

Proposição 1.4. *Sejam A um anel local Noetheriano, M um A -módulo finitamente gerado e $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ uma sequência M -regular. Então, qualquer permutação dos a_i 's constitui uma sequência M -regular.*

Definição 1.14. Seja A um anel local Noetheriano ou uma k -álgebra (k corpo) graduada finitamente gerada por elementos de grau 1. Um ideal próprio $I \subset A$ é dito um *ideal interseção completa* – também dizemos que A/I é um *anel interseção completa* – se $\mu(I) = ht(I)$ (isto significa que I pode ser gerado por uma A -sequência).

Exemplo 1.7. Seja $S = k[x_1, \dots, x_n]$ (k corpo) um anel de polinômios com a graduação padrão. Dado um natural $q \leq n$, considere o ideal $I = (x_1^{a_1}, \dots, x_q^{a_q}) \subset S$, para inteiros $a_1, \dots, a_q \geq 1$. Então, I é uma interseção completa, pois $ht(I) = ht(\sqrt{I}) = ht(x_1, \dots, x_q) = q = \mu(I)$. Equivalentemente, $\{x_1^{a_1}, \dots, x_q^{a_q}\}$ é uma S -sequência.

O resultado abaixo é um fato básico, útil e bem-conhecido na teoria de multiplicidades de k -álgebras graduadas finitamente geradas, e será utilizado na prova de um dos resultados apresentados no próximo capítulo. Trata-se de uma generalização do fato de que, se $F \in S = k[x_1, \dots, x_n]$ (k corpo) é uma forma de grau $d \geq 1$, então o anel graduado $S/(F)$ tem multiplicidade d (vide [14, pg. 96, Example 2]).

Proposição 1.5. *Considere o anel (graduado standard) de polinômios $S = k[x_1, \dots, x_n]$, onde k é um corpo. Seja $I = (F_1, \dots, F_m) \subset (x_1, \dots, x_n)$ um ideal homogêneo interseção completa. Então*

$$e(S/I) = \prod_{i=1}^m \text{gr}(F_i).$$

Capítulo 2

Sobre a multiplicidade de anéis

1-dimensionais

Considere o anel graduado de polinômios $T = k[y_1, \dots, y_n]$, com k corpo e $n \geq 2$. Nosso objetivo é fornecer uma cota inferior para a multiplicidade da k -álgebra T/I , onde $I \subset T$ é um ideal homogêneo (padrão), radical, e 1-dimensional (no sentido de que $\dim T/I = 1$). Como aplicação de tal resultado, obteremos no próximo capítulo uma solução para o interessante *problema de Waring* no caso de monômios.

O lema abaixo será uma ferramenta importante neste capítulo.

Lema 2.1. *Considere o ideal $J = (y_1, y_2^{a_2}, \dots, y_n^{a_n}) \subset T = k[y_1, \dots, y_n] = \bigoplus_{j \geq 0} T_j$, onde $2 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Seja $\tau = a_2 + \dots + a_n - (n - 1)$. Então*

$$\sum_{i=a_2}^{\tau} HF(T/J, i) = \left(\prod_{i=2}^n a_i \right) - \binom{a_2 + n - 2}{n - 1}.$$

Demonstração. Claramente, o ideal homogêneo J é uma interseção completa de altura n . Considere a k -álgebra graduada

$$A = T/J = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i,$$

que portanto é um anel interseção completa com $\dim A = \dim T - ht(J) = 0$. Temos as seguintes propriedades:

(1) Se $\tau = a_2 + \dots + a_n - (n - 1)$, então $A_{\tau} \neq 0$ e $A_{\ell} = 0$ sempre que $\ell > \tau$. Para

2. Sobre a multiplicidade de anéis 1-dimensionais

isto, basta observar que $\dim_k(A_\tau) = 1$; mais precisamente, o elemento

$$y_2^{a_2-1} \cdots y_n^{a_n-1} \pmod{J} \in A$$

constitui uma base para o k -espaço vetorial A_τ .

(2) Como A é uma interseção completa graduada, sua multiplicidade é dada por $e(A) = 1 \cdot a_2 \cdots a_n$ (pela Proposição 1.5), e como além disso A é 0-dimensional, temos (utilizando também o fato (1) verificado acima) que

$$e(A) = \dim_k(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_k(A_i) = \sum_{i=0}^{\tau} \dim_k(A_i).$$

Logo, $\sum_{i=0}^{\tau} \dim_k(A_i) = a_2 \cdots a_n$, e isto significa que

$$\sum_{i=0}^{\tau} HF(T/J, i) = \prod_{i=2}^n a_i.$$

Agora observe que, para $0 \leq i \leq a_2 - 1$, temos $J_i = (y_1)_i$, de onde segue um isomorfismo de k -espaços vetoriais

$$J_i \simeq T_{i-1}.$$

Logo, podemos escrever

$$\dim_k(A_i) = \dim_k(T_i) - \dim_k(T_{i-1}) = \binom{i+n-1}{n-1} - \binom{i+n-2}{n-1} = \binom{i+n-2}{n-2}.$$

Como consequência, obtemos

$$\sum_{i=0}^{a_2-1} HF(T/J, i) = \sum_{i=0}^{a_2-1} \dim_k(A_i) = \sum_{i=0}^{a_2-1} \binom{i+n-2}{n-2} = \binom{a_2+n-2}{n-1}$$

e finalmente

$$\sum_{i=a_2}^{\tau} HF(T/J, i) = \sum_{i=0}^{\tau} HF(T/J, i) - \sum_{i=0}^{a_2-1} HF(T/J, i) = \left(\prod_{i=2}^n a_i \right) - \binom{a_2+n-2}{n-1}$$

como queríamos provar. \square

Agora, podemos obter:

Teorema 2.2. *Considere o ideal $K = (y_1^{a_1}, \dots, y_n^{a_n}) \subset T$, com $2 \leq a_1, \dots, \leq a_n$. Se $I \subset K$ é um ideal homogêneo, radical e 1-dimensional, então*

$$e(T/I) \geq \prod_{i=2}^n a_i.$$

Demonstração. Vamos denotar $e(T/I) = s$. Nas condições do teorema, temos que o polinômio de Hilbert de T/I é constante igual a s , e logo, conforme revisamos na Observação 1.2, a função de Hilbert satisfaz

$$HF(T/I, i) \leq s, \quad \forall i.$$

A seguir, distinguiremos dois casos opostos:

- y_1 é um elemento T/I -regular;
- y_1 é um divisor-de-zero em T/I .

Suponhamos, primeiro, que y_1 não seja um divisor-de-zero de T/I (ou seja, y_1 é T/I -regular). Então, temos a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow \left(\frac{T}{I}\right)(-1) \xrightarrow{y_1} \frac{T}{I} \longrightarrow \frac{T}{I + (y_1)} \longrightarrow 0. \quad (2.1)$$

Para cada i , seja $h_i = HF(T/I, i)$ e considere o ideal $J = (y_1, y_2^{a_2}, \dots, y_n^{a_n}) \subset T$ como no Lema 2.1. Claramente,

$$I \subset I + (y_1) \subset K + (y_1) = J.$$

Note que

$$HF((T/I)(-1), i) = HF(T/I, i-1) = h_{i-1}.$$

Além disso, da sobrejeção natural $T/(I + (y_1)) \rightarrow T/J$ obtemos que

$$HF(T/J, i) \leq HF(T/(I + (y_1)), i).$$

Dessa forma, as informações já obtidas e a sequência exata acima fornecem

$$h_i - h_{i-1} = HF(T/(I + (y_1)), i) \geq HF(T/J, i).$$

Defina $\tau = \sum_{i=2}^n a_i - (n - 1)$. Fazendo uso do Lema 2.1 bem como da desigualdade acima envolvendo $h_i - h_{i-1}$, podemos computar uma cota para h_τ , da seguinte forma:

$$h_\tau \geq h_{\tau-1} + HF(T/J, \tau) \geq \dots \geq h_{a_2-1} + \sum_{i=a_2}^{\tau} HF(T/J, i) \quad (*)$$

É fácil ver que $I_{a_2-1} = 0$; para isto, basta lembrar que

$$I_{a_2-1} \subset J_{a_2-1} = (y_1)_{a_2-1}$$

e usar que y_1 é T/I -regular. Portanto

$$h_{a_2-1} = \dim_k(T_{a_2-1}) = \binom{a_2 + n - 2}{n - 1}.$$

De (*) e do Lema 2.1, obtemos que

$$h_\tau \geq \prod_{i=2}^n a_i.$$

Por outro lado, $s \geq h_\tau$ (pois $h_i \leq s$ para todo i), o que implica $s \geq \prod_{i=2}^n a_i$, como queremos.

Resta-nos demonstrar o resultado no caso em que y_1 é um divisor-de-zero de T/I (ou seja, y_1 pertence a algum ideal primo associado do T -módulo T/I). Como I é um ideal radical 1-dimensional, o mesmo ocorre com o ideal $I' = I : (y_1)$. Como $I \subset I'$ (de modo que T/I' é uma imagem homomorfa de T/I), obtemos

$$HF(T/I', i) \leq HF(T/I, i)$$

e assim

$$e(T/I') \leq e(T/I) = s.$$

Agora, novamente usando que I é radical, temos $I' : (y_1) = I'$, e isto significa que y_1 é

T/I' -regular. Como

$$I' = I: (y_1) \subset K: (y_1) = K' = (y_1^{a_2-1}, y_2^{a_2}, \dots, y_n^{a_n}),$$

podemos aplicar a primeira parte da demonstração à inclusão $I' \subset K'$, e obtemos

$$e(T/I') \geq \prod_{i=2}^n a_i.$$

Como $s \geq e(T/I')$, concluímos que $s \geq \prod_{i=2}^n a_i$. □

Observação 2.1. Queremos enfatizar que a hipótese (exigida no Teorema 2.2) de que I é radical é realmente necessária. De fato, tomando

$$I = (y_1^{a_1}, \dots, y_{n-1}^{a_{n-1}}) \subset K,$$

temos que I é um ideal saturado 1-dimensional, não-radical, com $e(T/I) = \prod_{i=1}^{n-1} a_i$.

Em particular, se escolhermos $a_1 < a_n$ obteremos $e(T/I) < \prod_{i=2}^n a_i$.

Capítulo 3

Aplicação: o problema de Waring para monômios.

Este capítulo é dedicado a uma apresentação do chamado *problema de Waring* e sua solução no caso de monômios, originalmente obtida por E. Carlini, M. V. Catalisano e A. V. Geramita (vide [5], [6]). Como principal ingrediente para a obtenção de tal resultado, aplicaremos o Teorema 2.2 (provado no capítulo anterior), que limita inferiormente a multiplicidade de k -álgebras finitamente geradas, reduzidas, graduadas (*standard*) e 1-dimensionais.

Em todo este capítulo, k denota um corpo algebricamente fechado de característica zero.

3.1 Apresentação do problema de Waring

Considere o anel de polinômios $S = \bigoplus_{j \geq 0} S_j = k[x_1, \dots, x_n]$ munido da graduação padrão. É um fato clássico que qualquer forma $F \in S$ se decompõe em soma de potências de formas lineares (vide [12]). Baseado nisto, o chamado *Problema de Waring para polinômios* questiona a respeito do *menor* inteiro $s \geq 1$ para o qual existem formas lineares $L_1, \dots, L_s \in S$ satisfazendo

$$F = \sum_{i=1}^s L_i^d$$

onde d é o grau de F .

Definição 3.1. Dado $F \in S_d$, o menor inteiro $s \geq 1$ para o qual F admite uma decomposição em soma de potências de s formas lineares (como acima), é chamado *posto de Waring de F* (ou simplesmente *posto de F*) e é denotado por $rk(F)$.

3.2 Solução no caso de monômios

Nesta seção, apresentamos no Teorema 3.2 uma solução para o problema de Waring no caso monomial, isto é, calculamos explicitamente o número $rk(M)$ quando M é um monômio (no Corolário 3.3 será dada uma versão de tal resultado para “monômios generalizados”).

Primeiro, destacamos a seguinte observação:

Observação 3.1. É fácil ver que, com relação ao posto (de Waring) de uma dada forma F , é suficiente considerar o anel de polinômios com o menor número possível de variáveis (com as quais F possa ser escrito). De fato, seja $F \in k[x_1, \dots, x_n]$ uma forma de grau d , e suponha que o número $rk(F)$ é conhecido. Naturalmente, podemos considerar $F \in k[x_1, \dots, x_n, y]$ (onde y é mais uma indeterminada sobre k) e, neste anel estendido, podemos procurar por uma decomposição de F em soma de potências de formas lineares. Se

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^r L_i(x_1, \dots, x_n, y)^d$$

então, tomando a substituição $y \mapsto 0$, obtemos imediatamente

$$rk(F) \leq r$$

e assim, como o posto é a *menor* quantidade possível de formas lineares em uma decomposição de F , não há vantagem alguma em considerar anéis de polinômios com indeterminadas adicionais. Em particular, a fim de investigar o posto de um monômio

$$M = x_1^{b_1} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n},$$

com $1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n$, é suficiente considerar M como elemento de $k[x_1, \dots, x_n]$.

3. Aplicação: o problema de Waring para monômios.

Observação 3.2. (*Ação de um anel de polinômios sobre outro, por diferenciação parcial.*) Consideremos anéis de polinômios $T = \bigoplus_{i \geq 0} T_i = k[y_1, \dots, y_n]$ e $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i = k[x_1, \dots, x_n]$, ambos graduados *standard* (sobre o corpo k) e com a mesma dimensão n . Podemos tornar S um T -módulo através de diferenciação parcial, ou seja, fazemos com que as variáveis y_i 's possam agir como operadores diferenciais parciais sobre os elementos de S , como descrevemos a seguir.

Cada variável $y_i \in T$ é interpretada como sendo o operador diferencial $\partial/\partial x_i$ sobre S , de modo que um monômio $\partial = y_1^{i_1} \cdots y_n^{i_n} \in T$ (que é um elemento típico de uma base do k -espaço vetorial $T_{i_1+\dots+i_n}$) é pensado como sendo o operador

$$\partial = \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}}$$

Por k -linearidade, basta fazer T agir sobre um monômio $x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \in S$ (que é um elemento típico de uma base do k -espaço vetorial $S_{j_1+\dots+j_n}$). Explicitamente, a operação é dada por

$$(y_1^{i_1} \cdots y_n^{i_n}) \circ (x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}) = \begin{cases} \frac{j_1! \cdots j_n!}{(j_1 - i_1)! \cdots (j_n - i_n)!} x_1^{j_1 - i_1} \cdots x_n^{j_n - i_n}, & \text{se } j_s \geq i_s, \forall s. \\ 0, & \text{se } i_s > j_s \text{ para algum } s. \end{cases}$$

o que confere a S uma estrutura peculiar de T -módulo.

Exemplo 3.1. A fim de ilustração, se $\partial = y_1 y_2^2 y_3 \in k[y_1, y_2, y_3]$ e $M = x_1^3 x_2^2 x_3^2 \in k[x_1, x_2, x_3]$, então $\partial \circ M = 12x_1^2 x_3$.

Observação 3.3. (*Ideais apolares.*) Como consequência da observação acima, a um polinômio homogêneo $F \in S$ podemos associar o conjunto

$$F^\perp = \{\partial \in T \mid \partial \circ F = 0\}$$

que, como podemos ver facilmente, é um ideal de T . Diz-se que F^\perp é o *ideal apolar* de F .

O resultado abaixo é frequentemente conhecido como *Lema de Apolaridade*.

Proposição 3.1. *Dado um inteiro $s \geq 1$, uma forma $F \in S$ de grau d pode ser escrita*

3. Aplicação: o problema de Waring para monômios.

como

$$F = \sum_{i=1}^s L_i^d$$

(onde os L_i 's são formas lineares duas a duas linearmente independentes sobre k) se e somente se existe $I \subset F^\perp$ tal que $I \subset T$ é o ideal de s pontos distintos em \mathbb{P}^{n-1} .

Demonstração. Dado $p = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in k^n$, podemos definir a forma linear

$$L = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in S_1,$$

cuja j -ésima potência pode ser escrita como

$$L^j = \sum_{j_1 + \dots + j_n = j} c_j \alpha_1^{j_1} \dots \alpha_n^{j_n} \cdot x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$$

Dado $v \leq j$, seja $\partial = y_1^{v_1} \dots y_n^{v_n} \in T$ com $v_1 + \dots + v_n = v$. Afirmamos que, para cada j , existe $G_j \in S_{j-v}$ tal que

$$\partial \circ L^j = \partial(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot G_j.$$

De fato:

$$\begin{aligned} & (y_1^{v_1} \dots y_n^{v_n}) \circ \sum_{j_1 + \dots + j_n = j} c_j \cdot \alpha_1^{j_1} \dots \alpha_n^{j_n} \cdot x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} = \\ &= \sum_{u_1 + \dots + u_n = j-v} \tilde{c}_j \cdot \alpha_1^{v_1+u_1} \dots \alpha_n^{v_n+u_n} \cdot x_1^{u_1} \dots x_n^{u_n} = \\ &= \alpha_1^{v_1} \dots \alpha_n^{v_n} \cdot \sum_{u_1 + \dots + u_n = j-v} \tilde{c}_j \cdot \alpha_1^{u_1} \dots \alpha_n^{u_n} \cdot x_1^{u_1} \dots x_n^{u_n} = \\ &= \partial(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot G_j. \end{aligned}$$

Suponha que $F = L_1^d + \dots + L_s^d$, onde os L_i 's são dois a dois linearmente independentes sobre k . A cada $L_i = \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n$, podemos associar o ponto $p_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) \in k^n$ e conseqüentemente obtemos os pontos

$$[p_i] = (\alpha_{i1} : \dots : \alpha_{in}) \in \mathbb{P}^{n-1}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Claramente, os pontos $[p_i]$'s são distintos (devido à condição de independência linear).

Tome $\partial \in T_v$, com $v \leq d$. Por linearidade, e pela igualdade que provamos acima,

3. Aplicação: o problema de Waring para monômios.

podemos escrever

$$\partial \circ F = \partial(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) \cdot G_1 + \dots + \partial(\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn}) \cdot G_s$$

(para certos $G_1, \dots, G_s \in S_{d-v}$) e assim, tomando $I = \mathfrak{J}(X) \subset T$, onde

$$X = \{[p_1], \dots, [p_s]\} \subset \mathbb{P}^{n-1},$$

obtemos imediatamente que $I \subset F^\perp$, como queremos.

A recíproca do resultado é mais delicada (pois requer certos pré-requisitos de Geometria Algébrica que não tratamos nesta dissertação) e pode ser encontrada, em detalhes, em [12]. \square

Agora estamos em condições de apresentar uma solução para o problema de Waring no caso de monômios. Precisamente:

Teorema 3.2. *Sejam $m \geq 2$ (com $m \leq n$) e $1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_m$ inteiros, e considere o monômio $M = x_1^{b_1} \cdots x_m^{b_m} \in k[x_1, \dots, x_n]$. Então:*

$$\text{rk}(M) = \prod_{i=2}^m (b_i + 1).$$

Demonstração. Devido à Observação 3.1, é suficiente considerarmos o caso $m = n$, ou seja, podemos supor que $M = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \in S = k[x_1, \dots, x_n]$. Denote $K = M^\perp \subset T = k[y_1, \dots, y_n]$. Afirmamos que

$$K = (y_1^{b_1+1}, \dots, y_n^{b_n+1}).$$

A inclusão $(y_1^{b_1+1}, \dots, y_n^{b_n+1}) \subset K$ é clara pois, para cada i , temos $b_i + 1 > b_i \Rightarrow y_i^{b_i+1} \circ (x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}) = 0 \Rightarrow y_i^{b_i+1} \in M^\perp$.

Seja agora $\partial \in K$. Logo $\partial \circ M = 0$. Como T é graduado, podemos supor, por linearidade, que ∂ é um elemento homogêneo $\partial = y_1^{c_1} \cdots y_n^{c_n}$. Suponhamos por absurdo que, para todo j , vale $c_j \leq b_j$. Então, por definição (vide Observação 3.2), teríamos $\partial \circ M = (y_1^{c_1} \cdots y_n^{c_n}) \circ (x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}) \neq 0$, contradição pois $\partial \circ M = 0$. Assim, existe

3. Aplicação: o problema de Waring para monômios.

$t \in \{1, \dots, n\}$ tal que $c_t \geq b_t + 1$, e portanto

$$\partial \in (y_t^{b_t+1}) \subset (y_1^{b_1+1}, \dots, y_n^{b_n+1}),$$

o que implica $K \subset (y_1^{b_1+1}, \dots, y_n^{b_n+1})$. Assim, $K = (y_1^{b_1+1}, \dots, y_n^{b_n+1})$.

Como $b_j \geq b_1$ para todo j , podemos considerar o subideal

$$I = (y_2^{b_2+1} - y_1^{b_2+1}, \dots, y_n^{b_n+1} - y_1^{b_n+1}) \subset K.$$

Tomando um ponto $p = (\alpha_1 : \dots : \alpha_n) \in V(I)$, é claro que $\alpha_1 \neq 0$ (do contrário, pelo formato dos geradores de I , teríamos $\alpha_j = 0$ para todo j , o que é uma contradição em espaços projetivos). Assim, podemos supor que $p = (1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n)$, de modo que, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, o escalar α_i é uma raiz $(b_i + 1)$ -ésima da unidade. Dessa forma, definindo o número

$$\sigma = \prod_{i=2}^n (b_i + 1),$$

fica claro que o sistema polinomial afim

$$Z_i^{b_i+1} - 1 = 0, \quad i = 2, \dots, n$$

possui precisamente σ soluções (note que aqui utilizamos a hipótese de que k é algebricamente fechado), ou seja, existem precisamente σ possibilidades para o ponto $p \in V(I)$.

Tendo provado, então, que $V(I)$ consiste de σ pontos distintos em \mathbb{P}^{n-1} , podemos aplicar a Proposição 3.1 e obter que o dado monômio M pode ser escrito como soma de σ potências de formas lineares duas a duas linearmente independentes. Resta-nos provar que σ é o menor inteiro com tal propriedade (ou seja, que $\text{rk}(M) = \sigma$, como afirmado no enunciado). Para isto, suponhamos por absurdo que existe inteiro s tal que M se expressa como soma de s potências de formas lineares duas a duas linearmente independentes. Então, pela Proposição 3.1, existe ideal $I' \subset K = M^\perp$ que define um conjunto de s pontos distintos em \mathbb{P}^{n-1} . Algebricamente, isso significa que o anel graduado T/I' é reduzido, 1-dimensional, e tem multiplicidade s (vide Observação 1.2).

3. Aplicação: o problema de Waring para monômios.

Pelo Teorema 2.2 (tomando $a_i = b_i + 1$ para todo i), concluímos que

$$s \geq \prod_{i=2}^n (b_i + 1) = \sigma,$$

como desejamos. □

Como consequência natural do teorema acima, obtemos uma versão para “monômios generalizados” do anel $S = k[x_1, \dots, x_n]$, no seguinte sentido:

Corolário 3.3. *Sejam $m \geq 2$ (com $m \leq n$) e $1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_m$ inteiros, e sejam $L_1, \dots, L_m \in S_1$ formas lineares linearmente independentes sobre k . Considere o polinômio $F = L_1^{b_1} \cdots L_m^{b_m} \in S$ (ou seja, F é um “monômio” nos L_i 's). Então:*

$$\text{rk}(F) = \prod_{i=2}^m (b_i + 1).$$

Demonstração. Novamente pela Observação 3.1, podemos assumir que $m = n$. Este corolário segue, portanto, do Teorema 3.2 e do fato de que a aplicação de substituição $x_i \mapsto L_i$ é um automorfismo de S . □

Capítulo 4

Outros resultados

Neste capítulo (assim como no anterior), denotamos $S = k[x_1, \dots, x_n]$ com a gradação padrão, onde k é um corpo algebricamente fechado de característica zero.

4.1 Soma de monômios relativamente coprimos

Nesta seção, consideramos uma classe (de formas) bem mais geral do que a classe dos monômios. Porém, não estabelecemos o posto de Waring precisamente (como fizemos no caso de monômios), e sim algumas cotas em termos do posto de certos monômios.

Proposição 4.1. *Seja $F \in S$ uma forma de grau d que pode ser escrita como*

$$F = M_1 + \dots + M_r$$

onde os M_i 's são monômios de grau d tais que $\text{mdc}(M_i, M_j) = 1$ para $i \neq j$. Então, tem-se

$$rk(M_i) \leq rk(F), \quad i = 1, \dots, r.$$

Além disso,

$$rk(F) \leq rk\left(\prod_{j=1}^r M_j\right).$$

Demonstração. É claro que $M_1^\perp \cap \dots \cap M_r^\perp \subset F^\perp$, pois se $\partial \in M_1^\perp \cap \dots \cap M_r^\perp$, então

$$\begin{aligned} \partial \in M_j^\perp, j = 1, \dots, r &\implies \partial \circ M_j = 0, j = 1, \dots, r \\ \implies \partial \circ F = \partial \circ (M_1 + \dots + M_r) &= \partial \circ M_1 + \dots + \partial \circ M_r = 0 \\ \implies \partial \in F^\perp. \end{aligned}$$

Seja agora $\partial \in F^\perp$ e suponha por absurdo que existe j tal que $\partial \notin M_j^\perp$, isto é, $\partial \circ M_j \neq 0$. Por outro lado,

$$\partial \circ F = 0 \implies \sum_{i=1}^r \partial \circ M_i = 0$$

ou seja, os $\partial \circ M_i$'s seriam linearmente dependentes sobre k , contradizendo a hipótese de que os M_i 's são dois a dois coprimos.

Com isso, obtemos que

$$F^\perp = M_1^\perp \cap \dots \cap M_r^\perp$$

e assim, sendo $F^\perp \subset M_j^\perp$, $j = 1, \dots, r$, obtemos

$$rk(M_j) \leq rk(F), \quad j = 1, \dots, r.$$

Finalmente, se M é o produto dos M_j 's, então é claro que $M^\perp \subset F^\perp$, e portanto $rk(F) \leq rk(M)$. □

4.2 Decomposição de Waring para monômios.

Se $M \in S$ é um monômio, já sabemos como calcular $rk(M)$ de modo explícito (Teorema 3.2). Uma expressão da forma $M = \sum_{i=1}^{rk(M)} L_i^d$, onde d é o grau de M e os L_i 's são formas lineares, é chamada uma *decomposição de Waring* de M . Equivalentemente, como k é algebricamente fechado de característica zero, tal decomposição pode ter o aspecto

$$M = \sum_{i=1}^{rk(M)} \gamma_i L_i^d,$$

para certos γ_i 's em k , já que $\gamma_i L_i^d = (\sqrt[d]{\gamma_i} L_i)^d$.

Nesta seção queremos salientar que, a partir da própria demonstração do Teorema

3.2 (adaptando-a convenientemente e usando exatamente o mesmo ideal $I \subset M^\perp \subset T$ que define s pontos distintos em \mathbb{P}^{n-1} , cada um dos quais possuindo primeira coordenada igual a 1 e demais coordenadas dadas por raízes $(b_i + 1)$ -ésimas da unidade), é possível descrever uma decomposição de Waring de M , da seguinte forma:

Teorema 4.2. *Dados inteiros $1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n$, considere o monômio $M = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$ e defina $\mathcal{Z}(i) = \{z \in k : z^{b_i+1} = 1\}$. Então, pondo $d = b_1 + \dots + b_n$, podemos escrever*

$$M = \sum_{\epsilon(i) \in \mathcal{Z}(i), i=2, \dots, n} \gamma_{\epsilon(2), \dots, \epsilon(n)} (x_1 + \epsilon(2)x_2 + \dots + \epsilon(n)x_n)^d$$

para certos $\gamma_{\epsilon(2), \dots, \epsilon(n)} \in k \setminus \{0\}$ (que podem ser efetivamente calculados por um sistema de equações lineares) e estes escalares são exatamente em quantidade de $\prod_{i=2}^n (b_i + 1)$.

Exemplo 4.1. Consideremos o monômio $M = xyz \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Temos $b_1 = b_2 = b_3 = 1$. Logo, pelo Teorema 3.2, temos $rk(M) = (b_2 + 1)(b_3 + 1) = 4$. Podemos escrever

$$M = \alpha(x + y + z)^3 + \beta(x + y - z)^3 + \gamma(x - y + z)^3 + \delta(x - y - z)^3.$$

Expandindo o lado direito da igualdade, e resolvendo o correspondente sistema de equações lineares, encontramos $\alpha = \frac{1}{24}$, $\beta = -\frac{1}{24}$, $\gamma = -\frac{1}{24}$ e $\delta = \frac{1}{24}$. Obtemos finalmente a decomposição de Waring:

$$xyz = \frac{1}{24} \cdot (x + y + z)^3 - \frac{1}{24} \cdot (x + y - z)^3 - \frac{1}{24} \cdot (x - y + z)^3 + \frac{1}{24} \cdot (x - y - z)^3.$$

Referências Bibliográficas

- [1] J. Alexander and A. Hirschowitz. *Polynomial interpolation in several variables*, J. Algebraic Geom., 4(2), 201–222, 1995.
- [2] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1969.
- [3] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press, 1993.
- [4] W. Buczyńska, J. Buczyński and Z. Teitler. *Waring decompositions of monomials*, J. Algebra, 378, 45–57, 2013.
- [5] E. Carlini, M. V. Catalisano and A. V. Geramita. *The solution to Waring’s problem for monomials*, arXiv:1110.0745v1 [math.AC], 4 Oct 2011.
- [6] E. Carlini, M. V. Catalisano and A. V. Geramita. *The solution to the Waring problem for monomials and the sum of coprime monomials*, J. Algebra, 370, 5–14, 2012.
- [7] E. Carlini, M. V. Catalisano, L. Chiantini, A. V. Geramita and Y. Woo. *Symmetric tensors: rank and Strassen’s conjecture*, arXiv:1412.2975v2 [math.AC], 9 Dec 2014.
- [8] E. Carlini, L. Chiantini and A. V. Geramita. *Complete intersections on general hypersurfaces*, Michigan Math. J., 57, 121–136, 2008.
- [9] D. Eisenbud. *Commutative Algebra (with a view toward Algebraic Geometry)*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1995.
- [10] A. V. Geramita. *Inverse systems of fat points: Waring’s problem, secant varieties of Veronese varieties and parameter spaces for Gorenstein ideals*, In *The Curves*

- Seminar at Queen's, Vol. X (Kingston, ON, 1995)*, volume 102 of *Queen's Papers in Pure and Appl. Math.*, pages 2–114. Queen's Univ., Kingston, ON, 1996.
- [11] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, Springer. Graduate texts in mathematics, 1977.
- [12] A. Iarrobino and V. Kanev. *Power sums, Gorenstein algebras, and determinantal loci*, volume 1721 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [13] J. M. Landsberg and Z. Teitler. *On the ranks and border ranks of symmetric tensors*, *Found. Comput. Math.*, 10(3), 339–366, 2010.
- [14] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [15] C. B. Miranda-Neto. *Notas de Aula de Álgebra Comutativa*, Paraíba, 2011.
- [16] D. C. Northcott. *Lessons on rings, modules and multiplicities*, Cambridge Univ. Press, 1968.
- [17] K. Ranestad. *Varieties of sums of powers*, arXiv:math/9801110v2 [math.AG], 14 Apr 2011.
- [18] K. Ranestad and F.-O. Schreyer. *On the rank of a symmetric form*, *J. Algebra*, 346, 340–342, 2011.