

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o número máximo de retas
em superfícies de grau d em \mathbb{P}^3

Sally Andria Vieira da Silva

JOÃO PESSOA – PB
MARÇO DE 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o número máximo de retas em superfícies de grau d em \mathbb{P}^3

por

Sally Andria Vieira da Silva

sob a orientação da

Prof. Dr^a. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

João Pessoa – PB
Março de 2016

S586s Silva, Sally Andria Vieira da.
Sobre o número máximo de retas em superfícies de grau d
em \mathbb{P}^3 / Sally Andria Vieira da Silva.- João Pessoa, 2016.
66f.
Orientadora: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Ação dos subgrupos finitos de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$. 3.
Razão cruzada. 4. Número máximo de retas em superfícies
não singulares.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Sobre o número máximo de retas em superfícies de grau d em \mathbb{P}^3

por

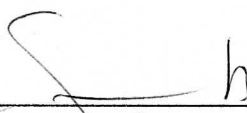
Sally Andria Vieira da Silva ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

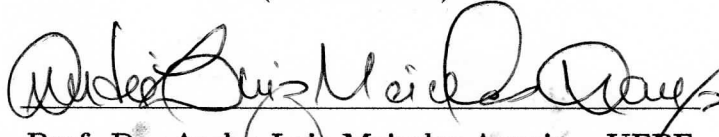
Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 18 de Março de 2016.

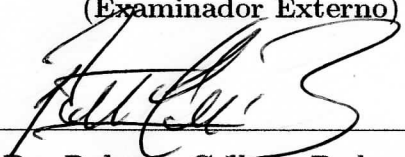
Banca Examinadora:



Prof.^a. Dr.^a. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia – UFPB
(Orientadora)



Prof. Dr. Andre Luiz Meireles Araujo – UFPE
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal – UFPB
(Examinador Interno)

¹A autora foi bolsista do(a) CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ao meu Deus.

Ao meu papito: Adeilson Manoel da Silva (in memoriam).

“Porque dEle e por Ele, e para Ele, são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém.”

Rm 11:36

Agradecimentos

Ao meu Deus, que me deu vida, inteligência e força.

À minha família, em especial meus pais Adeilson (in memoriam) e Silvana, minha irmã Sandy e meus avós maternos Bernardo e Albertina (in memoriam), que sempre me apoiaram, oraram e fizeram tudo quanto puderam por mim.

Aos meus irmãos em Cristo por suas interseções e apoio. Em especial à Alexandre Neves e Elkênita Guedes.

À professora Jacqueline, que me orientou e me ensinou tantas coisas. Agradeço imensamente por sua compreensão e pela confiança.

Aos meus colegas de curso e aos amigos que estiveram sempre ao meu lado durante o curso: Ageu Freire, Lucas Araújo, Isabelly Diniz, Thiago Luiz, Clemerson Menezes.

Ao meu amigo Eberson Ferreira, um grande amigo e orientador à distância. À Tuanny Maciel pelo incentivo e amizade.

Aos professores que carregou no meu coração desde a graduação: Tio Rodrigo Gondim, Maité Kulesa, Thiago Dias (Dk), Adriano Regis e Tiago Duque.

Aos professores do programa, em especial professor Uberlandio Severo.

Aos professores da banca Roberto Bedregal, André Meireles e Fernando Souza.

Resumo

Sabe-se que planos e superfícies quádricas no espaço projetivo contém infinitas retas. No caso de uma superfície cúbica não singular Cayley e Salmon, em 1847, (e Clebsch, mais tarde) provaram que ela contém exatamente 27 retas. No caso de grau 4, em 1943 Segre provou que o número máximo de retas contidas numa superfície quártica não singular é 64. Para superfícies de grau maior que 4 esse número é desconhecido. Neste trabalho vamos explorar qual é a quantidade máxima de retas que uma superfície complexa não singular de grau d na família $\mathcal{F}_{\phi,\psi}^d$ pode conter. Assim obtemos uma cota inferior para o número máximo de retas que as superfícies não singulares de grau d em \mathbb{P}^3 podem conter. Salientamos que a determinação destes números tem como base o Teorema de Classificação de Klein dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$ e o estudo dos subgrupos Γ_C de $Aut(\mathbb{P}^1)$ que deixam invariante um subconjunto finito C de \mathbb{P}^1 .

Palavras-chave: Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$, Razão cruzada, Número máximo de retas em superfícies não singulares.

Abstract

It is well-known that planes and quadric surfaces in the projective space contain infinitely many lines. For smooth cubic surface Cayley and Salmon, 1847, (and Clebsch later) proved that it has exactly 27 lines. For degree 4, in 1943 Segre proved that the maximum number of lines contained in a smooth quartic surface is 64. For surfaces of degree greater than 4 this number is unknown. In this work, we are going to explore what is the maximum number of lines that a smooth complex surface of degree d of the family $\mathcal{F}_{\phi,\psi}^d$ may contain. Thus, we obtain a lower bound to the maximum number of lines that non singular surfaces of degree d in \mathbb{P}^3 may contain. We emphasize that the determination of this numbers is based on the Klein's classification theorem of finite subgroups of $Aut(\mathbb{P}^1)$ and the study of Γ_C , the subgroup of $Aut(\mathbb{P}^1)$ whose elements leaves invariant the finite subset C of \mathbb{P}^1 .

Keywords: Action of finite subgroups of $Aut(\mathbb{P}^1)$, Cross ratio, Maximum number of lines on smooth surfaces.

Sumário

Introdução	2
1 Retas em superfícies de grau menor que 5	4
1.1 Retas num plano	4
1.2 Retas numa quádrlica	5
1.3 Retas numa superfície cúbica	8
1.4 Retas numa superfície quártica	10
2 Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$	12
2.1 O subgrupo Γ_C	17
2.2 Razão cruzada	18
2.3 Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$	25
3 A família \mathcal{F}^d	33
3.1 Contando as retas na família \mathcal{F}^d	33
3.2 Quantidade máxima de retas numa superfície da família \mathcal{F}^d	43
3.3 Retas em superfícies de grau d em \mathbb{P}^3	48
A Resultados Básicos	49
A.1 Geometria Algébrica	49
A.2 Mudança de coordenadas projetivas em \mathbb{P}^n	53
A.3 Cone em \mathbb{P}^n	54
A.4 Alguns fatos sobre grupos e ação de grupos	54
Referências Bibliográficas	56

Notações

A seguir, denotamos por:

- \mathbb{C}^* os números complexos não nulos;
- S o anel de polinômios num dado conjunto de variáveis sobre o corpo \mathbb{C} ;
- S^h o conjunto dos polinômios homogêneos em S ;
- S_d o conjunto dos polinômios homogêneos de grau d em S ;
- M.C.P. mudança de coordenadas projetiva;
- $\mathcal{Z}(F)$ o conjunto dos zeros projetivos do polinômio $F \in S_d$;
- $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ o ideal de definição do conjunto algébrico \mathcal{X} ;
- $G^* = G \setminus \{e\}$, se G for um grupo com elemento neutro e ;

Introdução

Em Geometria Enumerativa estuda-se uma família de objetos geométricos, impondo-se certas condições à família, e procura-se um número finito de objetos que satisfaçam estas condições. Neste trabalho obtemos uma cota inferior para o seguinte problema de Geometria Enumerativa: Dada uma superfície $\mathcal{Z}(F)$ de grau d no espaço projetivo \mathbb{P}^3 pergunta-se:

“Qual é a quantidade máxima de retas que uma superfície não singular de grau d em \mathbb{P}^3 contém?”

Para superfícies de grau 1 e 2, sabe-se que estas contém infinitas retas. Para superfícies de grau 3 a história foi a seguinte: o britânico Arthur Cayley (1821-1895), em 1847, enviou uma carta para o inglês George Salmon (1819-1904) na qual mencionava que uma superfície cúbica deveria conter um número finito de retas. Salmon provou que este número finito era 27. E em 1849, Cayley apresenta a demonstração de Salmon. Neste mesmo ano, Cayley publicou o artigo *“On the triple tangent planes of surfaces of the third order”*[7] no qual provou que “toda superfície cúbica não singular em \mathbb{P}^3 contém exatamente 27 retas”. Esta descoberta foi muito importante para o desenvolvimento da geometria algébrica. Há quem diga que a geometria algébrica moderna tenha se iniciado neste momento.

Quando passamos para superfícies de grau maior ou igual a quatro a situação muda. Pelo Teorema da dimensão das fibras prova-se que para grau $d \geq 4$, sempre é possível encontrar uma superfície com este grau que não contém nenhuma reta.

Mas para $d = 4$ este problema também foi resolvido. O alemão Friedrich Schur (1856-1932) apresentou uma superfície quártica que contém exatamente 64 retas:

$$\mathcal{Z}(X^4 + XY^3 + Z^4 + ZW^3)$$

no artigo [9]. Mas foi só em 1943 que o italiano Beniamino Segre (1903-1977) resolveu o problema. Segre publicou o artigo *“The maximum number of lines lying on a quartic surface”*[4] provando que “toda quártica não singular em \mathbb{P}^3 contém no máximo 64 retas”. Além disto, apresentou uma cota para a quantidade de retas em uma superfície

não singular de grau d em \mathbb{P}^3 poderia conter. Recentemente, os matemáticos Slawoir Rams e Matthias Schütt publicaram o artigo “64 lines on smooth quartic surfaces” [14] no qual apresentam um erro na demonstração de Segre, mas provam que a cota máxima de 64 retas numa quártica é correta.

Para superfícies de grau $d \geq 5$ o problema está em aberto. Mas muitos matemáticos tem estudado famílias de superfícies em \mathbb{P}^3 e tem obtido cotas para o valor de retas contidas nestas superfícies. Estas cotas acabam por ser cotas para superfícies em geral.

Apresentamos uma dessas famílias e mostramos como encontramos o número máximo de retas contidas em suas superfícies.

No *Capítulo 1*, apresentamos a discussão dos casos de superfícies de graus $1 \leq d \leq 4$.

No *Capítulo 2*, introduzimos o grupo $Aut(\mathbb{P}^1)$ dos automorfismos de \mathbb{P}^1 e estudamos a ação dos subgrupos finitos $\Gamma_C = \{\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C\}$. Exploramos a razão cruzada para classificar todos os subgrupos de $Aut(\mathbb{P}^1)$ que deixam invariantes quatro pontos.

O *Capítulo 3* é dedicado aos resultados do cálculo da quantidade máxima de retas que uma superfície da família $\mathcal{F}_{\phi,\psi}^d$ pode conter.

Finalmente, o *Apêndice A* contém alguns resultados básicos de Geometria Algébrica e de Teoria de Grupos, que serão utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 1

Retas em superfícies de grau menor que 5

Neste capítulo, fazemos uma revisão de qual é a quantidade máxima de retas que uma superfície de grau d , $1 \leq d \leq 4$ em \mathbb{P}^3 contém.

Seja $\mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^3$ uma superfície reduzida de grau $d \geq 1$, i.e., $F \in S_d$ é livre de quadrados.

Observe inicialmente que: se $l \subseteq \mathbb{P}^3$ é uma reta tal que $\mathcal{I}(l) = \langle L_1, L_2 \rangle$ sendo $L_1, L_2 \in S_1$ L.I. e $F \in S_d$, temos que:

$$l \subseteq \mathcal{Z}(F) \Leftrightarrow \langle L_1, L_2 \rangle = \mathcal{I}(l) \supseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(F)) \stackrel{TZH}{=} \sqrt{\langle F \rangle} \Rightarrow F \in \langle L_1, L_2 \rangle. \quad (1.1)$$

1.1 Retas num plano

Um plano em \mathbb{P}^3 é a superfície dada por $\mathcal{Z}(F)$, com $F \in S_1$ não nulo. Observe que $\mathcal{Z}(F)$ é superfície reduzida e irredutível pois F tem grau 1 e portanto, é livre de quadrados.

Seja $l \subseteq \mathbb{P}^3$ uma reta tal que $\mathcal{I}(l) = \langle L_1, L_2 \rangle$, sendo $L_1, L_2 \in S_1$ linearmente independentes. Do que foi observado em (1.1) temos que a reta l está contida no plano $\mathcal{Z}(F)$ se, e somente se, $F \in \langle L_1, L_2 \rangle$. Ou seja, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, não ambos nulos, tais que $F = \alpha L_1 + \beta L_2$. Assim, se F, L_1 forem linearmente independentes, tem-se $\langle L_1, L_2 \rangle = \langle F, L_1 \rangle$. Do contrário, prova-se que $\langle L_1, L_2 \rangle = \langle F, L_2 \rangle$.

Portanto, o conjunto das retas contidas em $\mathcal{Z}(F)$ é dado por

$$\mathcal{R}_F = \{l \subseteq \mathbb{P}^3 \mid l = \mathcal{Z}(F, L), L \in S_1 \text{ linearmente independente com } F\}.$$

Proposição 1.1. Existe uma bijeção entre \mathcal{R}_F e \mathbb{P}^2 .

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathcal{R}_F &\rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{[F]}\right) \\ \mathcal{Z}(F, L) &\mapsto [\overline{L}]. \end{aligned}$$

- ψ está bem definida!

Como $\{F, L\}$ é L.I., $L \notin [F]$, e assim $\overline{L} \neq \overline{0}$ em $\frac{S_1}{[F]}$. Suponha que $M \in S_1$ é tal que $\langle F, L \rangle = \langle F, M \rangle$. Então $M \in \langle F, L \rangle$, de onde concluímos que, $M \in [F, L]$ e assim existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, não ambos nulos, tais que $M = \alpha F + \beta L$. Na verdade, $\beta \neq 0$, caso contrário $\{M, F\}$ seria linearmente dependente, o que é um absurdo. Assim temos:

$$\begin{aligned} M - \beta L = \alpha F &\Rightarrow M - \beta L \in [F] \\ &\Rightarrow \overline{M - \beta L} = \overline{0} \text{ em } \frac{S_1}{[F]} \\ &\Rightarrow \overline{M} = \overline{\beta L} = \beta \overline{L} \\ &\Rightarrow \overline{M} \in [\overline{L}] \end{aligned}$$

Como $\overline{L} \neq \overline{0}$ e $\overline{M} = \beta \overline{L} \neq \overline{0}$, tem-se $[\overline{M}] = [\overline{L}]$.

- ψ é injetora!

Sejam $l = \mathcal{Z}(F, L)$ e $m = \mathcal{Z}(F, M)$ retas em $\mathcal{Z}(F)$, tais que $\psi(l) = \psi(m)$. Note que:

$$\begin{aligned} \psi(l) = \psi(m) &\Leftrightarrow [\overline{L}] = [\overline{M}] \text{ em } \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{[F]}\right) \\ &\Leftrightarrow \overline{L} = \gamma \overline{M}, \text{ para algum } \gamma \in \mathbb{C}^* \\ &\Leftrightarrow \overline{L - \gamma M} = \overline{0} \text{ em } \frac{S_1}{[F]} \\ &\Leftrightarrow L - \gamma M \in [F] \\ &\Leftrightarrow L - \gamma M = \delta F, \text{ para algum } \delta \in \mathbb{C}^* \\ &\Leftrightarrow L \in \langle F, M \rangle \end{aligned}$$

De onde concluímos que $\mathcal{I}(l) = \langle F, L \rangle \subseteq \mathcal{I}(m) = \langle F, M \rangle$. Assim $m \subseteq l$ e aplicando mais uma vez a proposição A.2, concluímos que $l = m$.

- ψ é sobrejetiva!

Seja $[\overline{M}] \in \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{[F]}\right)$. Assim $\overline{M} \neq \overline{0}$ implica $M \notin [F]$, ou seja, M e F são linearmente independentes. Logo, a reta $l = \mathcal{Z}(F, M) \subseteq \mathcal{Z}(F)$ é tal que $\psi(l) = [\overline{M}]$.

Finalmente, observe que: fixada a base $\{F, F_1, F_2, F_3\}$ de S_1 , $[\alpha : \beta : \gamma] \mapsto [\alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3]$ define uma bijeção de \mathbb{P}^2 em $\mathbb{P}\left(\frac{S_1}{[F]}\right)$. \square

Logo existem infinitas retas em um plano em \mathbb{P}^3 .

1.2 Retas numa quádrlica

Uma superfície quádrlica em \mathbb{P}^3 é definida por $\mathcal{Z}(F)$ com $F \in S_2$ não nulo.

Existe uma classificação das quádricas em \mathbb{P}^n que facilitará a contagem de retas nesta superfície. Lembremos que dois conjuntos algébricos $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{P}^n$ são ditos projetivamente equivalentes se existe uma M.C.P. \mathbf{T} tal que $\mathbf{T}(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$.

Teorema 1.2 (Forma normal das quádricas). *Seja $F = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}X_iX_j \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ um polinômio homogêneo não nulo de grau total 2, e assumamos que \mathbb{K} é um corpo com característica diferente de 2. Então $\mathcal{Z}(F)$ é projetivamente equivalente a uma quádrica definida por uma equação da forma*

$$c_0X_0^2 + c_1X_1^2 + \dots + c_nX_n^2$$

na qual c_0, \dots, c_n são elementos de \mathbb{K} , não todos nulos.

Demonstração. Veja pág. 402 em [5]. □

No espaço projetivo complexo temos o seguinte corolário:

Corolário 1.3 (Classificação das quádricas em \mathbb{P}^3). Uma superfície quádrica em \mathbb{P}^3 , a menos de uma mudança de coordenadas projetivas, é definida por um polinômio que assume uma das seguintes formas:

- (i) $F_1 = X^2$
- (ii) $F_2 = X^2 + Y^2$
- (iii) $F_3 = X^2 + Y^2 + Z^2$
- (iv) $F_4 = X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2$

Além disso, toda quádrica não singular é projetivamente equivalente a $\mathcal{Z}(F_4)$.

Demonstração. Note que a única quádrica não singular é $\mathcal{Q}_4 = \mathcal{Z}(F_4)$. Como as mudanças de coordenadas projetivas preservam singularidades, toda quádrica não singular é projetivamente equivalente a \mathcal{Q}_4 . □

Outro fato importante é que M.C.P. preservam variedades lineares. Em particular, retas são levadas em retas.

Assim basta analisar os casos acima:

- (i) A quádrica $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Z}(F_1)$

Esta superfície não é reduzida. Conjuntisticamente, $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Z}(X^2) = \mathcal{Z}(X)$ é um plano. Logo contém infinitas retas.

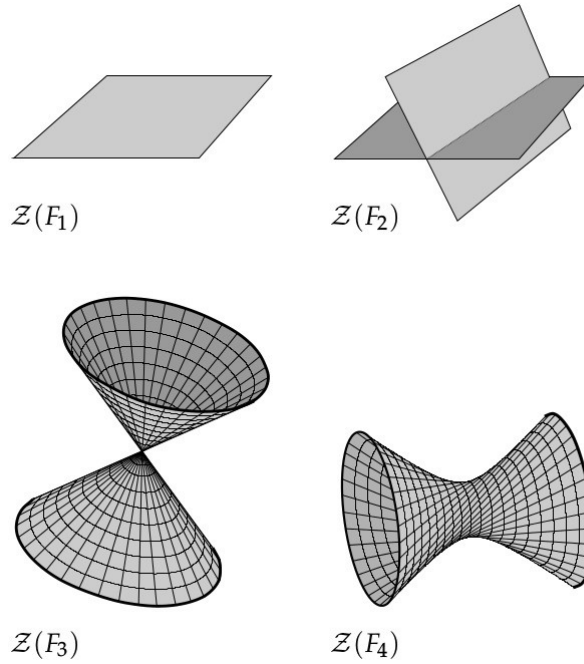


Figura 1.1: Superfícies quádricas em \mathbb{P}^3 .

(ii) A quádrica $\mathcal{Q}_2 = Z(F_2)$

Note que $Z(F_2) = Z(X + \mathbf{i}Y) \cup Z(X - \mathbf{i}Y)$ é a união de dois planos $Z(X + \mathbf{i}Y)$ e $Z(X - \mathbf{i}Y)$. Logo \mathcal{Q}_2 contém infinitas retas.

Antes de continuar analisando os próximos casos, observe que os polinômios F_3 e F_4 são irredutíveis. Ora, se fossem redutíveis já que são homogêneos, a única possibilidade de fatoração seria $F_3 = H_3G_3$ e $F_4 = H_4G_4$, com $H_i, G_i \in S_1, (i = 3, 4)$. Daí $X^2 + Y^2 + Z^2 = (A_1X + B_1Y + C_1Z)(A_2X + B_2Y + C_2Z)$ só seria possível se o sistema

$$\begin{cases} A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = 1 \\ A_1B_2 = A_1C_2 = B_1A_2 = B_1C_2 = C_1A_2 = C_1B_2 = 0 \end{cases}$$

tivesse solução, o que não ocorre. Analogamente com F_4 .

Logo as quádricas \mathcal{Q}_3 e \mathcal{Q}_4 são irredutíveis.

(iii) A quádrica $\mathcal{Q}_3 = Z(F_3)$

\mathcal{Q}_3 é um cone, cujo vértice, $V = [0 : 0 : 0 : 1]$, é seu único ponto singular. Pela proposição A.7, \mathcal{Q}_3 contém infinitas retas e todas passam pelo vértice V .

(iv) A quádrica $\mathcal{Q}_4 = Z(F_4)$

A quádrica \mathcal{Q}_4 é uma superfície não singular, logo é reduzida. Verifica-se que esta quádrica contém duas famílias de retas \mathcal{L} e \mathcal{M} definidas da seguinte forma:

Dado $P = [p_0 : p_1]$ em \mathbb{P}^1 temos as retas:

- $L_P \in \mathcal{L}$, que é o conjunto de pontos

$$\{\mathbf{i}(\alpha p_0 + \beta p_1) : \alpha p_0 - \beta p_1 : \mathbf{i}(\alpha p_0 + \beta p_1) : \alpha p_1 - \beta p_0 \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\}.$$

- $M_P \in \mathcal{M}$, que é o conjunto de pontos

$$\{\mathbf{i}(\alpha p_0 - \beta p_1) : \alpha p_0 - \beta p_1 : \mathbf{i}(-\alpha p_1 + \beta p_0) : \alpha p_1 + \beta p_0 \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Proposição 1.4. As famílias de retas \mathcal{L} e \mathcal{M} contidas na quádrlica \mathcal{Q}_4 satisfazem as seguintes propriedades

- (i) Retas de mesma família não se intersectam.
- (ii) Retas de famílias diferentes se intersectam em um único ponto.
- (iii) Dado um ponto $R \in \mathcal{Q}_4$, existem únicas retas L_{P_R} e M_{Q_R} tais que $L_{P_R} \cap M_{Q_R} = \{R\}$.
- (iv) Dada l uma reta contida em \mathcal{Q}_4 , tem-se que $l \in \mathcal{L}$ ou $l \in \mathcal{M}$.

Demonstração. Confira página 66, 67 em [12]. □

Portanto, toda superfície quádrlica em \mathbb{P}^3 contém infinitas retas.

1.3 Retas numa superfície cúbica

Considere $\mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^3$, sendo $F \in S_3$ não nulo.

- Se F é redutível, então $\mathcal{Z}(F)$ contém infinitas retas:

Se a fatoração for $F = LQ$ com $L \in S_1$ e $Q \in S_2$ segue que

$$\mathcal{Z}(F) = \mathcal{Z}(LQ) = \mathcal{Z}(L) \cup \mathcal{Z}(Q).$$

Como $\mathcal{Z}(L)$ é plano, $\mathcal{Z}(F)$ contém infinitas retas.

- Se F é irredutível, temos:

O próximo resultado, que é considerado um dos mais famosos teoremas de Geometria Algébrica do século XIX.

Teorema 1.5. *Toda superfície cúbica não singular no espaço projetivo contém exatamente 27 retas.*

Este teorema foi provado pelo matemático britânico Arthur Cayley e o inglês George Salmon em 1847 ([1] e [7]).

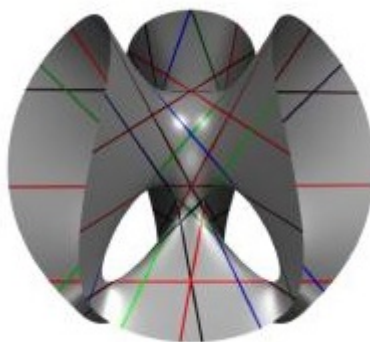


Figura 1.2: A Cúbica de Clebsch $\mathcal{Z}(X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3 - (X + Y + Z + W)^3)$ e suas 27 retas.

Este fato também foi provado mais tarde por Clebsch. Outro resultado importante demonstrado por eles é o seguinte:

Teorema 1.6. *Se o conjunto singular de uma superfície cúbica for não vazio, e esta cúbica não for um cone, então a cúbica contém menos que 27 retas (cf. [14]).*

De fato, se $\mathcal{Z}(F)$ for uma superfície cúbica singular, $\mathcal{Z}(F)$ pode conter 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 21 ou infinitas retas.

Exemplo 1.1. Considere $S = \mathcal{Z}(F)$.

- Se $F = XZ^2 + X^2W + Y^3$ então $Sing(S) = \{[0 : 0 : 0 : 1]\}$, e S contém apenas a reta $l = \mathcal{Z}(X, Y)$.

- Se $F = 4(X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3) - (X + Y + Z + W)^3$ então S é a cúbica de Cayley, que possui 4 singularidades e 9 retas.

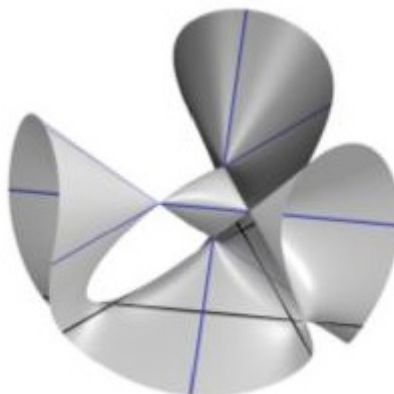


Figura 1.3: Cúbica de Cayley

• Se $F = W(Y^2 - XY) + Y(X^2 - Z^2)$, S possui três singularidades e contém vinte e uma retas:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \mathcal{Z}(X, Y), & l_2 &= \mathcal{Z}(Y, Z), & l_3 &= \mathcal{Z}(X - Y, X - Z) \\
 l_4 &= \mathcal{Z}(X + Y, Y + Z), & l_5 &= \mathcal{Z}(\mathbf{i}X - Y, X + Z), \\
 l_6 &= \mathcal{Z}(\mathbf{i}X + Y, X - Z), & l_7 &= \mathcal{Z}(Y, W), & l_8 &= \mathcal{Z}(W, X + Z), \\
 l_9 &= \mathcal{Z}(W, X - Z), & l_{10} &= \mathcal{Z}(\mathbf{i}Y + Z, W + \mathbf{i}X + \mathbf{i}Y), \\
 l_{11} &= \mathcal{Z}(Z - \mathbf{i}Y, W - \mathbf{i}X - Y), & l_{12} &= \mathcal{Z}(Y + Z, W - X - Y), \\
 l_{13} &= \mathcal{Z}(Y - Z, W + X - Y), & l_{14} &= \mathcal{Z}(W + \gamma Y, Z + \alpha X - \beta Y), \\
 l_{15} &= \mathcal{Z}(W - \gamma Y, Z - \alpha X + \beta Y), & l_{16} &= \mathcal{Z}(W + \gamma Y, Z + \alpha X + \beta Y), \\
 l_{17} &= \mathcal{Z}(W - \gamma Y, Z - \alpha X - \beta Y), \\
 l_i &= \mathcal{Z}(\omega_i X - Y, W - \frac{1}{\omega_i} X + \omega_i Z), \quad i = 0, 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta = \frac{\sqrt{2}\mathbf{i}}{3^{\frac{1}{4}}}$, $\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}$ e $\omega_i^4 = -1$.

1.4 Retas numa superfície quártica

Uma aplicação do Teorema da Dimensão das Fibras é que toda superfície cúbica em \mathbb{P}^3 contém ao menos uma reta. Na verdade, o que se verifica é que, a função que relaciona a existência de retas em \mathbb{P}^3 que estejam contidas numa superfície $\mathcal{Z}(F)$ para qualquer $F \in S_d - \{0\}$ só é sobrejetiva para $d = 3$. Ou seja, para qualquer outro grau $d > 3$, existe uma superfície de grau d no espaço projetivo que não contém nenhuma reta.

Em 1882, Schur apresentou uma superfície quártica que continha exatamente 64 retas:

$$\mathcal{Z}(X^4 + XY^3 + Z^4 + ZW^3).$$

Mas temos exemplos de superfícies que são não singulares e não contêm nenhuma reta, as dadas pela equação

$$\mathcal{Z}(W^d + XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZW^{d-1}) \quad (d \geq 4).$$

Um marco se deu quando Beniamino Segre, em 1943, publicou o artigo “The maximum number of lines lying on a quartic surface” [4] afirmando que uma reta em uma quártica não singular complexa intersecta no máximo 18 outras retas. Embora esta afirmação estivesse errada, foi o ponto principal na tentativa de Segre para mostrar:

Teorema 1.7. *Toda superfície quártica não singular em \mathbb{P}^3 contém no máximo 64 retas.*

Além disso, neste artigo Segre também apresenta uma cota para o número máximo de retas $l(d)$ que uma superfície não singular de grau d em \mathbb{P}^3 pode conter:

$$l(d) \leq (d - 2)(11d - 6).$$

No artigo mais recente de Rams e Schütt [14], estuda-se a configuração das retas numa superfície quártica não singular, e isto permite chegar a cota dada. Mais especificamente, prova-se a seguinte proposição:

Proposição 1.8. (i) Uma reta l contida numa superfície quártica não singular $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^3$ intersecta no máximo 20 outras retas, se característica do corpo for diferente de 2 e de 3.

(ii) Se l encontra mais de 18 retas em \mathcal{X} , então \mathcal{X} pode ser definida pela equação polinomial

$$ZX^3 + WY^3 + XZG_2(Z, W) + ZG_3(Z, W)$$

sendo $G_2, G_3 \in \mathbb{K}[Z, W]$ são homogêneos de graus 2 e 3, respectivamente.

(iii) A reta $l = \mathcal{Z}(Z, W)$ intersecta 20 retas em \mathcal{X} se e somente se $W|G_3$.

No entanto, analisando a proposição 1.8, os argumentos de Segre forneceriam uma cota de 72 retas em uma superfície quártica. A questão está no fato de que para provar a proposição 1.8 e o teorema 1.7 utiliza-se a teoria de fibrações elípticas que não estava à disposição de Segre.

Também neste artigo Segre afirmou ter obtido “uma nova superfície quártica não singular contendo 64 retas”, mas não encontrou-se uma tal construção em sua extensa obra. Já no trabalho de Rams e Schütt, são exibidas algumas propriedades da configuração de 64 retas sobre uma quártica não singular que comprovam a afirmação de que uma quártica não singular com número máximo de retas é única (a menos de isomorfismo sobre um corpo algebricamente fechado).

Vale ressaltar também que a contagem de retas depende do corpo k considerado.

Capítulo 2

Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Lembremos que a reta projetiva sobre \mathbb{C} , \mathbb{P}^1 , é formada por todos os subespaços de dimensão um de \mathbb{C}^2 . Além disso, $[a : b] \in \mathbb{P}^1$ denota o subespaço gerado por (a, b) . De fato, podemos escrever:

$$\mathbb{P}^1 = \{[c : 1] \mid c \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : 0]\}.$$

Usaremos a notação $\infty = [1 : 0]$ e $a = [a : 1]$, com $a \in \mathbb{C}$.

Seja $Aut(\mathbb{P}^1) = \{\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid \mathbf{T} \text{ é automorfismo}\}$. Lembremos que $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ é um automorfismo se existe $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ isomorfismo \mathbb{C} -linear tal que $\mathbf{T}([v]) = [T(v)]$.

A seguir estudaremos algumas propriedades dos elementos de $Aut(\mathbb{P}^1)$.

Lema 2.1. Seja $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que $\mathbf{T}(\infty) = \infty$, $\mathbf{T}(0) = 0$ e $\mathbf{T}(1) = 1$, então \mathbf{T} é o automorfismo identidade em \mathbb{P}^1 .

Demonstração. Seja $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$, com $\mathbf{T}(\infty) = \infty$, $\mathbf{T}(0) = 0$ e $\mathbf{T}(1) = 1$. Como $\mathbf{T}([X : Y]) = [\alpha X + \beta Y : \gamma X + \delta Y]$, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\infty) &= \infty \Leftrightarrow [\alpha : \gamma] = [1 : 0] \Leftrightarrow \alpha \neq 0, \gamma = 0. \\ \mathbf{T}(0) &= 0 \Leftrightarrow [\beta : \delta] = [0 : 1] \Leftrightarrow \beta = 0, \delta \neq 0. \\ \mathbf{T}(1) &= 1 \Leftrightarrow [\alpha + \beta : \gamma + \delta] = [1 : 1] \Leftrightarrow \alpha = \delta.\end{aligned}$$

Assim, $\mathbf{T}([X : Y]) = [\alpha X : \alpha Y] = [X : Y] = \mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}$. □

Proposição 2.2. Sejam $P_i = [a_i : b_i]$ ($i = 1, 2, 3$) pontos, dois a dois distintos, na reta projetiva. Então existe um único automorfismo $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $\phi(P_1) = \infty$, $\phi(P_2) = 0$, $\phi(P_3) = 1$.

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Demonstração. EXISTÊNCIA:

Considere $\mathbf{S} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ dada por $\mathbf{S}([X : Y]) = [\alpha X + \beta Y : \gamma X + \delta Y]$, sendo $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Note que

$$\mathbf{S}(P_1) = [\alpha a_1 + \beta b_1 : \gamma a_1 + \delta b_1] = [1 : 0],$$

$$\mathbf{S}(P_2) = [\alpha a_2 + \beta b_2 : \gamma a_2 + \delta b_2] = [0 : 1],$$

$$\mathbf{S}(P_3) = [\alpha a_3 + \beta b_3 : \gamma a_3 + \delta b_3] = [1 : 1].$$

De onde concluímos que

$$\alpha a_1 + \beta b_1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \gamma a_1 + \delta b_1 = 0, \quad (2.1)$$

$$\alpha a_2 + \beta b_2 = 0 \quad \text{e} \quad \gamma a_2 + \delta b_2 \neq 0 \quad (2.2)$$

$$\alpha a_3 + \beta b_3 = \gamma a_3 + \delta b_3 \quad (2.3)$$

Note que da equação (2.1) obtemos

$$0 = \gamma a_1 + \delta b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ -\delta & \gamma \end{vmatrix} \Leftrightarrow (-\delta, \gamma) = \mu(a_1, b_1), \text{ para algum } \mu \in \mathbb{C}^*.$$

Logo, $\delta = -\mu a_1$ e $\gamma = \mu b_1$. Da equação (2.2) obtemos:

$$0 = \alpha a_2 + \beta b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix} \Leftrightarrow (-\beta, \alpha) = \eta(a_2, b_2), \text{ para algum } \eta \in \mathbb{C}^*.$$

Implicando em $\beta = -\eta a_2$ e $\alpha = \eta b_2$. Substituindo estes resultados na equação (2.3) temos:

$$\begin{aligned} & \eta b_2 a_3 - \eta a_2 b_3 = \mu b_1 a_3 - \mu a_1 b_3 \\ \Leftrightarrow & \eta \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} \eta & \mu \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\eta, \mu) \text{ e } \left(\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \text{ são L.D.} \\ \Leftrightarrow & \eta = \lambda \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \text{ e } \mu = \lambda \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C}^*. \end{aligned}$$

Voltando para (2.1) e (2.2) temos os valores dos parâmetros

$$\begin{aligned}\alpha &= \eta b_2 = \lambda b_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, & \beta &= -\eta a_2 = -\lambda a_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \\ \gamma &= \mu b_1 = \lambda b_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, & \delta &= -\mu a_1 = -\lambda a_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} b_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} & -a_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ b_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & -a_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = A.$$

Note que

$$\begin{aligned}\det A &= (-a_1 b_1 + a_2 b_1) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.\end{aligned}$$

Pois os pontos P_i são todos dois a dois distintos. Logo, $\mathbf{S}([X : Y])$ é dada por:

$$\begin{aligned}&= \left[b_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} X - a_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} Y : b_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} X - a_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} Y \right] \\ &= \left[(b_2 X - a_2 Y) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} : (b_1 X - a_1 Y) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right]\end{aligned}$$

é tal que $\mathbf{S}(P_1) = \infty$, $\mathbf{S}(P_2) = 0$, $\mathbf{S}(P_3) = 1$.

UNICIDADE:

Seja $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ outro automorfismo tal que $\mathbf{T}(P_1) = \infty$, $\mathbf{T}(P_2) = 0$, $\mathbf{T}(P_3) = 1$. Note que $\mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ fixa ∞ , 0 , 1 . Do Lema acima temos $\mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{S} = \mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}$, e assim $\mathbf{T} = \mathbf{S}$. \square

Corolário 2.3. Sejam $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ subconjuntos de pontos dois a dois distintos em \mathbb{P}^1 . Então existe um único automorfismo $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que

$$\mathbf{T}(P_i) = Q_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Demonstração. Sabemos que existem únicos automorfismos $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ tais que

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1(P_1) = \infty \\ \mathbf{T}_1(P_2) = 0 \\ \mathbf{T}_1(P_3) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{T}_2(Q_1) = \infty \\ \mathbf{T}_2(Q_2) = 0 \\ \mathbf{T}_2(Q_3) = 1 \end{cases}$$

Como $Aut(\mathbb{P}^1)$ é um grupo, \mathbf{T}_2^{-1} e $\mathbf{T}_2^{-1} \circ \mathbf{T}_1 \in Aut(\mathbb{P}^1)$. Finalmente, note que $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2^{-1} \circ \mathbf{T}_1$ é o automorfismo procurado. \square

Lema 2.4. Seja $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$, com $\mathbf{T} \neq \mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}$. Então \mathbf{T} possui sempre pelo menos um ponto fixo e pode ter no máximo 2 pontos fixos. Além disso,

- (i) Se \mathbf{T} possui exatamente um ponto fixo, então existe $\mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}$ é dada por:

$$\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}([t : s]) = [t + s : s].$$

- (ii) Se \mathbf{T} possui exatamente dois pontos fixos, então existe $\mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}$ é dada por $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}([t : s]) = [at : s]$ com $a \neq 0, 1$ fixando 0 e ∞ .

Demonstração. Seja $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1) - \{\mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}\}$ dada por

$$\mathbf{T}[X : Y] = [\alpha X + \beta Y : \gamma X + \delta Y] \text{ com } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Note que $P = [X_0 : Y_0]$ é um ponto fixo de \mathbf{T} , se, e só se,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(P) = P &\Leftrightarrow [\alpha X_0 + \beta Y_0 : \gamma X_0 + \delta Y_0] = [X_0 : Y_0] \\ &\Leftrightarrow (\alpha X_0 + \beta Y_0)Y_0 = (\gamma X_0 + \delta Y_0)X_0 \\ &\Leftrightarrow \alpha X_0 Y_0 + \beta Y_0^2 = \gamma X_0^2 + \delta Y_0 X_0 \\ &\Leftrightarrow \gamma X_0^2 + (\delta - \alpha)X_0 Y_0 - \beta Y_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Assim P é ponto fixo de \mathbf{T} se, e somente se, $f(P) = 0$, sendo $f(X, Y) = \gamma X^2 + (\delta - \alpha)XY - \beta Y^2$. Como $\mathbf{T} \neq \mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}$ temos que $f(X, Y)$ é uma forma de grau 2 não nula e portanto se fatora como produto de formas lineares, possuindo sempre raiz e no máximo duas raízes.

- (i) Assuma que $P \in \mathbb{P}^1$ é o único ponto fixo de \mathbf{T} . Observe que existe $\mathbf{R} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que $\mathbf{R}(P) = \infty$.

Agora note que $\mathbf{R} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{R}^{-1} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ e que $\mathbf{R} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{R}^{-1}(\infty) = \infty$. Assim, vamos assumir que ∞ é o único ponto fixo de \mathbf{T} .

Logo

$$\mathbf{T}(\infty) = \infty \Leftrightarrow [\alpha : \gamma] = [1 : 0] \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ e } \gamma = 0.$$

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Implicando $\mathbf{T}([X : Y]) = [\alpha X + \beta Y : \delta Y]$.

Assim $P = [X_0 : Y_0]$ é ponto fixo de \mathbf{T} se, e somente se,

$$Y_0(\beta Y_0 + (\alpha - \delta)X_0) = 0.$$

Observe que $\beta \neq 0$, do contrário 0 seria outro ponto fixo de \mathbf{T} . Como ∞ é o único ponto fixo de \mathbf{T} , temos que $\beta \cdot 0 + (\alpha - \delta)1 = 0$ donde $0 \neq \alpha = \delta$. Logo $\mathbf{T}([X : Y]) = [\alpha X + \beta Y : \alpha Y] = [X + \beta_1 Y : Y]$ sendo $\beta_1 = \frac{\beta}{\alpha}$.

AFIRMAÇÃO: Existe $\mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}$ é definida por $[t : s] \mapsto [t + s : s]$.

Sejam $[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

que nos dá o seguinte sistema

$$\begin{cases} a = a + c \\ a\beta_1 + b = b + d \\ c\beta_1 + d = c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a\beta_1 = d \\ c\beta_1 = c \end{cases}$$

Tomemos $a = 1$ e $b = 1$, segue do sistema que $c = 0$ e $d = \beta_1$. Donde

$$\mathbf{S}[X : Y] = [X + Y : \beta_1 Y] \text{ e } \mathbf{S}^{-1}[X : Y] = [X - \frac{Y}{\beta_1} : \frac{Y}{\beta_1}].$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}([t : s]) &= \mathbf{S} \circ \mathbf{T}(t - \frac{s}{\beta_1} : \frac{s}{\beta_1}) \\ &= \mathbf{S}(t - \frac{s}{\beta_1} + s : \frac{s}{\beta_1}) \\ &= [t - \frac{s}{\beta_1} + s + \frac{s}{\beta_1} : \beta_1 \frac{s}{\beta_1}] \\ &= [t + s : s]. \end{aligned}$$

(ii) Seja $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ diferente da identidade em \mathbb{P}^1 . A menos de conjugação podemos assumir que os pontos fixos são exatamente 0 e ∞ .

Se $\mathbf{T}([X : Y]) = [\alpha X + \beta Y : \gamma X + \delta Y]$ então

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\infty) = \infty &\Leftrightarrow [\alpha : \gamma] = [1 : 0] \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ e } \gamma = 0, \\ \mathbf{T}(0) = 0 &\Leftrightarrow [\beta : \delta] = [0 : 1] \Leftrightarrow \beta = 0 \text{ e } \delta \neq 0. \end{aligned}$$

Assim $\mathbf{T}([X : Y]) = [\alpha X : \delta Y] = [aX : Y]$ com $a = \frac{\alpha}{\delta} \neq 0$ e $a \neq 1$ pois \mathbf{T} é diferente da identidade. □

Corolário 2.5. Se $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ é diferente da identidade de ordem finita, então \mathbf{T} possui exatamente dois pontos fixos diferentes.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que \mathbf{T} possui exatamente um ponto fixo. Logo existe $\mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}(t) = t + 1$ e $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}(\infty) = \infty$. Lembremos que $ord(\mathbf{T}) = ord(\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1})$, para todo $\mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$. Note que $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}(t) = t + k$, $\forall k \geq 1$ inteiro, de onde concluímos que $ord(\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1})$ é infinita. Como $ord(\mathbf{T}) < \infty$, então \mathbf{T} possui dois pontos fixos. □

2.1 O subgrupo Γ_C

Dado um subconjunto $C \subseteq \mathbb{P}^1$, podemos considerar o conjunto

$$\Gamma_C = \{\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C\}.$$

Note que Γ_C é subgrupo do grupo $Aut(\mathbb{P}^1)$. De fato,

- $\mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1} \in \Gamma_C$.

Além disso, para quaisquer $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \Gamma_C$, temos que:

- $\mathbf{T} \circ \mathbf{S}(C) = \mathbf{T}(C) = C$ e assim $\mathbf{T} \circ \mathbf{S} \in \Gamma_C$.
- $\mathbf{T}^{-1}(C) = C$ (pois $\mathbf{T}(C) = C$) e assim $\mathbf{T}^{-1} \in \Gamma_C$.

Mais ainda, se C for finito contendo d elementos verifica-se que

Lema 2.6. Γ_C é subgrupo de ordem finita de $Aut(\mathbb{P}^1)$ para $d \geq 3$. Em particular, se $d = 3$ então $\Gamma_C \cong S_3$.

Demonstração. Separemos em casos:

1- $d = 1$

Sejam $C = \{P\}$, $\Gamma_\infty = \{\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(\infty) = \infty\}$ e $\mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que $\mathbf{S}(P) = \infty$. Do isomorfismo de grupos $I_{\mathbf{S}} : \Gamma_C \rightarrow \Gamma_\infty$ definido por $I_{\mathbf{S}}(\mathbf{R}) = \mathbf{S} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^{-1}$ temos $|\Gamma_C| = |\Gamma_\infty|$. Por outro lado, $H = \{\mathbf{T}_b \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}_b([X : Y]) = [X + bY : Y], b \in \mathbb{C}\}$ é subgrupo de Γ_∞ . Note que $\phi : \mathbb{C} \rightarrow H$ dada por $b \mapsto \mathbf{T}_b$ é um isomorfismo. Como $|\mathbb{C}|$ é infinita, temos que $|\Gamma_C|$ é infinita.

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

2- $d = 2$

Sejam $C = \{P, Q\}$, $\Gamma_{\infty,0} = \{\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(\{\infty, 0\}) = \{\infty, 0\}\}$ e $\mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que $\mathbf{S}(P) = \infty$ e $\mathbf{S}(Q) = 0$. Do isomorfismo de grupos $I_{\mathbf{S}} : \Gamma_C \rightarrow \Gamma_{\infty,0}$ definido por $I_{\mathbf{S}}(\mathbf{R}) = \mathbf{S} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^{-1}$ temos $|\Gamma_C| = |\Gamma_{\infty,0}|$. Por outro lado, $H = \{\mathbf{T}_a \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}_a([X : Y]) = [aX : Y], a \in \mathbb{C}^*\}$ é subgrupo de $\Gamma_{\infty,0}$. E como $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow H$ dada por $a \mapsto \mathbf{T}_a$ é um isomorfismo e $|\mathbb{C}^*|$ é infinita, temos que $|\Gamma_C|$ é infinita.

3- $d \geq 3$

Se fixarmos três pontos de $C \subseteq \mathbb{P}^1$, $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ fica determinado pela escolha das imagens destes três pontos. Esta escolha pode ser feita de $6 \binom{d}{3}$ maneiras, pois estamos contabilizando a permutação dos três pontos. Logo $|\Gamma_d| \leq 6 \binom{d}{3}$, que é finito.

Agora vejamos que $\Gamma_C \cong S_3$, se $\#C = 3$. Os automorfismos de \mathbb{P}^1 tais que $\mathbf{T}(C) = C$ são dadas por \mathbf{T}_σ , com $\sigma \in S_3$ tal que $\mathbf{T}_\sigma(P_i) = P_{\sigma(i)}$ conforme a proposição 2.1. Explicitamente:

\mathbf{T}_e	$\mathbf{T}_{(23)}$	$\mathbf{T}_{(13)}$	$\mathbf{T}_{(12)}$	$\mathbf{T}_{(123)}$	$\mathbf{T}_{(132)}$
$P_1 \rightarrow P_1$	$P_1 \rightarrow P_1$	$P_1 \rightarrow P_3$	$P_1 \rightarrow P_2$	$P_1 \rightarrow P_2$	$P_1 \rightarrow P_3$
$P_2 \rightarrow P_2$	$P_2 \rightarrow P_3$	$P_2 \rightarrow P_2$	$P_2 \rightarrow P_1$	$P_2 \rightarrow P_3$	$P_2 \rightarrow P_1$
$P_3 \rightarrow P_3$	$P_3 \rightarrow P_2$	$P_3 \rightarrow P_1$	$P_3 \rightarrow P_3$	$P_3 \rightarrow P_1$	$P_3 \rightarrow P_2$

Daí a ordem de Γ_C é seis. Agora note que $\mathbf{T}_{(23)} \circ \mathbf{T}_{(13)}(P_1) = \mathbf{T}_{(23)}(P_3) = P_2 \neq P_3 = \mathbf{T}_{(13)}(P_1) = \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_2(P_1)$ donde Γ_C não é abeliano. Pela classificação dos grupos de ordem seis (ver corolário 1, p. 151 em [3]) segue que Γ_C é isomorfo a S_3 . \square

2.2 Razão cruzada

Podemos nos perguntar o seguinte:

Existe um automorfismo $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $\mathbf{T}(\infty) = \infty$, $\mathbf{T}(0) = 0$, $\mathbf{T}(1) = 1$ e $\mathbf{T}(a) = b$, com $a \neq b$?

A resposta é não! Visto que a função identidade é o único automorfismo que fixa $\infty, 0, 1$, e assim $\mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}(a) = a \neq b$. Observe que se $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ e $\mathbf{T}(P) = \infty$, então $\forall Q \neq P$, $\mathbf{T}(Q) = [\lambda : 1]$ com $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definição 2.1 (Razão cruzada). Dados P_1, P_2, P_3, P_4 pontos dois a dois distintos em \mathbb{P}^1 , a razão cruzada destes quatro pontos é denotada por $[P_1, P_2, P_3, P_4]$ e definida como

o único número complexo tal que

$$\mathbf{T}(P_4) = [[P_1, P_2, P_3, P_4] : 1],$$

com $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ determinada por $\mathbf{T}(P_1) = \infty$, $\mathbf{T}(P_2) = 0$ e $\mathbf{T}(P_3) = 1$.

Teorema 2.7. *Sejam $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ subconjuntos de pontos dois a dois distintos em \mathbb{P}^1 . Então existe $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ automorfismo tal que $\mathbf{T}(P_i) = Q_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ se, e somente se,*

$$[P_1, P_2, P_3, P_4] = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4].$$

Demonstração. Suponha que exista $\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que $\mathbf{T}(P_i) = Q_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Sabemos que existem únicos $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tais que $\mathbf{T}_1(P_1) = \infty$, $\mathbf{T}_1(P_2) = 0$, $\mathbf{T}_1(P_3) = 1$ e $\mathbf{T}_1(P_4) = [P_1, P_2, P_3, P_4]$, $\mathbf{T}_2(Q_1) = \infty$, $\mathbf{T}_2(Q_2) = 0$, $\mathbf{T}_2(Q_3) = 1$ e $\mathbf{T}_2(Q_4) = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4]$. Assim, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2^{-1} \circ \mathbf{T}_1$ pois ambas levam P_i em Q_i , $i = 1, 2, 3$. Por outro lado temos $\mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T} = \mathbf{T}_1$, donde $[P_1, P_2, P_3, P_4] = \mathbf{T}_1(P_4) = \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}(P_4) = \mathbf{T}_2(Q_4) = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4]$. Reciprocamente, suponha $[P_1, P_2, P_3, P_4] = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4]$. Sabemos que existem únicos $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tais que $\mathbf{T}_1(P_1) = \infty$, $\mathbf{T}_1(P_2) = 0$, $\mathbf{T}_1(P_3) = 1$ e $\mathbf{T}_1(P_4) = [P_1, P_2, P_3, P_4]$, $\mathbf{T}_2(Q_1) = \infty$, $\mathbf{T}_2(Q_2) = 0$, $\mathbf{T}_2(Q_3) = 1$ e $\mathbf{T}_2(Q_4) = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4]$. Agora, como $\mathbf{T}_1(P_4) = \mathbf{T}_2(Q_4)$ temos $\mathbf{T}_2^{-1} \circ \mathbf{T}_1(P_4) = Q_4$, além disso $\mathbf{T}_2^{-1} \circ \mathbf{T}_1(P_1) = \mathbf{T}_2^{-1}(\infty) = Q_1$, $\mathbf{T}_2^{-1} \circ \mathbf{T}_1(P_2) = \mathbf{T}_2^{-1}(0) = Q_2$, e $\mathbf{T}_2^{-1} \circ \mathbf{T}_1(P_3) = \mathbf{T}_2^{-1}(1) = Q_3$. Logo, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2^{-1} \circ \mathbf{T}_1$ é o automorfismo de \mathbb{P}^1 tal que $\mathbf{T}(P_i) = Q_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. □

Assim a Razão Cruzada de quatro pontos $P_i = [a_i : b_i]$, ($i = 1, 2, 3, 4$), dois a dois distintos, é dada por:

$$[P_1, P_2, P_3, P_4] = \frac{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Para cada $\sigma \in S_4$ definimos $\sigma[P_1, P_2, P_3, P_4] = [P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)}, P_{\sigma(4)}]$.

Lema 2.8. *Sejam P_1, P_2, P_3, P_4 , dois a dois distintos em \mathbb{P}^1 e K o grupo de Klein em S_4 . Então*

$$\sigma[P_1, P_2, P_3, P_4] = [P_1, P_2, P_3, P_4], \forall \sigma \in K.$$

Demonstração. Concretamente, queremos provar que

$$[P_1, P_2, P_3, P_4] = [P_2, P_1, P_4, P_3] = [P_3, P_4, P_1, P_2] = [P_4, P_3, P_2, P_1].$$

De fato

$$\begin{aligned} [P_2, P_1, P_4, P_3] &= \frac{\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = [P_1, P_2, P_3, P_4]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [P_3, P_4, P_1, P_2] &= \frac{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}} = \frac{(-1) \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (-1) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(-1) \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} (-1) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \\ &= [P_1, P_2, P_3, P_4]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [P_4, P_3, P_2, P_1] &= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}} = \frac{(-1) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} (-1) \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{(-1) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (-1) \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} \\ &= [P_1, P_2, P_3, P_4]. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.9. *Sejam P_1, P_2, P_3, P_4 , dois a dois distintos em \mathbb{P}^1 . Assuma que $[P_1, P_2, P_3, P_4] = \lambda$, e seja $\Lambda = \{\sigma[P_1, P_2, P_3, P_4] \mid \sigma \in S_4\}$. Então*

$$\Lambda = \left\{ \lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\}.$$

Demonstração. Note que o grupo de Klein K é subgrupo normal de S_4 , e como $|K| = 4$ e $|S_4| = 24$ temos, por Lagrange, que o grupo $\frac{S_4}{K}$ tem ordem 6.

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Assim, $\frac{S_4}{K} = \{\bar{e}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5\}$ com $\#x_i = 4, i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Segue da definição de grupo quociente que $\bar{e} = K$ e do Lema 2.8 que $\sigma[P_1, P_2, P_3, P_4] = \lambda$, para todo $\sigma \in K$.

Agora vamos estudar $\sigma[P_1, P_2, P_3, P_4]$, se $\sigma \in S_4 - K = \bigcup_{i=1}^5 \bar{x}_i$. Lembre $\bar{x}_i = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma = kx_i, \text{ com } k \in K\}$ para $1 \leq i \leq 5$.

- Se $x_1 = (12) \in S_4$ então $(12)[P_1, P_2, P_3, P_4] = [P_2, P_1, P_3, P_4]$. Observe que dados $A, B, C, D \in \mathbb{P}_1$, dois a dois distintos.

Então $[A, B, C, D][B, A, C, D] = 1$. De fato,

$$\begin{aligned} [A, B, C, D][B, A, C, D] &= \frac{\begin{vmatrix} a_D & b_D \\ a_B & b_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_C & b_C \\ a_A & b_A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_D & b_D \\ a_A & b_A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_C & b_C \\ a_B & b_B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_D & b_D \\ a_A & b_A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_C & b_C \\ a_B & b_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_D & b_D \\ a_B & b_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_C & b_C \\ a_A & b_A \end{vmatrix}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Daí

$$[P_1, P_2, P_3, P_4][P_2, P_1, P_3, P_4] = 1 \quad (**)$$

Assim, aplicando os elementos do grupo de Klein obtemos os outros elementos em \bar{x}_1 .

Portanto

$$\begin{aligned} [P_2, P_1, P_3, P_4] &= [P_1, P_2, P_4, P_3] = [P_3, P_4, P_2, P_1] \\ &= [P_4, P_3, P_1, P_2] = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

- Se $x_2 = (14) \in S_4$ então $(14)[P_1, P_2, P_3, P_4] = [P_4, P_2, P_3, P_1]$.

Note que $[P_1, P_2, P_3, P_4] + [P_4, P_2, P_3, P_1] = 1$. De fato

$$\begin{aligned} [P_1, P_2, P_3, P_4] + [P_4, P_2, P_3, P_1] &= \\ &= \frac{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(a_4b_2 - a_2b_1)(a_3b_1 - a_1b_3) - (a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_4 - a_4b_3)}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a_4 b_1 (a_3 b_2 - a_2 b_3) - a_1 b_4 (a_3 b_2 - a_2 b_3)}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{(a_4 b_1 - a_1 b_4)(a_3 b_2 - a_2 b_3)}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = 1
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 [P_4, P_2, P_3, P_1] &= [P_2, P_4, P_1, P_3] = [P_3, P_1, P_4, P_2] \\
 &= [P_1, P_3, P_2, P_4] = 1 - \lambda.
 \end{aligned}$$

• Se $x_3 = (124) \in S_4$, como $[P_4, P_2, P_3, P_1] = 1 - \lambda$, segue de (**) que $[P_2, P_4, P_3, P_1] = \frac{1}{1-\lambda}$. Aplicando os elementos do grupo de Klein obtemos

$$\begin{aligned}
 [P_2, P_4, P_3, P_1] &= [P_4, P_2, P_1, P_3] = [P_3, P_1, P_2, P_4] \\
 &= [P_1, P_3, P_4, P_2] = \frac{1}{1-\lambda}.
 \end{aligned}$$

• Se $x_4 = (13) \in S_4$ daí $(13)[P_1, P_2, P_3, P_4] = [P_3, P_2, P_1, P_4] = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$. Note que deve ocorrer

$$[P_3, P_2, P_1, P_4] = -[P_1, P_2, P_3, P_4][P_2, P_4, P_3, P_1]$$

De fato

$$\frac{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Logo, para os elementos em $\overline{x_4}$, temos:

$$\begin{aligned}
 [P_3, P_2, P_1, P_4] &= [P_2, P_3, P_4, P_1] = [P_1, P_4, P_3, P_2] \\
 &= [P_4, P_1, P_2, P_3] = \frac{\lambda}{\lambda-1}.
 \end{aligned}$$

• Se $x_5 = (123) \in S_4$. Segue novamente de (**) que $[P_2, P_3, P_1, P_4] = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Assim, se $x_5 = (123)$, para os elementos em $\overline{x_5}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 [P_2, P_3, P_1, P_4] &= [P_3, P_2, P_4, P_1] = [P_1, P_4, P_2, P_3] \\
 &= [P_4, P_1, P_3, P_2] = \frac{\lambda-1}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

□

No teorema a seguir estudaremos os subgrupos Γ_C , com $\sharp C = 4$.

Teorema 2.10. *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^1$ tal que $\sharp C = 4$. Então Γ_C é um grupo isomorfo a*

- Grupo de Klein K , ou

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

- Grupo Dihedral D_4 , ou
- Grupo A_4 das permutações pares em S_4 .

Demonstração. Note que $\mathbf{T}_e = \mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1} \in \Gamma_C$ pois Γ_C é subgrupo. Assuma que $C = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.

Seja $\lambda = [P_1, P_2, P_3, P_4]$. Lembremos que o lema 2.8 nos garante que:

$$\lambda = [P_1, P_2, P_3, P_4] = [P_2, P_1, P_4, P_3] = [P_3, P_4, P_1, P_2] = [P_4, P_3, P_2, P_1].$$

Além disso, mostramos no lema 2.7 que existe $\mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que

$$\mathbf{S}(P_i) = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \iff [P_1, P_2, P_3, P_4] = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4].$$

A seguir, para cada $\sigma \in S_4$ tal que $\sigma[P_1, P_2, P_3, P_4] = [P_1, P_2, P_3, P_4]$, denotaremos por $\mathbf{T}_\sigma : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ o automorfismo dado por $\mathbf{T}_\sigma(P_i) = P_{\sigma(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Assim para cada $\sigma \in K$ obtemos $\mathbf{T}_\sigma \in Aut(\mathbb{P}^1)$. Por simplicidade usaremos a notação $\mathbf{T}_0 = \mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}$, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_{(12)(34)}$, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_{(13)(24)}$ e $\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_{(14)(23)}$.

Verifica-se que $H_0 = \{\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3\}$ é um subgrupo de Γ_C e $\mathbf{T}_i^2 = \mathbf{T}_0$, $i = 1, 2, 3$. Portanto, $H_0 \cong K$. Pois a menos de isomorfismos os únicos grupos de ordem 4 são o grupo de Klein K ou o grupo cíclico \mathbb{Z}_4 . Temos assim $H_0 \leq \Gamma_C$. Logo $H_0 = \Gamma_C$ ou $H_0 \subsetneq \Gamma_C$.

- Se $H_0 = \Gamma_C$, então $\Gamma_C \cong K$.
- Se $H_0 \subsetneq \Gamma_C$, então existe $\mathbf{S} \in \Gamma_C - H_0$, tal que $\mathbf{S}(P_i) = P_{\sigma(i)}$, para algum $\sigma \in S_4 - K$. Daí tem-se que

$$\lambda = [P_1, P_2, P_3, P_4] = [P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)}, P_{\sigma(4)}].$$

Por outro lado, sabemos que se $\lambda = [P_1, P_2, P_3, P_4]$, então

$$\begin{aligned} & \left\{ [P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)}, P_{\sigma(4)}] \mid \sigma \in S_4 \right\} \\ &= \left\{ \lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Observe que $\Gamma_C \cong K$ é equivalente ao fato de que os seis números acima são distintos. Assim analisemos os seguintes casos:

$$\boxed{\text{Caso 1}} \quad \lambda = \frac{1}{\lambda}$$

Temos que $\lambda = 1$ ou -1 , mas $\lambda = 1$ é descartado visto que automorfismos são bijeções

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

e $P_3 \mapsto 1$. Desta forma temos

$$\left\{ \lambda = -1, \frac{1}{\lambda} = -1, 1 - \lambda = 2, \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{2}, \frac{\lambda}{\lambda-1} = \frac{1}{2}, \frac{\lambda-1}{\lambda} = 2 \right\}.$$

Sabemos que $\tau[P_1, P_2, P_3, P_4] = \frac{1}{\lambda}$ se $\tau \in \{(12), (34), (1324), (1432)\}$.

Assim, considere $\mathbf{S}_1 = \mathbf{T}_{(12)}$, $\mathbf{S}_2 = \mathbf{T}_{(34)}$, $\mathbf{S}_3 = \mathbf{T}_{(1324)}$ e $\mathbf{S}_4 = \mathbf{T}_{(1423)}$. Seja

$$H_1 = \{\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4\}.$$

Verifica-se que $H_1 = \langle \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3 \rangle$ com $\mathbf{S}_1^2 = e$, $\mathbf{S}_3^4 = e$ e $\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_3^{-1}$. Logo, H_1 é um subgrupo de Γ_C isomorfo a D_4 .

$$\boxed{\text{Caso 2}} \quad \lambda = 1 - \lambda$$

Temos que $\lambda = \frac{1}{2}$ e assim

$$\left\{ \lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{\lambda} = 2, 1 - \lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{1-\lambda} = 2, \frac{\lambda}{\lambda-1} = -1, \frac{\lambda-1}{\lambda} = -1 \right\}.$$

Tendo em consideração que $\omega[P_1, P_2, P_3, P_4] = 1 - \lambda$ se $\omega \in \{(14), (23), (1342), (1234)\}$.

Considere $\mathbf{S}_1 = \mathbf{T}_{(14)}$, $\mathbf{S}_2 = \mathbf{T}_{(1234)}$, $\mathbf{S}_3 = \mathbf{T}_{(1342)}$ e $\mathbf{S}_4 = \mathbf{T}_{(23)}$. Seja

$$H_2 = \{\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4\}.$$

Verifica-se que $H_2 = \langle \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3 \rangle$ com $\mathbf{S}_1^2 = e$, $\mathbf{S}_2^4 = e$ e $\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2^{-1}$. Logo, H_2 é um subgrupo de Γ_C isomorfo a D_4 .

$$\boxed{\text{Caso 3}} \quad \lambda = \frac{1}{1-\lambda}$$

Temos que $\lambda = \omega$ ou $\bar{\omega}$ onde $\omega = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$. Tomando $\lambda = \omega$ temos

$$\left\{ \lambda = \omega, \frac{1}{\lambda} = \bar{\omega}, 1 - \lambda = \bar{\omega}, \frac{1}{1-\lambda} = \omega, \frac{\lambda}{\lambda-1} = \bar{\omega}, \frac{\lambda-1}{\lambda} = \omega \right\}.$$

Neste caso $\lambda = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ e lembrando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\lambda} &= [P_2, P_4, P_3, P_1] = [P_4, P_2, P_1, P_3] \\ &= [P_3, P_1, P_2, P_4] = [P_1, P_3, P_4, P_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \lambda &= [P_2, P_3, P_1, P_4] = [P_3, P_2, P_4, P_1] \\ &= [P_1, P_4, P_2, P_3] = [P_4, P_1, P_3, P_2] \end{aligned}$$

Assim, denominemos por $\mathbf{S}_1 = \mathbf{T}_{(124)}$, $\mathbf{S}_2 = \mathbf{T}_{(143)}$, $\mathbf{S}_3 = \mathbf{T}_{(132)}$, $\mathbf{S}_4 = \mathbf{T}_{(234)}$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{T}_{(123)}$, $\mathbf{R}_2 = \mathbf{T}_{(134)}$, $\mathbf{R}_3 = \mathbf{T}_{(243)}$ e $\mathbf{R}_4 = \mathbf{T}_{(142)}$.

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Seja

$$H_4 = \{\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4\}.$$

Verifica-se que H_4 é um subgrupo de Γ_C de ordem 12 que não possui elemento de ordem 6.

Logo, $H_4 \simeq A_4$. Observe também que se tomarmos $\lambda = \bar{\alpha}$ obtemos o mesmo resultado, pela simetria no calculo dos valores das razões cruzadas.

$$\boxed{\text{Caso 4}} \quad \lambda = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

Temos que $\lambda = 0$ ou 2, mas $\lambda = 0$ é descartado visto que todo automorfismo é uma bijeção e P_2 é enviado em 0. Assim

$$\left\{ \lambda = 2, \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}, 1 - \lambda = -1, \frac{1}{1-\lambda} = -1, \frac{\lambda}{\lambda-1} = 2, \frac{\lambda-1}{\lambda} = \frac{1}{2} \right\}.$$

Lembremos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda-1} &= [P_3, P_2, P_1, P_4] = [P_2, P_3, P_4, P_1] \\ &= [P_1, P_4, P_3, P_2] = [P_4, P_1, P_2, P_3]. \end{aligned}$$

Assim, denominemos por $\mathbf{S}_1 = \mathbf{T}_{(13)}$, $\mathbf{S}_2 = \mathbf{T}_{(1432)}$, $\mathbf{S}_3 = \mathbf{T}_{(24)}$ e $\mathbf{S}_4 = \mathbf{T}_{(1234)}$.

Seja

$$H_6 = \{\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4\}.$$

Verifica-se que $H_1 = \langle \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3 \rangle$ com $\mathbf{S}_1^2 = e$, $\mathbf{S}_3^4 = e$ e $\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_3^{-1}$. Logo, $H_6 \leq \Gamma_C$ e $H_6 \simeq D_4$.

$$\boxed{\text{Caso 5}} \quad \lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

Temos que $\lambda = \omega$ ou $\bar{\omega}$, onde $\omega = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$. Neste caso, verificamos que $H_5 \simeq A_4$ tanto para $\lambda = \omega$ ou $\lambda = \bar{\omega}$, como no caso 3.

□

2.3 Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Dado G um subgrupo finito de $Aut(\mathbb{P}^1)$, vamos procurar a estratificação por órbitas nos pontos fixos dos elementos de G . Antes, enunciamos o

Teorema 2.11 (Teorema de Classificação de Klein). *Um subgrupo finito de $PGL_2(\mathbb{C})$ é isomorfo a um dos seguintes grupos:*

- O grupo cíclico C
- O grupo Dihedral D_n de ordem $2n$

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

- O grupo A_4 de ordem 12
- O grupo S_4 de ordem 24
- O grupo A_5 de ordem 60

A menos de conjugação, todos estes grupos ocorrem como subgrupos de $PGL_2(\mathbb{C}) = Aut(\mathbb{P}^1)$ exatamente uma vez.

Seja G um subgrupo finito de $Aut(\mathbb{P}^1)$ com $|G| \geq 2$. Definamos por \mathcal{P}_G o conjunto finito

$$\mathcal{P}_G = \{P \in \mathbb{P}^1 \mid \text{existe } \mathbf{T} \in G^*; \mathbf{T}(P) = P\}.$$

Proposição 2.12. Seja G um subgrupo finito de $Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que $|G| \geq 2$. Para $P \in \mathcal{P}_G$ consideremos

$$G_P = \{\mathbf{T} \in G \mid \mathbf{T}(P) = P\} \text{ e } \mathcal{O}_P = \{\mathbf{T}(P) \mid \mathbf{T} \in G\}.$$

Verifica-se:

- (i) Se $P \in \mathcal{P}_G$, então $\mathbf{T}(P) \in \mathcal{P}_G$, para todo $\mathbf{T} \in G$.
- (ii) A função

$$\begin{aligned} \Omega_G : G \times \mathcal{P}_G &\rightarrow \mathcal{P}_G \\ (\mathbf{T}, P) &\mapsto \Omega_G(\mathbf{T}, P) = \mathbf{T}(P) \end{aligned}$$

define uma ação pela esquerda de G em \mathcal{P}_G .

- (iii) Se $Q, R \in \mathcal{O}_P$ então os estabilizadores G_Q e G_R são grupos conjugados. Em particular $|G_Q| = |G_R|$.
- (iv) Se H for um subgrupo de $Aut(\mathbb{P}^1)$ isomorfo a G . Sejam \mathcal{P}_G e \mathcal{P}_H os subconjuntos de \mathbb{P}^1 formados pelos pontos fixos dos elementos em G^* e H^* , respectivamente. Considere a decomposição de \mathcal{P}_G e \mathcal{P}_H dada pelas órbitas a partir das ações de Ω_G e Ω_H , respectivamente, a saber:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_G &= \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_k \text{ e} \\ \mathcal{P}_H &= \mathcal{O}'_1 \cup \mathcal{O}'_2 \cup \cdots \cup \mathcal{O}'_l. \end{aligned}$$

Então $k = l$ e existem $\mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ e $\sigma \in S_k$ permutação tais que $\mathcal{O}'_i = \mathbf{S}(\mathcal{O}_{\sigma(i)})$ para $i = 1, \dots, k$.

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Demonstração. (i) De fato, se $P \in \mathcal{P}_G$, então existe $\mathbf{T} \in G^*$ tal que $\mathbf{T}(P) = P$. Note que $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1} \in G^*$ e $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{S}(P)) = \mathbf{S}(P)$.

(ii) Verifiquemos as condições de ação de grupo:

- $\Omega_G(\mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}, P) = \mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}(P) = P$ para todo $P \in \mathcal{P}_G$.
- $\Omega_G(\mathbf{T}, \Omega_G(\mathbf{S}, P)) = \Omega_G(\mathbf{T}, \mathbf{S}(P)) = \mathbf{T}(\mathbf{S}(P)) = (\mathbf{T} \circ \mathbf{S})(P) = \Omega_G(\mathbf{T} \circ \mathbf{S}, P)$ para todo $P \in \mathcal{P}_G$ e $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in G$.

(iii) Se $Q, R \in \mathcal{O}_P$ segue que $Q \sim R$, logo $R = \mathbf{T}_0(Q)$ para algum $\mathbf{T}_0 \in G^*$. Defina a conjugação

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{T}_0} : Aut(\mathbb{P}^1) &\rightarrow Aut(\mathbb{P}^1) \\ \mathbf{T} &\mapsto \mathbf{T}_0 \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T}_0^{-1} \end{aligned}$$

Como $I_{\mathbf{T}_0}$ é isomorfismo de grupos e $I_{\mathbf{T}_0}(G_Q) = G_R$, concluímos que G_Q e G_R são conjugados.

(iv) Como G e H são subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$ isomorfos, pelo Teorema 2.11 que existe $\mathbf{S} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ tal que o automorfismo interno $I_{\mathbf{S}}$ induz um isomorfismo de G em H .

AFIRMAÇÃO: $\mathcal{P}_H = \mathbf{S}(\mathcal{P}_G)$.

Dado $Q \in \mathcal{P}_G$, sabemos que existe $\mathbf{T} \in G^*$ tal que $\mathbf{T}(Q) = Q$. Agora $I_{\mathbf{S}}(\mathbf{T}) \in H^*$ e $I_{\mathbf{S}}(\mathbf{T})(\mathbf{S}(Q)) = \mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{S}(Q)) = \mathbf{S}(Q)$. Por outro lado, se $R \in \mathcal{P}_H$, existe $\mathbf{R} \in H^*$ tal que $\mathbf{R}(R) = R$ e $I_{\mathbf{S}^{-1}}(\mathbf{R}) \in G^*$ e $I_{\mathbf{S}^{-1}}(\mathbf{R})(\mathbf{S}^{-1}(R)) = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{S}(\mathbf{S}(R)) = \mathbf{S}^{-1}(R)$.

AFIRMAÇÃO: $\mathbf{S}(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}'_{\mathbf{S}(P)}$ para todo $P \in \mathcal{P}_G$.

Seja $R \in \mathbf{S}(\mathcal{O}_P)$ então existe $\mathbf{T} \in G^*$ tal que $\mathbf{S}(\mathbf{T}(P)) = R$. Mas, observe que $\mathbf{S}(\mathbf{T}(P)) = \mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{S}(P))$ e $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1} \in H^*$, e assim $R \in \mathcal{O}'_{\mathbf{S}(P)}$. Reciprocamente, se $R \in \mathcal{O}'_{\mathbf{S}(P)}$, então existe $\mathbf{R} \in H^*$ tal que $\mathbf{R}(\mathbf{S}(P)) = R$. Note que $\mathbf{R}(\mathbf{S}(P)) = \mathbf{S}(\mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{S}(P))$ e $\mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{S} \in G^*$, logo $\mathbf{S}^{-1}(R) \in \mathcal{O}_P$. Portanto, $R \in \mathbf{S}(\mathcal{O}_P)$.

Desta forma, temos

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{O}'_1 \cup \dots \cup \mathcal{O}'_l = \mathbf{S}(\mathcal{O}_1) \cup \dots \cup \mathbf{S}(\mathcal{O}_k) = \mathcal{O}'_{\mathbf{S}(P_1)} \cup \dots \cup \mathcal{O}'_{\mathbf{S}(P_k)}.$$

Como a decomposição em órbitas é única e $\mathcal{O}'_Q \cap \mathcal{O}'_R = \emptyset$ ou $\mathcal{O}'_Q = \mathcal{O}'_R$ para todo $Q, R \in \mathcal{P}_H$, segue que $k = l$ e para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existe um único $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\mathcal{O}'_i = \mathcal{O}'_{\mathbf{S}(P_i)} = \mathbf{S}(\mathcal{O}_j)$.

□

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Agora, dado G um subgrupo $Aut(\mathbb{P}^1)$ com ordem $N > 1$, consideremos o seguinte conjunto

$$\Theta = \{(P, \mathbf{T}) \in \mathbb{P}^1 \times G \mid \mathbf{T}(P) = P \text{ e } \mathbf{T} \neq \mathbf{Id}_{\mathbb{P}^1}\}.$$

Queremos saber a quantidade de elementos do conjunto Θ . Para isto, vamos contar de duas maneiras diferentes para obter uma equação que nos dê informações a respeito de N (este método foi utilizado por M. Artin [11]).

Por um lado, o corolário 2.5 assegura que todo automorfismo em G^* possui exatamente dois pontos fixos, assim temos que

$$\sharp(\Theta) = 2 \cdot \sharp G^* = 2(N - 1). \quad (2.5)$$

Por outro lado, a partição de \mathcal{P}_G pelas órbitas determinadas pela ação Ω_G nos fornece outra equação: Seja $\mathcal{P}_G = \mathcal{O}_1 \cup \dots \cup \mathcal{O}_k$ com $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, sendo $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{P_i}$, $i = 1, \dots, k$. Pelo item (iii) da proposição anterior $G_i = G_{P_i}$ e G_P são isomorfos para todo $P \in \mathcal{O}_i$. A ordem do estabilizador G_P independe da escolha $P \in \mathcal{O}_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, e assim $|G_i| = |G_P| = \eta_i \geq 2$ para $1 \leq i \leq k$. Além disso, como G é finito, temos $\sharp(\mathcal{O}_i) = (G : G_i) = \frac{N}{\eta_i}$ para $i = 1, \dots, k$. Seja $\pi_1 : \Theta \rightarrow \mathbb{P}^1$ a projeção da primeira coordenada. Note que a imagem de π_1 é \mathcal{P}_G , e dado $P \in \mathbb{P}^1$ temos

$$\pi_1^{-1}(P) = \{(P, \mathbf{T}) \in \mathbb{P}^1 \times G^* \mid \mathbf{T}(P) = P\}.$$

Assim, se $P \in \mathcal{P}_G$, $\pi_1^{-1}(P) = \{P\} \times G_P^*$. Logo, sendo $G_P^* = G_P^*$,

$$\begin{aligned} \sharp(\Theta) &= \sum_{P \in \mathcal{P}_G} \sharp(\pi_1^{-1}(P)) = \sum_{P \in \mathcal{P}_G} \sharp(G_P^*) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{O}_1} \sharp(G_P^*) + \dots + \sum_{P \in \mathcal{O}_1} \sharp(G_P^*) \\ &= \sum_{i=1}^k \sharp(\mathcal{O}_i) \sharp(G_i^*) = \sum_{i=1}^k \frac{N}{\eta_i} (\eta_i - 1) \\ &= N \left(k - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\eta_i} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Unindo as informações sobre $\sharp(\Theta)$ obtidas em (2.5) e (2.6) temos

$$2(N - 1) = N \left(k - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\eta_i} \right)$$

E assim

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{\eta_i} = k - 2 + \frac{2}{N} \quad \text{com} \quad N, \eta_i \geq 2, \forall i \quad (2.7)$$

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Na proposição a seguir vamos estudar as possibilidades dos valores que satisfazem a equação (2.7).

Proposição 2.13. Com as notações acima, verifica-se que $k \in \{2, 3\}$. Além disso

1. $k = 2$ se, e somente se, G é um grupo cíclico.
2. Se $k = 3$ e $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \eta_3$, então tem-se
 - ou $\eta_1 = \eta_2 = 2$ e $\eta_3 = m \geq 2$, com $|G| = 2m$ e $G \simeq D_m$,
 - ou $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = \eta_3 = 3$, com $|G| = 12$ e $G \simeq A_4$,
 - ou $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 3$ e $\eta_3 = 4$, com $|G| = 24$ e $G \simeq S_4$,
 - ou $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 3$ e $\eta_3 = 5$, com $|G| = 60$ e $G \simeq A_5$.

Demonstração. Note que se $k = 1$, obteríamos na equação (2.7)

$$\frac{1}{\eta_i} = -1 + \frac{2}{N} \leq 0,$$

o que é um absurdo. Além disso, desde que $\eta_i \geq 2$, temos $\frac{1}{\eta_i} \leq \frac{1}{2}$ para todo $i = 1, \dots, k$, e assim $\sum_{i=1}^k \frac{1}{\eta_i} \leq \frac{k}{2}$. Voltando para a equação (2.7) temos

$$\begin{aligned} k - 2 + \frac{2}{N} &\leq \frac{k}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{k}{2} - 2 + \frac{2}{N} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{N} &\leq 2 - \frac{k}{2} \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{N} &\leq 2 - \frac{k}{2} = \frac{4-k}{2} \\ \Rightarrow 0 &< \frac{4-k}{2} \\ \Rightarrow k &< 4 \end{aligned}$$

Logo, $k \in \{2, 3\}$. Analisemos estes casos:

- Caso $k = 2$.

Fazendo $k = 2$ em (2.7) temos:

$$\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} = \frac{2}{N},$$

com $N, \eta_i \geq 2$ e como $|G_i|$ divide $|G|$, existem $r, s \in \mathbb{Z}_+$ tais que $N = r\eta_1 = s\eta_2$. Daí

$$\frac{r}{N} + \frac{s}{N} = \frac{2}{N} \Rightarrow r = s = 1.$$

Assim $\eta_i = N$, $i = 1, 2$ e $\mathcal{P}_G = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ com $\sharp(\mathcal{O}_i) = 1$, $i = 1, 2$. Logo os elementos de G tem os mesmos pontos fixos, e a menos de conjugação podemos escolher $\infty = [1 : 0], 0 = [0 : 1]$ como estes pontos fixos. Seja $\mathbf{T}_\xi \in G$ de ordem

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

m , então \mathbf{T}_ξ é dado por $\mathbf{T}_\xi([X : Y]) = [\xi X : Y]$ onde ξ é raiz m -ésima da unidade. A função

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ \mathbf{T}_\xi &\mapsto \xi \end{aligned}$$

é um homomorfismo injetivo de grupos, de onde $G \simeq \varphi(G)$. Mas G é grupo de ordem N , e assim $\varphi(G)$ também tem ordem N , e como é subgrupo de \mathbb{C}^* , pelo Lema A.8, G é isomorfo a $U_N = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^N = 1\}$. Portanto, G é cíclico.

- Caso $k = 3$.

Fazendo $k = 3$ em (2.7) temos:

$$\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} = 1 + \frac{2}{N}, \quad N, \eta_i \geq 2, \quad \#\mathcal{O}_i = \frac{N}{\eta_i}. \quad (2.8)$$

Para a equação acima temos 4 possibilidades:

$$\diamond \quad \eta_1 = \eta_2 = 2 \text{ e } \eta_3 = m \geq 2.$$

Para estes valores, substituindo em (2.8), temos $N = 2m$, $\#\mathcal{O}_1 = \#\mathcal{O}_2 = m$, $\#\mathcal{O}_3 = 2$ e

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3.$$

A menos de conjugação podemos tomar $\mathcal{O}_3 = \{\infty, 0\}$, e como $|G_\infty| = |G_0| = m < |G| = 2m$, existe $\mathbf{I} \in G - G_0$ tal que $\mathbf{I}(\infty) = 0$, $\mathbf{I}(0) = \infty$ e sua ordem é 2.

Além disso, verifica-se que $I_{\mathbf{I}}(G_0) = G_\infty$. Pelo Lema A.9, G_0 é subgrupo normal de G , e assim $I_{\mathbf{I}}(G_0) = G_0$. Logo

$$G_0 = \{\mathbf{T} \in G \mid \mathbf{T}([X : Y]) = \mathbf{T}_\xi([X : Y]) = [\xi X : Y], \quad \xi \in U_m\}.$$

Aplicando o mesmo raciocínio utilizado no caso $k = 2$ temos $G_0 = G_\infty = \langle \mathbf{R} \rangle$ onde $\mathbf{R} \in G$ tem ordem m dado por $\mathbf{R}([X : Y]) = [\omega X : Y]$, com ω raiz m -ésima da unidade.

Agora temos \mathbf{I} de ordem 2 e \mathbf{R} de ordem m , tais que $\mathbf{I} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{I}^{-1} = \mathbf{R}^{m-1}$. Pelo que foi apresentado em A.4, segue que $\langle \mathbf{R}, \mathbf{I} \rangle \simeq D_m$, e assim $G \simeq D_m$.

$$\diamond \quad \eta_1 = 2, \quad \eta_2 = 3 \text{ e } \eta_3 = m \geq 3.$$

Para estes valores, substituindo em (2.8), temos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{m} = 1 + \frac{2}{N} \Leftrightarrow \frac{6-m}{m} = \frac{2}{N} > 0, \Rightarrow m \in \{3, 4, 5\}.$$

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

m=3

Substituindo $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = \eta_3 = 3$ em (2.8) temos $N = 12$ e

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 \quad \text{com } \sharp(\mathcal{O}_1) = 6, \sharp(\mathcal{O}_2) = \sharp(\mathcal{O}_3) = 4.$$

Segue do Teorema 2.11 que os únicos subgrupos finitos abelianos de $Aut(\mathbb{P}^1)$ são cíclicos ou o dihedral D_2 que tem ordem 4. Mas G não é cíclico, e assim $G \simeq D_6$ ou $G \simeq A_4$. Agora

$$\mathcal{P}_{D_6} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 \quad \text{com } \sharp(\mathcal{O}_1) = \sharp(\mathcal{O}_2) = 6, \sharp(\mathcal{O}_3) = 2.$$

Pelo item (iv) da proposição 2.12 temos $G \simeq A_4$.

m=4

Substituindo $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 3$ e $\eta_3 = 4$ em (2.8) temos $N = 24$ e

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 \quad \text{com } \sharp(\mathcal{O}_1) = 12, \sharp(\mathcal{O}_2) = 8, \sharp(\mathcal{O}_3) = 6.$$

G não é cíclico e $|G| = 12$, logo $G \simeq D_{12}$ ou $G \simeq S_4$. Agora

$$\mathcal{P}_{D_{12}} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 \quad \text{com } \sharp(\mathcal{O}_1) = \sharp(\mathcal{O}_2) = 12, \sharp(\mathcal{O}_3) = 2.$$

Pelo item (iv) da proposição 2.12 temos $G \simeq S_4$.

m=5

Substituindo $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 3$ e $\eta_3 = 5$ em (2.8) temos $N = 60$ e

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 \quad \text{com } \sharp(\mathcal{O}_1) = 30, \sharp(\mathcal{O}_2) = 20, \sharp(\mathcal{O}_3) = 12.$$

Pelo mesmo motivo G não é cíclico e por sua ordem temos $G \simeq D_{30}$ ou $G \simeq A_5$.
Agora

$$\mathcal{P}_{D_{30}} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 \quad \text{com } \sharp(\mathcal{O}_1) = \sharp(\mathcal{O}_2) = 30, \sharp(\mathcal{O}_3) = 2.$$

Pelo item (iv) da proposição 2.12 temos $G \simeq A_5$.

□

Voltemos então ao subgrupo finito de $Aut(\mathbb{P}^1)$,

$$\Gamma_C = \{\mathbf{T} \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C\},$$

2. Ação dos subgrupos finitos de $Aut(\mathbb{P}^1)$

onde $C \subseteq \mathbb{P}^1$ é um subconjunto, contendo exatamente $d \geq 3$ elementos. Observe que Γ_C define uma ação sobre C :

$$\begin{aligned} \Omega_C : \Gamma_C \times C &\rightarrow C \\ (\mathbf{T}, P) &\mapsto \mathbf{T}(P) \end{aligned}$$

E desta forma, para cada $P \in C$ podemos considerar sua órbita $\mathcal{O}_P = \{\mathbf{T}(P) \in C \mid \mathbf{T} \in \Gamma_C\}$. A proposição a seguir nos dá mais informações a respeito deste conjunto.

Proposição 2.14. Seja $C \subseteq \mathbb{P}^1$ formado por d pontos, dois a dois distintos. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_C &= C \cap \mathcal{P}_{\Gamma_C} = \{P \in C \mid \exists \mathbf{T} \in \Gamma_C^*, \mathbf{T}(P) = P\}, \\ \mathcal{P}'_C &= C - \mathcal{P}_C = \{P \in C \mid P \notin \mathcal{P}_{\Gamma_C}\}. \end{aligned}$$

Então, para cada $P \in C$ temos que:

- (i) Se $P \in \mathcal{P}_C$, então $\mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{P}_C$. Caso contrário, $\mathcal{O}_P \cap \mathcal{P}_C = \emptyset$ e $\#(\mathcal{O}_P) = |\Gamma_C|$.
- (ii) Se Γ_C não for cíclico então $\mathcal{P}_{\Gamma_C} = \mathcal{O}'_1 \cup \mathcal{O}'_2 \cup \mathcal{O}'_3$. Se $n_i = \#(\mathcal{O}'_i)$, temos:

$$n = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 + \delta |\Gamma_C|, \quad \text{com } \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}, \delta \geq 0. \quad (2.9)$$

Demonstração. Se $P \in \mathcal{P}_C$, então $P \in C$ e existe $\mathbf{T} \in \Gamma_C^*$ tal que $\mathbf{T}(P) = P$. Agora, considere $Q \in \mathcal{O}_P$, então $Q = \mathbf{S}(P)$ para algum $\mathbf{S} \in \Gamma_C$. Além disso, temos $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1} \in \Gamma_C^*$ fixa Q . Assim, $Q \in \mathcal{P}'_C$. Caso contrário, $P \in \mathcal{P}'_C$. Assim $\mathbf{T}(P) \neq P$ para todo $\mathbf{T} \in \Gamma_C^*$, logo o estabilizador de P é $(\mathcal{P}_C)_P = \{\text{Id}_{\mathbb{P}^1}\}$. Como $\#(\mathcal{O}_P) = \frac{|\mathcal{P}_C|}{|(\mathcal{P}_C)_P|}$ temos que $\#(\mathcal{O}_P) = |\mathcal{P}_C|$. Agora, suponha que $\mathcal{O}_P \cap \mathcal{P}_C \neq \emptyset$, então existe $Q \in \mathcal{O}_P \cap \mathcal{P}_C$. Como $Q \in \mathcal{P}_C$ temos que $\mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{P}_C$. Por outra parte, $P \in \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_Q \subseteq \mathcal{P}_C$, contrariando o fato de $P \in \mathcal{P}'_C$. Agora suponha que C admite a seguinte decomposição em órbitas relativa a ação induzida por Ω_C :

$$C = \mathcal{O}_1 \cup \dots \cup \mathcal{O}_k.$$

Sabemos que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{P}_C = \mathcal{O}'_j$, para algum $j \in \{1, 2, 3\}$ ou $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{P}_C = \emptyset$. Assim no máximo as três órbitas em $\mathcal{P}_C = \mathcal{O}'_1 \cup \mathcal{O}'_2 \cup \mathcal{O}'_3$ podem aparecer na decomposição em órbitas de C , e isto dependerá da quantidade de pontos fixos do grupo Γ_C que fazem parte de C . Para aqueles índices que $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{P}_C = \emptyset$, teremos que $\#(\mathcal{O}_i) = |\Gamma_C|$. Agora, como $\#(C) = n = \#(\mathcal{O}_1) + \dots + \#(\mathcal{O}_k)$, temos que:

$$n = \alpha \#(\mathcal{O}_1) + \beta \#(\mathcal{O}_2) + \gamma \#(\mathcal{O}_3) + \delta |\Gamma_C|,$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$, $\delta \geq 0$. □

Capítulo 3

A família \mathcal{F}^d

Uma superfície da família \mathcal{F}^d é o conjunto $\mathcal{Z}(F_{\phi,\psi})$, no qual

$$F_{\phi,\psi}(X, Y, Z, W) = \phi(X, Y) - \psi(Z, W),$$

e ϕ, ψ são homogêneos de grau $d \geq 3$.

Vamos denotar por $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ o conjunto das retas contidas na superfície \mathcal{S} . Para fazer a contagem das retas na superfície \mathcal{S} vamos dividir o conjunto $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ em dois outros:

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_L^c$$

onde \mathcal{R}_L serão as retas contidas na superfície que intersectam um certo conjunto $L \subseteq \mathbb{P}^3$ e \mathcal{R}_L^c o conjunto complementar, ou seja, as retas contidas na superfície que não intersectam L .

Se $L \subset \mathcal{Z}(Z, W)$, veremos que as retas em \mathcal{R}_L são da forma $L_{i,j} = \mathcal{Z}(H_i, G_j)$ onde H_i é um dos fatores de ϕ , e G_j de ψ . E assim obtemos que a superfície \mathcal{S} contém no mínimo d^2 retas. Quanto ao conjunto \mathcal{R}_L^c , se for não vazio, cada reta $l \in \mathcal{R}_L^c$ induz um automorfismo \mathbf{T}_l em \mathbb{P}^1 que leva $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)$ em $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$, do qual obtemos d retas em \mathcal{R}_L^c . Além disso, se uma dessas d retas é a tomada, elas induzem o mesmo automorfismo \mathbf{T}_l . Ou seja, de cada automorfismo temos d retas que o induzem. Veremos que automorfismo é este e assim a quantidade de retas neste conjunto depende da cardinalidade deste subconjunto de $Aut(\mathbb{P}^1)$.

3.1 Contando as retas na família \mathcal{F}^d

Começamos observando o seguinte fato a respeito das superfícies $\mathcal{S} \in \mathcal{F}^d$.

Proposição 3.1. Considere a superfície $\mathcal{S} = \mathcal{Z}(F_{\phi,\psi}) \in \mathcal{F}^d$. Então

\mathcal{S} é não singular $\Leftrightarrow \phi(X, Y), \psi(Z, W)$ são livres de quadrados.

Demonstração. Assuma que $\mathcal{Z}(F_{\phi,\psi})$ é uma superfície não singular e que ϕ não é livre de quadrados. Assim

$$\phi(X, Y) = (bX - aY)^m \prod_{i=m+1}^d (b_i X - a_i Y) \text{ com } m \geq 2.$$

Considere $P = [a : b : 0 : 0] \in \mathbb{P}^3$. Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\phi,\psi}}{\partial X} &= \frac{\partial \phi}{\partial X} = bm(bX - aY)^{m-1} \Delta + (bX - aY)^m \frac{\partial \Delta}{\partial X} \\ \frac{\partial F_{\phi,\psi}}{\partial Y} &= \frac{\partial \phi}{\partial Y} = am(bX - aY)^{m-1} \Delta + (bX - aY)^m \frac{\partial \Delta}{\partial Y} \end{aligned}$$

onde $\Delta = \prod_{i=m+1}^d (b_i X - a_i Y)$ e

$$\frac{\partial F_{\phi,\psi}}{\partial X} = \frac{\partial \phi}{\partial X}|_P = 0, \quad \frac{\partial F_{\phi,\psi}}{\partial Y} = \frac{\partial \phi}{\partial Y}|_P = 0, \quad \frac{\partial F_{\phi,\psi}}{\partial Z} = \frac{\partial \psi}{\partial Z}|_P = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_{\phi,\psi}}{\partial W} = \frac{\partial \psi}{\partial W}|_P = 0.$$

Logo, $P \in \text{Sing}(\mathcal{Z}(F_{\phi,\psi}))$, contrariando a hipótese.

Reciprocamente, sejam $\phi(X, Y), \psi(Z, W)$ livres de quadrados.

Suponha que $\mathcal{Z}(F_{\phi,\psi})$ seja singular e considere $P = [a : b : c : e] \in \text{Sing}(\mathcal{Z}(F_{\phi,\psi}))$.

- Caso 1: $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

AFIRMAÇÃO: ϕ não é livre de quadrados.

Como $P \in \text{Sing}(\mathcal{Z}(F_{\phi,\psi}))$ então

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\phi,\psi}}{\partial X}|_P &= \frac{\partial \phi}{\partial X}(a, b) = 0, & \frac{\partial F_{\phi,\psi}}{\partial Y}|_P &= \frac{\partial \phi}{\partial Y}(a, b) = 0, \\ \frac{\partial F_{\phi,\psi}}{\partial Z}|_P &= \frac{\partial \psi}{\partial Z}(c, e) = 0 & \text{e} & \frac{\partial F_{\phi,\psi}}{\partial W}|_P = \frac{\partial \psi}{\partial W}(c, e) = 0. \end{aligned}$$

Pela identidade de Euler

$$X \frac{\partial \phi}{\partial X} + Y \frac{\partial \phi}{\partial Y} = d\phi$$

calculando em (a, b) temos $\phi(a, b) = 0$. Por hipótese, ϕ é livre de quadrados, logo $\phi = \prod_{i=1}^d H_i$, sendo H_i, H_j L.I., $\forall i \neq j$. Assuma $H_1 = bX - aY$ e $H_i = b_i X - a_i Y$, $i = 2, \dots, d$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial X}|_P &= b\widehat{H}_1 H_2 \cdots H_d + b_2 H_1 \widehat{H}_2 \cdots H_d + \cdots + b_d H_1 \cdots H_{d-1} \widehat{H}_d \\ \frac{\partial \phi}{\partial Y}|_P &= -a\widehat{H}_1 H_2 \cdots H_d - a_2 H_1 \widehat{H}_2 \cdots H_d - \cdots - a_d H_1 \cdots H_{d-1} \widehat{H}_d. \end{aligned}$$

Assim $\frac{\partial \phi}{\partial X}(a, b) = \frac{\partial \phi}{\partial Y}(a, b) = 0$ implica $b = 0 = a$, o que é um absurdo.

3. A família \mathcal{F}^d

- Caso 2: $a = b = 0$, logo $c \neq 0$ ou $e \neq 0$

Neste caso usamos o mesmo raciocínio que no caso 1, trocando ϕ por ψ para mostrar que ψ não é livre de quadrados.

□

Observe que sendo $\phi(X, Y)$ e $\psi(Z, W)$ livres de quadrados tem-se:

$$\phi(X, Y) = H_1 \cdots H_d \quad \text{e} \quad \psi(Z, W) = G_1 \cdots G_d$$

onde $\{H_i, H_j\}$ e $\{G_i, G_j\}$ são formas lineares homogêneas L.I. para $i \neq j$. Além disso, como $\{H_i, G_j\}$ são L.I., as retas

$$L_{i,j} = \mathcal{Z}(H_i, G_j)$$

estão contidas na superfície \mathcal{S} . Como a escolha do par $\{H_i, G_j\}$ pode ser tomada de d^2 formas, \mathcal{S} contém pelo menos d^2 retas.

Agora considere as retas $L = \mathcal{Z}(Z, W)$ e $M = \mathcal{Z}(X, Y)$. Estas retas não estão contidas na superfície $\mathcal{Z}(F_{\phi, \psi})$. Suponha que $L \subseteq \mathcal{Z}(F_{\phi, \psi})$, então $F_{\phi, \psi}(u, v, 0, 0) = \phi(u, v) = 0$, para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$, implicando que $\phi \equiv 0$, o que é falso. Portanto, $L \not\subseteq \mathcal{Z}(F_{\phi, \psi})$. De forma análoga verificamos que $M \not\subseteq \mathcal{Z}(F_{\phi, \psi})$.

Outra maneira de ver as retas $L_{i,j}$ é a seguinte

Lema 3.2. Considere a superfície $\mathcal{S} = \mathcal{Z}(F_{\phi, \psi}) \in \mathcal{F}^d$, e as retas $L = \mathcal{Z}(Z, W)$ e $M = \mathcal{Z}(X, Y)$. Sejam $\mathcal{Z}(\phi) \cap L = \{P_1, \dots, P_d\}$ e $\mathcal{Z}(\psi) \cap M = \{Q_1, \dots, Q_d\}$. Então a reta $L_{i,j}$ que passa por P_i e Q_j está contida em \mathcal{S} .

Demonstração. Consideremos $P_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \in \mathcal{Z}(\phi) \cap L$ e $Q_j = [0 : 0 : c_j : d_j] \in \mathcal{Z}(\psi) \cap M$. Sabemos que $L_{i,j} = \{[ua_i, ub_i, vc_j, vd_j] \in \mathbb{P}^3 \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$. Observe que $F(ua_i, ub_i, vc_j, vd_j) = \phi(ua_i, ub_i) - \psi(vc_j, vd_j) = u^d \phi(a_i, b_i) - v^d \psi(c_j, d_j) = 0$ para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. E assim $L_{i,j} \subset \mathcal{S}$. □

Corolário 3.3. A superfície $\mathcal{S} \in \mathcal{F}^d$ contém no mínimo d^2 retas.

Exemplo 3.1. Considere $F = XY(X - Y)(X + Y) - ZW(W - Z)(Z - 2W)$. A superfície quártica $\mathcal{Z}(F)$ contém $4^2 = 16$ retas.

O lema a seguir nos dá informações sobre as retas $L_{i,j} \subseteq \mathcal{S}$.

Lema 3.4. Se l for uma reta contida em $\mathcal{S} \in \mathcal{F}^d$ tal que $l \cap L \neq \emptyset$ e $l \cap M \neq \emptyset$, então $l = L_{i,j}$, para algum $i, j \in \{1, \dots, d\}$.

3. A família \mathcal{F}^d

Demonstração. Pela observação que fizemos acima temos que $L \not\subseteq \mathcal{S}$ e $M \not\subseteq \mathcal{S}$. Como $l \cap M \neq \emptyset$ e $l \cap L \neq \emptyset$ temos que $l \cap M = \{P\}$, com $P = [a : b : 0 : 0]$ e $l \cap L = \{Q\}$, com $Q = [0 : 0 : c : d]$. Note que $P \neq Q$ e $P, Q \in l$. Logo $l = L_{P,Q}$. Além disso, $P, Q \in l \subset \mathcal{Z}(F_{\phi,\psi})$, logo $F_{\phi,\psi}(P) = 0 = \phi(a, b)$ e $F_{\phi,\psi}(Q) = 0 = \psi(c, d)$. Donde $l = L_{i,j}$ para algum $i, j \in \{1, \dots, d\}$. \square

Assim, se $l \subseteq \mathcal{S}$ é uma reta distinta das retas $L_{i,j}$ então $l \cap L = \emptyset$ ou $l \cap M = \emptyset$. O resultado a seguir nos diz que basta olhar a interseção com apenas uma dessas retas l e M .

Lema 3.5. Se l for uma reta contida em \mathcal{S} tal que $l \cap L = \emptyset$, então $l \cap M = \emptyset$.

Demonstração. Sabemos que $l = \mathcal{Z}(L_1, L_2)$, sendo L_1, L_2 formas de grau 1 L.I. Assuma que

$$\begin{aligned} L_1 &= a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1W, \\ L_2 &= a_2X + b_2Y + c_2Z + d_2W. \end{aligned}$$

Observe que os pontos em $l \cap L$ são dados pelas soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \\ Z = 0 \\ W = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1X + b_1Y = 0 \\ a_2X + b_2Y = 0 \\ Z = 0 \\ W = 0 \end{cases}$$

Que tem apenas a solução trivial $X = Y = 0 = Z = W$ pois $l \cap L = \emptyset$. Logo, a matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

tem posto dois, e isto nos permite escolher, para geradores do ideal que define a reta l , os seguintes polinômios: $X = \alpha Z + \beta W$, $Y = \gamma Z + \delta W$. E assim $l = \mathcal{Z}(X - \alpha Z - \beta W, Y - \gamma Z - \delta W)$. Observe que os pontos em $l \cap M$ são determinadas pelas soluções do sistema

$$\begin{cases} \alpha Z + \beta W = 0 \\ \gamma Z + \delta W = 0 \\ X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

A seguir verificaremos que o posto de A é 2.

3. A família \mathcal{F}^d

- Se o posto de A é zero então $A = 0$. Logo, $l = \mathcal{Z}(X, Y) = M$ implicando $M \subseteq \mathcal{S}$, o que é um absurdo, pois $M \not\subseteq \mathcal{Z}(F)$.
- Se o posto de A é 1, algum dos vetores linha (α, β) , (γ, δ) é não nulo. Assuma $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, além disso, estes vetores são L.D. Logo existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(\gamma, \delta) = \lambda(\alpha, \beta)$. Portanto, as equações de l são da forma $X = \alpha Z + \beta W$ e $Y = \lambda(\alpha Z + \beta W)$. Lembramos que $l \subset \mathcal{S}$ e $P \in l$ é da forma $P = [\alpha u + \beta v : \lambda(\alpha u + \beta v) : u : v]$, $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. Logo, de $F_{\phi, \psi}(P) = 0 = \phi(\alpha u + \beta v, \lambda(\alpha u + \beta v)) - \psi(u, v)$, para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. Assim $\psi(u, v) = (\alpha u + \beta v)^d \phi(1, \lambda)$, para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. Portanto $\psi(Z, W) = (\alpha Z + \beta W)^d \phi(1, \lambda)$. Daí temos $\phi(1, \lambda) = 0$ ou $\phi(1, \lambda) \neq 0$. No primeiro caso, $\psi(Z, W) = 0$ gerando um absurdo. No segundo caso, concluímos que ψ não é livre de quadrados, outro absurdo pois \mathcal{S} é não singular (cf. proposição 3.1). Logo, o posto de A é dois e assim a única solução do sistema é a trivial $X = Y = Z = W = 0$. Portanto, $l \cap M = \emptyset$. \square

Note que a recíproca do lema acima é verdadeira uma vez que a prova é análoga à dada.

Recapitulando, sendo $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \{ \text{as retas contidas em } \mathcal{S} \}$ vimos que

$$\mathcal{R}_L = \{ l \subseteq \mathcal{S} \mid l \cap L \neq \emptyset \} = \{ l \subseteq \mathcal{S} \mid l = L_{i,j} \}.$$

E assim, se \mathcal{S} contiver mais retas além destas temos

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathcal{R}_l \cup \mathcal{R}_L^c. \quad (3.1)$$

Os próximos resultados nos ajudarão a entender o conjunto das retas \mathcal{R}_L^c , se este for não-vazio.

Lema 3.6. Com as mesmas notações acima. Seja $l \subseteq \mathcal{S} \in \mathcal{F}^d$ uma reta tal que $l \cap L = \emptyset$. Então l induz um automorfismo de \mathbb{P}^1 tal que

$$\mathbf{T}(\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)) = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi).$$

Demonstração. Se $l \subseteq \mathcal{S}$ for uma reta tal que $l \cap L = \emptyset$, então podemos escolher as seguintes equações para l

$$\begin{cases} X = \alpha Z + \beta W \\ Y = \gamma Z + \delta W \end{cases}$$

com $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$. Defina

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \quad \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ [Z : W] &\mapsto [\alpha Z + \beta W : \gamma Z + \delta W]. \end{aligned}$$

Observe que \mathbf{T} é um automorfismo de \mathbb{P}^1 , pois $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$.

Como $\#(\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)) = \#(\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi))$ e \mathbf{T} é bijeção basta mostrar uma inclusão para obtermos a igualdade. Considere $[c : d] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)$. Note que $\mathbf{T}([c : d]) = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d]$, queremos mostrar que $\mathbf{T}([c : d]) \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. Seja $P = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$ com $a = \alpha c + \beta d$ e $b = \gamma c + \delta d$. Note que $P \in l$, pois satisfaz as equações de l e $l \subseteq \mathcal{S}$. Logo $F_{\phi, \psi}(P) = 0 = \phi(a, b) - \psi(c, d)$ implica em $\phi(a, b) = 0$ pois $\psi(c, d) = 0$, e assim $\mathbf{T}([c : d]) \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. Concluimos que $\mathbf{T}(\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)) = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. \square

Proposição 3.7. Ainda com as notações anteriores. Seja $\mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ tal que $\mathbf{T}(\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)) = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$, então \mathbf{T} determina exatamente d retas distintas contidas em \mathcal{S} . De fato, estas retas são distintas das retas $L_{i,j} \in \mathcal{R}_L$.

Demonstração. Seja $\mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ dada por $\mathbf{T}([Z : W]) = [\alpha Z + \beta W : \gamma Z + \delta W]$, tal que $\mathbf{T}(\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)) = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. Considere $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$ a superfície quádrlica em \mathbb{P}^3 definida Por

$$F_{\mathbf{T}} = X(\gamma Z + \delta W) - Y(\alpha Z + \beta W).$$

AFIRMAÇÃO(1): $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$ é não singular.

Lembremos que os pontos singulares de $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$ são determinados pelas soluções não triviais do sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{\mathbf{T}}}{\partial X} = \gamma Z + \delta W = 0 \\ \frac{\partial F_{\mathbf{T}}}{\partial Y} = -(\alpha Z + \beta W) = 0 \\ \frac{\partial F_{\mathbf{T}}}{\partial Z} = \gamma X - \alpha Y = 0 \\ \frac{\partial F_{\mathbf{T}}}{\partial W} = \delta X + \beta Y = 0 \end{cases}$$

Das duas primeiras linhas do sistemas temos

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E como $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, temos que a única solução é $Z = W = 0$. Das duas últimas linhas, temos

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\alpha \\ \delta & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $-\gamma\beta + \alpha\delta \neq 0$, a única solução é $X = Y = 0$.

Logo $X = Y = Z = W = 0$ é a única solução do sistema e desta forma $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$ é não singular.

Como $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$ é não singular, existem duas famílias de retas, digamos \mathcal{L} e \mathcal{M} , contidas

3. A família \mathcal{F}^d

em $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$ definidas da seguinte forma: Dados $P = [p_0 : p_1]$, $Q = [q_0 : q_1] \in \mathbb{P}^1$

$$\mathcal{L}_P = \mathcal{Z}((\gamma p_0 + \delta p_1)X - (\alpha p_0 + \beta p_1)Y, p_1 Z - p_0 W) \quad (3.2)$$

$$\mathcal{M}_Q = \mathcal{Z}(q_0 X - q_1(\alpha Z + \beta W), q_0 Y - q_1(\gamma Z + \delta W)) \quad (3.3)$$

Observe que $\mathcal{M}_{[0:1]} = L = \mathcal{Z}(Z, W)$ e $\mathcal{M}_{[1:0]} = M = \mathcal{Z}(X, Y)$. Estamos denotando por $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ o conjunto das retas contidas na superfície \mathcal{S} .

AFIRMAÇÃO(2): $\mathcal{L}_{[p_0:p_1]} \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ se, e somente se, $[p_0 : p_1] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)$. Assim, existem exatamente d retas distintas da família \mathcal{L} contidas em $\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$.

De fato, tomemos os pontos $R = [0 : 0 : c : e]$, $\tilde{R} = [\alpha c + \beta e : \gamma c + \delta e : 0 : 0]$ e consideremos $L_{R, \tilde{R}}$ a reta que passa por estes pontos. Os pontos R, \tilde{R} satisfazem a equação da reta $\mathcal{L}_{[c:e]}$, e assim $L_{R, \tilde{R}} = \mathcal{L}_{[c:e]}$. Mais ainda, se $R \in \mathcal{Z}(\psi) \cap M$ então $\tilde{R} \in \mathcal{Z}(\phi) \cap L$ já que $\mathbf{T}(\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)) = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. Daí o conjunto das retas \mathcal{L}_P onde $P \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)$ são d retas distintas da família \mathcal{L} contidas em $\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$.

Vejamus que estas d retas são as únicas da família \mathcal{L} que estão contidas na superfície \mathcal{S} . Para isto, seja $\mathcal{L}_{[c:e]} \in \mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L}_{[c:e]} \subseteq \mathcal{S}$.

- Se $e = 0$ então podemos tomar $c = 1$ e $\mathcal{L}_{[c:e]} = \mathcal{L}_{[1:0]}$. Segue de (3.2) que, se $\gamma \neq 0$ então os pontos da reta $\mathcal{L}_{[1:0]}$ são da forma $[\alpha u : \gamma u : \gamma v : 0]$, $\forall [u : v] \in \mathbb{P}^1$. Logo $\mathcal{L}_{[1:0]} \subseteq \mathcal{S}$ se, e somente se

$$\begin{aligned} F_{\phi, \psi}(\alpha u, \gamma u, \gamma v, 0) &= 0, \quad \forall [u : v] \in \mathbb{P}^1 \\ \Leftrightarrow \phi(\alpha u, \gamma u) - \psi(\gamma v, 0) &= 0, \quad \forall [u : v] \in \mathbb{P}^1 \\ \Leftrightarrow u^d \phi(\alpha, \gamma) - (\gamma v)^d \psi(1, 0) &= 0, \quad \forall [u : v] \in \mathbb{P}^1. \end{aligned}$$

E para $v = \frac{1}{\gamma}$ e $u = 0$, temos $\psi(1, 0) = 0$ e assim $[1 : 0] \in \mathcal{Z}(\psi)$.

Se $\gamma = 0$, então $\alpha \delta \neq 0$ agora temos de (3.2) que os pontos da reta $\mathcal{L}_{[1:0]}$ são da forma $[u : 0 : v : 0]$, $\forall [u : v] \in \mathbb{P}^1$. Logo $\mathcal{L}_{[1:0]} \subseteq \mathcal{S}$ se, e somente se

$$\begin{aligned} F_{\phi, \psi}(u, 0, v, 0) &= 0, \quad \forall [u : v] \in \mathbb{P}^1 \\ \Leftrightarrow \phi(u, 0) - \psi(v, 0) &= 0, \quad \forall [u : v] \in \mathbb{P}^1 \\ \Leftrightarrow (u)^d \phi(1, 0) - (v)^d \psi(1, 0) &= 0, \quad \forall [u : v] \in \mathbb{P}^1. \end{aligned}$$

Para $v = 1$ e $u = 0$, temos $\psi(1, 0) = 0$ e assim $[1 : 0] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)$.

- Se $e \neq 0$, consideremos $e = 1$ então $\mathcal{L}_{[c:e]} = \mathcal{L}_{[c:1]}$. Novamente, segue de (3.2) que, se $\alpha c + \beta \neq 0$, os pontos da reta $\mathcal{L}_{[c:1]}$ são dados por

$$[(\alpha c + \beta)u : (\gamma c + \delta)u : c(\alpha c + \beta)v : (\alpha c + \beta)v], \quad \forall [u : v] \in \mathbb{P}^1.$$

Logo $\mathcal{L}_{[c:1]} \subseteq \mathcal{S}$ se, e somente se, $\forall [u : v] \in \mathbb{P}^1$

3. A família \mathcal{F}^d

$$\begin{aligned} & F_{\phi,\psi}((\alpha c + \beta)u, (\gamma c + \delta)u, c(\alpha c + \beta)v, (\alpha c + \beta)v) = 0 \\ \Leftrightarrow & \phi((\alpha c + \beta)u, (\gamma c + \delta)u) - \psi(c(\alpha c + \beta)v, (\alpha c + \beta)v) = 0 \\ \Leftrightarrow & u^d \phi(\alpha c + \beta, \gamma c + \delta) - ((\alpha c + \beta)v)^d \psi(c, 1) = 0. \end{aligned}$$

E para $v = \frac{1}{\alpha c + \beta}$ e $u = 0$, temos $\psi(c, 1) = 0$ e assim $[c : 1] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)$.

Se $\alpha c + \beta = 0$, então $\gamma c + \delta \neq 0$ (pois $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$). Segue de (3.2) que os pontos da reta são dados por $[0 : u : cv : v]$, $\forall [u : v] \in \mathbb{P}^1$. Logo $\mathcal{L}_{[c:1]} \subseteq \mathcal{S}$ se, e somente se, $\forall [u : v] \in \mathbb{P}^1$

$$\begin{aligned} & F_{\phi,\psi}(0, u, cv, v) = 0 \\ \Leftrightarrow & \phi(0, u) - \psi(cv, v) = 0 \\ \Leftrightarrow & u^d \phi(0, 1) - v^d \psi(c, 1) = 0. \end{aligned}$$

E para $v = 1$ e $u = 0$, temos $\psi(c, 1) = 0$ e assim $[c : 1] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)$.

AFIRMAÇÃO(3): A quantidade de retas da família \mathcal{M} contidas em $\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$ é d .

- Existe $u \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{M}_{[1:u]} \in \mathcal{M}$ está contida em $\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$.

Tome $[c : e] \in \mathbb{P}^1$ tal que $\psi(c, e) \neq 0$ e considere $[a : b] = \mathbf{T}([c : e]) = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d]$. Como $\mathbf{T}(\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)) = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$, tem-se $\phi(a, b) \neq 0$. Escolha $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que $\lambda^d \phi(a, b) = \psi(c, e)$ e considere $P = [\lambda a : \lambda b : c : e] \in \mathbb{P}^3$. De acordo com escolha de λ e $[a : b] = \mathbf{T}([c : e])$ segue que $P \in \mathcal{S} \cap \mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$. Reciprocamente, pelo que vimos na proposição 1.4, existe uma única reta da família \mathcal{M} passando pelo ponto P , seja esta reta $\mathcal{M}_{[1:u]}$ para algum $u \in \mathbb{C}$ (note que $P \notin \mathcal{M}_{[0:1]} = \mathcal{Z}(Z, W) = L$). Sabemos também que a reta $\mathcal{M}_{[1:u]}$ intersecta as retas $\mathcal{L}_Q \in \mathcal{L}$ para cada $Q \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)$ em exatamente um ponto, sejam estes P_1, \dots, P_d . Então $\{P, P_1, \dots, P_d\} \subset \mathcal{M}_{[1:u]} \cap \mathcal{S}$, e assim $\mathcal{M}_{[1:u]} \cap \mathcal{S}$ contém pelo menos $d + 1$ pontos, pela proposição 1.4, segue que $\mathcal{M}_{[1:u]} \subset \mathcal{S}$.

- Existem d retas da família \mathcal{M} contidas na superfície \mathcal{S}

Seja U_d o grupo cíclico das d -ésimas raízes da unidade e considere o produto direto $U = U_d \times U_d$. Temos uma ação pela esquerda de U em \mathbb{P}^3 :

$$\begin{aligned} \Omega : \quad U \times \mathbb{P}^3 & \rightarrow \mathbb{P}^3 \\ ((\eta, \xi), P) & \mapsto [\eta p_0 : \eta p_1 : \xi p_2 : \xi p_3], \text{ se } P = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]. \end{aligned}$$

Daí temos a bijeção $A_{(\eta,\xi)} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ dada por $A_{(\eta,\xi)}(P) = [\eta p_0 : \eta p_1 : \xi p_2 : \xi p_3]$. Note que:

- $A_{(\eta,\xi)}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

De fato, seja $P \in \mathbb{P}^3$

$$\begin{aligned} F_{\phi,\psi}(A_{(\eta,\xi)}(P)) & = F_{\phi,\psi}([\eta p_0 : \eta p_1 : \xi p_2 : \xi p_3]) \\ & = \phi(\eta p_0, \eta p_1) - \phi(\xi p_2, \xi p_3) \\ & = \eta^d \phi(p_0, p_1) - \xi^d \phi(p_2, p_3) \\ & = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

3. A família \mathcal{F}^d

- $A_{(\eta,\xi)}(\mathcal{Q}_{\mathbf{T}}) = \mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$.

De fato, seja $P \in \mathbb{P}^3$

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{T}}(A_{(\eta,\xi)}(P)) &= F_{\mathbf{T}}([\eta p_0 : \eta p_1 : \xi p_2 : \xi p_3]) \\ &= \eta p_0(\gamma \xi p_2 + \delta \xi p_3) - \eta p_1(\alpha \xi p_2 + \beta \xi p_3) \\ &= \eta \xi(p_0(\gamma p_2 + \delta p_3) - p_1(\alpha p_2 + \beta p_3)) \\ &= 0 \Leftrightarrow P \in \mathcal{Q}_{\mathbf{T}}. \end{aligned}$$

- $A_{(\eta,\xi)}(\mathcal{M}_{[a:b]}) = \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$, $\forall (\eta, \xi) \in U$.

As equações que definem as retas $\mathcal{M}_{[a:b]}$, $\mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$ são, respectivamente:

$$\begin{aligned} aX &= b(\alpha Z + \beta W) \quad \text{e} \quad aY = b(\gamma Z + \delta W), \\ \eta^{-1}aX &= \xi^{-1}b(\alpha Z + \beta W) \quad \text{e} \quad \eta^{-1}aY = \xi^{-1}b(\gamma Z + \delta W). \end{aligned}$$

Se $P \in \mathcal{M}_{[a:b]}$, então $A_{(\eta,\xi)}(P)$ satisfaz as equações de $\mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$ e assim $A_{(\eta,\xi)}(P) \in \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$.

Reciprocamente, se $P \in \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$. Como $P = [\eta \xi p_0 : \eta \xi p_1 : \eta \xi p_2 : \eta \xi p_3] = A_{(\eta,\xi)}([\xi p_0 : \xi p_1 : \eta p_2 : \eta p_3])$, ao multiplicarmos por $\eta \xi$ as equações de $\mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$ temos que $[\xi p_0 : \xi p_1 : \eta p_2 : \eta p_3] \in \mathcal{M}_{[a:b]}$, já que $P \in \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$.

Visto isso, temos que $A_{(\eta,\xi)}(\mathcal{M}_{[1:u]}) = \mathcal{M}_{[\eta^{-1}:\xi^{-1}u]} = \mathcal{M}_{[1:\eta\xi^{-1}u]}$ para todo $(\eta, \xi) \in U$. Agora, se tomarmos ξ uma raiz primitiva, teremos $U_d = \{\eta \xi^j \mid 0 \leq j \leq d-1\}$. Logo, $\{A_{(\eta,\xi)}(\mathcal{M}_{[1:u]})\}_{(\eta,\xi) \in U}$ é composto por exatamente d retas distintas, a saber

$$M_i = \mathcal{M}_{[1:\xi^i u]} = A_{(1,\xi^{-i})}(\mathcal{M}_{[1:u]}), \quad i = 0, \dots, d-1.$$

A reta $\mathcal{M}_{[1:u]} = M_0 \subset \mathcal{Q}_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}$ e $A_{(\eta,\xi)}(\mathcal{Q}_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}) = \mathcal{Q}_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}$. E assim $\{M_0, \dots, M_{d-1}\}$ são as d retas distintas da família \mathcal{M} contidas na superfície \mathcal{S} .

- $\{M_0, \dots, M_{d-1}\}$ são as únicas retas distintas da família \mathcal{M} contidas na superfície \mathcal{S} .

Seja $M = \mathcal{M}_{[a:b]} \in \mathcal{M}$ contida na superfície \mathcal{S} . Como $\mathcal{M}_{[0:1]} \not\subset \mathcal{S}$, podemos assumir $a \neq 0$ e $M = \mathcal{M}_{[1:b]}$ para algum $b \in \mathbb{C}$. Os pontos de M são dados por $[b(\alpha\mu + \beta\nu) : b(\gamma\mu + \delta\nu) : \mu : \nu]$ com $[\mu : \nu] \in \mathbb{P}^1$. Assim, se $M \subset \mathcal{S}$, se $\forall [\mu : \nu] \in \mathbb{P}^1$ tem-se:

$$\begin{aligned} F_{\phi,\psi}([b(\alpha\mu + \beta\nu) : b(\gamma\mu + \delta\nu) : \mu : \nu]) &= 0 \\ \Leftrightarrow b^d \phi(\alpha\mu + \beta\nu, \gamma\mu + \delta\nu) &= \psi(\mu, \nu) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mas $M_0 = \mathcal{M}_{[1:u]} \subset \mathcal{S}$, logo $b^d \phi(\alpha\mu + \beta\nu, \gamma\mu + \delta\nu) = \psi(\mu, \nu)$ para todo $[\mu : \nu] \in \mathbb{P}^1$. Multiplicando (3.4) por u^d temos $b^d \phi(\mu, \nu) = u^d \psi(\mu, \nu)$ para todo $[\mu : \nu] \in \mathbb{P}^1$. Assim, $b^d = u^d$, de onde $b = u \xi^i$ e $M = M_i$, para algum $i \in \{1, \dots, d-1\}$. \square

Então, $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_L^c$ com $\mathcal{R}_L^c = \{l \mid l \cap L = \emptyset \text{ e } l \cap M = \emptyset\}$. Se $\mathcal{R}_L^c = \emptyset$, vimos que a superfície contém d^2 retas. Agora se $\mathcal{R}_L^c \neq \emptyset$, vimos no lema 3.6 que $l \in \mathcal{R}_L^c$ induz

3. A família \mathcal{F}^d

um $\mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, do qual obtemos a quádrlica $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$ e

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S} = L_0 \cup \cdots \cup L_{d-1} \cup M_0 \cup \cdots \cup M_{d-1},$$

onde M_0, \dots, M_{d-1} são geradas pela ação de U . Como as retas L e M pertencem a família \mathcal{M} , estas intersectam as d retas L_i ($i = 1, \dots, d$) e não intersectam as d retas M_i ($i = 1, \dots, d$). Ou seja, as retas $L_i \in \mathcal{R}_L$ ($i = 1, \dots, d$) e $M_i \in \mathcal{R}_L^c$ ($i = 1, \dots, d$).

Se existir uma reta contida na superfície \mathcal{S} que seja disjunta da reta $L = \mathcal{Z}(Z, W)$ precisamos levar em conta a seguinte.

Proposição 3.8. Com as notações acima. Seja $\Gamma_{\phi, \psi} = \{\mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)) = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)\}$. Então $\#(\mathcal{R}_L^c) = d \cdot \#(\Gamma_{\phi, \psi})$.

Demonstração. Segue do Lema 3.6 que cada reta $l \in \mathcal{R}_L^c$ determina um automorfismo $\mathbf{T}_l : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ que leva $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)$ em $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. Defina

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{R}_L^c &\rightarrow \Gamma_{\phi, \psi} \\ l &\mapsto \mathbf{T}_l \end{aligned}$$

Note que como $l \cap M = \emptyset$, podemos escolher equações $X = \alpha Z + \beta W$ e $Y = \gamma Z + \delta W$, com $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. E neste caso, temos $\mathbf{T}_l([Z : W]) = [\alpha Z + \beta W : \gamma Z + \delta W]$.

- Φ é sobrejetiva.

Seja $\mathbf{T} \in \Gamma_{\phi, \psi}$ dada por $[Z : W] \mapsto [\alpha Z + \beta W : \gamma Z + \delta W]$, segue da proposição anterior que existe $M_0 = \mathcal{M}_{[1:u]} \subset \mathcal{S}$, com equações $X = u(\alpha Z + \beta W)$ e $Y = u(\gamma Z + \delta W)$, $u \neq 0$. Assim $M_0 \in \mathcal{R}_L^c$ e $\mathbf{T}_{M_0}([Z : W]) = [u(\alpha Z + \beta W) : u(\gamma Z + \delta W)] = [\alpha Z + \beta W : \gamma Z + \delta W]$. Logo, $\Phi(M_0) = \mathbf{T}$.

- $\Phi^{-1}(\mathbf{T})$ consiste de d retas distintas, para todo $\mathbf{T} \in \Gamma_{\phi, \psi}$.

Seja $\mathbf{T} \in \Gamma_{\phi, \psi}$. Ainda da proposição anterior, sabemos que existem exatamente d retas da família \mathcal{M} associadas à quádrlica $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}}$ que estão contidas na superfície \mathcal{S} . Estas retas são $M_i = \mathcal{M}_{[1:\xi^i u]}$ para $i = 0, \dots, d-1$, com equações $X = \xi^i u(\alpha Z + \beta W)$ e $Y = \xi^i u(\gamma Z + \delta W)$, onde ξ é raiz primitiva d -ésima da unidade. Note que $M_i \in \mathcal{R}_L^c$ e $\Phi(M_i) = \mathbf{T}$, logo $\{M_0, \dots, M_{d-1}\} \subseteq \Phi^{-1}(\mathbf{T})$.

Agora considere $M \in \Phi^{-1}(\mathbf{T})$, então M tem equações da forma $X = \alpha_1 Z + \beta_1 W$ e $Y = \gamma_1 Z + \delta_1 W$ com $\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 \neq 0$ e $\mathbf{T}_M = \mathbf{T}$, daí existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\alpha_1 = \lambda \alpha$, $\beta_1 = \lambda \beta$, $\gamma_1 = \lambda \gamma$ e $\delta_1 = \lambda \delta$. Logo, $M = \mathcal{M}_{[1:\lambda]} \in \mathcal{M}$. Como as únicas retas da família \mathcal{M} contidas na superfície são $\{M_0, \dots, M_{d-1}\}$, segue que $\Phi^{-1}(\mathbf{T}) \subseteq \{M_0, \dots, M_{d-1}\}$. A sobrejetividade de Φ garante $\mathcal{R}_L^c = \bigcup_{\mathbf{T} \in \Gamma_{\phi, \psi}} \Phi^{-1}(\mathbf{T})$, e esta união é disjunta e finita

resultando $\#(\mathcal{R}_L^c) = \sum_{\mathbf{T} \in \Gamma_{\phi, \psi}} \#(\Phi^{-1}(\mathbf{T})) = d \cdot \#(\Gamma_{\phi, \psi})$. □

Corolário 3.9. Sejam Γ_ϕ e Γ_ψ o conjunto dos automorfismos que fixam $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ e $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\psi)$, respectivamente. Se $\Gamma_{\phi,\psi} \neq \emptyset$, então Γ_ϕ e Γ_ψ são grupos isomorfos. Além disso, $\sharp(\mathcal{R}_L^c) = d \cdot |\Gamma_\phi|$.

Demonstração. Seja $S \in \Gamma_{\phi,\psi}$. Então $I_S : \Gamma_\phi \rightarrow \Gamma_\psi$, dada por $\mathbf{T} \mapsto S^{-1} \circ \mathbf{T} \circ S$ é um isomorfismo de grupos. Por outro lado, $\Theta : \Gamma_\phi \rightarrow \Gamma_{\phi,\psi}$ dada por $\mathbf{T} \mapsto \mathbf{T} \circ S$ é uma bijeção. Da proposição anterior temos $\sharp(\mathcal{R}_L^c) = d \cdot \sharp(\Gamma_{\phi,\psi})$. Logo, $\sharp(\mathcal{R}_L^c) = d|\Gamma_\phi| = d|\Gamma_\psi|$. \square

3.2 Quantidade máxima de retas numa superfície da família \mathcal{F}^d

Uma superfície da família \mathcal{F}^d é $\mathcal{Z}(F_{\psi,\phi})$, com $F_{\psi,\phi} = \phi(X, Y) - \psi(Z, W)$, onde ϕ, ψ são homogêneos de grau $d \geq 3$ livres de quadrados.

Temos $\phi = H_1 \cdot \dots \cdot H_d$, $\psi = G_1 \cdot \dots \cdot G_d$ e considerando as retas $L = \mathcal{Z}(Z, W)$ e $M = \mathcal{Z}(X, Y)$. Seja

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \{ \text{as retas contidas em } \mathcal{Z}(F) \}.$$

Vimos

$$\mathcal{R}_L^c =$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathcal{S}) &= \{l \subset \mathcal{S} \mid l \cap L \neq \emptyset \text{ e } l \cap M \neq \emptyset\} \cup \{l \subset \mathcal{Z}(F) \mid l \cap M = \emptyset\} \\ &= \{l \subset \mathcal{S} \mid l = L_{i,j} = \mathcal{Z}(H_i, G_j)\} \cup \mathcal{R}_L^c \\ &= \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_L^c. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Do Lema 3.2 segue $\sharp(\mathcal{R}_L) = d^2$, e da Proposição 3.8 que $\sharp(\mathcal{R}_L^c) = d \cdot \sharp(\Gamma_{\phi,\psi})$. Assim

$$\sharp(\mathcal{R}(\mathcal{S})) = d^2 + d \cdot \sharp(\Gamma_{\phi,\psi}). \tag{3.6}$$

Além disso, se $\Gamma_{\phi,\psi} \neq \emptyset$, o corolário 3.9 nos diz que $\sharp(\Gamma_{\phi,\psi}) = |\Gamma_\phi| = |\Gamma_\psi| \geq 1$. E neste caso,

$$\sharp(\mathcal{R}(\mathcal{S})) = d^2 + d \cdot |\Gamma_\phi| = d^2 + d \cdot |\Gamma_\psi|. \tag{3.7}$$

Assim, a quantidade máxima de retas contidas numa superfície da família \mathcal{F}^d , por (3.7), depende da ordem máxima que um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ que deixa invariante d pontos de \mathbb{P}_1 pode atingir.

Proposição 3.10. Seja $d \geq 3$ e $C \subseteq \mathbb{P}^1$ formado por exatamente d pontos, então:

- (i) Se Γ_C for um grupo cíclico então $|\Gamma_C| \leq d$.
- (ii) Se $\Gamma_C \cong D_n$, então $n|d$ ou $n|(d-2)$. Em particular, $n \leq d$.
- (iii) Se $C = U_d$, as raízes d -ésimas da unidade, então $\Gamma_C \cong D_d$.
- (iv) Se d for ímpar e Γ_C não for um grupo cíclico, então $\Gamma_C \cong D_n$, para algum n , $3 \leq n \leq d$.

Demonstração. (i) Seja $\Gamma_C = \langle \mathbf{T} \rangle$ e $\text{ord}(\mathbf{T}) = N = |\Gamma_C|$. Como $\#C = d \geq 3$, existe $P \in C$ não fixado por \mathbf{T} , nem por nenhum elemento de Γ_C . Logo $\#\mathcal{O}_P = |\Gamma_C| = N$ e como $\mathcal{O}_P \subseteq C$, temos $N \leq d$. Assim $|\Gamma_C| \leq d$.

(ii) Seja $\Gamma_C \cong D_n$. Segue da decomposição de órbitas na proposição 2.13 que:

$$d = \alpha n + \beta n + \gamma 2 + \delta 2n, \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}, \quad \delta \geq 0.$$

Se $\gamma = 0$ temos $n|d$ e assim $n \leq d$.

Se $\gamma = 1$ então $n|(d-2)$ e assim $n \leq d$.

(iii) Já vimos que para $d = 3$, $\Gamma_C \cong D_3$, independente de C . Vamos supor $d \geq 4$.

Assuma que $C = \{1, \omega, \dots, \omega^{d-1}\}$, com ω raiz primitiva d -ésima da unidade. Sejam $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ tais que $\mathbf{T}([X : Y]) = [\omega X : Y]$, $\mathbf{S}([X : Y]) = [Y : X]$. Temos que $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \Gamma_C$, e $\langle \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle \cong D_d$, já que $\text{ord}(\mathbf{T}) = d$, $\text{ord}(\mathbf{S}) = 2$ e $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}^{d-1}$. Logo, Γ_C não é cíclico e tem ordem $2dm$ para algum $m \in \mathbb{N}$.

- $d = 4$.

Neste caso, $|\Gamma_C| = 8m$. Pelo teorema 2.11, $\Gamma_C \cong D_n$ ou $\Gamma_C \cong S_4$. Se o primeiro caso ocorrer, do item anterior temos que $n \in \{1, 2, 4\}$, e $|\Gamma_C| \leq 8$. Assim, $m = 1$ e $\Gamma_C \cong D_4$. $\Gamma_C \not\cong S_4$, caso contrário, pela decomposição em órbitas, existiriam $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ e $\delta \geq 0$ tais que $4 = \alpha 6 + \beta 8 + \gamma 12 + \delta 24$, o que não é possível.

- $d = 5$.

Neste caso, $|\Gamma_C| = 10m$. Pelo teorema 2.11, $\Gamma_C \cong D_n$ ou $\Gamma_C \cong A_5$. Se o primeiro caso ocorrer, do item (ii) temos que $n \in \{1, 3, 5\}$, e $|\Gamma_C| \leq 10$. Assim, $m = 1$ e $\Gamma_C \cong D_5$. $\Gamma_C \not\cong A_5$, caso contrário, pela decomposição em órbitas, existiriam $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ e $\delta \geq 0$ tais que $4 = \alpha 12 + \beta 20 + \gamma 30 + \delta 60$, o que não é possível.

- $d \geq 6$.

Γ_C não é cíclico e tem ordem $2dm$. Note que admite um elemento de ordem $d \geq 6$, segue do teorema 2.11 que Γ_C só pode ser isomorfo ao grupo dihedral D_n

3. A família \mathcal{F}^d

de ordem $2n$. Do item (ii), $n \leq d$. Assim $|\Gamma_C| = 2dm = 2n \leq 2d$, resultando $m = 1$ e $\Gamma_C \cong D_d$.

(iv) Se Γ_C não é cíclico, o teorema 2.11 nos diz que $\Gamma_C \cong G$ onde G é o grupo dihedral ou $G \in \{A_4, S_4, A_5\}$. Da proposição 2.14

$$d = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 + \delta |\Gamma_C|, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}, \quad \delta \geq 0,$$

e $n_i = \#(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Se $\Gamma_C \cong G$ com $G \in \{A_4, S_4, A_5\}$, pela proposição 2.13 n_i é par para todo i e $|G| = |\Gamma_C|$ também é par, implicando que d seja par. Assim $\Gamma_C \cong D_n$ para algum $3 \leq n \leq d$.

□

Teorema 3.11. *Seja $d \geq 3$ e $\alpha_d^{max} = \max\{|\Gamma_C| \mid C \subseteq \mathbb{P}^1, \#C = d\}$. Então:*

(1) *Se d é ímpar então $\alpha_d^{max} = 2d$.*

(2) *Se d é par:*

- *Para $d \notin \{4, 6, 8, 12, 20\}$ tem-se $\alpha_d^{max} = 2d$.*
- *$\alpha_4^{max} = 12$, $\alpha_6^{max} = 24$, $\alpha_8^{max} = 24$, $\alpha_{12}^{max} = 60$ e $\alpha_{20}^{max} = 60$.*

Demonstração. Para começar, vejamos que para qualquer $d \in \mathbb{Z}$, $\alpha_d^{max} \in \{2d, 12, 24, 60\}$.

Segue da proposição 3.10, e do teorema 2.11, que

- Se Γ_C é cíclico, $|\Gamma_C| \leq d < 2d$.
- Se $\Gamma_C \cong D_n$, como $n \leq d$ segue que $|\Gamma_C| = 2n \leq 2d$.
- Se $\Gamma_C = U_d$, então $\Gamma_C \cong D_d$ e assim $|\Gamma_C| = 2d$.
- Se $\Gamma_C \cong G$, com $G \in \{A_4, S_4, A_5\}$, então C pode ser escrito como união finita de órbitas de comprimento par, desde que a ordem desses grupos é par e cada um deles na sua decomposição só admitem órbitas de ordem par:

\mathcal{P}	$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3$
A_4	4 4 6
S_4	12 8 6
A_5	30 20 12

Logo, $\alpha_d^{max} \in \{2d, 12, 24, 60\}$. E se $d \geq 30$, temos $|\Gamma_C| = 2d$, e assim precisamos apenas calcular α_d^{max} para $3 \leq d \leq 29$.

(1) Pelo que analisamos acima, $\alpha_d^{max} = 2d$ se d é ímpar.

- (2) Precisamos apenas analisar os casos em que $3 \leq d \leq 29$ com d par. Das proposições 2.13, 2.14 temos que se $\Gamma_C \cong G$, com $G \in \{D_n, A_4, S_4, A_5\}$, então obtemos a seguinte tabela:

G	$d = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 + \delta G $	
D_n	$d = \alpha n + \beta n + \gamma 2 + \delta 2n$	
A_4	$d = \alpha 6 + \beta 4 + \gamma 4 + \delta 12$	(3.8)
S_4	$d = \alpha 12 + \beta 8 + \gamma 6 + \delta 24$	
A_5	$d = \alpha 30 + \beta 20 + \gamma 12 + \delta 60$	

com $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ e $\delta \geq 0$ inteiro.

Sejam $\infty = [1 : 0]$ e $t = [t : 1]$ pontos em \mathbb{P}^1 .

- $d = 4$: Pela tabela (3.8), temos que $\Gamma_{C_4} \cong D_n$ com $n \in \{1, 2, 4\}$ ou $\Gamma_{C_4} \cong A_4$. Seja $C_4 = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$, com ω raiz cúbica primitiva da unidade. Observe que $\mathbf{T}([X : Y]) = [\omega X : Y] \in \Gamma_{C_4}$ e tem ordem 3. Mas D_2 e D_4 não possuem elementos de ordem 3. Resta que $\Gamma_{C_4} \cong A_4$, e assim $\alpha_4^{max} = 12$.
- $d = 6$: Pela tabela (3.8), temos que $\Gamma_{C_6} \cong G$ para $G \in \{D_n, A_4, S_4\}$ com $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Seja $C_6 = \{\infty, 0, 1, i, -1, -i\}$, onde $i \in \mathbb{C}$ é a raiz quarta primitiva da unidade. Note que os automorfismos \mathbf{T}, \mathbf{S} dados por $\mathbf{T}([X : Y]) = [iX : Y]$ e $\mathbf{S}([X : Y]) = [Y : X]$ são elementos de Γ_{C_6} , cujas ordens são $ord(\mathbf{T}) = 4$ e $ord(\mathbf{S}) = 2$, além de valer a igualdade $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}^3$. Logo, $\langle \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle \cong D_4$. Neste caso, temos $|\Gamma_{C_6}| = 8u$, $1 \leq u \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, verifica-se que $\mathbf{R} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ dada por $\mathbf{R}([X : Y]) = [X - iY : -X - iY]$ tem ordem 3 e pertence a Γ_{C_6} . De onde $|\Gamma_{C_6}| = 24v$, $v \in \mathbb{N}$. Juntando estas informações ao fato de $|\Gamma_{C_6}| \in \{2, 4, 6, 8, 12, 24\}$, segue que $|\Gamma_{C_6}| = 24$ e $\Gamma_{C_6} \cong S_4$. Portanto, $\alpha_6^{max} = 24$.
- $d = 8$: Analisando a tabela (3.8), temos que $\Gamma_{C_8} \cong G$ para $G \in \{D_n, A_4, S_4\}$ com $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$. Seja

$$C_8 = \{\xi, i\xi, -\xi, -i\xi, \xi^{-1}, i\xi^{-1}, -\xi^{-1}, -i\xi^{-1}\},$$

onde ξ é raiz da equação $X^2 - (i+1)X - i = 0$. Os automorfismos \mathbf{T}, \mathbf{S} considerados no caso $d = 6$ também pertencem a Γ_{C_8} , e assim $|\Gamma_{C_8}| = 8u$, $1 \leq u \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, verifica-se que $\mathbf{R} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ dada por $\mathbf{R}([X : Y]) = [X - iY : -X - iY]$ tem ordem 3 e pertence a Γ_{C_8} . De onde $|\Gamma_{C_8}| = 24v$, $v \in \mathbb{N}$. Juntando estas informações ao fato de $|\Gamma_{C_8}| \in \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$, segue que $|\Gamma_{C_8}| = 24$ e $\Gamma_{C_8} \cong S_4$. Portanto, $\alpha_8^{max} = 24$.

- $d = 10$: Pela a tabela (3.8), temos que $\Gamma_{C_{10}} \cong G$ para $G \in \{D_n, A_4\}$ com

$n \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$. Logo $|\Gamma_{C_{10}}| \in \{2, 4, 6, 10, 12, 16, 20\}$. Tomando $C_{10} = U_{10}$, pelo terceiro item da proposição 3.10, $\Gamma_{C_{10}} \cong D_{10}$ e tem ordem 20. Assim $\alpha_{10}^{max} = 2 \cdot 10 = 20$.

- $d = 12$: Analisando a tabela (3.8), temos que $\Gamma_{C_{12}} \cong G$ para $G \in \{D_n, A_4, S_4, A_5\}$, com n um divisor de 12 ou 10. Sejam ω raiz quinta primitiva da unidade e $\theta = \omega^3 + \omega^2$. Considere

$$\Gamma_{C_{12}} = \{\infty, 0, \theta, \omega\theta, \omega^2\theta, \omega^3\theta, \omega^4\theta, -\theta^{-1}, -\omega^2\theta^{-1}, -\omega^3\theta^{-1}, -\omega^4\theta^{-1}\}.$$

Note que os automorfismos \mathbf{T}, \mathbf{S} dados por $\mathbf{T}([X : Y]) = [\omega X : Y]$ e $\mathbf{S}([X : Y]) = [-Y : X]$ são elemntos de $\Gamma_{C_{12}}$, cujas ordens são $ord(\mathbf{T}) = 5$ e $ord(\mathbf{S}) = 2$, além de valer a igualdade $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}^4$. Logo, $\langle \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle \cong D_5$. Neste caso, temos $|\Gamma_{C_{12}}| = 10u$, $1 \leq u \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, verifica-se que $\mathbf{R} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ dada por $\mathbf{R}([X : Y]) = [\omega\theta X + Y : \omega X - \theta Y]$ tem ordem 3 e pertence a $\Gamma_{C_{12}}$. De onde $|\Gamma_{C_{12}}| = 30v$, $1 \leq v \in \mathbb{Z}$. Juntando estas informações ao fato de $|\Gamma_{C_{12}}| \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 20, 24, 60\}$, segue que $|\Gamma_{C_{12}}| = 60$ e $\Gamma_{C_{12}} \cong A_5$. Portanto, $\alpha_{12}^{max} = 60$.

- $14 \leq d \leq 28$ par: Pela a tabela (3.8), o único valor de d para o qual o grupo Γ_C poderia ser isomorfo a A_5 é $d = 20$. Nos outros casos, $\Gamma_C \cong G$ com $G \in \{D_n, A_4, S_4\}$. Se $d \in \{16, 22, 28\}$, $\Gamma_C \not\cong S_4$. Agora, mesmo que A_4 ou S_4 sejam ou não isomorfo a Γ_C , temos $|A_4| = 12 < |S_4| = 24 < 2d$ para $d \geq 14$.

Logo, se $14 \leq d \leq 28$, $d \neq 20$, segue que $\alpha_d^{max} = 2d$.

- Verifiquemos que para $d = 20$ tem-se $\alpha_{20}^{max} = 60$.

Temos $\alpha_{20}^{max} \in \{40, 60\}$, onde $|\Gamma_{C_{20}}| = 40$ quando $C_{20} = U_{20}$. Tomemos os automorfismos \mathbf{T}, \mathbf{S} e \mathbf{R} definidos no caso $d = 12$.

AFIRMAÇÃO: Seja $h = \langle \mathbf{T}, \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle$. Então $H \cong A_5$.

Sabemos que H é subgrupo de $\Gamma_C \cong A_5$, sendo

$$C = \{\infty, 0, \theta\omega^i, -\theta^{-1}\omega^i\}_{i=0}^4.$$

Assim H é finito com $|H| \leq 60$. Lembre-se que $ord(\mathbf{T}) = 5$, $ord(\mathbf{S}) = 2$ e $ord(\mathbf{R}) = 3$. Daí $|H| = 30u$, $1 \leq u \in \mathbb{Z}$. Suponha que $|H| = 30$, neste caso $(\Gamma_C : H) = 2$, e H seria um subgrupo normal não simples de $\Gamma_C \cong A_5$. Mas isto não ocorre pois A_5 é simples.

A decomposição em órbitas dos pontos fixos dos elementos de H é $\mathcal{P}_H = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3$, e $\sharp(\mathcal{O}_1) = 30$, $\sharp(\mathcal{O}_2) = 20$ e $\sharp(\mathcal{O}_3) = 12$, já que os respectivos estabilizadores

tem ordem $|H_1| = 2$, $|H_2| = 3$ e $|H_3| = 5$.

Note que para cada $P \in \mathcal{P}_H$, P pertence apenas a uma das órbitas. Mais ainda, se $P \in \mathcal{O}_i$ então $|H_P| = |H_I|$, onde H_P é o estabilizador de P em H . Logo, se P é ponto fixo de $\mathbf{R} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, temos que $\mathbf{R} \in H_P$. Como $\text{ord}(\mathbf{R}) = 3$, $|H_P| = 3$. Assim $P \in \mathcal{O}_2$, implicando que $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_2$ e $\sharp(\mathcal{O}_P) = 20$. Finalmente, considere $C' = \mathcal{O}_P$. Como $\mathbf{T}, \mathbf{S}, \mathbf{R} \in \Gamma_{C'}$, segue que $H \leq \Gamma_{C'}$, e $|\Gamma_{C'}| = 60u$, $1 \leq u \in \mathbb{Z}$. Como $\Gamma_{C'} \cong G$, com $G \in \{D_n, A_4, S_4, A_5\}$ onde n divide 20 ou 18, $|\Gamma_{C'}| = 60$. Portanto $\alpha_{20}^{\max} = 60$.

□

Finalmente, podemos enunciar o teorema principal aplicando as informações encontradas acima na equação (3.7).

Teorema 3.12. *Seja N_d o número máximo de retas que uma superfície da família \mathcal{F}^d , $d \geq 3$ pode conter. Então:*

(i) *Para d ímpar ou d par diferente de 4, 6, 8, 12 e 20 tem-se*

$$N_d = 3d^2.$$

(ii) *Nos outros casos temos $N_4 = 64$, $N_6 = 180$, $N_8 = 256$, $N_{12} = 864$ e $N_{20} = 4800$.*

3.3 Retas em superfícies de grau d em \mathbb{P}^3

Já sabemos que o número máximo de retas em superfícies de graus $d \geq 5$, no espaço projetivo, ainda não é conhecido. Mas ao estudarmos famílias de superfícies, como fizemos neste capítulo, obtemos uma cota inferior para a quantidade de retas que uma superfície qualquer em \mathbb{P}^3 pode conter.

Exemplo 3.2. Considere

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z, W) = & X^8 + Y^8 + Z^8 + W^8 + 168X^2Y^2Z^2W^2 \\ & + 14(X^4Y^4 + X^4Z^4 + X^4W^4 + Y^4Z^4 + Y^4W^4 + Z^4W^4). \end{aligned}$$

A superfície $\mathcal{Z}(F)$ tem grau 8 e contém 352 retas. Mais retas que o valor encontrado para a nossa família ($N_8 = 256$).

Apêndice A

Resultados Básicos

Neste apêndice exibiremos os conceitos básicos e resultados substanciais para o desenvolvimento desta dissertação.

A.1 Geometria Algébrica

Considere $S = \mathbb{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$, e para cada $0 \leq d$ inteiro, seja S_d o subespaço vetorial de S gerado pelos monômios de grau d . Os polinômios $F \in S_d$ não nulos são chamados de polinômios homogêneos de grau d . Também denotaremos por S^h o conjunto dos polinômios homogêneos em S .

Observação A.1. 1. $F \in S_d$ se, e somente se, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$

$$F(\lambda X_0, \dots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, \dots, X_n).$$

Definição A.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{K} . Para cada inteiro $0 \leq d \leq \dim V$ definimos o conjunto

$$G_d(V) = \{W \leq V \mid \dim W = d\}$$

denominado *d-grassmaniana associada a V* ou *grassmanina dos subespaços d-dimensionais de V*. Para $d = 1$ dizemos que $G_1(V)$ é a projetivização de V e denotamos por $\mathbb{P}(V)$.

Exemplo A.1. 1. Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $V = \mathbb{C}$, temos que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ e portanto $d = 0, 1$. Assim $G_0(\mathbb{C}) = \{\{0\}\}$ e $G_1(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C}\}$.

2. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $V = \mathbb{R}^2$.

Temos que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ e portanto $d = 0, 1, 2$. Neste caso,

$G_0(\mathbb{R}^2) = \{\{0\}\}$, $G_1(\mathbb{R}^2) = \{W \leq \mathbb{R}^2 \mid \dim W = 1\}$, que é o conjunto das retas em \mathbb{R}^2 que contém a origem; e $G_2(\mathbb{R}^2) = \{\mathbb{R}^2\}$

Definição A.2. O n -espaço projetivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ sobre o corpo \mathbb{K} é definido por

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = G_1(\mathbb{K}^{n+1}).$$

Notação: Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, usaremos \mathbb{P}^n em lugar de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Além disso, dado $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ não nulo, usaremos a notação $[v] = [v_0 : \dots : v_n]$ e diremos que v_0, \dots, v_n são as coordenadas homogêneas do ponto $[v]$.

Exemplo A.2. 1. $\mathbb{P}^0 = \{[1]\}$ é um ponto.

2. \mathbb{P}^1 é a reta projetiva sobre \mathbb{C} .

3. \mathbb{P}^2 é o plano projetiva complexo.

4. \mathbb{P}^3 é o 3-espaço projetivo, usualmente chamado de espaço projetivo complexo.

Observação A.2. Seja V espaço vetorial sobre \mathbb{K} , sejam $u, v \in V - \{0\}$. Então $[u] = [v]$ se, e só se, $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Definição A.3. Seja $F \in S_d$, definiremos o conjunto dos zeros de F por

$$Z(F) = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n \mid F(a_0, \dots, a_n) = 0\}.$$

Observe que $Z(F)$ está bem definido pelo fato de F ser homogêneo.

Exemplo A.3. • $F = X_0$, $Z(X_0) = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n \mid a_0 = 0\} = \{[0 : a_1 : \dots : a_n] \mid [a_1 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^{n-1}\}$.

• $F = X_0^3$, $Z(X_0^3) = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n \mid a_0^3 = 0\} = \{[0 : a_1 : \dots : a_n] \mid [a_1 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^{n-1}\}$.

Note que $Z(X_0) = Z(X_0^3)$, assim não podemos definir o grau de $Z(F)$ como o grau do polinômio F .

Definição A.4. Um subconjunto \mathcal{X} de \mathbb{P}^n é denominado conjunto algébrico se for possível achar um conjunto finito de polinômios homogêneos F_1, \dots, F_e (não necessariamente de mesmo grau) tais que $\mathcal{X} = \mathcal{Z}(F_1) \cap \dots \cap \mathcal{Z}(F_e)$.

Definição A.5. Os elementos de $\mathbb{P}(S_d)$ com $d \geq 1$ serão chamados de hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^n . Por exemplo, $[X^3]$ é uma hipersuperfície de grau 3.

Definição A.6. Seja $F \in S_d - \{0\}$ com $d \geq 1$, então $\mathcal{Z}(F)$ é denominada hipersuperfície reduzida se, e somente se, F é polinômio livre de quadrados.

Definição A.7. Λ é uma variedade k -linear em \mathbb{P}^n se existir algum $W \in G_{k+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $\Lambda = \{[v] \in \mathbb{P}^n \mid v \in W, v \neq 0\}$.

Definição A.8. $l \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma reta se for uma variedade 1-linear em \mathbb{P}^n . Ou seja, existe $W \in G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $l = \{[u] \in \mathbb{P}^n \mid u \neq 0, u \in W\}$.

Lema A.1. Seja l uma reta em \mathbb{P}^n , então existem formas lineares $L_1, \dots, L_{n-1} \in S_1$ linearmente independentes, tais que $l = Z(L_1) \cap \dots \cap Z(L_{n-1})$.

Demonstração. Veja pág. 8 em [15]. □

Observação A.3. 1. Seja $l \subseteq \mathbb{P}^n$, l é uma reta se, e só se, existem $u, v \in \mathbb{C}^{n+1}$ linearmente independentes, tais que $l = \{[tu + sv] \in \mathbb{P}^n \mid [t : s] \in \mathbb{P}^1\}$.

De fato, $l \subseteq \mathbb{P}^n$ é reta se, e só se, $l = \{[w] \in \mathbb{P}^n \mid w \in W \setminus \{0\}\}$ com $W \in G_2(\mathbb{C}^{n+1})$. Fixe $\{u, v\}$ base de W , logo w pode ser escrito na forma $w = tu + sv$ com $[t, s] \in \mathbb{P}^1$. Daí $l = \{[tu + sv] \in \mathbb{P}^n \mid [t : s] \in \mathbb{P}^1\}$.

2. Segue da definição de reta em \mathbb{P}^n que a função definida a seguir é uma bijeção.

$$\begin{aligned} G_2(\mathbb{C}^{n+1}) &\longrightarrow \{l \subseteq \mathbb{P}^n \mid l \text{ é reta} \} \\ W &\longmapsto \{[u] \in \mathbb{P}^n \mid u \in W, u \neq 0\}. \end{aligned}$$

Por esta motivação, $G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ é dita grassmaniana de retas ou um espaço de parâmetros para retas em \mathbb{P}^n .

Definição A.9. Um ideal $I \subset S$ é dito ideal homogêneo se existir um conjunto finito de polinômios homogêneos F_1, \dots, F_k , não necessariamente de mesmo grau, tais que $I = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$.

Proposição A.2. Sejam L_1, L_2, \dots, L_k formas lineares (ie, polinômios homogêneos de grau 1 não nulos em $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$), verifica-se que

$$\sqrt{\langle L_1, \dots, L_k \rangle} = \langle L_1, \dots, L_k \rangle.$$

Demonstração. Vamos verificar que $I = \langle L_1, \dots, L_k \rangle$ é ideal primo. Sejam h e g polinômios em $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ tais que $fg \in I$. A menos de uma reordenação nas variáveis, podemos escolher os geradores de I na forma: $L_i = X_i + M_i$, com $M_i \in \mathbb{K}[X_{k+1}, \dots, X_n]$ para $i = 1, \dots, k$. Aplicando o algoritmo da divisão de euclides para cada L_i ($i = 1, \dots, k$) temos

$$\begin{aligned} h &= \sum_{i=1}^k h_i L_i + R(X_{k+1}, \dots, X_n) = \tilde{h} + R \\ g &= \sum_{i=1}^k g_i L_i + Q(X_{k+1}, \dots, X_n) = \tilde{g} + Q \end{aligned}$$

Daí $hg = \tilde{h}\tilde{g} + \tilde{h}Q + \tilde{h}R + RQ \in I$ e $RQ \in I$ já que $\tilde{h}\tilde{g}, \tilde{h}Q, \tilde{h}R$. Logo $RQ = \sum_{i=1}^k A_i L_i$, com $A_i \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ para todo i . De onde concluímos que $RQ = 0$ num domínio e assim R ou Q é nulo, implicando que $h \in I$ ou $g \in I$. \square

Definição A.10. Definimos o ideal associado a \mathcal{X} por:

$$\mathcal{I}(\mathcal{X}) = \langle \{F \in S^h \mid F(p) = 0, \forall p \in \mathcal{X}\} \rangle.$$

Verifica-se que $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ é ideal homogêneo e radical. O anel de coordenadas homogêneas de \mathcal{X} é o anel quociente $A(\mathcal{X}) = \frac{\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]}{\mathcal{I}(\mathcal{X})}$.

Proposição A.3. $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ é dito irredutível se e somente se $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ é primo.

Demonstração. Ver exercício 11.b, pág. 378 em [5]. \square

Definição A.11. Um subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ é dito uma variedade projetiva se for um conjunto algébrico irredutível.

Definição A.12. A dimensão de uma variedade projetiva \mathcal{X} pode ser definida pela dimensão de Krull do seu anel de coordenadas menos um

$$\dim(\mathcal{X}) = \text{Sup}\{n \in \mathbb{N} \mid P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_n; \quad P_i \in \text{Spec}(A(\mathcal{X}))\} - 1.$$

Proposição A.4. Sejam \mathcal{X}, \mathcal{Y} conjuntos algébricos em \mathbb{P}^n tais que \mathcal{Y} irredutível, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ e $\dim \mathcal{X} = \dim \mathcal{Y}$. Então $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.

Demonstração. Ver Teorema 1 pág 68 [8]. \square

Teorema A.5 (Zeros de Hilbert). *Seja \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado. Seja $I \subseteq S$ um ideal homogêneo tal que $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$. Então*

$$\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}.$$

Demonstração. Ver Teorema 9, pág. 375 em [5]. \square

Teorema A.6. (Teorema da Dimensão das Fibras) *Sejam X e Y variedades quase projetivas irredutíveis e $\varphi : X \rightarrow Y$ um morfismo dominante. Então:*

(i) $\dim X \geq \dim Y$.

(ii) *Para todo $y \in \text{Im}(\varphi)$ e para qualquer componente irredutível Z de $\varphi^{-1}(y)$ tem-se $\dim Z \geq \dim X - \dim Y$.*

(iii) *Existe um aberto $U \subset Y$ não vazio tal que $\dim(\varphi^{-1}(y)) = \dim X - \dim Y$ para todo $y \in U$.*

Demonstração. Ver Teorema 1.25 pag. 75 em [8]. \square

A.2 Mudança de coordenadas projetivas em \mathbb{P}^n

A mudança de coordenadas é muito útil para facilitar certas contas. Seja $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um isomorfismo linear, i.e., uma transformação linear bijetora, então T preserva subespaços de \mathbb{C}^{n+1} . Logo T induz uma bijeção em \mathbb{P}^n :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ [v] &\mapsto \mathbf{T}([v]) = [T(v)] \end{aligned}$$

denominada mudança de coordenadas projetiva. Note que um k -plano $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ definido por $W \in G_{k+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ é levado no k -plano $\mathbf{T}(\Lambda) \subseteq \mathbb{P}^n$ definido por $T(W) \leq \mathbb{C}^{n+1}$. Assim retas, planos, etc, são aplicados (respectivamente) em retas, planos, etc, pela mudança de coordenadas projetivas \mathbf{T} .

Vejam agora algumas propriedades das mudanças de coordenadas projetivas.

1. Mudança de coordenadas projetivas preservam conjuntos algébricos.

Seja $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ homogêneo de grau d e $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um isomorfismo linear. Note que, como $Z(F) = \{[v] \in \mathbb{P}^n \mid F(v) = 0\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(Z(F)) &= \{[T(v)] \mid [v] \in Z(F)\} \\ &= \{[T(v)] \mid F(v) = 0\}, \text{ e sendo } T(v) = w \\ &= \{[w] \mid F(T^{-1}(w)) = 0\} \\ &= \{[w] \mid T_d F(w) = 0\} \\ &= Z(T_d F) \end{aligned}$$

Acima consideramos o isomorfismo $T_d : S_d \rightarrow S_d$, dado por $F \mapsto T_d(F)$ e $(T_d(F))(p) = F(T^{-1}(p))$.

Logo \mathbf{T} aplica hipersuperfícies algébricas em hipersuperfícies algébricas. E portanto conjuntos algébricos em conjuntos algébricos, já que $\mathbf{T}(\mathcal{X}) = \bigcap_{i=1}^s Z(T_d F_i)$ se $\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^s Z(F_i)$.

2. Mudança de coordenadas projetivas preservam grau de hipersuperfícies.

Com efeito, dado $Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau d . Do item anterior temos que $\mathbf{T}(Z(F)) = Z(T_d F)$. Agora, por T_d ser isomorfismo linear em S_d segue da nossa definição que $\mathbf{T}(Z(F))$ é hipersuperfície de grau d .

3. Mudança de coordenadas projetivas preservam interseções.

Estas mudanças são bijeções.

4. Mudança de coordenadas projetivas preservam singularidades.

De fato, seja $Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ superfície singular de grau d com $p = [v] \in \text{Sing}(S)$. Então $F_{X_i}(v) = 0$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Por outro lado,

$$T_{d-1} F_{X_i}(\mathbf{T}(p)) = F_{X_i}(T^{-1}(\mathbf{T}(p))) = F_{X_i}(T^{-1}(T(v))) = F_{X_i}(v) = 0$$

para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

A.3 Cone em \mathbb{P}^n

Definição A.13. $\mathcal{Z}(F)$ é um cone em \mathbb{P}^n se existe uma mudança de coordenadas projetivas $\mathbf{T} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ tal que em $\mathbf{T}_d F$ comparecem no máximo n indeterminadas, se $F \in S_d$.

Proposição A.7. Se $\mathcal{X} \subsetneq \mathbb{P}^3$ é um cone, então \mathcal{X} contém infinitas retas.

Demonstração. Se $\mathcal{X} = \mathcal{Z}(F)$ com $F \in S_d$ é um cone então existe uma MCP $\mathbf{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que W não comparece em $T_d F$. Assim, $f = T_d F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$.

Note que $v = [0 : 0 : 0 : 1] \in \mathcal{Z}(f)$. Seja $q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3] \in \mathcal{Z}(f)$ diferente de v , isto é, $q_0 \neq 0$ ou $q_1 \neq 0$ ou $q_2 \neq 0$. Considere $l_{v,q}$ a única reta em \mathbb{P}^3 que passa por v e q . Logo $l_{v,q} = \{[\beta q_0 : \beta q_1 : \beta q_2 : \alpha + \beta q_3] \in \mathbb{P}^3 \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\}$.

AFIRMAÇÃO(1): $l_{v,q} \subset \mathcal{Z}(f)$.

De fato, considere $p = [\beta q_0 : \beta q_1 : \beta q_2 : \alpha + \beta q_3] \in l_{v,q}$. Note que $f(p) = f(\beta q_0, \beta q_1, \beta q_2) = \beta^d f(q_0 : q_1 : q_2) = \beta^d f(q) = 0$ para todo $p \in l_{v,q}$.

Agora observe que o plano $\pi_0 = \mathcal{Z}(W)$ encontra a superfície $\mathcal{Z}(f)$ na curva $\mathcal{C} = \mathcal{Z}(W, f) \subset \mathcal{Z}(f)$.

AFIRMAÇÃO(2): Existe uma bijeção entre $\mathcal{C} = \mathcal{Z}(W, f)$ e

$$\mathcal{L} = \{l \subseteq \mathbb{P}^3 \mid l \text{ é reta contida em } \mathcal{X} \text{ passando por } v\}.$$

De fato, defina $\Omega : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}$ onde $\Omega(q) = l_{v,q}$.

- Ω é injetiva: Seja $l_{v,q} = l_{v,r}$, então $r \in l_{v,q}$. Mas $r \in \mathcal{C}$ daí temos $q = [q_0 : q_1 : q_2 : 0] \in \mathcal{C}$ e $r = [r_0 : r_1 : r_2 : 0] \in \mathcal{C}$, além disso, $r = [\beta q_0 : \beta q_1 : \beta q_2 : \alpha]$ para algum $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $\lambda r_i = \beta q_i$ ($i = 0, 1, 2$) e $0 = \alpha$. Donde $\beta \neq 0$ e assim $\frac{\lambda}{\beta} r_i = q_i$ ($i = 0, 1, 2$) implicando que $q = r$.

- Ω é sobrejetiva: Sejam $l \in \mathcal{L}$ e $r \in l \cap \mathcal{Z}(W)$, então $l = l_{v,r}$ ($r \neq v$).

AFIRMAÇÃO(3): $r \in \mathcal{C}$. Sabemos que $r \in \mathcal{Z}(W)$. Assim só vamos verificar que $f(r) = 0$. Como $r \in l \subset \mathcal{X}$ segue que $f(r) = 0$ e assim $r \in \mathcal{Z}(f)$.

Logo, como \mathcal{C} é um conjunto infinito, existem infinitas retas em \mathcal{X} .

□

A.4 Alguns fatos sobre grupos e ação de grupos

Os resultados a seguir se encontram em “Elementos de Álgebra” [2].

Durante o texto mencionamos:

- Grupo de Klein $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,
- Grupo A_4 das permutações pares em S_4 ,

$$A_4 = \left\{ \begin{array}{l} id, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (124), (132), \\ (143), (234), (123), (134), (142), (243) \end{array} \right\}$$

Como também o grupo dihedral D_n das simetrias espaciais do polígono regular de n lados. Este grupo admite a seguinte representação (Ver pág. 196 em [2])

$$\left\{ \begin{array}{l} |D_n| = 2n \\ D_n = \langle a, b \rangle \\ a^n = e \\ b^2 = e \\ bab^{-1} = a^{n-1} \end{array} \right.$$

Lema A.8. Se $H \leq \mathbb{C} - \{0\}$ de ordem N , então

$$H = U_N = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid z^N = 1\}.$$

Demonstração. Seja $H \subseteq \mathbb{C} - \{0\}$ um subgrupo de ordem N . Note que o elemento neutro de H é 1 e todo elemento $z \in H$ é tal que $ord(z) \mid N$ ou seja, $z^N = 1$. Assim, $H \subseteq U_N$. Por outro lado, $U_N \leq \mathbb{C} - \{0\}$ é subgrupo de ordem N . Logo $H = U_N$. \square

Lema A.9. Seja $H \leq G$ subgrupo tal que $(G : H) = 2$, então H é subgrupo normal de G .

Demonstração. Ver Exemplo V.4.3.4, pág. 154 em [2]. \square

Definição A.14. Seja G um grupo, C um conjunto. $\rho : G \times C \rightarrow C$ é uma ação de grupo G em C se para todos $a, b \in G$, e para todo $c \in C$ tem-se

- $\rho(a\rho(b, c)) = \rho(ab, c)$
- $\rho(e, c) = c$, onde $e \in G$ é o elemento neutro.

A órbita de x em G é o conjunto $\mathcal{O}_x = \{\rho(g, x) \mid g \in G\}$. O estabilizador de x é o subgrupo de G dado por $G_x = \{g \in G \mid \rho(g, x) = x\}$.

Teorema A.10. Seja G um grupo finito então $|\mathcal{O}_x| = (G : G_x)$.

Demonstração. Ver Teorema VI.1.4, pág. 254 em [2]. \square

Referências Bibliográficas

- [1] A. CAYLEY, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*, Cambridge and Dublin Math. J.,4, p. 118-138, 1849.
- [2] A. GARCIA E Y. LEQUAIN, *Elementos de Álgebra*, Projeto Euclides-IMPA, 1990.
- [3] A. GONÇALVES, *Introdução à Álgebra*, Projeto Euclides-IMPA, 2000.
- [4] B. SEGRE, *The maximum number of lines lying on a quartic surface*, The Quartely Journal of Mathematics, Oxford Ser.14, p. 86-96, 1943.
- [5] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, 1996.
- [6] G. ASSIS, *Cálculo das Retas numa Cúbica em \mathbb{P}^3* , Dissertação de Mestrado, DM-UFPB, 2011.
- [7] G. SALMON, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*, Cambridge and Dublin Math. J.,4, p. 252-260, 1849.
- [8] I. R. SHAFAREVICH, *Basic Algebraic Geometry*, vol 1. New York: Springer, 1988.
- [9] F. SCHUR, *Ueber eine besondere Class von Flächen vierter Ordnung*, Math. Ann. 20, p.254-296, 1882.
- [10] J. W. BRUCE, C. T. C. WALL, *On The Classification of Cubic Surfaces*, In J. London Math. Soc. vol. 19, p. 245-256, 1979.
- [11] M. ARTIN, *Algebra*, Pearson, 2010.
- [12] R. MENDOZA, J. ROJAS, *Álgebra Linear e o Problema das quatro retas do Calculo de Schubert*, Revista Matemática Universitária, no.45,p 55-69, 2009.
- [13] S. BOISSIÈRE, A. SARTI, *Counting lines on surfaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 6,no.1, p. 39-52, 2007.

- [14] S. RAMS, M. SCHÜTT, *64 lines on smooth quartic surfaces*, ArXiv:1212.3511v5 [math.AG], Maio 2015.
- [15] V. J. LISBOA *O problema das 4 retas do Cálculo de Schubert*, Dissertação de Mestrado, DM-UFPB, 2011.