Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Cúbicas Reversas e Redes de Quádricas

Ageu Barbosa Freire

João Pessoa – PB
Março de 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Cúbicas Reversas e Redes de Quádricas

por

Ageu Barbosa Freire

sob a orientação do

Prof. Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza

João Pessoa – PB
Março de 2016

F866c Freire, Ageu Barbosa.
Cúbicas reversas e redes de quádricas / Ageu Barbosa Freire.- João Pessoa, 2016.
53f.
Orientador: Fernando Antonio Xavier de Souza
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Cúbica reversa. 3. Rede de quádricas. 4. Teorema da Dimensão das Fibras. 5. Cônica irredutível.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Cúbicas Reversas e Redes de Quádricas

por

Ageu Barbosa Freire [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 09 de Março de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. André Luiz Meireles Araujo
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

“ Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.“

Agradecimentos

- A Deus.

- A minha família, em especial aos meus pais e avós, pela cobrança, carinho, apoio e ajuda em todas as decisões.

- Ao professor Fernando Xavier por ter me orientado neste trabalho, pelo conhecimento transmitido, por me motivar a enfrentar novos desafios e, principalmente, pela confiança depositada.

- Aos meus amigos de mestrado, em especial a Sally Vieira, Isabelly Camila, Lucas Araújo, Leon Costa, Rayssa Cajú, Thiago Luis e Kelyane Abreu pela amizade e companheirismo.

- A banca examinadora: Cleto Brasileiro e André Meireles por aceitarem participar da avaliação deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma caracterização geométrica explícita para o espaço das formas quadráticas que se anulam precisamente sobre uma cúbica reversa. Mostramos que o conjunto das quádricas degeneradas pertencentes a uma rede de quádricas que contém a cúbica reversa é descrita por uma curva cuja equação é dada pelo quadrado de uma cônica irredutível. Recíprocamente, se ρ é uma rede de quádricas cuja interseção com o conjunto das quádricas não degeneradas é uma curva dada pelo quadrado de uma cônica irredutível, fornecemos condições sob as quais o lugar dos zeros comuns de ρ seja uma cúbica reversa. É suficiente que ρ não contenha um par de plano.

Palavras-chave: Cúbica Reversa, Rede de Quádricas, Teorema da Dimensão das Fibras, Cônica Irredutível.

Abstract

In this work, we present an explicit geometric characterization for the space of quadratcs form vanishing precisely on a twisted cubic. We show that the set of degenerate quadrics lying on a net of quadrics containing a twisted cubic is described by a curve whose equation is given by the square of an irreducible conic. Conversely, if ρ is a net of quadrics whosw intersection with the set of degenerate quadrics is a curve given by the square of an irreducible conic, we furnish conditions under which the cammon zero locus of ρ turns out to be a twisted cubic. It is enough to require that ρ does not contain a pair of planes.

Keywords: Twisted Cubic, Net of Quadrics , Fiber Dimension Theorem, Irreducible Conic.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{K}$ denota um corpo algebricamente fechado, salvo menção em contrário;
- $\mathbb{A}^n$ denota o espaço afim sobre o corpo $\mathbb{K}$;
- $\mathbb{P}^n$ denota o espaço projetivo sobre o corpo $\mathbb{K}$;
- ρ denota uma rede de quádricas;
- $\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$ denota o anel dos polinômios nas variáveis $X_1, \cdots, X_n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$;
- $I(X)$ denota o ideal de definição do conjunto X;
- $Frac(A)$ denota o corpo de frações do domínio A;
- $A(X)$ denota o anel de coordenadas do conjunto $X \subset \mathbb{A}^n$;
- $\mathcal{O}(X)$ denota o anel das funções regulares sobre X;
- $\mathbb{K}(X)$ denota o corpo das funções racionais de X;
- Δ denota o lugar das quádricas degeneradas em $\mathbb{P}^n$;
- $\square$ denota o final de uma demonstração;

Introdução

Neste trabalho, com base no artigo *Cúbicas Reversas e Redes de Quádricas* dos autores I. Vainsencher e M.A. G. Zarzar [7], apresentamos uma caracterização geométrica explícita para o espaço das formas quadráticas que se anulam exatamente sobre uma cúbica reversa. Ultilizamos os livros *Algebraic Curves* [3], *Algebraic Geometry-A First Course* [4] e *Basic Algebraic Geometry-Varieties in Projective Space* [6], para obtenção de conhecimentos básicos da Geometria Algébrica nescessários para a realização deste trabalho.

No *Capítulo* 1 com base no livro *Ideals, Varieties and Algorithmos* [2], classificamos as quádricas do espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ segundo equivalência projetiva, com o objetivo de demonstrar o Teorema da Forma Normal das Quádricas. Definimos a hipersuperfície Δ dada pelas quádricas degeneradas de um espaço projetivo, e caracterizamos o hiperplano tangente da hipersuperfície Δ nos pontos que representam um cone. Por fim, estudamos o mergulho de Segre motivados a idendificar o produdo de espaços projetivos como uma subvariedade algébrica de um mesmo espaço projetivo ambiente.

Iniciamos o *Capítulo* 2 explicitando a classificação das quádricas em $\mathbb{P}^3$ e apresentamos as definições de cúbica reversa e redes de quádricas. Mostramos que se ρ é uma rede de quádricas que contém a cúbica reversa, então a interseção $\rho \cap \Delta$ é dada pelo quadrado perfeito de uma cônica irredutível. Além disso, verificamos as condições para que também fosse válida a recíproca, i.é., dada uma rede de quádricas ρ tal que $\rho \cap \Delta$ é dada pelo quadrado perfeito de uma cônica irredutível, sobre quais condições os zeros comuns as quádricas pertencentes a ρ são uma cúbica reversa.

Finalmente, o *Apêndice A* é dedicado a um dos mais importantes resultados da Geometria Algébrica, o Teorema da Dimensão das Fibras **(TDF)**, que foi sem dúvidas, muito importante para a realização deste trabalho. Neste apêndice enunciamos alguns resultados da álgebra comutativa, com finalidade de obter ferramentas suficientes para demonstrarmos o **TDF**.

Capítulo 1

Hipersuperfícies Quádricas

Um dos mais importantes objetivos em estudar o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ é classificar as variedades por equivalência projetiva. O principal objetivo deste capítulo é estudar as hipersuperfícies quádricas no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ com o objetivo de classificá-las. Também daremos algumas definições e provaremos alguns resultados que serão usados nos capítulos seguintes. No decorrer deste, assumiremos que $\mathbb{K}$ é um corpo com característica diferente de 2. Usaremos $z_0, \ldots, z_n$ como as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n$.

1.1 Equivalência Projetiva

Denote por $GL(n+1)$ o conjunto das matrizes invertíveis $(n+1) \times (n+1)$ com entradas em um corpo $\mathbb{K}$. Cada $M \in GL(n+1)$ induz uma transformação linear $M : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ dado pelo produto usual de matrizes, que é um isomorfismo já que A é invertível. Esta aplicação leva subespaços lineares de $\mathbb{K}^{n+1}$ em subespaços lineares de $\mathbb{K}^{n+1}$ com a mesma dimensão, em particular tal aplicação leva retas contendo a origem em retas contendo a origem. Assim, a aplicação M induz uma aplicação $M : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$. Chamaremos esta ultima aplicação de *transformação linear projetiva.*

Em termos de coordenadas homogêneas, podemos descrever $M : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ da seguinte forma. Suponha que $M = (a_{ij})$, onde $0 \leq i, j \leq n$. Se $p = [z_0, \ldots, z_n] \in \mathbb{P}^n$, temos que as coordenadas homogêneas para $A(p)$ serão dadas por

$$M(p) = (a_{ij}) \cdot p = [a_{00}z_0 + \cdots + a_{0n}z_n, \ldots, a_{n0}z_0 + \cdots + a_{nn}z_n] \tag{1.1}$$

Temos que $M : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é uma bijeção cuja inversa é dada por $M^{-1} \in GL(n+1)$.

Dada uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ e uma matriz $M \in GL(n+1)$, podemos aplicar M sobre todos os pontos de X, isto nos dá um subconjunto $M(X) = \{M(p) : p \in X\} \subset \mathbb{P}^n$.

Proposição 1.1. Sejam $M \in GL(n+1)$ e $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade, então $M(X) \subset \mathbb{P}^n$ é também uma variedade. Neste caso diremos que X e $M(X)$ são projetivamente equivalentes.

Demonstração. Suponha que $X = Z(f_1, \ldots, f_s)$, onde cada $f_i \in \mathbb{K}[z_0, \ldots, z_n]$ é um polinômio homogêneo, $i \in \{1, \ldots, s\}$. Como M é invertível, M possui uma matriz inversa , digamos $B = M^{-1}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, seja $g_i = f_i \circ B$. Se $B = (b_{ij})$, temos o seguinte

$$g_i([z_0, \ldots, z_n]) = f_i([b_{00}z_0 + \cdots + b_{0n}z_n, \ldots, b_{no}z_0 + \cdots + b_{nn}z_n]).$$

Temos assim que cada g_i é homogêneo com o mesmo grau de f_i, além disso vale a seguinte igualdade

$$M(X) = M(Z(f_1, \ldots, f_s)) = Z(g_1, \ldots, g_s) \tag{1.2}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
y \in M(X) \quad & \Rightarrow \quad B(y) = M^{-1}(y) \in Z(f_1, \ldots, f_s) = X \\
& \Rightarrow \quad f_i(B(y)) = g_i(y) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, s\} \\
& \Rightarrow \quad y \in Z(g_1, \ldots, g_s) \\
& \Rightarrow \quad M(X) \subset Z(g_1, \ldots, g_s)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
y \in Z(g_1, \ldots, g_s) \quad & \Rightarrow \quad g_i(y) = f_i(B(y)) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, s\} \\
& \Rightarrow \quad f_i(M^{-1}(y)) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, s\} \\
& \Rightarrow \quad M^{-1}(y) \in Z(f_1, \ldots, f_s) \\
& \Rightarrow \quad y \in M(X) \\
& \Rightarrow \quad Z(g_1, \ldots, g_s) \subset M(X)
\end{aligned}$$

□

Podemos considerar $M = (a_{ij})$ como a transformação das coordenadas $z_0, \ldots, z_n$ nas novas coordenadas $Z_0, \ldots, Z_n$ definidas por

$$Z_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} z_j. \tag{1.3}$$

Segue de 1.1 que nós podemos pensar em $A(X)$ como o próprio X visto com as novas coordenas $Z_0, \ldots, Z_n$. Note que equivalência projetiva é uma relação de equivalência. De fato,

1) $X \sim X$ para todo $X \subset \mathbb{P}^n$ pois $X = Id(X)$, onde $Id \in GL(n+1)$ denota a matriz identidade;

2) Sejam $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ tais que $X \sim Y$, isto é, existe $M \in GL(n+1)$ tal que $Y = M(X)$. Como A é invertível segue que $X = M^{-1}(Y)$ e portanto $Y \sim X$;

3) Sejam $X, Y, Z \in \mathbb{P}^n$ tais que $X \sim Y$ e $Y \sim Z$, logo existem $M, B \in GL(n+1)$ tais que $Y = M(X)$ e $Z = B(Y)$, juntando essa duas igualdades temos $Z = MB(X)$ e desta forma $X \sim Z$ pois $MB \in GL(n+1)$.

1.2 Forma normal das Quádricas

Nosso objetivo agora é classificar as quádricas de $\mathbb{P}^n$ usando equivalência projetiva, para isso precisaremos da seguinte definição.

Definição 1.1. Uma hipersuperfície quádrica em $\mathbb{P}^n$ é definida por uma forma quadrática não nula, isto é, um polinômio homogêneo de grau dois,

$$Q = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} z_i z_j \tag{1.4}$$

Teorema 1.2. (Forma Normal das Quádricas) *Seja $\mathbb{K}$ um corpo com característica diferente de 2. Se $f = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} z_i z_j \in \mathbb{K}[z_0, \ldots, z_n]$ um polinômio homogêneo não-nulo de grau 2, então $Z(f)$ é projetivamente equivalente a uma quádrica definida por uma equação da seguinte forma*

$$c_0 z_0^2 + \cdots + c_n z_n^2 = 0,$$

onde $c_0, \ldots, c_n$ são elementos de $\mathbb{K}$, não todos nulos.

Demonstração. Nossa estratégia é encontrar uma mudança de coordenadas $Z_i = \sum_{j=0}^{n} b_{ij} z_j$ tal que f vista nas novas variáveis tenha a forma

$$c_0 Z_0^2 + \cdots + c_n Z_n^2 = 0,$$

Para isto, usaremos indução finita sobre o número de variáveis.

Com efeito, para uma variável, o resultado é imediato pois $a_{00} z_0^2$ é o único polinômio homogêneo de grau total 2. Agora assumimos que o teorema é verdadeiro para n variáveis e vamos mostrar que vale para $n+1$ variáveis.

Afirmação 1. Dado $f = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} z_i z_j$, a menos de uma mudança de coordenadas podemos assumir que $a_{00} \neq 0$.

Prova. De fato, se $a_{00} = 0$ temos os seguintes casos a considerar

Caso 1. $a_{jj} \neq 0$ para algum $1 \leq j \leq n$. Neste caso, temos a seguinte mudança de coordenadas

$$Z_0 = z_j, \quad Z_j = z_0 \quad e \quad Z_i = z_i \quad para \quad i \neq 0, j. \tag{1.5}$$

Desta forma, a expansão de f em termo das coordenadas $Z_0, \ldots, Z_n$ é tal que o coeficiente de Z_0^2, a_{jj}, é não-nulo como desejado.

Caso 2. $a_{ii} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Como $f \neq 0$, existem $i \neq j$ tais que $a_{ij} \neq -a_{ji}$, fazendo uma mudança de coordenadas como em 1.5 podemos assumir que $a_{10} \neq -a_{01}$. Neste caso, nós temos a seguinte mudança de coordenadas

$$Z_0 = z_0, \quad Z_1 = z_1 - z_0 \quad e \quad Z_i = z_i \quad para \quad i \geq 2. \tag{1.6}$$

Desta forma, a expansão de f em termo das coordenadas $Z_0, \ldots, Z_n$ é tal que o coeficiente de Z_0^2, $a_{10} + a_{01}$, é não-nulo.

Voltemos à demonstração do Teorema. Assuma que $f = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} z_i z_j$, é tal que $a_{00} \neq 0$. Seja $b_i = a_{i0} + a_{0i}$ e considere a seguinte mudança de coordenadas

$$Z_0 = z_0 + \frac{1}{a_{00}} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{2} z_i, \quad e \quad Z_i = z_i \quad para \quad i \geq 1. \tag{1.7}$$

Sendo assim, a expansão de f em termo das coordenadas $Z_0, \ldots, Z_n$ é

$$\begin{aligned}
f &= a_{00}\left(Z_0 - \frac{1}{a_{00}}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{2}Z_i\right)^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j \left(Z_0 - \frac{1}{a_{00}}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{2}Z_i\right) Z_j + F \\
&= a_{00}Z_0^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i Z_i Z_0 + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{b_i b_j}{4a_{00}} Z_i Z_j + \sum_{i=1}^{n} b_i Z_i Z_0 - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{b_i b_j}{2a_{00}} Z_i Z_j + F \\
&= a_{00}Z_0^2 + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} Z_i Z_j
\end{aligned}$$

onde F denota um polinômio homogêneo nas variáveis $Z_1, \ldots, Z_n$ de grau 2.

Usando a hipótese de indução para $\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} Z_i Z_j$, podemos encontrar uma mudança de coordenas (apenas envolvendo $Z_1, \ldots, Z_n$) que transforma $\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} Z_i Z_j$ em $e_1 Z_1^2 + \cdots + e_n Z_n^2$. Podemos assumir que esta é uma mudança de coordenadas para $Z_0, \ldots, Z_n$ a qual deixa Z_0 fixo. Assim temos uma mudança de coordenadas que transforma $f = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} z_i z_j$ na forma desejada. □

Observação 1.1. Na forma normal dada pelo **Teorema** 1.2, alguns dos coeficientes c_i podem ser nulos. Por uma mudança de coordenas, podemos assumir que $c_i \neq 0$ se $0 \leq i \leq p$ e $c_i = 0$ para $i > p$. Assim uma quádrica é sempre projetivamente equivalente a uma outra quádrica dada por uma equação da seguinte forma

$$c_0 Z_0^2 + \cdots + c_p Z_p^2 = 0, \qquad c_0, \ldots, c_p \neq 0 \tag{1.8}$$

Definição 1.2. Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície quádrica.

(i) Se V é definida por uma equação como em 1.8, diremos que V tem posto $p+1$.

(ii) Mais geralmente, se V é uma quádrica arbitrária, diremos que V tem posto $p+1$ se V é projetivamente equivalente a uma quádrica definida por uma equação como em 1.8.

Precisamos mostrar que o posto está bem definido, isto é, se V é uma quádrica devemos mostrar que todas as quádricas projetivamente equivalente definida por uma equação da forma 1.8, possuem o mesmo número de coeficientes não-nulos.

Para isto, primeiro observe que nós podemos supor $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j. De fato, basta considerar $b_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$ e assim reescrevemos $f = \sum_{i,j=0}^{n} b_{ij} z_i z_j$ com $b_{ij} = b_{ji}$.

Uma segunda observação é que podemos representar f através de multiplicações de matrizes. Temos que os coeficientes de f formam uma matriz $(n+1) \times (n+1)$, $Q = (a_{ij})$, que pela primeira observação podemos supor simétrica. Seja X o vetor coluna com entradas $z_0, \ldots, z_n$. Temos que

$$f(X) = X^t Q X,$$

onde X^t é a transposta do vetor X.

Proposição 1.3. Seja $f = X^t Q X$, onde Q é uma matriz simétrica $(n+1) \times (n+1)$.

(i) Dada uma matriz $A \in GL(n+1)$, seja $B = A^{-1}$. Então

$$A(Z(f)) = Z(g).$$

onde $g(X) = X^t B^t Q B X$.

(ii) O posto da superfície quádrica $Z(f)$ é igual o posto da matriz Q

Demonstração. Para provar (i) lembremos de 1.2 que $A(Z(f)) = Z(g)$, onde $g = f \circ B$. Temos assim que

$$g(X) = f(BX) = (BX)^t Q (BX) = X^t B^t Q B X.$$

Para provar (ii), primeiro note que Q e X^tQX possuem o mesmo posto. Isto segue do fato de que multiplicar uma matriz pela direita ou pela esquerda por uma matriz invertível não altera o posto.

Agora, podemos usar o **Teorema** 1.2 para encontrar uma matriz $A \in GL(n+1)$ tal que $A(f) = g = c_0x_0^2 + \cdots + c_px_p^2$ com $c_0, \ldots, c_p \neq 0$. A matriz de g é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são $c_0, \ldots, c_p \neq 0$. Pela parte (i) temos que

$$B^tQB = g = \begin{pmatrix} c_0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_p & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

onde $B = A^{-1}$. Lembremos que o posto de uma matriz é o número máximo de colunas lineramente independentes, segue então que B^tQB tem posto $p+1$. Dai segue o resultado, pois Q e B^tQB possuem o mesmo posto.

□

Quando $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado, o **Teorema** 1.2 junto com a **Proposição** 1.3 classificam as quádricas segundo seu posto da seguinte forma.

Proposição 1.4. Se $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado, então uma hipersuperfície quádrica de posto $p+1$ é projetivamente equivalente a quádrica definida pela equação

$$\sum_{i=0}^{p} z_i^2.$$

Em particular duas quádricas são projetivamente equivalentes se, e somente se, possuem o mesmo posto.

Demonstração. Seja $Q = Z(f)$ uma quádrica de posto $p+1$, pelo **Teorema**1.2 podemos supor que a quádrica é definida por um polinômio da forma $c_0z_0^2 + \cdots + c_pz_p^2 = 0$, onde $c_0, \ldots, c_p \neq 0$ e $c_i = 0$ para $p < i \leq n$. Como $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, a equação $z^2 - c_i = 0$ possui 2 raizes em $\mathbb{K}$, denote por $\sqrt{c_i}$ uma delas. Note que $\sqrt{c_i} \neq 0$, pois $c_i \neq 0$. Portanto temos a seguinte mudança de coordenadas

$$Z_i = \sqrt{c_i}z_i \quad 0 \leq i \leq p,$$

$$Z_i = z_i \quad p < i \leq n.$$

Temos que, em termos das novas variáveis $Z_1, \ldots, Z_n$, Q possui a forma desejada. Fica então provado que as quádricas de mesmo posto são projetivamente equivalentes. Agora suponha que $Q = Z(f)$ e $Q' = Z(g)$ são projetivamente equivalente. Pela **Proposição** 1.3 nós temos que $Q' = B^tQB$, onde B é uma matriz invertível. Vimos também na **Proposição**1.3 que Q e B^tQB possuim o mesmo posto, daí segue o desejado. □

Observação 1.2. Observe que a hipótese de $\mathbb{K}$ ser algebricamente fechado é essencial nesta última proposição. Por exemplo, em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, as cônicas $Q_1 = V(x^2 + y^2 + z^2)$ e $Q_2 = V(x^2 + y^2 - z^2)$ possuim posto 3 mas não são projetivamente equevalentes pois Q_1 é vazia enquanto Q_2 não é.

1.3 O Mapa de Segre

Durante o nosso trabalho precisaremos identificar o protudo $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ como uma variedade, e uma das formas de obter esta identificação é através do *mapa de Segre*.

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & ([x_0, \ldots, x_n], [y_0, \ldots, y_m]) & \mapsto & [x_0y_0, \ldots, x_0y_m, \ldots, x_ny_m] \end{array} \tag{1.9}$$

Onde $N = nm + n + m$.

Como $x \in \mathbb{P}^n$ e $y \in \mathbb{P}^m$ segue que $x_i \neq 0$ e $y_j \neq 0$ para algum $i \in \{0, \ldots, n\}$ e $j \in \{0, \ldots, m\}$, logo $x_iy_j \neq 0$. Além disso, observe que dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tem-se

$$\varphi([\alpha x_0, \ldots, \alpha x_n], [\beta y_0, \ldots, \beta y_m]) = [\alpha\beta x_0y_0, \ldots, \alpha\beta x_ny_m].$$

em outras palavras, φ é bem definida.

Procederemos agora com a prova de que φ é injetiva. De fato, sejam $x, x' \in \mathbb{P}^n$ e $y, y' \in \mathbb{P}^m$ tais que

$$[x_0y_0, \ldots, x_0y_m, \ldots, x_ny_0, \ldots, x_ny_m] = [x'_0y'_0, \ldots, l'_0y'_m, \ldots, x'_ny'_0, \ldots, x'_ny'_m],$$

isto é, existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $x_iy_j = \lambda x'_iy'_j$.

Sejam $i_0 \in \{0, \ldots, n\}$ e $j_0 \in \{0, \ldots, m\}$ tais que $x_{i_0}y_{j_0} \neq 0$, consequentemente teremos $x'_{i_0}y'_{j_0} \neq 0$. Agora fixe j_0 e faça variar $i \in \{0, \ldots, n\}$, temos com isso que $x_iy_{j_0} = \lambda x'_iy'_{j_0}$, mas isso implica que $x_i = \frac{\lambda y'_{j_0}}{y_{j_0}}x'_i$, e portanto $x = x'$. Procedendo de maneira análoga, isto é, fixando i_0 e variando $j \in \{0, \ldots, m\}$ concluíremos que $y = y'$ e que φ é injetiva.

No que segue usaremos a seguite notação, $z_{ij} = x_i y_j$ $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$. Nosso próximo objetivo é mostrar que a imagem de φ é a variedade definida pela anulação das seguintes equações,

$$z_{ij} z_{kl} = z_{kj} z_{il}, \quad \text{para} \quad 0 \leq i, k \leq n \quad \text{e} \quad 0 \leq l, j \leq m. \tag{1.10}$$

Obviamente cada ponto em $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ satisfaz simultâneamente as equações 1.10.

Por outro lado, considere um ponto $Z = [z_{00}, \ldots, z_{nm}] \in \mathbb{P}^N$ satisfazendo as equações 1.10. A menos de uma mudançã de coordenadas, podemos supor que $z_{00} \neq 0$. Note que os pontos $x = [z_{00}, \ldots, z_{n0}] \in \mathbb{P}^n$ e $y = [z_{00}, \ldots, z_{0m}]$ são tais que

$$\varphi(x, y) = [z_{00} z_{00}, \ldots, z_{00} z_{0m}, \ldots, z_{n0} z_{00}, \ldots, z_{n0} z_{0m}].$$

Como Z satisfaz as equações 1.10 temos, em particular, que $Z_{i0} Z_{0j} = Z_{00} Z_{ij}$ para $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$. Logo

$$\varphi(x, y) = z_{00}[z_{00}, \ldots, z_{0m}, \ldots, z_{n0}, \ldots, z_{nm}] = Z.$$

Com isso mostramos a igualdade desejada. A aplicação φ é chamada *mapa de Segre* e a imagem desta aplicação é chamada de *variedade de Segre*.

Definição 1.3. Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é uma subvariedade algébrica fechada se $\varphi(X)$ for uma subvariedade algébrica fechada de $\mathbb{P}^N$.

O seguinte resultado é uma cracterização para a definição anterior.

Teorema 1.5. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é uma subvariedade algébrica fechada se, e somente se, é dado por um sistema de equações*

$$G_k(x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_m) = 0, \quad \textit{para} \quad k = 1, \ldots, t.$$

bihomogêneas, isto é, homogêneas em cada grupo de variáveis x_i e y_j.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que X é uma subvariedade algébrica fechada, isto é, $\varphi(X)$ é dada por um sistema de equações

$$\overline{G_k}(z_{00}, \ldots, z_{nm}) = 0, \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, t.$$

homogêneas nas variáveis z_{ij}. Trocando z_{ij} por $x_i y_j$ obtemos outro sistema de equações

$$G_k(x_0 y_0, \ldots, x_n y_m) = 0, \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, t.$$

que são homogêneas em cada grupo de variáveis x_i e y_j, e além disso, a solução desse sistema é exatamente o conjunto X.

($\Longleftarrow$) Suponha que X é dado por um sistema de equações

$$G_k(x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_m) = 0, \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, t.$$

homogêneas em cada grupo de variáveis x_i e y_j. Para cada k denote por r_k e s_k os graus do polinômio G_k com relação as variáveis x_i e y_j respectivamente. Se $r_k = s_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, t\}$, trocamos $x_i y_j$ por z_{ij} em cada G_k e obtemos um sistema de equações homogêneas nas variáveis z_{ij} cuja solução é exatemente $\varphi(X)$. Agora suponha que $r_k > s_k$ para algum $k \in \{1, \ldots, t\}$ e observe que $G_k = 0$ é equivalente ao seguinte sistema $y_j^{r_k - s_k} G_k = 0$ para $i = 0, \ldots, m$. Desta forma, trocamos G_k por este último sistema e com isso obtemos um novo sistema onde $r_k = s_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, t\}$. $\square$

Observação 1.3. Em particular, para o caso em que $n = m = 1$ a imagem do mapa de Segre é dado apenas pela equação $z_{11} z_{00} = z_{01} z_{10}$, ou seja $\varphi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ é exatamente a superfície quádrica não degenerada de $\mathbb{P}^3$.

1.4 O discriminante de uma quádrica

Vimos anteriormente que uma quádrica $Q \in \mathbb{P}^n$ pode ser representada por uma matriz simétrica $(n+1) \times (n+1)$, $(a_{ij}(Q)) = (a_{ij})$. Desta forma, podemos reescrever a equação 1.4 da seguinte forma

$$Q = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii} z_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} z_i z_j. \tag{1.11}$$

Observe que aparecem exatamente $\frac{(n+1)(n+2)}{2} = N + 1$ coeficientes a_{ij} não todos nulos. Podemos dar uma ordem para estes coeficientes, digamos

$$[a_{00}, \ldots, a_{0n}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{nn}],$$

e observar que qualquer múltiplo não-nulo de Q define a mesma superfície quádrica. Com isso podemos identificar Q ou sua matriz simétrica associada como um ponto no espaço projetivo $\mathbb{P}^N$. Neste caso os a_{ij}, $0 \leq i \leq j \leq n$, são as coordenadas homogêneas para $\mathbb{P}^N$.

Chamaremos o determinante da matriz associada a quádrica Q, $det(a_{ij})$, de *discriminante da quádrica*.

Denote por Δ a hipersuperfície quádrica de $\mathbb{P}^N$ definida pela anulação do discriminante. E denote por $X \subset \Delta$ a subvariedade definida pelo anulamento dos menores

$n \times n$ da matriz (a_{ij}).

Agora gostaríamos de destacar dois conjuntos de quádricas contidas em $\mathbb{P}^n$, primeiro o conjunto dos $Q \in \mathbb{P}^N \backslash \Delta$, isto é, a classe das quádricas cuja matriz que as representam tem posto máximo, essas quádricas são chamadas de quádricas não degeneradas pois não possuim singularidade. O outro é o conjunto dos $Q \in \Delta \setminus X$, isto é, a classe das quádricas cuja matriz que as reprezentam tem posto n, essas serão chamadas de cone quadrático de posto n (ou simplesmente cone). Cada cone $Q \in \Delta \setminus X$ possui um único ponto singular $v(Q) \in \mathbb{P}^n$ o qual chamaremos de vértice do cone Q. Como Q é dada por uma equação da forma 1.11, o ponto singular $v(Q)$ de Q é tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial z_i}(v(Q)) = 0 \quad \forall \ i \in \{0, \ldots, n\}$$

mas note que,

$$\frac{\partial Q}{\partial z_i}(v(Q)) = \sum_{j=0}^{n} 2a_{ij}v_j = 0 \quad \forall \ i \in \{0, \ldots, n\}$$

ou seja $v(Q)$ satisfaz a seguinte equação matricial

$$v(Q) \cdot (a_{ij}(Q)) = 0. \tag{1.12}$$

1.5 O hiperplano tangente de Δ

Definição 1.4. Seja $Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície. O hiperplano tangente de F no ponto $P \in Z(F)$ é definido pelo ortogonal do gradiente de F no ponto P.

Notação: Denotaremos por $T_P F$ o hiperplano tangente de F no ponto $P \in Z(F)$.

Para a hipersuperfície Δ vale a seguinte interpretação geométrica.

O hiperplano tangente $T_{Q_0}\Delta$ num ponto correspondente a um cone não degenerado Q_0 consiste de todas as quádricas passando pelo vértice $v(Q_0)$. Em símbolos temos o seguinte:

Lema 1.6. Para cada $Q \in \Delta \backslash X$ temos:

$$T_Q\Delta = \{Q' \in \mathbb{P}^N / v(Q) \in Q'\}. \tag{1.13}$$

Demonstração. Seja $Q \in \Delta \backslash X$, fazendo uma mudança de coordenadas se nescessário, podemos supor que Q é dada pela seguinte equação

$$z_0^2 + \cdots + z_{n-1}^2 = 0$$

isto é, $a_{00} = \cdots = a_{n-1n-1} = 1$ e $a_{ij} = 0$ para os demais índices. Seu vértice é dado pela solução do seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} v_0 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Isto é, $v_0 = \cdots = v_{n-1} = 0$ e v_n qualquer, logo $v(Q) = [0 : \cdots : 0 : 1]$. Desta forma, a única condição para que $v(Q) \in Q' \subset \mathbb{P}^n$ é que $a_{nn} = 0$.

Por outro lado, lembremos que a hipersuperfície Δ é dada pelo polinômio $det(a_{ij})$. Agora fixando uma ordem para as variáveis, digamos $a_{00}, \ldots, a_{0n}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nn}$, calculemos as derivadas parciais de Δ com relação a variável a_{ij}

1. Consideremos inicialmente as variáveis a_{ii} $i \in \{0, \ldots, n\}$. Sabemos que

$$\Delta = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} = D_{ii} + \sum_{j=0, j \neq i}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}.$$

onde D_{ij} denota o determinante da matriz $n \times n$, $(\widehat{a_{ij}})$, obtida eliminando a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz (a_{ij}). Desta forma, segue que

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ii}} = D_{ii}.$$

2. Devemos aqui calcular $\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}}$ para $i < j$ com $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, calcularemos apenas a deriva parcial com relação a a_{01} os outros casos são análogos. Para este caso escrevemos Δ na seguinte forma

$$\Delta = a_{00} D_{00} - a_{01} D_{01} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_{0k} D_{0k}.$$

mas por outro lado temos que para $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$D_{0k} = a_{10} D_{10}^{0k} + R_k,$$

onde D_{10}^{0k} denota o determinante do menor $(n-1) \times (n-1)$ obtido da matriz (a_{ij}) eliminando as linhas 0 e 1 e as colunas k e 0, e R_k é um polinômio que não depende da variável a_{01}. Para $k = 0$ temos que D_{00} também não depende da variável a_{01}. Portanto,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{01}} = -D_{01} - a_{01}D_{10}^{01} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k a_{0k}D_{10}^{0k} = -2D_{01}.$$

Em geral temos que,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j}2D_{ij}, \text{ com } i < j.$$

Portanto o gradiente de Δ é dado por

$$\nabla = [D_{00}, \ldots, (-1)^n 2D_{0n}, D_{11}, \ldots, (-1)^{n+1}2D_{1n}, \ldots, D_{nn}].$$

Calculando o gradiente no ponto Q temos, $\nabla(Q) = [0 : \cdots : 0 : 1]$. Logo seu ortogonal consiste de todos os pontos $Q' \in \mathbb{P}^N$ tal que $a_{nn} = 0$. Esta é exatamente a condição para que o vértice $v(Q)$ pertença a Q'. Daí segue a igualdade desejada. $\square$

Capítulo 2

Cúbicas Reversas e Redes de Quádricas

2.1 Quádricas em $\mathbb{P}^3$

Denotaremos por $z = [z_0, z_1, z_2, z_3]$ as coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^3$.

Inicialmente descreveremos mais explicitamente a classificação das quádricas em $\mathbb{P}^3$. Primeiro lembremos que as quádricas em $\mathbb{P}^3$ estão em correspondência com os pontos de $\mathbb{P}^9$. Do que vimos anteriormente, temos que cada ponto $Q \in \mathbb{P}^9 \setminus \Delta$ corresponde a uma quádrica não degenerada, que a menos de uma mudança de coordenadas em $\mathbb{P}^3$, pode ser escrita na forma,

$$Q = z_1 z_2 - z_0 z_3.$$

Segue da **Observação** 2.1 que Q é a variedade de Segre para o caso $n = m = 1$, isto é Q é a imagem da seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcc} \sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ ([x_1, x_2], [y_1, y_2]) & \longmapsto & [x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2] \end{array} \tag{2.1}$$

Observação 2.1. Note que, se $F(z) = \sum_{|I|=m} c_I z^I$ é uma superfície de grau m em $\mathbb{P}^3$ (que não contém a quádrica de Segre), então intersectando F com a quádrica de Segre, isto é, substituindo $z_1 = x_1y_1$, $z_2 = x_1y_2$, $z_3 = x_2y_1$ e $z_4 = x_2y_2$ temos um polinômio $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = F(x, y)$ que é bihomogêneo de bigrau (m, m), que pelo mapa acima corresponde a uma curva em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Observação 2.2. Observe que a aplicação $\varphi : \mathbb{C}[z]/\langle Q\rangle \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]$, definida por $z_1 \mapsto x_1y_1$, $z_2 \mapsto x_1y_2$, $z_3 \mapsto x_2y_1$, $z_4 \mapsto x_2y_2$, é um isomorfismo sobre a subálgebra gerada pelos x_iy_j. Com efeito, considere a homomorfismo $\widehat{\varphi} : \mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ definida como φ. É claro que $Im(\widehat{\varphi})$ é a subálgebra gerada pelos x_iy_j.

Por outro lado temos que $\langle Q \rangle \subset Ker(\widehat{\varphi})$, além disso, se $F \in Ker(\widehat{\varphi})$ implica que $F(x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2) = 0$ ou seja $F \in I(Z(Q)) = \langle Q \rangle$. Segue do Teorema dos Isomorfismo que a aplicação φ definida anteriormente é, de fato, um isomorfismo sobre a subálgebra gerada pelos x_iy_j.

Cada ponto $Q \in \Delta \backslash X$ corresponde a um cone definido por uma forma quádrica cuja matriz simétrica associada tem posto exatamente igual a três. Por uma mudança de coordenadas tal quádrica pode ser escrita na forma,

$$Q = z_2^2 - z_1z_3.$$

fazendo uso da equação 1.12 temos que o vértice deste cone é o ponto,

$$v(Q) = [0, 0, 0, 1].$$

Os pontos de X correspondem as quádricas de posto 1 ou 2, estas são projetivamente equivalentes a z_1z_2 ou z_1^2. Qualquer dessas é a união de dois planos.

2.2 A Cúbica Reversa

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{cccc} \nu_3 & : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ & & [t, u] & \longmapsto & [t^3, t^2u, tu^2, u^3] \end{array} \tag{2.2}$$

ν_3 é um mapa polinomial e portanto um morfismo. Como $\mathbb{P}^1$ é irredutível segue que a imagem desta aplicação é um conjunto irredutível. Por outro lado temos do **(TDF)** que $dim(\mathbb{P}^1) - dim(\nu_3(\mathbb{P}^1)) \geq 0$, ou seja $dim(\nu_3(\mathbb{P}^1)) \leq 1$. Como $\nu_3(\mathbb{P}^1)$ é um conjunto infinito concluímos que a imagem da aplicação ν_3 é de fato uma curva irredutível C. Nosso objetivo agora é mostrar que a curva $C \subset \mathbb{P}^3$ é dada pelos zeros comuns dos seguintes polinômios

$$z_1^2 - z_0z_2, \;\; z_2^2 - z_1z_3, \;\; z_1z_2 - z_0z_3. \tag{2.3}$$

Com efeito, denote por V o conjunto dos zeros comuns aos polinômios dados acima. Obviamente $C \subset V$. Por outro lado considere um ponto $P = [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in V$, podemos supor sem perda de generalidade que $z_0 \neq 0$. Temos que P satisfaz todas as equações em 2.3, portanto segue a seguinte relação

$$z_1^2 = z_0z_2, \;\; z_2^2 = z_1z_3, \;\; z_1z_2 = z_0z_3.$$

$$\Rightarrow z_2 = \frac{z_1^2}{z_0} \quad e \quad z_3 = \frac{z_1^3}{z_0^2}.$$

logo, P pode ser reescrito da seguinte forma

$$P = [z_0, z_1, \frac{z_1^2}{z_0}, \frac{z_1^3}{z_0^2}] = [z_0^3, z_0^2 z_1, z_0 z_1^2, z_1^3] = \nu_3([z_0, z_1]).$$

mostramos assim a igualdade desejada.

Observação 2.3. Se considerarmos quatro polinômios $A_0 = A_0(t,u), A_1 = A_1(t,u), A_2 = A_2(t,u), A_3 = A_3(t,u)$ homogêneos de grau 3 e linearmente independentes, imagem da aplicação

$$\begin{array}{rcccc} \nu_3 & : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ & & [t,u] & \longmapsto & [A_0(t,u), A_1(t,u), A_2(t,u), A_3(t,u)] \end{array}$$

ainda é uma curva irredutível. Isso nos motiva a seguinte definição.

Definição 2.1. A curva C definida como a imagem da aplicação ν_3, para uma escolha adequada de coordenadas homogêneas na reta projetiva $\mathbb{P}^1$ e, para uma escolha adequada de coordenadas homogêneas para o espaço projetivo $\mathbb{P}^3$, será chamada *cúbica reversa.*

2.3 Redes de Quádricas se anulando na Cúbica Reversa

O objetivo desta seção é encontrar as condições nescessárias para que uma quádrica contenha a cúbica reversa. Inicialmente temos a seguinte definição:

Definição 2.2. Uma *rede de quádrica* ρ é um subespaço linear de dimensão três no espaço vetorial $\mathbb{P}^9$, isto é, $\rho = \langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$, onde $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^9$ são quádricas (em $\mathbb{P}^3$) linearmente independentes.

Lembremos que uma quádrica $Q \subset \mathbb{P}^3$ é dada por uma equação da seguinte forma

$$Q = \sum_{i=0}^{3} a_{ii} z_i^2 + 2 \sum_{0 \le i < j \le 3} a_{ij} z_i z_j.$$

Queremos agora calcular a interseção de Q com a cúbica reversa, esta interseção é dada substituindo $z = [t^3 : t^2u : tu^2 : u^3]$ na equação de Q

$$Q = a_{11}t^6 + 2a_{12}t^5u + (a_{22}+2a_{13})t^4u^2 + (2a_{14}+2a_{23})t^3u^3 + (a_{33}+2a_{24})t^2u^4 + 2a_{34}tu^5 + a_{44}u^6,$$

isso resulta num polinômio homogêneo $Q(t,u)$ de grau seis. Impondo a condição de que este polinômio se anule identicamente, isto é, supondo que a cúbica reversa esteja contida em Q, temos um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11} = a_{12} = a_{34} = a_{44} = 0 \\ a_{22} = -2a_{13} \\ a_{14} = a_{23} \\ a_{33} = -2a_{24} \end{cases}$$

cuja a solução é um subespaço do espaço vetorial das quádricas, de dimensão três. Uma base é dada por:

$$Q_1 = z_2^2 - z_1z_3, \quad Q_2 = z_2z_3 - z_1z_4, \quad Q_3 = z_3^2 - z_2z_4.$$

Concluímos assim que o conjunto das quádricas que contém a cúbica reversa formam uma rede de quádricas.

Seja $\rho \subset \mathbb{P}^9$ a rede de quádricas gerada por Q_1, Q_2, Q_3. Seja $[a_1 : a_2 : a_3]$ as coordenadas homogêneas para o plano projetivo $\rho \simeq \mathbb{P}^2$. Um elemento geral de ρ é da forma $Q_a = \sum a_iQ_i$. Vamos calcular a inteseção $\rho \cap \Delta$, esta interseção é definida em ρ pelo determinante da matriz associada a Q_a.

$$det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & 2a_1 & a_2 & -a_3 \\ -a_1 & a_2 & 2a_3 & 0 \\ -a_2 & -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (a_1a_3 - a_2^2)^2. \tag{2.4}$$

Vemos assim que $\rho \cap \Delta$ é uma quártica plana dada pelo quadrado perfeito da equação de uma cônica irredutível. Dizemos também que se trata de uma cônica dupla. Além disso, se supormos que os menores 3×3 na matriz acima se anulam simultaneamente teremos nescessariamente que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, o que é proíbido para pontos em ρ. Logo temos que $\rho \cap X = \emptyset$.

2.4 Recuperando a cúbica reversa

Mostramos até aqui que se ρ é uma rede de quádricas que se anula sobre a cúbica reversa, então $\rho \cap \Delta$ é o quadrado perfeito da equação de uma cônica irredutível e ρ não contém par de planos. Nosso objetivo agora é mostrar que vale a recípocra, isto é:

Fixada uma rede de quádricas $\rho = \langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$ tal que

(i) $\rho \cap \Delta$ é uma cônica dupla irredutível C;

(ii) $\rho \cap X = \emptyset$, isto é, ρ não contém par de planos;

Devemos mostrar que os zeros comuns aos $Q_i's$ formam uma cúbica reversa.

O primeiro passo é mostrar que os vértices dos cones correspondentes aos pontos sobre a cônica $C = \rho \cap \Delta$ devem descrever uma curva irredutível em $\mathbb{P}^3$.

Lema 2.1. $v(C) = \{v(Q) | Q \in C\} \subset \mathbb{P}^3$ é uma curva projetiva irredutível.

Prova. Como C é uma curva irredutível, resta-nos mostrar que o mapa $v : C \longrightarrow \mathbb{P}^3$ que associa a cada cone não degenerado $Q \in C \subset \rho \cap \Delta \setminus X$ o seu vértice $v(Q) \in \mathbb{P}^3$, é um morfismo injetivo. **Cf. Corolário** A.16

Primeiro vamos mostrar que $v : C \longrightarrow \mathbb{P}^3$ é injetivo. De fato, suponha que existam Q_1 e Q_2 cones distintos e tais que $v(Q_1) = v(Q_2)$. Seja $L \subset \mathbb{P}^9$ a reta que passa por Q_1 e Q_2. Cada ponto de L é uma quádrica dada por $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ não ambos nulos, desta forma $L \subset \rho$. Agora observe o seguinte, dado $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \in L$ temos, para $i = 0, 1, 2, 3$, que

$$(\alpha_1 \frac{\partial Q_1}{\partial z_i} + \alpha_2 \frac{\partial Q_2}{\partial z_i})(v(Q_1)) = \alpha_1 \frac{\partial Q_1}{\partial z_i}(v(Q_1)) + \alpha_2 \frac{\partial Q_2}{\partial z_i}(v(Q_1)) = 0$$

portanto $v(Q_1)$ é um ponto singular de $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$. Como $L \subset \rho$ e ρ não contém par de planos segue que $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$ é um cone cuja o vértice é também $v(Q_1)$. Logo $L \subset \rho \cap \Delta = C$, contradizendo a hipótese de irredutibilidade de C.

Para completar a prova, devemos mostrar que v é um morfismo, faremos isto provando que v pode ser expresso localmente por polinômios. Para isso tome $Q_0 \in C$, devemos exibir um mapa polinomial $u : U \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $u(Q) = v(Q)$ para todo $Q \in C$, onde U é um aberto em $\Delta \setminus X$ contendo Q_0. Estando Q_0 em $C \subset \Delta \setminus X$, a matriz $(a_{ij}(Q_0))$ tem posto exatamente igual a três. Assim, podemos escolher três linhas, digamos $1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 4$ que sejam linearmente independentes em alguma vizinhança U de Q_0. Trata-se de um aberto pois seu complementar é o fechado definido pela anulação dos menores 3×3 formados com as linhas α, β e γ. Agora para cada $Q \in U$ construa o ponto $u(Q) = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ pela seguinre regra. Ponha

$$B_Q = \begin{pmatrix} i & j & k & l \\ a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & a_{\alpha 3} & a_{\alpha 4} \\ a_{\beta 1} & a_{\beta 2} & a_{\beta 3} & a_{\beta 4} \\ a_{\gamma 1} & a_{\gamma 2} & a_{\gamma 3} & a_{\gamma 4} \end{pmatrix},$$

onde i, j, k, l denotam indeterminadas e os a_{rs} abreviam $a_{rs}(Q)$. Então z_1, z_2, z_3 e z_4 são definidos pela expansão $det(B_Q) = z_1 i + z_2 j + z_3 k + z_4 l$. Pela regra de Cramer, o ponto $u(Q)$ é ortogonal às linhas α, β e γ de $a_{ij}(Q)$, em outras palavras, $u(Q)$ é solução do sistema 1.12. Logo $u(Q) = v(Q)$. Como a expressão para $u(Q)$ é polinomial nas coordenadas a_{ij}, segue o resultado.

Proposição 2.2. Notação como acima, temos que a curva $v(C)$ está contida em Q para cada quádrica $Q \in \rho$.

A prova desta proposição é uma consequência do seguinte lema.

Lema 2.3. Sejam $F \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície e $H = V(H_1, \ldots, H_k) \subset \mathbb{P}^n$ um subespaço linear, aqui H_i denota um hiperplano. Suponha que $p \in F$ é um ponto não singular. Então, $p \in F \cap H$ é um ponto singular se, e somente se, $H \subset T_pF$.

Demonstração. Por hipótese $H_1, \ldots, H_k$ são polinômios homogêneos de grau 1, os quais podemos supor linearmente independentes. Desta forma, H é constituido de todos os pontos de $\mathbb{P}^n$ que são solução do seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} H_1 & = & \alpha_{11}x_1 & +\cdots+ & \alpha_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ H_k & = & \alpha_{k1}x_1 & +\cdots+ & \alpha_{kn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Temos assim um sistema com k equações linearmente independentes em $n+1$ variáveis. Sendo assim podemos escrever k variáveis em função das outras $n+1-k$ variáveis. Sem perda de generalidade, podemos supor que as k primeiras variáveis são escritas em função das $n+1-k$ últimas, isto é:

$$x_1 = \beta^1_{k+1}x_{k+1} + \ldots + \beta^1_{n+1}x_{n+1}, \ldots, x_k = \beta^k_{k+1}x_{k+1} + \ldots + \beta^k_{n+1}x_{n+1}.$$

Deste modo, um ponto $x \in H$ se, e somente se, pode ser escrito da seguinte forma

$$x = (\beta^1_{k+1}x_{k+1} + \cdots + \beta^1_{n+1}x_{n+1}, \ldots, \beta^k_{k+1}x_{k+1} + \cdots + \beta^k_{n+1}x_{n+1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

Suponha que $p \in F \cap H$ é um ponto singular, isto é $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ onde

$$f = F(\beta^1_{k+1}x_{k+1} + \cdots + \beta^1_{n+1}x_{n+1}, \ldots, \beta^k_{k+1}x_{k+1} + \cdots + \beta^k_{n+1}x_{n+1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

Agora observe o seguinte:

- Para $i = 1, \ldots, k$ temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$ pois x_i não aparece na definição de f.

- Para $i = k+1, \ldots, n+1$ temos

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)\beta_i^j + \frac{\partial F}{\partial x_i}(p). \qquad (2.5)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)\beta_i^j = -\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \qquad (2.6)$$

Agora, lembremos que $q = (q_1, \ldots, q_{n+1}) \in T_pF \Longleftrightarrow \sum \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot (q_i - p_i) = 0$.
Como $p \in H$ temos que

$$p = (\beta_{k+1}^1 p_{k+1} + \cdots + \beta_{n+1}^1 p_{n+1}, \ldots, \beta_{k+1}^k p_{k+1} + \cdots + \beta_{n+1}^k p_{n+1}, p_{k+1}, \ldots, p_{n+1}),$$

e desta forma para

$$q = (\beta_{k+1}^1 q_{k+1} + \cdots + \beta_{n+1}^1 q_{n+1}, \ldots, \beta_{k+1}^k q_{k+1} + \cdots + \beta_{n+1}^k q_{n+1}, q_{k+1}, \ldots, q_{n+1}) \in H,$$

temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(q_j - p_j) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(q_j - p_j) + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(q_j - p_j) \qquad (2.7)\\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) \sum_{i=k+1}^{n+1} \beta_i^j (q_i - p_i) + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(q_j - p_j)\\
&= \sum_{i=k+1}^{n+1} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)\beta_i^j (q_i - p_i) + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(q_j - p_j)\\
&= -\sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)(q_i - p_i) + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(q_j - p_j)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Onde a penúltima igualdade segue de 2.6, portanto $H \subset T_pF$.

Recíprocamente, suponha que $H \subset T_pF$, isto é, para todo $q \in H$ vale a seguinte igualdade

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(q_j - p_j) = \sum_{i=k+1}^{n+1} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)\beta_i^j (q_i - p_i) + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(q_j - p_j) = 0.$$

Reorganizando esta equação temos que

$$\sum_{i=k+1}^{n+1}\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial x_j}(p)\beta_i^j+\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)\Big)(q_i-p_i)=0.$$

Como a igualdade acima vale para todo $q\in H$, concluimos que

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial x_j}(p)\beta_i^j+\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)=0,\quad \text{para cada}\quad i=k+1,\dots,n+1.$$

Portanto, segue da igualdade acima junto com a equação 2.5 que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial x_j}(p)\beta_i^j+\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)=0,\quad \text{para cada}\quad i=k+1,\dots,n+1.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\equiv 0$ para $i=1,\dots,k$, segue que $p\in F\cap H$ é um ponto singular.

Prova da Proposição 2.2. Por hipótese C é uma cônica dupla para a interseção $\rho\cap\Delta$, portanto todo ponto $Q\in C$ é singular. Segue do lema anterior que $\rho\subset T_Q\Delta$ para cada $Q\in C$. Pela descrição 1.13 o hiperplano tangente $T_Q\Delta$ consiste de todas as quádricas $Q'\in\mathbb{P}^9$ que contém $v(Q)$. Como $\rho\subset T_Q\Delta$ implica que $v(Q)\in Q'$ para cada $Q'\in\rho$ e para cada $Q\in C$. Concluímos que $v(C)\subset Q$ para toda $Q\in\rho$.

Note que $\rho\not\subset\Delta$ pois caso contrário $\rho\cap\Delta=\rho$. Logo, existe uma quádrica não singular $Q_0\in\rho$ tal que $v(C)\subset Q_0$. Sabemos que $v(C)\subset\mathbb{P}^3$ é uma curva irredutível, desta forma existe uma outra curva irredutível $D\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\simeq Q_0$ tal que a imagem de D pelo mapa de Segre corresponde a $v(C)$. Agora, em $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, D é dada por um polinômio irredutível bihomogêneo $F(x_1,x_2,y_1,y_2)$ de bigrau (a,b). Lembremos que ρ é gerada por três quádricas linearmente independentes e sendo assim, existem duas quádricas Q_1 e Q_2 linearmente independentes módulo Q_0 e tais que $\rho=\langle Q_0,Q_1,Q_2\rangle$. As interseções de Q_1 e Q_2 com $Q_0\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ são dadas por polinômios bihomogênios linearmente independentes G_1 e G_2 de bigrau $(2,2)$ (**Cf. Observação** 2.1). Como $v(C)\subset Q_0\cap Q_1\cap Q_2$, segue que cada G_i se anula sobre D. Logo F divide G_i. Isto deixa apenas as seguintes possibilidades para o bigrau (a,b) de F: $(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,2)$ e simétricos. Vamos analisar cada possibilidade.

Caso 1. $(a,b)=$ **(0,1)** ou $(a,b)=$ **(1,0)**

Precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.4. Sejam H_1 e H_2 polinômios bihomogêneos linearmente independentes de bigrau $(2,1)$ nas variáveis $[x_1,x_2],[y_1,y_2]$. Então existem constantes α_1,α_2 tais que

$H = \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2$ pode ser fatorado na forma $H = P_1 P_2$ com $bigrau(P_1) = (1,1)$ e $bigrau(P_2) = (1,0)$.

Demonstração. Denote por S o espaço projetivo dos polinômios bihomogêneos de bigrau $(2,1)$, nas variáveis $[x_1, x_2], [y_1, y_2]$. Podemos identificar S com o espaço projetivo $\mathbb{P}^5$. De fato, se $P \in S$, então

$$P = \sum_{1 \leq i,j,k \leq 2} a_{ij}^k x_i x_j y_k,$$

com isso idenficamos P com o ponto $[a_{11}^1, a_{11}^2, a_{12}^1, a_{12}^2, a_{22}^1, a_{22}^2] \in \mathbb{P}^5$.

Deste modo, podemos pensar em H_1 e H_2 como pontos distintos neste $\mathbb{P}^5$. Seja $L \subset \mathbb{P}^5$ a reta passando por H_1 e H_2. Considere o seguinte conjunto,

$$S' = \{H \in \mathbb{P}^5 / H = P_1 P_2, \quad \text{com} \quad bigrau(P_1) = (1,1) \quad \text{e} \quad bigrau(P_2) = (1,0)\}.$$

Vamos mostrar que $S' \cap L \neq \emptyset$. Primeiro note que S' é a imagem da seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ & (P_1, P_2) & \longmapsto & P_1 P_2 \end{array}$$

Onde $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^3$ denotam os espaços dos polinômios bihomogêneos, nas variáveis $[x_1, x_2], [y_1, y_2]$, de bigrau $(1,0)$ e $(1,1)$ respectivamente (aqui fizemos uma identificação análoga a que fizemos para S). Esta aplicação é um morfismo pois é uma aplicação polinomial.

Afirmação 1. φ é uma aplicação injetiva fora da subvariedade de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$ formada pelos pares (P_1, P_2) com P_1 redutível.

Prova. Cosidere o seguinte conjunto

$$U = \{(P_1, P_2) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1 / P_1 \text{ é irredutível}\}.$$

Trata-se de um aberto, pois seu complementar é um fechado. Agora tome $(P_1, P_2), (Q_1, Q_2) \in U$ tais que $P_1 P_2 = Q_1 Q_2$, suponha por absurdo que $P_1 \neq Q_1$, isto implica que $mdc(P_1, Q_1) = 1$ e, portanto, $P_1 \mid Q_2$ e $Q_1 \mid P_2$ o que é uma contradição pois $P_2, Q_2 \in \mathbb{P}^1$ são irredutíveis. Logo $P_1 = Q_1$ e consequentemente $P_2 = Q_2$, daí segue a injetividade de φ.

Afirmação 2. S' tem dimensão 4 em $\mathbb{P}^5$ e portanto é uma hipersuperfície.

Prova. Temos que $S' = \varphi(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1)$ é um fechado irredutível. Segue do **TDF** A.13 que existe um aberto $U' \subset S'$ tal que para cada $y \in U'$ e, para cada componente irredutível $Y \subset \varphi^{-1}(y)$, tem-se que $dimY = dim(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1) - dimS' = 4 - dimS'$. Como φ é contínua e $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$ é irredutível temos que $U \cap \varphi^{-1}(U') \neq \emptyset$. Tome então $x \in U \cap \varphi^{-1}(U')$, isso implica que $y = \varphi(x) \in U'$ e que $\varphi^{-1}(y) = \{x\}$, pois em U φ é injetiva. Portanto $\{x\}$ é componente irredutível de $\varphi^{-1}(y)$, e assim $0 = dim(\{x\}) = 4 - dimS'$. Concluímos então que $dimS' = 4$.

Como toda hipersuperfície encontra qualquer reta num espaço projetivo, temos que $S' \cap L \neq \emptyset$ ou seja, existe um polinômio H tal que $H = \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2$ e $H = P_1 P_2$ com $bigrau(P_1) = (1,1)$ e $bigrau(P_2) = (1,0)$. □

Voltemos ao nosso caso. Suponha que $(a,b) = (0,1)$ (o caso $(1,0)$ é análogo). Sejam G_1 e G_2 os polinômios bihomogêneos correspondentes as quádricas lineramente independentes Q_1 e Q_2. Dados que $F \mid G_1$ e $F \mid G_2$, existem H_1 e H_2 tais que $G_1 = FH_1$ e $G_2 = FH_2$, com $bigrau(H_1) = bigrau(H_2) = (2,1)$.

Pelo lema acima, podemos encontrar $H = \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 = P_1 P_2$, com $bigrau(P_1) = (1,1)$ e $bigrau(P_2) = (1,0)$. Daí temos

$$FH = F(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2) = F(P_1 P_2) = P_1(FP_2).$$

Lembremos do isomorfismo $\varphi : \mathbb{C}[z]/\langle Q_0 \rangle \cong \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ dado pelo mapa de Segre, vemos que o polinômio bihomogêneo P_1 corresponde a uma forma linear $A[z]$. Da mesma forma, FP_2 corresponde a uma forma linear $B[z]$, valendo a igualdade

$$AB = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \alpha_0 Q_0.$$

isso mostra que ρ cotém um par de planos AB, o que contraria a hipótese. Portanto, o caso 1 está eliminado.

Caso 2. $(a,b) =$ **(0,2)** ou $(a,b) =$ **(2,0)**

Lembremos que um polinômio homogêneo não nulo em duas variáveis (sobre um corpo algébricamente fechado) é sempre redutível. De fato, seja $H = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} Y + \cdots + a_n Y^n \in \mathbb{K}[X,Y]$, com $\mathbb{K}$ um corpo algébricamente fechado. Se $a_0 = 0$ ou $a_n = 0$ temos que X ou Y divide H. Suponha então que $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$, e considere $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ as n raízes (não nescessáriamente distintas) do polinômio que é a desomogeneização de H. Desta forma temos que

$$H(X,1) = a_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i).$$

Homogeneizando temos que

$$H(X,Y) = a_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i Y).$$

Portanto H é redutível.

Como F é irredutível, este caso nunca será possível.

Caso 3. $(a,b) =$ **(2,2)**

Se $(a,b) =$ **(2,2)**, então $F = \alpha_1 G_1$, $F = \alpha_2 G_2$ onde α_1, α_2 são constantes não-nulas, o que implica $\alpha_1 G_1 - \alpha_2 G_2 = 0$, o que contradiz o fato da independência linear de G_1 e G_2.

Caso 4. $(a,b) =$ **(1,1)**

Vamos usar o seguinte resultado.

Lema 2.5. **??** Seja $Q \in \mathbb{P}^9$ uma quádriva que contém uma cônica irredutível $C = Q_0 \cap H$, onde H é um plano e Q_0 é uma quádrica. Então $Q = \alpha Q_0 + LH$, onde α é constante e L é um polinômio linear homogêneo.

Prova. A menos de uma mudança de coordenadas podemos supor que H é dado por $z_0 = 0$. Sendo assim, a interseção $H \cap Q_0$ é obtida fazendo $z_0 = 0$ na equação de Q_0. Resulta num plinômio homogêneo Q_0' de grau 2 nas variáveis z_1, z_2 e z_3. De maneira análoga, fazendo $z_0 = 0$ na equação de Q obtemos um polinômio homogêneo Q' de grau 2 nas variáveis z_1, z_2 e z_3. Como $C \subset Q_0' \subset Q$ temos que Q' se anula onde Q_0' se anula. Portanto, Q_0' divide Q' e assim $Q' = \alpha Q_0'$. Logo $Q = \alpha Q_0 + L z_0$, onde L é um polinômio homogêneo de grau 1.

Se $(a,b) = (1,1)$ então F corresponde pelo mapa de Segre a um plano $H \subset \mathbb{P}^3$. Daí, $v(C)$ deve ser uma cônica, interseção de H e Q_0. Seja Q uma quádrica que contém $v(C)$. Pelo **Lema ??**, segue uma relação $Q = \alpha Q_0 + LH$, onde α é constante e L é homogêneo de grau 1. Sabemos que toda quádrica em ρ contém $v(C)$, e portanto ela pode ser escrita como $\alpha Q_0 + LH$. Mas isso implica que ρ contém pares de planos. De fato, sejam $Q_1 := \alpha_1 Q_0 + L_1 H$ e $Q_2 := \alpha_2 Q_0 + L_2 H$ elementos distintos na rede ρ. Se $\alpha_2 \neq 0$, então $(\alpha_1 Q_0 + L_1 H) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\alpha_2 Q_0 + L_2 H) = (L_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} L_2) H$ é um par de planos e pertence a ρ, já que se encontra sobre a reta em $\mathbb{P}^9$ ligando Q_1 e Q_2. Mas isto é uma contradição, pois ρ não contém par de planos. Logo o caso $(a,b) = (1,1)$ é impossível.

Nosso objetivo final é mostrar que, no caso restante, $v(C)$ é de fato uma cúbica reversa.

Caso 5. $(a,b) =$ **(1,2)**

Proposição 2.6. Seja $D \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ a curva definida por um polinômio bihomogêneo irredutível $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ de bigrau $(1, 2)$. Então a imagem de D pelo mapa de Segre é uma cúbica reversa.

Demonstração. Podemos escrever

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = A_1(y_1, y_2)x_1 - A_2(y_1, y_2)x_2,$$

onde A_1 e A_2 são polinômios homogêneos de grau 2 com $mdc(A_1, A_2) = 1$, pois F é irredutível. Para $x_2A_1 \neq 0$ temos a seguinte relação:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{A_2}{A_1}.$$

Daí segue a igualdade de pontos em $\mathbb{P}^3$,

$$[x_1y_1 : x_1y_2 : x_2y_1 : x_2y_2] = \left[\ \tfrac{x_1y_1}{x_2}, \tfrac{x_1y_2}{x_2}, y_1, y_2\ \right] =$$

$$= \left[\ \tfrac{y_1A_2}{A_1}, \tfrac{y_2A_2}{A_1}, y_1, y_2\ \right] = \left[\ y_1A_2, y_2A_2, y_1A_1, y_2A_1\ \right]$$

Isso mostra que um aberto denso de $v(C)$ coincide com um aberto denso da curva dada perametricamente por

$$\mathbb{P}^1 \ni [y_1, y_2] \mapsto [y_1A_2, y_2A_2, y_1A_1, y_2A_1] \in \mathbb{P}^3.$$

Mostraremos agora que os polinômios y_1A_2, y_2A_2, y_1A_1, e y_2A_1 são linearmente independentes, e assim eles parametrizam uma cúbica reversa. Sejam α, β, γ e δ constantes tais que

$$\alpha y_1A_2 + \beta y_2A_2 + \gamma y_1A_1 + \delta y_2A_1 = 0.$$

Reescrevemos essa identidade na forma

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)A_2 = -(\gamma y_1 + \delta y_2)A_1.$$

Segue que A_2 divide $(\gamma y_1 + \delta y_2)A_1$. Como $mdc(A_1, A_2) = 1$ segue que A_2 divide $(\gamma y_1 + \delta y_2)$. Sendo o grau de A_2 igual a dois, temos necessáriamente $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. □

Observação 2.4. Note que a hipótese de $\rho \cap X \neq \emptyset$ é essêncial. De fato, seja ρ a rede gerada pelas quádricas

$$\begin{aligned} Q_1 &= z_1 z_4, \\ Q_2 &= 2z_1z_3 + 2z_2z_4 + (z_3+z_4)^2 \\ Q_3 &= 2z_2z_3 + z_3^2 + z_4^2. \end{aligned}$$

Calculando a interseção $\rho \cap \Delta$ obtemos

$$(2a_2^2 - a_1a_3)^2,$$

novamente o quadrado perfeito de uma cônica irredutível. Mas o lugar dos zeros comuns a Q_1, Q_2 e Q_3 não é uma cúbica reversa pois está contido no par de planos $z_1z_4 = 0$.

Apêndice A

O Teorema da Dimensão das Fibras

Dedicamos este apendice ao estudo de um dos mais importantes resultados da Geometria Algébrica, o Teorema da Dimensão das Fibras, este foi de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho. Antes de demonstrá-lo faremos algumas definições e provaremos alguns resultados que serão nescessários para a demonstração.

A.1 Resultados de Álgebra Comutativa

Nesta seção enunciaremos alguns resultados da Álgebra Comutativa que posteriormente serão ultilizados.

Teorema A.1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito e B uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada que é um domínio de integridade. Então,*

$$dimB = trdeg_{\mathbb{K}} Frac(B).$$

Proposição A.2. Seja B uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada e assuma que B é um domínio de integridade. Então para todo $P \in Spec(B)$ verifica-se que

$$dim\frac{B}{P} = dimB - ht(P).$$

Proposição A.3. Sejam A e B $\mathbb{K}$-álgebras finitamente geradas tais que ambas são dominio de integridade. Temos que: se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo injetivo de $\mathbb{K}$-álgebras, então $\widetilde{\varphi} : Frac(A) \longrightarrow Frac(B)$, dada por $\widetilde{\varphi}(\frac{a}{b}) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$, é uma extensão de corpos.

Demonstração. Primeiro note que $\widetilde{\varphi}$ é bem definida. De fato, seja $a, b, c, d \in A$ tais que $ad - bc = 0$, desta forma $\widetilde{\varphi}(ad - bc) = \widetilde{\varphi}(0) = 0$, ou seja, $\varphi(a)\varphi(d) - \varphi(b)\varphi(b) = 0$. Logo $\widetilde{\varphi}$ é bem definida. Vamos mostrar a injetividade, seja $a, b, c, d \in A$ tais que

$\varphi(a)\varphi(d) - \varphi(b)\varphi(b) = 0$, isso implica que $\varphi(ad - bc) = 0$, como φ é injetiva segue $ad - bc = 0$. $\square$

Teorema do Ideal Principal de Krull A.1. *Sejam A um anel Noetheriano e $a \in A$ um elemento não-invertível. Então, para todo $P \in Spec(A)$ minimal dentre os que contém a, tem-se que $ht(P) \leq 1$. Em particular, se a não é um divisor de zero, então $ht\langle a \rangle = 1$.*

Demonstração. Vide [8] **pág. 179**

A.2 Morfismos

No que segue um fechado afim irredutível será chamado de variedade. Chamaremos de variedade quase-projetiva um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ que é isomorfo a algum conjunto projetivo localmente fechado.

Definição A.1. Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um fechado afim. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita polinômial se existe um polinômio $F \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $f(X) = F(X)$ para todo $x \in X$.

Observe que na definição anterior o polinômio F não é únicamente determinado. De fato, dois polinômios F e G determinam a mesma função polinômial em X se, e somente se, $F(x) = G(x)$ para todo $x \in X$, isto é, $F(x) - G(x) = 0$ para todo $x \in X$, mas isso acontece se, e somente se, $F - G \in I(X)$. Assim o anel quociente

$$A(X) := \frac{\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]}{I(X)}$$

está em bijeção com o conjunto das funções polinômiais em X. Chamaremos este anel quociente de *anel de coordenadas de X*.

Verifica-se que o anel $A(X)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada e reduzida. E recípocramente, toda $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada e reduzida é isomorfa a alguma $\mathbb{K}$-álgebra $A(X)$, para algum fechado afim X.

Definição A.2. Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ não-vazio. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ é regular em um ponto $x_0 \in X$, se existe um aberto $U \subset X$ contendo x_0 e funções polinômiais $p, q \in A(X)$ tais que $Z(q) \cap U = \emptyset$ e $f(x) = p(x)/q(x)$ para todo $x \in U$. Dizemos que f é regular em um subconjunto Y de X se for regular em cada $y \in Y$. Note que se $\alpha \in \mathbb{K}$ e f, g são funções regulares sobre X então αf, $f + g$ e fg são ainda regulares sobre X, desta forma o conjunto $\mathcal{O}(X)$ das funções regulares sobre X tem estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra. Chamaremos $\mathcal{O}(X)$ de *anel das funções regulares sobre X*.

Lembremos que se X é um variedade, então seu ideal $I(X)$ é primo e, portanto, seu anel de coordenadas é um domínio de integridade. Chamaremos o corpo de frações do domínio $A(X)$ de *corpo das funções racionais de* X, ou seja, é o conjunto dos $h = p/q$ com $p, q \in A(X)$, onde identificamos p/q com p'/q' se $pq' = p'q$ em X. Denotaremos este corpo por $\mathbb{K}(X)$ e chamamos seus elementos de funções racionais. Observe que $A(X) \subset \mathcal{O}(X) \subset \mathbb{K}(X)$.

Definição A.3. Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ fechados afins. Uma função $\varphi : X \longrightarrow Y$ é dita um *morfismo* se existem $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{O}(X)$ tais que

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)),$$

para todo $x \in X$.

Exemplo A.1. Se $f_1, \ldots, f_m \in A(X)$ então o mapa $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{A}^m$ dada por $\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ é um morfismo.

Observação A.1. Um fato interessante a ser observado é que se X e Y são duas variedades afins, então cada morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ induz um homomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras de $\mathcal{O}(Y)$ em $\mathcal{O}(X)$ dado por $f \in \mathcal{O}(Y) \mapsto f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$. Também é possível verificar que todo morfismo entre variedades afins é uma função contínua.

Queremos agora estender o conceito de morfismo para variedades quase projetivas, para isto precisamos do conceito de função regular para o caso projetivo. Considere $X \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto algébrico quase projetivo. Diremos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é regular em $x_0 \in X$ se existir um aberto $V \subset X$, com $x_0 \in V$, e polinômios homogêneos de mesmo grau $P, Q \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ tais que $V \cap Z(Q) = \emptyset$ e $\varphi(x) = P(x)/Q(x)$ para todo $x \in V$. A função φ é dita *regular* em X se é regular em cada $x \in X$. Note que se $\alpha \in \mathbb{K}$ e f, g são funções regulares sobre X então αf, $f + g$ e fg são ainda regulares sobre X, desta forma o conjunto $\mathcal{O}(X)$ das funções regulares sobre X tem estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra. Chamaremos $\mathcal{O}(X)$ de *anel das funções regulares sobre* X.

Definição A.4. Sejam X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos. Uma função $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um *morfismo* se para todo aberto $V \subset Y$ e toda função regular $f \in \mathcal{O}(V)$ tem-se

(i) φ é contínua;

(ii) $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(U)$, onde $U = \varphi^{-1}(V)$.

Observação A.2. Segue direto da **Observação** A.1 que se $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo entre fechados afins como definido anteriormente, então φ é um morfismo pela nova definição. Além disso, assim como observado anteriormente para o caso afim, todo morfismo, $\varphi : X \longrightarrow Y$, entre conjuntos algébricos quase projetivos induz um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* : & \mathcal{O}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{O}(X) \\ & f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Teorema A.4. *Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ uma função contíniua, onde $X \subset \mathbb{P}^n$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$. Então, φ é um morfismo se, e somente se, para cada $a \in X$ existem um aberto V de Y contendo $\varphi(a)$ e funções regulares $\varphi_0, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$ tais que, para cada $x \in \varphi^{-1}(V)$ se tenha*

$$\varphi(x) = (\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x)). \tag{A.1}$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que φ seja um morfismo. Tome $a \in X$. Lembremos que todo espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ pode ser coberto por abertos $U_i's$ dados por $U_i = D(X_i)$. Desta forma $\varphi(a) \in U_i$ para algum $i = 0, \ldots, m$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\varphi(a) \in U_0$, então $V = Y \cap U_0$ é um aberto que contém $\varphi(a)$. Seja $U = \varphi^{-1}(V)$. Para cada $1 \leq i \leq m$, a função X_i/X_0 é regular em V, como φ é um morfismo, temos que $\varphi_i := \frac{X_i}{X_0} \circ \varphi|_U$ é uma função regular em U. Sendo assim, se $x \in U$ e $\varphi(x) = (y_0 : \cdots : y_m)$, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= (y_0 : \cdots : y_m) \\ &= \left(1 : \frac{y_1}{y_0} : \cdots : \frac{y_m}{y_0}\right) \\ &= \left(1 : \frac{X_1}{X_0} \circ \varphi(x) : \cdots : \frac{X_m}{X_0} \circ \varphi(x)\right) \\ &= (1 : \varphi_1(x) : \cdots : \varphi_m(x)) \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Suponha que exista uma cobertura aberta $\{V_i\}$ de Y tal que $\varphi|_U$ é da forma A.1 para cada i. Seja V um aberto de Y e considere $f \in \mathcal{O}(V)$. Sendo $U = \varphi^{-1}(V)$ vamos mostrar que $f \circ \varphi|_U$ é regular em U. Para isto, basta mostrar que é regular em cada ponto de U.

Seja $a \in U$, então $\varphi(a) \in V_i$ para algum i. Ponhamos $V' = V \cap V_i$ e $U' = U \cap \varphi^{-1}(V')$, logo $g \in \mathcal{O}(V')$ e $\varphi(x) = (\varphi_0(x) : \cdots : \varphi_m(x))$ para todo $x \in U'$, onde $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{O}(U')$.

Como f é regular em V', existem um aberto $V'' \subset V'$ contendo $\varphi(a)$ e polinômios homogêneos P e Q de mesmo grau tais que Q não se anula em V'' e $f(y) = P(y)/Q(y)$ para todo $y \in V''$. Análogamente, cada φ_j é regular em X, logo existem um aberto $U'' \subset U'$ e polinômios F_j, G_j homogêneos de mesmo grau tais que G_j não se anula em

U'' e $\varphi_j(x) = F_j(X)/G_j(x)$ para todo $x \in U''$. Sem perda de generalidade, podemos supor que U'' está contido em $\varphi^{-1}(V'')$.

Desta forma, para cada $x \in U''$ temos

$$f \circ \varphi(x) = \frac{P\left(\frac{F_0(x)}{G_0(x)}, \ldots, \frac{F_m(X)}{G_m(x)}\right)}{Q\left(\frac{F_0(x)}{G_0(x)}, \ldots, \frac{F_m(X)}{G_m(x)}\right)} = \frac{P(y)}{Q(y)}$$

Onde $y = \varphi(x) \in V''$. Então $Q(y) \neq 0$, temos que $f \circ \varphi$ é regular em $\varphi^{-1}(V'')$. $\square$

Corolário A.5. Se X é um conjunto algébrico quasi-projetivo e $F_0, \ldots, F_m \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ são polinômios homogêneos de mesmo grau sem zeros comum em X, então

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & X & \longrightarrow & \mathbb{P}^m \\ & x & \longmapsto & [F_0(x) : \cdots : F_m(x)] \end{array}$$

é um morfismo.

Demonstração. Primeiro note que φ está bem definida, pois os polinômios F_i não têm zeros em comum no conjunto X. Por outro lado, sendo os polinômios homogêneos de mesmo grau, digamos d, tem-se que

$$\varphi(\lambda x) = (\lambda^d F_0(x) : \cdots : \lambda^d F_m(x)) = (F_0(x) : \cdots : F_m(x)) = \varphi(x).$$

Vamos usar o **Teorema** A.4 para mostrar que φ é um morfismo. Observe que φ é contínua, com efeito, seja W é um fechado em $\mathbb{P}^m$, digamos $W = Z_p(G_1, \ldots, G_r)$ com $G_0, \ldots, G_r \in \mathbb{K}[S_0, \ldots, S_m]$. Temos que $\varphi^{-1}(W)$ é fechado em X pois é a interseção de X com o conjunto de zeros dos polinômios $G_i \circ \varphi$ para $i = 0, \ldots, r$.

Agora tome $a \in X$. Então $\varphi(a) \in U_i$ para algum i. Sem perda de generalidade, podemos supor $i = 0$. Portanto, para todo x em $U = \varphi^{-1}(U_0)$, temos $F_0(x) \neq 0$. Assim, as funções F_i/F_0 são regulares em U e para todo $x \in U$

$$\varphi(x) = (F_0(x) : \cdots : F_m(x)) = \left(1 : \frac{F_1(x)}{F_0(x)} : \ldots : \frac{F_m(x)}{F_0(x)}\right),$$

mostrando que φ é da forma A.1 do **Teorema** A.4. $\square$

Definição A.5. Sejam X e Y variedades quase projetivas e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo. Dizemos que f é um morfismo dominante se $\overline{f(X)} = Y$.

Proposição A.6. Sejam X e Y fechados afins e $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo. Se φ é um morfismo dominante, então o homomorfismo induzido $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ é injetivo.

Demonstração. De fato, se $f \in \mathcal{O}(Y)$ é tal que $f \circ \varphi = 0$ em $\mathcal{O}(X)$ então $f(y) = 0$ para todo $y \in \varphi(X)$. Assim temos $\varphi(X) \subset Z(f) \subset Y$ e, como $Z(f)$ é fechado em Y, temos também que $\overline{\varphi(X)} \subset Z(f)$. Como φ é dominante, isto implica que $Z(f) = Y$, ou seja, $f = 0$ em $\mathcal{O}(Y)$ e portanto φ^* é injetor. □

A.3 Dimensão

Dado um variedade X, sabemos que existe uma bijeção entre os subconjuntos irredutíveis de X e os ideais primos do seu respectivo anel de coordenadas, $A(X)$. Com isso podemos estabelecer mais uma relação entre a geometria e a álgebra através da segunte definição.

Definição A.6. Seja X um variedade. Definimos a dimensão de X como sendo

$$dimX = dimA(X) \tag{A.2}$$

Proposição A.7. Seja X uma variedade.

(i) Se X é irredutível, então
$$dimX = trdeg_{\mathbb{K}}A(X)$$

(ii) Se $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$ é a decomposição de X em componentes irredutíveis, então
$$dimX = max_i\{dimX_i\} = max_i\{trdeg_{\mathbb{K}}A(X_i)\}$$

Demonstração. Vide [8] **pág. 174**.

Teorema A.8. *Se $X \subset Y$, então $dimX \leq dimY$. Se Y é irredutível e $X \subset Y$ é uma subvariedade fechada com $dimX = dimY$, então $X = Y$.*

Demonstração. Vide [6] **pág. 68**.

Definição A.7. Seja X um fechado afim e $Z \subset X$ uma subconjunto também fechado. Definimos a codimensão de Z em X como sendo

$$codim_X Z := dimX - dimZ.$$

Teorema A.9. *Sejam $Z \subseteq X \subseteq A^n$ fechados afins irredutíveis. Então $codim_X Z = 1$ se, e somente se, existe $\overline{f} \in A(X)$ não-nulo e não-invertível tal que Z é uma componente irredutível de $Z_X(f)$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Assuma que $codim_X Z = 1$, isso implica que $Z \subsetneq X$ e consequentemente $I(X) \subsetneq I(Z)$. Temos assim que $\overline{I(Z)} = I_X(Z) \subset A(X)$ é um ideal primo não-nulo. Considere $\overline{f} \in \overline{I(Z)}$ não-nulo.

Note que $\overline{f}$ é não-invertível, pois $\overline{I(Z)}$ é primo. Além disso, escolhendo de forma adequada um representante $g \in I(Z)$ tal que $\overline{g} = \overline{f}$, podemos assumir que $f \in I(Z)$. Observe também que $Z_X(f) \subsetneq X$ pois $f \notin I(X)$.

Nosso objetivo agora é mostrar que Z é uma componente irredutível de $Z_X(f)$. Com efeito, assuma que $Z_X(f) = Y_1 \cup \cdots \cup Y_l$ onde Y_i é uma componente irredutível, $i = 1, \ldots, l$. Como Z é uma variedade afim contida em $Z_X(f)$ temos que $Z \subseteq Y_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, l\}$. Assim, $Z \subseteq Y_i \subseteq Z_X(f) \subsetneq X$. Desta forma

$$dimZ \leq dimY_i \leq dimZ_X(f) < dimX = dimZ + 1,$$

o que implica $dimZ = dimY_i$ e portanto $Z = Y_i$ (**Cf. Teorema A.8**).

($\Longleftarrow$) Note que,

$$\begin{aligned} Z \subset Z_X(f) = X \cap Z(f) &\Rightarrow Z \subset Z(f) \\ &\Rightarrow f \in I(Z) \\ &\Rightarrow \overline{f} \in \overline{I(Z)} \end{aligned}$$

Como Z é irredutível temos que $I_X(Z)$ é um ideal primo em $A(X)$ que contém $\overline{f}$. Nosso objetivo é mostrar $ht(I_X(Z)) = 1$. Com efeito, lembremos que as subvariedades de X estão em correspondência biunívoca com os ideais primos de $A(X)$. Considere J um ideal primo contendo $I(X)$ tla que $\overline{f} \in \overline{J} \subseteq I_X(J) = \overline{I(J)}$. Podemos assumir que $f \in J$, e assim temos

$$\begin{aligned} f \in J \subseteq I(Z) &\Rightarrow Z \subseteq Z(J) \subseteq Z(f) \\ &\Rightarrow Z \cap X \subseteq Z(J) \cap X \subseteq Z(f) \cap X \\ &\Rightarrow Z \subseteq Z(J) \subseteq Z_X(f) \end{aligned}$$

Observe que $Z(J)$ é irredutível, e portanto está contido em alguma componente irredutível, Z', de $Z_X(f)$. Logo

$$Z \subseteq Z(J) \subseteq Z' \subset Z_X(f),$$

supondo que a decomposição em fatores irredutíveis de $Z_X(f)$ não é redundante, concluímos que $Z = Z'$ e consequantemente $Z = Z(J)$. Portanto $I(Z) = J$ o que implica

$I_X(Z) = \overline{I(Z)} = \overline{J}$, ou seja $I_X(Z)$ é minimal entre os ideais primos que contém $\overline{f}$. Segue do **Teorema** A.1 que $ht(I_X(Z)) = 1$.

Por outro lado, temos que

$$dim \frac{A(X)}{I_X(Z)} = dimA(X) - ht(I_X(Z)) = dimX - 1,$$

lembremos que $A(Z) \simeq \dfrac{A(X)}{I_X(Z)}$, logo

$$dimZ = dimA(Z) = dim \frac{A(X)}{I_X(Z)} = dimX - 1$$

portanto $codim_X Z = dimX - dimZ = 1$. □

Corolário A.10. Sejam X e Y variedades afins tais que $Y \subseteq X$. Se $codim_X Y = r \geq 1$, então existe uma sequência de variedades afins $Y_r = Y \subsetneq Y_{r-1} \subsetneq \cdots \subsetneq Y_1$, tais que $codim_X Y_i = i$ para $i = 1, \ldots, r$.

Demonstração. Vamos usar indução sobre r. Se $r = 1$ o resuldado é imediato. Agora suponha que nosso resultado seja válido para todo r_0 tal que $r > r_0 \geq 1$, vamos mostrar que também vale para r. Como $codim_X Y = r > 1$, temos que $Y \subsetneq X$ e consequentemente $I(X) \subsetneq I(Y)$. Considere $f \in I(Y) \setminus I(X)$, com isso $Z_X(f) \subset X$ é tal que $codim_X Z_X(f) = 1$ (**Cf. [6] pág. 70**). Logo $codim_{Z_X(f)} Y = r - 1$, pela hipótese de indução existe uma sequência de variedades afins $Y = Y_{r-1} \subsetneq \cdots \subsetneq Y_1$ tal que $codim_{Z_X(f)} Y_i = i$ para $i = 1, \ldots, r-1$. Olhando $Y_i \subset X$ obtemos uma sequência $Y_r = Y \subsetneq Y_{r-1} \subsetneq \cdots \subsetneq Y_1 = Z_X(f)$, tais que $codim_X Y_i = i$ para $i = 1, \ldots, r$. □

Corolário A.11. Sejam X uma variedade afim e $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_r} \in A(X)$. Então, para toda componente irredutível Z de $Z_X(f_1, \ldots, f_r) = X \cap Z(f_1, \ldots, f_r)$ verifica-se que $codim_X(Z) \leq r$.

Demonstração. Esta prova será feita usando indução sobre r.

Se $r = 1$, considere $\overline{f} \in A(X)$ e Z componente irredutível de $Z_X(f)$. Temos os seguintes casos a considerar:

1) Se $\overline{f} = \overline{0}$

$$\begin{array}{llllll} \Rightarrow & f \in \overline{I}(X) & \Rightarrow & X \subset Z(f) & \Rightarrow & Z_X(f) = X \\ \Rightarrow & Z = X & \Rightarrow & codim_X Z = 0 & & \end{array}$$

2) Se $\overline{f}$ é invertível, então existe $\overline{g} \in A(X)$ tal que $\overline{fg} = \overline{1}$

$$\Rightarrow \overline{fg - 1} = \overline{0} \Rightarrow fg - 1 \in \overline{I}(X) \Rightarrow X \subset Z(fg - 1)$$

e portanto $Z_X(f) = X \cap Z(f) = \emptyset$.

3) $\overline{f}$ é não-nulo e não-invertível, então se Z é uma componente irredutível de $Z_X(f)$ segue do teorema anterior que $codim_X Z = 1$.

Agora, suponha por indução que se $\widetilde{X}$ é uma variedade afim e $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_j} \in A(X)$ são tais que $2 \leq j \leq r-1$ e toda componenete irredutível $\widetilde{Z}$ de $Z_{\widetilde{X}}(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_j})$ é tal que

$$codim_{\widetilde{X}} \widetilde{Z} \leq j.$$

Considere $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_r} \in A(X)$ e Z uma componenete irredutível de $Z_X(f_1, \ldots, f_r)$. Note que

$$Z \subseteq Z_X(f_1, \ldots, f_r) = X \cap Z(f_1, \ldots, f_r) = X \cap Z(f_1) \cap \ldots \cap Z(f_r) \quad \Rightarrow \quad Z \subseteq Z_X(f_i).$$

Em particular $Z \subset Z_X(f_1)$. Como Z é irredutível, temos que $Z \subseteq Y$ para alguma componenete irredutível $Y \subset Z_X(f_1)$. Por outro lado, Y é uma variedade algébrica contida em X, portanto

$$\begin{array}{ccc} A(X) & \longrightarrow & A(Y) \\ \overline{f} & \longmapsto & \widetilde{f} \end{array}$$

Considere $\widetilde{f_2}, \ldots, \widetilde{f_r} \in A(Y)$.

Afirmações:

1. $Z \subseteq Z_Y(f_2, \ldots, f_r) = Y \cap Z(f_2, \ldots, f_r)$;

2. Z é componente irredutível de $Z_Y(f_2, \ldots, f_r)$.

Prova das afirmações:

(1) Temos que $Z \subset Z(f_2, \ldots, f_r)$ e $Z \subseteq Y$, logo $Z \subseteq Y \cap Z(f_2, \ldots, f_r) = Z_Y(f_2, \ldots, f_r)$.

(2) Assuma que $Z_Y(f_2, \ldots, f_r) = W_1 \cup \ldots \cup W_s$ é uma decomposição não redundante em fatores irredutíveis. Como Z é irredutível e $Z \subseteq Z_Y(f_2 \ldots, f_r)$ implica que $Z \subseteq W_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, s\}$. Por outro lado, $W_i \subseteq Z_Y(f_2, \ldots, f_r) \subseteq Z_X(f_1, \ldots, f_r) = Z \cup Z_1 \cup \ldots \cup Z_l$ o que implica $W_i = Z$. Segue da hipótese de indução que

$$codim_Y Z \leq r-1.$$

Por fim, note que $Z \subseteq Y \subseteq X$ e daí

$$codim_X Z = codim_Y Z + codim_X Y \leq r - 1 + codim_X Y.$$

Lembremos que Y é uma componente irredutível de $Z_X(f_1)$, pela hipótese de indução temos que $codim_X Y \leq 1$. Logo

$$codim_X Z \leq r - 1 + 1 = r.$$

□

Corolário A.12. Sejam X e Y variedades afins tais que $Y \subsetneq X$. Se $codim_X Y = r \geq 1$, então existemm $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_r} \in A(X)$ tais que Y é componenete irredutível de $Z_X(f_1, \ldots, f_r)$ e toda componente irredutível $W \subseteq Z_X(f_1, \ldots, f_r)$ é tal que $codim_X W = r$.

Demonstração. Novamente usaremos indução sobre r.

Se $r = 1$ o resultado segue do **Teorema** A.9 junto com o **Corolário** A.11.

Agora, suponha por indução que se $\widetilde{Y}$ e $\widetilde{X}$ variedades afins e tais que $\widetilde{Y} \subsetneq \widetilde{X}$ e $codim_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = s \leq r - 1$. Então existem $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_s} \in A(\widetilde{X})$ tais que $\widetilde{Y}$ é componenete irredutível de $Z_{\widetilde{X}}(g_1, \ldots, g_s)$, além disso, toda componente irredutível de $Z_{\widetilde{X}}(g_1, \ldots, g_s)$ possui codimensão s em $\widetilde{X}$. Queremos mostrar que o resultado é válido para $r = s$.

De fato, sejam X e Y variedades afins tais que $Y \subsetneq X$ e $codim_X Y = r$. Segue do **Corolário** A.11 que existe uma sequência de variedades afins

$$Y_r = Y \subsetneq Y_{r-1} \subsetneq \cdots \subsetneq Y_1 = X, \textit{ tais que } codim_X Y_i = i \;\; \forall i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Considere $Y_{r-1} \subsetneq X$ contendo Y_r. Sabemos que $codim_X Y_{r-1} = r - 1$, e portanto podemos aplicar a hipótese de indução para Y_{r-1}. Logo, existem $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_{r-1}} \in A(X)$ tais que Y_{r-1} é uma componenete irredutível de $Z_X(g_1, \ldots, g_{r-1})$ e toda componenete irredutível de $Z_X(g_1, \ldots, g_{r-1})$ tem codimensão igual a $r - 1$.

Assuma que $Z_X(g_1, \ldots, g_{r-1}) = Z_1 \cup \cdots \cup Z_l$ é uma decomposição não redundante em fatores irredutíveis. Sem perde de generalidade podemos assumir que $Z_1 = Y_{r-1}$.

Note que $Z_i \nsubseteq Y$ para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$. De fato, se $Z_1 \subset Y$ então $Z_1 = Y$ o que é uma contradição. Se $|Z_i \subset Y \subset Z_1$, então $Z_1 = Z_i$ o que contradiz o fato de ser uma decomposição não redundante. Logo, $I(Y) \nsubseteq I(Z_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, l\}$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \overline{I(Y)} \nsubseteq \overline{I(Z_i)} \qquad \Rightarrow \; \overline{I_X(Y)} \nsubseteq \overline{I_X(Z_i)} \quad \forall i \in \{1, \ldots, l\} \\ &\Rightarrow \; I_X(Y) \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{l} I_X(Z_i). \end{aligned}$$

Assim, podemos considerar $\overline{g_r} \in I_X(Y)$ tal que $\overline{g_r} \notin I_X(Y)$ para todo $i = 1, \ldots, l$.

Afirmação 1. Seja V uma componenete irredutível de $Z_X(g_1, \ldots, g_r)$, então $codim_X V = r$.

Com efeito, temos que

$$V \subseteq Z_X(g_1, \ldots, g_r) \subset (g_1, \ldots, g_{r-1}) = Z_1 \cup \cdots \cup Z_l.$$

Como V é fechado e irredutível, existe $j \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $V \subseteq Z_j$. Logo, $V \subset Z_{Z_j}(g_r)$ o que implica $\widetilde{g_r} \in A(Z_i)$. Agora, observe que:

(i) $\widetilde{g_r} \neq 0$, caso contrário $g_r \in I(Z_j)$ o que implica $\overline{g_r} \in I_X(Z_j)$ o que é uma contradição;

(ii) $\widetilde{g_r}$ é não-invertível, caso contrário $V \subset Z_{Z_j}(g_r) = \emptyset$ o que também é uma contradição.

Assuma que $Z_{Z_j}(g_r) = W_1 \cup \cdots \cup W_m$ é uma decomposição, não redundante, em fatores irredutíveis. Como V é um fechado irredutível e $V \subset Z_{Z_j}(g_r)$, existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $V \subseteq W_k$.

Assim temos, $W_k \subseteq Z_j \subseteq X$ o que implica

$$codim_X W_k = codim_X Z_j + codim_{Z_l} W_k = r.$$

Por outro lado, temos que V é componente irredutível de $Z_X(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r})$, pelo **Corolário** A.11 segue que $codim_X V \leq r$,

$$\Rightarrow \quad dim X - dim V \leq r = codim_X W_k = dim X - dim W_k,$$

$$\Rightarrow \quad dim W_k = dim V.$$

Logo, $W_k = V$ e assim $codim_X V = r$.

Afirmação 2. Y é componente irredutível de $Z_X(g_1, \ldots, g_r)$.

Assuma que $Z_X(g_1, \ldots, g_r) = \widetilde{W_1} \cup \cdots \cup \widetilde{W_u}$ é uma decomposição, não redundante, em fatores irredutíveis. Como $Y \subseteq X$ e Y é variedade afim, temos que $Y \subseteq \widetilde{W_p}$ para algum $p \in \{1, \ldots, u\}$. Como $codim_X Y = codim_X \widetilde{W_p}$, temos que $dim Y = dim \widetilde{W_p}$ e portanto $Y = \widetilde{W_p}$.

□

A.4 Teorema da Dimensão das Fibras

Teorema A.13. ***(Teorema da Dimensão das Fibras)*** *Sejam X e Y variedades quase projetivas irredutíveis e $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante. Então:*

(i) $dimX \geq dimY$.

(ii) *Para todo* $y \in Im(\varphi)$ *e para qualquer componente irredutível* Z *de* $\varphi^{-1}(y)$ *tem-se* $dimZ \geq dimX - dimY$.

(iii) *Existe um aberto* $U \subset Y$ *não vazio tal que* $dim(\varphi^{-1}(y)) = dimX - dimY$ *para todo* $y \in U$.

Antes de tudo, note que é suficiente provar este teorema para o caso em que X e Y são variedades afim. De fato, suponha que vale para o caso afim, recobrimos Y por um número finito de $Y_i's$ abertos afins e cada $\varphi^{-1}(Y_i)$ por abertos afins X_{ij}. É claro que os X_{ij} recobrem X. Por hipótese, para cada restrição $\varphi : X_{ij} \to Y_i$ existe um aberto denso U_{ij} que satisfaz a condição (iii) do teorema. Façamos $U = \cap U_{ij}$. Tome $y \in U$ e seja Z uma componente de $\varphi^{-1}(y)$. Se Z encontra X_{ij}, o caso afim aplicado a $X_{ij} \to Y_i$ mostra que $dimZ = dimX - dimY$. No que segue $X \subset A^n$ e $Y \subset A^m$ são variedades afins.

Demonstração. (i) Como $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo dominante entre variedades afins sobre um corpo, temos que

$$\varphi^* : A(Y) \longrightarrow A(X)$$

é injetivo, onde $A(X)$ e $A(Y)$ denotam os anéis de fração de X e Y respectivamente. Logo

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\varphi^*} : & Frac(A(Y)) & \longrightarrow & Frac(A(X)) \\ & \frac{\overline{g}}{\overline{h}} & \longmapsto & \frac{\overline{g \circ f}}{\overline{h \circ f}} \end{array}$$

é injetivo, e daí temos a seguinte extensão de corpos **cf. Proposição**A.2

$$\mathbb{K} \hookrightarrow Frac(A(Y)) \hookrightarrow Frac(A(X)).$$

Segue da definição de grau de transcendência que

$$\begin{array}{ccc} trdeg_{\mathbb{K}}Frac(A(X)) & \geq & trdeg_{\mathbb{K}}Frac(A(Y)) \\ \| & & \| \\ dimA(X) & & dimA(Y) \\ \| & & \| \\ dimX & & dimY \end{array}$$

(ii) Provaremos um resultado mais geral e, com isso, a prova desse ítem seguirá de um corolário.

Lema A.14. Sejam X e Y variedades afins e $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante. Seja $W \subseteq Y$ uma variedade afim e $Z \subseteq \varphi^{-1}(W)$ componente irredutível. Se $\overline{\varphi(Z)} = W$, então $dimZ \geq dimW + r$, sendo $r = codim_X Y$.

Demonstração. Seja $s = codim_Y W$, pelo **Corolário** A.12 existem $f_1, \ldots, f_s \in A(Y)$ tais que W é componente irredutível de $Z_Y(f_1, \ldots, f_s)$ e, além disso, toda componente irredutível de $Z_Y(f_1, \ldots, f_s)$ tem codimensão s em Y.

Lembremos que $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo dominante entre variedades afins, portanto induz o seguinte homomorfismo injetivo de $\mathbb{K}$-álgebras,

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* : & A(Y) & \longrightarrow & A(X) \\ & \widetilde{f} & \longmapsto & \overline{\widetilde{f} \circ \varphi} \\ & \widetilde{f_i} & \longmapsto & \overline{\widetilde{f_i} \circ f} = \overline{g_i} \end{array}$$

Considere $Z \subset \varphi^{-1}(W)$ componente irredutível, desta forma $\varphi(Z) \subseteq W \subseteq Z_Y(f_1, \ldots, f_s)$.

Afirmação 1. $Z \subseteq Z_X(g_1, \ldots, h_s)$.

$$\begin{aligned} x \in Z &\Leftrightarrow f(x) \in W \\ &\Leftrightarrow f_i(f(x)) = 0 \ \ \forall i \in \{1, \ldots, s\} \\ &\Leftrightarrow g_i(x) = 0 \ \ \forall i \in \{1, \ldots, s\} \end{aligned}$$

Seja $Z_0 \subseteq Z_X(g_1, \ldots, g_s)$ um componente irredutível tal que $Z \subseteq Z_0$. Assim temos, $Z \subseteq Z_0 \subseteq Z_X(g_1, \ldots, g_s)$, o que implica

$$\varphi(Z) \subseteq \varphi(Z_0) \subseteq \varphi(Z_X(g_1, \ldots, g_s)) \tag{A.3}$$

Observe que $\varphi(Z_X(g_1, \ldots, g_s)) \subseteq \varphi(Z_Y(f_1, \ldots, f_s))$. De fato, seja $y = \varphi(x)$ com $x \in X \cap Z(g_1, \ldots, g_s)$, temos que

$$f_i(y) = f_i(\varphi(x)) = g_i(x) = 0 \ \ para \ \ todo \ \ i \in \{1, \ldots, s\}.$$

Tomando o fecho em A.3 obtemos,

$$W = \overline{\varphi(Z)} \subseteq \overline{\varphi(Z_0)} \subseteq \overline{\varphi(Z_X(g_1, \ldots, g_s))} \subseteq Z_Y(f_1, \ldots, f_s).$$

Como $\overline{\varphi(Z_0)}$ é irredutível contido em $Z_Y(f_1, \ldots, f_s)$, existe $\widetilde{W}$ componente irredutível de $Z_Y(f_1, \ldots, f_s)$ tal que $\overline{\varphi(Z_0)} \subseteq \widetilde{W}$. Por outro lado $W \subseteq \overline{\varphi(Z_0)} \subseteq \widetilde{W}$, concluímos então que $\overline{\varphi(Z)} = \overline{\varphi(Z_0)}$ e, portanto, $\varphi(Z_0) \subseteq W$ o que implica

$$Z \subseteq Z_0 \subseteq f^{-1}(W),$$

como Z é uma componente irredutível, segue que $Z = Z_0$. Logo, segue do **Corolário** A.11 que

$$codim_X Z = codim_X Z_0 \leq s.$$

Por fim, observe que

$$\begin{aligned} dimZ = dimX - codim_X Z \geq dimX - s &= dimX - codim_Y W \\ &= dimW + codim_X Y \\ &= dimW + r \end{aligned}$$

□

Corolário A.15. Nas condições do **(TDF)** A.13. Seja $W = \{y\} \subset Y$ $(y \in Im(\varphi))$. Para cada componente irredutível $Z \subseteq \varphi^{-1}(y)$, verifica-se que $dimZ \geq r = codim_X Y$. Em particular, $dim\varphi^{-1}(y) \geq r$ para todo $y \in Im(\varphi)$.

(iii) Considere $A(X) = \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I(X)} = \mathbb{K}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, com $\alpha_i = \overline{x_i}$ $1 \leq i \leq n$. Denotemos por $k(X) = Frac(A(X))$ e $K(Y) = Frac(A(Y))$. Sabemos que f induz um homomorfismo injetivo de $\mathbb{K}$-álgebras, $f^* : A(Y) \longrightarrow A(X)$, que por sua vez induz um outro homomorfismo injetivo, **cf. Proposição**A.3

$$\widetilde{\varphi^*} : K(Y) \longrightarrow K(X).$$

Por simplicidade, vamos assumir que $K(Y)$ é um subcorpo de $K(X)$, ou seja , temos que $\mathbb{K} \hookrightarrow K(Y) \hookrightarrow K(X)$ são extensões de corpos. Logo, segue que

$$trdeg_{\mathbb{K}} K(X) = trdeg_{\mathbb{K}} K(Y) + trdeg_{K(Y)} K(X).$$

O que implica $trdeg_{K(Y)} K(X) = dimX - dimY = r$ e, portanto,

$$K(X) = \mathbb{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = K(Y)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Como $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ é um conjunto de geradores de $K(X)$ sobre $K(Y)$, existe $\beta \subset \Gamma$ uma base de transedência de $K(X)$ sobre $K(Y)$.

Por simplicidade, asumiremos que $\beta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$. Desta forma, α_i para $i = r+1, \ldots, n$, é algébricamente dependente sobre $K(Y)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Logo, existem polinômios $P_{r+1}, \dots, P_n \in K(Y)(\alpha_1, \dots, \alpha_r)[T]$ tais que $P_j(\alpha_j) = 0$, $j = r+1, \dots, n$.

Note que podemos escrever $P_j = \dfrac{H_j}{Q_j}$, onde $H_j, Q_j \in A(X)(\alpha_1, \dots, \alpha_r)[T]$ são tais que $H_j \neq 0$, $Q_j \neq 0$, $Q_j(\alpha_j) \neq 0$ e $H_j(\alpha_j) = 0$.

Defina $\widetilde{H_j} \in A(Y)[T_1, \dots, T_r, T]$ por $\widetilde{H_j}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, T) = H_j(T)$.

Fixando uma ordem monominal em $A(Y)[T_1, \dots, T_r, T]$, podemos escolher $\widetilde{g_j} \in A(Y)$ ($\widetilde{g_j} \neq 0$) coeficiente líder de $\widetilde{H_j}$, $j \in \{1, \dots, r\}$.

Seja $Y_j = Z_Y(g_i) \subseteq Y$, e note que $Y_j \subsetneq Y$ pois $g_i \notin I(Y)$.

Afirmação 2. O conjunto $U = Y - (Y_{r+1} \cup \cdots \cup Y_n)$ é um aberto não-vazio.

De fato, é claro que U é um aberto. Agora, suponha que $U = \emptyset$ isso implica que $Y = Y_{r+1} \cup \cdots \cup Y_n$. Como Y é irredutível, segue que $Y = Y_j$, para algum $j \in \{r+1, \dots, n\}$, o que é uma contradição pois $Y_j \subsetneq Y$.

O próximo passo é mostrar que $dim \varphi^{-1}(Y) \leq r$ para todo $y \in U$.

Com efeito, fixe $y \in U$ e considere $Z \subseteq f^{-1}(y)$ uma componente irredutível tal que $dim Z = dim f^{-1}(y)$.

Como $Z \subseteq X$ temos que $I(X) \subseteq I(Z)$ que por sua vez induz um homomorfismo sobrejetor de $\mathbb{K}$-álgebras,

$$\begin{array}{ccc} A(X) & \longrightarrow & A(Z) \simeq \dfrac{A(X)}{I_X(Z)} \\ g & \longmapsto & g\mid_Z \end{array}$$

Como $A(X) = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, temos que $A(Z) = \mathbb{K}(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_n})$, onde $\widehat{\alpha_i} = \alpha_1 \mid_Z$, o que implica $K(Z) \simeq \mathbb{K}(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_n})$. Com isso, temos a seguinte extensão de corpos,

$$\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \hookrightarrow K(Z),$$

segue que

$$trdeg_{\mathbb{K}} K(Y) = trdeg_{\mathbb{K}(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_r})} \mathbb{K}(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_n}) + trdeg_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_n}). \tag{A.4}$$

Note que $K(Z) = \mathbb{K}(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_r})(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_n})$. Lembremos que $\widetilde{H_j} \neq 0$ em $A(Y)[T_1, \dots, T_r, T]$. Temos que $y \in U$, calculando os coeficientes de H_j em y obtemos $H_{j,y} \neq 0$, pela escolha em $\mathbb{K}[T_1, \dots, T_r, T]$.

Logo, $\widetilde{H_{j,y}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, T) \neq 0$ em $\mathbb{K}[\alpha_1, \dots, \alpha_n][T]$, assim, restringindo ao fechado Z obtemos $\widetilde{H_{j,y}}(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_n}, T) \neq 0$. Como $\widetilde{H_{j,y}}(\widehat{\alpha_j} = 0$ segue que $\widehat{\alpha_j})$ é algébrico sobre $\mathbb{K}(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_n})$. Segue que $trdeg_{\mathbb{K}(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_r})} K(Z) = 0$, portanto segue de A.4 que

$$dim Z = trdeg_{\mathbb{K}} K(Z) = trdeg_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(\widehat{\alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_n}) \leq r.$$

Pela parte (ii) do **(TDF)** A.13 temos que $dim Z \geq r$, e assim $dim f^{-1}(y) = r$ para todo $y \in U$. □

Corolário A.16. Seja $\varphi : C \longrightarrow Y$ um morfismo injetivo, onde C é uma curva irredutível e Y é uma variedade quase projetiva. Então, $\varphi(C)$ é uma curva irredutível.

Demonstração. Primeiro, note que $\varphi(C)$ é irredutível. De fato, se $\varphi(C) = X_1 \cup X_2$ com $X_1, X_2 \subset \varphi(C)$ fechados, então

$$C = \varphi^{-1}(C) = \varphi^{-1}(X_1 \cup X_2) = \varphi^{-1}(X_1) \cup \varphi^{-1}(X_2),$$

como φ é contínua e C irredutível, segue que $C = \varphi^{-1}(X_1)$ ou $C = \varphi^{-1}(X_2)$ e, portanto, $\varphi(C) \subset X_1$ ou $\varphi(C) \subset X_2$. Logo $\varphi(C)$ é irredutível.

Agora, considere o morfismo $\varphi : C \longrightarrow \overline{\varphi(C)}$, temos um morfismo dominante. Portanto, o **TDF** A.13 nos diz que $dim C \geq dim \overline{\varphi(C)} \geq dim \varphi(C) \implies 1 \geq \varphi(C)$. Como φ é injetivo, segue que $dim \varphi(C) = 1$.

□

Referências Bibliográficas

[1] ATIYAH, M.F. & MACDONALD, I.G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[2] COX, D., LITLLE, J. & O'SHEA, D. , *Ideals, Varieties and Algorithmos*, Springer, 1996.

[3] FULTON. W., *Algebraic Curves*, New York, Benjamin, 1969.

[4] HARRIS, J. *Algebraic Geometry-A First Course*, Springer-Verlang, 1992.

[5] HARTSHORNE, R., *Algebraic Gemetry*, Berlin, Springer, 1977.

[6] SHAFAREVICH, I.R. , *Basic Algebraic Geometry-Varieties in Projective Space*, Springer, 2013.

[7] VAINSENCHER, I. & ZARZAR, M.A.G., *Cúbicas reversas e redes de quádricas*, Recife, 1999.

[8] HAFEZ, A. & COELHO, J. & MEDEIROS, N. , *Curso de Geometria Algébrica*, Maio, 2015.