Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas

Esaú Alves de Sousa

João Pessoa – PB
Março de 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas

por

Esaú Alves de Sousa

sob a orientação do

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

João Pessoa – PB
Março de 2017

S725e Sousa, Esaú Alves de.
Equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas / Esaú Alves de Sousa. - João Pessoa, 2017.
73 f. : il. -

Orientador: Flank David Morais Bezerra.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/ CCEN

1. Matemática. 2. Equações lentamente não dissipativas. 3. Semigrupos. 4. Potências fracionárias. 5. Blow-up. I. Título.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas

por

Esaú Alves de Sousa [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 30 de março de 2017.

Banca Examinadora:

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra – UFPB
(Orientador)

Fágner Dias Araruna

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna – UFPB
(Examinador Interno)

Juliana Fernandes da Silva Pimentel

Profa. Dra. Juliana Fernandes da Silva Pimentel – UFABC
(Examinador Externo)

Éder Mateus de Souza

Prof. Dr. Éder Mateus de Souza – UFS
(Examinador Externo)

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Dedico este trabalho aos meus pais, meus irmãos, meus sobrinhos e meus professores.

Agradecimentos

A Deus acima de tudo, pois Ele supriu todas as minhas necessidades durante minha vida e me fez alcançar mais esta conquista.

Aos meus pais, irmãos, sobrinhos e cunhados, por me apoiarem e estarem sempre dispostos a me ajudarem.

Ao meu Orientador, Professor Dr. Flank David Morais Bezerra, por todos os conselhos, incentivo, acreditar em mim até quando eu não acreditei e pela imensa amizade dedicada durante todo período em que me orientou.

Aos professores Fágner Dias Araruna, Juliana Fernandes da Silva Pimentel e Éder Mateus de Souza, por participarem da banca examinadora e também por contribuírem com seus conhecimentos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB por ter me concedido esta oportunidade e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFCG onde fiz meu primeiro curso de verão.

Aos meus amigos da época graduação, Renan Fernandes, José Dantas e Jeovane Costa, pelos momentos de estudo pela amizade que se estendeu além da graduação.

Aos professores graduação, Júnuio Moreira, Mário de Assis, Jocel Faustino, Leandro Barbosa, Zelalber Godin e Narcélio Filho, pelos seus ensinamentos que foram de fundamental importância para a minha formação.

Aos meus companheiros do primeiro verão, Laise, Camila, Danilo, Isabella, Clessio, Carlos, Djavan, Wesley, Franciery, Rosy, Joedson e Josenildo, pelos momentos de estudo e companhia de vocês durante o verão que se estendeu até os dias atuais.

Aos colegas do laboratório Milênio, José Ribeiro, Thiago Luiz, Moisés, Thyago Lunes, Mariana, Cássio, Nildo, Victor, Raoní, Raiza, Richardson, Ranieri, Rafael, Leon, Aline, Angélica, João Henrique, Suelena, Marcelo, Douglas, Julian, por todo o incentivo e pelos momentos compartilhados. Desejo sucesso a todos!

Ao pessoal do mestrado, Djair, Dayane, Emanuelle, Fábio, Ricardo, Gêh, Clêmerson, Cássio, Djakson, Zeh, Pedro, Belly, Sylvia, Breno, Adailton, Ricardo da turma de Sylvia, Rafael, Fernando, Alan, Douglas, Fágner, Lindinês, Janiely, Claudeilton, pelo companherismo e momentos que estudamos juntos. Sucesso a vocês também!

Ao pessoal do doutorado, Diego, Mauri, Lucas, Franciélia, Márcios, Désio, Cládio, Tony, Renato, Jônatas, Camila, Caio, Wasthenny, Ageu, Sally. Coragem pessoal!

A todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho e que lamentavelmente não me recordo neste momento.

Enfim, à CAPES pelo apoio financeiro.

"Mas o que para o mudo é loucura, Deus o escolheu para envergonhar os sábios, e o que para o mundo é fraqueza, Deus escolheu para envergonhar os fortes. Deus escolheu o que no mundo não tem nome nem prestígio, aquilo que é nada, para assim mostrar a nulidade dos que são alguma coisa. Assim, ninguém poderá gloriar-se diante de Deus".

(Bíblia Sagrada, 1 Corítios 1, 27-30)

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico das soluções de equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas, daremos um breve apanhado histórico sobre o tema, apresentaremos uma introdução à teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach, potências fracionárias de operadores setoriais e resultados sobre existência e unicidade de soluções de problemas abstratos de Cauchy semilineares do tipo parabólico.

Palavras-chave: equações lentamente não dissipativas, semigrupos, potências fracionárias, blow-up.

Abstract

In this work we study the asymptotic behavior of the solutions of partial differential equations slowly non-dissipative, we will give a brief historical overview on the theme, we will present an introduction to the theory of semigroups of bounded linear operators in Banach spaces, fractional powers of sector operators and results on the existence and uniqueness of solutions of abstract Cauchy semilinear problems of the parabolic type.

Keywords: slowly non-dissipative equations, semigroups, fractional powers, blow-up.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

• X^* denota o dual topológico de um espaço de Banach X;

• $R(A)$ denota o conjunto imagem do operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, onde X é um espaço de Banach.

• I_X denota a aplicações identidade de X em X, onde X é um espaço métrico;

• $\rho(A)$ denota o conjunto resolvente do operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ densamente definido em um espaço de Banach X, e este é definido por

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda I_X - A : D(A) \subset X \longrightarrow X \text{ é injetivo, } \overline{R(\lambda I_X - A)} = X \\ (\lambda I_X - A)^{-1} : R(\lambda I_X - A) \subset X \longrightarrow X \text{ e é limitado} \end{array} \right\};$$

• $\sigma(A)$ denota o espectro do operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ em um espaço de Banach X, e este é definido por $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$;

• $C(X)$ denota o espaço das aplicações contínuas de X em X, onde X é um espaço métrico;

• $B(x, R)$ indica a bola aberta no espaço métrico X de centro em x e raio $R > 0$;

• $d(x, y)$ indica a distância de x até y no espaço métrico X;

• Para cada $1 \leq p \leq \infty$, I un intervalo, $u \in L^p(I)$, denotamos a norma usual de u em $L^p(I)$ por $\|u\|_{L^p(I)}$. Se $I = \mathbb{R}$, escrevemos apenas $\|u\|_p$;

• $\text{supp}(u) := \displaystyle\bigcap_{\lambda \in J} \omega_\lambda^c$, onde $\{\omega_\lambda\}_{\lambda \in J}$ é a família de todos os abertos de $\mathbb{R}$ tal que $u = 0$ quase sempre em ω_λ para todo $\lambda \in J$, denota o suporte da função mensurável u. Caso a u seja uma função contínua, temos $\text{supp}(u) := \overline{\{x \in \mathbb{R}; u(x) \neq 0\}}$;

- $C_0^\infty(I)$ denota o conjunto das funções continuamente diferenciáveis infinitas vezes com suporte compacto em I;

- $W^{m,p}(I)$ denota o espaço de Sobolev imerso em $L^p(I)$, e este é definido por

$$W^{m,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I) \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall 1 \leq j \leq m,\ j \in \mathbb{N},\ \exists g_j \in L^p(I) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(I) \end{array} \right\},$$

onde $D^j\varphi$ denota a j-ésima derivada no sentido usual da função φ.

- $u^{(j)}$ denota a j-ésima derivada fraca (ou j-ésima derivada no sentido de Sobolev) de uma função $u \in W^{m,p}(I)$, e esta j-ésima derivada é definida pela g_j que verifica a igualdade

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(I);$$

- $H^m(I)$ denota o espaço de Sobolev $W^{m,2}(I)$;

- $\|u\|_{W^{m,p}(I)}$ denota a norma usual de u no espaço de Banach $W^{m,p}(I)$, e esta norma é definida por

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|_{L^p(I)};$$

- $W_0^{m,p}(I)$ indica o fecho de $C_0^\infty(I)$ no espaço de Sobolev $W^{m,p}(I)$ munido com sua norma usual, que é a herdada como subespaço de $W^{m,p}(I)$.

- $H_0^m(I)$ denota o espaço de Sobolev $W_0^{m,2}(I)$.

Introdução

Neste trabalho estudamos a teoria geométrica de equações diferenciais parciais semilineares do tipo parabólicas que são lentamente não dissipativas. Daremos um breve apanhado histórico sobre este tipo de equações, assim como, para o caso dissipativo. Daremos exemplos e provaremos algumas propriedades das soluções destas equações diferenciais parciais lentamente não dissipativos. Para fixar nossa atenção, trataremos de equações escalares de reação e difusão semilineares.

Nas últimas décadas houve um grande enriquecimento da literatura dedicada ao comportamento assintótico das soluções de equações escalares de reação e difusão semilineares. No entanto, poucos desses trabalhos tratam das equações cujas soluções existem para todo tempo e sofrem *blow-up* em tempo infinito, ou seja, as soluções estão globalmente definidas e que a norma destas tende ao infinito quando o tempo tende ao infinito. Muitos dos conceitos e definições da teoria das equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas, surgem na literatura, até onde sabemos, com a tese de doutorado da N. Ben-Gal [1] defendida em 2010 na Division of Applied Mathematics na Brown University sob a orientação de Bernold Fiedler.

O que nos levou a tratar das equações diferencias parciais lentamente não dissipativas é o fato de que mesmo o problema sendo lentamente não dissipativo ainda é possível definir um semigrupo não linear associado ao mesmo e questionar a existência de um conjunto assintótico de estado para este semigrupo, conjunto este que desempenha um papel idem ao de atrator global para semigrupos provenientes de problemas dissipativos.

Tecnicamente falando, este trabalho disserta sobre as primeiras seções dos artigos [2] e [18].

No final da década de 80, passou-se a dar muita atenção ao estudo da dinâmica das equações de reação e difusão da forma

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x),\ x \in [0, L],\ t \geq 0, \tag{1}$$

com condições de fronteira homogênea de Dirichlet e de Neumann, onde $L > 0$, e f é uma função com certa regularidade.

Em 1988, P. Brunovskỳ e B. Fiedler [4], no trabalho intitulado *Connecting orbits in scalar reaction diffusion equations*, trata dos sistemas

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \ x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

e

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \ x \in (0,1), \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

No artigo [4], estudou-se condições necessárias para que uma solução estacionária v para a equação do sistema (3), ou seja, $v = v(x)$ (não depende de t) é solução para o sistema (3) no intervalo $(0,1)$ e se conecte a uma outra solução estacionária w para a equação do sistema (3) (veja, por exemplo, o Teorema 6.1 em [4]). Eu outras palavras, buscou-se condições necessárias para que exista uma órbita $u(t,\cdot)$ satisfazendo o sistema (3) tal que

$$\lim_{t \to -\infty} u(t,\cdot) = v$$

e

$$\lim_{t \to \infty} u(t,\cdot) = w.$$

Ainda em [4], o autor prova que se a não linearidade f do sistema (2) está sob certa hipótese de dissipatividade, e v é uma solução estacionária hiperbólica para (2), então v se conecta a outras soluções estacionárias (veja 1.1 *Main theorem* [4]).

Em 1990, C. Rocha [20], na publicação intitulada *Properties of the attractor of a scalar parabolic PDE*, estudou o sistema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,u,u_x), \ x \in [0,1], \ t \geq 0 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

O autor caracterizou o atrator para o semigrupo associado ao sistema (4) como sendo o gráfico de uma aplicação ϕ, onde a não linearidade f está em uma determinada classe de funções (veja o Teorema 2 em [20]). Além disso, no caso em que o sistema é da forma

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,u), \ x \in [0,1], \ t \geq 0, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

para uma determinada classe de não linearidades, mostrou que o sistema dinâmico associado ao sistema (5) possui um atrator bidimensional e do que ele é composto (veja a Proposição 5 em [20]).

Em 1996, B. Fiedler e C. Rocha [9], no artigo intitulado *Heteroclinic Orbits of Se-*

milinear Parabolic Equations, provaram propriedades do atrator global para o sistema

$$\begin{cases} u_t = a(x)u_{xx} + f(x, u, u_x), \ x \in (0,1), \ t \geq 0, \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

onde $a(x) \geq c_0 > 0$, a é uma função continuamente diferenciável, uniformemente positiva e a não linearidade f está sob certas hipóteses de dissipatividade. Por exemplo, eles provaram que o atrator global para o sistema (6) consiste dos seguintes conjuntos:

(a) O conjunto dos equilíbrios;

(b) O conjunto das órbitas que conectam equilíbrios.

Em 1997, H. Matano e K. Nakamura [14], no trabalho intitulado *The global attractor of semilinear parabolic equations on* S^1, estudaram propriedades do atrator global para o sistema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, u_x), \ x \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \\ u(x,0) = u_0(x), \, x \in S^1, \end{cases}$$

onde prova-se que o atrator global é o gráfico de uma aplicação contínua e que que não existe órbita homoclínica nem ciclo heteroclínico, onde uma órbita homoclínica é uma órbita $\gamma(t)$ tal que

$$\lim_{t \to -\infty} \gamma(t) = \lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = \xi,$$

onde ξ é um equilíbrio e um ciclo heteroclínico é um conjunto composto da união de pontos de equilíbrios $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ e órbitas $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ tais que

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma_j(t) = \xi_{j+1} \text{ e } \lim_{t \to -\infty} \gamma_{j+1}(t) = \xi_j, \ \forall j = 1, \ldots, k,$$

com $\xi_{k+1} := \xi_1$.

Em 2010, N. Ben-Gal [1], em sua tese de doutorada intitulada *Grow-up solutions and heteroclinics to infinity for scalar parabolic PDEs*, investigou o caso

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + bu + g(u), \ x \in [0, \pi] \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \end{cases}$$

onde g é uma função limitada com certa regularidade e $b \neq 0$. Em [1] são apresenta soluções para problemas assintóticos e de conexão para EDP's escalares lentamente não dissipativas, i.e., uma classe de equações de reação-difusão escalares parabólicas nas quais as soluções não explodem em tempo finito nem são dissipativas. As soluções sofrem *blow-up* na norma em tempo infinito, produzindo desafios adicionais que são superados em [1]. No desenvolver da tese de doutorado da N. Ben-Gal, são definidos novos conceitos, como equações diferenciais parciais lentamente não dissipativa, equilíbrios no infinito e atratores globais não compacto.

Um ano depois, esta mesma pesquisadora publicou outro trabalho com o título *Non-compact global attractors for slowly non-dissipative PDEs I: the asymptotics of bounded and grow-up heteroclinics* [2], no qual ela determina o comportamento assintótico de trajetórias ilimitadas, as chamadas *grow-up solutions*, para uma classe de EDP's lentamente não dissipativas. Determinou-se as propriedades nodais, o sinal dos equilíbrios limitados, equilíbrios no infinito e o conjunto de equilíbrios no infinito ao qual um dado equilíbrio limitado tem ligações heteroclínicas.

Em 2014, J. Pimentel [18], sob a orientação de C. Rocha, em sua tese de doutorado intitulada *Asymptotic behavior of slowly non-dissipative systems*, complementa parte do trabalho da Ben-Gal explorando propriedades da equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + bu + g(x, u, u_x), \ \ x \in [0, \pi], \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \end{cases}$$

Na tese [18] estudou-se sistemas lentamente não dissipativos gerados por sistemas de equações escalares de reação-difusão com não-linearidade dependendo da variável espacial e a depender de um termo de advecção, estendendo resultados válidos para o sistema estudado por N. Ben-Gal em [1] e [2]. Entre eles, obteve a existência de um atrator global não compacto, composto pela reunião do conjunto dos equilíbrios limitados, o conjunto dos equilíbrios no infinito e as conexões heteroclínicas entre eles.

As equações do tipo (1) podem ser classificadas como dissipativas, rapidamente não dissipativas e lentamente não dissipativas, como veremos a seguir:

(I) Uma equação do tipo (1) é dita dissipativa no espaço de Banach X quando possui solução global para cada dado inicial $u_0 \in X$ e existe $R > 0$ tal que a solução $u(t, \cdot)$ para (1) satisfaz

$$\|u(t, \cdot)\|_X < R$$

para todo $t \geq t^*(u_0)$, com $t^*(u_0) > 0$.

(II) Uma equação do tipo (1) é dita rapidamente não dissipativa no espaço de Banach X quando para alguma solução $u = u(t, x)$ de (1) existe $T < \infty$ e $a \in (0, L)$ tal que

$$\sup_{x \in [0,L]} |u(t, x)| < +\infty, \ \ t \in (0, T), \ \ \limsup_{t \to T} \|u(t, \cdot)\|_X = +\infty$$

e existe uma sequência $\{(t_n; x_n)\} \subset (0;T) \times (0,L)$ tal que

$$t_n \longrightarrow T,\ x_n \longrightarrow a,\ \text{e } u(t_n, x_n) \longrightarrow +\infty,\ \text{quando } n \longrightarrow +\infty;$$

(III) Uma equação do tipo (1) é dita lentamente não dissipativa no espaço de Banach X quando

$$\sup_{x\in[0,L]} \|u(t,x)\| < +\infty,\ \forall t \in (0,+\infty) \text{ e } \limsup_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_X = +\infty.$$

Opcionalmente, na definição de equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas, poderíamos ter substituído a expressão

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_X = +\infty$$

por

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(0,L)} = +\infty,$$

motivado por, ocasionalmente, estudarmos (1) no espaço base $L^2(0,L)$, onde $0 < L < +\infty$ e termos a imersão contínua $L^\infty(0,L) \subset L^2(0,L)$.

Neste trabalho daremos atenção a duas classes de equações, as quais foram estudadas por N. Ben-Gal [1], [2], quando estudou a dinâmica relacionada com o sistema abaixo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + bu + g(u),\ x \in [0,\pi] \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

e J. Pimentel [17] e J. Pimentel e C. Rocha [18], que estudaram o sistema a seguir

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + bu + g(x,u,u_x),\ x \in [0,\pi], \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Veremos ainda que alguns dos resultados obtidos por N. Ben-Gal [2] sobre o sistema (7) puderam ser, de certa forma, estendidos para o sistema estudado por J. Pimentel em [17] e [18]. Por exemplo, a prova de que ambos os sistemas são lentamente não dissipativos são bem semelhantes. Outra propriedade que também pode ser estendida foi o Lema 2.2 de [2], o qual aparece em [18] como Lema 3.

A estrutura deste trabalho é a seguinte:

O Capítulo 1 é dedicado ao estudo de semigrupos de operadores lineares e limitados sobre um espaço de Banach e potências fracionárias de operadores lineares. Apresentaremos definições e alguns resultados da teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados sobre espaços de Banach e potências fracionárias de operadores setoriais. As principais referências são H. Brézis [3], R. Costin [7], R. Czaja [8], D. Henry [11], A. Pazy [16] e a dissertação de mestrado da J. Silva [21].

O Capítulo 2 é dedicado aos exemplos de equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas e propriedades das *grow-up solutions*. As principais referências bibliográficas deste capítulo são N. Ben-Gal [2], D. Henry [11], J. Pimentel [17], J. Pimentel e C. Rocha [18], J. Silva [21].

O Capítulo 3 é dedicado as considerações finais, onde propomos uma continuação deste trabalho.

Finalmente, listaremos as principais referências utilizadas para a elaboração deste trabalho.

Capítulo 1

Semigrupos de operadores lineares limitados e potências fracionárias

Este capítulo é dedicado ao estudo de semigrupos de operadores lineares e limitados sobre um espaço de Banach e potências fracionárias de operadores setoriais.

1.1 Semigrupos de operadores lineares e limitados

Nesta seção apresentaremos definições e alguns resultados da teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados sobre espaços de Banach. As principais referências são os livros do D. Henry [11], A. Pazy [16] e a dissertação de mestrado da J. Silva [21].

No que segue, X denotará um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $\mathcal{L}(X)$ denotará o espaço de Banach constituído dos operadores lineares e limitados de X em X munido da norma usual, e I_X denotará o operador identidade definido sobre X.

Definição 1.1. Um semigrupo de operadores lineares e limitados sobre X é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que

1. $T(0) = I_X$;
2. $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t; s \geq 0$.

Se adicionalmente, tivermos

1. $\|T(t) - I_X\| \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow 0^+$, então dizemos que o semigrupo é uniformemente contínuo;
2. $\|T(t)x - x\|_X \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow 0^+$, então dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo (ou um C_0 -semigrupo).

Definição 1.2. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores lineares e limitados sobre X. O operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ definido da seguinte forma: seu domínio é dado por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

com lei de formação é dada por

$$Ax := \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \bigg|_{t=0}, \forall x \in D(A)$$

é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Teorema 1.1. *Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo sobre X e A seu gerador infinitesimal. Então*

(i) Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x;$$

(ii) Para todo $x \in X$, $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x;$$

(iii) Para todo $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x \bigg|_{t=0} = AT(t)x = T(t)Ax;$$

(iv) Para todo $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

Demonstração. Veja A. Pazy [16, Teorema 2.4]. □

Definição 1.3. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear com $\overline{D(A)} = X$. Chamamos de adjunto de A, o operador $A^* : D(A^*) \subset X^* \longrightarrow X^*$ definido por

$$D(A^*) = \{x^* \in X^* : \exists y^* \in X^* \text{ com } \langle x^*, Ax \rangle = \langle y^*, x \rangle, \forall x \in D(A)\},$$

e

$$A^* x^* := y^*, \forall x^* \in D(A^*).$$

Obsevação 1.1. Quando X for um espaço de Hilbert, pudermos identificar X com seu dual topológico X^* (por exemplo, $X = L^2(0,1)$) e tivermos

$$\forall x, y \in D(A),\ \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

diremos que o operador A é simétrico e, comumente, se encontra na literatura a expressão $A \subset A^*$. Quando $A = A^*$, diremos que A é auto-adjunto e se $A = -A^*$, diremos que A é *skew-adjointo*.

Lema 1.1. *Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador simétrico e, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$R(\lambda I - A) = H \text{ e } \overline{R(\lambda I - A)} = H,$$

onde $R(\lambda I - A)$ denota a imagem do operador $(\lambda I - A)$ e $\overline{R(\lambda I - A)}$ o fecho da imagem. Então A é auto-adjunto.

Demonstração. Veja R. Czaja [8, Teorema 1.2.8]. □

Teorema 1.2. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador auto-adjunto tal que*

$$\langle Ax, x\rangle \geq m\|x\|^2,$$

para todo $x \in D(A)$. Então $\sigma(A) \subset [m, +\infty)$.

Demonstração. Veja J. Silva [21, Teorema 3]. □

1.2 Semigrupos analíticos e operadores setoriais

A motivação para o adjetivo analítico a uma determinada classe de C_0-semigrupo vem do fato de podermos considerar o parâmetro t do semigrupo variando em setor circular do plano complexo, ao invés de variar somente no intervalo $[0, +\infty)$ com a aplicação $\mathbb{C} \supset \Sigma \ni t \longmapsto T(t)x \in X$ sendo analítica. Mas, antes de definirmos rigorosamente este conceito, apresentaremos algumas definições e notações.

Definição 1.4. Sejam X um espaço de Banach, Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $g : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow X$. Dizemos que g é uma função analítica em Ω se existir, para todo $z \in \Omega$, o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h}.$$

Notação 1.1. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $\theta, \sigma \in (0, \pi)$, consideremos os seguintes setores do plano complexo.

- $\Delta_\theta(a) := a + \Delta_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z-a)| < \theta,\ z \neq 0\}$. Caso $a = 0$, $\Delta_\theta(0) = \Delta_\theta$;
- $\Sigma_\sigma(a) := a + \Sigma_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z-a)| > \sigma,\ z \neq 0\}$. Caso $a = 0$, $\Sigma_\sigma(0) = \Sigma_\sigma$;

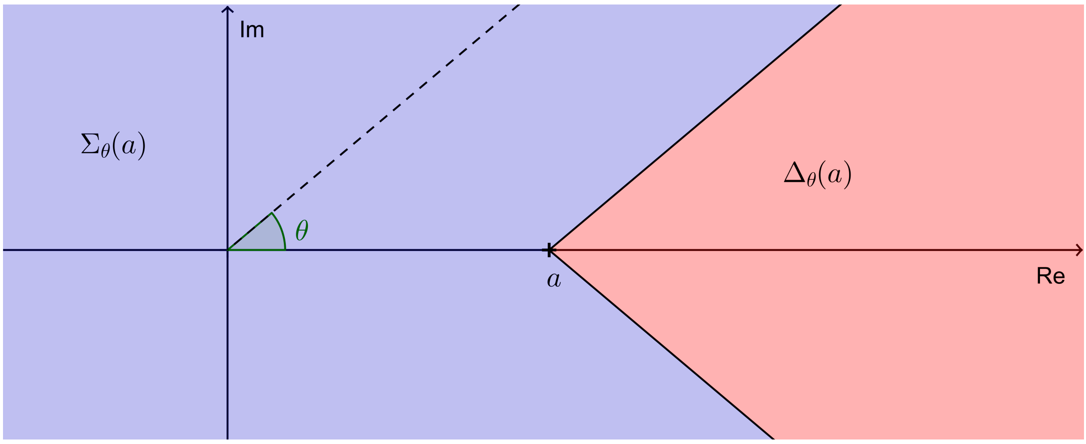

Figura 1.1: Setores $\Sigma_\theta(a)$ e $\Delta_\theta(a)$ do plano $\mathbb{C}$.

Obsevação 1.2. Se $\theta + \sigma = \pi$, então $\Delta_\theta(-a) = -\Sigma_\sigma(a)$, uma vez que

$$\Delta_\theta(-a) = -a + \Delta_\theta = -a + \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta,\ z \neq 0\} = -a + (-\Sigma_\sigma) = -\Sigma_\sigma(a).$$

Veja a Figura 1.2.

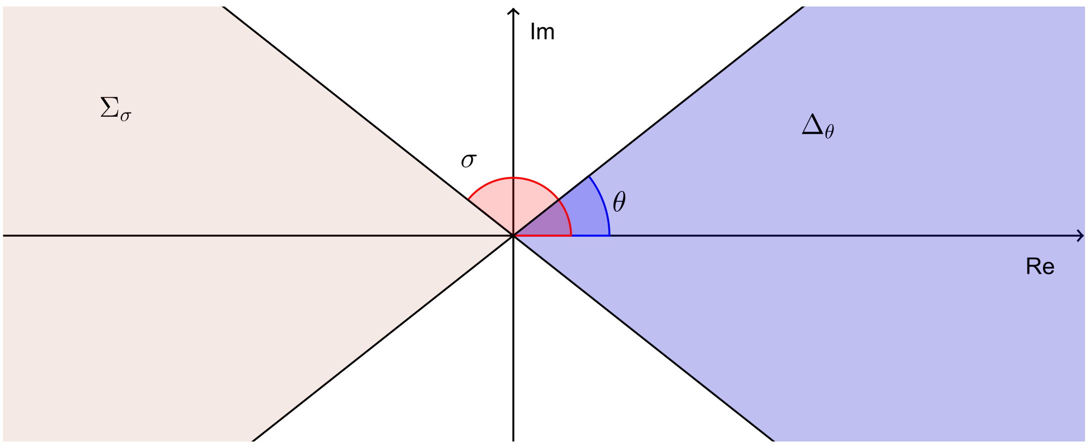

Figura 1.2: Setores Σ_σ e Δ_θ com $\theta + \sigma = \pi$ do plano $\mathbb{C}$.

Definição 1.5. Seja X é um espaço de Banach. Dizemos que um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ sobre X é um semigrupo analítico de operadores lineares e limitados se a região de variação do parâmetro t puder ser estendida a um setor circular da forma $\Delta_\theta \cup \{0\}$, para algum $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e, além disso, forem satisfeitas as seguintes propriedades:

1) A extensão de $\{T(t) : t \geq 0\}$ a $\Delta_\theta \cup \{0\}$, para algum $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, é ainda um C_0-semigrupo, i. e., denotando por $\{\mathcal{T}(z) : z \in \Delta_\theta \cup \{0\}\}$ tal extensão, devemos ter

i) $\mathcal{T}(0) = I_X$;

ii) $\mathcal{T}(z + w) = \mathcal{T}(z)\mathcal{T}(w)$, $\forall z, w \in \Delta_\theta \cup \{0\}$.

2) A aplicação $\Delta_\theta \ni z \longmapsto T(z)x \in X$ é analítica em Δ_θ, para cada $x \in X$.

Uma dúvida que pode surgir diante da definição de semigrupo analítico de operadores lineares e limitados é a seguinte: sob quais condições um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados é promovido a semigrupo analítico? Sabe-se que é possível mostrar que um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados é analítico se, e somente se, o inverso aditivo do seu gerador infinitesimal for um operador setorial, conforme definição abaixo.

Definição 1.6. Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado e densamente definido. Dizemos que A é um operador setorial se existem constantes $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que o setor $\Sigma_\sigma(a)$ está contido no resolvente de A e, além disso, verifica-se

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \tag{1.1}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_\sigma(a)$.

Teorema 1.3. *Sejam H um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e a norma $\|\cdot\|$, e o operador auto-adjunto $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$. Se A for limitado inferiormente, ou seja, existir uma constante m tal que*

$$\langle Ax, x \rangle \geq m\|x\|^2, \ \forall x \in D(A),$$

então A é um operador setorial e, além disso, $\operatorname{Re}\lambda \geq m$, *para todo $\lambda \in \sigma(A)$.*

Demonstração. Veja J. Silva [21, Teorema 16]. □

Teorema 1.4. *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador setorial. Sejam ainda $M \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ constantes satisfazendo as condições da Definição 1.6 para o operador A. Então valem as seguintes afirmações:*

1. *O operador -A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares limitados, onde*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \tag{1.2}$$

onde Γ é uma curva contida em $\rho(-A)$ com $\arg\lambda \longrightarrow \pm\theta$ *quando $|\lambda| \longrightarrow +\infty$ para algum $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \sigma\right)$;*

2. Para qualquer $\epsilon \in (0, \theta)$, existe uma constante $C = C(\epsilon)$ tal que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C, \ \|AT(t)\| \leq \frac{C}{|t|}, \ t \in \Delta_{\theta-\epsilon}; \tag{1.3}$$

3. Os operadores $AT(t)$ e $\dfrac{d}{dt}T(t)$ são lineares limitados para $t \in \Delta_\theta$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = -AT(t)x, \ x \in X. \tag{1.4}$$

Demonstração. Veja J. Silva [21, Teorema 17]. □

Obsevação 1.3. Quando o gerador infinitesimal A é um operador setorial, é comum na literatura denotar o semigrupo analítico gerado por $-A$ por $\{e^{-At} : t \geq 0\}$ e usaremos também esta notação no decorrer do trabalho.

A fim de exemplificar as definições de semigrupo analítico e operador setorial temos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1. No que segue, salvo menção explícita em contrário, considere $b \in \mathbb{R}$ e o operador linear e ilimitado $A : D(A) \subset L^2(0, \pi) \longrightarrow L^2(0, \pi)$, definido por

$$D(A) = \big\{u \in H^2(0, \pi) : u'(0) = u'(\pi) = 0\big\} \tag{1.5}$$

e

$$Au = -u'' - bu, \ \forall u \in D(A). \tag{1.6}$$

Então o operador A é setorial e, portanto, $\{e^{-At} : t \geq 0\}$ é uma semigrupo analítico em $L^2(0, \pi)$. A prova deste fato é apresentada na Proposição 1.1.

Teorema 1.5 (Completude das autofunções)**.** *Suponhamos H um espaço de Hilbert e $L : D(L) \subset H \longrightarrow H$ um operador auto-adjunto definido em um domínio $D(L)$ denso em H. Suponha que L possua os autovalores*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$$

com $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$, cada auto-espaço possua dimensão finita e as autofunções formam um conjunto ortogonal em H. Então o conjunto das autofunções forma uma base para o espaço de Hilbert H.

Demonstração. Para calcular os autovalores de L podemos usar o princípio do maximin.

Usando o quociente de Rayleigh

$$R[u] = \frac{\langle Lu, u\rangle}{\langle u, u\rangle},\ u \in D(L),\ u \neq 0$$

temos

$$\lambda_1 = \min R[u].$$

Então

$$\lambda_2 = \min\{R[u] : \langle u_1, u\rangle = 0\}, \ldots, \lambda_n = \min\{R[u] : \langle u_1, u\rangle = \cdots = \langle u_{n-1}, u\rangle = 0\}, \ldots$$

Usando a notação

$$W_1 = [u_1], \ldots, W_n = [u_1, \ldots, u_n], \ldots$$

e

$$V_n = W_n^{\perp} \cap D(L),$$

onde $W_n^{\perp}$ denota o conjunto

$$\{f \in H^* : \langle f, u\rangle = 0\, \forall u \in W_n\}.$$

Segue que

$$\lambda_2 = \min_{u \in V_1} R[u], \ldots, \lambda_{n+1} = \min_{u \in V_n} R[u], \ldots$$

Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de autofunções de L, i.e., $u_n \in D(L)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $Lu_n = \lambda_n u_n$ e $u_n \perp n_k$ se $n \neq k$. Podemos ainda supor sem perda de generalidade que $\|u_n\| = 1\, \forall n \in \mathbb{N}$, pois, do contrário, basta normalizar cada autofunção.

Para provamos a completude das autofunções u_n, primeiro mostraremos que cada $f \in D(L)$ pode ser expandida em termos das u_n, em outras palavras, que o espaço

$$S = [u_1, \ldots, u_n, \ldots]$$

é denso em $D(L)$. Então, como $D(L)$ é denso em H, temos S dendo em H, logo $\{u_1, \ldots, u_n, \ldots\}$ é uma base para o espaço de Hilbert H.

A fim de mostrarmos que S é denso em $D(L)$, para cada $f \in D(L)$, formaremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n u_n,\ \text{com}\ \hat{f}_n = \langle u_n, f\rangle \tag{1.7}$$

e mostraremos que ela converge para f. Note que a soma parcial da série (1.7) pertence a S:

$$f_N := \sum_{n=1}^{N} \hat{f} u_n \in S.$$

Mostremos que o erro quando aproximamos f por somas parciais

$$h_N = f - f_N \tag{1.8}$$

tendo a zero quando $N \longrightarrow +\infty$, i.e.,

$$\|h_N\| \longrightarrow 0 \text{ quando } N \longrightarrow +\infty.$$

Afirmamos que $h_N \in V_N$, ou seja, para todo $u \in W_N^{\perp} \cap D(L)$ temos $\langle h_N, u \rangle = 0$. De fato, se $u \in W_N^{\perp} \cap D(L)$, então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$u = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\langle h_N, u \rangle &= \left\langle f - f_N, \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n \right\rangle \\
&= \left\langle f, \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n \right\rangle - \left\langle f_N, \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \langle f, u_n \rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \langle f_N, u_n \rangle .
\end{aligned}$$

Usando a definição de f_N e recordando que $\hat{f}_n = \langle f, u_n \rangle$ deduz-se

$$\begin{aligned}
\langle h_N, u \rangle &= \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \langle f, u_n \rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \left\langle \sum_{m=1}^{N} \hat{f}_m u_m, u_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \hat{f}_n - \sum_{m,n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \hat{f}_m \langle u_m, u_n \rangle .
\end{aligned}$$

Como $\langle u_m, u_n \rangle = 0$ se $m \neq n$ e $\langle u_m, u_n \rangle = 1$ quando $m = n$, temos

$$\begin{aligned}
\langle h_N, u \rangle &= \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \hat{f}_n - \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n} \hat{f}_m \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Provando nossa afirmação. Assim, temos que

$$\lambda_{N+1} = \min_{u \in V_N} R[u] \leq R[h_N] = \frac{\langle Lh_N, h_N \rangle}{\|h_N\|^2}$$

e, portanto

$$\|h_N\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \langle Lh_N, h_N \rangle. \tag{1.9}$$

Expandindo $\langle Lh_N, h_N \rangle$ usando (1.8) temos

$$\begin{aligned}
\langle Lh_N, h_N \rangle &= \langle Lf, f \rangle - \left\langle Lf, \sum_{n=1}^{N} \hat{f}_n u_n \right\rangle - \left\langle L\left(\sum_{n=1}^{N} \hat{f}_n u_n\right), f \right\rangle \\
&\quad + \left\langle L\left(\sum_{m=1}^{N} \hat{f}_m u_m\right), \sum_{n=1}^{N} \hat{f}_n u_n \right\rangle \\
&= \langle Lf, f \rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}_n} \langle Lf, u_n \rangle - \left\langle \sum_{n=1}^{N} \hat{f}_n L u_n, f \right\rangle \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}_n} \left\langle \sum_{m=1}^{N} \hat{f}_m L u_m, u_n \right\rangle \\
&= \langle Lf, f \rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}_n} \langle f, Lu_n \rangle - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}_n \langle Lu_n, f \rangle + \sum_{m,n=1}^{N} \overline{\hat{f}_n} \hat{f}_m \langle Lu_m, u_n \rangle .
\end{aligned}$$

Usando o fato de que cada u_n é uma autofunção, a linearidade, a ortonormalidade das autofunções e a definição dos $\hat{f}_n$'s, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Lh_N, h_N \rangle &= \langle Lf, f \rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}_n} \langle f, \lambda_n u_n \rangle - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}_n \langle \lambda_n u_n, f \rangle + \sum_{m,n=1}^{N} \overline{\hat{f}_n} \hat{f}_m \langle \lambda_m u_m, u_n \rangle \\
&= \langle Lf, f \rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}_n} \lambda_n \langle f, u_n \rangle - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}_n \lambda_n \langle u_n, f \rangle + \sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}_n} \hat{f}_n \lambda_n \\
&= \langle Lf, f \rangle - \sum_{n=1}^{N} \left(\overline{\hat{f}_n}\right)^2 \lambda_n - \sum_{n=1}^{N} \left(\hat{f}_n\right)^2 \lambda_n + \sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}_n} \hat{f}_n \lambda_n.
\end{aligned}$$

Usando a identidade de números complexos

$$(z)^2 + (\overline{z})^2 = 2|z|^2$$

temos

$$\begin{aligned} \langle Lh_N, h_N\rangle &= \langle Lf, f\rangle - 2\sum_{n=1}^{N}\left|\hat{f}_n\right|^2\lambda_n + \sum_{n=1}^{N}\left|\hat{f}_n\right|^2\lambda_n \\ &= \langle Lf, f\rangle - \sum_{n=1}^{N}\left|\hat{f}_n\right|^2\lambda_n. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = +\infty$, então os autovalores são não negativos a partir de um certo N_0, i.e., $\lambda_n \geq 0$ para $n \geq N_0$. Assim, para $n \geq N_0$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle Lf, f\rangle - \sum_{n=1}^{N}\left|\hat{f}_n\right|^2\lambda_n =& \langle Lf, f\rangle - \sum_{n=1}^{N_0}\left|\hat{f}_n\right|^2 - \lambda_n\sum_{n=N_0}^{N}\left|\hat{f}_n\right|^2\lambda_n \\ \leq& \langle Lf, f\rangle - \sum_{n=1}^{N_0}\left|\hat{f}_n\right|^2\lambda_n. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Usando as estimativas (1.9), (1.10) e (1.11) deduz-se que

$$\|h_N\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}}\left(\langle Lf, f\rangle - \sum_{n=1}^{N_0}\left|\hat{f}_n\right|^2\lambda_n\right) \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

completando a prova da convergência e da completude. □

Proposição 1.1. *Seja o operador linear e ilimitado A definido por* (1.5)-(1.6). *Então as seguites afirmações são verdadeiras:*

(a) A é auto-adjunto;

(b) Existe uma base hilbertiana $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ do espaço $L^2(0,\pi)$ formado por autofunções do operador A, onde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\varphi_j : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(jx) \ \textit{para todo } j \in \mathbb{N} \textit{ e } \varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}};$$

(c) A é um operador setorial, isto é, o operador $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em X.

Demonstração. Prova de *(a)*: Usaremos o Lema 1.1 para mostrar que o operador A é auto-adjunto. Assim, devemos verificar que ele é simétrico e, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, o operador $\lambda I - A$ é sobrejetivo. Afirmamos que A é simétrico. Com efeito, dados $u, v \in D(A)$, temos

$$\langle Au, v\rangle_{L^2(0,\pi)} = -\int_0^\pi u''(x)v(x)dx - \int_0^\pi bu(x)v(x)dx.$$

Integrando por partes temos

$$\langle Au, v\rangle_{L^2(0,\pi)} = -\, u'(x)v(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi u'(x)v'(x)dx - \int_0^\pi bu(x)v(x)dx,$$

pela condição de fronteira de Neumann no intervalo $(0, \pi)$ resulta que $-u'(x)v(x)\Big|_0^\pi = 0$, logo

$$\langle Au, v\rangle_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi u'(x)v'(x)dx - \int_0^\pi bu(x)v(x)dx.$$

Integrando por partes novamente e usando a condição de fronteira de Neumann obtemos

$$\begin{aligned}\langle Au, v\rangle_{L^2(0,\pi)} &= -\int_0^\pi u(x)v''(x)dx - \int_0^\pi bu(x)v(x)dx \\ &= -\int_0^\pi u(x)v''(x) + u(x)bv(x)dx \\ &= \int_0^\pi u(x)[-v''(x) - bv(x)]dx \\ &= \langle u, Av\rangle_{L^2(0,\pi)}.\end{aligned}$$

Portanto o operador A é simétrico.

Em seguida, provaremos que $\lambda I - A$ é sobrejetivo. Para isso, tomando $\lambda = -(1+b)$, defina o operador

$$A_1 : D(A) \subset L^2(0, \pi) \longrightarrow L^2(0, \pi)$$

dado por

$$A_1 u = -u + u'',$$

uma vez que

$$-(1 + b)u - Au = -u - bu - (-u'' - bu) = -u + u'' = A_1 u, \forall u \in D(A).$$

Dado $g \in L^2(0, \pi)$, considere o problema

$$\begin{cases} u'' - u = g, \\ u'(0) = u'(\pi) = 0, \end{cases}$$

e note que é equivalente a

$$\begin{cases} -\, u'' + u = -g \\ u'(0) = u'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Assim, para verificarmos que o operador A_1 é sobrejetor, basta mostramos que o problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \\ u'(0) = u'(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

onde $f = -g$, possui uma solução fraca em $(0, \pi)$. Considere a forma bilinear

$$\begin{aligned} \varphi : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u', v' \rangle_{L^2(0,\pi)} + b\langle u, v \rangle_{L^2(0,\pi)}, \end{aligned}$$

onde $V = H^1(0, \pi) \cap \{$condição de fronteira de Neumann no intervalo $(0, \pi)\}$. Observando que φ é contínua e coerciva, temos pelo Teorema de Lax-Milgram (veja [3, Corolário 5.8]) que para cada $f \in L^2(0, \pi)$, existe uma única $u \in V$ satisfazendo (1.12). Por outro lado, temos também que

$$u'' = -f + u,$$

com $f, u \in L^2(0, \pi)$, daí resulta que $u'' \in L^2(0, \pi)$. Logo

$$u \in D(A).$$

Assim, resulta que o operador A_1 é sobrejetivo e, portanto, A é auto-adjunto.

Prova de *(b)*: Para demostrarmos esta propriedade, dividiremos em três etapas: na Etapa 1 provaremos que $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ é a sequência de autofunções do operador A; na Etapa 2 provaremos que $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ é uma sequência de vetores ortonormais em $L^2(0, \pi)$, i.e., dados $i, j \in \mathbb{N}_0$, com $i \neq j$, tem-se $\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = 0$ e $\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = 1$; na Etapa 3 provaremos que a sequência $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ é uma base para o espaço $L^2(0, \pi)$.

Etapa 1: Seja φ uma autofunção do operador A, associado ao autovalor λ, então

$$A\varphi = \lambda\varphi, \ (\varphi \neq 0).$$

Segue-se da definição deste operador que

$$\begin{aligned} &-\varphi'' - b\varphi = \lambda\varphi \text{ em } (0, \pi) \\ \Leftrightarrow &-\varphi'' = (b + \lambda)\varphi \text{ em } (0, \pi) \\ \Leftrightarrow &-\varphi'' - (b + \lambda)\varphi = 0 \text{ em } (0, \pi) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Assim, a equação característica da EDO dada em (1.13) é

$$\begin{aligned} & -\gamma^2 - (b+\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow & \gamma^2 = -(b+\lambda) \\ \Leftrightarrow & \gamma = \pm i\sqrt{(b+\lambda)} = \alpha \pm i\beta. \end{aligned}$$

Então temos

$$\varphi(x) = e^{\alpha x}[a\cos(\beta x) + b\,\mathrm{sen}(\beta x)],$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes a serem determinadas. Neste caso, os valores de α e β são, respectivamente, 0 e $\sqrt{(b+\lambda)}$, logo

$$\varphi(x) = a\cos(\sqrt{b+\lambda}\,x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{b+\lambda}\,x). \tag{1.14}$$

Usando as condições de fronteira do operador A, obtemos

$$\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0. \tag{1.15}$$

Derivando a equação (1.14), resulta

$$\varphi'(x) = -a\sqrt{b+\lambda}\,\mathrm{sen}(\sqrt{b+\lambda}\,x) + b\sqrt{b+\lambda}\cos(\sqrt{b+\lambda}\,x). \tag{1.16}$$

Daí, usando (1.15) e (1.16) temos os seguintes sistemas

$$\begin{cases} \varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow b\sqrt{b+\lambda} = 0 \\ \qquad\qquad\;\; \Leftrightarrow b = 0 \text{ ou } \lambda = -b, \end{cases} \tag{1.17}$$

e

$$\begin{cases} \varphi'(\pi) = 0 \Leftrightarrow -a\sqrt{b+\lambda}\,\mathrm{sen}(\sqrt{b+\lambda}\,\pi) + b\sqrt{b+\lambda}\cos(\sqrt{b+\lambda}\,\pi) = 0 \\ \qquad\qquad\;\; \Leftrightarrow \lambda = -b \;\text{ ou }\; -a\;\mathrm{sen}(\sqrt{b+\lambda}\,\pi) + b\cos(\sqrt{b+\lambda}\,\pi) = 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Caso $b = 0$, temos $a \neq 0$ e

$$\begin{aligned} -a\;\mathrm{sen}(\sqrt{b+\lambda}\,\pi) = 0 &\Rightarrow \mathrm{sen}(\sqrt{b+\lambda}\,\pi) = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{b+\lambda}\,\pi = n\pi,\; n \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \lambda = n^2 - b,\; n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo

$$\varphi(x) = a\cos(nx),\; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como a função cosseno é par, então

$$\varphi(x) = a\cos(nx),\ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Caso $\lambda = -b$, então

$$\varphi(x) = a.$$

Portanto, tomando $a = 1$, temos os autovalores dados por

$$\lambda_n = n^2 - b,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.19}$$

e os autovetores

$$\varphi_n(x) = \cos(nx),\ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.20}$$

Normalizando as autofunções temos

$$\varphi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(jx),\ \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}. \tag{1.21}$$

Etapa 2: Dados $i, j \in \mathbb{N}_0$, com $0 < i < j$, provemos $\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = 0$. Por definição temos

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle &= \int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(ix)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(jx)\right)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(ix)\cos(jx)dx.\end{aligned}$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \tag{1.22}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos((i+j)x) + \cos((i-j)x)}{2}dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi \cos((i+j)x)dx + \int_0^\pi \cos((i-j)x)dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{i+j}\operatorname{sen}(y)\Big|_0^{(i+j)\pi} + \frac{1}{i-j}\operatorname{sen}(z)\Big|_0^{(i-j)\pi}\right] = 0.\end{aligned}$$

Supondo agora que $i = 0$ e $0 < j$ temos

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(jx)dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \cos(jx)dx = 0.\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_0^\pi \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{\pi}} dx = 1$$

e, dado $j > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle &= \int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(jx)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(jx)\right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(2jx) + 1}{2} dx \\ &= \frac{1}{2j\pi} \int_0^{2j\pi} \cos y \, dy + 1 = 1.\end{aligned}$$

Portanto $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ é uma sequência de funções ortonormais em $L^2(0, \pi)$.

Etapa 3: Usando o Teorema 1.5, temos que $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ é uma base para o $L^2(0, \pi)$.

Prova de *(c)*: Por definição temos

$$Au = -u'' - bu, \; \forall u \in D(A).$$

Multiplicando Au por u no sentido de $L^2(0, \pi)$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle Au, u \rangle_{L^2(0,\pi)} =& \langle -u'', u \rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle -bu, u \rangle_{L^2(0,\pi)} \\ =& - \int_0^\pi u''(x)u(x)dx - b\|u\|^2_{L^2(0,\pi)}.\end{aligned}$$

Integrando por partes temos

$$\langle Au, u \rangle_{L^2(0,\pi)} = - u'(\pi)u(\pi) + u'(0)u(0) + \int_0^\pi u'(x)u'(x)dx - b\|u\|^2_{L^2(0,\pi)}.$$

Usando a condição de fronteira resulta que $-u'(\pi)u(\pi) + u'(0)u(0) = 0$, logo

$$\begin{aligned}\langle Au, u \rangle_{L^2(0,\pi)} =& \int_0^\pi u'(x)u'(x)dx - b\|u\|_{L^2(0,\pi)} \\ =& \|u'\|^2_{L^2(0,\pi)} - b\|u\|^2_{L^2(0,\pi)} \\ \geq& - b\|u\|^2_{L^2(0,\pi)}.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 1.3 deduzimos que A é um operador setorial e, portanto, $-A$ gera um semigrupo analítico. □

1.3 Potências fracionárias de operadores lineares

Nesta seção nos dedicaremos à teoria de potências fracionárias de operadores setoriais, que posteriormente será utilizada na formulação de resultados que garantem a existência global e unicidade de solução para problemas abstratos de Cauchy semilinear do tipo parabólico. Nossas principais referencias nesta seção será D. Henry [11], A. Neto [15] e J. Silva [21].

Antes de iniciarmos a tratar das potências fracionárias de operadores setoriais, apresentaremos o conceito de função Gama [1], que será de fundamental importância.

Teorema 1.6 (Euler). *Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que* $\mathrm{Re}(z) > 0$ *a função Gama em z é definida por*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Demonstração. Veja A. Neto [15, Teorema 24]. □

Corolário 1.1. *A função Gama satisfaz a seguinte identidade*

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}.$$

Demonstração. Veja A. Neto [15, Corolário 1 do Teorema 23]. □

A função Gama também pode ser vista como uma extensão da função fatorial ao conjunto $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$, em virtude do resultado a seguir.

Corolário 1.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale* $\Gamma(n+1) = n!$.

Demonstração. Veja A. Neto [15, Corolário do Teorema 22]. □

Definição 1.7. Suponha que A é um operador setorial e $\mathrm{Re}\, \lambda > 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$. Então para algum $\alpha > 0$,

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt. \tag{1.23}$$

Exemplo 1.2. Se A é um número real positivo (neste caso o espaço é $X = \mathbb{R}$), então $A^{-\alpha}$ tem definição usual de $(-\alpha)$-potência de A. Como ilustração, tomando $A = 2$ e

[1] Para mais detalhes sobre a função Gama recomenda-se ver a subseção 5.1, Cap. 5, A. Neto [15].

$\alpha = 2$, verifica-se usando a definição acima que

$$A^{-\alpha} = 2^{-2} = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} t^{2-1} e^{-2t} dt = \frac{1}{4}.$$

O próximo resultado nos fornece uma fórmula alternativa para a Definição 1.7.

Teorema 1.7. *Seja A um operador setorial em X tal que* $\operatorname{Re} \lambda > 0$ *para todo* $\lambda \in \sigma(A)$. *Então para todo $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado em X, bijetivo satisfazendo*

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$$

sempre que $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Além disso, para $\alpha \in (0,1)$ temos

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda. \tag{1.24}$$

Demonstração. Veja D. Henry [11, Teorema 1.4.2]. □

Definição 1.8. Para A nas hipóteses da Definição 1.7, definimos

1. $A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1}$;

2. $D(A^\alpha) := R(A^{-\alpha})$, onde $R(A^{-\alpha})$ denota a imagem do operador $A^{-\alpha}$;

3. $A^0 := I_X$.

Definição 1.9. Seja A um operador setorial em um espaço de Banach X. Dado $\alpha \geq 0$, define-se o espaço

$$X^\alpha := D(A_1^\alpha),$$

onde A_1 o operador definido por $A_1 := aI + A$, para algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re} \lambda > 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A_1)$, com a norma do gráfico dada por

$$\|x\|_\alpha := \|A_1^\alpha x\|_X,$$

para cada $x \in X^\alpha$.

Uma pegunta que pode surgir após esta definição é se a topologia do espaço $X^\alpha := D(A_1^\alpha)$ depende ou não da constante a escolhida na definição do operador $A_1 := aI + A$. Para responder essa dúvida temos o resultado seguir.

Teorema 1.8. *Sejam A um operador setorial em um espaço de Banach X, $A_1 = aI + A$, $A_2 = bI + A$, $\alpha \in [0,1]$ com a e b constantes reais distintas tais que as potências A_1^α, A_2^α estejam bem definidos. Então $D(A_1^\alpha) = D(A_2^\alpha)$ e as normas geradas por A_1 e A_2, como na Definição 1.9, são equivalentes.*

Demonstração. Veja J. Silva [21, Proposição 5]. $\square$

Teorema 1.9. *Suponha $I \in \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $1 \leq p < \infty$ e A um operador setorial em $X = L^p(I)$ com $D(A) = X^1 \subset W^{m,p}(I)$ para algum $m \geq 1$. Então para $0 \leq \alpha \leq 1$, temos as seguintes imersões contínuas:*

$$X^\alpha \subset W^{k,q}(I) \text{ quando } k - \frac{1}{q} < m\alpha - \frac{1}{p},\ p \leq q;$$
$$X^\alpha \subset C^\nu(I) \text{ quando } 0 \leq \nu \leq m\alpha - \frac{1}{p}.$$

Demonstração. Veja D. Henry [11, Teorema 1.6.1.]. $\square$

Obsevação 1.4. Considere $X = L^2(0,\pi)$, $p = 2$, o operador A dado no exemplo 1.1, $m = 2$, $q = 2$, $\alpha = \dfrac{3}{4}$, $k = 1$ e $\nu = 1$ temos as seguintes imersões contínuas:

$$X^\alpha \subset H^1(0,\pi) \text{ e } X^\alpha \subset C^1(0,\pi).$$

1.4 Existência local e global de solução para problema semilinear abstrato

Nesta seção as principais referências são D. Henry [11], A. Pazy [16] e J. Pimentel [21], nela apresentaremos resultados da teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados referentes a boa colocação de um problema de valor inicial do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f^e(t,u),\ t_0 < t < T, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1.25}$$

onde $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ sobre espaço de Banach X e $f^e : [t_0, T] \times X \longrightarrow X$ é contínua em t e Lipschitz contínua u, mas antes faremos algumas observações.

Primeiramente, é importante ressaltar que o problema de valor inicial (1.25), não necessariamente tem solução de qualquer tipo (solução clássica, solução forte ou solução fraca).

Definição 1.10. Dizemos que uma função $u : [t_0, T] \longrightarrow X$ é uma solução clássica para o problema (1.25) em $[t_0, T]$ se u for contínua em $[t_0, T]$, for continuamente diferenciável em (t_0, T), $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [t_0, T]$ e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{du}{dt} + Au = f^e(t,u) \text{ em } (t_0, T)$$

com $u(t_0) = u_0$.

Em alguns livros que trata da teoria dos semigrupos lineares é usada noção de *mild solution*, que é um tipo de solução fraca para um problema de valor inicial do tipo (1.25) cuja motivação para essa definição será apresentada a seguir.

Suponha que $u : [t_0, T] \longrightarrow X$ seja uma solução clássica para o problema (1.25). Dado $t \in (t_0, T]$ e definindo a função

$$\begin{aligned} g : (t_0, t) &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto T(t-s)u(s), \end{aligned}$$

segue do fato de u ser uma solução clássica para o problema (1.25) que $u(s) \in D(-A)$ e pelo Teorema 1.1 que $T(t-s)u(s) \in D(-A)$. Então g é diferenciável em $t_0 < s < t$ e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= \frac{d}{ds}\left[T(t-s)u(s)\right] \\ &= AT(t-s)u(s) + T(t-s)\frac{du}{ds}(s), \end{aligned}$$

mas, por (1.25) temos

$$\frac{du}{ds}(s) = -Au(s) + f^e(s, u(s)),$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= AT(t-s)u(s) + T(t-s)[-Au(s) + f^e(s, u(s))] \\ &= T(t-s)f(s, u(s)). \end{aligned}$$

Integrando a última igualdade de t_0 a t obtemos

$$T(0)u(t) - T(t-t_0)u(t_0) = \int_{t_0}^{t} T(t-s)f^e(s, u(s))ds,$$

e, portanto

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f^e(s, u(s))ds \tag{1.26}$$

para todo $t \in (t_0, T)$.

Assim, mostramos que toda solução clássica do problema (1.25) satisfaz a equação integral (1.26), nos motivando a definir um novo tipo de solução, que será apresentada a seguir.

Definição 1.11. Uma solução contínua u em (t_0, T) para a equação integral (1.26) é chamada de uma *mild solution* em (t_0, T) para o problema de valor inicial (1.25).

Agora, consideremos o problema parabólico semilinear

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f^e(t,u),\ t \geq 0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1.27}$$

onde A é um operador setorial para qual as potências fracionárias de $A_1 \equiv A + aI$ ($a \in \mathbb{R}$ e I denota o operador identidade[2]) estão bem definidas e os espaços $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ com a norma do gráfico $\|u\|_\alpha = \|A_1^\alpha u\|$ são definidos para $\alpha \geq 0$.

Suponhamos que para algum conjunto aberto U em $\mathbb{R} \times X^\alpha$ a aplicação $f^e : U \longrightarrow X$, para algum $\alpha \in [0,1)$, é localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitz em u no aberto U. Mais precisamente, se $(t_1, u_1) \in U$, existe uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1, u_1) tal que para $(t,x) \in V$, $(s,v) \in V$,

$$\|f^e(t,u) - f^e(s,v)\| \leq L(|t-s|^\theta + \|u-v\|_\alpha),$$

para algumas constantes $L > 0$, $\theta > 0$.

Definição 1.12. Uma solução no sentido de D. Henry [3] para o problema abstrato de Cauchy (1.27) em (t_0, t_1) é uma função contínua $u : [t_0, t_1) \longrightarrow X$ tal que $u(t_0) = u_0$ e em (t_0, t_1) temos $(t, u(t)) \in U$, $u(t) \in D(A)$, $\dfrac{du}{dt}(t)$ exite, a aplicação $t \longmapsto f^e(t, u(t))$ é localmente Hölder contínua e,

$$\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f^e(t,u(t))\| dt < +\infty \text{ para algum } \rho > 0$$

e a equação diferencial (1.27) é satisfeita em (t_0, t_1).

Teorema 1.10. *Suponha que A é um operador setorial, $0 \leq \alpha < 1$, U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X^\alpha$, $f : U \longrightarrow X$ é localmente Hölder contínua em $t \in \mathbb{R}$ e localmente Lipschitz em $u \in X^\alpha$, além disso, assuma que para cada conjunto fechado limitado $B \subset U$, a imagem $f^e(B)$ é limitada em X. Se u é uma solução para (1.27) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal, então não há solução para (1.27) em (t_0, t_2) se $t_1 < t_2$ e, também $t_1 = +\infty$ ou então existe uma sequência $t_n \longrightarrow t_1$ quando $n \longrightarrow +\infty$ tal que $(t_n, u(t_n)) \longrightarrow \partial U$ (se U for ilimitado, então assumiremos que o ponto $+\infty \in \partial U$).*

Demonstração. Veja D. Henry [11, Teorema 3.3.4]. □

[2] Sempre que não houver confusão, I vai denotar o operador identidade.

[3] No decorrer deste texto, salvo menção contrária, sempre que falarmos de solução para um problema abstrato de Cauchy nos referimos ao sentido de D. Henry.

Corolário 1.3. *Suponha que A é um operador setorial, $U = (\tau, +\infty) \times X^\alpha$, f^e é localmente Hölder contínua em t, localmente Lipschitz em x para cada $(t,x) \in U$, e também*

$$\|f^e(t,x)\| \leq k(t)(1 + \|x\|_\alpha)$$

para todo $(t,x) \in U$, onde $k(\cdot)$ é contínua em $(\tau, +\infty)$. Se $t_0 \geq \tau$, $x_0 \in X^\alpha$ então a única solução forte para o problema (1.27) existe para todo $t \geq t_0$.

Demonstração. Veja D. Henry [11, Corolário 3.3.5]. □

Teorema 1.11. *Suponha que A é um operador setorial em um espaço de Banach X, $0 \leq \alpha < 1$, U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X^\alpha$, $f : U \longrightarrow X$ é localmente Hölder contínua em $t \in \mathbb{R}$ e localmente Lipschitz em $u \in X^\alpha$, além disso, assuma que A tem resolvente compacto e f aplica todo conjunto $R^+ \times B \subset U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ com B fechado e limitado em um conjunto limitado de X. Se $u(t; t_0, u_0)$ é a solução para (1.27) em $(t_0, +\infty)$ com $\|u(t; t_0, u_0)\|_\alpha$ limitado quando $t \longrightarrow +\infty$, então*

$$\{u(t; t_0, u_0) : t > t_0\} \subset \mathcal{K},$$

onde $\mathcal{K}$ é subconjunto compacto do espaço X^α.

Demonstração. Veja D. Henry [11, Teorema 3.3.6]. □

Após apresentar estes conceitos e resultados estudaremos a boa colocação de um problema que servirá de aplicação para estes resultados e definições.

Exemplo 1.3. [18] Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + f(x, u(t,x), u_x(t,x)), \ t > 0, \ x \in [0,\pi] \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{1.28}$$

onde

$$f(x, u(t,x), u_x(t,x)) = bu(t,x) + g(x, u(t,x), u_x(t,x))$$

e

$$g = g(x,y,z) : [0,\pi] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma função limitada, continuamente diferenciável duas vezes e globalmente Lipschitz contínua em (y,z), ou seja, existem constantes L_1 e L_2 tais que

$$|g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| \leq L_1|y_1 - y_2| + L_2|z_1 - z_2|,$$

e $b \in \mathbb{R}$.

A fim de estudar a boa colocação deste problema, usaremos o Corolário 1.3. Mas para fazer isso é preciso verificar que este problema está nas hipótese do resultado mencionado.

Teorema 1.12. *Sejam o problema* (1.3)*, onde o dado inicial* $u_0 \in X^\alpha$ *para algum* $\alpha \in \left[\dfrac{3}{4}, 1\right]$*. Então o problema* (1.3) *possui solução única em* $[0, +\infty] \times [0, \pi]$.

Demonstração. Considere o operador A do Exemplo 1.1, i.e.,

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset L^2(0,\pi) &\longrightarrow L^2(0,\pi) \\ u &\longmapsto -u_{xx} - bu, \end{aligned}$$

$U = (-1, +\infty) \times X^\alpha$, onde $\alpha \in [0, 1)$, $f^e(t, u) = g^e(u)$, onde g^e é o operador de Nemitskĭi da a função g em $L^2(0, \pi)$, i.e.,

$$g^e(u)(t, x) = g(x, u(t, x), u_x(t, x)).$$

Usando a Proposição 1.1 temos o operador A setorial e, para $A_1 = A + (1 + b)I$, temos os espaços de potêcias fracionária

$$X^\alpha := D(A_1^\alpha),$$

definidos para cada $\alpha \geq 0$ com a norma do gráfico. Tomando o dado inicial $u_0 \in X^\alpha$, onde este α será esclarecido posteriormente, temos o seguinte problema abstrato de Cauchy semilinear do tipo parabólico:

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = g^e(u(t)), \ t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.29}$$

Considere o operador f^e do Corolário 1.3 dado por $f^e(t, u) := g^e(u)$, que é Hölder contínua em t, pois não depende explicitamente de t. Afirmamos que g^e é localmente Lipschitz em u para todo $u \in X^\alpha$. De fato, dados $u, v \in X^\alpha$ temos

$$\begin{aligned} \left\|g^e(u) - g^e(v)\right\|^2_{L^2(0,\pi)} &= \int_0^\pi \left|g(x, u(x), u_x(x)) - g(x, v(x), v_x(x))\right|^2 dx \\ &\leq \int_0^\pi \left(L_1\left|u(x) - v(x)\right| + L_2\left|u_x(x) - v_x(x)\right|\right)^2 dx \\ &\leq \int_0^\pi \left(L_1^2\left|u(x) - v(x)\right|^2 + 2L_1L_2\left|u(x) - v(x)\right|\left|u_x(x) - v_x(x)\right|\right. \\ &\left. + L_2^2\left|u_x(x) - v_x(x)\right|\right) dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young com $p = 2$, resulta em

$$\begin{aligned}\left\|g^e(u) - g^e(v)\right\|^2_{L^2(0,\pi)} &\leq \int_0^\pi 2L_1^2|u(x) - v(x)|^2 + 2L_2^2\left|u_x(x) - v_x(x)\right|^2 dx \\ &= 2L_1^2\|u - v\|^2_{L^2(0,\pi)} + 2L_2^2\left\|u_x - v_x\right\|^2_{L^2(0,\pi)} \\ &\leq c^2\|u - v\|^2_{H^1(0,\pi)},\end{aligned}$$

onde $c^2 = \max\{2L_1^2, 2L_2^2\}$. Mas, pela Observação 1.4, para $\frac{3}{4} \leq \alpha \leq 1$, temos as imersões contínuas $X^\alpha \subset H^1(0,\pi)$ e $X^\alpha \subset C^1(0,\pi)$. Logo, sendo $L = kc$, onde k é a constante da imersão $X^\alpha \subset H^1(0,\pi)$, segue-se que

$$\left\|g^e(u) - g^e(v)\right\|_{L^2(0,\pi)} \leq L\|u - v\|_\alpha$$

e, portanto, g^e é globalmente Lipschitz em $u \in X^\alpha$. Resta mostrar que

$$\left\|g^e(u)\right\|_{L^2(0,\pi)} \leq k(t)(1 + \|u\|_\alpha).$$

Com efeito, pelo fato do operador g^e ser globalmente Lipschitz em $u \in X^\alpha$, temos

$$\left\|g^e(u) - g^e(0)\right\|_{L^2(0,\pi)} \leq L\|u\|_\alpha.$$

Mas, pela desigualdade triangular e a desigualdade anterior obtemos

$$\left\|g^e(u)\right\|_{L^2(0,\pi)} - \left\|g^e(0)\right\|_{L^2(0,\pi)} \leq \left\|g^e(u) - g^e(0)\right\|_{L^2(0,\pi)} \leq L\|u\|_\alpha.$$

Logo

$$\left\|g^e(u)\right\|_{L^2(0,\pi)} \leq \left\|g^e(0)\right\|_{L^2(0,\pi)} + L\|u\|_\alpha \leq k(t)(1 + \|u\|_\alpha),$$

onde

$$k(t) := \max\left\{\left\|g^e(0)\right\|_{L^2(0,\pi)}, L\right\}. \tag{1.30}$$

Portanto, este problema está sob as hipóteses do Corolário 1.3 e temos sua boa colocação global. $\square$

Capítulo 2

Equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas

Este capítulo é dedicado as equações diferenciais parciais (EDP's) lentamente não dissipativas. Introduziremos a noção de EDP's cuja solução sofre blow-up em tempo infinito e daremos exemplos de equações diferenciais com essa propriedade. As principais referências deste capítulo são N. Ben-Gal [2], Brézis [3], D. Henry [11], J. Pimentel [17], J. Pimentel e C. Rocha [18], J. Silva [21].

2.1 Sistemas dinâmicos não lineares

Nesta seção apresentaremos algumas definições e um resulta da teoria de sistemas dinâmicos não lineares e faremos mais algumas observações sobre o Exemplo 2.5. As principais referências são D. Henry [11], J. Pimentel [17] e J. Pimentel e C. Rocha [18].

Definição 2.1. Um sistema dinâmico (ou semigrupo não linear) sobre um espaço métrico completo C é uma família de aplicações em definidas de C em C, denotada por

$$\{S(t) : t \geq 0\},$$

que satisfazem:

(i) Para $t \geq 0$ a aplicação $S(t)$ é contínua de C em C;

(ii) Para cada $x \in C$, a aplicação $[0, +\infty) \ni t \longmapsto S(t)x \in C$ é contínua;

(iii) $S(0)x = x$ para todo $x \in C$;

(iv) $S(t)(S(s)x) = S(t + s)x$ para todo $x \in C$ e $t, s \geq 0$.

Definição 2.2. Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um sistema dinâmico sobre um espaço métrico completo C. Dado $x \in C$, dizemos que o conjunto

$$\gamma^+(x) := \{S(t)x : t \geq 0\}$$

é a órbita (semi-órbita positiva) positiva de x.

Definição 2.3. Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um sistema dinâmico sobre um espaço métrico completo C. Dado $x \in C$, dizemos que x é um ponto de equilíbrio se

$$\gamma^+(x) = \{x\}.$$

Definição 2.4. Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um sistema dinâmico sobre um espaço métrico completo C. Um funcional de Liapunov para este sistema dinâmico é uma função contínua $V : C \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d}{dt}V(x) := \limsup_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[V(S(t)x) - V(x)] \leq 0$$

para todo $x \in C$.

Definição 2.5. Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um sistema dinâmico sobre um espaço métrico completo C. Um conjunto $K \subset C$ é invariante se, para cada $x_0 \in K$, existe uma curva contínua em K

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow K \text{ com } x(0) = x_0$$

e

$$\forall t \geq 0, \; S(t)x(s) = x(t+s) \text{ se } s \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.6. Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um sistema dinâmico sobre um espaço métrico completo C. Se $x_0 \in C$, $\gamma^+(x_0) = \{S(t)x_0 : t \geq 0\}$ é a órbita positiva de x_0, então o conjunto ω-limite (conjunto ômega limite) de x_0 é definido por

$$\omega(x_0) := \left\{ x \in C \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{existe uma sequência } (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ t_n \longrightarrow +\infty \text{ tal que } S(t_n)x_0 \longrightarrow x \end{array} \right\}.$$

Lema 2.1. *Sejam $\{S(t) : t \geq 0\}$ um sistema dinâmico sobre um espaço métrico completo C, $x_0 \in C$ e $x_1 \in C$. Se $x_1 \in \gamma^+(x_0)$ então $\omega(x_0) = \omega(x_1)$. Além disso,*

$$\omega(x_0) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\{S(t)x_0 : t \geq \tau\}}.$$

Demonstração. Esta demonstração será dividida em duas etapas. Na Etapa 1, provaremos que $\omega(x_0) = \omega(x_1)$ e na Etapa 2 demonstraremos que

$$\omega(x_0) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\{S(t)x_0 : t \geq \tau\}}.$$

Etapa 1: Seja $x \in \omega(x_0)$, então exite uma sequência (t_n) de números reais não negativos tal que

$$t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \text{ e } S(t_n)x_0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} x. \tag{2.1}$$

Observando que se $x_1 \in \gamma(x_0)$, então existe $\tau \geq 0$ tal que

$$x_1 = S(\tau)x_0. \tag{2.2}$$

Usando o fato de $t_n \longrightarrow +\infty$ quado $n \longrightarrow +\infty$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$t_n \geq \tau, \ \forall n \geq n_0.$$

Note que, pela desigualdade acima, temos $t_n - \tau \geq 0$ para todo $n \geq n_0$. Assim, podemos aplicar $S(t_n - \tau)$ em ambos os membros da (2.2) para todo $n \geq n_0$ e obtermos

$$S(t_n - \tau)x_1 = S(t_n - \tau)S(\tau)x_0 = S(t_n)x_0. \tag{2.3}$$

Usando o fato de $(t_n)_{n \geq n_0}$ ser uma subsequência de (t_n), segue por (2.1) e (2.3) que a sequência dada por

$$s_n = t_{n+n_0} - \tau$$

tem a propriedade

$$s_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \text{ e } S(s_n)x_1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} x.$$

Portanto, $x \in \omega(x_1)$ e temos que $\omega(x_0) \subset \omega(x_1)$.

Reciprocamente, se $x \in \omega(x_1)$, então existe $t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$S(t_n)x_1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} x. \tag{2.4}$$

Usando a hipótese de que $x_1 \in \gamma^+(x_0)$, existe $\tau \geq 0$ tal que $x_1 = S(\tau)x_0$. Assim, temos por (2.4) que

$$S(t_n)x_1 = S(t_n)S(\tau)x_0 = S(t_n + \tau)x_0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} x. \tag{2.5}$$

Note que, como $\tau \geq 0$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$, então a sequência dada por

$s_n = t_n + \tau$ satisfaz a propriedade

$$S(s_n)x_0 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} x.$$

com $s_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Portanto $x \in \omega(x_0)$ e temos $\omega(x_1) \subset \omega(x_0)$ e concluímos a Etapa 1.

Etapa 2: Seja $x \in \bigcap\limits_{\tau\geq 0} \overline{\{S(t)x_0 : t \geq \tau\}}$ então $x \in \overline{\{S(t)x_0 : t \geq \tau\}}$ para todo $\tau \geq 0$. Logo, para cada $\tau \geq 0$ existe uma sequência

$$\{S(t_{n,\tau})x_0\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{S(t)x_0 : t \geq \tau\}$$

tal que $S(t_{n,\tau})x_0 \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Em particular, para $\tau = 1, 2, \ldots, k, \ldots$. Seja (t_n) a sequência definida por

$$t_1 := t_{1,1}, t_2 := t_{2,2}, \ldots, t_n := t_{n,n}, \ldots.$$

Então $t_n \longrightarrow +\infty$ quado $n \longrightarrow +\infty$ e

$$S(s_n)x_0 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} x.$$

Portanto, $x \in \omega(x_0)$.

Agora, suponha por absurdo que exista $x \in \omega(x_0)$ tal que $x \notin \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\{S(t)x_0 : t \geq \tau\}}$. Então existe $\tau_0 \geq 0$ tal que

$$x \notin \overline{\{S(t)x_0 : t \geq \tau_0\}}. \tag{2.6}$$

Note que, como $x \in \omega(x_0)$, então existe $t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$S(t_n)x_0 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} x.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq \tau$ para todo $n \geq n_0$. Seja (s_n) a subsequência de (t_n) dada por $s_n = t_{n+n_0}$. Então $\{S(s_n)x_0\} \subset \{S(t)x_0 : t \geq \tau\}$, $s_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ e

$$S(s_n)x_0 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} x,$$

contrariando (2.6). Portanto, temos

$$\omega(x_0) \subset \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\{S(t)x_0 : t \geq \tau\}}.$$

□

Lema 2.2. *Sejam $\{S(t) : t \geq 0\}$ um sistema dinâmico sobre um espaço métrico completo C e $x_0, \in C$ tal que $\gamma^+(x_0)$ é um conjunto compacto em C. Então $\omega(x_0)$ é não vazio, compacto e invariante.*

Demonstração. Observe que, pelo Lema 2.1, temos que o conjunto $\omega(x_0)$ é a intersecção de uma coleção decrescente de compactos não vazios, logo $\omega(x_0)$ é um compacto não vazio.

Mostremos que $\omega(x_0)$ é invariante. Com efeito, dado $y \in \omega(x_0)$, então existe $t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$S(t_n)x_0 \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} y.$$

Como a aplicação $[0, +\infty) \ni t \longmapsto S(t)x_0$ é contínua, então

$$S(t)S(t_n)x_0 = S(t + t_n)x_0 \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} S(t)y,$$

com $t + t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Logo $S(t)y \in \omega(x_0)$ para todo $y \in \omega(x_0)$ e, portanto $\omega(x_0)$ é invariante. $\square$

Teorema 2.1 (Princípio da invariância de LaSalle)**.** *Sejam $\{S(t) : t \geq 0\}$ um sistema dinâmico sobre um espaço métrico completo C, V um funcional de Liapunov para o sistema dinâmico $\{S(t) : t \geq 0\}$, $E = \{x \in C : \frac{d}{dt}V(x) = 0\}$ e M o maior subconjunto invariante de E, onde a relação de ordem é a de inclusão. Se*

$$\{S(t)x_0 : t \geq 0\} \subset \mathcal{K},$$

onde $\mathcal{K}$ é um conjunto compacto do espaço C, então

$$S(t)x_0 \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} M,$$

ou seja,

$$\liminf_{t \to +\infty,\, m \in M} d(S(t)x_0, m) = 0.$$

Demonstração. Usando a definição de funcional de Lyapunov temos $V(S(t)x_0)$ não crescente para todo $t \geq 0$ e, sendo V contínua e $\{S(t)x_0 : t \geq 0\}$ compacto, então $V(S(t)x_0)$ é limitado inferiormente por

$$l = \lim_{t \to +\infty} V(S(t)x_0). \tag{2.7}$$

Seja $y \in \omega(x_0)$, então existe $t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$S(t_n)x_0 \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} y. \tag{2.8}$$

Usano a continuidade do funcional V, temos por (2.7) e (2.8) que

$$\lim_{n\to\infty} V(S(t_n)x_0) = V\left(\lim_{n\to+\infty} S(t_n)x_0\right) = V(y) = l.$$

Por outro lado, como $\omega(x_0)$ é invariante (veja o Lema 2.2), então $S(t)y \in \omega(x_0)$, i.e., existe $t_n \longrightarrow \infty$ tal que $S(t_n)x_0 \longrightarrow S(t)y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Então, segue pela continuidade do funcional V tal que

$$V(S(t)y) = \lim_{n\to+\infty} V(S(t_n)x_0) = l, \ \forall t \geq 0.$$

Notando que

$$\frac{d}{dt}V(y) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}[V(S(t)y) - V(y)] = 0, \ \forall y \in \omega(x_0),$$

então $\omega(x_0) \subset E$. Como $\omega(x_0)$ é invariante e M é o maior subconjunto invariante de E, então $\omega(x_0) \subset M$. □

2.2 Definições básicas

Sejam X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear (possivelmente não limitado) tal que $-A$ gera um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados sobre X.

Definição 2.7. Seja $u_0 \in X$ e o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f^e(u), \ t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $-A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ gera um C_0-semigrupo sobre X e $f^e : X \longrightarrow X$ é um operador contínuo tal que o problema (2.9) possua solução (em algum sentido) única $u : [0, +\infty) \longrightarrow X$. Dizemos que a EDP em (2.9) é lentamente não dissipativa se para algum dado inicial $u_0 \in X$, $u = u(t; u_0)$ está globalmente definida e satisfaz

$$\limsup_{t\to+\infty} \|u(t; u_0)\|_X = +\infty.$$

Obsevação 2.1. Na literatura que trata das equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas, as soluções com que sofrem *blow-up* em tempo infinito são chamadas de *grow-up solutions*.

Na próxima subseção deste capítulo daremos exemplos de equações diferenciais ordinárias e parciais lentamente não dissipativas; a saber,

Exemplo 2.1. Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = au + g(t)[u(t)]^{\alpha} \\ u(0) = u_o, \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa, $a > 0$, $u_0 > 0$ e $\alpha < 0$. Veremos na próxima seção que a solução do problema (2.10) é uma *grow-up solution* e, com isso, temos um exemplo de uma equação diferencial ordinária lentamente não dissipativa.

Exemplo 2.2. Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + f(x, u(t,x), u_x(t,x)), \ t > 0, \ x \in [0, \pi] \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $b > 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função com alguma condição de crescimento e regularidade. Veremos com mais detalhes na próxima subseção que para algum dado inicial, uma solução da equação (2.11) é uma *grow-up solution*, verificando que este é um exemplo de uma equação diferencial parcial lentamente não dissipativa.

2.3 Exemplos de equações diferenciais lentamente não dissipativas

A fim de, exemplificar equações diferenciais lentamente não dissipativas estudaremos uma equação diferencial ordinárias do tipo Bernoulli e equações escalares de reação e difusão em intervalos finitos. Além disso, estudaremos o comportamento assintótico das *grow-up solutions* para as equações diferenciais parciais lentamente não dissipativas e a existência de funcionais de Lyapunov, que serão úteis para garantir que soluções limitadas convergem para equilíbrios limitados.

2.3.1 Equações diferenciais ordinárias do tipo Bernoulli

Exemplo 2.3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = au + g(t)[u(t)]^{\alpha} \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.12}$$

onde $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa, $a > 0$, $u_0 > 0$ e $\alpha < 0$.

Teorema 2.2. *A EDO do problema* (2.3) *é lentamente não dissipativa.*

Demonstração. Multiplicando a primeira linha da equação (2.12) por $(1-\alpha)u^{-\alpha}$ obtemos

$$(1-\alpha)[u(t)]^{-\alpha}\frac{du}{dt}(t) = (1-\alpha)a[u(t)]^{1-\alpha} + (1-\alpha)g(t).$$

Fazendo a mudança de variável $y(t) = [u(t)]^{1-\alpha}$ resulta em

$$\frac{dy}{dt}(t) = (1-\alpha)ay(t) + (1-\alpha)g(t), \tag{2.13}$$

a qual é uma EDO linear de primeira ordem, e portanto, a solução desta equação diferencial ordinária é dada por

$$y(t) = e^{a(1-\alpha)t}\left[k + (1-\alpha)\int_0^t g(s)e^{-a(1-\alpha)s}ds\right]$$

onde k é uma constante. Portanto temos

$$u(t) = \left(e^{a(1-\alpha)t}\left[k(u_0) + (1-\alpha)\int_0^t g(s)e^{-a(1-\alpha)s}ds\right]\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

e

$$\lim_{t\to+\infty}|u(t)| = +\infty.$$

□

Os próximos exemplos podem serem encontrados em Ben-Gal [2] e Pimentel e Rocha [18], respectivamente.

2.3.2 Equações do tipo $u_t = u_{xx} + f(u)$ com condição de fronteira de Neumann

Exemplo 2.4. [2, Lema 2.1] Seja a classe de funções

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{l|l} g \in C^2(\mathbb{R}) & \text{sua derivada } g' \text{ é limitada ou o ope-} \\ \text{limitadas} & \text{rador de Nemitskĭi } g^e \text{ da função} \\ \text{que satisfazem:} & g \text{ é Lipschitz contínuo em } L^2(0,\pi) \end{array} \right\}. \tag{2.14}$$

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + bu(t,x) + g(u(t,x)), \ t > 0, \ x \in (0,\pi), \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{2.15}$$

onde $g \in \mathcal{G}$ e $b > 0$.

Teorema 2.3. *A EDP do sistema* (2.15) *é lentamente não dissipativa.*

Demonstração. Perceba que o problema (2.15) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = g^e(u(t)), \ t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.16}$$

onde $A : D(A) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi)$ é o operador definido no Exemplo 1.1 e g^e denota o operador de Nemitskĭi da função g em $L^2(0,\pi)$. Pela Proposição 1.1 o operador A é setorial e, para $A_1 = A + (1+b)I$, temos os espaços de potêcias fracionária

$$X^\alpha := D(A_1^\alpha),$$

estão definidos para cada $\alpha \geq 0$ com a norma do gráfico. Assim, de modo análogo ao Exemplo 1.3, temos pelo Corolário 1.3, que para cada $u_0 \in X^\alpha$, existe uma única $u = u(t,x)$ que é solução para a equação do problema (2.15) em $[0,+\infty) \times [0,\pi]$ e satisfaz $u(0,x) = u_0(x)$ para todo $x \in [0,\pi]$.

Considerando agora a projeção de $u(t,\cdot) \in L^2(0,\pi)$ na direção de $\varphi_j(\cdot)$, onde u é solução para (2.15) e $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ é uma base ortonormal de $L^2(0,\pi)$ formada por autofunções do operador A definido na Proposição 1.1, podemos escrever

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j(t)\varphi_j(x),$$

onde $\hat{u}_j(t) = \langle u(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)}$ é o produto interno em $L^2(0,\pi)$.

Multiplicando a equação

$$u_t(t,\cdot) = u_{xx}(t,\cdot) + bu(t,\cdot) + g(u(t,\cdot))$$

por φ_j no sentido de $L^2(0,\pi)$, obtém-se

$$\langle u_t(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)} = \langle u_{xx}(t,\cdot) + bu(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle g(u(t,\cdot)), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)}$$

e, pela fato do operador A ser auto-adjunto, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle u(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)} &= \langle -Au(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle g(u(t,\cdot)), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)} \\ &= -\lambda_j \langle u(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle g(u(t,\cdot)), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)}. \end{aligned}$$

Usando a definição de $\hat{u}_j(t)$ temos

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_j(t) = -\lambda_j \hat{u}_j(t) + \langle g(u(t,\cdot)), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)}. \tag{2.17}$$

Escrevendo agora

$$\langle g(u(t,\cdot)), \varphi_j) \rangle_{L^2(0,\pi)} = \langle g^e(u)(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)},$$

onde g^e é o operador de Nemitskĭi para g, e denotaremos por

$$\hat{g}_j(t) = \langle g^e(u)(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)},$$

segue por (2.17) que

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_j(t) = -\lambda_j \hat{u}_j(t) + \hat{g}_j(t) \tag{2.18}$$

Observemos que, se $b > 0$ então $\lambda_j = j^2 - b < 0$, pelo menos quando $j = 0$. Então a solução geral da EDO (2.18) linear não homogênea possui a forma

$$\begin{aligned} \hat{u}_j(t) &= \hat{u}_j(0)e^{-\lambda_j t} + \int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds \\ &= \hat{u}_j(0)e^{-\lambda_j t} + \int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds + \int_{+\infty}^0 e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds - \int_{+\infty}^0 e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds \\ &= \hat{u}_j(0)e^{-\lambda_j t} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds - \int_t^0 e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds. \end{aligned}$$

Resulta que

$$\begin{aligned}
\hat{u}_j(t) &= \hat{u}_j(0)e^{-\lambda_j t} + e^{-\lambda_j t}\int_0^{+\infty} e^{\lambda_j s}\hat{g}_j(s)ds - \int_t^{+\infty} e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds \\
&= \hat{u}_j(0)e^{-\lambda_j t} + e^{-\lambda_j t}\int_0^{+\infty} e^{\lambda_j s}\hat{g}_j(s)ds + \int_{+\infty}^{t} e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds. \\
&= e^{-\lambda_j t}\left(\hat{u}_j(0) + \int_0^{+\infty} e^{\lambda_j s}\hat{g}_j(s)ds\right) + \int_{+\infty}^{t} e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds.
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\hat{u}_j(t) = \hat{u}_j^h(0)e^{-\lambda_j t} + \hat{u}_j^p(t). \tag{2.19}$$

onde

$$\hat{u}_j^p(t) = \int_{+\infty}^{t} e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds$$

e

$$\hat{u}_j^h(0) = \hat{u}_j(0) + \int_0^{+\infty} e^{\lambda_j s}\hat{g}_j(s)ds.$$

Como $g^e(u)$ é limitado em $L^2(0,\pi)$, uma vez que $g(u) \in \mathcal{G}$, segue que $\hat{g}_j(t)$ é uniformemente limitada para todo $j \in \mathbb{N}_0$. consequentemente, a solução particular $\hat{u}_j^p(t)$ é uniformemente limitada para todo $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $\lambda_j < 0$. Por outro lado, sempre que λ_j é estritamente negativo e $\hat{u}_j^h(0) \neq 0$, então $\hat{u}_j^h(t) = \hat{u}_j^h(0)e^{-\lambda_j t}$ cresce exponencialmente quando t tende ao infinito.

A partir da decomposição de Fourier usando as auto projeções, concluímos que a norma em $L^2(0,\pi)$ da solução $u(t,x)$ para (2.19) é

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,\pi)} = \sum_{i=0}^{\infty}(\hat{u}_i(t))^2.$$

Uma vez que temos $\lambda_j < 0$, pelo menos para $j = 0$, se tomarmos uma condição inicial u_0 tal que $\hat{u}_0^h(0) \neq 0$, então

$$|\hat{u}_0(t)| \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} +\infty.$$

Assim, a solução correspondente $u = u(t,x)$ para essa condição inicial sofre *blow-up* no tempo infinito, concluindo a verificação deste exemplo. $\square$

A seguir serão feitas algumas observações sobre propriedades de uma *grow-up solution* para (2.19).

Obsevação 2.2. Multiplicando no sentido de $L^2(0,\pi)$ a primeira equação do problema

(2.15) por $u_t(t,\cdot)$ resulta

$$\begin{aligned}\|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,\pi)} = &\int_0^\pi u_{xx}(t,x)u_t(t,x)dx + b\int_0^\pi u(t,x)u_t(t,x)dx \\ &+\int_0^\pi g(u(t,x))u_t(t,x)dx.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\pi u_{xx}(t,x)u_t(t,x)dx &= u_x(t,\pi)u_t(t,\pi) - u_x(t,0)u_t(t,0) - \int_0^\pi u_x(t,x)u_{tx}(t,x)dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi [u_x(t,x)]^2dx,\end{aligned} \tag{2.21}$$

uma vez que, pelas condições de fronteira de Neumann no intervalo $(0,\pi)$ temos

$$u_x(t,\pi)u_t(t,\pi) = u_x(t,0)u_t(t,0) = 0.$$

Substituindo (2.21) em (2.20) temos

$$\begin{aligned}\|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,\pi)} =& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi [u_x(t,x)]^2dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi [u(t,x)]^2dx \\ &+\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{u(t,x)} g(s)dsdx \\ =& -\frac{d}{dt}\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}[u_x(t,x)]^2 - \frac{b}{2}[u(t,x)]^2 - \int_0^{u(t,x)} g(s)ds\right)dx.\end{aligned}$$

Daí resulta

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}[u_x(t,x)]^2 - \frac{b}{2}[u(t,x)]^2 - \int_0^{u(t,x)} g(s)ds\right)dx = -\|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,\pi)}. \tag{2.22}$$

Com isso, se definirmos o funcional

$$\begin{aligned} V : X^\alpha &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto V(u) = \int_0^\pi\left(\frac{1}{2}|u_x(x)|^2 - \frac{b}{2}|u(x)|^2 - \int_0^{u(x)} g(s)ds\right)dx,\end{aligned} \tag{2.23}$$

então podemos observar que as seguintes propriedades são válidas.

P.1) O funcional V é não crescente ao longo das soluções de (2.15), i.e.,

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) \leq 0,$$

para todo $t > 0$. A prova desta propriedade segue diretamente de (2.22). P.2) A solução u para a equação (2.15) é constante em relação ao tempo se, e somente se,

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) = 0$$

para todo $t \geq 0$. De fato, suponhamos que $\frac{d}{dt}V(u(t)) = 0$. Então, por (2.22) segue que $-\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} = 0$, logo

$$u_t(t,\cdot) = 0.$$

Integrando de 0 a t, resulta em

$$u(t,\cdot) - u(0,\cdot) = c,$$

onde c é uma constante. Segue-se

$$u(t,\cdot) = c + u(0,\cdot)$$

e, portanto, a solução não depende do tempo.

Reciprocamente, se $u(t,\cdot)$ é uma constante em relação ao tempo, então $u_t(t,\cdot) = 0$. Logo

$$-\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} = 0.$$

Segue-se em virtude de (2.22) que

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) = 0.$$

P.3) O funcional é contínuo. De fato, devemos mostrar que o funcional V é contínuo em cada $u \in X^\alpha$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|V(u) - V(v)| < \varepsilon \text{ sempre que } \|v - u\|_\alpha < \delta.$$

Sejam $u, v \in X^\alpha$. Então

$$\begin{aligned} \big|V(u) - V(v)\big| = \Bigg| & \frac{1}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,\pi)} - \frac{b}{2}\|u\|^2_{L^2(0,\pi)} - \int_0^\pi \int_0^{u(x)} g(s)dsdx \\ & - \frac{1}{2}\|v_x\|^2_{L^2(0,\pi)} + \frac{b}{2}\|v\|^2_{L^2(0,\pi)} + \int_0^\pi \int_0^{v(x)} g(s)dsdx \Bigg|. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\big|V(u) - V(v)\big| =& \bigg| \frac{1}{2}\left(\|u_x\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v_x\|^2_{L^2(0,\pi)} \right) + \frac{b}{2}\left(-\|u\|^2_{L^2(0,\pi)} + \|v\|^2_{L^2(0,\pi)} \right) \\
&+ \int_0^\pi \int_{u(x)}^0 g(s)dsdx + \int_0^\pi \int_0^{v(x)} g(s)dsdx \bigg| \\
=& \bigg| \frac{1}{2}\left(\|u_x\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v_x\|^2_{L^2(0,\pi)} \right) + \frac{b}{2}\left(-\|u\|^2_{L^2(0,\pi)} + \|v\|^2_{L^2(0,\pi)} \right) \\
&+ \int_0^\pi \int_{u(x)}^{v(x)} g(s)dsdx \bigg|.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular na identidade acima obtemos

$$\begin{aligned}
\big|V(u) - V(v)\big| \leq& \left| \frac{1}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v_x\|^2_{L^2(0,\pi)} \right| \\
&+ \frac{b}{2}\left| \|u\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v\|^2_{L^2(0,\pi)} \right| \\
&+ \left| \int_0^\pi \int_{u(x)}^{v(x)} g(s)dsdx \right|.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Sejam $M \in \mathbb{R}$ uma constante tal que $|g(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathbb{R}$ (que existe em devida a função g ser limitada), e

$$c = \max\left\{ \frac{1}{2}, \frac{b}{2}, M \right\}.$$

Então, segue pela desigualdade (2.24) que

$$\begin{aligned}
\big|V(u) - V(v)\big| \leq& c\Bigg(\left| \|u_x\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v_x\|^2_{L^2(0,\pi)} \right| + \left| \|u\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v\|^2_{L^2(0,\pi)} \right| \\
&+ \left| \int_0^\pi \int_{u(x)}^{v(x)} dsdx \right| \Bigg) \\
\leq& c\Bigg(\left| \|u_x\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v_x\|^2_{L^2(0,\pi)} \right| + \left| \|u\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v\|^2_{L^2(0,\pi)} \right| \\
&+ \left| \int_0^\pi u(x) - v(x) dx \right| \Bigg)
\end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
\big|V(u) - V(v)\big| \leq& c\left(\left| \|u_x\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v_x\|^2_{L^2(0,\pi)} \right| + \left| \|u\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v\|^2_{L^2(0,\pi)} \right| \right. \\
&\left. + \|u - v\|_{L^1(0,\pi)} \right).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Observando que $L^2(0,\pi) \subset L^1(0,\pi)$ com imersão contínua, segue que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \big|V(u) - V(v)\big| \leq & c\Big(\Big|\|u_x\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v_x\|^2_{L^2(0,\pi)}\Big| + \Big|\|u\|^2_{L^2(0,\pi)} - \|v\|^2_{L^2(0,\pi)}\Big| \\ & + \|u-v\|_{L^2(0,\pi)}\Big). \end{aligned}$$

Note também que

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2_{H^1(0,\pi)} \geq & \|u-v\|^2_{L^2(0,\pi)} \geq \Big|\|u\|_{L^2(0,\pi)} - \|v\|_{L^2(0,\pi)}\Big|^2, \\ \|u-v\|^2_{H^1(0,\pi)} \geq & \|u_x-v_x\|^2_{L^2(0,\pi)} \geq \Big|\|u_x\|_{L^2(0,\pi)} - \|v_x\|_{L^2(0,\pi)}\Big|^2 \end{aligned}$$

e, como as funções polinomiais e a função módulo serem contínuas, então

$$V(v) \longrightarrow V(u) \text{ quando } v \longrightarrow u \text{ em } H^1(0,\pi).$$

Além disso, temos pela Observação 1.4 $X^\alpha \subset H^1(0,\pi)$ com imersão contínua, logo existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|w\|_{H^1(0,\pi)} \leq c\|w\|_\alpha$$

para todo $w \in X^\alpha$. Logo

$$V(v) \longrightarrow V(u) \text{ quando } v \longrightarrow u \text{ em } X^\alpha.$$

Portanto, o funcional V é contínuo.

Com isso, temos que o funcional V definido por (2.23) é um funcional de Lyapunov para o sistema dinâmico $\{S(t) : t \geq 0\}$ sobre o espaço X^α dado por

$$S(t)u_0 := u(t,\cdot),$$

onde $u(t,\cdot)$ é a solução para a equação em (2.15) associada eo dado inicial u_0.

Veremos no Teorema 2.6 que a existência de um funcional de Lyapunov desempenhará um papel importante para o estudo do comportamento assintótico das soluções para as equação em (2.15) e (2.26) que são limitada, uma vez que é devido a existência deste funcional que vamos poder mostrar que as soluções limitadas convergem para algum equilíbrio.

2.3.3 Equações do tipo $u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x)$ com condição de fronteira de Neumann

Exemplo 2.5. [18, Lema 1] Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + f(x, u(t,x), u_x(t,x)), \ t > 0, \ x \in [0,\pi] \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \end{cases} \tag{2.26}$$

onde

$$f(x, u(t,x), u_x(t,x)) = bu(t,x) + g(x, u(t,x), u_x(t,x))$$

e

$$g = g(x,y,z) : [0,\pi] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma função limitada, continuamente diferenciável duas vezes e globalmente Lipschitz contínua em (y,z), ou seja, existem constantes L_1 e L_2 tais que

$$|g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| \leq L_1|y_1 - y_2| + L_2|z_1 - z_2|$$

e $b > 0$.

Teorema 2.4. *A equação em* (2.26) *é lentamente não dissipativa.*

Demonstração. Mostramos no Exemplo 1.3 que a equação (2.26) possui solução única em $(0,\infty) \times [0,\pi]$ para cada dado inicial $u_0 \in X^\alpha$. Consideremos agora a projeção de $u(t,\cdot) \in L^2(0,\pi)$ na direção de $\varphi_j(\cdot)$, onde u é a solução para a equação (2.26) e $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ é a base ortonormal de $L^2(0,\pi)$ formada por auto funções do operador A definido no Exemplo 1.1, podemos escrever

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j(t)\varphi_j(x),$$

onde $\hat{u}_j(t) = \langle u(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)}$.

Multiplicando a equação

$$u_t(t,\cdot) = u_{xx}(t,\cdot) + bu(t,\cdot) + g(x, u(t,\cdot), u_x(t,\cdot))$$

por φ_j no sentido de $L^2(0,\pi)$, obtém-se

$$\langle u_t(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)} = \langle u_{xx}(t,\cdot) + bu(t,\cdot), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle g(\cdot, u(t,\cdot), u_x(t,\cdot)), \varphi_j \rangle_{L^2(0,\pi)}$$

e, pela fato do operador A ser auto-adjunto, resulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle u(t,\cdot),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)} &= \langle -Au(t,\cdot),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle g(\cdot,u(t,\cdot),u_x(t,\cdot)),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)}\\ &= -\langle u(t,\cdot),A\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle g(\cdot,u(t,\cdot),u_x(t,\cdot)),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)}.\end{aligned}$$

Usando o fato de φ_j ser uma auto-função do operador A obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle u(t,\cdot),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)} &= -\langle u(t,\cdot),\lambda_j\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle g(\cdot,u(t,\cdot),u_x(t,\cdot)),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)}\\ &= -\lambda_j\langle u(t,\cdot),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle g(\cdot,u(t,\cdot),u_x(t,\cdot)),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)}\end{aligned}$$

Usando a definição de $\hat{u}_j(t)$ temos

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_j(t) = -\lambda_j\hat{u}_j(t) + \langle g(\cdot,u(t,\cdot),u_x(t,\cdot)),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)}. \tag{2.27}$$

Escrevendo agora

$$\langle g(\cdot,u(t,\cdot)),u_x(t,\cdot),\varphi_j)\rangle_{L^2(0,\pi)} = \langle g^e(u)(t,\cdot),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)},$$

onde $g^e(u)$ é o operador de Nemitskĭi para $g(u)$, e denotaremos por

$$\hat{g}_j(t) = \langle g^e(u)(t,\cdot),\varphi_j\rangle_{L^2(0,\pi)}, \tag{2.28}$$

segue-se por (2.27) que

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_j(t) = -\lambda_j\hat{u}_j(t) + \hat{g}_j(t). \tag{2.29}$$

Como a EDO (2.29) é linear não homogênea, então sua solução é dada por

$$\begin{aligned}\hat{u}_j(t) &= \hat{u}_j(0)e^{-\lambda_j t} + \int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds\\ &= \hat{u}_j(0)e^{-\lambda_j t} + \int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds + \int_{+\infty}^0 e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds - \int_{+\infty}^0 e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds\\ &= \hat{u}_j(0)e^{-\lambda_j t} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds - \int_t^0 e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds.\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}\hat{u}_j(t) &= \hat{u}_j(0)e^{-\lambda_j t} + e^{-\lambda_j t}\int_0^{+\infty} e^{\lambda_j s}\hat{g}_j(s)ds - \int_t^{+\infty} e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds\\ &= \hat{u}_j(0)e^{-\lambda_j t} + e^{-\lambda_j t}\int_0^{+\infty} e^{\lambda_j s}\hat{g}_j(s)ds + \int_{+\infty}^t e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds.\\ &= e^{-\lambda_j t}\left(\hat{u}_j(0) + \int_0^{+\infty} e^{\lambda_j s}\hat{g}_j(s)ds\right) + \int_{+\infty}^t e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds.\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\hat{u}_j(t) = \hat{u}_j^h(0)e^{-\lambda_j t} + \hat{u}_j^p(t), \tag{2.30}$$

onde

$$\hat{u}_j^p(t) = \int_\infty^t e^{-\lambda_j(t-s)}\hat{g}_j(s)ds$$

e

$$\hat{u}_j^h(0) = \hat{u}_j(0) + \int_0^{+\infty} e^{\lambda_j s}\hat{g}_j(s)ds.$$

Como $g^e(u)$ é limitado em $L^2(0,\pi)$ (uma vez que g é limitada), segue que $\hat{g}_j(t)$ é uniformemente limitada para todo $j \in \mathbb{N}_0$. consequentemente, a solução particular $\hat{u}_j^p(t)$ é uniformemente limitada para todo $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $\lambda_j < 0$. Por outro lado, sempre que λ_j é estritamente negativo e $\hat{u}_j^h(0) \neq 0$, então $\hat{u}_j^h(t) = \hat{u}_j^h(0)e^{-\lambda_j t}$ cresce exponencialmente quando t tende ao infinito.

A partir da decomposição de Fourier usando as auto projeções, concluímos que a norma em $L^2(0,\pi)$ da solução $u = u(t,x)$ de (2.30) é

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,\pi)} = \sum_{i=0}^{+\infty}(\hat{u}_i(t))^2.$$

Uma vez que temos $\lambda_j < 0$, pelo menos para $j = 0$, se tomarmos uma condição inicial u_0 tal que $\hat{u}_0^h(0) \neq 0$, então

$$|\hat{u}_0(t)| \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} +\infty.$$

Assim, a solução correspondente $u = u(t,\cdot)$ para essa condição inicial sofre *blow-up* no tempo infinito, concluindo a verificação deste exemplo. $\square$

Obsevação 2.3. Apesar da equação em (2.26) ser lentamente não-dissipativa, ainda podemos garantir a existência de um funcional de Lyapunov dado por

$$V(u) = \int_0^\pi H(x,u,u_x)dx$$

onde $H(x,u,p)$ é uma função suave em $[0,\pi]\times\mathbb{R}^2$ com com $H_{pp} > 0$ (veja H. Matano [13], T. I. Zelenyak [22]) satisfazendo a propriedade:

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) = -\int_0^\pi H_{pp}(x,u,u_x)u_t^2dx \leq 0. \tag{2.31}$$

Lema 2.3. *Para todos os casos em que $l > \sqrt{b}$ temos $\hat{u}_l(t)$ limitada.*

Demonstração. Temos para estes casos, $\lambda_j = l^2 - b > 0$ e, escrevendo a solução para

(2.26) como sendo

$$\hat{u}_l(t) = \hat{u}_l(0)e^{-\lambda_l t} + \int_0^t e^{-\lambda_l(t-s)}\hat{g}_l(s)ds, \tag{2.32}$$

onde $\hat{u}_l(0) = \langle u_0(\cdot), \varphi_l\rangle_{L^2(0,\pi)}$, então existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\big|\zeta(t)\big| \leq \frac{C_1}{\lambda_l}, \tag{2.33}$$

onde

$$\zeta(t) := \int_0^t e^{-\lambda_l(t-s)}\hat{g}_l(s)ds.$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
\hat{g}_l(s) &= \langle g(\cdot, u(s,\cdot), u_x(s,\cdot)), \varphi_l\rangle_{L^2(0,\pi)}\\
&\leq \|g(\cdot, u(s,\cdot), u_x(s,\cdot))\|_{L^2(0,\pi)}\|\varphi_l\|_{L^2(0,\pi)}\\
&\leq \|g\|_{L^\infty(0,\pi)}\pi = C_1
\end{aligned}$$

Assim,

$$\zeta(t) \leq C_1\int_0^t e^{-\lambda_l(t-s)}ds.$$

Fazendo a substituição $r = -\lambda_l(t-s)$ temos $dr = \lambda_l ds$, daí

$$\zeta(t) = C_1\int_{-\lambda_l t}^0 e^r\frac{1}{\lambda_l}dr = \frac{C_1}{\lambda_l}\int_{-\lambda_l t}^0 e^r dr = \frac{C_1}{\lambda_l}\big[1 - e^{-\lambda_l t}\big] \leq \frac{C_1}{\lambda_l},$$

ficando provado a afirmação. Portanto, em virtude de (2.32), (2.33) e do fato de $\hat{u}_l(0) = \langle u_0, \varphi_l\rangle_{L^2(o,\pi)} \leq \|u_0\|_{L^2(o,\pi)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\big|\hat{u}_l(t)\big| &\leq \big|\hat{u}_l(0)e^{-\lambda_l t}\big| + \big|\zeta(t)\big|\\
&\leq \big|\hat{u}_l(0)\big|\big|e^{-\lambda_l t}\big| + \frac{\Gamma}{\lambda_l}\\
&\leq \big|\hat{u}_l(0)\big| + \frac{\Gamma}{\lambda_l},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

como queríamos verificar. □

Lema 2.4. *Seja $u = u(t,x)$ uma grow-up solution para* (2.26) *em* $(0,+\infty)\times(0,\pi)$. *Então existe $T > 0$ tal que $u(t,0)$ não muda de sinal, i.e.,*

$$u(t,0) > 0,\ \forall t \geq T$$

ou

$$u(t,0) < 0,\ \forall t \geq T.$$

Demonstração. Escrevendo a *grow-up solution* na forma

$$u(t,x) = \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l(t)\varphi_l(x),$$

segue que

$$u(t,0) = \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l(t)\varphi_l(0).$$

Observando que

$$\varphi_0(0) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

e

$$\varphi_l(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \forall l \in \mathbb{N},$$

então

$$u(t,0) = \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l(t)c_l \tag{2.35}$$

onde $c_0 = \varphi_0(0)$ e $c_l = \varphi_l(0)$ para todo $l \in \mathbb{N}$.

Seja $u = u(t,x)$ uma *grow-up solution* para (2.26) em $(0,+\infty)\times(0,\pi)$. Observando a demonstração de que (2.26) é lentamente não dissipativo, vemos que

$$\hat{u}_l^p(t) = \int_{+\infty}^{t} e^{-\lambda_l(t-s)}\hat{g}_l(s)ds$$

é uniformemente limitado para todo $l \in \mathbb{N}_0$ tal que $\lambda_l < 0$ e, para algum $l < \sqrt{b}$ temos

$$|\hat{u}_l^h(t)| = e^{-\lambda_l t}\hat{u}_j^h(0) \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} +\infty. \tag{2.36}$$

Consideremos l_0 o menor elemento do conjunto $\{l \in \mathbb{N}_0 : l^2 > b\}$ e n_0 o maior elemento do conjunto $\{l \in \mathbb{N}_0 : l^2 < b\}$. Então segue por (2.36) que o comportamento assintótico de

$$u_{n_0}(t,0) := \sum_{l=0}^{n_0} \hat{u}_l(t)c_l$$

é dado pelo $\hat{u}_l$ com o maior crescimento. Assim, está garantido que

$$u_{n_0}(t,0) \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} \pm\infty$$

com crescimento do tipo exponencial.

Afirmação 1: Existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left| \sum_{l=l_0}^{+\infty} \hat{u}_l(t) c_l \right| \leq M, \; \forall t \geq 0.$$

De fato, observando que podemos escrever

$$\hat{u}_l(t) = \hat{u}_l(0) e^{-\lambda_l t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \hat{g}_l(s) ds$$

e que para todo $m \geq l_0$ temos

$$S_n(t) := \left| \sum_{l=l_0}^{m} \hat{u}_l(t) c_l \right| \leq \sum_{l=l_0}^{m} \left| \hat{u}_l(0) \right| e^{-\lambda_l t} + \sum_{l=l_0}^{m} \left| \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \hat{g}_l(s) ds \right|,$$

é suficiente provarmos que existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{l=l_0}^{+\infty} \left| \hat{u}_l(0) \right| e^{-\lambda_l t} + \sum_{l=l_0}^{+\infty} \left| \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \hat{g}_l(s) ds \right| \leq M, \; \forall t \geq 0. \tag{2.37}$$

Observando que

$$|u(0,0)| = \left| \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l(0) c_l \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l(0) \right|,$$

então $\hat{u}_l(0) \longrightarrow 0$ quando $l \longrightarrow +\infty$ (uma vez que a série $\sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l(0)$ converge) e, portanto, existe $r_1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $m \geq l_0$ temos

$$\sum_{l=l_0}^{m} \left| \hat{u}_l(0) \right| e^{-\lambda_l t} \leq r_1 \sum_{l=l_0}^{m} e^{-\lambda_l t}. \tag{2.38}$$

Tomando $l_1 := l_0^2$ e $m_1 := l_1 + m - l_0$, temos

$$\sum_{l=l_0}^{m} e^{-\lambda_l t} \leq \sum_{l=l_1}^{m_1} e^{-(l-b)t},$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{l=l_0}^{m} \left(\frac{1}{e^t} \right)^{\lambda_l} \leq \sum_{l=l_1}^{m_1} \left(\frac{1}{e^t} \right)^{l-b}. \tag{2.39}$$

Usando o fato de que para todo $t > 0$ temos $\left(\dfrac{1}{e^t}\right) \in (0,1)$, então

$$\sum_{l=l_1}^{m_1} \left(\frac{1}{e^t}\right)^{l-b} \leq \sum_{l=l_1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^t}\right)^{l-b} = \frac{e^{-(l_1-b)t}}{1-e^{-t}} \leq e^{-(l_1-b)t}. \tag{2.40}$$

Assim, segue por (2.38), (2.39), (2.40) e pelo teste da comparação

$$\sum_{l=l_0}^{+\infty} \left|\hat{u}_l(0)\right| e^{-\lambda_l t} \leq r_1 e^{-(l_1-b)t}, \ \forall t > 0. \tag{2.41}$$

Usando a estimativa (2.33) obtemos

$$\left| \int_0^t e^{-\lambda_l(t-s)} \hat{g}_l(s) ds \right| \leq \frac{C_1}{\lambda_l}, \ \forall l \geq l_0, \ \forall t > 0. \tag{2.42}$$

Assim, para todo $m > l_0$, vale a estimativa

$$\sum_{l=l_0}^{m} \left| \int_0^t e^{-\lambda_l(t-s)} \hat{g}_l(s) ds \right| \leq \sum_{l=l_0}^{m} \frac{C_1}{l^2-b}, \ \forall t > 0.$$

Observando também que a série $\sum_{l=l_0}^{+\infty} \frac{C_1}{l^2-b}$ converge, segue por (2.42) que

$$\sum_{l=l_0}^{+\infty} \left| \int_0^t e^{-\lambda_l(t-s)} \hat{g}_l(s) ds \right| \leq \sum_{l=l_0}^{+\infty} \frac{C_1}{\lambda_l}, \ \forall t > 0. \tag{2.43}$$

Considerando

$$M := r_1 + \sum_{l=l_0}^{+\infty} \frac{C_1}{\lambda_l},$$

fica provado a Afirmação 1.

Consideremos agora o possível caso em que $l^2 = b$. Neste caso temos

$$\begin{aligned} \hat{u}_l(t) &= \hat{u}_l(0) + \int_0^t \hat{g}_l(s) ds \\ &\leq \hat{u}_l(0) + C_1 t \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\hat{u}_l(0) - C_1 t \leq \hat{u}_l(t) \leq \hat{u}_l(0) + C_1 t.$$

Assim, segue que $\hat{u}_l$ é limitado linearmente quando $l^2 = b$. Portanto, denotando por

$\hat{u}_i$ o *mode* [1] com o maior crescimento, temos o comportamento assintótico de $u(t,0)$ é dado por $\hat{u}_i$, ou seja,

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,0) = \lim_{t\to+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l(t)\varphi(0) = \lim_{t\to+\infty} \hat{u}_i(t)\varphi(0) = \pm\infty.$$

Assim, existe $T > 0$ tal que

$$u(t,0) > 0,\ \forall t \geq T$$

ou

$$u(t,0) < 0,\ \forall t \geq T.$$

□

Teorema 2.5. *Considere uma solução grow-up $u = u(t,x)$ de (2.26) e sua trajetória normalizada $\dfrac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|}$. Uma condição necessária e suficiente para a referida trajetória convergir para φ_j^ι em $L^2(0,\pi)$ é que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\hat{u}_j^2(t)}{\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \hat{u}_l^2(t)} = 1,$$

e o sinal de $\varphi_j^\iota(0)$ deve ser o mesmo que $u(t,0)$ para todo $t \in (T,+\infty)$, para algum $T > 0$, onde $\varphi_j^\iota := \iota\varphi_j$ e $\iota \in \{-1,1\}$.

Demonstração. Primeiro, supondo que

$$\frac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|} \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} \varphi_j^\iota \text{ em } L^2(0,\pi), \tag{2.44}$$

mostraremos que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\hat{u}_j^2(t)}{\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l^2(t)} = 1$$

e que o sinal de $\varphi_j^\iota(0)$ deve ser o mesmo que $u(t,0)$ para todo $t \in (T,+\infty)$, para algum $T > 0$, onde $\varphi_j^\iota := \iota\varphi_j$ e $\iota \in \{-1,1\}$. De fato, observando que

[1] A termologia *mode*, está sendo usada para manter parte da notação usada em [18] e dá um nome aos $\hat{u}_j$'s.

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|}-\varphi_j^{\iota}(\cdot)\right\|^2 &= 1-2\left\langle\frac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|},\pm\varphi_j(\cdot)\right\rangle+1\\ &= 2\pm 2\left\langle\frac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|},\varphi_j(\cdot)\right\rangle\\ &= 2\pm\frac{2}{\|u(t,\cdot)\|}\langle u(t,\cdot),\varphi_j(\cdot)\rangle\\ &= 2\pm\frac{2\hat{u}_j(t)}{\left(\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}\hat{u}_l^2(t)\right)^{1/2}},\end{aligned}$$

então

$$\lim_{t\to+\infty}\left\|\frac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|}-\varphi_j^{\iota}(\cdot)\right\|^2 = 2\pm 2\lim_{t\to+\infty}\frac{\hat{u}_j(t)}{\left(\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}\hat{u}_l^2(t)\right)^{1/2}}. \tag{2.45}$$

Assim, usando a convergência (2.44), tem-se que

$$\lim_{t\to+\infty}\left\|\frac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|}-\varphi_j^{\iota}(\cdot)\right\|^2=0.$$

Segue desta última igualdade e da identidade 2.45 que

$$2\lim_{t\to+\infty}\frac{\hat{u}_j(t)}{\left(\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}\hat{u}_l^2(t)\right)^{1/2}}=\pm 2.$$

Portanto

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\hat{u}_j^2(t)}{\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}\hat{u}_l^2(t)}=1.$$

Usando a Observação 2.4, existe $T>0$ tal que $u(t,0)$ tem o mesmo sinal para todo $T<t<\infty$. Provemos agora que $\varphi_j^{\iota}(0)$ tem o mesmo sinal de $u(t,0)$ para todo $t>T$. Suponha por contradição que $u(t,0)>0$ e $\varphi_j^{\iota}(0)<0$ para todo $t>T$. Como $u(t,\cdot)$ e $-\varphi_j(\cdot)$ são contínuas em $x=0$ [2], existe $\varepsilon>0$ tal que

$$u(t,x)>0 \text{ e } -\varphi_j(x)<0,\ \forall x\in[0,\varepsilon] \text{ e } t>T.$$

Logo existem $u_1=\min\{u(t,x): x\in[0,\varepsilon]\}$ e $-u_2=\max\{-\varphi(x): x\in[0,\varepsilon]\}$. Assim,

[2] A continuidade da solução segue da imersão contínua do espaço X^{α} em $C^1(0,\pi)$ e da definição das φ_l's.

pata $t > T$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left| \frac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|} - (-\varphi_j(x)) \right|^2 dx &\geq \int_0^\pi \left| \frac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|} - (-\varphi_j(x)) \right|^2 dx \\
&\geq \int_0^\pi \left| \frac{u_1 + u_2\|u(t,\cdot)\|}{\|u(t,\cdot)\|} \right|^2 dx \\
&= \varepsilon u_2^2,
\end{aligned}$$

que é um absurdo, uma vez que

$$\frac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} -\varphi_j(\cdot) \text{ em } L^2(0,\pi).$$

O caso $u(t,0) < 0$ e $\varphi(0) > 0$ é análogo.

Reciprocamente, supondo que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\hat{u}_j^2(t)}{\sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l^2(t)} = 1 \tag{2.46}$$

e que o sinal de $\varphi_j^\iota(0)$ deve ser o mesmo que $u(t,0)$ para todo $t \in (T,\infty)$, para algum $T > 0$, mostremos que

$$\frac{u(t,\cdot)}{\|u(t,\cdot)\|} \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} \varphi_j^\iota \text{ em } L^2(0,\pi).$$

De fato, na Observação 2.3 mostramos que $\hat{u}_l(t)$ é limitado sempre que $l > \sqrt{b}$ para todo $t \geq 0$ e, na verificação do Exemplo 2.5, que para algum $j < \sqrt{b}$ temos

$$|\hat{u}_j(t)| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Suponha que $\hat{u}_j$ é o único *mode* tal que $|\hat{u}_j(t)| \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$, i.e., $\hat{u}_m$ é limitado para todo $m \neq j$. Se este é o caso, então temos por (2.46) que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\hat{u}_j^2(t)}{\sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l^2(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\hat{u}_j^2(t)}{\hat{u}_j^2(t)} = 1$$

e

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\hat{u}_m(t)}{\left(\sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l^2(t) \right)^{1/2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\hat{u}_m(t)}{\hat{u}_j(t)} = 0, \, \forall m \neq j.$$

Suponhamos agora que a *grow-up solution* $u(t,\cdot)$ tem mais de um *mode* cujo módulo tende ao infinito quando $t \longrightarrow \infty$ e denotemos por $\hat{u}_i$ o de maior crescimento. Suponha também que $b \neq 0$ para qualquer inteiro l. Temos ainda que, para cada inteiro l

$$\hat{u}_l(t) = \hat{u}_l^h(t) + \hat{u}_l^p(t),$$

onde

$$\hat{u}_l^h(t) = \hat{u}_l^h(0)e^{(b-l^2)t},$$

$$\hat{u}_l^p(t) = \int_{+\infty}^{t} e^{(b-l^2)(t-s)}\hat{g}_l(s)ds$$

e

$$\hat{u}_l^h(0) = \hat{u}_l(0) + \int_0^{+\infty} e^{(l^2-b)}\hat{g}_l(s)ds.$$

Além disso, como g é limitado por Γ, obtemos por (2.33) $\left|\hat{u}_l^p(t)\right| < \dfrac{\Gamma}{\left|b-l^2\right|}$. Logo o crescimento para infinito é determinado pelos *mode*'s $\hat{u}_j^h(t)$ cujo módulo tende ao infinito quando t tende ao infinito.

Pelo que foi discutido anteriormente, dado qualquer *mode* $\hat{u}_j$ não limitado e diferente do $\hat{u}_i$, temos $i < j$. Como $\hat{u}_i$ apresenta um crescimento exponencial maior que $\hat{u}_j$, daí resulta que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\hat{u}_j(t)}{\hat{u}_i(t)} = 0$$

e temos os limites

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\hat{u}_j(t)}{\left(\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l^2(t)\right)^{1/2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\hat{u}_j(t)}{\hat{u}_i(t)} = 0,$$

e

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\hat{u}_i^2(t)}{\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \hat{u}_l^2(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\hat{u}_i^2(t)}{\hat{u}_i^2(t)} = 1.$$

Considere agora o caso em que $b = l^2$ para algum l inteiro e, recordando que

$$\hat{u}_l(t) = \left(\hat{u}_l(0) + \int_0^{+\infty} e^{(l^2-b)}\hat{g}_l(s)ds\right)e^{(b-l^2)t} + \int_{+\infty}^{t} e^{(b-l^2)(t-s)}\hat{g}_l(s)ds.$$

Substituindo $b = l^2$ e usando o fato de $|\hat{g}_l(s)| \leq C_1$, onde C_1 é uma constante obtida pela limitação da função g do problema (2.5) e usando a definição de $\hat{g}_l$ que é dada por (2.28), temos

$$\begin{aligned}
\hat{u}_j(t) &\leq \hat{u}_l(0) + \int_0^{+\infty} C_1 ds + \int_{+\infty}^{t} C_1 ds \\
&= \hat{u}_l(0) + \int_t^{+\infty} C_1 ds + \int_0^{t} C_1 ds - \int_t^{+\infty} C_1 ds \\
&= \hat{u}_l(0) + tC_1.
\end{aligned}$$

Logo

$$\hat{u}_l(0) - tC_1 \leq \hat{u}_l(t) \leq \hat{u}_l(0) + tC_1.$$

Ou seja, $\hat{u}_l(t)$ é limitado linearmente em t. Se $\hat{u}_i$ é um *mode* ilimitado com $i < l$, então temos

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\hat{u}_l(t)}{\hat{u}_i(t)} = 0,$$

uma vez que, sendo $i < l$, temos $-\lambda_l = b - l^2 < b - i^2 = \lambda_i$, daí resulta

$$\frac{e^{-\lambda_l t}}{e^{-\lambda_i t}} \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

Assim, por (2.45) , concluímos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\hat{u}_j^2(t)}{\|u(t, \cdot)\|^2} = 1$$

se e, somente se $\hat{u}_j$ tem mair crescimento de todos os $\hat{u}_l$'s, $l \in \mathbb{N}_0$. Logo

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| \frac{u(t, \cdot)}{\|u(t, \cdot)\|} - \varphi_j^{\iota} \right\| = 0,$$

se e, somente se $\varphi_j^{\iota}(0)$ tem o mesmo sinal de $u(t, 0)$ para todo $t \in (T, +\infty)$, para algum $T > 0$. □

Teorema 2.6. *Considere a equação em* (2.26) *e uma condição inicial* $u_0 \in X^\alpha$, *onde* $\alpha \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$. *Então a correspondente solução* $u(t, \cdot)$ *converge para algum equilíbrio limitado quando* $t \longrightarrow +\infty$ *ou* $u(t, \cdot)$ *não pode ficar limitado em qualquer subconjunto de* X^α *para todo tempo, ou seja, dada uma bola* $B(0, R) \subset X^\alpha$, *existe* $t^* > 0$ *tal que* $\|u(t^*, \cdot)\|_{X^\alpha} > R$.

Demonstração. Suponha por absurdo que nenhuma das condições se verifica, ou seja, $u(t, \cdot)$ não converge para um equilíbrio e existem $B(0, R) \subset X^\alpha$ e $T > 0$ tal que $\|u(t^*, \cdot)\|_{X^\alpha} < R$ para todo $t > T$. Neste caso, existe uma bola suficientemente grande $B^*(0, R^*) \subset X^\alpha$, dependendo de R e T tal que

$$\|u(t, \cdot)\|_{X^\alpha} < R^*, \forall t \geq 0.$$

Observe que para todo $\lambda \in \rho(A)$, o operador resolvente de A é compacto. Com efeito, dado $\lambda \in \rho(A)$ então

$$(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow D(A)$$

e, sendo

$$D(A) \subset L^2(0,\pi)$$

com inclusão compacta, então a aplicação

$$\psi := I \circ (\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi)$$

leva subconjuntos fechados e limitados de $L^2(0,\pi)$ em compactos do espaço $L^2(0,\pi)$. Portanto o operador resolvente $\rho(A)$ é compacto. Recorde também que A e g^e estão nas hipóteses do Corolário 1.3, a função $k = k(t)$ das hipóteses do Corolário 1.3 é constante (veja (1.30)) e, a solução $u(t,\cdot)$ é limitada em X^α, então podemos aplicar o Teorema 1.11 para obtermos o conjunto

$$\{S(t)u_0 : t \geq 0\}$$

compacto, onde

$$S(t)u_0 := u(t,\cdot) = u(t; u_0, 0).$$

Além disso, temos a existência de um funcional de Lyapunov (veja a Observação 2.3) para o sistema dinâmico

$$\{S(t) : t \geq 0\}$$

dado por

$$S(t)u_0 := u(t,\cdot) = u(t; u_0, 0), \ \forall u_0 \in X^\alpha.$$

Portanto, podemos aplicar o Princípio da invariância de LaSalle (veja o Teorema 2.1) para concluir que a órbita $u(t,\cdot)$ através de u_0 deve convergir para algum equilíbrio de (2.26) contido em $B^*(0,R^*)$, contrariando nossa hipótese inicial. $\square$

Note que o Exemplo 2.4 possui propriedades semelhante as encontradas no Exemplo 2.5. Por exemplo, pode-se reproduzir uma argumentação análoga a usada para obtermos a desigualdade (2.33) e obtendo este último resultado para o Exemplo 2.4.

Capítulo 3

Considerações finais

Com os resultados estudados no Capítulo 2 uma questão que podemos tratar agora é quanto a existência de conjuntos assintóticos de estados, conjuntos estes que desempenham um papel idem ao de atrator global para sistema dinâmico provenientes de problemas dissipativos; a saber, veja a definição abaixo.

Definição 3.1 (Atrator global não compacto)**.** Seja X um espaço de Banach. Dizemos que um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ é um atrator global não compacto para o sistema dinâmico $\{S(t) : t \geq 0\}$ se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\mathcal{A}$ é fechado;

(ii) $\mathcal{A}$ é invariante;

(iii) $\mathcal{A}$ atrai todo subconjunto limitado de X.

A existência e caracterização de atratores para problemas lentamente não dissipativos é estudado nos artigos [2] e [18], este é um tema que devemos estudar para dar continuidade a este trabalho, bem como, a questão à cerca da continuidade desses atratores, que são não compactos, em relação a parâmetros do modelo em questão.

Com relação ao sistema dinâmico $\{S(t) : t \geq 0\}$ proveniente de (2.26), segue por J. Pimentel e C. Rocha [18] que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_f^c \cup \mathcal{A}_f^\infty,$$

onde $\mathcal{A}_f^c$ é o maior subconjunto compacto invariante contido em alguma bola suficientemente grande $B \subset X^\alpha$ e $\mathcal{A}_f^\infty$ é um subconjunto não limitado. O subconjunto limitado é composto do conjunto das soluções em $\mathcal{A}$ que permanecem delimitadas no espaço de estado X^α para todo $t \geq 0$. Portanto, podemos aplicar a teoria padrão para equações dissipativas e concluir que o subconjunto limitado $\mathcal{A}_f^c$ é composto pelo conjunto dos equilíbrios limitados E_f^c e suas órbitas heteroclinicas conectadas (veja J. Hale [10]). O subconjunto não limitado $\mathcal{A}_f^\infty$ contém o conjunto dos equilíbrios e o subconjunto de soluções crescentes. O conjunto dos equilíbrios no infinito[1] E_f^∞ e das *grow-up solutions*.

[1]Para mais detalhes sobre os equilíbrios no infinito, veja J. Pimentel e C. Rocha [18].

Referências Bibliográficas

[1] N. Ben-Gal, *Grow-up solutions and heteroclinics to infinity for scalar parabolic PDEs.* Thesis (Ph.D.), Brown University (2010).

[2] N. Ben-Gal, *Non-compact global attractors for slowly non-dissipative PDEs I: the asymptotics of bounded and grow-up heteroclinics.* Preprint (2011).

[3] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, (2010).

[4] P. Brunovskỳ, B. Fiedler, *Connecting orbits in scalar reaction diffusion equations*, Dynamics Reported 1, pp. 57 – 89, Springer, (1988).

[5] A. Carvalho, J. Pimentel, *Autonomous and non-autonomous unbounded attractors under perturbations*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics (2017) to appear.

[6] V. V. Chepyzhov and A. Yu. Goritskii, *Unbounded attractors of evolution equations, Properties of Global Attractors of Partial Dierential Equations*, Adv. Soviet Math. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992), 85–128.

[7] R. Costin, *Sturm-Liouville Theory*, 23 de março, (2015).

[8] R. Czaja, *Diferential Equations with Sectorial Operator*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego ul. Bankowa 12B, 40-007 Katowice, (2002).

[9] B. Fiedler, C . Rocha, *Heteroclinic Orbits of Semilinear Parabolic Equations*, Differ. Equ. 125(1), 239 – 281 (1996).

[10] J. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 25. American Mathematical Society, Providence (1988)

[11] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 840. Springer, Berlin (1981).

[12] E. Lima, *Espaços métricos*. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. Springer, Berlin (1981).

[13] H. Matano, *Asymptotic behavior of solutions of semilinear hear equations on S^1. Nolinear diffusion Equations and their Equibrium States II*, (Berkeley, CA, 1986). Math. Sci. Res. Inst., Publications, vol 13. Springer, New York (1988). Dynam. Syst. 3(1), 1 – 24 (1997).

[14] H. Matano, K. Nakamura, *The global attractor of semilinear parabolic equations on S^1*. Discrete Contin. Dynam. Syst. 3(1), 1 – 24 (1997).

[15] A. Neto, *Funções de uma variável complexa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[16] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44. Springer, New York (1983).

[17] J. Pimentel, *Asymptotic behavior of slowly non-dissipative systems.* Thesis (Ph.D.), Instituto Superior Técnico – Universidade de Lisboa (2014).

[18] J. Pimentel, C. Rocha, *A Permutation Related to Non-compact Global Attractors for Slowly Non-dissipative Systems*, Journal of Dynamics and Differential Equations 28(1), 1–28, Springer, (2016).

[19] L. Pires, *Rate of convergence of attractors for abstract semilinear problems.* Thesis (Ph.D.), Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, (2016).

[20] C. Rocha, *Properties of the attractor of a scalar parabolic PDE*, J. Dynam. Differ. Equ. 3(4), 575 – 591 (1991).

[21] J. Silva, *Aplicações de semigrupos em sistemas de reação-difusão e a existência de ondas viajantes.* Dissertação, Universidade de São Paulo, agosto de (2010).

[22] T. I. Zelenyak, *Stabilization of solutions of boundary value prolems for a second order parabolic equation with one space variable.* Diferential equations 4(1), 34–45, (1968).