Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

As Desigualdades de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood

Jonathas Phillipe de Jesus Almeida

João Pessoa – PB
Abril de 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

As Desigualdades de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood

por

Jonathas Phillipe de Jesus Almeida

sob a orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

João Pessoa – PB
Abril de 2016

As Desigualdades de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood

por

Jonathas Phillipe de Jesus Almeida [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração:Análise Funcional

Aprovada em 04 de abril de 2016.

Banca Examinadora:

Daniel Marinho Pellegrino

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino – UFPB (orientador)

Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo– UFCG
(Examinador Externo)

Nacib Gurgel Albuquerque

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior durante a elaboração desta dissertação.

A447d Almeida, Jonathas Phillipe de Jesus.
As desigualdades de Bohnenblust-Hille e Hardy-Littlewood/ Jonathas Phillipe de Jesus Almeida.- João Pessoa, 2016.
60f.
Orientador: Daniel Marinho Pellegrino
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Operadores absolutamente somantes. 3. Desigualdade de Bohnenblust-Hille. 4. Desigualdade de Hardy-Littlewood.

UFPB/BC CDU: 51(043)

A minha mãe, Rosemeire de Jesus.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pelo dom da vida, e por fazer de cada amanhecer fonte de luz e esperança.

A minha mãe, Rosemeire de Jesus, por estar incondicionalmente ao meu lado, com demonstrações de amor desmedidas. Ao meu pai, Jackson Almeida, por todo o apoio.

Aos meus irmãos, Ewerton de Jesus e Jamerson Almeida, pelo companheirismo, confiança e carinho.

A minha madrinha, Jucilene Santana Queiroz, pelas palavras encorajadoras, pelo carinho, confiança.

A todas as pessoas de minha família que estão em Barrocas e em Feira de Santana, que sempre acreditaram que eu poderia chegar aqui.

Ao meu orientador Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino, por todo ensinamento, paciência e disponibilidade em me atender.

Aos professores de graduação e pós-graduação. Especialmente a Everaldo Medeiros, Uberlândio Severo, Pedro Venegas, Aurélio Menegon, Maurício Ferreira, Fabíola Pedreira e Jean Fernandes .

A todos os meus amigos de graduação e pós-graduação. Em especial, Aline Moreira, Elisângela Alves, Edna Fonseca, Elianai Viana, Camila Marques, Renato Bezerra, Sally Andria, Isabelly, Lisiane Rezende e Djair Paulino.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho abordaremos duas desigualdades clássicas, a saber, a Desigualdade de Bohnenblust-Hille e a Desigualdade de Hardy- Littlewood. A primeira, surgiu como ferramenta para o estudo de problemas relacionados a séries de Dirichlet e é uma generalização para formas multilineares da Desigualdade 4/3 de Littlewood. A segunda consiste de uma generalização da Desigualdade de Bohnenblust-Hille, produzida pela substituição de c_0 por ℓ_p.

Palavras-chave: Operadores absolutamente somantes, Desigualdade de Bohnenblust-Hille, Desigualdade de Hardy-Littlewood.

Abstract

In this study we show two classical inequalities, namely Bohnenblust-Hille inequality and Hardy-Littlewood inequality. The first one, conceived as a tool for the study of problems related to Dirichlet series, is a generalization of Littlewood's 4/3 inequality to multilinear forms. The second is a generalization of Bohnenblust-Hille inequality, produced by the replacement of c_0 with ℓ_p.

Keywords: Absolutely summing operators, Bohnenblust-Hille inequality , Hardy-Littlewood inequality.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

• $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais;

• $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos;

• $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

• X e Y denotam espaços vetoriais ou espaços vetoriais normados;

• E, F, E_i, F_i denotam espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$;

• $\ell_p(E)$ denota o espaço das sequências absolutamente p–somáveis que tomam valores em E

• $\ell_\infty(E)$ denota o espaço das sequências limitadas de E;

• Para $1 \leq p \leq \infty$, $\quad \ell_p^N := \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p;\ x_n = 0 \text{ para todo } n \geq N+1\}$;

• Para $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in [1, \infty]^m$ e um espaço de Banach X,

$$\ell_{\mathbf{p}}(X) := \ell_{p_1}(\ell_{p_2}(\ldots(\ell_{p_m}(X))\ldots));$$

• B_X denota a bola fechada do espaço normado X com centro na origem e raio 1;

• X' denota o dual topológico do espaço normado X;

• Usaremos o termo "operador" com o mesmo sentido de função;

• $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ denota o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores multilineares de $E_1 \times \ldots \times E_n$ em F;

- $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ denota o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores multilineares contínuos de $E_1 \times \ldots \times E_n$ em F;

- $L(^nE; F)$ denota o espaço $L(\underbrace{E, \ldots, E}_{n}; F)$;

- $\mathcal{L}(^nE; F)$ denota o espaço $\mathcal{L}(\underbrace{E, \ldots, E}_{n}; F)$;

- Denotamos por q^* o conjugado de $q \in [1, +\infty]$, isto é, $q^* = \frac{q}{q-1}$;

- $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ denotam sigma-álgebras sobre um conjunto $X \neq \emptyset$;

- μ, ν denotam medidas numa sigma-álgebra;

- $\overline{\mathbb{R}}$ denota a reta estendida, isto é, $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$;

- I denota o intervalo fechado $[0, 1]$.

Introdução

Em 1930, o matemático britânico John Edensor Littlewood provou que existe uma constante $L_{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |T(e_i, e_j)|^{4/3} \right)^{3/4} \leq L_{\mathbb{K}} \|T\|, \tag{1}$$

para toda forma bilinear $T : \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e para todo inteiro positivo n.

Esse resultado foi rapidamente estendido para estruturas mais gerais. O primeiro passo foi dado por Frederick Bohnenblust e Einar Hille, que em 1931 publicaram uma generalização do resultado para formas multilineares (veja [7]) apresentando a seguinte versão: para cada inteiro positivo $m \geq 1$, existe uma constante $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \|T\|, \tag{2}$$

para cada forma m–linear contínua $T : \ell_\infty^n \times \ldots \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e para todo inteiro positivo n.

Três anos depois, em 1934, G.H. Hardy e J.E. Littlewood (veja [13]) provaram uma versão da desigualdade (1) para espaços ℓ_p e, em seguida, Praciano–Pereira estudou em [19] o efeito produzido pela substituição de ℓ_∞^n por ℓ_p na desigualdade de Bohnenblust-Hille, obtendo uma generalização deste resultado para formas multilineares sobre ℓ_p, conhecida como Desigualdade de Hardy–Littlewood, a qual nos garante que, para cada inteiro $m \geq 2$ e $2m \leq p \leq \infty$, existe uma constante $C_{m,p}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}} \right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}} \|T\|, \tag{3}$$

para toda forma m-linear contínua $T : \ell_p^n \times \ldots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e cada inteiro positivo n.

Usando uma generalização da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund, facilmente se verifica que os expoentes são ótimos. Quando $p = \infty$, considerando,

$$\frac{2mp}{mp + p - 2m} = \frac{2m}{m+1},$$

recuperamos a desigualdade de Bohnenblust–Hille.

Os melhores limites superiores conhecidos para a constante em (3) eram da forma $(\sqrt{2})^{m-1}$. Em [5] foi mostrado que $(\sqrt{2})^{m-1}$ pode ser melhorada para

$$C_{m,p}^{\mathbb{R}} \leq \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2m(m-1)}{p}} \left(B_{\mathbb{R},m}^{mult}\right)^{\frac{p-2m}{p}},$$

no caso real, e para

$$C_{m,p}^{\mathbb{C}} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2m(m-1)}{p}} \left(B_{\mathbb{C},m}^{mult}\right)^{\frac{p-2m}{p}},$$

no caso complexo. Estas estimativas são muito melhores que $(\sqrt{2})^{m-1}$, pois de [6, 18], $B_{\mathbb{K},m}^{mult}$ tem crescimento sublinear. Além disso, essas estimativas dependem de m, p e considera informações mais sutis.

No *Capítulo* 1, estudamos os principais resultados necessários para o desenvolvimento desta dissertação, a saber: a desigualdade de Khinchin (caso linear e multilinear), indispensável para o desenvolvimento da teoria dos capítulos subsequentes e introduzimos uma ferramenta poderosa no estudo das desigualdades, que é a desigualdade de Hölder para espaços $\ell_{\mathbf{p}}$, que embora remonta à década de 1960, só teve sua importância revelada muito recentemente.

O *Capítulo* 2 é dedicado à desigualdade de Bohnenblust-Hille, a qual foi concebida por Fredérick Bohnenblust e Einar Hille como ferramenta para o estudo de problemas relacionados à séries de Dirichlet e uma generalização da famosa desigualdade de Littlewood 4/3. Abordamos ainda neste capítulo uma versão mais geral deste resultado, que pode ser encontrada em [4].

No *Capítulo* 3, estudamos um pouco sobre a desigualdade de Hardy-Littlewood, com enfoque principal na demonstração deste resultado e em algumas estimativas superiores para a constante associada. Neste mesmo capítulo estudamos a otimalidade do expoente da desigualdade de Hardy–Littlewood.

Finalmente, o *Apêndice* 3.2 é dedicado para alguns resultados auxiliares .

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos algumas estimativas fundamentais e suas respectivas notações, que serão necessárias para o desenvolvimento desta dissertação. As principais referências para este capítulo foram [1], [2], [11] e [12].

1.1 Desigualdades clássicas: Hölder e Minkowski

1.1.1 Para integrais

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $0 < p < \infty$ e $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f \in L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $g \in L_{p*}$, então $fg \in L_1$ e*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p*}.$$

Demonstração. O caso $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_{p*} = 0$ é simples. Suponhamos então que $\|f\|_p, \|g\|_{p*} \neq 0$. Primeiro é conveniente mostrar que dados a e b positivos, temos

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{p*}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{p*}. \tag{1.1}$$

Para tanto, considere, para cada $0 < \alpha < 1$, a função $f = f_\alpha : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t$. Note que f tem um máximo em $t = 1$ e, portanto, $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$ para todo $t > 0$. Fazendo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$ obtém-se (1.1). Claramente, (1.1) continua válida se $a = 0$ ou $b = 0$. Tomando

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \quad \text{e} \quad b = \frac{|f(x)|^{p*}}{\|f\|_{p*}^{p*}}$$

em (1.1), segue o resultado. ∎

Corolário 1.2. Se $f \in L_p$, então

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int |fg|\,d\mu;\ \|g\|_q \leq 1\right\} = \sup\left\{\left|\int fg\,d\mu\right|;\ \|g\|_q \leq 1\right\},$$

e o supremo é atingido.

Demonstração. O resultado é trivialmente satisfeito se $f = 0$. Agora, suponha que $f \neq 0$. Pelo Teorema 1.1, temos

$$\left|\int fg\,d\mu\right| \leq \int |fg|\,d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q, \quad \text{onde} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Em particular, se $\|g\|_q \leq 1$, segue que

$$\left|\int fg\,d\mu\right| \leq \int |fg|\,d\mu \leq \|f\|_p,$$

e, portanto,

$$\|f\|_p \geq \sup\left\{\int |fg|\,d\mu;\ \|g\|_q \leq 1\right\} \geq \sup\left\{\left|\int fg\,d\mu\right|;\ \|g\|_q \leq 1\right\}.$$

Agora, seja $h = |f|^{p-1}\overline{\mathrm{sgn}(f)}$, onde

$$\mathrm{sgn}(f) = \begin{cases} \frac{f}{|f|}, & \text{se } f \neq 0; \\ 0, & \text{se } f = 0. \end{cases}$$

Como $f \neq 0$, temos $h = |f|^{p-1} \cdot |f|^{-1} \cdot \bar{f}$. Consequentemente,

$$fh = |f|^{p-1}|f|^{-1}f\bar{f} = |f|^{p-2}|f|^2 = |f|^p,$$

e

$$|h|^q = (|f|^{p-1} \cdot |f|^{-1} \cdot |\bar{f}|)^q = |f|^{q(p-1)} \cdot |f|^{-q} \cdot |f|^q = |f^{q(p-1)}| = |f|^p.$$

Portanto,

$$fh = |f|^p = |h|^q,$$

e assim,

$$\int |h|^q\,d\mu = \int |f|^p\,d\mu < \infty,$$

ou seja, $h \in L_q$ e

$$\|h\|_q = \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\|f\|_p^p\right)^{1/q} = \|f\|_p^{p/q}.$$

Definindo $g = \frac{h}{\|h\|_q}$, temos $\|g\|_q = 1$. Assim,

$$\int fg\,d\mu = \int |fg|\,d\mu = \int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p/q}}\,d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p/q}} = \|f\|_p.$$

Portanto,

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int |fg|\,d\mu;\ \|g\|_q \leq 1\right\} = \sup\left\{\left|\int fg\,d\mu\right|;\ \|g\|_q \leq 1\right\}$$

e o supremo é atingido. ■

Teorema 1.3 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f, g \in \mathcal{L}_p(X, \mathcal{A}, \mu)$, então $f + g \in \mathcal{L}_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.2}$$

1.1.2 Para sequências

Para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$\ell_p = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} : a_i \in \mathbb{K} \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty\}.$$

Considerando o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ das partes de $\mathbb{N}$ e a medida de contagem μ_c em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, não é difícil verificar que ℓ_p é na verdade o espaço $L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$. Neste caso, as operações usuais de funções se transformam nas operações usuais de sequências e a norma $\|\cdot\|_p$ se transforma em

$$\|(a_i)_{i=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dessa forma, resulta que ℓ_p é um espaço de Banach com as operações usuais de sequências e com a norma $\|\cdot\|_p$ (veja [20] e [10]). Particularmente, dos Teoremas 1.1 e 1.3, temos, respectivamente:

Proposição 1.4 (Desigualdade de Hölder). Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.

Proposição 1.5 (Desigualdade de Minkowski). Para $p \geq 1$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.

Para mais detalhes, consulte [8, p. 7].

1.2 Operadores multilineares contínuos

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos sobre operadores multilineares contínuos entre espaços de Banach.

Definição 1.1. Sejam $E_1, \ldots, E_m$ e F espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um operador $T : E_1 \times \ldots \times E_m \longrightarrow F$ é dito multilinear (ou m-linear), se é linear em cada uma das suas coordenadas, isto é,

$$T(x_1, ..., x_k + \lambda y_k, ..., x_m) = T(x_1, ..., x_k, ..., x_m) + \lambda T(x_1, ..., y_k, ..., x_m),$$

quaisquer que sejam $x_k, y_k \in E_k, \lambda \in \mathbb{K}$ e $k = 1, \ldots, m$. O conjunto de tais operadores será denotado por $L(E_1, \ldots, E_m; F)$.

Se $E_1, ..., E_m, F$ forem espaços vetoriais normados, denotaremos $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ o subespaço vetorial de $L(E_1, ..., E_m; F)$ formado pelos operadores m-lineares contínuos. Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; \mathbb{K})$, e os elementos desse conjunto serão chamados de formas m-lineares contínuas.

Temos a seguinte caracterização dos operadores m-lineares contínuos:

Proposição 1.6. [16, Proposição 1.2] Sejam $E_1, ..., E_m, F$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T \in L(E_1, ..., E_m; F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$.

(b) T é contínua na origem.

(c) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x_1, \ldots, x_m)\| \leq C\|x_1\| \ldots \|x_m\|$, quaisquer que sejam $x_k \in E_k, k = 1, \ldots, m$.

(d) $\sup\{\|T(x_1, \ldots, x_m)\|;\ x_k \in B_{E_k}$ para todo $k = 1, \ldots, m\} < \infty$

Os itens (c) e (d) nos ensinam como normar o espaço $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ dos operadores lineares contínuos:

Proposição 1.7. [16, Proposição 1.3] Para cada $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$, defina

$$\|T\| = \sup\{\|T(x_1, \ldots, x_m)\|;\ x_k \in E_k \text{ e } \|x_k\| \leq 1 \text{ para todo } k = 1, \ldots, m\}.$$

Então,

(*i*) $\|\cdot\|$ define uma norma em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$;

(*ii*) $\|T(x_1, \ldots, x_m)\| \leq \|T\| \cdot \|x_1\| \ldots \|x_m\|$ para todo $x_k \in E_k$, com $k = 1, \ldots, m$;

(*iii*) $\|T\| = \inf\{C; \|T(x_1, \ldots, x_m)\| \leq C\|x_1\| \ldots \|x_m\| \text{ com } x_i \in E_i, i = 1, \ldots, m\}$

Observação 1.1. Seja E um espaço vetorial normado. Dada uma forma bilinear contínua $A : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, se definirmos para $b \in E$ fixo,

$$\begin{array}{rcccl} T_b & : & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & T_b(x) = A(x, b), \end{array}$$

então

$$\|T_b\| \leq \|A\| \cdot \|b\|.$$

Com efeito, seja $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$. Como $A \in \mathcal{L}(^2E, \mathbb{K})$, temos

$$\begin{aligned} |T_b(x)| &= |A(x, b)| \\ &\leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|b\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|b\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|T_b\| = \sup\{|T_b(x)|; \|x\| \leq 1\} \leq \|A\| \cdot \|b\|.$$

1.3 Operadores absolutamente somantes

Definição 1.2. Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita fracamente p–somável se o sequência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ está em ℓ_p para todo $\varphi \in E'$.

O espaço vetorial das sequências fracamente p–somáveis será denotado por $\ell_p^{\omega}(E)$, ou seja,

$$\ell_p^{\omega}(E) = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in E\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty,\ \text{para todo } \varphi \in E'\}.$$

Uma norma natural em $\ell_p^\omega(E)$ é dada por,

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{\omega,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$, definimos

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{\infty,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty\|_\infty.$$

Assim, $(\ell_p^\omega(E), \|\cdot\|_{\omega,p})$ é um espaço de Banach. As demonstrações destas afirmações podem ser encontradas em [20, p. 41].

Observação 1.2. $\ell_p(E) \subset \ell_p^\omega(E)$.
De fato, seja $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E)$. Então, dado $\varphi \in E'$

$$\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p \leq \sum_{n=1}^\infty (\|\varphi\| \cdot \|x_n\|)^p = \|\varphi\| \cdot \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p < \infty.$$

Logo, $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^\omega(E)$.

Definição 1.3 (Operador absolutamente $(p;q)$–somante). Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $u : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que u é absolutamente $(p;q)$–somante (ou $(p;q)$–somante) quando o operador induzido

$$\begin{array}{rccc} \widehat{u} & : & \ell_q^\omega(E) & \longrightarrow & \ell_p(F) \\ & & (x_n)_{n=1}^\infty & \mapsto & (ux_n))_{n=1}^\infty \end{array}$$

estiver bem definido e for linear e limitado.

Proposição 1.8. Sejam $1 \leq p \leq q < \infty$ e $u : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo. São equivalentes:

1. u é absolutamente $(p;q)$–somante;

2. Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{\omega,q}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } x_1, ..., x_n \in E.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [20, p. 23].

Como nosso objeto de estudo é a teoria multilinear, temos os seguintes resultados similares, porém em um contexto mais amplo:

Definição 1.4. Sejam $1 \leq q \leq p < \infty$ e $A : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$ multilinear. Dizemos que T é múltiplo $(p; q)$–somante se existe $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,...,j_m=1}^{n} \|T(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C. \left\| (x_{j_1}^{(1)})_{j_1=1}^n \right\|_{\omega,q} \cdot ... \cdot \left\| (x_{j_m}^{(m)})_{j_m=1}^n \right\|_{\omega,q}.$$

Mais detalhes sobre esta teoria podem ser encontrados em [21].

1.4 A desigualdade de Khinchin para múltiplos índices

As funções de Rademacher são definidas por

$$\begin{array}{rcccl} r_n & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & r_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi t) \end{array}$$

onde *sign* denota a função sinal, definida como dada por

$$sign : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0, \\ 0, & \text{se} \quad x = 0, \\ -1, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Um fato importante das funções de Rademacher é que elas têm a seguinte relação de ortogonalidade: para quaisquer inteiros positivos $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ e $p_1, \ldots, p_k$, vale que

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \ldots r_{n_k}^{p_k}(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{se cada } p_j \text{ é par}, \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Uma consequência imediata é que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma sequência ortonormal em $L_2[0; 1]$, e assim temos

Lema 1.9. *Seja $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de funções de Rademacher e $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Então,*

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 .$$

Demonstração. Seja $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência, tal que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k r_k$. Então, para $n > m$, temos

$$
\begin{aligned}
\|S_n - S_m\|_{L_2[0,1]}^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k(t) \right|^2 dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i r_i(t) \right) \overline{\left(\sum_{j=m+1}^{n} a_j r_j(t) \right)} dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i r_i(t) \right) \left(\sum_{j=m+1}^{n} \overline{a}_j r_j(t) \right) dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i,j=m+1}^{n} a_i \overline{a}_j r_i(t) r_j(t)\, dt \\
&= \sum_{i,j=m+1}^{n} a_i \overline{a}_j \int_0^1 r_i(t) r_j(t)\, dt \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \int_0^1 r_k^2(t)\, dt \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 .
\end{aligned}
$$

Como $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, obtemos

$$
\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \longrightarrow 0 \Rightarrow \|S_n - S_m\|_{L_2[0,1]}^2 \longrightarrow 0
$$

e assim, $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L_2[0,1]$. Sendo $L_2[0,1]$ um espaço de Banach, segue que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 \\
&= \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_k r_k(t) \right|^2 dt,
\end{aligned}
$$

finalizando a demonstração. ■

Em nosso contexto, o principal resultado envolvendo funções de Rademacher é o seguinte:

Teorema 1.10 (Desigualdade de Khinchin). *Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Para cada $0 < p < \infty$, existem constantes A_p e B_p tais que*

$$A_p \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_I \left| \sum_{n=1}^{N} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

para todo inteiro positivo N e escalares $a_1, \ldots, a_n$.

Observação 1.3. As constantes ótimas da Desigualdade de Khinchin (essas constantes são devido a U.Haagerup [12]) são dadas por

$$A_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (0, p_0] \\ 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (p_0, 2) \\ 1, & \text{se } p \in [2, \infty) \end{cases}$$

e

$$B_p = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in (0, 2] \\ 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in [2, \infty) \end{cases}$$

A definição exata de p_0 é a seguinte: $p_0 \in (1, 2)$ é o único número real que satisfaz

$$\Gamma\left(\frac{p_0 + 1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

onde Γ denota a função gamma. Estas constantes são as menores–(as melhores)– constantes que satisfazem a desigualdade (1.3).

Lema 1.11 (Lema de Minkowski). Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida sigma finita. Suponha que $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ seja uma função mensurável não negativa e $0 < p \leq q < \infty$. Então

$$\left(\int_X \left(\int_Y f(x, y)^p d\nu(y) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_Y \left(\int_X f(x, y)^q d\mu(x) \right)^{\frac{p}{q}} d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Seja $r = q/p$ e $r*$ seu expoente conjugado. Daí $1 \leq r < \infty$ e

$$\begin{aligned}
\left(\int_X \left(\int_Y f(x,y)^p d\nu(y)\right)^{q/p} d\mu(x)\right)^{1/q} &= \left(\int_X \left(\int_Y f(x,y)^p d\nu(y)\right)^{r} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{p}} \\
&= \left[\left(\int_X \left(\int_Y f(x,y)^p d\nu(y)\right)^{r} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}\right]^{1/p} \\
&= \left[\left(\int_X F(x)^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}\right]^{1/p}, \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

onde $F(x) = \displaystyle\int_Y f(x,y)^p d\nu(y)$. É imediato que $F \in L_r(X)$. Pelo Corolário 1.2, temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_X F(x)^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} &= \|F\|_r \\
&= \int_X F(x)|g(x)|d\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_Y f(x,y)^p d\nu(y)\right) |g(x)|\, d\mu(x) \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

para alguma $g \in L_{r*}$ com $\|g\|_{r*} \leq 1$. Daí, substituindo (1.5) em (1.4) e usando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_X \left(\int_Y f(x,y)^p d\nu(y)\right)^{q/p} d\mu(x)\right)^{1/q} &= \left(\int_X \left(\int_Y f(x,y)^p d\nu(y)\right) |g(x)|\, d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_Y \left(\int_X f(x,y)^p |g(x)| d\mu(x)\right) d\nu(y)\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_Y \left(\int_X f(x,y)^{pr} d\mu(x)\right)^{1/r} \|g\|_{r*}\, d\nu(y)\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_Y \left(\int_X f(x,y)^{q} d\mu(x)\right)^{p/q} d\nu(y)\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

onde as duas últimas desigualdades seguem, respectivamente, da Desigualdade de Hölder e do fato que $\|g\|_{r*} \leq 1$. A hipótese das medidas serem sigma finitas é indispensável para usarmos o Teorema de Fubini. ■

Corolário 1.12. Para qualquer $0 < p \leq q < \infty$ e toda matriz escalar $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p}.$$

Demonstração. É uma aplicação imediata do Lema de Minkowski. ■

Observação 1.4. Se X e Y são como no Lema 1.11 e $u : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável, então, para $r \geq 1$ teremos

$$\left(\int_X \left(\int_Y |u(x,y)| d\nu(y)\right)^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} \leq \int_Y \left(\int_X |u(x,y)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} d\nu(y).$$

De fato, basta tomar $q = r$ e $p = 1$ no Lema 1.11.

Teorema 1.13 (Desigualdade de Khinchin para múltiplos índices). *Sejam $m, N \geq 1$ inteiros positivos, $0 < p < \infty$ e $(a_{i_1,\ldots,i_m})_{i_1,\ldots,i_m=1}^N$ uma matriz de valores em $\mathbb{K}$. Então, existem constantes A_p e B_p tais que*

$$\begin{aligned} (A_p)^m \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^N |a_{i_1,\ldots,i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{[0,1]^m} \left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^N r_{i_1}(t_1)\ldots r_{i_m}(t_m) a_{i_1,\ldots,i_m}\right|^p dt_1 \ldots dt_m\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (B_p)^m \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^N |a_{i_1,\ldots,i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Demonstração. Vamos provar o lado esquerdo da desigualdade (1.6). O caso $m = 1$ é exatamente a desigualdade de Khinchin. Suponhamos que o caso $m-1$ seja verdadeiro. Assim,

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^N |a_{i_1,\ldots,i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^N \left(\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^N |a_{i_1,\ldots,i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i_1=1}^N \left(A_p^{-(m-1)} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^N r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m) a_{i_1,\ldots,i_m}\right|^p dt_2 \ldots dt_m\right)^{\frac{1}{p}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= A_p^{-(m-1)} \left(\sum_{i_1=1}^N \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^N a_{i_1,\ldots,i_m} r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\right|^p dt_2 \ldots dt_m\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Se $0 < p \leq 2$, temos $\frac{2}{p} \geq 1$. Daí, usando a Observação 1.4,

$$\left[\sum_{i_1=1}^N \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^N a_{i_1,\ldots,i_m} r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\right|^p dt_2 \ldots dt_m\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left[\int_{[0,1]^{m-1}} \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left| \sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} a_{i_1,\dots,i_m} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_m}(t_m) \right|^{p \cdot \frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}} dt_2 \dots dt_m \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\int_{[0,1]^{m-1}} \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left| \sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} a_{i_1,\dots,i_m} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_m}(t_m) \right|^{2} \right)^{\frac{p}{2}} dt_2 \dots dt_m \right]^{\frac{1}{p}},$$

e assim,

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} |a_{i_1,\dots,i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq A_p^{-(m-1)} \left[\int_{I^{m-1}} \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left| \sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} a_{i_1,\dots,i_m} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_m}(t_m) \right|^{2} \right)^{\frac{p}{2}} dt_2 \dots dt_m \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, usando o Teorema 1.10, segue que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N} \left| \sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} a_{i_1,\dots,i_m} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_m}(t_m) \right|^{2} \right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leq \left(A_p^{-1} \left(\int_{[0,1]} \left| \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} a_{i_1,\dots,i_m} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_m}(t_m) \right|^{p} dt_1 \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{p}.$$

Usando o fato acima e o Teorema de Fubini,

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} |a_{i_1,\dots,i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq A_p^{-(m-1)} \left[\int_{I^{m-1}} \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left| \sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} a_{i_1,\dots,i_m} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_m}(t_m) \right|^{2} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq A_p^{-(m-1)} \left[\int_{I^{m-1}} \left(A_p^{-1} \left(\int_{I} \left| \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} a_{i_1,\dots,i_m} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_m}(t_m) \right|^{p} dt_1 \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{p} dt \right]^{\frac{1}{p}}$$
$$= A_p^{-m} \left[\int_{I^{m-1}} \left(\int_{I} \left| \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} a_{i_1,\dots,i_m} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_m}(t_m) \right|^{p} dt_1 \right)^{1} dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq A_p^{-m}\left[\int_{I^m}\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} a_{i_1,\ldots,i_m} r_{i_1}(t_1)\ldots r_{i_m}(t_m)\right|^p dt_1\cdot dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

onde $dt = dt_2 \ldots dt_m$.

Se $p > 2$ o resultado é imediato, pois $\|\cdot\|_{L_2} \leq \|\cdot\|_{L_p}$ e $A_p = 1$, para todo $p \geq 2$.

Provemos agora o lado direito da desigualdade (1.6). O caso $m = 1$, é precisamente a desigualdade de Khinchin. Suponhamos que o caso $m-1$ seja verdeiro. Considere $p \geq 2$. Assim, como $\frac{p}{2} \geq 1$, da Observação 1.4 e do Teorema 1.10

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{[0,1]^m}\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} a_{i_1,\ldots,i_m} r_{i_1}(t_1)\ldots r_{i_m}(t_m)\right|^p dt_1\ldots dt_m\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]^{m-1}}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)a_{i_1,\ldots,i_m}\right|^p dt_2\cdot dt_m\right)^{\frac{1}{p}\cdot p} dt_1\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\left(\int_{[0,1]}\left(B_p^{m-1}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}\left|\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)a_{i_1,\ldots,i_m}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^p dt_1\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=B_p^{m-1}\left(\int_{[0,1]}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}\left|\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)a_{i_1,\ldots,i_m}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} dt_1\right)^{\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{2}}\\
&\leq B_p^{m-1}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}\left(\int_{[0,1]}\left|\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)a_{i_1,\ldots,i_m}\right|^{2\cdot\frac{p}{2}} dt_1\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=B_p^{m-1}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}\left(\int_{[0,1]}\left|\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)a_{i_1,\ldots,i_m}\right|^{p} dt_1\right)^{\frac{1}{p}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq B_p^{m-1}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}\left(B_p\left(\sum_{i_1=1}^{N}|a_{i_1,\ldots,i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=B_p^{m}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}\left(\sum_{i_1=1}^{N}|a_{i_1,\ldots,i_m}|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=B_p^{m}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}|a_{i_1,\ldots,i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

O caso $p < 2$ é imediato, pois $\|\cdot\|_{L_p} \leq \|\cdot\|_{L_2}$ e $B_p = 1$, para todo $p \leq 2$. ■

O próximo resultado, embora extremamente importante, será abordado sem demonstração, uma vez que foge dos objetivos desta dissertação. No entanto, a demonstração e mais detalhes podem ser encontrados em [4] e [1]

Teorema 1.14 (Desigualdade Kahane–Salem–Zygmund generalizada). *Sejam* $m, n \geq 1,\ p \in [1, \infty]$ *e definamos*

$$\alpha(p) := \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{p}, & se \quad p \geq 2\,; \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Então, existe uma constante $C_m > 0$ *e uma aplicação* m*–linear* $A : \ell_p^n \times ... \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ *da forma*

$$A(z^1, ..., z^m) = \sum_{i_1, ..., i_m = 1}^{n} \pm z_{i_1}^1 ... z_{i_m}^m$$

com

$$\|A\| \leq C_m \cdot n^{\frac{1}{2} + m\alpha(p)}.$$

1.5 A desigualdade de Hölder para espaços $\ell_{\mathbf{p}}$ e procedimento de interpolação

Precisamos introduzir algumas notações. Para um número inteiro positivo m e um subconjunto não-vazio $D \subset \mathbb{N}$, denotamos o conjunto de multi-índices $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m)$, por

$$\mathcal{M}(m, D) := \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m; i_k \in D, k = 1, \ldots, m\} = D^m.$$

Também denotamos $\mathcal{M}(m, n) := \mathcal{M}(m, \{1, 2, \ldots, n\})$.

Para $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in [1, \infty]^m$ e um espaço de Banach X, considere o espaço

$$\ell_{\mathbf{p}}(X) := \ell_{p_1}(\ell_{p_2}(\ldots(\ell_{p_m}(X))\ldots)),$$

uma matriz de vetores $(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m, \mathbb{N})} \in \ell_{\mathbf{p}}(X)$ se, e somente se,

$$\|(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}}\|_{\mathbf{p}} := \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\sum_{i_2=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m-1=1}^{\infty} \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} \|x_{\mathbf{i}}\|^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \right)^{\frac{p_{m-2}}{p_{m-1}}} \cdots \right)^{\frac{p_2}{p_3}} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty.$$

Quando $X = \mathbb{K}$, escrevemos apenas $\ell_{\mathbf{p}}$ em vez de $\ell_{\mathbf{p}}(\mathbb{K})$. Além disso, trabalhamos com o produto coordenada à coordenada de duas matrizes escalares $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)}$ e $\mathbf{b} = (b_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)}$, isto é,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := (a_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)}.$$

Teorema 1.15 (Desigualdade de Hölder para espaços $\ell_{\mathbf{p}}$). *Sejam* $\mathbf{r}, \mathbf{q}(1), \ldots, \mathbf{q}(N) \in [1,\infty]^m$ *tais que*

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{q_j(1)} + \ldots + \frac{1}{q_j(N)}, \quad j \in \{1, \ldots, m\}$$

e seja $\mathbf{a}_k,\ k = 1, \ldots, N$, *uma matriz escalar m-quadrada. Então*

$$\left\| \prod_{k=1}^{N} \mathbf{a}_k \right\|_{\mathbf{r}} \leq \prod_{k=1}^{N} \|\mathbf{a}_k\|_{\mathbf{q}(k)}.$$

Veja mais detalhes em [1, p. 52], inclusive uma versão demonstrada do teorema acima para espaços $L_{\mathbf{p}}$.

Exemplo 1.1. Sejam $\mathbf{r} = (r_1, r_2), \mathbf{q}(1), \mathbf{q}(2), \mathbf{q}(3) \in [1, +\infty]^2$ tais que

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{q_j(1)} + \frac{1}{q_j(2)} + \frac{1}{q_j(3)}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Lembrando que $\mathbf{q}(k) = (q_1(k), q_2(k))$, $k = 1, 2, 3$, pelo Teorema 1.15 para qualquer matriz 2-quadrada $\mathbf{a}_k$, temos

$$\|\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3\|_{\mathbf{r}} \leq \|\mathbf{a}_1\|_{\mathbf{q}(1)} \cdot \|\mathbf{a}_2\|_{\mathbf{q}(2)} \cdot \|\mathbf{a}_3\|_{\mathbf{q}(3)},$$

isto é,

$$\left(\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} |a_{ij}^{(1)} \cdot a_{ij}^{(2)} \cdot a_{ij}^{(3)}|^{r_2} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} |a_{ij}^{(1)}|^{q_2(1)} \right)^{\frac{q_1(1)}{q_2(1)}} \right)^{\frac{1}{q_1(1)}} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} |a_{ij}^{(2)}|^{q_2(2)} \right)^{\frac{q_1(2)}{q_2(2)}} \right)^{\frac{1}{q_1(2)}} \times \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} |a_{ij}^{(3)}|^{q_2(3)} \right)^{\frac{q_1(3)}{q_2(3)}} \right)^{\frac{1}{q_1(3)}}$$

onde $\mathbf{a}_k = (a_{ij}^{(k)})$.

Exemplo 1.2 (Desigualdade 4/3 de Littlewood). Para cada forma bilinear contínua $T : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \longrightarrow \mathbb{K}$ e cada inteiro positivo N, existe $L_{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |T(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq L_{\mathbb{K}} \cdot \|T\|.$$

De fato, usando o Teorema 1.10,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{i=1}^{N}\sqrt{2}\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{N} r_j(t)T(e_i,e_j)\right|dt \\
&= \sqrt{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{N} r_j(t)T(e_i,e_j)\right|dt \\
&\leq \sqrt{2}\int_0^1\sum_{i=1}^{N}\left|T(e_i,\sum_{j=1}^{N} r_j(t)e_j)\right|dt \\
&\leq \sqrt{2}\sup_{t\in[0,1]}\sum_{i=1}^{N}\left|T(e_i,\sum_{j=1}^{N} r_j(t)e_j)\right|
\end{aligned}$$

Afirmação 1.1. $\sup_{t\in[0,1]}\sum_{i=1}^{N}\left|T(e_i,\sum_{j=1}^{N} r_j(t)e_j)\right| \leq \|T\|.$

De fato, para cada t fixo, defina

$$U_t : \ell_\infty^N \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$U_t(x) = T(x,\sum_{j=1}^{N} r_j(t)e_j).$$

Note que U_t está bem definida e é claramente linear. Daí, pela Observação 1.1, e pelo Corolário1.12, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]}\sum_{i=1}^{N}\left|T(e_i,\sum_{j=1}^{N} r_j(t)e_j)\right| &= \sup_{t\in[0,1]}\sum_{i=1}^{N}|U_t(e_i)| \\
&= \sup_{t\in[0,1]}\|U_t\|\cdot\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{U_t(e_i)}{\|U_t\|}\right| \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\|T\|\cdot\left\|\sum_{j=1}^{N} r_j(t)e_j\right\|\cdot\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{U_t(e_i)}{\|U_t\|}\right| \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\|T\|\cdot\left\|\sum_{j=1}^{N} r_j(t)e_j\right\|\cdot\sup_{\|\varphi\|\leq 1}\sum_{i=1}^{N}|\varphi(e_i)| \\
&= \|T\|\sup_{t\in[0,1]}\left\|\sum_{j=1}^{N} r_j(t)e_j\right\|\cdot\|(e_i)_{i=1}^N\|_{\omega,1} \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\cdot\|T\|. \tag{1.7}$$

Por simetria,

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\cdot\|T\|.$$

Usando o Corolário 1.12, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \sqrt{2}\cdot\|T\|. \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Agora, há pelo menos duas maneiras distintas de resolver o problema: a primeira é usando a desigualdade clássica de Hölder, e a segunda é usando o Teorema 1.15. Por motivos de comparação, apresentaremos as duas soluções aqui.

(i) Usando a desigualdade clássica de Hölder (1.4) duas vezes (a primeira com $p = 3$ e $q = \frac{3}{2}$), e a segunda com $p = \frac{3}{2}$ e $(q = 3)$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{\frac{4}{3}} &= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{\frac{2}{3}}\cdot|T(e_i,e_j)|^{\frac{2}{3}}\right)\\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\left(\left(\sum_{j=1}^{N}\left(|T(e_i,e_j)|^{\frac{2}{3}}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N}\left(|T(e_i,e_j)|^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^1\right)^{\frac{2}{3}}\right)\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|\right)^{\frac{2}{3}}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\\
&\leq \left(\sqrt{2}\|T\|\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt{2}\|T\|\right)^{\frac{2}{3}}\\
&= \left(\sqrt{2}\|T\|\right)^{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é devida às estimativas que fizemos no início do exemplo. Portanto,

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\leq\sqrt{2}\|T\|.$$

(ii) Por outro lado, usando o Teorema 1.15 com $r=(4/3,4/3)$, $q(1)=(2,4)$, $q(2)=(4,2)$ e os resultados (1.4) e (1.5) , temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i,j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} &= \left(\sum_{i,j=1}^{N}\left(|T(e_i,e_j)|^{\frac{1}{2}}\cdot|T(e_i,e_j)|^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{\frac{1}{2}\cdot 4}\right)^{\frac{1}{4}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{\frac{1}{2}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot 4}\right)^{\frac{1}{4}}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{1}\right)^{\frac{2}{1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\sqrt{2}\|T\|\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{2}\|T\|\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\|T\|,
\end{aligned}\tag{1.9}$$

Desta forma, o Teorema 1.15 proporciona uma solução mais simples para o problema.

Embora o Teorema 1.15 remonte à década de 1960, toda sua importância nos problemas clássicos que abordaremos nesta dissertação foi percebida muito recentemente. Uma das últimas aplicações deste resultado diz respeito à desigualdade de Hardy-Littlewood, abordada no capítulo 3, e um fato importante é que esse teorema proporciona melhoria significativa nas constantes associadas.

Observação 1.5. Sejam $\mathbf{a}=(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}$ uma matriz escalar e $0\leq\theta\leq 1)$, então

$$\|\mathbf{a}^{\theta}\|_{\frac{q}{\theta}}=\|\mathbf{a}\|_{q}^{\theta},\quad\text{onde}\quad q=(q_1,...,q_m)\in[1,\infty)^m.$$

De fato,

$$\|\mathbf{a}^{\theta}\|_{\frac{q}{\theta}} = \left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\dots\left(\sum_{i_m=1}^{n}\|a^{\theta}_{i_1,\dots,i_m}\|^{\frac{q_m}{\theta}}\right)^{\frac{1}{\frac{q_m}{\theta}}\cdot\frac{q_{m-1}}{\theta}}\dots\right)^{\frac{1}{\frac{q_2}{\theta}}\cdot\frac{q_1}{\theta}}\right)^{\frac{1}{\frac{q_1}{\theta}}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\ldots\left(\sum_{i_m=1}^{n}\|a_{i_1,\ldots,i_m}\|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\ldots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{\theta}{q_1}}\\
&= \left[\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\ldots\left(\sum_{i_m=1}^{n}\|a_{i_1,\ldots,i_m}\|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\ldots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\right]^{\theta}\\
&= \|\mathbf{a}\|_q^{\theta}.
\end{aligned}
$$

Definição 1.5. Seja A um subconjunto de um espaço vetorial E. O conjunto conv(A), chamado de envoltória convexa de A, é definido como sendo

$$
\mathrm{conv(A)} = \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1,\ \mathrm{com}\,\lambda_i \geq 0,\ x_i \in A,\ i = 1,...,n \ \mathrm{e}\, n \in \mathbb{N}\right\}.
$$

Teorema 1.16 (Procedimento de Interpolação). *Sejam m, n, N inteiros positivos e $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}(1), \ldots, \mathbf{q}(N)$ tal que $(\frac{1}{q_1}, \ldots, \frac{1}{q_m})$ pertencem à envoltória convexa de $(\frac{1}{q_1(k)}, \ldots, \frac{1}{q_m(k)})$, com $k = 1, \ldots, N$. Então, para toda matriz escalar $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}$, temos*

$$
\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{q}} \leq \prod_{k=1}^{N}\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{q}(k)}^{\theta_k},
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\ldots\left(\sum_{i_m=1}^{n}\|a_{i_1,\ldots,i_m}\|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\ldots\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&\quad \leq \prod_{k=1}^{N}\left[\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\ldots\left(\sum_{i_m=1}^{n}\|a_{i_1,\ldots,i_m}\|^{q_m(k)}\right)^{\frac{q_{m-1}(k)}{q_m(k)}}\ldots\right)^{\frac{q_1(k)}{q_2(k)}}\right)^{\frac{1}{q_1(k)}}\right]^{\theta_k},
\end{aligned}
$$

onde θ_k são as coordenadas de $(\frac{1}{q_1(k)}, \ldots, \frac{1}{q_m(k)})$ na envoltória convexa.

Demonstração. Para $j = 1, \ldots, m$,

$$
\frac{1}{q_j} = \frac{\theta_1}{q_j(1)} + \ldots + \frac{\theta_N}{q_j(N)} = \frac{1}{\frac{q_j(1)}{\theta_1}} + \ldots + \frac{1}{\frac{q_j(N)}{\theta_N}}.
$$

Pela Observação 1.5, $\|\mathbf{a}^{\theta_k}\|_{\frac{\mathbf{q}(k)}{\theta_k}} = \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{q}(k)}^{\theta_k}$. Usando isto e o Teorema 1.15, temos

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{q}} = \|\mathbf{a}^{\theta_1+\ldots+\theta_k}\|_{\mathbf{q}} = \left\|\prod_{k=1}^{N} \mathbf{a}^{\theta_k}\right\|_{\mathbf{q}} \leq \prod_{k=1}^{N} \|\mathbf{a}^{\theta_k}\|_{\frac{\mathbf{q}(k)}{\theta_k}} = \prod_{k=1}^{N} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{q}(k)}^{\theta_k}.$$

■

Exemplo 1.3 (Desigualdade 4/3 de Littlewood). Além das duas soluções apresentadas, a desigualdade de Littlewood 4/3 ainda pode ser resolvida usando-se o procedimento de interpolação. Com efeito, no exemplo 1.2, vimos que

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{1}\right)^{\frac{1}{1}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\cdot\|T\|. \tag{1.10}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\cdot\|T\|. \tag{1.11}$$

Temos então duas desigualdades mistas, a saber (1.10) e (1.11) com expoentes $(1,2)$ e $(2,1)$, respectivamente. Por interpolação destes com $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}$, obtemos o expoente $(q_1, q_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, isto é,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{\frac{4}{3}}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{\frac{4}{3}}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{\frac{4}{3}}} \\
&\leq \left[\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{1}\right)^{\frac{1}{1}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot 1}\right)^{\frac{1}{1}}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\sqrt{2}\|T\|)^{1/2}\cdot(\sqrt{2}\|T\|)^{1/2} \\
&= \sqrt{2}\|T\|.
\end{aligned}$$

Ou seja, usando-se interpolação a solução é mais curta. Além disso, o uso da desigualdade clássica de Hölder (Proposição 1.4), como fizemos na abordagem anterior do mesmo exemplo, torna-se inviável ao trabalharmos com uma quantidade muito grande de somas.

Capítulo 2

Desigualdade de Bohnenblust-Hille

2.1 Contexto Histórico

Em seu trabalho intitulado *On the absolute convergence of Dirichlet séries*, publicado em 1931, Fréderick Bohnenblust e Einar Hille conseguiram, além do resultado principal desse artigo, uma generalização da famosa desigualdade de 4/3 Littlewood, conhecida como a desigualdade de Bohnenblust-Hille, a qual abordaremos ao longo deste capítulo.

Como vimos no capítulo anterior, a desigualdade de 4/3 Littlewood, publicada em 1930 pelo matemático britânico John Edensor littlewood em [15], afirma que para toda forma bilinear $T : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \longrightarrow \mathbb{K}$ e para cada inteiro positivo N, existe uma constante $L_\mathbb{K} \geq 1$ satisfazendo a seguinte desigualdade

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |T(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq L_\mathbb{K} \|T\|.$$

Percebendo a importância desse resultado, das técnicas utilizadas para demonstrá-lo e o fato de que a generalização deste lhes permitiria solucionar o problema [1] em questão. Bohnenblust-Hille provaram em [7] que, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e todo inteiro positivo $m \geq 1$, existem constantes $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \geq 1$ tais que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \|T\|, \tag{2.1}$$

para toda forma m–linear contínua $T : \ell_\infty^N \times \ldots \times \ell_\infty^N \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo N. Note que, fazendo $m = 2$ obtemos o resultado de J.E. Littlewood.

[1] Qual a largura máxima da faixa vertical L no plano complexo na qual uma série de Dirichlet $\sum_n a_n n^{-s}$ converge uniformemente mas não absolutamente?

Desde a prova dada por H.F. Bohnenblust e E. Hille, sabe-se que o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo no sentido em que, para cada $m \in \mathbb{N}$ não podemos escolher um valor menor que $\frac{2m}{m+1}$ sem que a constante associada a $B_{\mathbb{K},m}$ perca a independência do inteiro N.

Embora tenha sido concebida como ferramenta para o estudo de problemas relacionados à séries de Dirichlet, atualmente a desigualdade de Bohnenblust-Hille tem aplicações em diferentes áreas da matemática, como na Análise Harmônica, Teoria de Operadores, Análise de Fourier e, até mesmo na Teoria da Informação Quântica. Tivemos como principais referências para este capítulo [4] e [17].

2.2 A Desigualdade de Bohnenblust-Hille

Teorema 2.1 (Desigualdade de Bohnenblust-Hille). *Para todo $m \geq 1$, existem escalares $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \geq 1$ tais que, para toda forma m-linear contínua $T : \ell_\infty^n \times \ldots \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \|T\|,$$

onde $\|T\| = \sup_{\|z^{(1)}\|=\ldots=\|z^{(m)}\|=1} |T(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})|.$

Demonstração. Vamos provar por indução sobre m. O caso $m = 1$ é a observação 2.1. Suponhamos que a desigualdade seja válida para $m-1$. Da Desigualdade de Khinchin para $i_m = 1, \ldots, n$, temos

$$\left(\sum_{i_m=1}^{n} |T(e_{i_1}, ..., e_{i_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A^{-1}_{\frac{2(m-1)}{(m-1)+1}} \left(\int_I \left| \sum_{i_m=1}^{n} r_{i_m}(t) T(e_{i_1}, ..., e_{i_m}) \right|^{\frac{2(m-1)}{(m-1)+1}} dt \right)^{\frac{(m-1)+1}{2(m-1)}} . \tag{2.2}$$

Agora, pela desigualdade de Bohnenblust-Hille para a forma $(m-1)$-linear,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n} \left| \sum_{i_m=1}^{n} r_{i_m}(t) T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) \right|^{\frac{2(m-1)}{m}} \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n} \left| T(e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_m=1}^{n} r_{i_m}(t) e_{i_m}) \right|^{\frac{2(m-1)}{(m-1+1)}} \\
&\leq (B_{\mathbb{K},(m-1)}^{mult})^{\frac{2(m-1)}{m}} \left\| T(\cdot, \cdot, \ldots, \sum_{i_m=1}^{n} r_{i_m}(t) e_{i_m}) \right\|^{\frac{2(m-1)}{(m-1+1)}} \\
&\leq (B_{\mathbb{K},(m-1)}^{mult})^{\frac{2(m-1)}{m}} \|T\|^{\frac{2(m-1)}{m}} \\
&= (B_{\mathbb{K},(m-1)}^{mult} \|T\|)^{\frac{2(m-1)}{m}}.
\end{aligned}$$

Logo, considerando (2.2), temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n}\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2(m-1)}{m}}\\
&\leq \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n} A_{\frac{2(m-1)}{m}}^{\frac{-2(m-1)}{m}}\int_I\left|\sum_{i_m=1}^{n} r_{i_m}(t)T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})\right|^{\frac{2(m-1)}{m}}dt\\
&= A_{\frac{2(m-1)}{m}}^{\frac{-2(m-1)}{m}}\int_I\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n}\left|\sum_{i_m=1}^{n} r_{i_m}(t)T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})\right|^{\frac{2(m-1)}{m}}dt\\
&\leq A_{\frac{2(m-1)}{m}}^{\frac{-2(m-1)}{m}}\int_I(B^{mult}_{\mathbb{K},(m-1)}\|T\|)^{\frac{2(m-1)}{m}}dt\\
&= \left(A^{-1}_{\frac{2(m-1)}{m}}B^{mult}_{\mathbb{K},(m-1)}\|T\|\right)^{\frac{2(m-1)}{m}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n}\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2(m-1)}{m}}\right)^{\frac{m}{2m-2}}\leq A^{-1}_{\frac{2m-2}{m}}B^{mult}_{\mathbb{K},(m-1)}\|T\|. \tag{2.3}$$

Daqui, temos m equações com expoentes

$$\left(\frac{2m-2}{m},\ldots,\frac{2m-2}{m},2\right),\ldots,\left(2,\frac{2m-2}{m},\ldots,\frac{2m-2}{m}\right).$$

Verifiquemos os dois primeiros casos.

Caso 1. $[m=2]$

Como

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{1}}\leq A_1^{-1}B^{\mathrm{mult}}_{\mathbb{K},1}\|T\|, \tag{2.4}$$

por simetria,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq A_1^{-1}B^{\mathrm{mult}}_{\mathbb{K},1}\|T\|. \tag{2.5}$$

Agora, usando o Corolário 1.12 e (2.5), temos

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq A_1^{-1}B^{\mathrm{mult}}_{\mathbb{K},1}\|T\|.$$

Logo,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq A_1^{-1}B_{\mathbb{K},1}^{\text{mult}}\|T\|. \tag{2.6}$$

Assim, temos duas desigualdades mistas, a saber (2.4) e (2.6), com expoentes $(1,2)$ e $(2,1)$ respectivamente. Por interpolação destes com $\theta_1=\theta_2=\frac{1}{2}$, obtemos o expoente $(q_1,q_2)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, isto é,

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{\frac{4}{3}}} = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq A_1^{-1}B_{\mathbb{K},1}^{\text{mult}}\|T\|.$$

Caso 2. $[m=3]$

Por hipótese temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq A_{\frac{4}{3}}^{-1}B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}}\|T\|. \tag{2.7}$$

Por simetria,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{1}\right)^{\frac{3}{4}} \leq A_{\frac{4}{3}}^{-1}B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}}\|T\|, \tag{2.8}$$

e

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq A_{\frac{4}{3}}^{-1}B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}}\|T\|. \tag{2.9}$$

Pelo Corolário 1.12 com $p=4/3$ e $q=2$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{2}{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{1}\right)^{\frac{3}{4}} \overset{(2.8)}{\leq} A_{\frac{4}{3}}^{-1}B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}}\|T\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq A_{\frac{4}{3}}^{-1}B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}}\|T\|. \tag{2.10}$$

Por outro lado, novamente pela desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{p=\frac{4}{3}}\right)^{\frac{q}{p}=\frac{2}{4/3}}\right)^{\frac{1}{q}=\frac{1}{2}}\\
&\overset{\text{Lema 1.11}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{2}\right)^{\frac{4/3}{2}}\right)^{\frac{1}{4/3}}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{p=\frac{4}{3}}\right)^{\frac{q}{p}=\frac{2}{4/3}}\right)^{\frac{1}{q}=\frac{1}{2}}\right]^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\\
&\overset{\text{Lema 1.11}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{2}\right)^{\frac{4/3}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\\
&\overset{(2.9)}{\leq} A_{\frac{4}{3}}^{-1}B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}}\|T\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq A_{\frac{4}{3}}^{-1}B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}}\|T\|. \tag{2.11}$$

Temos, agora três desigualdades mistas, a saber (2.7), (2.10) e (2.11), com expoentes $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 2)$, $(\frac{4}{3}, 2, \frac{4}{3})$ e $(2, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ respectivamente. Por interpolação com $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{1}{3}$, obtemos o expoente $(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, isto é,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} |T(e_i, e_j, e_k)|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} &= \left(\sum_{i,j,k=1}^{n} |T(e_i, e_j, e_k)|^{3/2}\right)^{2/3} \\
&\leq (A_{4/3}^{-1} B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}})^{1/3} (A_{4/3}^{-1} B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}})^{1/3} (A_{4/3}^{-1} B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}})^{1/3} \|T\| \\
&= A_{4/3}^{-1} B_{\mathbb{K},2}^{\text{mult}} \|T\|.
\end{aligned}$$

O caso para um inteiro $m \geq 1$ qualquer, é análogo ao que foi feito nos dois casos usando-se simetria e em seguida o Corolário 1.12. Assim, encontramos m equações mistas com expoentes

$$\left(\frac{2m-2}{m}, \ldots, \frac{2m-2}{m}, 2\right), \ldots, \left(2, \frac{2m-2}{m}, \ldots, \frac{2m-2}{m}\right).$$

Por interpolação destes com $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_m = \frac{1}{m}$, obtemos o expoente $(q_1, \ldots, q_m) = \left(\frac{2m}{m+1}, \ldots, \frac{2m}{m+1}\right)$. Daí, usando (2.3), temos

$$\left(\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1} B_{\mathbb{K},(m-1)}^{\text{mult}} \|T\|.$$

■

Observação 2.1. Para o caso $m = 1$, temos $B_{\mathbb{K},1}^{mult} = 1$.

De fato, seja $T : \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional contínuo não-nulo, então

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j)|^1\right)^{1/1} &= \|T\| \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{T}{\|T\|}(e_j)\right| \\
&\leq \|T\| \sum_{j=1}^{n} \left\|\frac{T}{\|T\|}\right\| \|e_j\| \\
&= \|T\| \sum_{j=1}^{n} \|e_j\| \\
&= \|T\| \sup_{\varphi \in B_{(\ell_\infty^n)'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)| \\
&= \|T\| \sup_{(\varphi_j)_j \in B_{\ell_1^n}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|T\| \sup_{(\varphi_j)_j \in B_{\ell_1^n}} ||(\varphi_j)_j||_{\ell_1^n} \\
&= 1 \cdot \|T\|.
\end{aligned}
$$

onde as três ultimas desigualdade decorrem, respectivamente, do fato que $(\ell_\infty^n)' = \ell_1^n$ e da caraterização do espaço dual.

O próximo resultado, apresenta uma generalização para o Teorema de Bohnenblust-Hille, e será de fundamental importância no próximo capítulo. Antes, temos o seguinte Lema:

Lema 2.2. Seja $m \geq 1$ um inteiro positivo. Então,

$$
\left(\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \left(\sum_{j_{k+1},\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2k}{k+1}} \right)^{\frac{k+1}{2k}} \leq A_{\frac{2k}{k+1}}^{-(m-k)} B_{\mathbb{K},k}^{\text{mult}} \|T\|,
$$

para toda forma m-linear contínua $T : \ell_\infty^n \times \ldots \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n.

Demonstração. Usando a desigualdade de Khinchin para múltiplos índices (Teorema 1.13), temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \left(\sum_{j_{k+1},\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2k}{k+1}} \right)^{\frac{k+1}{2k}} \\
&\leq \left(\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \left(A_{\frac{2k}{k+1}}^{-(m-k)} \left(\int_{I^{m-k}} \left| \sum_{j_{k+1},\ldots,j_m=1}^{n} r_{j_{k+1}}(t_{k+1})...r_{j_m}(t_m) T(e_{j_1},...,e_{j_m}) \right|^{\frac{2k}{k+1}} dt \right)^{\frac{k+1}{2k}} \right)^{\frac{2k}{k+1}} \right)^{\frac{k+1}{2k}} \\
&= A_{\frac{2k}{k+1}}^{-(m-k)} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \int_{I^{m-k}} \left| T\left(e_{j_1},...,e_{j_k}, \sum_{j_{k+1}=1}^{n} r_{j_{k+1}}(t_{k+1}) e_{j_{k+1}},..., \sum_{j_m=1}^{n} r_{j_m}(t_m) e_{j_m} \right) \right|^{\frac{2k}{k+1}} dt \right)^{\frac{k+1}{2k}} \\
&= A_{\frac{2k}{k+1}}^{-(m-k)} \left(\int_{I^{m-k}} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \left| T\left(e_{j_1},...,e_{j_k}, \sum_{j_{k+1}=1}^{n} r_{j_{k+1}}(t_{k+1}) e_{j_{k+1}},..., \sum_{j_m=1}^{n} r_{j_m}(t_m) e_{j_m} \right) \right|^{\frac{2k}{k+1}} dt \right)^{\frac{k+1}{2k}} \\
&\leq A_{\frac{2k}{k+1}}^{-(m-k)} \sup_{t_1,\ldots,t_\in I} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \left| T\left(e_{j_1},...,e_{j_k}, \sum_{j_{k+1}=1}^{n} r_{j_{k+1}}(t_{k+1}) e_{j_{k+1}},..., \sum_{j_m=1}^{n} r_{j_m}(t_m) e_{j_m} \right) \right|^{\frac{2k}{k+1}} \right)^{\frac{k+1}{2k}} \\
&\leq A_{\frac{2k}{k+1}}^{-(m-k)} \sup_{t_{k+1},\ldots,t_m \in [0,1]} B_{\mathbb{K},k}^{\text{mult}} \left\| T\left(\cdot ,..., \cdot , \sum_{j_{k+1}=1}^{n} r_{j_{k+1}}(t_{k+1}) e_{j_{k+1}},..., \sum_{j_m=1}^{n} r_{j_m}(t_m) e_{j_m} \right) \right\| \\
&\leq A_{\frac{2k}{k+1}}^{-(m-k)} B_{\mathbb{K},k}^{\text{mult}} \|T\|.
\end{aligned}
$$

onde $dt = dt_{k+1}...dt_m$ e as duas últimas desigualdades decorrem, respectivamente do Teorema 2.1 e da Observação 1.1. ■

Observação 2.2. No lema acima, fizemos uma estimativa para o expoente mais geral $(\frac{2k}{k+1}, \ldots, \frac{2k}{k+1}, 2, \ldots, 2)$ (com $\frac{2k}{k+1}$ repetido k vezes e 2 repetido $(m-k)$ vezes). Para $k = 1$, temos uma estimativa para o expoente $(1, 2, \ldots, 2)$, isto é,

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n}\left(\sum_{j_{k+1},\ldots,j_m=1}^{n}\left|T\left(e_{j_1},...,e_{j_m}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{1}} \leq A_1^{-(m-1)}\left\|T\right\|, \tag{2.12}$$

pois, pela observação 2.1, $B_{\mathbb{K},1}^{mult} = 1$.

Usando a desigualdade de Minkowski e (2.12), temos, de acordo com o que foi feito no Teorema 1.16, a mesma estimativa para os expoentes

$$(2, 1, 2, ..., 2), \ldots, (2, 2, ..., 2, 1),$$

ou seja,

$$\left(\sum_{j_k=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n}\left|T\left(e_{j_1},...,e_{j_m}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq A_1^{-(m-1)}\left\|T\right\|,$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum_{j_k=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n}\left|T\left(e_{j_1},...,e_{j_m}\right)\right|^1\right)^{\frac{1}{1}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq A_1^{-(m-1)}\left\|T\right\|.$$

onde $\sum_{\widehat{j_i}=1}^{n}$ denota a soma sobre $j_1, ..., j_{i-1}, j_{i+1}, ..., j_m$. .

Teorema 2.3 (Generalização da Desigualdade de Bohnenblust-Hille). *Para cada $m \geq 1$, sejam $q_1, \cdots, q_m \in [1, 2]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *Existe uma constante $C_{q_1 \cdots q_m} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_{m-1}=1}^{\infty}\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|T(e_{i_1},\cdots,e_{i_m})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\right)^{\frac{q_{m-2}}{q_{m-1}}}\cdots\right)^{\frac{q_2}{q_3}}\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leq C_{q_1 \cdots q_m}\|T\|$$

para toda forma m-linear contínua $T : c_0 \times \ldots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$.

(2) $\dfrac{1}{q_1} + \cdots + \dfrac{1}{q_m} \leq \dfrac{m+1}{2}$.

A desigualdade de Bohnenblust-Hille é justamente o caso particular

$$q_1 = \cdots = q_m = \frac{2m}{m+1}.$$

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2) De fato, suponhamos que para todo inteiro positivo N

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\ldots\left(\sum_{i_m=1}^{N}|T(e_{i_1},...,e_{i_m})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\ldots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C_{q_1\ldots q_m}\|T\|.$$

Considerando a forma m-linear do Teorema 1.14, temos

$$|T(e_{i_1},...,e_{i_m})| = \left|\sum_{j_1,...,j_m=1}^{N} \pm\delta_{i_1j_1}...\delta_{i_mj_m}\right| = 1.$$

Daí, usando indução obtemos

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\ldots\left(\sum_{i_m=1}^{N}|T(e_{i_1},...,e_{i_m})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\ldots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} = N^{\frac{1}{q_1}+\ldots+\frac{1}{q_m}}.$$

Assim,

$$N^{\frac{1}{q_1}+\ldots+\frac{1}{q_m}} \leq C_{q_1\ldots q_m}\cdot C_m \cdot N^{\frac{1}{2}+m\alpha(p)},$$

para todo inteiro positivo N, logo

$$\frac{1}{q_1}+\ldots+\frac{1}{q_m} \leq \frac{1}{2}+m\alpha(p).$$

Portanto,

$$\frac{1}{q_1}+\ldots+\frac{1}{q_m} \leq \frac{m+1}{2}, \quad \text{pois} \quad \alpha(\infty) = 1/2.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Vamos mostrar inicialmente o caso

$$\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_m} = \frac{m+1}{2}.$$

De fato, note que o expoente $q = (q_1,...,q_m) \in [1,2]^m$ pode ser obtido por interpolação dos expoentes

$$q(1) = (1,2,...,2),\ldots,q(N) = (2,...,2,1) \tag{2.13}$$

com pesos $\theta_j = \frac{2}{q_j} - 1$, para todo $j = 1, ..., N$, pois

$$\left(\frac{1}{q_1}, ..., \frac{1}{q_m}\right) = \theta_1 \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right) + ... + \theta_m \left(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Pela Observação 2.2, as constantes associadas aos expoentes em (2.13) são iguais a $A_1^{-(m-1)}$, daí, usando o Teorema 1.16 concluímos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(...\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|T(e_{i_1},...,e_{i_m})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}...\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
:=\ & \|(Te_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}}\|_{\mathbf{q}} \leq \prod_{k=1}^{N}\|(Te_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}}\|_{\mathbf{q}(k)}^{\theta_k} \leq \left(A_1^{-(m-1)} \cdot \|T\|\right)^{\theta_1+...+\theta_N} = A_1^{-(m-1)} \cdot \|T\|.
\end{aligned}$$

Agora, se

$$\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} < \frac{m+1}{2},$$

escolha $\delta_1 > 0$ tal que

$$r_1 := q_1 - \delta_1 \in [1,2],$$

e

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_m} = \frac{m+1}{2}.$$

Note que isso é possível, pois caso contrário, defina δ_1 tal que $r_1 = 1$. E observe que

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m-1}{2} = \frac{m+1}{2}.$$

Agora, como $q_i \leq 2$ para todo $i = 1, ..., m$, temos $\frac{1}{q_i} \geq \frac{1}{2}$, daí

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_m} \geq \frac{m+1}{}.$$

o que é um absurdo. Logo, existe $r_1 := q_1 - \delta_1 \in [1,2]$ com $r_1 \leq q_1$.

Como $r_1 \leq q_1$, pela monotonicidade da norma em espaços de sequências, temos $\|\cdot\|_{q_1} \leq \|\cdot\|_{r_1}$. Daí, usando o caso da igualdade, temos

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(...\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|T(e_{i_1},...,e_{i_m})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}...\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left(\left(\sum_{i_2=1}^{\infty} \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \dots \right)^{\frac{q_2}{q_3}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \right)_{i_1=1}^{\infty} \right\|_{q_1} \\
&\leq \left\| \left(\left(\sum_{i_2=1}^{\infty} \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \dots \right)^{\frac{q_2}{q_3}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \right)_{i_1=1}^{\infty} \right\|_{r_1} \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \dots \right)^{\frac{1}{q_2} \cdot r_1} \right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\leq C_{r_1 . q_2 \dots q_m} \|T\|.
\end{aligned}
$$

■

Observação 2.3. É importante ressaltar que, como a desigualdade do item (1) é válida para toda forma m-linear contínua $T : \ell_\infty^n \times \ldots \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$, permutando os limites, o resulta continua válido. Com efeito, façamos o caso $m = 2$, o caso geral é feito por raciocínio análogo. Suponhamos que

$$
\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_i, e_j)|^s \right)^{\frac{1}{s} \cdot \lambda_0} \right)^{\frac{1}{\lambda_0}} \leq C \cdot \|T\| \tag{2.14}
$$

para toda forma bilinear $T : \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$. Mostremos que, com essas essas hipóteses, vale:

$$
\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |T(e_i, e_j)|^s \right)^{\frac{1}{s} \cdot \lambda_0} \right)^{\frac{1}{\lambda_0}} \leq C \cdot \|T\|. \tag{2.15}
$$

De fato, suponha que (2.14) seja verdade. Dada $T : \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$ contínua, defina

$$
\begin{aligned}
S \ : \ \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\
(x, y) &\mapsto S(x, y) = T(x, y).
\end{aligned}
$$

Então, por (2.14) aplicado a S, temos

$$
\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |S(e_i, e_j)|^s \right)^{\frac{1}{s} \cdot \lambda_0} \right)^{\frac{1}{\lambda_0}} \leq C \cdot \|S\|.
$$

Como $S(x,y) = T(y,x)$, segue que $\|S\| = \|T\|$ e

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_j,e_i)|^s\right)^{\frac{1}{s}\cdot\lambda_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_0}} \leq C\cdot\|T\|.$$

Portanto, fazendo uma substituição ($i = j$ e vice-versa), temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|T(e_i,e_j)|^s\right)^{\frac{1}{s}\cdot\lambda_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_0}} \leq C\cdot\|T\|.$$

Desta forma, podemos enunciar o Teorema 2.3 da seguinte forma:

Teorema 2.4 (Generalização da Desigualdade de Bohnenblust-Hille). *Para cada $m \geq 1$, seja $q_1,\ldots,q_m \in [1,2]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *Existe uma constante $C_{q_1\cdots q_m} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{i_{\sigma(1)}=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_{\sigma(m-1)}=1}^{\infty}\left(\sum_{i_{\sigma(m)}=1}^{\infty}|T(e_{i_1},...,e_{i_m})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\right)^{\frac{q_{m-2}}{q_{m-1}}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leq C_{q_1\cdots q_m}^{\mathbb{K},m}\|T\|$$

para toda forma m-linear contínua $T : c_0\times\ldots\times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ e toda permutação $\sigma : \{1,2,...,n\} \longrightarrow \{1,2,...,n\}$.

(2) $\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_m} \leq \frac{m+1}{2}$.

Capítulo 3

Desigualdade de Hardy-Littlewood

A Desigualdade Multilinear de Hardy–Littlewood é fruto de várias generalizações a partir da Desigualdade 4/3 de Littlewood, publicada em 1930. Mais precisamente, ela surgiu de um estudo realizado por Praciano–Pereira (veja [19]), quando este observou os efeitos da substituição de ℓ_∞ por ℓ_p na desigualdade de Bohnenblust–Hille. Neste capítulo, estudamos esta clássica desigualdade, enfatizando, no caso real, os melhores limites superiores para as constantes associadas. Tratamos ainda em uma seção a parte, a otimalidade do expoente associado. As principais referências para este capítulo foram [5], [6], [18] e [19] .

3.1 A Desigualdade de Hardy–Littlewood Multilinear

Teorema 3.1. *Seja $m \geq 2$ um inteiro positivo e $2m \leq p \leq \infty$. Então, para cada forma m-linear contínua $T : \ell_p^n \times \ldots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e cada inteiro positivo n, temos:*

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}} \right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}} \leq C_{\mathbb{K},m,p}^{\text{mult}} \|T\|. \tag{3.1}$$

Demonstração. O caso $p = \infty$, considerando, é claro $\frac{2mp}{mp+p-2m} = \frac{2m}{m+1}$, é precisamente a desigualdade de Bohnenblust-Hille para múltiplos índices (Teorema 2.1). Desta forma, precisamos considerar apenas o caso $2m \leq p < \infty$. De fato, seja

$$s = \frac{2mp}{mp+p-2m},$$

como $m \geq 2$ e $p \geq 2m$, temos

- $s \leq 2$: de fato,

$$p \geq 2m \Longrightarrow 2p \geq 4m \Longrightarrow 2mp \leq 2mp + 2p - 4m \Longrightarrow 2mp \leq 2(mp + p - 2m),$$

daí,

$$s = \frac{2mp}{mp + p - 2m} \leq 2, \quad \text{pois } \; mp + p - 2m > 0.$$

- $s \geq 1$: de fato, como $m \geq 2$, segue que $m - 1 \geq 1$, daí

$$p(m-1) \geq 2 \Longrightarrow mp \geq p - 2m \Longrightarrow 2mp \geq mp + p - 2m$$

logo,

$$s = \frac{2mp}{mp + p - 2m} \geq 1.$$

Agora, defina

$$\lambda_0 = \frac{2s}{ms + s - 2m + 2}.$$

Note que

- λ_0 está bem definido: de fato,

$$\begin{aligned} ms + s - 2m + 2 &= m\left(\frac{2mp}{mp + p - 2m}\right) + \frac{2mp}{mp + p - 2m} - 2m + 2 \\ &= \frac{2}{mp + p - 2m}(p - 2m + mp + 2m^2) > 0, \end{aligned}$$

pois $p \geq 2m$;

- $\lambda_0 \leq 2$: de fato,

$$\lambda_0 = \frac{2mp}{mp + p - 2m + 2m^2} \leq \frac{2mp}{mp + p - 2m} = s \leq 2;$$

- $\lambda_0 \geq 1$: com efeito, como $p \geq 2m$ e $m \geq 2$, temos

$$p(m-1) \geq 2m(m-1)$$

daí,

$$2mp \geq mp + p - 2m + 2m^2,$$

logo

$$\frac{2mp}{mp + p - 2m + 2m^2} \geq 1.$$

Como

$$\frac{1}{s}+\ldots+\frac{1}{s}+\frac{1}{\lambda_0}=\frac{m-1}{s}+\frac{1}{\lambda_0}=\frac{m+1}{2}$$

e $s, \lambda_0 \in [1,2]$, pela desigualdade de Bohnenblust-Hille generalizada (Teorema 2.4), sabemos que existe uma constante $C_m \geq 1$ tal que para toda forma m-linear contínua $T : \ell_\infty^n \times \ldots \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$, temos, para $i = 1, \ldots, m$,

$$\left(\sum_{j_i=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j}_i=1}^{n}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^s\right)^{\frac{1}{s}\cdot\lambda_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_0}} \leq C_m\|T\|. \tag{3.2}$$

Acima, $\sum_{\widehat{j}_i=1}^{n}$ denota a soma sobre $j_1, ..., j_{i-1}, j_{i+1}, ..., j_m$. O múltiplo expoente $(\lambda_0, s, s, \ldots, s)$ pode ser obtido por interpolação dos expoentes $(1, 2, \ldots, 2)$ e $(\frac{2m}{m+1}, \ldots, \frac{2m}{m+1})$ com, respectivamente,

$$\theta_1 = 2\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{s}\right)$$
$$\theta_2 = m\left(\frac{2}{s}-1\right).$$

Assim, é importante controlar as constantes associadas aos expoentes $(1, 2, \ldots, 2)$ e $(\frac{2m}{m+1}, \ldots, \frac{2m}{m+1})$. O expoente $(\frac{2m}{m+1}, \ldots, \frac{2m}{m+1})$ é o clássico expoente da desigualdade de Bohnenblust-Hille (Teorema 2.1), e a estimativa da constante associada ao expoente $(1, 2, \ldots, 2)$ é conhecida. De fato, escolhendo $k = 1$ no Lema 2.2, desde que $A_1 = (\sqrt{2})^{-1}$ (pela observação 1.3) e $B_{\mathbb{K},1}^{mult} = 1$ (pela observação 2.1), concluímos que a constante associada ao expoente $(1, 2, \ldots, 2)$ é $(\sqrt{2})^{m-1}$.

Portanto, a constante ótima associada ao múltiplo expoente $(\lambda_0, s, s, \ldots, s)$ é (para escalares reais) menor do que ou igual a

$$C_1^{\theta_1} \cdot C_2^{\theta_2}$$

onde C_1 é a constante associada ao expoente $(1, 2, \ldots, 2)$ e C_2 é a constante de Bohnenblust-Hille, ou seja,

$$\left(\left(\sqrt{2}\right)^{m-1}\right)^{2\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{s}\right)}\left(B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}}\right)^{m\left(\frac{2}{s}-1\right)}.$$

Logo, fazendo as devidas substituições, temos

$$C_m \leq \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2m(m-1)}{p}}\left(B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}}\right)^{\frac{p-2m}{p}}. \tag{3.3}$$

Mais precisamente, (3.2) é válida com C_m como acima.

Agora, seja

$$\lambda_j = \frac{\lambda_0 p}{p - \lambda_0 j}$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. Note que

$$\lambda_m = s$$

e que

$$\left(\frac{p}{\lambda_j}\right)^* = \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}$$

para todo $j = 0, ..., m-1$.

Suponhamos que $1 \leq k \leq m$ e que

$$\left(\sum_{j_i=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j}_i=1}^{n}|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{k-1}}} \leq C_m\|T\|$$

é verdade para toda forma m–linear contínua $T : \underbrace{\ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n}_{k-1 \text{ vezes}} \times \ell_\infty^n \times \cdots \times \ell_\infty^n \to \mathbb{K}$ e para todo $i = 1, ..., m$. Vamos provar que

$$\left(\sum_{j_i=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j}_i=1}^{n}|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{k}}} \leq C_m\|T\|$$

para toda forma m–linear contínua $T : \underbrace{\ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n}_{k \text{ vezes}} \times \ell_\infty^n \times \cdots \times \ell_\infty^n \to \mathbb{K}$ e para todo $i = 1, ..., m$.

O primeiro caso ($k = 0$), é justamente (3.2) com C_m como em (3.3).

Considere

$$T \in \mathcal{L}(\underbrace{\ell_p^n, ..., \ell_p^n}_{k \text{ vezes}}, \ell_\infty^n, \ldots, \ell_\infty^n; \mathbb{K})$$

e para cada $x \in B_{\ell_p^n}$, defina

$$\begin{array}{rcll} T^{(x)} & : & \underbrace{\ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n}_{k-1 \text{ vezes}} \times \ell_\infty^n \times \cdots \times \ell_\infty^n & \to \mathbb{K} \\ & & (z^{(1)}, ..., z^{(m)}) & \mapsto T(z^{(1)}, ..., z^{(k-1)}, xz^{(k)}, z^{(k+1)}, ..., z^{(m)}), \end{array}$$

com $xz^{(k)} = (x_j z_j^{(k)})_{j=1}^n$. Observe que $T^{(x)}$ está bem definida, pois como $x \in B_{\ell_p^n}$, se $z^{(k)} \in B_{\ell_\infty^n}$, temos

$$\sum_{j=1}^{n}\left|x_j z_j^{(k)}\right|^p \leq \sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\left|z_j^{(k)}\right|^p \leq \|z^{(k)}\|_\infty^p \sum_{j=1}^{n}|x_j|^p \leq 1,$$

logo, $xz^{(k)} \in B_{\ell_p^n}$. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\|T^{(x)}\| \\
&= \sup\{|T^{(x)}(z^{(1)},...,z^{(m)})|;\ z^{(1)},...,z^{(k-1)} \in B_{\ell_p^n} \text{ e } z^{(k)},...,z^{(m)} \in B_{\ell_\infty^n}\} \\
&= \sup\{|T(z^{(1)},...,xz^{(k)},z^{(k+1)},...,z^{(m)})|;\ z^{(1)},...,z^{(k-1)},xz^{(k)} \in B_{\ell_p^n} \text{ e } z^{(k+1)},...,z^{(m)} \in B_{\ell_\infty^n}\} \\
&\leq \sup\{|T(w^{(1)},...,w^{(k)},w^{(k+1)},...,w^{(m)})|;\ w^{(1)},...,w^{(k)} \in B_{\ell_p^n} \text{ e } w^{(k+1)},...,w^{(m)} \in B_{\ell_\infty^n}\} \\
&= \|T\|.
\end{aligned}
$$

Aplicando a hipótese de indução para $T^{(x)}$ e usando a estimativa acima, temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_i=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^{n}|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s|x_{j_k}|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{k-1}}} \\
&= \left(\sum_{j_i=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^{n}\left|T\left(e_{j_1},...,e_{j_{k-1}},x_{j_k}e_{j_k},e_{j_{k+1}},...,e_{j_m}\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{k-1}}} \\
&= \left(\sum_{j_i=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^{n}\left|T\left(e_{j_1},...,e_{j_{k-1}},xe_{j_k},e_{j_{k+1}},...,e_{j_m}\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{k-1}}} \qquad (3.4) \\
&= \left(\sum_{j_i=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^{n}\left|T^{(x)}\left(e_{j_1},...,e_{j_m}\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}}\right)^{\frac{1}{\lambda_{k-1}}} \\
&\leq C_m\|T^{(x)}\| \\
&\leq C_m\|T\|
\end{aligned}
$$

para todo $i = 1,...,m$. Agora, analisaremos dois casos possíveis:

- $k = i$.

  Como
  $$\left(\frac{p}{\lambda_{j-1}}\right)^* = \frac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}}$$

para todo $j = 1,...,m$, concluímos que

$$\left(\sum_{j_k=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n}|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_k}\right)^{\frac{1}{\lambda_k}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j_k=1}^{n} \left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n} \left| T\left(e_{j_1}, ..., e_{j_m}\right)\right|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}\left(\frac{p}{\lambda_{k-1}}\right)^*} \right)^{\frac{1}{\lambda_{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{p}{\lambda_{k-1}}\right)^*}} \\
&= \left\| \left(\left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n} \left| T\left(e_{j_1}, ..., e_{j_m}\right)\right|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}} \right)_{j_k=1}^{n} \right\|_{\left(\frac{p}{\lambda_{k-1}}\right)^*}^{\frac{1}{\lambda_{k-1}}} \\
&\overset{\text{Lema 3.3}}{=} \left(\sup_{y \in B_{\ell^n_{\frac{p}{\lambda_{k-1}}}}} \left| \sum_{j_k=1}^{n} y_{j_k} \left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n} \left| T\left(e_{j_1}, ..., e_{j_m}\right)\right|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}} \right| \right)^{\frac{1}{\lambda_{k-1}}} \\
&= \left(\sup_{y \in B_{\ell^n_{\frac{p}{\lambda_{k-1}}}}} \sum_{j_k=1}^{n} \left|y_{j_k}\right| \left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n} \left| T\left(e_{j_1}, ..., e_{j_m}\right)\right|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}} \right)^{\frac{1}{\lambda_{k-1}}} \\
&\overset{\text{Lema 3.2}}{=} \left(\sup_{x \in B_{\ell^n_p}} \sum_{j_k=1}^{n} \left|x_{j_k}\right|^{\lambda_{k-1}} \left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n} \left| T\left(e_{j_1}, ..., e_{j_m}\right)\right|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}} \right)^{\frac{1}{\lambda_{k-1}}} \\
&= \sup_{x \in B_{\ell^n_p}} \left(\sum_{j_k=1}^{n} \left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n} \left| T\left(e_{j_1}, ..., e_{j_m}\right)\right|^s \left|x_{j_k}\right|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}} \right)^{\frac{1}{\lambda_{k-1}}} \\
&\leq C_m \|T\|
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade é verdadeira por (3.4).

- $k \neq i$.

Inicialmente, suponhamos que $k \in \{1, ..., m-1\}$. É importante observar que, neste caso $\lambda_{k-1} < \lambda_k < s$ para todo $k \in \{1, ..., m-1\}$. Denotando, para $i = 1, ..., m$,

$$
S_i = \left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^{n} |T(e_{j_1}, ..., e_{j_m})|^s \right)^{\frac{1}{s}}
$$

temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j_i=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^{n}|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_k} &= \sum_{j_i=1}^{n} S_i^{\lambda_k} = \sum_{j_i=1}^{n} S_i^{\lambda_k - s} S_i^s \\
&= \sum_{j_i=1}^{n}\sum_{\widehat{j_i}=1}^{n} \frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s}{S_i^{s-\lambda_k}} \\
&= \sum_{j_k=1}^{n}\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n} \frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s}{S_i^{s-\lambda_k}} \\
&= \sum_{j_k=1}^{n}\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n} \frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^{\frac{s(s-\lambda_k)}{s-\lambda_{k-1}}}}{S_i^{s-\lambda_k}} |T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^{\frac{s(\lambda_k-\lambda_{k-1})}{s-\lambda_{k-1}}}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando a desigualdade de Hölder duas vezes (primeiro com $p = \frac{s-\lambda_{k-1}}{s-\lambda_k}$ e $q = \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{s-\lambda_{k-1}}$, depois com $p = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{s-\lambda_{k-1}}{s-\lambda_k}$ e $q = \frac{\lambda_k \cdot (s-\lambda_{k-1})}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})\cdot}$), obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_i=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^{n}|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_k} \\
&\leq \sum_{j_k=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n}\frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s}{S_i^{s-\lambda_{k-1}}}\right)^{\frac{s-\lambda_k}{s-\lambda_{k-1}}}\left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n}|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s\right)^{\frac{\lambda_k-\lambda_{k-1}}{s-\lambda_{k-1}}} \\
&\leq \left(\sum_{j_k=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n}\frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s}{S_i^{s-\lambda_{k-1}}}\right)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}}\right)^{\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\cdot\frac{s-\lambda_k}{s-\lambda_{k-1}}} \\
&\quad\times\left(\sum_{j_k=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n}|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_k}\right)^{\frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{(\lambda_k-\lambda_{k-1})s}{s-\lambda_{k-1}}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Do Caso 1, sabemos que

$$\left(\sum_{j_k=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^{n}|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_k}\right)^{\frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{(\lambda_k-\lambda_{k-1})s}{s-\lambda_{k-1}}} \leq (C_m\|T\|)^{\frac{(\lambda_k-\lambda_{k-1})s}{s-\lambda_{k-1}}}. \tag{3.6}$$

Agora, vamos investigar o primeiro fator em (3.5). Da desigualdade de Hölder e de (3.4), temos

$$\left(\sum_{j_k=1}^n \left(\sum_{\widehat{j_k}=1}^n \frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s}{S_i^{s-\lambda_{k-1}}}\right)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}}\right)^{\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \left(\sum_{\widehat{j_k}} \frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s}{S_i^{s-\lambda_{k-1}}} \right)_{j_k=1}^n \right\|_{\left(\frac{p}{\lambda_{k-1}}\right)^*} \\
&\overset{\text{Lema 3.3}}{=} \sup_{y\in B_{\ell^n_{\frac{p}{\lambda_{k-1}}}}} \sum_{j_k=1}^n |y_{j_k}| \sum_{\widehat{j_k}=1}^n \frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s}{S_i^{s-\lambda_{k-1}}} \\
&\overset{\text{Lema 3.2}}{=} \sup_{x\in B_{\ell^n_p}} \sum_{j_k=1}^n \sum_{\widehat{j_k}=1}^n \frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s}{S_i^{s-\lambda_{k-1}}} |x_{j_k}|^{\lambda_{k-1}} \\
&= \sup_{x\in B_{\ell^n_p}} \sum_{j_i=1}^n \sum_{\widehat{j_i}=1}^n \frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^{s-\lambda_{k-1}}}{S_i^{s-\lambda_{k-1}}} |T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^{\lambda_{k-1}} |x_{j_k}|^{\lambda_{k-1}} \\
&\overset{\text{Des. Hölder}}{\leq} \sup_{x\in B_{\ell^n_p}} \sum_{j_i=1}^n \left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^n \frac{|T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s}{S_i^s} \right)^{\frac{s-\lambda_{k-1}}{s}} \left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^n |T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s |x_{j_k}|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}} \\
&= \sup_{x\in B_{\ell^n_p}} \sum_{j_i=1}^n \left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^n |T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s |x_{j_k}|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_{k-1}} \leq (C_m\|T\|)^{\lambda_{k-1}}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.5) concluímos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j_i=1}^n \left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^n |T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_k} &\leq (C_m\|T\|)^{\lambda_{k-1}\frac{s-\lambda_k}{s-\lambda_{k-1}}} (C_m\|T\|)^{\frac{(\lambda_k-\lambda_{k-1})s}{s-\lambda_{k-1}}} \\
&= (C_m\|T\|)^{\lambda_k}.
\end{aligned}$$

Agora, resta-nos considerar $k = m$. Neste caso, temos a situação mais simples, pois como $\lambda_m = s$, temos

$$\left(\sum_{j_i=1}^n \left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^n |T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_m} \right)^{\frac{1}{\lambda_m}} = \left(\sum_{j_m=1}^n \left(\sum_{\widehat{j_m}=1}^n |T(e_{j_1},...,e_{j_m})|^s \right)^{\frac{1}{s}\lambda_m} \right)^{\frac{1}{\lambda_m}} \leq C_m\|T\|,$$

onde a desigualdade é devida ao caso $i = k$. Isto conclui a prova. ∎

3.2 Otimalidade do expoente da Desigualdade de Hardy–Littlewood

Vejamos que o expoente da Desigualdade de Hardy–Littlewood é ótimo. Com efeito, suponhamos que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} |T(e_{i_1}, ..., e_{i_m})|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C\|T\| \tag{3.8}$$

para toda forma m–linear $T : \ell_p^n \times \ldots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$. Usando a forma m–linear da desigualdade Kahane–Salem–Zygmund em 3.8

$$(n^m)^{\frac{1}{s}} \leq C \cdot C_m \cdot n^{\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)},$$

para todo $n \geq 1$, ou seja,

$$n^{\frac{m}{s}} \leq C \cdot C_m \cdot n^{\frac{m+1}{2}-\frac{m}{p}}.$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\frac{m}{s} \leq \frac{m+1}{2} - \frac{m}{p} = \frac{mp+p-2m}{2p},$$

e, consequentemente,

$$s \geq \frac{2mp}{mp+p-2m},$$

o que conclui a prova.

Apêndice

Para tornar a leitura mais contínua e não perdermos o foco do nosso principal objetivo, destinamos este capítulo aos resultados auxiliares.

Lema 3.2. Dado um número real $1 \leq \lambda \leq 2$ e $1 \leq p < \infty$, temos

$$\sup_{x \in B_{\ell^n_{\frac{p}{\lambda}}}} \sum |x_i| = \sup_{y \in B_{\ell^n_p}} \sum |y_i|^\lambda.$$

Demonstração. De fato, se $x \in B_{\ell^n_{\frac{p}{\lambda}}}$, então

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n (|x_i|^{\frac{1}{\lambda}})^\lambda = \sum_{i=1}^n |y_i|^\lambda, \text{ onde } |y_i| = |x_i|^{\frac{1}{\lambda}},\ i = 1, ..., n.$$

Agora, mostremos que, para $x \in B_{\ell^n_{\frac{p}{\lambda}}}$, $y \in B_{\ell^n_p}$. De fato,

$$\|y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{\lambda}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{\lambda}}\right)^{\frac{\lambda}{p}}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \leq 1.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |y_i|^\lambda \leq \sup_{y \in B_{\ell^n_p}} \sum_{i=1}^n |y_i|^\lambda,$$

e, portanto,

$$\sup_{x \in B_{\ell^n_{\frac{p}{\lambda}}}} \sum |x_i| \leq \sup_{y \in B_{\ell^n_p}} \sum |y_i|^\lambda. \tag{3.9}$$

Por outro lado, dado $y \in B_{\ell^n_p}$, temos

$$\sum_{i=1}^n |y_i|^\lambda = \sum_{i=1}^n |x_i|, \text{ onde } |x_i| = |y_i|^\lambda.$$

Analogamente, como $y \in B_{\ell_p^n}$, temos

$$\|x\|_{\frac{p}{\lambda}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{p}{\lambda}}\right)^{\frac{\lambda}{p}} = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \left(|x_i|^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\lambda} = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\lambda} \leq 1.$$

Logo, $x \in B_{\ell^n_{\frac{p}{\lambda}}}$ e, assim,

$$\sup_{y \in B_{\ell_p^n}} \sum |y_i|^{\lambda} \leq \sup_{x \in B_{\ell^n_{\frac{p}{\lambda}}}} \sum |x_i|. \tag{3.10}$$

Portanto, de 3.9 e 3.10 vale a igualdade. ∎

Lema 3.3. Seja $1 \leq p < \infty$. Se $(a_j)_{j=1}^n \in \ell_p^n$ com $a_j \geq 0$, temos para todo $j = 1, \ldots, n$ que

$$\|(a_j)_{j=1}^n\|_p = \sup_{y \in B_{(\ell_p^n)'}} \sum_{j=1}^{n} |y_j a_j| \,.$$

Demonstração. De fato, pelo corolário de Hanh-Banach (ver [8, p. 60]) temos

$$\|(a_j)_{j=1}^n\|_p = \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p^n)'}} |\varphi((a_j)_j)| \,.$$

Como $\left(\ell_p^n\right)' = \ell_{p^*}^n$ isometricamente, temos

$$\varphi((a_j)_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j a_j \ ,$$

para cada $(c_j)_j \in \ell_{p^*}^n$. Logo,

$$\begin{aligned} \|(a_j)_{j=1}^n\|_p &= \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p^n)'}} |\varphi((a_j)_j)| \\ &= \sup_{c \in B_{\ell_{p^*}^n}} \sum_{j=1}^{n} |c_j a_j| \,. \end{aligned}$$

∎

Corolário 3.4. Sejam $1 \leq p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $\left\|(e_j)_{j=1}^n\right\|_{\omega,q} = 1$

Demonstração. De fato,

$$\left\|(e_j)_{j=1}^n\right\|_{\omega,q} = \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p)'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Usando a caracterização do espaço dual de ℓ_p, temos

$$\begin{aligned}\left\|(e_j)_{j=1}^n\right\|_{\omega,q} &= \sup_{(\varphi_j)\in B_{\ell_q}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(\varphi_j)\in B_{\ell_q}} \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q = 1,\end{aligned}$$

finalizando a prova. ■

Lema 3.5. Se $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, então

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = \sup_{|\xi|=1} \left|\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\right| = \sup_{|\xi_i|\leq 1} \left|\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\right|.$$

Demonstração. De fato, pela desigualdade triangular, temos

$$\left|\sum_{j=1}^n \xi_j x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |\xi_j x_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

se $|\xi_j| \leq 1$. Logo,

$$\sup_{|\xi_j|\leq 1} \left|\sum_{i=1}^n \xi_j x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|. \tag{3.11}$$

Por outro lado, para cada $j = 1, ..., n$, seja θ_j o argumento de x_j, então

$$\sum_{j=1}^n |x_j| = \sum_{j=1}^n x_j e^{-i\theta_j}. \tag{3.12}$$

Fazendo $\xi_j = e^{-i\theta_j}$ e substituindo em 3.12, temos

$$\sum_{j=1}^n |x_j| = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j = \left|\sum_{j=1}^n x_j \xi_j\right|. \tag{3.13}$$

Note que $|\xi_j| = |e^- i\theta_j| = 1$. Desta forma,

$$\sum_{j=1}^n |x_j| \leq \sup_{|\xi_j|=1} \left|\sum_{j=1}^n x_j \xi_j\right| \leq \sup_{|\xi_j|\leq 1} \left|\sum_{j=1}^n x_j \xi_j\right| \overset{3.11}{\leq} \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

e, portanto,

$$\sum_{j=1}^n |x_j| = \sup_{|\xi_j|=1} \left|\sum_{j=1}^n x_j \xi_j\right| = \sup_{|\xi_j|\leq 1} \left|\sum_{j=1}^n x_j \xi_j\right|.$$

■

Lema 3.6. Sejam E um espaço de Banach e $x_1, \ldots, x_m \in E$. Então

$$\sup_{|\varepsilon_j|\leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j x_j \right\| = \|(x_j)_{j=1}^{m}\|_{\omega,1}.$$

Demonstração. De fato, novamente pelo corólário de Hanh-Banach [8, p.60], temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j x_j \right\| = \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left| \varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j x_j \right) \right|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sup_{|\varepsilon_j|\leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j x_j \right\| &= \sup_{|\varepsilon_j|\leq 1} \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left| \varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j x_j \right) \right| \\
&= \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sup_{|\varepsilon_j|\leq 1} \left| \varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j x_j \right) \right| \\
&= \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sup_{|\varepsilon_j|\leq 1} \left| \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \varphi(x_j) \right| \\
&= \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sum_{j=1}^{m} \varphi(x_j) \\
&= \|(x_j)_{j=1}^{m}\|_{\omega,1},
\end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade é consequência do Lema 3.5. ■

Como consequência imediata, obtemos:

Lema 3.7. Sejam E um espaço de Banach, (r_j) as funções de Rademacher e $x_1, \ldots, x_m \in E$. Então

$$\sup_{|t|\leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(t) x_j \right\| \leq \|(x_j)_{j=1}^{m}\|_{\omega,1}.$$

Referências Bibliográficas

[1] Albuquerque, N.G., *Hardy–Littlewood/Bohnenblust–Hille multilinear inequalities and Peano curves on topological*, Tese de Doutorado, CCEN, UFPB, 2014.

[2] Albuquerque, N.G.; Araújo, G.; Pellegrino, D.; Seone-Sepúlveda, J.B., *Hölder's inequality: some recent and inexpected aplications*, 2010.

[3] Albuquerque, N.G., Bayart, F., Pellegrino, D., Seoane–Sepúlveda, J., *Optimal Hardy–Littlewood type inequalities for polynomials and multilinear operators*, arXiv: 1311.3177v4 [math.FA] 22 Jun 2014.

[4] Albuquerque, N.G.,Bayart, F., Pellegrino, D., Seoane–Sepúlveda, J., *Sharp generalizations of the multilinear Bohnenblust–Hille inequality*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 3726–3740.

[5] Araújo, G., Pellegrino, D., Silva, D. D. P., *On the upper bounds for the constants of the Hardy–Littlewood inequality*, J. Funct. Anal. **267** (2014), 1878–1888.

[6] Bayart, F., Pellegrino, D., Seoane–Sepúlveda, J., *The Bohr radius of the n–dimensional polydisc is equivalent to $\sqrt{(\log n)/n}$*, Advances in Mathematics, **229** (2012), 1235–1265.

[7] Bohnenblust, H. F., Hille, E., *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Ann. of Math. **32** (1931), 600–622.

[8] Botelho, G.; Pellegrino, D.;Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1ª Ed., 2012.

[9] Defant, A., Sevilla-Peris, P., *The Bohnenblust–Hille cycle of ideas from a modern point of view*, Funct. Approx. Comment. Math. **50** (2014), 55-127.

[10] Diestel, J., Jarchow, H., Tonge, A., *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[11] Garling, D.J.H., *Inequalities:A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[12] Haagerup, U., *The best constants in the Khinchine inequality*, Studia Math. **70** (1982) 231–283.

[13] Hardy, G., Littlewood, J.E., *Bilinear forms bounded in space* $[p, q]$, Quart. J. Math. **5** (1934), 241–254.

[14] König, H., *On the best constants in the Khintchine inequality for variables on spheres*. Math. Seminar, Universität Kiel, 1998.

[15] Littlewood, J.E, *On bounded bilinear forms in an infinite numbers of variables*, Quarterly Journal of Mathematics, **2** (1930), 167–171.

[16] Mujica, J., *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover Publications, Mineola, New York, 2010.

[17] Núñez-Alarcón, D., Pellegrino, D., Seoane-Sepúlveda, J., *On the Bohnenblust–Hille inequality and a variant of Littlewood's 4/3 inequality*, J. Funct. Anal. **264** (2013), 326–336.

[18] Núñez-Alarcón, D., Pellegrino, D., Seoane-Sepúlveda, J., Serrano–Rodrígues, D. M., *There exist multilinear Bohnenblust-Hille constants* $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ *with* $\lim_{n\to\infty}(C_{n+1} - C_n) = 0$, J. Funct. Anal. **264** (2013), 429–463.

[19] Praciano–Pereira, T., *On bounded multilinear forms on a class of* ℓ_p *spaces*. J. Math. Anal. Appl. **81** (1981), nº. 2, 561–568.

[20] Santos, J.S., *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, CCEN, UFPB, 2008.

[21] Serrano–Rodríguez, D.M.S., *Sobre as extensões multilineares dos operadores absolutamente somantes*, Tese de Doutorado, CCEN, UFPB, 2014.