

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Hiper-ideais de operadores entre espaços de Banach

Djair Paulino dos Santos

JOÃO PESSOA – PB
MARÇO DE 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Hiper-ideais de operadores entre espaços de Banach

por

Djair Paulino dos Santos

sob a orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

sob a co-orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

João Pessoa – PB
Março de 2017

S237h Santos, Djair Paulino dos.
Hiper-ideais de operadores entre espaços de Banach /
Djair Paulino dos Santos. - João Pessoa, 2017.
65 f.

Orientador: Daniel Marinho Pellegrino.
Co-orientador: Joedson Silva dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Hiper-ideais. 3. Multi-ideais. 4. Ideais.
I. Título.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Hiper-ideais de operadores entre espaços de Banach

por

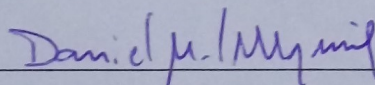
Djair Paulino dos Santos ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

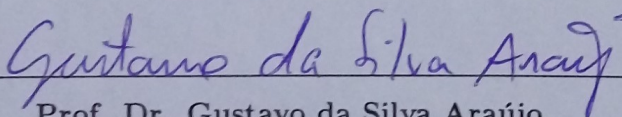
Área de Concentração: Análise Funcional

Aprovada em 6 de março de 2017.

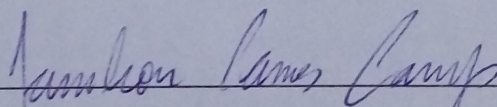
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) de Nível Superior durante a elaboração desta dissertação.

*Aos meus pais,
Eleni e José Pedro.*

Agradecimentos

Para chegar até aqui tive muitas ajudas. Talvez eu chegasse sem algumas delas. Isto eu nunca saberei. Mas sei que com estas ajudas a minha trajetória foi mais fácil. Por isso, tenho muito a agradecer.

Primeiramente, agradeço a Deus pela minha vida e por me dar força e coragem para eu não desistir, apesar das dificuldades encontradas.

Aos meus pais, Eleni e José Pedro, por me ensinarem valores que levarei por toda a minha vida e por sempre terem se esforçado tanto para que eu continuasse estudando. Sei que estão orgulhosos de mim. Esta vitória também é deles.

Aos meus irmãos, Davi, Cleciana, Catiana, José, Janiel e Jessé, por me incentivarem e por me ajudarem sempre que possível. Em especial, a minha irmã querida Clecia, por ter sacrificado parte de dois de seus anos pela a minha educação. A palavra que resume é gratidão.

A todos os meus familiares e amigos que me apoiarem e que acreditaram em mim.

Aos meus professores, do pré-escolar a pós-graduação, por todo o conhecimento transmitido e por toda dedicação a esta profissão não muito valorizada, tenham certeza que vocês fizeram e fazem um trabalho muito bonito e que eu serei eternamente grato. Gostaria que cada um de vocês estivessem aqui hoje e lembrassem do seu aluno Djair que está a se tornar um mestre. Um agradecimento especial para a minha professora do pré-escolar (a qual já não lembro o nome), por ter me passado mesmo sem idade suficiente; para o meu orientador e professor da graduação Ornan Filipe, por todo conhecimento compartilhado, pelas ajudas, pela inspiração e pelo incentivo para eu vir fazer o mestrado aqui na UFPB; para o meu orientador do mestrado Daniel Pellegrino, por toda disponibilidade, paciência e ajuda, e para o meu co-orientador Joedson dos Santos, pela disponibilidade e boa vontade em tirar as minhas dúvidas sempre que precisei.

Aos membros da banca, Gustavo Araújo e Jamilson Campos, por terem aceitado o convite e pelas contribuições dadas.

As escolas que eu estudei, E. M. Nossa Senhora da Saúde (no povoado Dionísio, Igaci-AL) e E. E. de Coité da Pinhas (no povoado Coité das Pinhas, Igaci-AL), e as Universidades Federais de Alagoas e da Paraíba.

Aos meus amigos e colegas do ensino básico e da graduação. Em especial, ao Deivid, a Lindinês e a Ediene.

A minha turma do mestrado. Em especial, a Dayane Santos, por ser uma ótima companheira de estudos e por tantas tardes e manhãs de estudos juntos, e ao Esaú,

pelas tardes de estudos e pela convivência.

Aos meus amigos e colegas da pós-graduação. Em especial, a Sylvia, o Breno, o Renato, a Camila e o Tony.

A Janiely, por tanta compreensão, incentivo e companheirismo.

Ao meu jovem amigo Fernando, pelas inúmeras ajudas, principalmente na dissertação, seja com correção, seja com o latex.

Ao meu amigo Jonathas Phillipe, pela amizade e pelas ajudas neste último ano de mestrado.

A minha amiga-irmã Jucielma Anjos, por sempre estar presente.

Ao meu companheiro inseparável, Djair Paulino, por tantas horas de dedicação em seus objetivos, em particular, neste mestrado e nesta dissertação.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho estudaremos tópicos da teoria de multi-ideais e da recente teoria de hiper-ideais, introduzida por Botelho e Torres. Estudaremos ainda a relação entre o conceito de hiper-ideais e a noção de coerência de multi-ideais.

Palavras-chave: Hiper-ideais, multi-ideais, ideais.

Abstract

In the present work we investigate topics of the theory of multi-ideals and hyper-ideals, introduced by Botelho and Torres. We also investigate the connection between the concept of hyper-ideals and the notion of coherence of multi-ideals.

Keywords: Hyper-ideals, multi-ideals, ideals.

Lista de Símbolos

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{R}$ denota o corpo dos números reais;
- $\mathbb{C}$ denota o corpo dos números complexos;
- $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- $E, F, G, H, E_n, F_n, G_n$ denotam espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$;
- $l_p(E)$ denota o espaço das sequências p -somáveis que tomam valores em E ;
- $l_p^w(E)$ denota o espaço das sequências fracamente p -somáveis que tomam valores em E ;
- $l_\infty(E)$ denota o espaço das sequências limitadas de E ;
- B_E denota a bola fechada do espaço normado E com centro na origem e raio 1;
- E' denota o dual topológico do espaço normado E ;
- $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ denota o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores multilineares contínuos de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F ;
- $\mathcal{L}({}^n E; F)$ denota o espaço $\mathcal{L}(\underbrace{E, \dots, E}_n; F)$;
- $\mathcal{I}$ denota um ideal de operadores entre espaços de Banach;
- $\mathcal{M}$ denota um multi-ideal de operadores entre espaços de Banach;
- $\mathcal{H}$ denota um hiper-ideal de operadores entre espaços de Banach;
- $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$ denota o conjunto das aplicações lineares de tipo finito de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F ;
- $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$ denota o conjunto das aplicações lineares de posto finito de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F ;

-
- $\mathcal{CC}$ denota a classe dos operadores lineares completamente contínuos;
 - $\mathcal{L}_{abs}$ denota a classe dos operadores lineares absolutamente somantes;
 - $\mathcal{L}_{wsc}$ denota a classe dos operadores n -lineares fracamente sequencialmente contínuos;
 - $\mathcal{L}_{msc}$ denota a classe dos operadores multilinearmente sequencialmente contínuos;
 - $\mathcal{L}_{\mathcal{HN}_{(s,r)}}$ denota a classe dos operadores n -lineares hiper- (s, r) -nucleares;
 - $\mathcal{K}$ e $\mathcal{W}$ denotam as classes dos operadores lineares compactos e fracamente compactos, respectivamente;
 - $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ denotam as classes dos operadores multilineares compactos e fracamente compactos, respectivamente.

Sumário

Introdução	3
1 Ideais de Operadores	5
1.1 Notações e Preliminares	5
1.2 Espaços de Sequências	7
1.3 Ideais de Operadores	10
2 Multi-ideais	16
2.1 Exemplos	17
2.2 Ideais de Composição	22
3 Hiper-ideais	26
3.1 Propriedades e Exemplos	27
3.2 Coerência e Hiper-ideais	50
Referências	56

Introdução

A teoria de ideais de operadores ganhou força a partir da década de 60 com a sistematização feita por Albrecht Pietsch das classes de operadores lineares que já vinham sendo estudadas individualmente por grandes matemáticos, como, por exemplo, A. Grothendieck, D. Hilbert e F. Riesz. Mais tarde, em 1978, Pietsch publica o livro intitulado *Operator Ideals*, no qual são apresentados vários ideais clássicos, dentre eles, os ideais dos operadores compactos e dos operadores nucleares. Posteriormente, o próprio Pietsch, em seu artigo *Ideals of multilinear functionals*, apresenta o conceito de ideal para operadores m -lineares, conhecido como multi-ideal.

Dizemos que uma subclasse $\mathcal{M}$ dos operadores multilineares contínuos entre espaços de Banach é um *multi-ideal de operadores* multilineares se as suas componentes

$$\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \cap \mathcal{M},$$

onde $E_1, \dots, E_n$ e F são espaços de Banach arbitrários, satisfazem as seguintes condições:

M1: $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ que contém os operadores de tipo finito.

M2 (propriedade de multi-ideal) : se $T_1 \in \mathcal{L}(G_1; E_1)$, ..., $T_n \in \mathcal{L}(G_n; E_n)$, $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, como no diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} G_1 & \times & G_2 & \times & \cdots & \times & G_n \\ \downarrow T_1 & & \downarrow T_2 & & & & \downarrow T_n \\ E_1 & \times & E_2 & \times & \cdots & \times & E_n \end{array} \xrightarrow{A} F \xrightarrow{t} H,$$

$t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)$

então a composição $t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{M}(G_1, \dots, G_n; H)$, onde $[t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)](x_1, \dots, x_n) := t(A(T_1(x_1), \dots, T_n(x_n)))$.

Se observarmos a definição acima com cuidado, notamos que ainda é possível generalizá-la. Podemos compor no lado direito com operadores multilineares, em vez de usarmos somente operadores lineares. Isto, possivelmente, fará com que o grau de linearidade do operador obtido aumente. Tal generalização foi proposta por E. Torres e

G. Botelho no artigo *Hyper-Ideals of multilinear operators* [3], que foi a fonte principal para o desenvolvimento deste trabalho. Torres também aborda esse assunto na sua tese de doutorado, que também nos serviu de apoio. Embora os conceitos aqui trabalhados possuam uma versão polinomial, nos contentamos com a versão dos operadores multilineares, o leitor interessado pode consultar a tese [7].

Nosso trabalho está dividido em três capítulos além do apêndice, que foi colocado com a finalidade de trazer alguns resultados usados que não fazem parte da ementa de um curso básico de Análise Funcional. Esses resultados não foram demonstrados, mas há indicação de onde essas demonstrações podem ser encontradas. Para os dois primeiros capítulos nossa principal fonte foi o trabalho [7].

No primeiro capítulo, estabeleceremos notações úteis para o decorrer da dissertação e apresentaremos definições que serão usadas posteriormente. Além disso, abordaremos o conceito chave de ideais de operadores entre espaços de Banach, que podemos enxergar como um caso particular dos hiper-ideais.

No segundo capítulo, estudamos uma extensão do conceito de ideal, abordando os multi-ideais. Apresentaremos alguns multi-ideais clássicos como, por exemplo, a classe dos operadores de posto finito e a classe dos operadores fracamente sequencialmente contínuos. Por fim, apresentaremos uma forma de obter multi-ideais a partir de ideais de operadores.

No terceiro capítulo, assim como fizemos no precedente, estudaremos a noção ampliada de multi-ideal. Agora, diferentemente dos últimos conceitos, cada classe de hiper-ideais poderá conter operadores lineares de diferentes graus de linearidade. Veremos que ao pedir mais de cada classe, alguns multi-ideais deixam de ser hiper-ideais e, para cada um destes, buscamos outra classe que a generalize e que seja um hiper-ideal. Veremos em particular que o menor multi-ideal de Banach não é nem um hiper-ideal e apresentaremos o menor hiper-ideal de Banach. Finalizamos apresentando o conceito de coerência e estudando as relações entre multi-ideais coerentes e multi-ideais hiper-ideais. Para este capítulo, nossa principal referência foi o trabalho [3].

Capítulo 1

Ideais de Operadores

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados que serão usados nos capítulos subsequentes. Aqui, priorizamos o conceito de ideais de operadores, apresentando alguns exemplos que serão necessários para o restante do trabalho.

1.1 Notações e Preliminares

Para evitar repetições desnecessárias, as letras E, F, G, H, E_n, G_n , com $n \in \mathbb{N}$, denotarão espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ denotaremos o espaço de Banach de operadores lineares contínuos de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F considerando a norma uniforme $\|\cdot\|$. Quando $F = \mathbb{K}$, escreveremos somente $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$. Se $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$, diremos que A é uma forma n -linear em $E_1 \times \dots \times E_n$. Se tivermos $E = E_1 = \dots = E_n$ usaremos a notação mais reduzida $\mathcal{L}({}^n E; F)$. No caso particular em que $n = 1$ e $F = \mathbb{K}$ escreveremos E' em vez de $\mathcal{L}(E; F)$. A bola fechada unitária do espaço vetorial E será denotada por B_E . Quando não mencionarmos o contrário, estaremos considerando em $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ a topologia induzida pela norma uniforme.

No presente trabalho, tentamos padronizar a notação dos escalares (utilizando $\alpha, \lambda, \gamma, \beta$), dos funcionais lineares (usando $\varphi, \varphi_n, \psi, \psi_n$), dos vetores (utilizando x, y, z, x_i, y_i, z_i), das transformações lineares (usando T, T_j, u, v, u_j, v_j) e das transformações n -lineares (usando B, B_n, A, A_n). Isto nos permitirá, a depender do contexto, omitir o que cada símbolo representa.

Dados $\varphi_1 \in E'_1, \dots, \varphi_n \in E'_n$ e $y \in F$, denotamos por

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y \tag{1.1}$$

o operador n -linear de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F definido por

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \cdot y.$$

Dados $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$ e $y \in F$, denotamos por $A \otimes y$ o operador n -linear definido por

$$A \otimes y(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n) \cdot y.$$

Como podemos notar, um operador do tipo (1.1) é um caso particular com $A = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n$.

Definição 1.1. Um operador n -linear é dito ser *de tipo finito* se ele for escrito como combinações lineares finitas de operadores n -lineares do tipo (1.1). Denotaremos por $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$ o conjunto das aplicações lineares de tipo finito de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .

Exemplo 1.1. O operador

$$\begin{aligned} T : \quad l_2 \times l_2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ ((x_i), (y_i)) &\longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \end{aligned}$$

não é de tipo finito.

Com efeito, se fosse, existiriam $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_j^{(1)}, \varphi_j^{(2)} \in l'_2, j = 1, \dots, k$, tais que

$$T(x, y) = \sum_{j=1}^k \varphi_j^{(1)}(x) \varphi_j^{(2)}(y), \quad \forall (x, y) \in l_2 \times l_2.$$

Da dualidade $l'_2 = l_2$, para cada $j = 1, \dots, k$, existem $(a_i^{(j)})_{i=1}^{\infty}, (b_i^{(j)})_{i=1}^{\infty} \in l_2$ tais que, para todo $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2$,

$$\varphi_j^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(j)} x_i \quad \text{e} \quad \varphi_j^{(2)}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(j)} y_i.$$

Assim,

$$T(x, y) = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(j)} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(j)} y_i \right).$$

Note que

$$1 = T(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^k a_i^j b_i^j \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad i \longrightarrow \infty,$$

pois $(a_i^j)_{i=1}^{\infty}, (b_i^j)_{i=1}^{\infty} \in l_2$. Logo T não é de tipo finito.

Pelo que mostramos no Exemplo 1.1, segue que $T \notin \overline{\mathcal{L}_f}$, pois para qualquer operador de tipo finito $T_f \in \mathcal{L}(l_2, l_2)$, com

$$T_f(x, y) = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(j)} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(j)} y_i \right),$$

temos

$$\|T - T_f\| \geq |T(e_i, e_i) - T_f(e_i, e_i)| \longrightarrow 1.$$

Definição 1.2. Um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dito ser *de posto finito* se a imagem de A é um subespaço vetorial de F de dimensão finita. Neste caso, escrevemos $A \in \mathcal{L}_F(E_1, \dots, E_n; F)$.

Segue da definição que todo operador n -linear com contradomínio de dimensão finita é de posto finito. Em particular, toda forma n -linear é de posto finito. É imediato que todo operador de tipo finito é de posto finito. A recíproca não é, em geral, verdadeira, basta ver o Exemplo 1.1. No entanto, no contexto linear, estes conceitos coincidem.

1.2 Espaços de Sequências

Nesta seção apresentaremos alguns espaços de sequências e o conceito de p -norma.

Definição 1.3 (p-norma). Sejam E um espaço vetorial e $0 < p \leq 1$. Dizemos que uma função $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, \infty)$ é uma p -norma em E se:

- i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$;
- iii) $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$, para quaisquer $x, y \in E$.

Quando munimos E com uma p -norma, dizemos que o par $(E, \|\cdot\|)$ é um *espaço vetorial p -normado* ou, simplesmente, um espaço p -normado. Neste caso, podemos considerar uma métrica em E ,

$$(x, y) \in E \times E \longmapsto \|x - y\|^p \in \mathbb{R},$$

induzida pela p -norma e considerar E com a estrutura topológica de espaço métrico induzida por esta métrica. Quando E é completo com respeito a esta métrica, dizemos que $(E, \|\cdot\|)$ é um *espaço p -Banach*. No caso $p = 1$ diremos somente que E é um espaço normado (resp., de Banach).

Definição 1.4. Sejam $0 < q < \infty$ e $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. O espaço vetorial das *sequências absolutamente q -somáveis* em E será denotado por

$$l_q(E) := \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q < \infty\}.$$

A expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q = \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^q \right)^{1/q}$$

define uma q -norma em $l_q(E)$ se $0 < q < 1$ e uma norma se $q \geq 1$. Com esta q -norma (resp., norma), $l_q(E)$ é um espaço q -Banach (resp., de Banach). No caso particular em que $E = \mathbb{K}$ escrevemos somente l_q em vez de $l_q(\mathbb{K})$.

Definição 1.5. Sejam $0 < q < \infty$ e $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. O espaço vetorial das *sequências fracamente q -somáveis em E* será denotado por

$$l_q^w(E) := \{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^q < \infty, \quad \forall \varphi \in E'\}.$$

A expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^q \right)^{1/q}$$

define uma q -norma em $l_q^w(E)$ se $0 < q < 1$ e uma norma se $q \geq 1$. Com esta q -norma (resp., norma), $l_q^w(E)$ é um espaço q -Banach (resp., de Banach).

Definição 1.6. Denotaremos por $l_\infty(E)$ o espaço das *sequências limitadas em E* . A expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|$$

define uma norma em $l_\infty(E)$, com a qual este espaço é completo.

Definição 1.7. Denotaremos por $l_\infty^w(E)$ o espaço das *sequências fracamente limitadas em E* ,

$$l_\infty^w(E) := \{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in l_\infty(\mathbb{K}), \quad \forall \varphi \in E'\}.$$

A expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\infty} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_i))_{i=1}^\infty\|_\infty$$

define uma norma em $l_\infty^w(E)$, com a qual este espaço é completo.

Proposição 1.1. Sejam $0 < q \leq \infty$ e E um espaço Banach. Então

$$l_q(E) \subseteq l_q^w(E) \subseteq l_\infty(E) = l_\infty^w(E).$$

Demonstração. Seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in l_q(E)$. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q < \infty.$$

Seja $\varphi \in E'$ arbitrário. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi\|^q \cdot \|x_j\|^q = \|\varphi\|^q \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q < \infty,$$

logo $x \in l_q^w(E)$ e $l_q(E) \subseteq l_q^w(E)$.

Seja $y = (y_j)_{j=1}^\infty \in l_q^w(E)$. Então, para qualquer funcional $\varphi \in E'$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(y_j)|^q < \infty.$$

Logo, para qualquer $j \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi(y_j)|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(y_j)|^q < \infty,$$

e assim

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(y_j)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(y_j)|^q \right)^{1/q} =: c < \infty.$$

Portanto,

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(y_j))_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} |\varphi(y_j)| \right) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(y_j)| \right) \leq c.$$

Isto mostra que $y \in l_\infty^w(E)$ e, por conseguinte, $l_q^w(E) \subseteq l_\infty^w(E)$. Falta mostrar a igualdade $l_\infty(E) = l_\infty^w(E)$. Seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in l_\infty^w(E)$. Então, para qualquer funcional $\varphi \in E'$, $(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in l_\infty(\mathbb{K})$ e, portanto, a família de operadores lineares contínuos $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $T_j : E' \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $T_j(\varphi) = \varphi(x_j)$, é pontualmente limitada. Pelo Princípio da Limitação Uniforme, segue que existe $c > 0$ tal que

$$\|T_j\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} T_j(\varphi) = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \varphi(x_j) = \|x_j\| \leq c, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Disto decorre que $x \in l_\infty(E)$. Mostremos a outra inclusão. Seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in l_\infty(E)$.

Então

$$\begin{aligned}
 \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_\infty &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} |\varphi(x_j)| \right) \\
 &\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\varphi\| \cdot \|x_j\| \right) \\
 &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi\| \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\| \right) \\
 &\leq \|x\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Logo $x \in l_\infty^w(E)$ e $l_\infty(E) \subseteq l_\infty^w(E)$. ■

Prova-se que para todo $0 < q < \infty$ e todo espaço de Banach E tem-se

$$l_q(E) = l_q^w(E) \iff \dim E < \infty.$$

A implicação $(\Rightarrow)$ segue de [4] (Theorem 2.18) e a outra implicação é imediata.

1.3 Ideais de Operadores

O conceito de ideal de operadores é um assunto recorrente em Análise Funcional desde a década de 60 e tem sido motivo de muitas pesquisas. O grande matemático A. Grothendieck foi um dos que mais contribuíram para o desenvolvimento da teoria. Seus estudos e de outros matemáticos como Hilbert e Riesz foram sistematizados por A. Pietsch que, posteriormente, publica o famoso livro “Operator Ideals”, em 1978. A partir daí, muitos matemáticos se interessaram pelo tema e desenvolvem pesquisas até os dias atuais. Nesta seção trataremos deste assunto e exibiremos alguns exemplos importantes de ideais.

Definição 1.8 (Ideal de operadores). Seja $\mathcal{I}$ uma subclasse da classe dos operadores lineares contínuos entre espaços de Banach. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal de operadores* se as suas componentes

$$\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I},$$

onde E e F são espaços de Banach arbitrários, satisfazem as seguintes condições:

I1: $\mathcal{I}(E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$ e $\mathcal{L}_f(E; F) \subseteq \mathcal{I}(E; F)$;

I2 (propriedade de ideal) : se $u_1 \in \mathcal{L}(G; E)$, $u_2 \in \mathcal{I}(E; F)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(F; H)$, então a composição $u_3 \circ u_2 \circ u_1 \in \mathcal{I}(G; H)$.

A condição **I1** exige que cada componente seja um espaço vetorial e, portanto, faz sentido falar em p -norma na classe $\mathcal{I}$. Além disso, pede que um ideal não seja muito “pequeno” (deve conter pelo menos a classe dos ideais de tipo finito). A propriedade de ideal exige que a classe absorva operadores com relação à composição, tanto pelo lado esquerdo quanto pelo lado direito.

Definição 1.9. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal p -normado* quando existem $0 < p \leq 1$ e uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)$ tais que:

- a) a função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a qualquer componente $\mathcal{I}(E; F)$ é uma p -norma;
- b) o operador identidade

$$\begin{aligned} I : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

é tal que $\|I\|_{\mathcal{I}} = 1$;

- c) se $u_1 \in \mathcal{L}(G; E)$, $u_2 \in \mathcal{I}(E; F)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|u_3 \circ u_2 \circ u_1\|_{\mathcal{I}} \leq \|u_1\| \cdot \|u_2\|_{\mathcal{I}} \cdot \|u_3\|.$$

Usamos a notação $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ para representar o ideal juntamente com uma p -norma.

Se todas as componentes $\mathcal{I}(E; F)$ forem espaços de Banach relativamente à topologia induzida pela p -norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, então dizemos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal p -Banach*. No caso particular em que $p = 1$ dizemos simplesmente ideal normado ou ideal de Banach.

Definição 1.10. Seja $\mathcal{I}$ um ideal. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal fechado* quando $\mathcal{I}(E; F)$ for um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E; F)$ para quaisquer espaços de Banach E e F , considerando a norma uniforme.

Finalizaremos este capítulo mostrando alguns exemplos de ideais de operadores.

A classe dos *operadores lineares completamente contínuos*, operadores que transformam sequências fracamente convergentes em sequências convergentes, será denotada por $\mathcal{CC}$.

Proposição 1.2. A classe $\mathcal{CC}$ dos operadores lineares completamente contínuos é um ideal fechado.

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{CC}(E; F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergindo fraco para x em E . Então $A(x_n) \rightarrow A(x)$ e $B(x_n) \rightarrow B(x)$. Logo

$$(\lambda A + B)(x_n) = \lambda A(x_n) + B(x_n) \rightarrow \lambda A(x) + B(x) = (\lambda A + B)(x).$$

Isto implica que $\lambda A + B \in \mathcal{CC}(E; F)$ e, portanto, $\mathcal{CC}(E; F)$ é um espaço vetorial. Seja $A = \varphi \otimes y$, com $\varphi \in E'$ e $y \in F$. Seja $x_n \rightharpoonup x$ em E . Então $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$. Portanto

$$A(x_n) = \varphi(x_n)y \longrightarrow \varphi(x)y = A(x).$$

Logo, $A \in \mathcal{CC}(E; F)$ e $\mathcal{CC}(E; F)$ contém os operadores de tipo finito.

Mostremos agora que $\mathcal{CC}$ possui a propriedade de ideal. Sejam $u_1 \in \mathcal{L}(G; E)$, $u_2 \in \mathcal{CC}(E; F)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(F; H)$. Considere $x_n \rightharpoonup x$ em G . Então $u_1(x_n) \rightharpoonup u_1(x)$. Assim $u_2(u_1(x_n)) \longrightarrow u_2(u_1(x))$. Da continuidade de u_3 , segue que

$$(u_3 \circ u_2 \circ u_1)(x_n) \longrightarrow (u_3 \circ u_2 \circ u_1)(x).$$

Logo, $(u_3 \circ u_2 \circ u_1) \in \mathcal{CC}(G; H)$ e $\mathcal{CC}$ é um ideal. Seja $(u_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\mathcal{CC}(E; F)$ convergindo para u na norma uniforme. Mostremos que $u \in \mathcal{CC}(E; F)$. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em E convergindo fraco para x . Então existe $c > 0$ tal que, para todo n :

$$\|x_n\| \leq c \quad \text{e} \quad \|x\| \leq c.$$

Como $u_j \longrightarrow u$, dado $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_j - u\| < \frac{\epsilon}{3c}, \quad \forall j \geq j_0.$$

Como $u_{j_0} \in \mathcal{CC}(E; F)$, temos $u_{j_0}(x_n) \longrightarrow u_{j_0}(x)$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_{j_0}(x_n) - u_{j_0}(x)\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim, para n suficientemente grande, vale

$$\begin{aligned} \|u(x_n) - u(x)\| &\leq \|u(x_n) - u_{j_0}(x_n)\| + \|u_{j_0}(x_n) - u_{j_0}(x)\| + \|u_{j_0}(x) - u(x)\| \\ &< \|u - u_{j_0}\| \cdot \|x_n\| + \frac{\epsilon}{3} + \|u_{j_0} - u\| \cdot \|x\| \\ &< \frac{\epsilon}{3c} \cdot c + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3c} \cdot c \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $u(x_n) \longrightarrow u(x)$ e $\mathcal{CC}(E; F)$ é fechado. ■

Definição 1.11. Um operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ entre espaços de Banach é *absolutamente somante* se T transforma sequências fracamente somáveis em E em sequências absolutamente somáveis em F , isto é, $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in l_1(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_1^w(E)$.

Proposição 1.3. A classe $\mathcal{L}_{abs}$ dos operadores lineares absolutamente somantes é um ideal.

Demonstração. Mostremos inicialmente que $\mathcal{L}_{abs}(E; F)$ é um espaço vetorial, para quaisquer E e F Banach. Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_{abs}(E; F)$. Então, dada uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_1^w(E)$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|T_i(x_j)\| < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|(\lambda T_1 + T_2)(x_j)\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda| \|T_1(x_j)\| + \sum_{j=1}^{\infty} \|T_2(x_j)\| < \infty.$$

Portanto, $\lambda T_1 + T_2 \in \mathcal{L}_{abs}$ e $\mathcal{L}_{abs}(E; F)$ é um espaço vetorial.

Verifiquemos agora a propriedade de ideal. Sejam $u_1 \in \mathcal{L}(G, E)$, $u_2 \in \mathcal{L}_{abs}(E; F)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(F; H)$ e seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(G)$. Considere $\varphi \in E'$. Então $\varphi \circ u_1 \in G'$ e, portanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(u_1(x_j))| < \infty \implies (u_1(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(E).$$

Logo, $((u_2 \circ u_1)(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_1(F)$ e, da continuidade do operador u_3 , segue que $((u_3 \circ u_2 \circ u_1)(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_1(H)$. Isto mostra que $u_3 \circ u_2 \circ u_1 \in \mathcal{L}_{abs}(G; H)$. ■

Definição 1.12. Seja E um espaço topológico. Dizemos que um conjunto $X \subseteq E$ é *relativamente compacto* quando $\overline{X}$ for compacto. Dizemos que $X \subseteq E$ é *relativamente fracamente compacto* quando $\overline{X}$ for compacto considerando a topologia fraca.

Exemplo 1.2. Seja X um espaço vetorial normado de dimensão finita. Então a bola aberta $B(0, 1)$ centrada na origem e raio 1 é relativamente compacta em X .

Definição 1.13. Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Dizemos que A é *compacta* (*fracamente compacta*, respectivamente) se $A(B_{E_1}, \dots, B_{E_n})$ é um subconjunto relativamente compacto (relativamente fracamente compacto, respectivamente) de F .

Exemplo 1.3. Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados, com $\dim F < \infty$. Então qualquer operador linear contínuo $T : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ é compacto.

Demonstração. Seja $B := B_{E_1}, \dots, B_{E_n}$. Como T é linear e contínuo segue que $\overline{T(B)}$ é limitado. Como os compactos de um espaço vetorial normado são precisamente os conjuntos limitados e fechados, concluímos que $\overline{T(B)}$ é compacto e, portanto, T é compacto. ■

Denotaremos por $\mathcal{K}$ e $\mathcal{W}$ as classes dos operadores lineares compactos e fracamente compactos, respectivamente. Além disso, denotaremos $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ as classes dos operadores multilineares compactos e fracamente compactos, respectivamente.

Na próxima demonstração, para mostrar que um operador é compacto usaremos a caracterização dos operadores compactos por meio de sequências: $T : E \longrightarrow F$ é compacto se, e somente se, $(T(x_j))_{j=1}^{\infty}$ possui subsequência convergente sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada.

Proposição 1.4. As classes $\mathcal{K}$ e $\mathcal{W}$ são ideais fechados.

Demonstração. Mostraremos apenas que $\mathcal{K}$ é um ideal fechado, pois a demonstração para $\mathcal{W}$ é análoga. Inicialmente, mostremos que $\mathcal{K}(E; F)$ é um espaço vetorial que contém os operadores de tipo finito. Usaremos a caracterização dos operadores compactos por meio de seqüências. Sejam $A, B \in \mathcal{K}(E; F)$ e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma seqüência limitada em E . Como A é compacto, existe uma subsequência $(A(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$ de $(A(x_n))_{n=1}^\infty$ que converge. Da compacidade de B , segue que $(B(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$ possui uma subsequência convergente $(B(y_n))_{n=1}^\infty$. Por ser uma subsequência de $(A(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$, $(A(y_n))_{n=1}^\infty$ também converge. Logo, $((\lambda A + B)(y_n))_{n=1}^\infty$ é convergente e, portanto, $\lambda A + B \in \mathcal{K}(E; F)$. Seja $T \in \mathcal{L}(E; F)$ de tipo finito e $M \subseteq E$ limitado. Então $\overline{T(M)}$ é limitado e fechado e, portanto, compacto, pois $\dim(T(E)) < \infty$.

Sejam $T \in \mathcal{K}(E; F)$, $S \in \mathcal{L}(F; H)$ e $R \in \mathcal{L}(G; E)$. Mostremos que $S \circ T \circ R$ está em $\mathcal{K}(G; H)$. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq G$ limitada. Como $R \in \mathcal{L}(G; E)$, segue que $(R(x_n))_{n=1}^\infty$ também é limitada. Como $T \in \mathcal{K}(E; F)$, $(T(R(x_n)))_{n=1}^\infty$ possui uma subsequência convergente, digamos $((T \circ R)(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$. Da continuidade de S , segue que $((S \circ T \circ R)(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$ também converge. Isto mostra que $(S \circ T \circ R) \in \mathcal{K}(G; H)$. Logo, $\mathcal{K}$ é um ideal.

Sejam $T_j \rightarrow T$, onde $T_j \in \mathcal{K}(E; F)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e $(x_m)_{m=1}^\infty$ uma seqüência limitada em E . Da compacidade de T_1 , $(x_m)_{m=1}^\infty$ possui uma subsequência, $(x_{1,m})_{m=1}^\infty$, tal que $(T_1(x_{1,m}))_{m=1}^\infty$ é de Cauchy (convergente). Da mesma forma, $(x_{1,m})_{m=1}^\infty$ possui uma subsequência $(x_{2,m})_{m=1}^\infty$ tal que $(T_2(x_{2,m}))_{m=1}^\infty$ é de Cauchy. Este processo pode ser repetido para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e podemos então considerar a seqüência diagonal

$$(y_m)_{m=1}^\infty = (x_{1,1}, x_{2,2}, x_{3,3}, \dots, x_{m,m}, \dots),$$

que é uma subsequência de $(x_m)_{m=1}^\infty$ tal que $(T_n(y_m))_{m=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy em F para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $(x_m)_{m=1}^\infty$ é limitada, existe $c > 0$ tal que $\|y_m\| \leq c$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Da convergência $T_n \rightarrow T$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T - T_n\| < \frac{\epsilon}{3c}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Como $(T_{n_0}(y_m))_{m=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_{n_0}(y_j) - T_{n_0}(y_k)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall j, k \geq n_1.$$

Assim, para j e k suficientemente grandes,

$$\begin{aligned} \|T(y_j) - T(y_k)\| &\leq \|T(y_j) - T_{n_0}(y_j)\| + \|T_{n_0}(y_j) - T_{n_0}(y_k)\| + \|T_{n_0}(y_k) - T(y_k)\| \\ &< \|T - T_{n_0}\| \|y_j\| + \frac{\epsilon}{3} + \|T_{n_0} - T\| \|y_k\| \\ &< \frac{\epsilon}{3c} \cdot c + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3c} \cdot c \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

1. Ideais de Operadores

Logo $(T(y_j))_{j=1}^{\infty}$ é de Cauchy e, portanto, convergente. Isto mostra que $T \in \mathcal{K}(E; F)$ e que $\mathcal{K}(E; F)$ é fechado. ■

Capítulo 2

Multi-ideais

A definição de multi-ideal é uma generalização do conceito de ideal. Agora, em vez de considerarmos uma classe das aplicações lineares, consideramos uma classe das aplicações multilineares entre espaços de Banach. O trabalho de A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, de 1983 foi um marco histórico no desenvolvimento da teoria de multi-ideais. Na ocasião, Pietsch apresenta uma teoria de ideais para aplicações multilineares. Neste capítulo apresentaremos exemplos clássicos de multi-ideais e mostraremos uma forma de obter multi-ideais a partir de ideais lineares, o método de composição. A maioria dos exemplos aqui dados serão retomados no próximo capítulo com a intenção de analisar se eles pertencem a uma classe mais restrita, a dos hiper-ideais.

Definição 2.1 (Multi-ideal de operadores). Seja $\mathcal{M}$ uma subclasse dos operadores multilineares contínuos entre espaços de Banach. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um *multi-ideal* (ou *ideal de operadores multilineares*) se as suas componentes

$$\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \cap \mathcal{M},$$

onde $E_1, \dots, E_n$ e F são espaços de Banach arbitrários, satisfazem as seguintes condições:

M1: $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$;

M2 (propriedade de multi-ideal) : se $T_1 \in \mathcal{L}(G_1; E_1), \dots, T_n \in \mathcal{L}(G_n; E_n)$, $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{M}(G_1, \dots, G_n; H).$$

Um multi-ideal é chamado de *multi-ideal p -normado* se existem $0 < p \leq 1$ e uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ tais que:

- a) a função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrita a qualquer componente $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é uma p -norma;
 b) o operador

$$\begin{aligned} I_n : \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \lambda_1 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

é tal que $\|I_n\|_{\mathcal{M}} = 1$;

- c) se $T_1 \in \mathcal{L}(G_1; E_1), \dots, T_n \in \mathcal{L}(G_n; E_n), A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} \cdot \|T_1\| \cdots \|T_n\|.$$

Assim como no caso de ideais lineares, se todas as componentes $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ forem espaços de Banach relativamente à topologia induzida pela p -norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, então dizemos que $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um *multi-ideal p -Banach* ou, no caso $p = 1$, de *Banach*.

2.1 Exemplos

Sabemos da definição que qualquer multi-ideal contém a classe dos operadores de tipo finito. Mas será que existe um multi-ideal que está contido em qualquer outro multi-ideal? A resposta (positiva) é dada pelo próximo resultado.

Proposição 2.1. A classe $\mathcal{L}_f$ é o menor multi-ideal.

Demonstração. É imediato que $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial que contém os operadores de tipo finito. Mostremos que $\mathcal{L}_f$ possui a propriedade de ideal. Sejam $t \in \mathcal{L}(F; H), T_1 \in \mathcal{L}(G_1; E_1), \dots, T_n \in \mathcal{L}(G_n; E_n)$ e $A \in \mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$. Então existem $k \in \mathbb{N}$, funcionais $\varphi_j^i \in E_i', i = 1, \dots, n$, e vetores $y_j \in F, j = 1, \dots, k$, tais que

$$A = \sum_{j=1}^k \varphi_j^1 \otimes \dots \otimes \varphi_j^n \otimes y_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned} [t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)](x_1, \dots, x_n) &= t(A(T_1(x_1), \dots, T_n(x_n))) \\ &= t\left(\sum_{j=1}^k \varphi_j^1(T_1(x_1)) \cdots \varphi_j^n(T_n(x_n)) \cdot y_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^k (\varphi_j^1 \circ T_1)(x_1) \cdots (\varphi_j^n \circ T_n)(x_n) \cdot t(y_j) \\ &= \left(\sum_{j=1}^k \psi_j^1 \otimes \dots \otimes \psi_j^n \otimes z_j\right)(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

onde $\psi_j^l = \varphi_j^l \circ T_l : G_l \longrightarrow \mathbb{K}$, $l = 1, \dots, n$, e $z_j := t(y_j) \in H$, $j = 1, \dots, k$. Isto mostra que $t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}_f(G_1, \dots, G_n; H)$. Logo $\mathcal{L}_f$ é um multi-ideal. A minimalidade segue da definição de multi-ideal. ■

Segue da definição que qualquer multi-ideal pode se tornar normado com a norma uniforme. Mas será que existe um menor multi-ideal de Banach? E, no caso positivo, qual é esta classe? Vamos responder estas perguntas.

Definição 2.2. Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Diz-se que A é um *operador nuclear* se, para cada $l = 1, \dots, n$, é possível obter uma sequência limitada $(\varphi_j^l)_{j=1}^\infty$ de funcionais em E_l' , uma sequência $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ em l_1 e uma sequência limitada $(y_j)_{j=1}^\infty$ em F tais que

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j^1(x_1) \cdots \varphi_j^n(x_n) \cdot y_j.$$

A expressão acima é dita uma *representação nuclear para A* e o espaço de todos operadores n -lineares nucleares de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F é denotado por $\mathcal{L}_N(E_1, \dots, E_n; F)$.

A norma nuclear em $\mathcal{L}_N$ é definida por

$$\|A\|_{\mathcal{L}_N} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|\varphi_j^1\| \cdots \|\varphi_j^n\| \cdot \|y_j\| \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as possíveis representações nucleares de A .

Proposição 2.2. Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach. Então

$$\mathcal{L}_N(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \overline{\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)}^{\|\cdot\|}.$$

Demonstração. Dado $A \in \mathcal{L}_N(E_1, \dots, E_n; F)$, existem uma sequência limitada $(\varphi_j^l)_{j=1}^\infty$ de funcionais em E_l' , uma sequência $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ em l_1 e uma sequência limitada $(y_j)_{j=1}^\infty$ em F tais que

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \otimes \varphi_j^1 \otimes \cdots \otimes \varphi_j^n \otimes y_j.$$

Como as sequências $(\varphi_j^l)_{j=1}^\infty$, $l = 1, \dots, n$ e $(y_j)_{j=1}^\infty$ são limitadas, existe $c > 0$ tal que $\|\varphi_j^1\| \cdots \|\varphi_j^n\| \cdot \|y_j\| \leq c$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ está em l_1 , dado $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} |\lambda_j| < \frac{\epsilon}{c}.$$

Logo $A = \lim B_k$, onde $B_k := \sum_{j=1}^k \lambda_j \otimes \varphi_j^1 \otimes \cdots \otimes \varphi_j^n \otimes y_j$, pois para $k \geq j_0$,

$$\begin{aligned}
\|A - B_k\| &= \left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j \otimes \varphi_j^1 \otimes \cdots \otimes \varphi_j^n \otimes y_j \right\| \\
&\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\lambda_j \otimes \varphi_j^1 \otimes \cdots \otimes \varphi_j^n \otimes y_j\| \\
&= \sum_{j=k+1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|\varphi_j^1\| \cdots \|\varphi_j^n\| \cdot \|y_j\| \\
&\leq c \cdot \sum_{j=k+1}^{\infty} |\lambda_j| \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $B_k \in \mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $A \in \overline{\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)}^{\|\cdot\|}$. ■

Teorema 2.3 (Critério da Série para multi-ideais). *Sejam $0 < p \leq 1$, $\mathcal{M}$ uma subclasse das aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ uma função. Então $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um multi-ideal p -Banach se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- i) $\mathcal{M}$ satisfaz a propriedade de multi-ideal;
- ii) o operador $I_n : \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, dado por $I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, pertence a $\mathcal{M}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- iii) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ satisfaz as condições b) e c) da Definição 2.1;
- iv) Se $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{M}}^p < \infty$ então $A := \sum_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\|A\|_{\mathcal{M}}^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{M}}^p$.

Demonstração. A prova é análoga a do Teorema 3.4 apresentado no capítulo 3 e, por isso, decidimos demonstrá-la mais a frente. ■

Proposição 2.4. O par $(\mathcal{L}_{\mathcal{N}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}})$ é o menor multi-ideal de Banach.

Demonstração. Usaremos o Teorema do Critério da Série para multi-ideais.

- i) Seja $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(E_1, \dots, E_n; F)$ e sejam $T_1 \in \mathcal{L}(G_1, E_1), \dots, T_n \in \mathcal{L}(G_n, E_n)$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$. Então existem uma sequência limitada $(\varphi_j^l)_{j=1}^{\infty}$ de funcionais em E_l' , uma sequência $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ em l_1 e uma sequência limitada $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ em F tais que

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j^1(x_1) \cdots \varphi_j^n(x_n) \cdot y_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 [v \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)](x_1, \dots, x_n) &= v(A(T_1(x_1), \dots, T_n(x_n))) \\
 &= v\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\varphi_j^1 \circ T_1)(x_1) \cdots (\varphi_j^n \circ T_n)(x_n) \cdot y_j\right) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\varphi_j^1 \circ T_1)(x_1) \cdots (\varphi_j^n \circ T_n)(x_n) \cdot v(y_j) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \phi_j^1(x_1) \cdots \phi_j^n(x_n) \cdot z_j,
 \end{aligned}$$

onde $\phi_j^l = \varphi_j^l \circ T_l : G_l \longrightarrow \mathbb{K}$, $l = 1, \dots, n$, e $z_j := v(y_j) \in H$, $j = 1, \dots, k$. Como $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada e v é contínuo, segue que $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ também é limitada. Logo $v \circ A \circ (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(G_1, \dots, G_n; H)$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ satisfaz a propriedade de multi-ideal.

ii) Seja φ o funcional linear identidade em $\mathbb{K}$. Então

$$I_n(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n).$$

Logo, $I_n \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}({}^n\mathbb{K}; \mathbb{K})$.

iii) Pelo item i) acima, temos

$$\begin{aligned}
 \|v \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|\varphi_j^1 \circ T_1\| \cdots \|\varphi_j^n \circ T_n\| \cdot \|v(y_j)\| \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|\varphi_j^1\| \cdot \|T_1\| \cdots \|\varphi_j^n\| \cdot \|T_n\| \cdot \|v\| \cdot \|y_j\| \\
 &= (\|T_1\| \cdots \|T_n\| \cdot \|v\|) \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|\varphi_j^1\| \cdots \|\varphi_j^n\| \cdot \|y_j\|,
 \end{aligned}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as representações nucleares de A , obtemos

$$\|v \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} \leq \|T_1\| \cdots \|T_n\| \cdot \|v\| \cdot \|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}}.$$

Pelo item ii), já sabemos que $\|I_n\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} \leq \|\varphi\|^n = 1^n = 1$. Suponha, por absurdo, que $\|I_n\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} < 1$. Então existe uma representação nuclear

$$I_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j^1(x_1) \cdots \varphi_j^n(x_n)$$

tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|\varphi_j^1\| \cdots \|\varphi_j^n\| < 1$. Mas

$$1 = |I_n(1, \dots, 1)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j^1(1) \cdots \varphi_j^n(1) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|\varphi_j^1\| \cdots \|\varphi_j^n\| < 1,$$

o que é uma contradição. Portanto $\|I_n\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} = 1$.

iv) Seja $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(E_1, \dots, E_n; F)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} < \infty.$$

Dado $\epsilon > 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$, existem sequências $(\lambda_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ em l_1 , $(y_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ em F limitada e $(\varphi_{j,k}^l)_{k=1}^{\infty} E'_l$, $l = 1, \dots, n$, limitada tais que

$$A_j = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j,k} \varphi_{j,k}^1 \otimes \cdots \otimes \varphi_{j,k}^n \otimes y_{j,k}$$

e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{j,k}| \cdot \|\varphi_{j,k}^1\| \cdots \|\varphi_{j,k}^n\| \cdot \|y_{j,k}\| < (1 + \epsilon) \cdot \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}}.$$

Se necessário, podemos supor $\|y_{j,k}\| = \|\varphi_{j,k}^l\| = 1$, $l = 1, \dots, n$, pois,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{j,k}| \cdot \|\varphi_{j,k}^1\| \cdots \|\varphi_{j,k}^n\| \cdot \|y_{j,k}\| = \sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_{j,k}| \cdot \|\psi_{j,k}^1\| \cdots \|\psi_{j,k}^n\| \cdot \|z_{j,k}\|,$$

onde $\gamma_{j,k} := \lambda_{j,k} \cdot \|\varphi_{j,k}^1\| \cdots \|\varphi_{j,k}^n\| \cdot \|y_{j,k}\|$, $\phi_{j,k} := \frac{\varphi_{j,k}}{\|\varphi_{j,k}\|}$ e $z_{j,k} := \frac{y_{j,k}}{\|y_{j,k}\|}$. Note que $(\gamma_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ está em l_1 , uma vez que as sequências $(\lambda_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ e $(y_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ são limitadas. Assim, da desigualdade acima, obtemos que $(\lambda_{j,k})_{j,k=1}^{\infty} \in l_1$. Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_{j,k} \otimes \varphi_{j,k}^1 \otimes \cdots \otimes \varphi_{j,k}^n \otimes y_{j,k} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j,k} \otimes \varphi_{j,k}^1 \otimes \cdots \otimes \varphi_{j,k}^n \otimes y_{j,k} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j \\ &=: A. \end{aligned}$$

Logo, $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(E_1, \dots, E_n; F)$ e

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} \leq \sum_{j,k} |\lambda_{j,k}| \cdot \|\varphi_{j,k}^1\| \cdots \|\varphi_{j,k}^n\| \cdot \|y_{j,k}\| = \sum_{j,k} |\lambda_{j,k}| < (1 + \epsilon) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} \right).$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} < \infty.$$

Pelo Teorema 2.3, segue que $(\mathcal{L}_{\mathcal{N}}; \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}})$ é um multi-ideal Banach. O fato de $(\mathcal{L}_{\mathcal{N}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}})$ ser o menor multi-ideal Banach, segue da inclusão

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \overline{\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)}$$

e do fato de que todo multi-ideal Banach contém $\overline{\mathcal{L}_f}$. ■

A Proposição 2.4 nos diz também que $\mathcal{L}_f$, com a norma uniforme, não é Banach, uma vez que $\mathcal{L}_f \neq \mathcal{L}_N$.

2.2 Ideais de Composição

Existem algumas formas de obter multi-ideais a partir de ideais de operadores lineares. Como exemplos, citamos o método da composição, o método da $\mathcal{I}$ -limitação e o método da fatoração. No presente trabalho apresentaremos somente o primeiro.

Definição 2.3 (Ideais de Composição). Sejam $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\mathcal{I}$ um ideal de operadores lineares. Dizemos que $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ se existem um espaço de Banach G , um operador linear $u \in \mathcal{I}(G; F)$ e um operador n -linear $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ tais que

$$A = u \circ B.$$

Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de operadores lineares p -normado, $0 < p \leq 1$, definimos

$$\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} := \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|B\| : A = u \circ B\}.$$

Mostraremos em seguida que dado um ideal $\mathcal{I}$ sempre é possível obter um multi-ideal a partir deste ideal. Na verdade, o resultado é ainda mais forte, mostraremos uma forma de obter multi-ideais normados a partir de ideais normados e de como conseguir multi-ideais p -Banach a partir de ideais de operadores p -Banach.

Proposição 2.5. Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de operadores lineares p -normado (p -Banach), então $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é um multi-ideal p -normado (p -Banach).

Demonstração. Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então existem espaços de Banach $G_i, i = 1, 2, u_i \in \mathcal{I}(G_i; F)$ e $B_i \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G_i)$ tais que

$$A_i = u_i \circ B_i, \quad i = 1, 2.$$

Considere os operadores projeções $\pi_i : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_i$ e o operador

$$\begin{aligned} B : E_1 \times \dots \times E_n &\longrightarrow G_1 \times G_2 \\ x &\longmapsto (B_1(x), B_2(x)) \end{aligned}.$$

Note que, para qualquer $x \in E_1 \times \dots \times E_n$,

$$(A_1 + A_2)(x) = [(u_1 \circ \pi_1) + (u_2 \circ \pi_2)] \circ B(x).$$

Logo, $A_1 + A_2 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, pois pela propriedade de ideal,

$$[(u_1 \circ \pi_1) + (u_2 \circ \pi_2)] \in \mathcal{I}(G_1 \times G_2; F).$$

É imediato que $\lambda A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, para qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ e para qualquer $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Portanto, $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Seja A um operador de tipo finito da forma $A = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y$. Então $A = u \circ B$, onde $B : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow \mathbb{K}$ é dado por $B(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)$ e $u : \mathbb{K} \longrightarrow F$ é dado por $u(\lambda) = \lambda y$. Logo, $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ contém os operadores de tipo finito.

Sejam $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, $T_1 \in \mathcal{L}(G_1; E_1), \dots, T_n \in \mathcal{L}(G_n; E_n)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Podemos escrever $A = v \circ C$, onde $C \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ e $v \in \mathcal{I}(G; F)$. Definamos $u := t \circ v \in \mathcal{I}(G; H)$ e $D := C \circ (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; G)$. Então

$$t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n) = u \circ D \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; H).$$

Logo, $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é um multi-ideal sempre que $\mathcal{I}$ é um ideal.

Mostremos agora que $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é p -normado quando $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal p -normado. Para isto vamos precisar da Proposição 3.25 do Apêndice que afirma que $\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \|A_L\|_{\mathcal{I}}$, onde A_L é a linearização de A .

a) A função $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}$ restrita a qualquer componente $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é uma p -norma.

De fato,

- i) $\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = 0 \iff \|A_L\|_{\mathcal{I}} = 0 \iff A_L = 0 \iff A = 0$.
- ii) $\|\lambda A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \|(\lambda A)_L\|_{\mathcal{I}} = \|\lambda A_L\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \cdot \|A_L\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \cdot \|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}$.
- iii) $\|A + B\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}^p = \|A_L + B_L\|_{\mathcal{I}}^p \leq \|A_L\|_{\mathcal{I}}^p + \|B_L\|_{\mathcal{I}}^p = \|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}^p + \|B\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}^p$.

b) O operador $I_n : \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ é tal que $\|I_n\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \|(I_n)_L\|_{\mathcal{I}} = \|Id\|_{\mathcal{I}} = 1$.

c) Sejam $T_1 \in \mathcal{L}(G_1; E_1), \dots, T_n \in \mathcal{L}(G_n; E_n)$, $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$.

Para $x_1 \in G_1, \dots, x_n \in G_n$, temos

$$\begin{aligned} (t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n))_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) &= (t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n))(x_1, \dots, x_n) \\ &= t(A(T_1(x_1), \dots, T_n(x_n))) \\ &= t(A_L(T_1(x_1) \otimes \dots \otimes T_n(x_n))) \\ &= t(A_L((T_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} T_n)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n))) \\ &= (t \circ A_L \circ (T_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} T_n))(x_1 \otimes \dots \otimes x_n). \end{aligned}$$

Logo, $(t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n))_L = (t \circ A_L \circ (T_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} T_n))_L$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \|t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} &= \|(t \circ A_L \circ (T_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} T_n))_L\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|t\| \cdot \|A_L\|_{\mathcal{I}} \cdot \|(T_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} T_n)\| \\ &\leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} \cdot \|T_1\| \cdot \dots \cdot \|T_n\|. \end{aligned}$$

Logo, $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é um multi-ideal p -normado

Assumamos agora que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é p -Banach. Sabemos (veja Apêndice) que $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ e $(\mathcal{I}(E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} \dots \widehat{\otimes}_{\pi} E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ são isomorfos isometricamente. Por hipótese, $(\mathcal{I}(E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} \dots \widehat{\otimes}_{\pi} E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um espaço p -Banach, portanto $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ também é um espaço p -Banach. Logo $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é p -Banach. ■

Finalizaremos o capítulo mostrando que o espaço dos operadores fracamente sequencialmente contínuos é um multi-ideal.

Definição 2.4. Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Dizemos que A é *fracamente sequencialmente contínuo* se $(A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ converge para $A(x_1, \dots, x_n)$ na norma de F sempre que as sequências $(x_j^l)_{j=1}^{\infty}$ em E_l convergem fracamente para x_l , onde $l = 1, \dots, n$. A classe dos operadores entre espaços de Banach fracamente sequencialmente contínuos será denotada por $\mathcal{L}_{wsc}$.

Proposição 2.6. A classe $\mathcal{L}_{wsc}$ é um multi-ideal.

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{L}_{wsc}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Sejam $(x_j^l)_{j=1}^{\infty}$ em E_l convergindo fracamente para x_l , $l = 1, \dots, n$. Da definição de $\mathcal{L}_{wsc}$, segue que $(A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ converge para $A(x_1, \dots, x_n)$ e $(B(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ converge para $B(x_1, \dots, x_n)$. Assim, $((\alpha A + B)(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^{\infty} = \alpha(A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^{\infty} + (B(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ converge para $\alpha A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n) = (\alpha A + B)(x_1, \dots, x_n)$ na norma de F . Logo, $\alpha A + B \in \mathcal{L}_{wsc}(E_1, \dots, E_n; F)$. Portanto, $\mathcal{L}_{wsc}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial. Sendo assim, para mostrar que os operadores de tipo finito pertencem a $\mathcal{L}_{wsc}(E_1, \dots, E_n; F)$ é suficiente mostrar que $A := \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y \in \mathcal{L}_{wsc}(E_1, \dots, E_n; F)$, onde $\varphi_l \in E_l'$, $l = 1, \dots, n$ são arbitrários. Sejam $(x_j^l)_{j=1}^{\infty}$ em E_l convergindo fracamente para x_l . Da definição da norma fraca, segue que $(\varphi_l(x_j^l))_{j=1}^{\infty}$ converge para $\varphi_l(x_l)$, $l = 1, \dots, n$. Logo,

$$A(x_j^1, \dots, x_j^n) = \varphi_1(x_j^1) \cdots \varphi_n(x_j^n)y \longrightarrow \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)y = A(x_1, \dots, x_n).$$

Isto mostra que $A \in \mathcal{L}_{wsc}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Resta-nos mostrar que $\mathcal{L}_{wsc}$ satisfaz a propriedade de multi-ideal. Sejam $A \in \mathcal{L}_{wsc}(E_1, \dots, E_n; F)$, $T_1 \in \mathcal{L}(G_1; E_1), \dots, T_n \in \mathcal{L}(G_n; E_n)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Sejam também $(x_j^l)_{j=1}^{\infty}$ em E_l convergindo fracamente para x_l , para cada $l = 1, \dots, n$. Como T_l também é contínua considerando as topologias fracas de G_l e de E_l , temos

$$T_l(x_j^l) \longrightarrow T_l(x_l).$$

Como $A \in \mathcal{L}_{wsc}(E_1, \dots, E_n; F)$, segue que

$$A(T_1(x_j^1), \dots, T_n(x_j^n)) \longrightarrow A(T_1(x_1), \dots, T_n(x_n)).$$

Da continuidade de t concluimos que

$$[t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)](x_j^1, \dots, x_j^n) \longrightarrow [t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)](x_1, \dots, x_n).$$

Logo $[t \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)] \in \mathcal{L}_{wsc}(G_1, \dots, G_n; H)$. ■

Capítulo 3

Hiper-ideais

O conceito de multi-ideal é uma generalização do conceito de ideal. Mas a composição do lado direito é feita somente com operadores lineares, muito embora faça sentido compor com multilineares. Isto faz com que o operador resultante da composição tenha o mesmo grau de linearidade do original. O estudo do conceito de hiper-ideal, objetivo principal do trabalho, vai abranger justamente este tipo de composição, muitas vezes aumentando o grau de linearidade e portanto saindo do espaço das transformações n -lineares para o espaço das transformações $n + k$ -lineares, $k \in \mathbb{N}$, como ilustra o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (G_1 \times \cdots \times G_{m_1}) \times (G_{m_1+1} \times \cdots \times G_{m_2}) \times \cdots \times (G_{m_{n-1}+1} \times \cdots \times G_{m_n}) & & & & & & \\
 \downarrow B_1 & & \downarrow B_2 & & \downarrow B_n & & \searrow t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n) \\
 E_1 & \times & E_2 & \times \cdots \times & E_n & \xrightarrow{A} & F \xrightarrow{t} H.
 \end{array}$$

Vamos às definições.

Definição 3.1 (Hiper-ideal de operadores). Seja $\mathcal{H}$ uma subclasse dos operadores multilineares contínuos entre espaços de Banach. Dizemos que $\mathcal{H}$ é um *hiper-ideal de operadores multilineares* se as suas componentes n -lineares

$$\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \cap \mathcal{H},$$

onde $E_1, \dots, E_n$ e F são espaços de Banach arbitrários, satisfazem as seguintes condições:

H1: $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$;

H2 (propriedade de hiper-ideal) : se $t \in \mathcal{L}(F; H)$, $B_1 \in \mathcal{L}(G_1 \times \cdots \times G_{m_1}; E_1)$, ..., $B_n \in \mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1} \times \cdots \times G_{m_n}; E_n)$ e $A \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, então

$$t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{H}(G_1, \dots, G_{m_n}; H).$$

Um hiper-ideal é chamado *hiper-ideal p -normado* quando existem $0 < p \leq 1$ e uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$ tais que:

- a) A função $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ restrita a qualquer componente n -linear $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ é uma p -norma;
- b) o operador

$$\begin{aligned} I_n : \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \lambda_1 \dots \lambda_n \end{aligned}$$

é tal que $\|I_n\|_{\mathcal{H}} = 1$;

- c) se $t \in \mathcal{L}(F; H)$, $B_1 \in \mathcal{L}(G_1 \times \dots \times G_{m_1}; E_1)$, $\dots$, $B_n \in \mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1} \times \dots \times G_{m_n}; E_n)$ e $A \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, então

$$\|t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n)\|_{\mathcal{H}} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{H}} \cdot \|B_1\| \dots \|B_n\|.$$

Dizemos que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um hiper-ideal p -Banach se todas as componentes n -lineares $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ forem espaços p -Banach relativamente à topologia induzida pela p -norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. No caso particular em que $p = 1$ dizemos simplesmente hiper-ideal normado ou hiper-ideal Banach.

Como a propriedade de hiper-ideal é mais forte do que a de multi-ideal, veremos mais adiante que alguns multi-ideais não são hiper-ideais. A outra inclusão sempre acontece.

A classe

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\substack{E_1, \dots, E_n, F \\ n \in \mathbb{N}}} \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$$

de todas as aplicações n -lineares, $n \in \mathbb{N}$, entre espaços de Banach $E_1, \dots, E_n, F$, é um exemplo trivial de hiper-ideal. Em particular, é um exemplo trivial de multi-ideal. Se fixarmos $n = 1$ teremos um ideal.

3.1 Propriedades e Exemplos

Proposição 3.1. Seja $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ um hiper-ideal p -normado. Então

$$\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional $\varphi \in F'$ tal que $\varphi(A(x_1, \dots, x_n)) = \|A(x_1, \dots, x_n)\|$ e $\|\varphi\| = 1$. Consideremos os operadores lineares $1 \otimes x_i, i = 1, \dots, n$, e $\varphi \otimes 1$. Então

$$\begin{aligned} (\varphi \otimes 1) \circ A \circ (1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n)(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= (\varphi \otimes 1)(A(1 \otimes x_1 \lambda_1, \dots, 1 \otimes x_n \lambda_n)) \\ &= \varphi(A(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)) \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \varphi(A(x_1, \dots, x_n)) \\ &= I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \varphi(A(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Logo,

$$(\varphi \otimes 1) \circ A \circ (1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n) = \varphi(A(x_1, \dots, x_n)) \cdot I_n$$

e então

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_n)\| &= \varphi(A(x_1, \dots, x_n)) \\ &= |\varphi(A(x_1, \dots, x_n))| \cdot \|I_n\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|\varphi(A(x_1, \dots, x_n)) \cdot I_n\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|(\varphi \otimes 1) \circ A \circ (1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n)\| \\ &\leq \|\varphi \otimes 1\| \cdot \|A\|_{\mathcal{H}} \cdot \|1 \otimes x_1\| \cdots \|1 \otimes x_n\| \\ &= \|A\|_{\mathcal{H}} \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|. \end{aligned}$$

Como os vetores $x_i \in E_i, i = 1, \dots, n$, são arbitrários, da desigualdade acima concluímos

$$\|A\| \leq \|A\|_{\mathcal{H}}.$$

■

Acabamos de mostrar que a norma uniforme de qualquer operador num hiper-ideal $\mathcal{H}$ é sempre menor ou igual do que a norma do operador considerando uma p -norma em $\mathcal{H}$. Isto significa que se uma sequência $(T_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ converge na p -norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ então $(T_j)_{j=1}^{\infty}$ também converge considerando a norma uniforme.

Proposição 3.2. Dado um hiper-ideal $\mathcal{H}$, definamos

$$\overline{\mathcal{H}}(E_1, \dots, E_n; F) = \overline{\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)^{\|\cdot\|}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach $E_1, \dots, E_n, F$. Então $(\overline{\mathcal{H}}, \|\cdot\|)$ é o menor hiper-ideal fechado contendo $\mathcal{H}$.

Demonstração. Sejam $A, B \in \overline{\mathcal{H}}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então existem sequências $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ em $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ tais que $A_j \rightarrow A$ na norma uniforme e

$B_j \rightarrow B$ na norma uniforme. Logo, $\alpha A_j + B_j \rightarrow \alpha A + B$ na norma uniforme. Como $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial, segue que a sequência $(\alpha A_j + B_j)_{j=1}^\infty$ está em $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. Logo, $(\alpha A + B) \in \overline{\mathcal{H}}(E_1, \dots, E_n; F)$ e, por conseguinte, $\overline{\mathcal{H}}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial. Temos também $\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{H} \subseteq \overline{\mathcal{H}}$. Mostremos que $\overline{\mathcal{H}}$ possui a propriedade de hiper-ideal. Sejam $A = \lim A_j$, $A_j \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, $B_1 \in \mathcal{L}(G_1 \times \dots \times G_{m_1}; E_1), \dots, B_n \in \mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1} \times \dots \times G_{m_n}; E_n)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Então

$$\begin{aligned} \|t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n) - t \circ A_j \circ (B_1, \dots, B_n)\| &= \|t \circ (A - A_j) \circ (B_1, \dots, B_n)\| \\ &= \|t\| \cdot \|A - A_j\| \cdot \|B_1\| \cdots \|B_n\| \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(t \circ A_j \circ (B_1, \dots, B_n)) \rightarrow (t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n)).$$

Sabemos que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $(t \circ A_j \circ (B_1, \dots, B_n)) \in \mathcal{H}(G_1, \dots, G_{m_n}; H)$, ou seja, $(t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n)) \in \overline{\mathcal{H}}(G_1, \dots, G_{m_n}; H)$. Logo $(\overline{\mathcal{H}}, \|\cdot\|)$ é um hiper-ideal normado. Segue da definição que $(\overline{\mathcal{H}}, \|\cdot\|)$ é fechado.

Seja $\mathcal{G}$ um hiper-ideal fechado que contém $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{G}$ é fechado, devemos ter $\overline{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{G}$. ■

Já vimos que de maneira geral vale $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. O próximo resultado nos dirá que para uma determinada classe de operadores sempre vale a igualdade.

Proposição 3.3. Sejam $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ um hiper-ideal p -normado, $T_1 \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_{m_1}), \dots, T_n \in \mathcal{L}(E_{m_{n-1}+1}, \dots, E_{m_n})$ e $y \in F$. Então

$$T_1 \otimes \dots \otimes T_n \otimes y \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_{m_n}; F)$$

e vale

$$\|T_1 \otimes \dots \otimes T_n \otimes y\|_{\mathcal{H}} = \|T_1 \otimes \dots \otimes T_n \otimes y\| = \|T_1\| \cdots \|T_n\| \cdot \|y\|.$$

Demonstração. Seja $x := (x_1, \dots, x_{m_n}) \in E_1 \times \dots \times E_{m_n}$. Note que

$$\begin{aligned} (1 \otimes y) \circ I_n \circ (T_1, \dots, T_n)(x) &= (1 \otimes y)(I_n(T_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, T_n(x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n}))) \\ &= (1 \otimes y)(T_1(x_1, \dots, x_{m_1}) \cdots T_n(x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n})) \\ &= (T_1(x_1, \dots, x_{m_1}) \cdots T_n(x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n})) \cdot y \\ &= T_1 \otimes \dots \otimes T_n \otimes y(x_1, \dots, x_{m_n}). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}$ é um hiper-ideal e $I_n \in \mathcal{H}(\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}; \mathbb{K})$, da propriedade de hiper-ideal, segue que

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \otimes y = (1 \otimes y) \circ I_n \circ (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_{m_n}; F).$$

Além disso, sendo $y_1 := (x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, y_n := (x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n})$, temos

$$\begin{aligned} \|T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \otimes y\| &= \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, m_n}} \|(1 \otimes y) \circ I_n \circ (T_1, \dots, T_n)(x)\| \\ &= \sup_{\substack{\|y_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|T_1(y_1) \cdots T_n(y_n) \cdot y\| \\ &= \sup_{\substack{\|y_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |T_1(y_1)| \cdots |T_n(y_n)| \cdot \|y\| \\ &= \left(\sup_{\|y_1\| \leq 1} |T_1(y_1)| \right) \cdots \left(\sup_{\|y_n\| \leq 1} |T_n(y_n)| \right) \cdot \|y\| \\ &= \|T_1\| \cdots \|T_n\| \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \otimes y\| &\leq \|T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \otimes y\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|(1 \otimes y) \circ I_n \circ (T_1, \dots, T_n)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|(1 \otimes y)\| \cdot \|I_n\|_{\mathcal{H}} \cdot \|T_1\| \cdots \|T_n\| \\ &= \|T_1\| \cdots \|T_n\| \cdot \|y\| \\ &= \|T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \otimes y\| \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\|T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \otimes y\| = \|T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \otimes y\|_{\mathcal{H}} = \|T_1\| \cdots \|T_n\| \cdot \|y\|.$$

■

Como os operadores de posto finito são combinações lineares finitas de operadores da forma

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \otimes y,$$

a Proposição 3.3 nos diz que a classe $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ está contida em qualquer hiper-ideal $\mathcal{H}$ e, para os operadores desta classe, tanto faz considerar a p -norma em $\mathcal{H}$ ou a norma uniforme.

Verificar que uma classe é um hiper-ideal nem sempre é tarefa fácil. Ainda menos fácil é mostrar que uma classe é um hiper-ideal p -Banach. O próximo teorema vai justamente dar uma nova caracterização dos hiper-ideais p -Banach, que facilitará nosso trabalho quando precisarmos mostrar que uma classe é um hiper-ideal p -Banach.

Teorema 3.4 (Critério da série para hiper-ideais). *Sejam $0 < p \leq 1$, $\mathcal{H}$ uma sub-classe da classe das aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$ uma função. Então $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um hiper-ideal p -Banach se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- i) $\mathcal{H}$ satisfaz a propriedade de hiper-ideal.
- ii) $I_n \in \mathcal{H}(^n\mathbb{K})$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- iii) $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ satisfaz as condições b) e c) da Definição 3.1.
- iv) Se $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{H}} < \infty,$$

então $A := \sum_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ e

$$\|A\|_{\mathcal{H}}^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{H}}^p.$$

Demonstração. ($\implies$) Pela definição de hiper-ideal p -Banach concluímos que valem i), ii) e iii). Mostremos que vale iv). Seja $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ em $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Chamemos de $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ a sequência das somas parciais de $(A_j)_{j=1}^{\infty}$. Como $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial segue que $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. Além disso, como

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{H}} < \infty,$$

concluímos que B_j é de Cauchy. Como $\mathcal{H}$ é p -Banach e $B_j \rightarrow A$ na norma uniforme, segue que $A \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. Agora, para todo $s \in \mathbb{N}$, vale

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} A_j \right\|_{\mathcal{H}}^p \leq \left\| \sum_{j=1}^s A_j \right\|_{\mathcal{H}}^p + \left\| \sum_{j=s+1}^{\infty} A_j \right\|_{\mathcal{H}}^p \leq \sum_{j=1}^s \|A_j\|_{\mathcal{H}}^p + \left\| \sum_{j=s+1}^{\infty} A_j \right\|_{\mathcal{H}}^p.$$

Fazendo $s \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|A\|_{\mathcal{H}}^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{H}}^p.$$

($\Leftarrow$) Da condição *iv*), tomando A_j identicamente nula quando $j \geq 3$, segue que $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial. Pelas condições *i*) e *ii*) segue que um operador da forma $A = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y = (1 \otimes y) \circ I_n \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. Logo $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ contém os operadores de tipo finito e, portanto, $\mathcal{H}$ é um hiper-ideal.

Mostremos que $\mathcal{H}$ é p -Banach. Inicialmente, mostremos que $\mathcal{H}$ é p -normado. Por *iii*) é suficiente mostrarmos a condição *a*) da Definição 3.1. Sejam $A \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Da propriedade de hiper-ideal, segue que

$$\|\lambda A\|_{\mathcal{H}} \leq |\lambda| \cdot \|A\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.1)$$

Se $\lambda = 0$ a igualdade é imediata. Se $\lambda \neq 0$,

$$|\lambda| \cdot \|A\|_{\mathcal{H}} = |\lambda| \cdot \left\| \frac{1}{\lambda} (\lambda A) \right\|_{\mathcal{H}} \leq |\lambda| \cdot \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|\lambda A\|_{\mathcal{H}} = \|\lambda A\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2) concluímos que

$$\|\lambda A\|_{\mathcal{H}} = |\lambda| \|A\|_{\mathcal{H}}.$$

Do que acabamos de provar, concluímos que se $A = 0$ então

$$\|0\|_{\mathcal{H}} = \|\lambda 0\|_{\mathcal{H}} = |\lambda| \cdot \|0\|_{\mathcal{H}}.$$

Tomando $\lambda = 0$, obtemos $\|A\|_{\mathcal{H}} = 0$. Se $\|A\|_{\mathcal{H}} = 0$ então

$$\|jA\|_{\mathcal{H}} = j\|A\|_{\mathcal{H}} = 0, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

De *iv*) segue que

$$B := \sum_{j=1}^{\infty} jA \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F).$$

Se tivéssemos $A(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ para algum $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ então B não estaria bem definida. Portanto $A(x_1, \dots, x_n) = 0$, para todo $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Logo $A = 0$. A última propriedade de p -norma segue imediatamente da condição *iv*). Logo $\mathcal{H}$ é um hiper-ideal p -normado.

Mostremos que $\mathcal{H}$ é p -Banach. Seja $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ em $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ uma sequência de Cauchy com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Então $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(A_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\|A_{j_{k+1}} - A_{j_k}\|_{\mathcal{H}}^p \leq \frac{1}{2^k}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_{j_{k+1}} - A_{j_k}\|_{\mathcal{H}}^p < \infty.$$

Por *iv*), segue que

$$B_i := \sum_{k=i}^{\infty} (A_{j_{k+1}} - A_{j_k}) \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$$

e portanto

$$\|B_i\|_{\mathcal{H}}^p \leq \sum_{k=i}^{\infty} \|A_{j_{k+1}} - A_{j_k}\|_{\mathcal{H}}^p \leq \frac{1}{2^{i-1}}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Note que

$$B_1 - B_i = \sum_{k=1}^{i-1} (A_{j_{k+1}} - A_{j_k}) = A_{j_i} - A_{j_1},$$

isto é,

$$B_i = (B_1 + A_{j_1}) - A_{j_i}.$$

Logo,

$$\|A_{j_i} - (B_1 + A_{j_1})\|_{\mathcal{H}}^p = \|B_i\|_{\mathcal{H}}^p \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Isto mostra que (A_{j_i}) converge para $(B_1 + A_{j_1}) \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ na p -norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Como $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ é de Cauchy e possui uma subsequência convergente, concluímos que $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ converge para $(B_1 + A_{j_1}) \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. Isto finaliza a demonstração. ■

Este Teorema é muito semelhante ao Teorema Critério da Série para multi-ideais apresentado no Capítulo 2. A diferença básica é a propriedade de multi-ideal e de hiper-ideal.

Quando estamos trabalhando com espaços vetoriais com normas distintas, muitas vezes, encontrar uma relação entre estas normas facilita o nosso trabalho. O próximo resultado nos diz que se tivermos dois hiper-ideais p -Banach, um contido no outro, com suas respectivas p -normas, sempre, em cada “andar” de linearidade, é possível obter uma constante que faz com que a norma de qualquer operador como elemento do espaço maior seja menor ou igual do que esta constante multiplicada pela norma deste operador visto como elemento do outro espaço.

Proposição 3.5. Sejam $0 < p \leq 1$ e $(\mathcal{G}, \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ e $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ hiper-ideais p -Banach tais que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma constante C_n , dependendo somente de n , tal que

$$\|A\|_{\mathcal{H}} \leq C_n \|A\|_{\mathcal{G}}, \tag{3.3}$$

para quaisquer espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ e F e $A \in \mathcal{G}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que o resultado não seja válido. Neste caso, existe $m \in \mathbb{N}$ para o qual não existe constante C_m satisfazendo (3.3). Assim, para

qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem espaços de Banach $E_1^{(n)}, \dots, E_m^{(n)}, G_n$ e um operador $A_n \in \mathcal{G}(E_1^{(n)}, \dots, E_m^{(n)}; G_n)$ tais que

$$\|A_n\|_{\mathcal{H}} > 2^{n/p} \cdot n \cdot \|A_n\|_{\mathcal{G}}. \quad (3.4)$$

Afirmção: podemos supor $\|A_n\|_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2^{n/p}}$.

Como $A_n \neq 0$, pondo $\lambda_n := \frac{1}{2^{n/p} \cdot \|A_n\|_{\mathcal{G}}}$, temos

$$\|\lambda_n A_n\|_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2^{n/p}}$$

e

$$\|\lambda_n A_n\|_{\mathcal{H}} = |\lambda_n| \cdot \|A_n\|_{\mathcal{H}} > |\lambda_n| \cdot 2^{n/p} \cdot n \cdot \|A_n\|_{\mathcal{G}} = 2^{n/p} \cdot n \cdot \|\lambda_n A_n\|_{\mathcal{G}}.$$

Assim, trocando A_n por $\lambda_n A_n$, se necessário, podemos admitir que $\|A_n\|_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2^{n/p}}$. Logo, (3.4) se torna

$$\|A_n\|_{\mathcal{H}} > n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos os espaços de Banach

$$E_i := \prod_{n=1}^{\infty} E_i^{(n)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{e} \quad G := \prod_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Agora, para cada $i = 1, \dots, m$ e $n \in \mathbb{N}$, sejam

$$\begin{aligned} \pi_{i,n} : \quad E_i &\longrightarrow E_i^{(n)} \\ (x_k^i)_{k=1}^{\infty} &\longmapsto x_n^i \end{aligned}$$

as projeções canônicas e

$$\begin{aligned} \tau_n : \quad G_n &\longrightarrow G \\ y_n &\longmapsto (0, \dots, 0, y_n, 0, \dots) \end{aligned}$$

as inclusões canônicas. Como $\mathcal{G}$ é um hiper-ideal, temos

$$\tau_n \circ A_n \circ (\pi_{1,n}, \dots, \pi_{m,n}) \in \mathcal{G}(E_1, \dots, E_m; G).$$

Agora,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|\tau_n \circ A \circ (\pi_{1,n}, \dots, \pi_{m,n})\|_{\mathcal{G}}^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\tau_n\|^p \cdot \|A\|_{\mathcal{G}}^p \cdot \|\pi_{1,n}\|^p \cdots \|\pi_{m,n}\|^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty, \end{aligned}$$

pois $\|\tau_n\| = \|\pi_{i,n}\| = 1$ e $\|A\|_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2^{n/p}}$. Como $(\mathcal{G}, \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ é um hiper-ideal p -Banach, pelo Critério da Série, concluímos que

$$A := \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \circ A_n \circ (\pi_{1,n}, \dots, \pi_{m,n}) \in \mathcal{G}(E_1, \dots, E_m; G) \subseteq \mathcal{H}(E_1, \dots, E_m; G).$$

Por outro lado, considerando

$$\begin{aligned} \tau_{i,n} : E_i^{(n)} &\longrightarrow E_i \\ y_{i,n} &\longmapsto (0, \dots, 0, y_{i,n}, 0, \dots) := \overline{y_{i,n}} \end{aligned}$$

as inclusões canônicas e

$$\begin{aligned} \pi_n : G &\longrightarrow G_n \\ (y_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto y_n \end{aligned}$$

as projeções canônicas, temos

$$A_n = \pi_n \circ A \circ (\tau_{1,n}, \dots, \tau_{m,n}),$$

pois, para qualquer $x_n := (x_1^n, \dots, x_m^n) \in E_1^{(n)} \times \dots \times E_m^{(n)}$, temos

$$\begin{aligned} \pi_n \circ A \circ (\tau_{1,n}, \dots, \tau_{m,n})(x_n) &= \pi_n(A(\tau_{1,n}(x_1^n), \dots, \tau_{m,n}(x_m^n))) \\ &= \pi_n(A(\overline{x_1^n}, \dots, \overline{x_m^n})) \\ &= \pi_n\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(A_n((\pi_{1,n}, \dots, \pi_{m,n})(\overline{x_1^n}, \dots, \overline{x_m^n})))\right) \\ &= \pi_n\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(A_n(\pi_{1,n}(\overline{x_1^n}), \dots, \pi_{m,n}(\overline{x_m^n})))\right) \\ &= \pi_n\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(A_n(x_1^n, \dots, x_m^n))\right) \\ &= A_n(x_1^n, \dots, x_m^n) \\ &= A_n(x_n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} n < \|A_n\|_{\mathcal{H}} &= \|\pi_n \circ A \circ (\tau_{1,n}, \dots, \tau_{m,n})\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|\pi_n\| \cdot \|A\|_{\mathcal{H}} \cdot \|\tau_{1,n}\| \cdots \|\tau_{m,n}\| \\ &= \|A\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Este absurdo finaliza a demonstração. ■

Sabemos que $\mathcal{L}_f$ é o menor multi-ideal. Mas será que $\mathcal{L}_f$ é o menor hiper-ideal? Como veremos a seguir, $\mathcal{L}_f$ não é, sequer, um hiper-ideal.

Proposição 3.6. O multi-ideal $\mathcal{L}_f$ não é um hiper-ideal.

Demonstração. Considere o operador bilinear

$$\begin{aligned} T : \quad l_2 \times l_2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ ((x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty) &\longmapsto \sum_{j=1}^\infty x_j y_j. \end{aligned}$$

Suponha, por absurdo, que $\mathcal{L}_f$ seja um hiper-ideal. Então, pela propriedade de hiper-ideal, $T = I_1 \circ T \in \mathcal{L}_f({}^2l_2; \mathbb{K})$, o que é absurdo, pelo que provamos no Exemplo 1.1. ■

Será que, assim como no caso de multi-ideais, existe uma classe que é o menor hiper-ideal? Em caso positivo, qual é esta classe? As respostas virão em seguida.

Teorema 3.7. *A classe $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ dos operadores multilineares de posto finito é o menor hiper-ideal.*

Demonstração. Sabemos que se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita e $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, então

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) \quad \text{e} \quad \dim(\lambda V) = \dim V.$$

Isto é suficiente para mostrarmos que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial. Claro que

$$\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F).$$

Sejam $B_1 \in \mathcal{L}(G_1 \times \dots \times G_{m_1}; E_1), \dots, B_n \in \mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1} \times \dots \times G_{m_n}; E_n), t \in \mathcal{L}(F; H)$ e $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$. Como A tem posto finito, existem $k \in \mathbb{N}$, $T_j \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$ e $y_j \in F$, $j = 1, \dots, k$, tais que

$$A = \sum_{j=1}^k T_j \otimes y_j.$$

Então, sendo $x := (x_1, \dots, x_{m_n})$, temos

$$\begin{aligned} [t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n)](x) &= t(A(B_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, B_n(x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n}))) \\ &= t\left(\sum_{j=1}^k T_j(B_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, B_n(x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n})) \cdot y_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^k (T_j(B_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, B_n(x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n}))) \cdot t(y_j) \\ &= \sum_{j=1}^k S_j \otimes z_j(x_1, \dots, x_{m_n}), \end{aligned}$$

onde $S_j := T_j \circ (B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_{m_n})$ e $z_j := t(y_j) \in H$, $j = 1, \dots, k$. Logo $t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(G_1, \dots, G_{m_n}; H)$ e isto prova que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ é um hiper-ideal. Restamos provar a minimalidade de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Sejam $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\mathcal{H}$ um hiper-ideal qualquer. Então $A = \sum_{j=1}^k T_j \otimes y_j$, com $T_j \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$ e $y_j \in F$. Queremos

mostrar que $A \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. Como $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial, é suficiente mostrar que $T_j \otimes y_j \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, para cada $j = 1, \dots, n$. De fato, pela da propriedade de hiper-ideal, $T_j \otimes y_j = (1 \otimes y_j) \circ T_j \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, pois $1 \otimes y_j \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$ é de tipo finito. Logo $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{H}$. ■

Corolário 3.8. Seja $\mathcal{H}$ uma classe de operadores multilineares contínuos satisfazendo a propriedade de hiper-ideal e tal que cada componente $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então

$$\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{H} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{H}.$$

Demonstração. Se $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ então $\mathcal{H}$ é um hiper-ideal e pelo Teorema 3.7 segue que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{H}$. A outra inclusão é imediata, pois $\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. ■

O Corolário 3.8 nos diz que, na definição de hiper-ideais, a condição **H1**): “ $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial que contém os operadores de tipo finito” pode ser substituída por **H1’**): “ $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial que contém os operadores de posto finito.” Mas é evidente que é preferível manter a condição **H1**), pois a classe $\mathcal{L}_f$ não é maior do que a $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$.

A propriedade **H1’**) é uma diferença importante entre multi-ideais e hiper-ideais, esta faz com que alguns multi-ideais não sejam hiper-ideais. Enquanto um multi-ideal deve ser “grande” o suficiente para conter $\mathcal{L}_f$, um hiper-ideal deve ser “grande” o suficiente para conter $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$.

Vimos no Capítulo 2 que o par $(\mathcal{L}_{\mathcal{N}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}})$ dos operadores nucleares, juntamente com a norma nuclear, é o menor multi-ideal Banach. É natural então se perguntar: a classe $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ é um hiper-ideal? Em caso positivo, $(\mathcal{L}_{\mathcal{N}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}})$ é o menor hiper-ideal Banach?

Proposição 3.9. A classe $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ não é um hiper-ideal.

Demonstração. Sabemos que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}} \subseteq \overline{\mathcal{L}_f}.$$

A forma bilinear do Exemplo 1.1 não pertence a $\overline{\mathcal{L}_f}$ logo $T \notin \mathcal{L}_{\mathcal{N}}$. Mas $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, logo $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \not\subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{N}}$. Como $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ é o menor hiper-ideal, segue que $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ não é um hiper-ideal. ■

Agora já sabemos que o menor multi-ideal Banach não é nem mesmo um hiper-ideal. Estamos interessados em determinar uma classe, juntamente com uma norma, que seja o menor hiper-ideal Banach. Tal classe deve ser grande o suficiente para conter $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Um candidato natural, caso seja possível, é uma classe que generalize $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ no contexto multi-linear. É o que faremos em seguida.

Definição 3.2. Sejam $s \in (0, \infty)$ e $r \in [1, \infty]$ tais que

$$1 \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{r}$$

e $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Diz-se que A é um *operador hiper- (s, r) -nuclear* se existem sequências $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in l_s$, $(T_j)_{j=1}^\infty \in l_r^w(\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n))$ e $(y_j)_{j=1}^\infty \in l_\infty(F)$ tais que

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j T_j \otimes y_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j T_j(x_1, \dots, x_n) y_j, \quad (3.5)$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Neste caso, escrevemos $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}(E_1, \dots, E_n; F)$.

A norma hiper- (s, r) -nuclear $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}} : \mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)} \longrightarrow [0, \infty)$ é definida por

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}} = \inf \left\{ \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty \|_s \cdot \| (T_j)_{j=1}^\infty \|_{w,r} \cdot \| (y_j)_{j=1}^\infty \|_\infty \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações de A como em (3.5).

No caso $s = 1$ e $r = \infty$, temos $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in l_1$ e a sequência $(T_j)_{j=1}^\infty$ é limitada. Logo, todo operador multilinear nuclear é hiper- $(1, \infty)$ -nuclear. Por este motivo, operadores hiper- $(1, \infty)$ -nucleares são simplesmente chamados operadores hiper-nucleares e escrevemos $\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}$ em vez de $\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(1,\infty)}$

Teorema 3.10. Sejam $s \in (0, \infty)$ e $r \in [1, \infty]$ tais que

$$1 \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{r}.$$

Então a classe $(\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}})$ é um hiper-ideal p -Banach, onde

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{s} + \frac{1}{r}.$$

Demonstração. Mostremos que $(\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}})$ satisfaz as condições do Critério da Série:

i) Sejam $B_1 \in \mathcal{L}(G_1 \times \dots \times G_{m_1}; E_1), \dots, B_n \in \mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1} \times \dots \times G_{m_n}; E_n)$, $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Podemos escrever

$$A = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j T_j \otimes y_j,$$

com $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in l_s$, $(T_j)_{j=1}^\infty \in l_r^w(\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n))$ e $(y_j)_{j=1}^\infty \in l_\infty(F)$. Definindo, para cada $j \in \mathbb{N}$, $S_j := T_j \circ (B_1, \dots, B_n)$ e $z_j = t(y_j)$, temos

$$t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j S_j \otimes z_j. \quad (3.6)$$

Mostraremos agora que (3.6) é uma representação hiper- (s, r) -nuclear para $t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n)$. É claro que $(z_j)_{j=1}^\infty \in l_\infty(H)$ e que $\|(z_j)_{j=1}^\infty\| \leq \|t\| \cdot \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty$. Dado um funcional linear $\psi \in (\mathcal{L}(G_1, \dots, G_{m_n}))'$, considere o operador

$$\begin{aligned} L_{(B_1, \dots, B_n)} : \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n) &\longrightarrow \mathcal{L}(G_1, \dots, G_{m_n}) \\ T &\longmapsto T \circ (B_1, \dots, B_n). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} L_{(B_1, \dots, B_n)}(\alpha T + S) &= (\alpha T + S) \circ (B_1, \dots, B_n) \\ &= \alpha T \circ (B_1, \dots, B_n) + S \circ (B_1, \dots, B_n) \\ &= \alpha L_{(B_1, \dots, B_n)}(T) + L_{(B_1, \dots, B_n)}(S). \end{aligned}$$

Portanto, $L_{(B_1, \dots, B_n)}$ é linear. Além disso, $L_{(B_1, \dots, B_n)}$ é contínuo, pois

$$\|L_{(B_1, \dots, B_n)}(T)\| = \|T \circ (B_1, \dots, B_n)\| \leq \|T\| \cdot \|B_1\| \cdots \|B_n\|.$$

Como $\psi \circ L_{(B_1, \dots, B_n)} \in (L(E_1, \dots, E_n))'$ e $(T_j)_{j=1}^\infty \in l_r^w(\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n))$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^\infty |\psi(S_j)|^r &= \sum_{j=1}^\infty |\psi(T_j \circ (B_1, \dots, B_n))|^r \\ &= \sum_{j=1}^\infty |\psi(L_{(B_1, \dots, B_n)}(T_j))|^r \\ &= \|\psi \circ L_{(B_1, \dots, B_n)}\|^r \cdot \sum_{j=1}^\infty \left| \frac{\psi \circ L_{(B_1, \dots, B_n)}}{\|\psi \circ L_{(B_1, \dots, B_n)}\|}(T_j) \right|^r \\ &\leq \|\psi \circ L_{(B_1, \dots, B_n)}\|^r \cdot \|(T_j)_{j=1}^\infty\|_{w,r}^r < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $(S_j)_{j=1}^\infty \in l_r^w(\mathcal{L}(G_1, \dots, G_{m_n}))$ e

$$t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j S_j \otimes z_j$$

é uma representação de $t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}(G_1, \dots, G_{m_n}; H)$.

ii) É imediato que $I_n \in \mathcal{H}(^n\mathbb{K})$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii) Note que $I_n = I_n \otimes 1$ é uma representação hiper- (s, r) -nuclear de I_n . Logo,

$$\|I_n\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}} \leq 1 = \|I_n\|.$$

Suponha, por absurdo, que $\|I_n\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}} < 1$. Então existe uma representação hiper- (s, r) -nuclear

$$I_n = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \otimes T_j$$

de I_n tal que

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_s \cdot \|(T_j)_{j=1}^\infty\|_{w,r} < 1.$$

3. Hiper-ideais

Mas, usando a desigualdade de Hölder e considerando $\varphi \in (\mathcal{L}^n(\mathbb{K}))'$, $\varphi(T) = T(1, \dots, 1)$, temos

$$\begin{aligned}
 1 = |I_n(1, \dots, 1)| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j T_j(1, \dots, 1) \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot |T_j(1, \dots, 1)| \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot |\varphi(T_j)| \\
 &\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_s \cdot \|(\varphi(T_j))_{j=1}^{\infty}\|_r \\
 &\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_s \cdot \|(T_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,r} \\
 &< 1.
 \end{aligned}$$

Logo, $\|I_n\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}} = 1$.

Usando parte do que fizemos no item *i*), para $Q := t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n)$, temos

$$\begin{aligned}
 \|Q\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}} &\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_s \cdot \|(S_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,r} \cdot \|(z_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \\
 &\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_s \cdot \|L_{(B_1, \dots, B_n)}\| \cdot \|(T_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,r} \cdot \|(z_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \\
 &\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_s \cdot \|B_1\| \cdots \|B_n\| \cdot \|(T_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,r} \cdot \|(z_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \\
 &\leq \|t\| \cdot [\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_s \cdot \|(T_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,r} \cdot \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty}] \cdot \|B_1\| \cdots \|B_n\|.
 \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de A , obtemos

$$\|t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n)\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}} \cdot \|B_1\| \cdots \|B_n\|.$$

iv) Seja $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}(E_1, \dots, E_n; F)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}} < \infty.$$

Dado $\epsilon > 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma representação hiper- (s, r) -nuclear

$$A_j = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{jk} T_{jk} \otimes y_{jk}$$

tal que

$$\|(\lambda_{jk})_{k=1}^{\infty}\|_s \cdot \|(T_{jk})_{k=1}^{\infty}\|_{w,r} \cdot \|(y_{jk})_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} < (1 + \epsilon) \cdot \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor

$$\|(y_{jk})_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = 1.$$

Podemos supor também

$$\begin{aligned} \|(\lambda_{jk})_{k=1}^\infty\|_s &< [(1+\epsilon) \cdot \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}}]^{p/s} \quad \text{e} \\ \|(T_{jk})_{k=1}^\infty\|_{w,r} &< [(1+\epsilon) \cdot \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}}]^{p/r}. \end{aligned}$$

De

$$\sum_{j,k=1}^\infty |\lambda_{jk}|^s = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |\lambda_{jk}|^s = \sum_{j=1}^\infty \|(\lambda_{jk})_{k=1}^\infty\|_s^s < (1+\epsilon)^p \sum_{j=1}^\infty \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}}^p < \infty, \quad (3.7)$$

concluimos que

$$(\lambda_{jk})_{j,k=1}^\infty \in l_s.$$

Para cada $\varphi \in (\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n))'$ com $\|\varphi\| \leq 1$, temos

$$\sum_{j,k=1}^\infty |\varphi(T_{jk})|^r \leq \sum_j \|(T_{jk})_{k=1}^\infty\|_{w,r}^r < (1+\epsilon)^p \sum_{j=1}^\infty \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}}^p < \infty. \quad (3.8)$$

Logo, $(T_{jk})_{j,k=1}^\infty \in l_r^w(\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n))$. Assim, para todo $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, a série

$$\sum_{j,k=1}^\infty \lambda_{jk} T_{jk} \otimes y_{jk}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.9)$$

é absolutamente convergente no espaço de Banach F e, consequentemente, é convergente. Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^\infty \lambda_{jk} T_{jk} \otimes y_{jk}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \lambda_{jk} T_{jk} \otimes y_{jk}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^\infty A_j(x_1, \dots, x_n) \\ &=: A(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Isto mostra que (3.9) é uma representação hiper- (s, r) -nuclear de A , provando que A é um operador hiper- (s, r) -nuclear. Temos ainda

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}}^p &\leq \|(\lambda_{jk})_{j,k=1}^\infty\|_s^p \cdot \|(T_{jk})_{j,k=1}^\infty\|_{w,r}^p \cdot \|(y_{jk})_{j,k=1}^\infty\|_\infty^p \\ &\leq \left((1+\epsilon)^p \sum_{j=1}^\infty \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}}^p \right)^{p/s} \cdot \left((1+\epsilon)^p \sum_{j=1}^\infty \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}}^p \right)^{p/r} \\ &= (1+\epsilon)^p \sum_{j=1}^\infty \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}(s,r)}}^p. \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$, obtemos

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}(s,r)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}(s,r)}.$$

Isto mostra que $(\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}(s,r), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}(s,r)})$ é um hiper-ideal p -Banach. ■

Corolário 3.11. A classe $(\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}})$ dos operadores multilineares hiper-nucleares é um hiper-ideal Banach e $\mathcal{L}_{\mathcal{N}} \subsetneq \mathcal{L}_{\mathcal{HN}}$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.10, sabemos que $(\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}})$ é um hiper-ideal Banach. A inclusão $\mathcal{L}_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{HN}}$ segue das definições das duas classes. Claro que $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ é diferente de $\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}$, pois um é hiper-ideal e o outro não. ■

Nosso objetivo agora é mostrar que $(\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}})$ é o menor hiper-ideal Banach. Para isto precisaremos de uma caracterização para a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}}$ que, para nosso propósito, é mais fácil de se trabalhar.

Lema 3.12. Para qualquer $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{HN}}(E_1, \dots, E_n; F)$, temos

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\| \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações hiper-nucleares de A .

Demonstração. Dada uma representação

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j T_j \otimes y_j$$

hiper-nuclear de A , podemos assumir $T_j \neq 0$ e $y_j \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $(\gamma_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$, $(S_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$ e $(z_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq F$ sendo

$$\gamma_j = \lambda_j \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\|, \quad S_j = \frac{T_j}{\|T_j\|} \quad \text{e} \quad z_j = \frac{y_j}{\|y_j\|}.$$

Então

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j S_j \otimes z_j$$

também é uma representação hiper-nuclear de A e portanto

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}} \leq \|(\gamma_j)_{j=1}^{\infty}\|_1 \cdot \|(S_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \cdot \|(z_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações hiper-nucleares de A , obtemos

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}} \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\| \right\}.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|(T_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \cdot \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \\
 &= \|(T_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \cdot \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \right) \\
 &= \|(T_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \cdot \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \cdot \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_1.
 \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo, obtemos o resultado. ■

Teorema 3.13. *A classe $(\mathcal{L}_{\mathcal{H}\mathcal{N}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}\mathcal{N}}})$ dos operadores multilineares hiper-nucleares é o menor hiper-ideal Banach, no sentido que se $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um hiper-ideal Banach, então $\mathcal{L}_{\mathcal{H}\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{H}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}\mathcal{N}}}$.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.11, já sabemos que $(\mathcal{L}_{\mathcal{H}\mathcal{N}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}\mathcal{N}}})$ é um hiper-ideal Banach. Resta-nos provar que ele é o menor. Sejam $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ um hiper-ideal Banach e

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j T_j \otimes y_j \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}\mathcal{N}}(E_1, \dots, E_n; F).$$

Definamos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B_k := \sum_{j=1}^k \lambda_j T_j \otimes y_j$$

Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B_k \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F),$$

pois $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ é o menor hiper-ideal. Além disso, $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. De fato, como

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\| < \infty,$$

dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=k}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\| < \epsilon \text{ sempre que } k > k_0.$$

Assim, para $m > n \geq k_0$, temos

$$\begin{aligned}
 \|B_m - B_n\|_{\mathcal{H}} &= \left\| \sum_{j=n+1}^m \lambda_j T_j \otimes y_j \right\|_{\mathcal{H}} \\
 &= \left\| \sum_{j=n+1}^m \lambda_j T_j \otimes y_j \right\| \\
 &\leq \sum_{j=n+1}^m \|\lambda_j T_j \otimes y_j\| \\
 &= \sum_{j=n+1}^m |\lambda_j| \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\| \\
 &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\| \\
 &< \epsilon.
 \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ é Banach, existe $D \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ tal que $B_k \rightarrow D$ na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Mas $B_k \rightarrow A$ na norma uniforme e $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Logo, $A = D \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. Portanto $\mathcal{L}_{\mathcal{HN}} \subseteq \mathcal{H}$. Temos, pela Proposição 3.3,

$$\|A\|_{\mathcal{H}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\lambda_j T_j \otimes y_j\|_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|T_j \otimes y_j\|_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações hiper-nucleares e usando o Lema 3.12, obtemos

$$\|A\|_{\mathcal{H}} \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|T_j\| \cdot \|y_j\| \right\} = \|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{HN}}}.$$

■

O próximo resultado nos fornece uma forma de obter hiper-ideais a partir de ideais. E mais, no caso do ideal ser p -normado (p -Banach) podemos obter um hiper-ideal p -normado (p -Banach). Isto será muito útil para darmos mais exemplos de hiper-ideais. Embora existam mais métodos para se obter hiper-ideais a partir de ideais, no presente trabalho abordaremos somente o método da composição, que veremos a seguir.

Proposição 3.14. Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de operadores p -normado (p -Banach), então $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é um hiper-ideal p -normado (p -Banach).

Demonstração. Pela Proposição 2.5, já sabemos que o resultado é válido se trocarmos a palavra hiper-ideal por multi-ideal. Sendo assim, é suficiente mostrarmos que, para qualquer ideal $\mathcal{I}$, o multi-ideal $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ tem a propriedade de hiper-ideal. Sejam

$B_1 \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_{m_1}; E_1), \dots, B_n \in \mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1}, \dots, G_{m_n}; E_n)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Seja também $A = v \circ C \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, onde $v \in \mathcal{L}(G; F)$ e $C \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$. Então

$$\begin{aligned} t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n) &= t \circ (v \circ C) \circ (B_1, \dots, B_n) \\ &= (t \circ v) \circ (C \circ (B_1, \dots, B_n)) \\ &= u \circ D, \end{aligned}$$

onde $u = t \circ v$ e $D = C \circ (B_1, \dots, B_n)$. Logo,

$$t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(G_1, \dots, G_{m_n}; H),$$

provando assim que $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ possui a propriedade de hiper-ideal. ■

Relembrando que $\mathcal{K}$ e $\mathcal{W}$ são as classes dos operadores lineares compactos e fracamente compactos, respectivamente, e que $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ são as classes dos operadores multilineares compactos e fracamente compactos, respectivamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.15. Valem as igualdades: $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \circ \mathcal{L}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \circ \mathcal{L}$.

Demonstração. Mostraremos somente a primeira igualdade, pois a segunda é análoga. Seja $A = u \circ B \in \mathcal{K} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, onde $u \in \mathcal{K}(G; F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$. Considere $M \subseteq E_1 \times \dots \times E_n$ um conjunto limitado. Então $B(M)$ também é limitado. Como u é compacto, segue que $\overline{u(B(M))} = \overline{(u \circ B)(M)}$ é compacto. Logo, $u \circ B \in \mathcal{L}_{\mathcal{K}}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Seja agora $D \in \mathcal{L}_{\mathcal{K}}(E_1, \dots, E_n; F)$. Precisamos mostrar que $D \in \mathcal{K} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ ou, equivalentemente (veja Apêndice), que a linearização D_L de D está em $\mathcal{K}(E_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} E_n; F)$. Seja $(x_j^1 \otimes \dots \otimes x_j^n)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência limitada em $E_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} E_n$. Então existe $c > 0$ tal que

$$\pi(x_j^1 \otimes \dots \otimes x_j^n) = \|x_j^1\| \dots \|x_j^n\| := d_j \leq c,$$

onde $\pi(z)$ denota a norma do vetor $z \in E_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} E_n$. Mostraremos que $(D_L(x_j^1 \otimes \dots \otimes x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente. Se tivermos uma infinidade de índices λ para os quais $\|x_j^1\| \dots \|x_j^n\| = 0$, isto é, $x_j^l = 0$ para algum $l \in \{1, \dots, n\}$, sempre que $j \in \lambda$, então a subsequência $(D_L(x_j^1 \otimes \dots \otimes x_j^n))_{j \in \lambda}$ é identicamente nula e portanto convergente. Assim, podemos considerar, a menos de subsequência, $\|x_j^l\| \neq 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, $l = 1, \dots, n$. Consideremos então

$$y_j := \left(\frac{x_j^1}{\|x_j^1\|}, \dots, \frac{x_j^n}{\|x_j^n\|} \right).$$

Como $D \in \mathcal{L}_{\mathcal{K}}(E_1, \dots, E_n; F)$ e a sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada, segue que $(D(y_j))_{j=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente, digamos $(D(y_{j_s}))_{s=1}^{\infty}$. Como $(d_{j_s})_{s=1}^{\infty}$ é limitada, concluímos que $(d_{j_s})_{s=1}^{\infty}$ também converge. Portanto,

$$(D_L(x_{j_s}^1 \otimes \dots \otimes x_{j_s}^n))_{s=1}^{\infty} = (d_{j_s})_{s=1}^{\infty} \cdot (D(y_{j_s}))_{s=1}^{\infty}$$

converge. Isto mostra que $D_L \in \mathcal{K}(E_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} E_n; F)$ e que $D \in \mathcal{K} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, justificando, assim, a igualdade. ■

As proposições 3.14 e 3.15 mostram que as classes $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ são hiper-ideais fechados. Vimos no capítulo anterior que a classe dos operadores fracamente sequencialmente contínuos é um multi-ideal. Será que $\mathcal{L}_{wsc}$ também é um hiper-ideal? A resposta vem em seguida.

Proposição 3.16. A classe $\mathcal{L}_{wsc}$ não é um hiper-ideal.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{L}_{wsc}$ seja um hiper-ideal. Considere o operador bilinear

$$\begin{aligned} A : \quad l_2 \times l_2 &\longrightarrow l_1 \\ ((x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty}) &\longmapsto (x_j y_j)_{j=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Temos $Id_{l_1} \in \mathcal{L}_{wsc}(l_1; l_1)$, pois, em l_1 , uma sequência converge fracamente se, e somente se, converge na topologia da norma (veja o Teorema 3.23 no Apêndice). Pela propriedade de hiper-ideal, temos

$$A = Id_{l_1} \circ A \in \mathcal{L}_{wsc}(l_2 \times l_2; l_1),$$

o que é absurdo. Com efeito, considere a sequência $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ dos vetores canônicos em l_2 . Dado $\varphi \in l'_2$, da dualidade $l'_2 = l_2$, segue que existe $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in l_2$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j b_j.$$

Isto significa que $\varphi(e_i) = b_i \longrightarrow 0 = \varphi(0)$ para todo funcional $\varphi \in l'_2$. Logo, $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ converge fracamente para zero e, portanto, $A((e_i)_{i=1}^{\infty}, (e_i)_{i=1}^{\infty}) = (e_i)_{i=1}^{\infty} \longrightarrow A(0, 0) = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\mathcal{L}_{wsc}$ não é um hiper-ideal. ■

Apesar de $\mathcal{L}_{wsc}$ ser um multi-ideal, como acabamos de mostrar, ele não é um hiper-ideal. Estamos agora interessados numa classe que generalize a classe $\mathcal{L}_{wsc}$ no contexto multilinear e que seja um hiper-ideal.

Definição 3.3. Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços de Banach. Dizemos que uma sequência $((x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ em $E_1 \times \dots \times E_n$ converge multilinearmente para o vetor $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ se $T(x_j^1, \dots, x_j^n)$ converge para $T(x_1, \dots, x_n)$, para qualquer

forma $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$. Dizemos que um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é *multilinearmente sequencialmente contínuo* se $A(x_j^1, \dots, x_j^n)$ converge para $A(x_1, \dots, x_n)$ na norma em F sempre que $((x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty$ converge multilinearmente para $(x_1, \dots, x_n)$. Neste caso, escrevemos $A \in \mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Em outras palavras, um operador multilinearmente sequencialmente contínuo transforma convergência multilinear em convergência forte. A convergência multilinear não satisfaz propriedades básicas com as quais estamos acostumados. Como mostra o exemplo a seguir, o limite não é, necessariamente, único e cada sequência componente não precisa ser limitada.

Exemplo 3.1. Sejam E um espaço de Banach e $0 \neq x \in E$. Para qualquer $T \in \mathcal{L}^2(E)$, temos

$$T\left(jx, \frac{x}{j^2}\right) = \frac{1}{j}T(x, x) \longrightarrow 0 = T(0, y) = T(y, 0)$$

para todo $y \in E$. Assim $(jx, x/j^2)_{j=1}^\infty$ converge bilinearmente para $(0, y)$ e para $(y, 0)$, seja qual for $y \in E$. Note também que $(jx)_{j=1}^\infty$ não é limitada.

Apesar das ocorrências citadas acima, a convergência multilinear implica em limitação das normas num sentido mostrado abaixo. Este fato é essencial para nossos objetivos.

Lema 3.17. Seja $((x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \subseteq E_1 \times \dots \times E_n$ convergindo multilinearmente para $(x_1, \dots, x_n)$ em $E_1 \times \dots \times E_n$. Então existe $k > 0$ tal que

$$\|x_j^1\| \cdots \|x_j^n\| \leq k, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{e} \quad \|x_1\| \cdots \|x_n\| \leq k.$$

Demonstração. Seja $\varphi \in (E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n)'$. Pela Propriedade Universal do produto tensorial projetivo (Teorema 3.22 do Apêndice), existe uma forma $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$ tal que

$$B(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n), \quad \forall x_i \in E_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Da convergência multilinear de $((x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty$, temos

$$\varphi(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n) = B(x_j^1, \dots, x_j^n) \longrightarrow B(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n).$$

Portanto, $((x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n))_{j=1}^\infty$ converge fracamente para $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, em $(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n)$. Logo, existe $k > 0$ tal que

$$\|x_j^1\| \cdots \|x_j^n\| = \pi(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n) \leq k, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

onde $\pi(z)$ denota a norma de $z \in E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n$, e

$$\|x_1\| \cdots \|x_n\| = \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \liminf_j \|x_j^1\| \cdots \|x_j^n\| \leq k,$$

que é o que queríamos provar. ■

Lema 3.18. A classe $\mathcal{L}_{msc}$ dos operadores multilinearmente sequencialmente contínuos é um hiper-ideal fechado. Além disso,

$$\mathcal{CC} = \mathcal{L}_{msc}^1 \text{ e } \mathcal{CC} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{msc}.$$

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Considere uma sequência $((x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty$ em $E_1 \times \dots \times E_n$ convergindo multilinearmente para $(x_1, \dots, x_n)$ em $E_1 \times \dots \times E_n$. Pela definição de $\mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$, segue que $A(x_j^1, \dots, x_j^n)$ converge para $A(x_1, \dots, x_n)$ na norma de F e $B(x_j^1, \dots, x_j^n)$ converge para $B(x_1, \dots, x_n)$ na norma de F . Logo, $(\alpha A + B)(x_j^1, \dots, x_j^n) = \alpha A(x_j^1, \dots, x_j^n) + B(x_j^1, \dots, x_j^n)$ converge para $\alpha A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n) = (\alpha A + B)(x_1, \dots, x_n)$ na norma de F . Portanto, $\alpha A + B \in \mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial.

Seja $A = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y$ e seja $((x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \subseteq E_1 \times \dots \times E_n$ convergindo multilinearmente para $(x_1, \dots, x_n)$. Mostremos que $A \in \mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$. Como $T := \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$, da definição de convergência multilinear, segue que

$$(T(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \longrightarrow T(x_1, \dots, x_n).$$

Logo,

$$A((x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty = (T \otimes y)((x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \longrightarrow (T \otimes y)(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n).$$

Portanto, $\mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$ contém os operadores de tipo finito. Consideremos $B_1 \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_{m_1}; E_1), \dots, B_n \in \mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1}, \dots, G_{m_n}; E_n), A \in \mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Seja ainda $((x_j^1, \dots, x_j^{m_n}))_{j=1}^\infty \longrightarrow (x_1, \dots, x_{m_n})$ multilinearmente, onde $x_j^l \in G_l$, com $j \in \mathbb{N}$ e $l = 1, \dots, m_n$. Para qualquer forma $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$, temos $T \circ (B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_{m_n})$. Assim, da convergência multilinear, segue que

$$[T \circ (B_1, \dots, B_n)](x_j^1, \dots, x_j^{m_n}) \longrightarrow [T \circ (B_1, \dots, B_n)](x_1, \dots, x_{m_n}).$$

Logo, a sequência $(B_1(x_j^1, \dots, x_j^{m_1}), \dots, B_n(x_j^{m_{n-1}+1}, \dots, x_j^{m_n}))_{j=1}^\infty$ converge multilinearmente para $(B_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, B_n(x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n}))$. Como $A \in \mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$, segue que a sequência $(A(B_1(x_j^1, \dots, x_j^{m_1}), \dots, B_n(x_j^{m_{n-1}+1}, \dots, x_j^{m_n})))_{j=1}^\infty$ converge para $A(B_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, B_n(x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n}))$. Como t é contínua, concluímos que

$$[t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n)](x_j^1, \dots, x_j^{m_n}) \longrightarrow [t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n)](x_1, \dots, x_{m_n}).$$

Isto mostra que $t \circ A \circ (B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{L}_{msc}(G_1, \dots, G_{m_n}; H)$ e portanto $\mathcal{L}_{msc}$ possui a propriedade de hiper-ideal. Mostremos agora que $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é fechado. Seja $(A_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$ convergindo para A na norma uniforme. Consideremos

$(x_k^1, \dots, x_k^n)_{k=1}^\infty$ em $E_1 \times \dots \times E_n$ convergindo multilinearmente para $(x_1, \dots, x_n)$. Pelo Lema 3.17, existe $c > 0$ tal que

$$\|x_k^1\| \cdots \|x_k^n\| \leq c, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \|x_1\| \cdots \|x_n\| \leq c. \quad (3.10)$$

Como $A_j \longrightarrow A$, dado $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A - A_j\| < \frac{\epsilon}{3c}, \quad \forall j \geq j_0. \quad (3.11)$$

Como $A_{j_0} \in \mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_{j_0}(x_k^1, \dots, x_k^n) - A_{j_0}(x_1, \dots, x_n)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad k \geq k_0. \quad (3.12)$$

Assim, por (3.10), (3.11) e (3.12), sendo $\overline{x^k} := (x_k^1, \dots, x_k^n)$ e $x := (x_1, \dots, x_n)$, temos para k suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \|A(\overline{x^k}) - A(x)\| &\leq \|A(\overline{x^k}) - A_{j_0}(\overline{x^k})\| + \|A_{j_0}(\overline{x^k}) - A_{j_0}(x)\| + \|A_{j_0}(x) - A(x)\| \\ &< \|A - A_{j_0}\| \cdot \|x_k^1\| \cdots \|x_k^n\| + \frac{\epsilon}{3} + \|A_{j_0} - A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\| \\ &< \frac{\epsilon}{3c} \cdot c + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3c} \cdot c \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $A(x_k^1, \dots, x_k^n) \longrightarrow A(x_1, \dots, x_n)$. Isto significa que $A \in \mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$. Portanto, $\mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$ é fechado. Segue da definição que $\mathcal{CC} = \mathcal{L}_{msc}^1$. Resta-nos mostrar que $\mathcal{CC} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{msc}$. Seja $A \in \mathcal{CC} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Seja também $(x_j^1, \dots, x_k^n)$ em $E_1 \times \dots \times E_n$ convergindo multilinearmente para $(x_1, \dots, x_n)$, isto é, para qualquer forma n -linear $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$, temos $T(x_j^1, \dots, x_k^n) \longrightarrow T(x_1, \dots, x_n)$ em norma. Como $A \in \mathcal{CC} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, existem um espaço de Banach G , $u \in \mathcal{L}(G; F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ tais que $A = u \circ B$. Para qualquer funcional $\varphi \in G'$, temos $\varphi \circ B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$ e, portanto, $(\varphi \circ B)(x_j^1, \dots, x_k^n)$ converge para $(\varphi \circ B)(x_1, \dots, x_n)$. Logo $B(x_j^1, \dots, x_k^n)$ converge fracamente para $B(x_1, \dots, x_n)$. Como u é completamente contínuo,

$$(u \circ B)(x_j^1, \dots, x_k^n) \longrightarrow (u \circ B)(x_1, \dots, x_n).$$

Logo $A = u \circ B \in \mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F)$. ■

Proposição 3.19. Se $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n$ tem a propriedade de Schur, então

$$\mathcal{L}_{msc}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{CC} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F),$$

para qualquer espaço de Banach F .

Demonstração. Pelo Lema 3.18 é suficiente mostrarmos a inclusão $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{CC} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Pela Propriedade Universal (Teorema 3.22 do Apêndice) existe um único $A_L \in \mathcal{L}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n; F)$ tal que $A = A_L \circ \sigma_n$, onde $\sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$. Como $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n$ possui a propriedade de Schur (Teorema 3.23 do Apêndice), segue que o operador identidade em $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n$ pertence a $\mathcal{CC}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n; F)$. Como $\mathcal{CC}$ é um ideal, segue que $A_L = A_L \circ Id \in \mathcal{CC}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n; F)$. Isto é equivalente a dizer que $A \in \mathcal{CC} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. ■

3.2 Coerência e Hiper-ideais

Sabe-se que nem todos os multi-ideais são coerentes, no sentido da Definição 3.4 a seguir. Como a propriedade de hiper-ideais é mais forte, como vimos, alguns multi-ideais não são hiper-ideais. Podemos fazer questionamentos sobre estas duas subclasses de multi-ideais. Todos os hiper-ideais são coerentes? Todos os multi-ideais coerentes são hiper-ideais? Será que as definições de coerência e hiper-ideais estão relacionadas? Nesta seção responderemos estas perguntas. Sendo mais precisos, analisaremos as continências das classes dos multi-ideais coerentes e hiper-ideais.

Definição 3.4 (Multi-ideal coerente). Diz-se que um *multi-ideal* $\mathcal{M}$ é *coerente* quando:

- i) Dados espaços vetoriais $E_1, \dots, E_n, F$, números naturais n_1 e n_2 , e índices $j_1 < j_2 < \dots < j_{n_1}$,
 $k_1 < k_2 < \dots < k_{n_2}$, tais que

$$\{j_1, \dots, j_{n_1}\} \cup \{k_1, \dots, k_{n_2}\} = \{1, \dots, n\},$$

se $A \in \mathcal{M}(E_{j_1}, \dots, E_{j_{n_1}}; F)$, então $\varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, onde $\varphi_{k_i} \in E'_{k_i}$, $i = 1, \dots, n_2$.

- ii) Dados uma aplicação $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, números naturais $k, j_1 < \dots < j_k$, com $\{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, e vetores $a_{j_1} \in E_{j_1}, \dots, a_{j_k} \in E_{j_k}$, então

$$A_{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}} \in \mathcal{M}(E_{i_1}, \dots, E_{i_{n-k}}; F),$$

onde $\{j_1, \dots, j_k\} \cup \{i_1, \dots, i_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$ e $i_1 < \dots < i_{n-k}$.

Observação: No decorrer desta seção, por comodidade, os números naturais j_t, k_v e i_l , os vetores a_q e os funcionais $\varphi_r \in E'_r$ cumprirão as condições da Definição 3.4. Além disso, o vetor $y_r \in E_r$ será

$$y_r := \begin{cases} x_{i_v}, & \text{se } r = i_v \\ x_{j_v}, & \text{se } r = j_v \end{cases}$$

Proposição 3.20. O multi-ideal $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ das aplicações multilineares nucleares é coerente.

Demonstração. Mostraremos, inicialmente, que $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ cumpre a primeira condição da Definição 3.4. Seja $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(E_{j_1}, \dots, E_{j_{n_1}}; F)$. Da definição de operador nuclear, existem uma sequência limitada $(\psi_s^l)_{s=1}^{\infty}$ de funcionais lineares em $E'_{j_l}, l = 1, \dots, n_1$, uma sequência $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ em l_1 e uma sequência $(z_s)_{s=1}^{\infty} \subseteq F$ limitada, tais que

$$A = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \psi_s^{j_1} \otimes \dots \otimes \psi_s^{j_{n_1}} \otimes z_s.$$

Assim, para qualquer $x = (x_1, \dots, x_n)$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A(x) &= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \dots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) \cdot A(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_1}}) \\ &= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \dots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) \left(\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \psi_s^{j_1}(x_{j_1}) \dots \psi_s^{j_{n_1}}(x_{j_{n_1}}) z_s \right) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \dots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) \psi_s^{j_1}(x_{j_1}) \dots \psi_s^{j_{n_1}}(x_{j_{n_1}}) \cdot z_s \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes \psi_s^{j_1} \otimes \dots \otimes \psi_s^{j_{n_1}} \otimes z_s(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes \psi_s^{j_1} \otimes \dots \otimes \psi_s^{j_{n_1}} \otimes z_s.$$

Isto mostra que $\varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Seja agora $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então existem sequências limitadas $(\psi_s^l)_{s=1}^{\infty}$ de funcionais lineares em $E'_{j_l}, l = 1, \dots, n_1$, $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty} \in l_1$ e $(z_s)_{s=1}^{\infty} \subseteq F$, tais que

$$A = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \psi_s^1 \otimes \dots \otimes \psi_s^n \otimes z_s.$$

Temos

$$\begin{aligned}
 A_{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}}) &= A(y_1, \dots, y_n) \\
 &= \left(\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \psi_s^1 \otimes \dots \otimes \psi_s^n \otimes z_s \right) (y_1, \dots, y_n) \\
 &= \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \psi_s^1(y_1) \cdot \dots \cdot \psi_s^n(y_n) \cdot z_s \\
 &= \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \psi_s^{j_1}(a_{j_1}) \cdot \dots \cdot \psi_s^{j_k}(a_{j_k}) \cdot \psi_s^{i_1}(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot \psi_s^{i_{n-k}}(x_{i_{n-k}}) z_s \\
 &= \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s \cdot \psi_s^{i_1}(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot \psi_s^{i_{n-k}}(x_{i_{n-k}}) z_s,
 \end{aligned}$$

onde $\gamma_s := \lambda_s \psi_s^{j_1}(a_{j_1}) \cdot \dots \cdot \psi_s^{j_k}(a_{j_k})$. Note que $(\gamma_s)_{s=1}^{\infty} \in l_1$, pois $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty} \in l_1$ e as sequências $(\psi_s^{j_t}(a_{j_t}))_{s=1}^{\infty}$, $t = 1, \dots, k$, são limitadas. Logo,

$$A_{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}} = \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s \cdot \psi_s^{i_1} \otimes \dots \otimes \psi_s^{i_{n-k}} \otimes z_s$$

e, portanto, $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ é coerente. ■

Com uma demonstração análoga, mostra-se que $\mathcal{L}_f$ é coerente. Isto mostra que nem todo multi-ideal coerente é um hiper-ideal.

Considere o hiper-ideal $\mathcal{H}_1$ definido da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_1^1(E; F) := \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(E; F) \text{ e } \mathcal{H}_1(E_1, \dots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F).$$

É imediato verificar que $\mathcal{H}_1$ é de fato um hiper-ideal. Contudo, $\mathcal{H}_1$ não é coerente. Com efeito, note que $T \in \mathcal{H}_1(l_{\infty}, l_1; l_1)$, onde $T((x_i)_i, (y_i)_i) = (x_i y_i)_i$. Mas o operador $T_a \notin \mathcal{H}_1^1(l_1; l_1)$, com $a = (1, 1, 1, \dots)$, pois T_a não tem posto finito.

Com isto, mostramos que existem hiper-ideais que não são coerentes. Portanto, não vale nenhuma das inclusões. O seguinte resultado garante a coerência dos multi-ideais de composição.

Proposição 3.21. Para todo ideal $\mathcal{I}$, o multi-ideal $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é coerente.

Demonstração. Seja $A = u \circ B \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_{j_1}, \dots, E_{j_{n_1}}; F)$, onde $u \in \mathcal{I}(G; F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_{j_1}, \dots, E_{j_{n_1}}; G)$. Temos

$$\begin{aligned}
 \varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdot \dots \cdot \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) \cdot A(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_1}}) \\
 &= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdot \dots \cdot \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) \cdot u(B(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_1}})) \\
 &= u(\varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdot \dots \cdot \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) \cdot B(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_1}})) \\
 &= (u \circ B')(x_1, \dots, x_n),
 \end{aligned}$$

onde $B' \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ é dada por

$$B'(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) \cdot B(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_1}}).$$

Portanto, $\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Seja agora $A = u \circ B \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, onde $u \in \mathcal{I}(G; F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$.

Então

$$\begin{aligned} A_{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}}) &= A(y_1, \dots, y_n) \\ &= u(B(y_1, \dots, y_n)) \\ &= u(B_{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}})) \\ &= (u \circ B_{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}})(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}}). \end{aligned}$$

Portanto, $A_{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}} \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_{i_1}, \dots, E_{i_{n-k}}; F)$. Logo, o multi-ideal $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é coerente. ■

Isto mostra em particular que os hiper-ideais $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ são coerentes.

Apêndice

Este apêndice tem como objetivo trazer resultados que foram usados no trabalho e que não fazem parte da ementa de um curso padrão de Análise Funcional. Os resultados aqui apresentados não serão demonstrados por fugir da finalidade do trabalho.

Definição 3.5. Sejam $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$. Defina o operador linear

$$\begin{aligned} x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(A) := A(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

O subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})'$ gerado pelo conjunto

$$X := \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}$$

é denotado por $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ e chamado de *produto tensorial de $E_1, \dots, E_n$* . Os elementos de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ são chamados *tensores*.

Teorema 3.22 (Propriedade Universal do Produto Tensorial). *Sejam $E_1, \dots, E_n, F$ espaços vetoriais e $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então existe um único operador linear $A_L \in \mathcal{L}(E_1 \otimes \dots \otimes E_n; F)$, dado por*

$$A_L\left(\sum_{j=1}^k x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n\right) = \sum_{j=1}^k A(x_j^1, \dots, x_j^n),$$

tal que $A = A_L \circ \sigma_n$, onde

$$\begin{aligned} \sigma_n : E_1 \otimes \cdots \otimes E_n &\longrightarrow E_1 \times \cdots \times E_n \\ \sum_{j=1}^k x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n &\longmapsto \sum_{j=1}^k (x_j^1, \dots, x_j^n). \end{aligned}$$

Além disso, a correspondência $A \leftrightarrow A_L$ é um isomorfismo. O operador A_L é chamado de *linearização da aplicação A* .

Demonstração. Ver Teorema 1.10 em [6]. ■

Teorema 3.23 (de Schur). *Em l_1 , uma sequência converge fracamente se, e somente se, converge na topologia da norma.*

Demonstração. Ver Teorema 6.2.12 em [2]. ■

Proposição 3.24. Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores e $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ se, e somente se, $A_L \in \mathcal{I}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n; F)$.

Demonstração. Ver Proposição 4.25 em [6]. ■

Proposição 3.25. Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores. Se $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ então $\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \|A_L\|_{\mathcal{I}}$, onde A_L é a linearização de A .

Demonstração. Ver Lema 4.28 em [6]. ■

Proposição 3.26. Seja $\mathcal{I}$ um ideal p -normado. Então $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é isomorfo isometricamente a $(\mathcal{I}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$.

Demonstração. Ver Proposição 4.30 em [6]. ■

Teorema 3.27 (Desigualdade de Hölder Generalizada). *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e sejam $r \in [1, \infty)$, $p_1, \dots, p_n \in [1, \infty]$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}$. Então, para quaisquer funções mensuráveis $f_i \in L_{p_i}(X)$, $i = 1, \dots, n$, temos que $f_1 \cdots f_n \in L_r(X)$ e vale*

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Demonstração. Ver Teorema 3.13 em [1] considerando $m = 1$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, D. T, *Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações*, 72 p. Tese (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2016.
- [2] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1ª Ed., 2015.
- [3] BOTELHO, G.; TORRES, E. R., *Hyper-ideals of multilinear operators*, Linear Algebra Appl. 482 (2015), 1–20.
- [4] DIESTEL, J.; JARCHOW, H.; TONGE, A., *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] PIETSCH, A., *Operators Ideals*, North-Holland, 1980.
- [6] SILVA, A. R, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entres espaços de Banach e multi-ideais de composição*, 89 p. Tese (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2010.
- [7] TORRES, E. R., *Hiper-ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos entres espaços de Banach*, 119 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Estatística e Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 2015.