

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**Diagnósticos de Influência em Modelo de
Regressão de Valor Extremo em Censura
Tipo I**

por

Maria Aparecida Silva de Andrade

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Modelagem Matemática e Computacional

Prof^a. Dr^a. Andréa Vanessa Rocha
Orientadora

João Pessoa, Março de 2016.

A553d Andrade, Maria Aparecida Silva de.
 Diagnósticos de influência em modelo de regressão de
 valor extremo em censura tipo I / Maria Aparecida Silva de
 Andrade. - João Pessoa, 2016.
 53 f. : il. -

 Orientadora: Andréa Vanessa Rocha.
 Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI

 1. Informática. 2. Distribuição Gumbel. 3. Regressão
 Gumbel. 4. Censura Tipo I. 5. Diagnóstico de Influência. 6.
 Alavancagem Generalizada. I. Título.

UFPB/BC

CDU: 004(043)

Diagnósticos de Influência em Modelo de Regressão de Valor Extremo em Censura Tipo I

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro de Informática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Vanessa Rocha

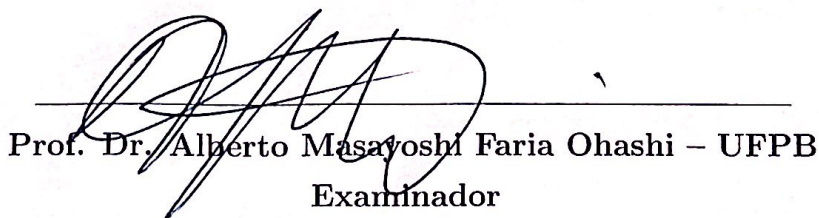
Aprovado em: 01 / 03 / 2016

COMISSÃO EXAMINADORA:



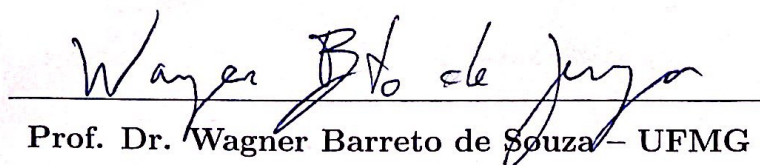
Prof. Dra. Andréa Vanessa Rocha – UFPB

Orientadora



Prof. Dr. Alberto Masayoshi Faria Ohashi – UFPB

Examinador



Prof. Dr. Wagner Barreto de Souza – UFMG

Examinador

Dedico este trabalho aos meus pais Domingos Luiz de Andrade, Júlia Maria da Silva de Andrade e ao meu noivo Ricardo Pinheiro da Costa que me deram amor, carinho e incentivo aos meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que está sempre iluminando o meu caminho e me dando força para superar as dificuldades. Sem o seu amor e companheirismo não estaria vivenciando este momento tão importante da minha vida.

À minha família, em especial, aos meus pais Domingos Luiz e Júlia Maria, que sempre me incentivaram a estudar e a lutar pelos meus sonhos. Por terem acreditado na concretização deste momento. Ao meu irmão Antônio Sérgio pelo companheirismo. Ao meu noivo Ricardo Costa pelo incentivo, carinho e pela paciência nos momentos difíceis. À minha avó Maria Francisca (in memoriam) e ao meu avô Luiz Flor (in memoriam) por terem transmitido suas experiências, terem me dado carinho e conselhos.

À professora Andréa Vanessa Rocha, minha orientadora, pelos conhecimentos transmitidos, compreensão, atenção, incentivo e pela confiança depositada em mim. Mostrou-se ser mais que uma professora, um amiga, dando-me conselhos que ajudaram na minha formação. E ao professor Alexandre B. Simas pelas orientações na disciplina Modelagem Matemática e Computacional, que contribuíram significativamente para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional da UFPB.

À banca examinadora: Prof. Dr. Wagner Barreto de Souza e Prof. Dr. Alberto Masayoshi Faria Ohashi por aceitarem participar da avaliação deste trabalho.

Aos meus amigos que estiveram ao meu lado durante a graduação, compartilhando felicidades e dificuldades, em especial Ageu Barbosa, Camila

Gonçalves, Gustavo Arcanjo, Josenildo Lima, Leon Tarquino, Luana Souza, Marinalva Rocha, Natanailza Alves, Rayssa Caju, Sandianne Gomes, Sandyellem Gomes, Suelena de Souza, Tiago Emanuel, Thiago Luiz, Victor Carvalho e Wellina Cipriano.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro a este projeto.

*"A matemática, quando a compreendemos bem, possui
não somente a verdade, mas também a suprema beleza."*

Bertrand Russel

Sumário

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	ix
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1 INTRODUÇÃO	1
2 MODELO DE REGRESSÃO DE VALOR EXTREMO	4
2.1 Construção da Verossimilhança para Dados com Censura Tipo I	7
3 ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO	12
3.1 Influência Global	12
3.2 Influência Local	13
3.3 Cálculo de Curvaturas	15
3.3.1 Perturbação de Casos Ponderados	16
3.3.2 Perturbação da Variável Resposta	16
3.3.3 Perturbação da Variável Explicativa do Parâmetro de Locação (x_j^T)	17
3.3.4 Perturbação da Variável Explicativa do Parâmetro de Escala (z_j^T)	18
3.3.5 Perturbações Simultâneas das Variáveis Explicativas $(x_j^T, z_j^T)^T$	19
3.4 Alavancagem Generalizada	20
4 APLICAÇÃO DO MODELO A DADOS REAIS	21
4.1 Análise de Influência Local	24
5 APÊNDICE A	26
6 APÊNDICE B	36

Lista de Figuras

Figura 4.1	Esquema de Perturbação de Casos Ponderados	25
Figura 4.2	Esquema de Perturbação da Variável Explicativa do Parâmetros de Locação	25

Lista de Tabelas

4.1	Dados de Sobrevivência de Pacientes com Câncer de Pulmão . .	22
-----	--	----

RESUMO

Neste trabalho, analisaremos o problema de avaliar a influência de observações no modelo de regressão de valor extremo (regressão Gumbel) sob censura tipo I. Tal modelo é muito importante na análise de dados de tempo de vida. Primeiramente, obteremos a função log-verossimilhança, a função escore e a matriz de informação de Fisher. Em seguida discutiremos alguns métodos de influência, tais como a influência global e a influência local. Na análise de influência local, derivaremos expressões para as curvaturas normais sob diferentes esquemas de perturbações. Finalizaremos obtendo uma expressão de forma fechada para a alavancagem generalizada.

Palavras-chave: Distribuição Gumbel. Censura Tipo I. Regressão Gumbel. Diagnóstico de Influência. Alavancagem Generalizada.

ABSTRACT

In this paper, we analyze the problem of evaluating the influence of observations in the extreme value regression model (Gumbel regression) under type I censorship. This model is very important in the analysis of lifetime data. First, we obtain the log-likelihood function, the score function and Fisher's information matrix. Then we will discuss some methods of influence, such as global influence and the influence local. In the local influence analysis will derive the normal curvatures under various perturbation schemes. We conclude the work obtaining a closed-form expression for the generalized leverage.

Keywords: Gumbel distribution. Type I Censorship. Gumbel Regression. Diagnosis of Influence. Generalized Leverage.

1 INTRODUÇÃO

A distribuição de valor extremo, também conhecida como distribuição Gumbel, em homenagem a Emil Julius Gumbel (1891-1966), surge quando se toma o logaritmo de uma variável aleatória com a distribuição Weibull. Isto é, se a variável aleatória X tem uma distribuição Weibull, então a variável $Y = \log X$ tem uma distribuição Gumbel. Esta distribuição, é talvez a distribuição estatística mais amplamente aplicada na modelagem climática.

Os primeiros estudos relacionados a valores extremos surgem das inundações, para fazer-se previsões adequadas com a finalidade de salvar vidas e propriedades. Tendo assim, grande importância na economia agrária, baseada no fluxo de água e hidrovias. A importância de tais estudos cresceu na economia industrial, com a construção de reservatórios para irrigação e usinas hidrelétricas.

Os problemas referentes a valores extremos tem atraído a atenção de pesquisadores de diversas áreas. Tais problemas existem em, estatística populacional, oceanografia, meteorologia, astronomia, engenharia naval, engenharia eólica, engenharia civil, avaliação de risco nos mercados financeiros, *etc.* Kotz and Nadarajah (2000) apresentam algumas aplicações como, por exemplo, terremotos, tempestades, corrida de cavalos, correntes marítimas e velocidade do vento.

A teoria do valor extremo é utilizada quando se quer fazer inferência para eventos cujas probabilidades são menores do que a probabilidade de qualquer evento observado anteriormente. O modelo de regressão de valor extremo é um dos modelos mais comumente utilizados na análise de dados de tempo de vida. Nelson (1982), Meeker and Escobar (1998) discutiram este modelo de regressão extensivamente, e também ilustram sua utilidade com aplicações.

Barreto-Souza and Vasconcellos (2011) apresentaram um modelo de regressão de valor extremo máximo geral em que os parâmetros de locação e escala são funções possivelmente não lineares dos parâmetros de regressão. Neste trabalho estudaremos o modelo de regressão de valor extremos mínimo sob censura tipo I. Nosso objetivo é avaliar a influência global e local das observações neste modelo de regressão.

A análise do tempo de vida ou tempo de falha dos dados tem sido de grande interesse em muitas áreas de aplicações estatísticas, tais como engenharia elétrica, medicina, ciências biológicas, *etc.* A censura é primordial na análise de confiabilidade, devido ao tempo e aos custos em experimentos. Os dados são ditos censurados quando são observações parciais em um estudo interrompido por algum motivo, impossibilitando que as observações completas do tempo de vida ou tempo de falha sejam obtidas (ver Park and Lee (2012)).

A análise de diagnóstico é uma forma eficiente de se detectar observações influentes. A primeira técnica utilizada para analisar o impacto individual das observações no processo de estimação é o caso de eliminação, essa técnica é conhecida como análise de influência global. No entanto, tal técnica exclui todas as informações a partir de uma observação e assim, dificilmente poderemos afirmar se essa observação tem alguma influência sobre um aspecto específico do modelo. Para contornar esse problema, usamos uma ferramenta conhecida como influência local, na qual investiga-se o modelo de sensibilidade sob pequenas perturbações. Neste contexto, Cook (1986) propõe um quadro geral para detectar observações influentes que dão uma medida dessa sensibilidade sob pequenas perturbações nos dados ou no modelo. Vários autores consideraram o método de influência local em modelos de regressão; ver, por exemplo, Lawrance (1988), Thomas and Cook (1990), Paula (1993), Lesaffre and Verbeke (1998) e, mais recentemente, Espinheira et al. (2008), Lemonte and Patriota (2011), entre outros.

Este trabalho foi inspirado em Rocha and Simas (2011) e está dividido da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentaremos o modelo de regressão de valor extremo, encontraremos a esperança e a variância da distribuição de valor extremo, determinaremos a verossimilhança para dados com censura tipo I, obteremos a função escore e a matriz de informação de Fisher, bem como o processo para estimar os coeficientes de regressão. No Capítulo 3, serão dados os métodos de influência global e local, assim como a curvatura normal sob diferentes esquemas de perturbações, juntamente com alavancagem generalizada.

2 MODELO DE REGRESSÃO DE VALOR EXTREMO

Seja W uma variável aleatória com Distribuição de Valor Extremo. Então, a função de densidade de probabilidade de W é dada por

$$g(w; \mu, \phi) = \frac{1}{\phi} \exp\left(\frac{w - \mu}{\phi}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{w - \mu}{\phi}\right)\right), \quad w \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\phi > 0$ são parâmetros de locação e escala, respectivamente. Denotaremos por $W \sim VE(\mu, \phi)$.

Iremos obter a função geradora de momentos da variável aleatória W . Se $\mu = 0$ e $\phi = 1$, a distribuição de $X = \frac{W - \mu}{\phi}$, é da forma padrão

$$g(x) = \exp(x) \exp[-\exp(x)] = \exp[x - \exp(x)].$$

Logo, a variável $Z = \exp\left[\frac{W - \mu}{\phi}\right] = \exp(X)$ tem distribuição exponencial. De fato,

$$G_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\exp(X) \leq z) = P(X \leq \ln z) = G_X(\ln z),$$

derivando ambos os lados da igualdade acima com respeito a z , obtemos

$$\begin{aligned} g_Z(z) &= G'_Z(z) = G'_X(\ln z) \frac{1}{z} = g_X(\ln z) \frac{1}{z} = \exp[\ln z - \exp(\ln z)] \frac{1}{z} \\ &= \exp[\ln z] \exp[-\exp(\ln z)] \frac{1}{z} = z \exp(-z) \frac{1}{z} \\ &= \exp(-z), \end{aligned} \quad (2.2)$$

com $z \geq 0$. Assim, Z tem distribuição exponencial.

Finalmente, acharemos a função geradora de momentos de W . Por (2.2), temos que

$$\begin{aligned} E[\exp(tX)] &= E\left[\exp\left[\frac{t(W - \mu)}{\phi}\right]\right] = E[Z^t] \\ &= \int_0^\infty z^t g(z) dz = \int_0^\infty z^t \exp(-z) dz \\ &= \Gamma(1 + t), \end{aligned}$$

com $t > -1$. Portanto, a função geradora de momentos de W é dada por

$$\begin{aligned} M_W(t) &= E[\exp(tW)] = E[\exp(t(\phi X + \mu))] = E[\exp(t\phi X + t\mu)] \\ &= E[\exp(t\phi X) \exp(t\mu)] = \exp(t\mu) E[\exp(t\phi X)] \\ &= \exp(t\mu) \Gamma(1 + \phi t), \end{aligned}$$

com $t > -1/\phi$.

Desta forma, a função geradora acumulada da variável aleatória W é

$$\begin{aligned} k(t) &= \log(M_W(t)) = \log(\exp(t\mu) \Gamma(1 + \phi t)) \\ &= \log(\exp(t\mu)) + \log(\Gamma(1 + \phi t)) \\ &= t\mu + \log(\Gamma(1 + \phi t)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Assim, calculando a derivada de $k(t)$ com respeito a t , obtemos

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \mu + \frac{1}{\Gamma(1 + \phi t)} \Gamma'(1 + \phi t) \phi$$

Fazendo $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} k_1(t) &= E(W) = \mu + \frac{1}{\Gamma(1)} \Gamma'(1) \phi = \mu + \psi(1) \phi \\ &= \mu - (-\psi(1) \phi) = \mu - \gamma \phi. \end{aligned}$$

onde $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n) \approx 0.5772$ é a constante de Euler, e a função digama é a derivada do logaritmo da função gama, isto é,

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Calculando a derivada segunda de k com respeito a t , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} &= \frac{\phi [\Gamma''(1 + \phi t) \phi \Gamma(1 + \phi t) - \Gamma'(1 + \phi t) \Gamma'(1 + \phi t) \phi]}{[\Gamma(1 + \phi t)]^2} \\ &= \frac{\phi^2 [\Gamma''(1 + \phi t) \Gamma(1 + \phi t) - [\Gamma'(1 + \phi t)]^2]}{[\Gamma(1 + \phi t)]^2} = \phi^2 \left[\frac{\Gamma'(1 + \phi t)}{\Gamma(1 + \phi t)} \right]' \end{aligned}$$

Tomando $t = 0$, temos

$$\text{Var}(W) = \phi^2 \left[\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} \right]' = \phi^2 \psi'(1).$$

Logo,

$$\text{Var}(W) = \phi^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

Para mais detalhes sobre os valores de $\psi(1)$ e $\psi'(1)$ consultar Meeker and Escobar (1998). Agora encontraremos a função de distribuição acumulada da variável aleatória W ,

$$\begin{aligned} G_W(w; \mu, \phi) &= \int_{-\infty}^w g(t; \mu, \phi) dt = \int_{-\infty}^w \frac{1}{\phi} \exp\left(\frac{t-\mu}{\phi}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{t-\mu}{\phi}\right)\right) dt \\ &= \frac{1}{\phi} \int_{-\infty}^w \exp\left(\frac{t-\mu}{\phi}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{t-\mu}{\phi}\right)\right) dt, \end{aligned}$$

usando a substituição $x = \exp\left(\frac{t-\mu}{\phi}\right)$, obtemos

$$\begin{aligned} G_W(w; \mu, \phi) &= \int_0^v \exp(-x) dx \\ &= -\exp(-x) \Big|_0^v = -\exp(-v) - (-\exp(0)) = -\exp(-v) + 1, \end{aligned}$$

onde $v = \exp\left(\frac{w-\mu}{\phi}\right)$. Portanto,

$$G_W(w; \mu, \phi) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{w-\mu}{\phi}\right)\right]. \quad (2.4)$$

Seja $W_1, W_2, \dots, W_n$ uma amostra aleatória, onde cada W_i tem função densidade de probabilidade dada por (2.1) com parâmetro de locação μ_i e parâmetro de escala ϕ_i . Admitimos que as componentes de ambos os vetores de parâmetros $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ e $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$ variam de cordo com observações de modelos de regressão não linear. O modelo de regressão de valor extremo com covariáveis de dispersão é definido por (2.1) e por duas componentes que são parametrizadas como

$$g_1(\mu) = \eta_1 = f_1(X; \beta), \quad g_2(\phi) = \eta_2 = f_2(Z; \theta), \quad (2.5)$$

onde $g_1(\cdot)$ e $g_2(\cdot)$ são funções de ligação conhecidas, estritamente monótonas e duas vezes diferenciáveis que mapeiam $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, respectivamente, $f_1(\cdot; \beta)$ e $f_2(\cdot; \theta)$ são funções não lineares duas vezes continuamente diferenciáveis, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T \in \mathbb{R}^p$ e $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$ são vetores de parâmetros desconhecidos a serem estimados e X e Z são matrizes $n \times p$ e $n \times q$ com colunas representando diferentes covariáveis e posto p e q , respectivamente, X e Z não são necessariamente diferentes.

2.1 Construção da Verossimilhança para Dados com Censura Tipo I

Como em Park and Lee (2012) obteremos a verossimilhança para dados com censura tipo I. Suponhamos que temos uma amostra $X_1, \dots, X_n$ aleatória simples da variável aleatória X que tem função de densidade dada por (2.1). Dados obtidos em experiências que envolvem censura aleatória, podem ser convenientemente representados por pares (w_i, δ_i) com $w_i = \min(x_i, R_i)$:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{se } x_i > R_i \\ 1, & \text{se } x_i \leq R_i \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde δ_i é uma variável indicadora de censura e R_i é o tempo de censura referente a i -ésima observação. Denotaremos o vetor de parâmetros desconhecidos por $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$. A verossimilhança referente a parte observada é dada por

$$L(X; \alpha) = \prod_{i=1}^n g(x_i).$$

Denotaremos a parte observada de $X = (x_1, \dots, x_n)$ (sem censura) por $Y = (y_1, \dots, y_m)$ e a parte restante (censurada) por $Z = (z_{m+1}, \dots, z_n)$ com $z_i > R_i$. Integrando $L(X; \alpha)$ com respeito a Z , obtemos

$$\begin{aligned} L(Y; \alpha) &= \int L(Y, Z; \alpha) dZ \\ &= \int L(Y; \alpha) L(Z; \alpha) dZ \\ &= L(Y; \alpha) \int L(Z; \alpha) dZ \\ &= \prod_{i=1}^m g(y_i) \int \prod_{j=m+1}^n g(z_j) dz_j \\ &= \prod_{i=1}^m g(y_i) \prod_{j=m+1}^n \int_{z_j > R_j} g(z_j) dz_j \\ &= \prod_{i=1}^m g(y_i) \prod_{j=m+1}^n \left[1 - \int_{z_j < R_j} g(z_j) dz_j \right] \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^m g(y_i) \prod_{j=m+1}^n [1 - G(R_j)],$$

usando a notação (w_i, δ_i) , temos

$$L(w, \delta; \alpha) = \prod_{i=1}^n [g(w_i)]^{\delta_i} [1 - G(w_i)]^{1-\delta_i},$$

onde $W = (w_1, \dots, w_n)$ e $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Portanto, substituindo a função densidade de probabilidade dada em (2.1) e a função de distribuição acumulada dada em (2.4) na expressão acima, e por (2.5) concluímos que a função de verossimilhança é dada por

$$L(w, \delta; \beta, \theta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) \right]^{\delta_i} [1 - G(w_i)]^{1-\delta_i},$$

Assim,

$$\begin{aligned} L(w, \delta; \beta, \theta) &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right] \right]^{\delta_i} \left[1 - \left[1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right] \right] \right]^{1-\delta_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\phi_i^{\delta_i}} \left[\exp\left[\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right] \right]^{\delta_i} \left[\exp\left[-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right] \right]^{1-\delta_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\phi_i^{\delta_i}} \exp\left[\delta_i \left[\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right]\right] \exp\left[(1 - \delta_i) \left[-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right]\right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Aplicando a função logarítmica em (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \ell(w, \delta; \beta, \theta) &= \log \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\phi_i} \right)^{\delta_i} \exp\left[\delta_i \left[\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right]\right] \exp\left[-(1 - \delta_i) \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{1}{\phi_i}\right)^{\delta_i} + \sum_{i=1}^n \log\left[\exp\left[\delta_i \left[\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right]\right]\right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \log\left[\exp\left[-(1 - \delta_i) \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right]\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_i \log\left(\frac{1}{\phi_i}\right) + \sum_{i=1}^n \delta_i \left[\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right] + \sum_{i=1}^n -(1 - \delta_i) \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

com μ_i e ϕ_i definidos por (2.5).

A função escore é definida por $U \equiv U(\beta, \theta) = (\partial \ell / \partial \beta^T, \partial \ell / \partial \theta^T)^T$, assim

$$U_j(\beta, \theta) = \frac{\partial \ell}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i \mu_i^*} [w_i^* - \mu_i^*] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \frac{w_i^*}{\mu_i^*} \right\} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j}, \quad j = 1, \dots, p,$$

e

$$U_J(\beta, \theta) = \frac{\partial \ell}{\partial \theta_J} = \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i} v_i + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} u_i \right\} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_J}, \quad J = 1, \dots, q,$$

onde $w_i^* = \exp\left(\frac{w_i}{\phi_i}\right)$, $\mu_i^* = \exp\left(\frac{\mu_i}{\phi_i}\right)$, $v_i = -1 - \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right]$, $u_i = \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)$, para $i = 1, \dots, n$.

Em notação matricial, temos

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \tilde{X}^T \Omega_1 M_1 (w^* - \mu^*) + \tilde{X}^T \Phi M_1 \frac{w^*}{\mu^*}, \quad (2.8)$$

e

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \tilde{S}^T \Omega_2 M_2 v + \tilde{S}^T \Phi M_2 u \quad (2.9)$$

onde $w^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)^T$, $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)^T$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ e $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ são vetores, $\tilde{X} = \left(\frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j}\right)_{ij}$, $\tilde{S} = \left(\frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_j}\right)_{ij}$ são matrizes de ordem $n \times p$ e $n \times q$, respectivamente, e $\Omega_1 = \text{diag}\left(\frac{\delta_i}{\phi_i \mu_i^*}\right)$, $\Omega_2 = \text{diag}\left(\frac{\delta_i}{\phi_i}\right)$, $\Phi = \text{diag}\left(\frac{1 - \delta_i}{\phi_i}\right)$, $M_1 = \text{diag}\left(\frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}}\right)$, $M_2 = \text{diag}\left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}}\right)$ são matriz diagonais de ordem $n \times n$.

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros β e θ são obtidos resolvendo o sistema de equações não lineares $U(\beta, \theta) = 0$, onde $U(\beta, \theta) = \frac{\partial \ell(w, \delta; \beta, \theta)}{\partial (\beta, \theta)}$ é o vetor escore, e não existe solução em forma fechada. Portanto, algoritmos de otimização não linear, como o algoritmo de Newton e o algoritmo quase Newton são necessários para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros.

A inferência assintótica para o vetor de parâmetros $\zeta = (\beta^T, \theta^T)^T$ pode ser baseada na aproximação normal do EMV para ζ , denotado por $\hat{\zeta} = (\hat{\beta}^T, \hat{\theta}^T)^T$. Seja Σ_ζ a matriz assintótica de variância-covariância para $\hat{\zeta}$. Assim, para grandes amostras $\hat{\zeta} \stackrel{a}{\sim} N_{p+q}(\zeta, \Sigma_\zeta)$, onde $\stackrel{a}{\sim}$ denota distribuição aproximada. Além disso, Σ_ζ pode ser aproximada por $(-C_{\hat{\zeta}\hat{\zeta}})^{-1}$, onde $C_{\hat{\zeta}\hat{\zeta}} = -\frac{\partial^2 \ell(\zeta)}{\partial \zeta \partial \zeta^T}(\hat{\zeta})$ é a matriz de informação observada avaliada em $\hat{\zeta}$ de ordem $(p+q) \times (p+q)$, que é dada, em notação matricial

por

$$-C_{\zeta\zeta} = \begin{pmatrix} -C_{\beta\beta} & -C_{\beta\theta} \\ -C_{\theta\beta} & -C_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^T Q_{\beta\beta}^1 \tilde{X} + \tilde{X}^T Q_{\beta\beta}^2 \tilde{X} + Q_{\beta\beta}^3 + Q_{\beta\beta}^4 & \tilde{X}^T Q_{\theta\beta}^1 \tilde{S} + \tilde{X}^T Q_{\theta\beta}^2 \tilde{S} \\ \tilde{S}^T Q_{\theta\beta}^1 \tilde{X} + \tilde{S}^T Q_{\theta\beta}^2 \tilde{X} & \tilde{S}^T Q_{\theta\theta}^1 \tilde{S} + \tilde{S}^T Q_{\theta\theta}^2 \tilde{S} + Q_{\theta\theta}^3 + Q_{\theta\theta}^4 \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} Q_{\beta\beta}^1 &= \text{diag} \left(-\frac{\delta_i}{\phi_i^2} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \right)^2 - \frac{\delta_i}{\phi_i} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \frac{d^2 \mu_i}{d\eta_{1i}^2} \right), \\ Q_{\beta\beta}^2 &= \text{diag} \left(-\frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i^2} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \right)^2 + \frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \frac{d^2 \mu_i}{d\eta_{1i}^2} \right), \\ Q_{\beta\beta}^3 &= \left[\sum_{i=1}^n -\frac{\delta_i}{\phi_i} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial^2 \eta_{1i}}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right]_{jl}, \\ Q_{\beta\beta}^4 &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial^2 \eta_{1i}}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right]_{jl}, \\ Q_{\theta\beta}^1 &= \text{diag} \left(\frac{\delta_i}{\phi_i^2} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \right), \\ Q_{\theta\beta}^2 &= \text{diag} \left(-\frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i^2} \left[\exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \right), \\ Q_{\theta\theta}^1 &= \text{diag} \left(\frac{\delta_i}{\phi_i^2} \left[1 + 2 \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) - 2 \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^2 \right] \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right)^2 \right) \\ &\quad + \text{diag} \left(\frac{\delta_i}{\phi_i} \left[-1 - \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \frac{d^2 \phi_i}{d\eta_{2i}^2} \right), \\ Q_{\theta\theta}^2 &= \text{diag} \left(-\frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i^2} \left[2 \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^2 \right] \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right)^2 \right) \\ &\quad + \text{diag} \left(\frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \frac{d^2 \phi_i}{d\eta_{2i}^2} \right), \\ Q_{\theta\theta}^3 &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\phi_i} \left[-1 - \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial^2 \eta_{2i}}{\partial \theta_L \partial \theta_J} \right]_{LJ}, \\ Q_{\theta\theta}^4 &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial^2 \eta_{2i}}{\partial \theta_L \partial \theta_J} \right]_{LJ}. \end{aligned}$$

Agora, iremos obter uma expressão para a matriz de informação de Fisher. Definamos as matrizes diagonais

$$\begin{aligned} W_{\beta\beta} &= \text{diag} \left(\frac{\mathcal{H}_{2i}}{\phi_i^2} \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \right)^2 \right), \\ W_{\beta\theta} &= \text{diag} \left(\frac{\mathcal{H}_{4i}}{\phi_i^2} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right), \\ W_{\theta\theta} &= \text{diag} \left(-\frac{\mathcal{H}_{1i} + 2\mathcal{H}_{3i} - 2\mathcal{H}_{4i} - \mathcal{H}_{5i}}{\phi_i^2} \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1i} &= 1 - \exp \left(-\exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right), \\ \mathcal{H}_{2i} &= 1 - \exp \left(-\exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right), \\ \mathcal{H}_{3i} &= \frac{\partial}{\partial t} \gamma \left(t, \exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right) \Big|_{t=1}, \\ \mathcal{H}_{4i} &= \frac{\partial}{\partial t} \gamma \left(t, \exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right) \Big|_{t=2} + \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \exp \left(-\exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right) \\ \mathcal{H}_{5i} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gamma \left(t, \exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right) \Big|_{t=2} + \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^2 \exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \exp \left(-\exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right) \\ \mathcal{H}_{6i} &= \frac{\partial^3}{\partial t^3} \gamma \left(t, \exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right) \Big|_{t=2} + \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^3 \exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \exp \left(-\exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right) \end{aligned}$$

A matriz de informação de Fisher é obtida no Apêndice A como

$$K = K(\beta, \theta) = \begin{pmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\theta} \\ K_{\theta\beta} & K_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^T W_{\beta\beta} \tilde{X} & \tilde{X}^T W_{\beta\theta} \tilde{S} \\ \tilde{S}^T W_{\theta\beta} \tilde{X} & \tilde{S}^T W_{\theta\theta} \tilde{S} \end{pmatrix}.$$

3 ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO

Neste Capítulo vamos avaliar a influência global e local para modelo de regressão de valor extremo sob censura tipo I.

3.1 Influência Global

O primeiro passo envolvido na execução de análise de sensibilidade é se concentrar em influências globais de acordo com o caso de eliminação. O caso de eliminação é uma abordagem comum para estudar o efeito que uma observação causa em um modelo. O caso de eliminação da i -ésima observação para o modelo é dado por

$$g_1(\mu_j) = \eta_{1j} = f_1(x_j^T; \beta) \quad \text{e} \quad g_2(\phi_j) = \eta_{2j} = f_1(z_j^T; \theta), \quad j = 1, \dots, n; \quad j \neq i \quad (3.1)$$

No que se segue, uma quantidade com índice “ i ” indica os dados originais com a i -ésima observação excluída. Para o modelo (3.1), a função de log-verossimilhança é denotada por $\ell_{(i)}(\zeta)$.

Seja $\hat{\zeta}_{(i)} = (\hat{\beta}_{(i)}^T, \hat{\theta}_{(i)}^T)^T$ o estimador de máxima verossimilhança (EMV) baseado em $\hat{\zeta}$, obtido maximizando $\ell_{(i)}(\zeta)$. Para avaliar a influência da i -ésima observação no EMV $\hat{\zeta} = (\hat{\beta}^T, \hat{\theta}^T)^T$, comparamos a diferença entre $\hat{\zeta}_{(i)}$ e $\hat{\zeta}$. Se a eliminação de uma observação influencia seriamente uma estimativa, mais atenção deve ser dada a essa observação em particular. Logo, se a diferença entre $\hat{\zeta}_{(i)}$ e $\hat{\zeta}$ for grande, então a i -ésima observação é considerada influente. Uma medida inicial de influência global com base no teste de Wald é definida como a norma padronizada de $\hat{\zeta}_{(i)}$, conhecida como a distância generalizada de Cook, é dada por

$$GD_i(\zeta) = (\hat{\zeta}_{(i)} - \hat{\zeta})^T [-C_{\zeta\zeta}] (\hat{\zeta}_{(i)} - \hat{\zeta}).$$

Outra alternativa é avaliar os valores $GD_i(\beta)$ e $GD_i(\theta)$, que revelam o impacto da i -ésima observação sobre os estimadores de β e θ , respectivamente. Uma outra medida popular da diferença entre $\hat{\zeta}_{(i)}$ e $\hat{\zeta}$ é dada por

$$LD_i(\zeta) = 2[\ell(\hat{\zeta}) - \ell(\hat{\zeta}_{(i)})],$$

Além disso, também podemos calcular $\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{(i)j}$ (com $j = 1, 2, \dots, p$), para determinarmos a diferença entre $\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)}$ e calcular $\hat{\theta}_j - \hat{\theta}_{(i)j}$ (com $j = 1, 2, \dots, p$), para encontrarmos a diferença entre $\hat{\theta} - \hat{\theta}_{(i)}$. Outras medidas de influência global também são possíveis. Podemos observar o comportamento de uma estatística de teste sob um esquema de casos de eliminação. Tais estatísticas podem ser, por exemplo o teste de Wald para as variáveis explicativas.

Para evitar o emprego direto do modelo de estimação para todas as observações, seguindo as ideias de Cook and Weisberg (1982), podemos usar a seguinte aproximação no primeiro passo para reduzir o número de modelos a ser implementado

$$\hat{\zeta}_{(i)} \approx \hat{\zeta} + C(\hat{\zeta})^{-1} \frac{\partial \ell_{(i)}(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\hat{\zeta}}.$$

3.2 Influência Local

O método de influência local é recomendado para investigar a sensibilidade do modelo em pequenas perturbações no modelo (ou dados). Seja λ um vetor de perturbações t -dimensional. Então, denotamos a função de log-verossimilhança perturbada por $\ell(\zeta|\lambda)$. Suponhamos que existe um vetor não perturbado, digamos λ_0 tal que $\ell(\zeta|\lambda_0) = \ell(\zeta)$. A influência de pequenas perturbações no estimador $\hat{\zeta}$ de máxima verossimilhança pode ser avaliada usando o deslocamento da log-verossimilhança

$$LD_\lambda = 2(\ell(\hat{\zeta}) - \ell(\hat{\zeta}_\lambda))$$

onde $\hat{\zeta}_\lambda$ denota o estimador de máxima verossimilhança sob $\ell(\hat{\zeta}|\lambda)$.

A ideia de Cook (1986) para avaliar a influência local é, essencialmente, analisar o comportamento local de LD_λ em torno de λ_0 avaliando a curvatura do gráfico de LD_{λ_0+ad} , onde $a \in \mathbb{R}$ e d é uma direção normal unitária. Uma das medidas de particular interesse é a direção $d_{\max}$ correspondente a maior curvatura $C_{d_{\max}}$. O índice da curva de $d_{\max}$ pode indicar se essa observação tem uma influência considerável sobre LD_λ sob pequenas perturbações. Além disso, a curva de $d_{\max}$ em relação aos valores das variáveis independentes podem ser útil para identificar padrões atípicos. Cook (1986) mostrou que a curvatura normal na direção d é dada pela seguinte expressão

$$C_d(\zeta) = 2|d^T \Delta^T C_{\zeta\zeta}^{-1} \Delta d|,$$

onde $\Delta = \frac{\partial^2 \ell(\zeta|\lambda)}{\partial \zeta \partial \lambda^T}$, e ambos Δ e $C_{\zeta\zeta}$ são avaliados em $\hat{\zeta}$ e λ_0 . Assim, $C_{d_{\max}}$ é o maior autovalor de $B = -\Delta^T C_{\zeta\zeta}^{-1} \Delta$ e $d_{\max}$ é o autovetor normal unitário correspondente. O índice do gráfico de $d_{\max}$ para a matriz B pode mostrar como perturbar o modelo (ou dados) para se obter grandes mudanças no estimador de ζ .

No entanto, se o interesse consiste em calcular a influência local para β , a curvatura normal na direção do vetor d é

$$C_{d;\beta}(\zeta) = 2|d^T \Delta^T (C_{\zeta\zeta}^{-1} - C_{22}) \Delta d|,$$

onde $C_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\theta\theta}^{-1} \end{pmatrix}$, e $d_{\max;\beta}$ é o autovetor normal unitário correspondente ao maior autovalor de $B_1 = -\Delta^T (C_{\zeta\zeta}^{-1} - C_{22}) \Delta$. O índice do gráfico do maior autovetor de B_1 pode indicar a influência desta observação sobre $\hat{\beta}$.

Analogamente, se o interesse consiste no calculo da influência local para θ , a curvatura normal na direção do vetor d é dada por

$$C_{d;\theta}(\zeta) = 2|d^T \Delta^T (C_{\zeta\zeta}^{-1} - C_{11}) \Delta d|,$$

onde $C_{11} = \begin{pmatrix} C_{\beta\beta}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e $d_{\max;\theta}$ é o vetor normal unitário correspondente ao autovalor de $B_2 = -\Delta^T(C_{\zeta\zeta}^{-1} - C_{22})\Delta$. Logo, o índice do gráfico do maior autovetor de B_2 determina a influência desta observação sobre $\hat{\theta}$.

Outro procedimento é a curvatura local total correspondente ao i -ésimo elemento, que segue, tomando d_i como sendo o vetor $n \times 1$ com todas as coordenadas nulas, exceto a i -ésima entrada que é igual a 1. Portanto, a curvatura na direção de d_i assume a forma

$$C_i(\zeta) = 2|\Delta_i^T C_{\zeta\zeta}^{-1} \Delta_i|,$$

onde Δ_i denota a i -ésima linha de Δ . Note que $C_i(\zeta)$ é o i -ésimo elemento da diagonal da matriz de influência B previamente definida. Isto é conhecido como influência local total. Também é possível determinar a influência local total do i -ésimo termo estimando um subconjunto de elementos de ζ . Por exemplo, se o interesse está em β , temos que

$$C_{i;\beta}(\zeta) = 2|\Delta_i^T (C_{\zeta\zeta}^{-1} - C_{22}) \Delta_i|,$$

enquanto que se o interesse está em θ , temos

$$C_{i;\theta}(\zeta) = 2|\Delta_i^T (C_{\zeta\zeta}^{-1} - C_{11}) \Delta_i|.$$

Verbeke and Molenberghs (2000) sugerem os casos em que $C_i \geq 2\bar{C}$ onde $\bar{C} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{n}$.

3.3 Cálculo de Curvaturas

A seguir, calcularemos, cinco sistemas diferentes de perturbações para a matriz,

$$\Delta = \{\Delta_{ri}\}_{(p+q) \times n} = \left\{ \frac{\partial^2 \ell(\zeta|\lambda)}{\partial \zeta_r \partial \lambda_i} \right\} = \begin{pmatrix} \Delta_\beta \\ \Delta_\theta \end{pmatrix},$$

onde $r = 1, 2, \dots, p + q$ e $i = 1, 2, \dots, n$, considerando o modelo definido em (2.5) e sua função de log-verossimilhança dada por (2.7). No que segue as quantidades distingue-se pela adição de “ $\hat{\cdot}$ ” avaliadas em $\hat{\zeta} = (\hat{\beta}^T, \hat{\theta}^T)^T$.

3.3.1 Perturbação de Casos Ponderados

A perturbação dos casos é feita através da definição de alguns pesos para cada observação na função de log-verossimilhança da seguinte forma

$$\begin{aligned} \ell(\zeta|\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i(\zeta|\lambda) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i \log \left(\frac{1}{\phi_i} \right) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i \left[\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \lambda_i (1 - \delta_i) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \end{aligned}$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$ é o vetor de peso total, com $0 \leq \lambda_i \leq 1$, para $i = 1, 2, \dots, n$, e $\lambda_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$ é o vetor de não perturbado.

As matrizes Δ_β e Δ_θ são dadas por

$$\begin{aligned} \Delta_\beta &= \hat{\tilde{X}}^T \hat{\tilde{\Omega}}_1 \hat{M}_1 \text{diag}(w_i^* - \hat{\mu}_i^*) + \tilde{X}^T \hat{\Phi} \hat{M}_1 \text{diag} \left(\frac{w_i^*}{\hat{\mu}_i^*} \right) \\ \Delta_\theta &= \hat{\tilde{S}}^T \hat{\tilde{\Omega}}_2 \hat{M}_2 \text{diag}(\hat{v}_i) + \hat{\tilde{S}}^T \hat{\Phi} \hat{M}_2 \text{diag}(\hat{u}_i), \end{aligned}$$

onde $\hat{\mu}_i^* = \mu_i^*(\hat{\zeta})$, $\hat{v}_i = v_i(\hat{\zeta})$, com μ_i^* , v_i e u_i definidos no Capítulo 2.

3.3.2 Perturbação da Variável Resposta

Vamos considerar que cada w_i é perturbado como $w_{i\lambda} = w_i + \lambda_i s_w^i$, onde s_w é um escalar que pode ser, por exemplo, constante em i igual ao desvio padrão estimado de $w = (w_1, \dots, w_n)^T$, ou $s_w^i = \hat{\phi}_i \sqrt{\psi'(1)}$. Neste caso, a perturbação da função de log-verossimilhança é dada por

$$\ell(\zeta|\lambda) = \sum_{i=1}^n \ell_i^r(\mu_i, \phi_i, \lambda_i)$$

onde,

$$\ell_i^r(\mu_i, \phi_i, \lambda_i) = \delta_i \log \left(\frac{1}{\phi_i} \right) + \delta_i \left[\frac{w_{i\lambda} - \mu_i}{\phi_i} - \exp \left(\frac{w_{i\lambda} - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] - (1 - \delta_i) \exp \left(\frac{w_{i\lambda} - \mu_i}{\phi_i} \right)$$

e neste caso, $\lambda_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ é o vetor de não perturbado. As matrizes Δ_β e Δ_θ assumem a forma

$$\begin{aligned} \Delta_\beta &= \widehat{\widetilde{X}}^T S_w \widehat{\Omega}_3 \widehat{M}_1 P_\beta^1(w_\lambda) + \widehat{\widetilde{X}}^T S_w \widehat{\Omega}_4 \widehat{M}_1 P_\beta^1(w_\lambda) \\ \Delta_\theta &= \widehat{\widetilde{S}}^T S_w \widehat{\Omega}_3 \widehat{M}_2 P_\theta^1(w_\lambda) + \widehat{\widetilde{S}}^T S_w \widehat{\Omega}_4 \widehat{M}_2 P_\theta^2(w_\lambda), \end{aligned}$$

onde $w_\lambda = (w_{1\lambda}, \dots, w_{n\lambda})^T$, $S_w = \text{diag}(s_w^1, \dots, s_w^n)$, $\Omega_3 = \text{diag}\left(\frac{\delta_i}{\phi_i^2}\right)$, $\Omega_4 = \text{diag}\left(\frac{1 - \delta_i}{\phi_i^2}\right)$ e

$$\begin{aligned} P_\beta^1(w_\lambda) &= \text{diag} \left(\exp \left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right), \\ P_\theta^1(w_\lambda) &= \text{diag} \left(-1 + \exp \left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i} \right) + \exp \left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right), \\ P_\theta^2(w_\lambda) &= \text{diag} \left(\exp \left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i} \right) + \exp \left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right). \end{aligned}$$

3.3.3 Perturbação da Variável Explicativa do Parâmetro de Locação (x_j^T)

Considerando agora uma perturbação aditiva em uma variável explicativa específica, a saber x_j , dada por $x_{ij\lambda} = x_{ij} + \lambda_i s_x$, onde s_x é um escalar que pode ser, por exemplo, o desvio padrão estimado de x_j . Este esquema de perturbação leva à seguinte expressão para a função de log-verossimilhança

$$\ell(\zeta|\lambda) = \sum_{i=1}^n \ell_i^{ex}(\mu_i, \phi_i, \lambda_i),$$

onde

$$\ell_i^{ex}(\mu_i, \phi_i, \lambda_i) = \delta_i \log \left(\frac{1}{\phi_i} \right) + \delta_i \left[\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} - \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \right] - (1 - \delta_i) \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right),$$

e $\mu_{i\lambda} = g_1^{-1}(\eta_{1i\lambda})$, $\eta_{1i\lambda} = f_1(x_{i\lambda}^T; \beta)$ com $x_{i\lambda} = (x_{i1\lambda}, \dots, x_{ip\lambda})^T$ e $\lambda_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ é o vetor não perturbado. Seja $\widetilde{X}(\lambda) = \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta}$ e note que $\widetilde{X}(\lambda_0) = \widetilde{X}$. Além disso,

seja $\tilde{X}_\lambda = \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda}$. Geralmente, os parênteses (λ) denotam que as quantidades são avaliadas em $\mu_{i\lambda}$ em vez de μ_i . Logo, as matrizes Δ_β e Δ_θ são dadas por

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= \tilde{X}^T(\lambda) \hat{Q}_{\beta\beta}^1(\lambda) \tilde{X}_\lambda + \tilde{X}^T(\lambda) \hat{Q}_{\beta\beta}^2(\lambda) \tilde{X}_\lambda + \hat{Q}_{\beta\beta\lambda}^3 + \hat{Q}_{\beta\beta\lambda}^4, \\ \Delta_\theta &= \tilde{S}^T \hat{Q}_{\theta\beta}^1(\lambda) \tilde{X}_\lambda + \tilde{S}^T \hat{Q}_{\theta\beta}^2(\lambda) \tilde{X}_\lambda,\end{aligned}$$

onde $Q_{\beta\beta\lambda}^3 = (Q_{\beta\lambda i}^3)$, $Q_{\beta\beta\lambda}^4 = (Q_{\beta\lambda i}^4)$ são arrays $n \times p \times n$ e $Q_{\beta\lambda i}^3, Q_{\beta\lambda i}^4$ são matrizes $p \times n$ com elementos $\partial^2 \eta_{1i\lambda} / \partial \beta_r \partial \lambda_j$.

3.3.4 Perturbação da Variável Explicativa do Parâmetro de Escala (z_j^T)

Como estamos lidando com covariáveis de dispersão, pode ser de interesse verificar se uma observação particular é influente para o parâmetro de precisão do modelo. Consequentemente, considerar uma perturbação aditiva em uma variável explicativa particular do parâmetro de precisão da regressão, a saber z_j , dada por $z_{ij\lambda} = z_{ij} + \lambda_i s_z$, onde s_z é um escalar que pode ser, por exemplo, o desvio padrão estimado de z_j . Este esquema de perturbação implica na seguinte expressão para a função de log-verossimilhança

$$\ell(\zeta|\lambda) = \sum_{i=1}^n \ell_i^{ez}(\mu_i, \phi_i, \lambda_i),$$

onde

$$\ell_i^{ez}(\mu_i, \phi_{i\lambda}, \lambda_i) = \delta_i \log \left(\frac{1}{\phi_{i\lambda}} \right) + \delta_i \left[\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} \right) \right] - (1 - \delta_i) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} \right)$$

e $\phi_{i\lambda} = g_2^{-1}(\eta_{2i\lambda})$, $\eta_{2i\lambda} = f_2(z_{i\lambda}^T; \theta)$ com $z_{i\lambda} = (z_{i1}, \dots, z_{ij\lambda}, \dots, z_{iq2})^T$ e $\lambda_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ é o vetor não perturbado. Seja $\tilde{S}(\lambda) = \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \theta}$ e note que $\tilde{Z}(\lambda_0) = \tilde{Z}$. Além disso $\tilde{S}_\lambda = \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda}$. Geralmente, os parênteses (λ) denotam que as quantidades são avaliadas em $\phi_{i\lambda}$ em vez de ϕ_i . Logo, as matrizes Δ_β e Δ_θ são dadas por

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= \tilde{X}^T \hat{Q}_{\theta\beta}^1(\lambda) \tilde{S}_\lambda + \tilde{X}^T \hat{Q}_{\theta\beta}^2(\lambda) \tilde{S}_\lambda, \\ \Delta_\theta &= \tilde{S}(\lambda)^T \hat{Q}_{\theta\theta}^1(\lambda) \tilde{S}_\lambda + \tilde{S}(\lambda)^T \hat{Q}_{\theta\theta}^2(\lambda) \tilde{S}_\lambda + \hat{Q}_{\theta\theta\lambda}^3 + \hat{Q}_{\theta\theta\lambda}^4,\end{aligned}$$

onde $Q_{\theta\theta\lambda}^3 = (Q_{\theta\lambda i}^3)$, $Q_{\theta\theta\lambda}^4 = (Q_{\theta\lambda i}^4)$ são arrays $n \times q \times n$ e $Q_{\theta\lambda i}^3, Q_{\theta\lambda i}^4$ são matrizes $q \times n$ com elementos $\partial^2 \eta_{2i\lambda} / \partial \theta_r \partial \lambda_j$.

3.3.5 Perturbações Simultâneas das Variáveis Explicativas $(x_j^T, z_J^T)^T$

Consideramos agora, uma perturbação aditiva em uma variável explicativa particular do parâmetro de locação da regressão e uma perturbação aditiva em uma variável explicativa do parâmetro de escala da regressão, a saber x_j e z_J , dadas por $x_{ijw} = x_{ij} + \lambda_i s_x$ e $z_{iJ\lambda} = z_{iJ} + \lambda_i s_z$, respectivamente, onde s_x e s_z são escalares que podem ser, por exemplo, os desvios padrão estimados de x_j e z_J , respectivamente. Este esquema de perturbação acarreta na seguinte expressão para a função de log-verossimilhança

$$\ell(\zeta|\lambda) = \sum_{i=1}^n \ell_i^{exz}(\mu_i, \phi_i, \lambda_i),$$

onde

$$\ell_i^{exz}(\mu_i, \phi_i, \lambda_i) = \delta_i \log \left(\frac{1}{\phi_{i\lambda}} \right) + \delta_i \left[\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}} - \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}} \right) \right] - (1 - \delta_i) \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}} \right)$$

e $\mu_{i\lambda} = g_1^{-1}(\eta_{1i\lambda})$, $\eta_{1i\lambda} = f_1(x_{i\lambda}^T; \beta)$ com $x_{i\lambda} = (x_{i1}, \dots, x_{ij\lambda}, \dots, x_{iq1})^T$, $\phi_{i\lambda} = g_2^{-1}(\eta_{2i\lambda})$, $\eta_{2i\lambda} = f_2(z_{i\lambda}^T; \theta)$ com $z_{i\lambda} = (z_{i1}, \dots, z_{ij\lambda}, \dots, z_{iq2})^T$ e $\lambda_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ é o vetor não perturbado. Ainda, usando a notação da subseção anterior e lembrando que os parênteses (λ) significa que as quantidades são avaliadas em $\mu_{i\lambda}$ e $\phi_{i\lambda}$ em vez de μ_i e ϕ_i . Assim, as matrizes Δ_β e Δ_θ são dadas por

$$\begin{aligned} \Delta_\beta &= \widehat{\widehat{X}}^T(\lambda) \widehat{Q}_{\beta\beta}^1(\lambda) \widehat{\widehat{X}}_\lambda + \widehat{\widehat{X}}^T(\lambda) \widehat{Q}_{\beta\beta}^2(\lambda) \widehat{\widehat{X}}_\lambda + \widehat{\widehat{X}}^T(\lambda) \widehat{Q}_{\theta\beta}^1(\lambda) \widehat{\widehat{S}}_\lambda \\ &\quad + \widehat{\widehat{X}}^T(\lambda) \widehat{Q}_{\theta\beta}^2(\lambda) \widehat{\widehat{S}}_\lambda + \widehat{Q}_{\beta\beta\lambda}^3 + \widehat{Q}_{\beta\beta\lambda}^4 \\ \Delta_\theta &= \widehat{\widehat{S}}(\lambda)^T \widehat{Q}_{\theta\beta}^1(\lambda) \widehat{\widehat{X}}_\lambda + \widehat{\widehat{S}}(\lambda)^T \widehat{Q}_{\theta\beta}^2(\lambda) \widehat{\widehat{X}}_\lambda + \widehat{\widehat{S}}(\lambda)^T \widehat{Q}_{\theta\theta}^1(\lambda) \widehat{\widehat{S}}_\lambda \\ &\quad + \widehat{\widehat{S}}(\lambda)^T \widehat{Q}_{\theta\theta}^2(\lambda) \widehat{\widehat{S}}_\lambda + \widehat{Q}_{\theta\theta\lambda}^3 + \widehat{Q}_{\theta\theta\lambda}^4, \end{aligned}$$

onde $\widehat{Q}_{\beta\beta\lambda}^3$, $\widehat{Q}_{\beta\beta\lambda}^4$, $\widehat{Q}_{\theta\theta\lambda}^3$ e $\widehat{Q}_{\theta\theta\lambda}^4$ são definidos como nas subseções anteriores.

3.4 Alavancagem Generalizada

Nesta subseção calcularemos a alavancagem generalizada proposta por Wei et al. (1998), que é definido como

$$GL(\hat{\zeta}) = \frac{\partial \hat{w}}{\partial w^T},$$

onde ζ é um s-vetor tal que $E(w) = \mu(\zeta)$ e $\hat{\zeta}$ é um estimador de ζ , com $\hat{w} = \mu(\hat{\zeta})$. Aqui, o (i, j) elemento de $GL(\hat{\zeta})$, ou seja, a alavancagem generalizada do estimador $\hat{\zeta}$ em (i, j) , é a taxa instantânea de variação no i -ésimo valor previsto em relação ao i -ésimo valor resposta. Temos que, a alavancagem generalizada é invariante sob reparametrização e observações onde GL_{iJ} são grandes pontos de alavancagem. Wei et al. (1998) mostraram que a alavancagem generalizada é obtida avaliando

$$GL(\zeta) = D_\zeta(-C_{\zeta\zeta})^{-1}C_{\zeta w},$$

em $\zeta = \hat{\zeta}$, onde $D_\zeta = \frac{\partial \mu}{\partial \zeta}$ e $C_{\zeta w} = \frac{\partial^2 \ell(\zeta)}{\partial \zeta \partial w^T}$. De acordo com o modelo definido em (2.5), temos

$$D_\zeta = \begin{pmatrix} M_1 \tilde{X} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_{\zeta w} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^T \Omega_3 M_1 P_\beta^1 + \tilde{X}^T \Omega_4 M_1 P_\beta^1 \\ \tilde{S}^T \Omega_3 M_2 P_\theta^1 + \tilde{S}^T \Omega_4 M_2 P_\theta^2 \end{pmatrix},$$

onde $P_\beta^1, P_\theta^1, P_\theta^2$ são definidas como na subseção anterior.

4 APLICAÇÃO DO MODELO A DADOS REAIS

Neste capítulo aplicaremos o modelo de regressão de valor extremo sob censura tipo I a dados reais. Para realizar esta aplicação foi utilizado o *software* R (www.r-project.org), na versão 3.2.3.

Os dados utilizados para aplicação foram obtidos do trabalho de Lawless (2011), que apresenta dados de sobrevivência de 40 pacientes com câncer avançado de pulmão, retirados de um estudo discutido por Kalbfleisch and Prentice (1973). O principal objetivo do estudo foi comparar os efeitos de dois tratamentos de quimioterapia ao prolongar o tempo de sobrevivência. Todos os pacientes receberam terapia prévia e foram então distribuídos aleatoriamente a um dos dois tratamentos, denominado *padrão* e *teste*. W é o tempo de vida, medido desde o início do tratamento, para cada paciente, que são registrados na Tabela (4.1). Observações censuradas correspondem a pacientes que ainda estavam vivos no momento em que os dados foram coletados. Variáveis que também poderiam ser importante são mostrados para cada paciente. Em primeiro lugar, os pacientes podem ter diferentes tipos de tumores, eles foram classificados em quatro categorias (escamoso, pequeno, adeno, grande). Kalbfleisch and Prentice (1973) também deu para cada paciente uma pontuação, ou o estado, desempenho, atribuído no momento do diagnóstico. Isto é uma medida de condição médica geral numa escala de 10 a 90: 10, 20, e 30 significa que o paciente é completamente hospitalizados; 40, 50, 60 que se encontra parcialmente hospitalizado; e 70, 80 e 90 que ele é capaz de cuidar de si mesmo. Finalmente, a idade do paciente e o número de meses do diagnóstico até a entrada no estudo.

Tabela 4.1: Dados de Sobrevivência de Pacientes com Câncer de Pulmão

W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	δ
411	1	70	64	5	0	1	0	0	1
126	1	60	63	9	0	1	0	0	1
118	1	70	65	11	0	1	0	0	1
82	1	40	69	10	0	1	0	0	1
8	1	40	63	58	0	1	0	0	1
25	1	70	48	9	0	1	0	0	0
11	1	70	48	11	0	1	0	0	1
54	1	80	63	4	0	0	1	0	1
153	1	60	63	14	0	0	1	0	1
16	1	30	53	4	0	0	1	0	1
56	1	80	43	12	0	0	1	0	1
21	1	40	55	2	0	0	1	0	1
287	1	60	66	25	0	0	1	0	1
10	1	40	67	23	0	0	1	0	1
8	1	20	61	19	0	0	0	1	1
12	1	50	63	4	0	0	0	1	1
177	1	50	66	16	0	0	0	0	1
12	1	40	68	12	0	0	0	0	1
200	1	80	41	12	0	0	0	0	1
250	1	70	53	8	0	0	0	0	1
100	1	60	37	13	0	0	0	0	1
999	1	90	54	12	1	1	0	0	1
231	1	50	52	8	1	1	0	0	0
991	1	70	50	7	1	1	0	0	1

continua na próxima página

Tabela 4.1: Dados de Sobrevida de Pacientes com Câncer de Pulmão (continuação)

W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	δ
1	1	20	65	21	1	1	0	0	1
201	1	80	52	28	1	1	0	0	1
44	1	60	70	13	1	1	0	0	1
15	1	50	40	13	1	1	0	0	1
103	1	70	36	22	1	0	1	0	0
2	1	40	44	36	1	0	1	0	1
20	1	30	54	9	1	0	1	0	1
51	1	30	59	87	1	0	1	0	1
18	1	40	69	5	1	0	0	1	1
90	1	60	50	22	1	0	0	1	1
84	1	80	62	4	1	0	0	1	1
164	1	70	68	15	1	0	0	0	1
19	1	30	39	4	1	0	0	0	1
43	1	60	49	11	1	0	0	0	1
340	1	80	64	10	1	0	0	0	1
231	1	70	67	18	1	0	0	0	1

Neste modelo estudado consideramos uma amostra aleatória censurada, que consiste de dados (w_i, δ_i, x_i) , $i = 1, \dots, n$, onde $w_i = -\log R_i$ é um log-tempo de vida ou log-tempo de censura, de acordo com $\delta_i = 1$ ou $\delta_i = 0$, respectivamente.

Temos sete variáveis explicativas para este modelo: estado, desempenho no momento do diagnóstico (x_2); idade do paciente (x_3); número de meses desde o diagnóstico a entrada no estudo (x_4); tipo do tratamento (x_5); célula tumoral escamosa (x_6); célula tumoral pequena (x_7) e célula tumoral adeno (x_8).

O tamanho da amostra é $n = 40$. A especificação do modelo consiste em duas partes. A primeira, que está relacionado com a média, inclui uma intercepção ($x_1 = 1$), e sete covariáveis $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ e x_8 . O segundo, o que está relacionado com o parâmetro de precisão.

Estamos usando aqui as funções de ligação exponencial e a identidade para relacionar os parâmetros de locação e escala, respectivamente. Os coeficientes desconhecidos são $\beta_1 = -0.818$, $\beta_2 = -0.0542$, $\beta_3 = -0.0094$, $\beta_4 = -0.0041$, $\beta_5 = -0.270$, $\beta_6 = -0.377$, $\beta_7 = 0.125$, $\beta_8 = 0.877$ e $\theta_1 = 0.874$ (ver Lawless (2011)).

Podemos então escrever o modelo que estamos considerando como

$$\log(\mu_i) = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + \beta_5 x_{5i} + \beta_6 x_{6i} + \beta_7 x_{7i} + \beta_8 x_{8i}$$

$$\phi_i = \theta_1$$

para $i = 1, \dots, 40$

4.1 Análise de Influência Local

Vamos fazer uma análise de influência local para o conjunto de dados considerado, com o $\zeta = (\beta^T, \theta^T)^T$. A Figura (4.1) apresenta os gráficos de $d_{\max}$ e C_i que correspondem a influência local e influência local total, respectivamente, sob o esquema de perturbação de casos ponderados introduzido neste trabalho.

Com base na Figura (4.1) no gráfico de $d_{\max}$, as observações 21 e 22 exercem grande influência sob $\hat{\zeta}$. No gráfico de C_i , as observações 21 e 22 também exercem influência.

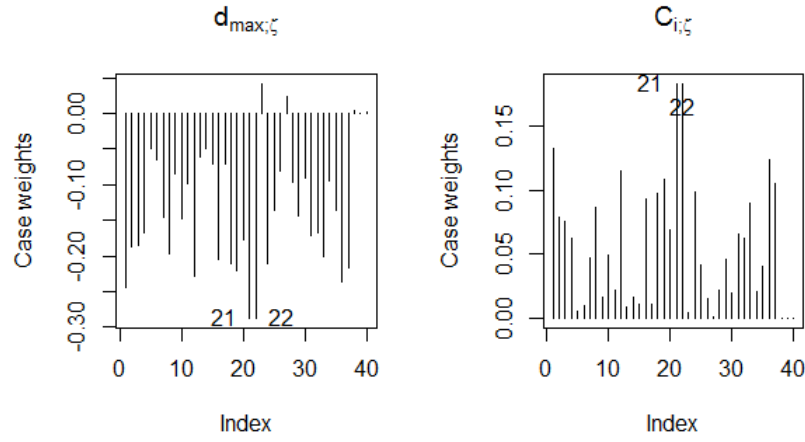


Figura 4.1: Esquema de Perturbação de Casos Ponderados

Agora, apresentaremos os gráficos de $d_{\max}$ e C_i sob o esquema de perturbação da variável explicativa do parâmetro de locação.

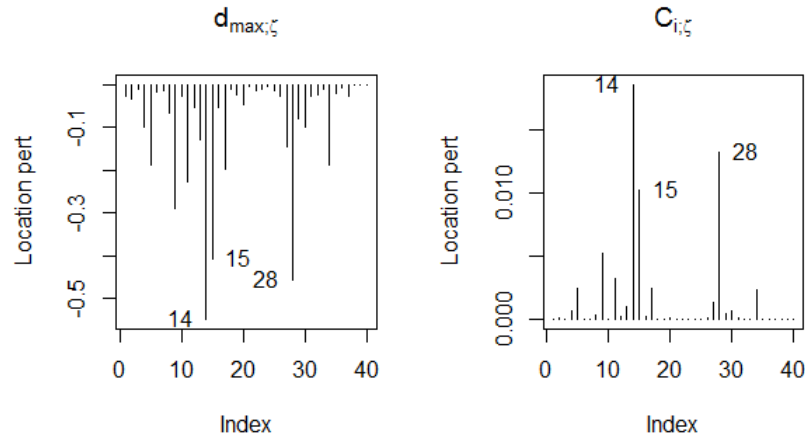


Figura 4.2: Esquema de Perturbação da Variável Explicativa do Parâmetros de Locação

Pela Figura (4.2) tanto no gráfico de $d_{\max}$ como no gráfico de C_i , as observações mais influentes sob o estimador $\hat{\zeta}$ são 14, 28 e 15.

5 APÊNDICE A

Obtendo as derivadas de primeira ordem de (2.7) com respeito aos parâmetros β e θ :

Primeiro, notemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell}{\partial \mu_i} &= 0 + \delta_i \left[-\frac{1}{\phi_i} - \left(-\frac{1}{\phi_i} \right) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] - (1 - \delta_i) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(-\frac{1}{\phi_i} \right) \\
 &= -\delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \\
 &= -\delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i}{\phi_i} \right) \exp \left(-\frac{\mu_i}{\phi_i} \right) \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \\
 &= -\delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[1 - \frac{\exp \left(\frac{w_i}{\phi_i} \right)}{\exp \left(\frac{\mu_i}{\phi_i} \right)} \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right),
 \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell}{\partial \mu_i} &= -\delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[\frac{\exp \left(\frac{\mu_i}{\phi_i} \right) - \exp \left(\frac{w_i}{\phi_i} \right)}{\exp \left(\frac{\mu_i}{\phi_i} \right) - \exp \left(\frac{\mu_i}{\phi_i} \right)} \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \\
 &= -\delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[\frac{\exp \left(\frac{\mu_i}{\phi_i} \right) - \exp \left(\frac{w_i}{\phi_i} \right)}{\exp \left(\frac{\mu_i}{\phi_i} \right)} \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \\
 &= -\delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[-\frac{\exp \left(\frac{w_i}{\phi_i} \right) - \exp \left(\frac{\mu_i}{\phi_i} \right)}{\exp \left(\frac{\mu_i}{\phi_i} \right)} \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \\
 &= \delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[\frac{\exp \left(\frac{w_i}{\phi_i} \right) - \exp \left(\frac{\mu_i}{\phi_i} \right)}{\exp \left(\frac{\mu_i}{\phi_i} \right)} \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \\
 &= \delta_i \frac{1}{\phi_i \mu_i^*} [w_i^* - \mu_i^*] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \frac{w_i^*}{\mu_i^*},
 \end{aligned}$$

onde $w_i^* = \exp\left(\frac{w_i}{\phi_i}\right)$ e $\mu_i^* = \exp\left(\frac{\mu_i}{\phi_i}\right)$ para $i = 1, \dots, n$. E usando a regra da cadeia, temos que

$$U_j(\beta, \theta) = \frac{\partial \ell}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i \mu_i^*} [w_i^* - \mu_i^*] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \frac{w_i^*}{\mu_i^*} \right\} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Agora, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \phi_i} &= \delta_i \phi_i \left(-\frac{1}{\phi_i^2} \right) + \delta_i \left[-\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(-\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} \right) \right] \\ &\quad - (1 - \delta_i) \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(-\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} \right) \\ &= \delta_i \left(-\frac{1}{\phi_i} \right) + \delta_i \left\{ -\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] \right\} \\ &\quad - (1 - \delta_i) \left(-\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} \right) \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \\ &= \delta_i \frac{1}{\phi_i} \left\{ -1 - \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] \right\} + (1 - \delta_i) \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \\ &= \delta_i \frac{1}{\phi_i} v_i + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} u_i, \end{aligned}$$

onde

$$v_i = -1 - \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \left(1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right) \quad \text{e} \quad u_i = \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right),$$

para $i = 1, \dots, n$. Concluimos que,

$$U_J(\beta, \theta) = \frac{\partial \ell}{\partial \theta_J} = \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i} v_i + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} u_i \right\} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_J}, \quad J = 1, \dots, q.$$

Obtendo as derivadas de segunda ordem de (2.7) com respeito aos parâmetros β e θ :

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu_i^2} &= \frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[\frac{\partial \ell}{\partial \mu_i} \right] = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[\delta_i \left(-\frac{1}{\phi_i} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] \\ &= -\delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(-\frac{1}{\phi_i} \right) \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(-\frac{1}{\phi_i} \right) \\ &= -\delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) - (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i^2} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right), \end{aligned}$$

assim, usando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
U_{jl}(\beta, \theta) &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \\
&= - \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i^2} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right\} \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}}\right)^2 \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_l} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ -\delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right\} \\
&\quad \times \left(\frac{d^2 \mu_i}{d\eta_{1i}^2} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_l} + \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial^2 \eta_{1i}}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right).
\end{aligned}$$

Em notação matricial temos,

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_j \partial \beta_l} = \tilde{X}^T Q_{\beta\beta}^1 \tilde{X} + \tilde{X}^T Q_{\beta\beta}^2 \tilde{X} + Q_{\beta\beta}^3 + Q_{\beta\beta}^4.$$

Agora, como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi_i \partial \mu_i} &= \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\frac{\partial \ell}{\partial \mu_i} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\delta_i \left(-\frac{1}{\phi_i}\right) \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] \\
&= -\delta_i \left[-\frac{1}{\phi_i^2} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right] + \frac{1}{\phi_i} \left[-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(-\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2}\right) \right] \right] \\
&\quad + (1 - \delta_i) \left[\left(-\frac{1}{\phi_i^2}\right) \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) + \frac{1}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(-\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2}\right) \right] \\
&= \delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] \\
&\quad - (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i^2} \left[\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right],
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
U_{Lj}(\beta, \theta) &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_L \partial \beta_j} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i^2} \left[\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] \right\} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j}.
\end{aligned}$$

Em notação matricial, obtemos

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_L \partial \beta_j} = \tilde{S}^T Q_{\theta\beta}^1 \tilde{X} + \tilde{S}^T Q_{\theta\beta}^2 \tilde{X}.$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi_i^2} &= \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right] = \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\delta_i \left[-\frac{1}{\phi_i} - \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta_i) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} \right) \right] \\
&= \left[\delta_i \left[\frac{1}{\phi_i^2} + \frac{2(w_i - \mu_i)}{\phi_i^3} - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} \right)^2 + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{-2(w_i - \mu_i)}{\phi_i^3} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta_i) \left[-\exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} \right)^2 + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{-2(w_i - \mu_i)}{\phi_i^3} \right) \right] \right] \\
&= \left[\delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \left[1 + \frac{2(w_i - \mu_i)}{\phi_i} - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^2 + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{-2(w_i - \mu_i)}{\phi_i} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i^2} \left[-\exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^2 + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{-2(w_i - \mu_i)}{\phi_i} \right) \right] \right],
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
U_{LJ}(\theta, \theta) &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_L \partial \theta_J} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \left[1 + \frac{2(w_i - \mu_i)}{\phi_i} - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{-2(w_i - \mu_i)}{\phi_i} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i^2} \left[-\exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^2 + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{-2(w_i - \mu_i)}{\phi_i} \right) \right] \right\} \\
&\quad \times \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right)^2 \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_J} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[-1 - \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{d^2 \phi_i}{d\eta_{2i}^2} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_J} + \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial^2 \eta_{2i}}{\partial \theta_L \partial \theta_J} \right\}.
\end{aligned}$$

Em forma matricial, temos

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_L \partial \theta_J} = \tilde{S}^T Q_{\theta\theta}^1 \tilde{S} + \tilde{S}^T Q_{\theta\theta}^2 \tilde{S} + Q_{\theta\theta}^3 + Q_{\theta\theta}^4.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu_i \partial \phi_i} &= \frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right] = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[\left[\delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[-1 - \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 - \delta_i) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i^2} \right) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \right] \\
&= \delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[\frac{1}{\phi_i} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] - \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left[-\exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(-\frac{1}{\phi_i} \right) \right] \right] \\
&\quad + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \left[-\frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) + \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(-\frac{1}{\phi_i} \right) \right] \\
&= \delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[\frac{1}{\phi_i} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) - \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \right] \\
&\quad + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \left[-\frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left[1 + \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right] \right] \\
&= \delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) - \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \\
&\quad + (1 - \delta_i) \left(-\frac{1}{\phi_i^2} \right) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left[1 + \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right]
\end{aligned}$$

pode ser usado para concluir que

$$\begin{aligned}
U_{jL}(\beta, \theta) &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_j \partial \theta_L} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) - \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta_i) \left(-\frac{1}{\phi_i^2} \right) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left[1 + \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right] \right\} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L}.
\end{aligned}$$

Matricialmente, temos

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_j \partial \theta_L} = \tilde{X}^T Q_{\theta\beta}^1 \tilde{S} + \tilde{X}^T Q_{\theta\beta}^2 \tilde{S}.$$

Calculando as esperanças necessárias para obtermos a matriz de informação de Fisher:

Usaremos a seguinte expressão para calcular as esperanças envolvidas no trabalho

$$E(h(\delta_i, W_i)) = E_1(h(1, W_i)) + E_2(h(0, W_i)),$$

onde

$$E_1(h(W_i)) = \int_{-\infty}^{R_i} h\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) g(w_i, \mu_i, \phi_i) dw_i$$

e

$$E_2(h(W_i)) = h\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) P(W_i > R_i).$$

Calculando $\mathcal{H}_{1i}$:

Temos que,

$$\mathcal{H}_{1i} = E(\delta_i) = E_1(1) + E(0) = \int_{-\infty}^{R_i} \frac{1}{\phi} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) dw_i.$$

Usando o método de substituição, tomando $x_i = \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)$, então $dx_i = \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \frac{1}{\phi}$. Logo,

$$\mathcal{H}_{1i} = \int_0^{v_i} \exp(-x_i) dx_i = -\exp(-x_i)|_0^{v_i} = -\exp(-v_i) + \exp(0) = -\exp(-v_i) + 1,$$

onde $v_i = \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)$. Portanto,

$$\mathcal{H}_{1i} = 1 - \exp\left(\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right).$$

Calculando $\mathcal{H}_{2i}$:

Observemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2i} &= E\left(\exp\left(\frac{W_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) = E_1\left(\exp\left(\frac{W_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) + E_2\left(\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{R_i} \frac{1}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) dw_i + \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\exp - \left(\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Usando a substituição $x_i = \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)$, obtemos

$$\mathcal{H}_{2i} = \int_0^{\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)} x_i \exp(-x_i) dx_i + \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right),$$

agora, pelo método de integração por partes, considerando $u_i = x_i$ e $dv_i = \exp(-x_i)$, vem que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{2i} &= -x_i \exp(-x_i) \Big|_0^{\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)} - \int_0^{\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)} -\exp(-x_i) dx_i + \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) \\
&= -\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) - \exp(-x_i) \Big|_0^{\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)} + \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\exp\left(\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right)\right) \\
&= -\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) - \exp\left(-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) + \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right).
\end{aligned}$$

Calculando as Demais Esperanças

Agora utilizaremos a função geradora de momento para calcular as demais esperanças.

$$\begin{aligned}
E\left(\exp\left(\frac{t(W_i - \mu_i)}{\phi_i}\right)\right) &= E_1\left(\exp\left(\frac{t(W_i - \mu_i)}{\phi_i}\right)\right) + E_2\left(\exp\left(\frac{t(W_i - \mu_i)}{\phi_i}\right)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{R_i} \frac{1}{\phi_i} \exp\left(\frac{t(w_i - \mu_i)}{\phi_i}\right) \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) dw_i + \\
&\quad + \exp\left(\frac{t(R_i - \mu_i)}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right)
\end{aligned}$$

Usando a substituição $x_i = \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}$ então $dx_i = \frac{1}{\phi_i} dw_i$, donde

$$E(\exp(tX_i)) = \int_{-\infty}^{\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}} \exp(tx_i) \exp(x_i - \exp x_i) dx_i + \exp\left(\frac{t(R_i - \mu_i)}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right).$$

Agora considerando $u_i = \exp(x_i)$, então $du_i = \exp(x_i) dx_i$. E assim,

$$E(\exp(tX_i)) = \int_0^{\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)} u_i^t \exp(-u_i) du_i + \exp\left(\frac{t(R_i - \mu_i)}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right).$$

Lembremos que, as funções Gama incompleta são dadas por

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

e

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt,$$

onde $x \in \mathbb{R}^+$ e a é uma variável complexa cuja parte real é positiva.

Consideremos

$$\begin{aligned} p(t) &= E(\exp(tX_i)) \\ &= \gamma\left(t + 1, \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) + \exp\left(\frac{t(R_i - \mu_i)}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right). \end{aligned}$$

Notemos que

$$q(t) = E\left(\delta_i \exp\left(\frac{t(W_i - \mu_i)}{\phi_i}\right)\right) = E_1\left(\exp\left(\frac{t(W_i - \mu_i)}{\phi_i}\right)\right) = \gamma\left(t + 1, \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right)$$

e

$$q'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma\left(t + 1, \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right).$$

Por outro lado,

$$q'(t) = \frac{\partial}{\partial t} E\left(\delta_i \exp\left(\frac{t(W_i - \mu_i)}{\phi_i}\right)\right) = E\left(\delta_i \exp\left(\frac{W_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{W_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right).$$

Logo,

$$\mathcal{H}_{3i} = E\left(\delta_i \left(\frac{W_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) = q'(0) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma\left(t, \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right)\Big|_{t=1}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} p'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \gamma\left(t + 1, \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) + \exp\left(\frac{t(R_i - \mu_i)}{\phi_i}\right) \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right), \\ p''(t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gamma\left(t + 1, \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) + \exp\left(\frac{t(R_i - \mu_i)}{\phi_i}\right) \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) \end{aligned}$$

e

$$p'''(t) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \gamma\left(t + 1, \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) + \exp\left(\frac{t(R_i - \mu_i)}{\phi_i}\right) \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)^2 \exp\left(-\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{4i} &= E\left(\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) = p'(1) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \gamma\left(t, \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right)\Big|_{t=2} + \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right), \\ \mathcal{H}_{5i} &= E\left(\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)^2\right) = p''(1) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gamma\left(t, \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right)\Big|_{t=2} + \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)^2 \exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{6i} &= E \left(\exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^3 \right) = p'''(1) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial t^3} \gamma \left(t, \exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right) \Big|_{t=2} + \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^3 \exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \exp \left(- \exp \left(\frac{R_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right).\end{aligned}$$

Finalmente, usando as esperanças calculadas acima obteremos $E[U_{jl}]$, $E[U_{Lj}] = E[U_{jL}]$ e $E[U_{Lj}]$. De fato, tomando a esperança em U_{jl} , temos

$$\begin{aligned}k_{jl} &= E \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n \left\{ -\delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) - (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i^2} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right\} \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \right)^2 \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_l} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left\{ -\delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{d^2 \mu_i}{d\eta_{1i}^2} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_l} + \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial^2 \eta_{1i}}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right\} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{\mathcal{H}_{2i}}{\phi_i^2} \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \right)^2 \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_l}.\end{aligned}$$

Aplicando a esperança em U_{Lj} , obtemos

$$\begin{aligned}k_{Lj} &= E \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_L \partial \beta_j} \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i^2} \left[\exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \right\} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{\mathcal{H}_{4i}}{\phi_i^2} \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L}.\end{aligned}$$

Analogamente, tomando a esperança em U_{LJ} , segue que

$$\begin{aligned}
k_{LJ} &= E \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_L \partial \theta_J} \right] \\
&= E \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i^2} \left[1 + \frac{2(w_i - \mu_i)}{\phi_i} - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^2 - 2 \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i^2} \left[-\exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right)^2 + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{-2(w_i - \mu_i)}{\phi_i} \right) \right] \right\} \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right)^2 \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_J} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \frac{1}{\phi_i} \left[-1 - \frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} + \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right] + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ \frac{d^2 \phi_i}{d\eta_{2i}^2} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_J} + \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial^2 \eta_{2i}}{\partial \theta_L \partial \theta_J} \right\} \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{(\mathcal{H}_{1i} + 2\mathcal{H}_{3i} - 2\mathcal{H}_{4i} - \mathcal{H}_{5i})}{\phi_i^2} \left(\frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \right)^2 \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_J}
\end{aligned}$$

Em notação matricial, temos

$$\begin{aligned}
E \left[-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \beta^T} \right] &= \tilde{X}^T W_{\beta\beta} \tilde{X}, \\
E \left[-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \beta^T} \right] &= \tilde{S}^T W_{\beta\theta} \tilde{X}
\end{aligned}$$

e

$$E \left[-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \theta^T} \right] = \tilde{S}^T W_{\theta\theta} \tilde{S}.$$

6 APÊNDICE B

Determinando as matrizes $\Delta\beta$ e $\Delta\theta$ para o caso da perturbação da variável resposta:

Temos que,

$$\ell_i^r(\mu_i, \phi_i, \lambda_i) = \delta_i \log\left(\frac{1}{\phi_i}\right) + \delta_i \left[\frac{w_{i\lambda} - \mu_i}{\phi_i} - \exp\left(\frac{w_{i\lambda} - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] - (1 - \delta_i) \exp\left(\frac{w_{i\lambda} - \mu_i}{\phi_i}\right),$$

logo

$$\frac{\partial \ell_i^r}{\partial \lambda_i} = \frac{\delta_i}{\phi_i} \left[s_w^i - \exp\left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i}\right) s_w^i \right] - \frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i}\right) s_w^i$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i^r}{\partial \beta_j \partial \lambda_i} &= \left[\frac{\delta_i}{\phi_i^2} \exp\left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i}\right) s_w^i + \frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i^2} \exp\left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i}\right) s_w^i \right] \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j}, \\ \frac{\partial^2 \ell_i^r}{\partial \theta_L \partial \lambda_i} &= \left[\frac{\delta_i}{\phi_i^2} \left[-s_w^i + s_w^i \exp\left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left[\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i} + 1 \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i^2} s_w^i \exp\left(\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left[\frac{w_i + \lambda_i s_w^i - \mu_i}{\phi_i} + 1 \right] \right] \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta_\beta &= \widehat{\tilde{X}}^T S_w \widehat{\Omega}_3 \widehat{M}_1 P_\beta^1(w_\lambda) + \widehat{\tilde{X}}^T S_w \widehat{\Omega}_4 \widehat{M}_1 P_\beta^1(w_\lambda) \\ \Delta_\theta &= \widehat{\tilde{S}}^T S_w \widehat{\Omega}_3 \widehat{M}_2 P_\theta^1(w_\lambda) + \widehat{\tilde{S}}^T S_w \widehat{\Omega}_4 \widehat{M}_2 P_\theta^2(w_\lambda). \end{aligned}$$

Determinando as matrizes Δ_β e Δ_θ para o caso da perturbação da variável explicativa do parâmetro de locação (x_j^T):

Temos que,

$$\ell_i^{ex}(\mu_i, \phi_i, \lambda_i) = \delta_i \log \frac{1}{\phi_i} + \delta_i \left[\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i}\right) \right] - (1 - \delta_i) \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i}\right),$$

logo

$$\frac{\partial \ell_i^{ex}}{\partial \lambda_i} = -\frac{\delta_i}{\phi_i} \left(1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i}\right) \left(\frac{\partial \mu_{i\lambda}}{\partial \eta_{1i\lambda}} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda} \right) \right) + (1 - \delta_i) \frac{1}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i}\right) \left(\frac{\partial \mu_{i\lambda}}{\partial \eta_{1i\lambda}} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda} \right),$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell_i^{ex}}{\partial \beta_j \partial \lambda_i} &= -\frac{\delta_i}{\phi_i^2} \left(\exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \left(\frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \right)^2 \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i} \right) - \frac{\delta_i}{\phi_i} \left(1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \right) \frac{d^2 \mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}^2} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&\quad - \frac{\delta_i}{\phi_i} \left(1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \right) \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{\partial^2 \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j \partial \lambda_i} - \frac{(1-\delta_i)}{\phi_i^2} \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \left(\frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \right)^2 \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&\quad + \frac{(1-\delta_i)}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \frac{d^2 \mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}^2} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i} + \frac{1-\delta_i}{\phi_i} \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{\partial^2 \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j \partial \lambda_i} \\
\frac{\partial^2 \ell_i^{ex}}{\partial \theta_L \partial \lambda_i} &= \left[\frac{\delta_i}{\phi_i^2} \left[1 - \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) - \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1-\delta_i)}{\phi_i^2} \left[\exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) + \exp \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_i} \right) \right] \right] \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L} \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta_\beta &= \hat{\tilde{X}}^T(\lambda) \hat{Q}_{\beta\beta}^1(\lambda) \hat{\tilde{X}}_\lambda + \hat{\tilde{X}}^T(\lambda) \hat{Q}_{\beta\beta}^2(\lambda) \hat{\tilde{X}}_\lambda + \hat{Q}_{\beta\beta\lambda}^3 + \hat{Q}_{\beta\beta\lambda}^4, \\
\Delta_\theta &= \hat{\tilde{S}}^T \hat{Q}_{\theta\beta}^1(\lambda) \hat{\tilde{X}}_\lambda + \hat{\tilde{S}}^T \hat{Q}_{\theta\beta}^2(\lambda) \hat{\tilde{X}}_\lambda.
\end{aligned}$$

Determinando as matrizes Δ_β e Δ_θ para o caso da perturbação da variável explicativa do parâmetro de escala (z_j^T):

Temos que,

$$\ell_i^{ez}(\mu_i, \phi_{i\lambda}, \lambda_i) = \delta_i \log \left(\frac{1}{\phi_{i\lambda}} \right) + \delta_i \left[\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} - \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} \right) \right] - (1 - \delta_i) \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} \right),$$

assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell_i^{ez}}{\partial \lambda_i} &= \left[-\frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} - \frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} \right) + \frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}} \exp \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} \right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}} \right) \right] \frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell_i^{ez}}{\partial \beta_j \partial \lambda_i} &= \left[\frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}^2} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}^2} \left[\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \right] \right] \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i}, \\
\frac{\partial^2 \ell_i^{ez}}{\partial \theta_L \partial \lambda_i} &= \left[\frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}^2} \left[1 + 2 \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) - 2 \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}^2} \left[2 \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \right] \right] \left(\frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}}\right)^2 \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \theta_L} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&\quad + \left[\frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \left[-1 - \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \right] \frac{d^2 \phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}^2} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \theta_L} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&\quad + \left[\frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \left[-1 - \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}} \left[\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_{i\lambda}}\right) \right] \right] \frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{\partial^2 \eta_{2i\lambda}}{\partial \theta_L \partial \lambda_i}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta_\beta &= \widehat{X}^T \widehat{Q}_{\theta\beta}^1(\lambda) \widehat{S}_\lambda + \widehat{X}^T \widehat{Q}_{\theta\beta}^2(\lambda) \widehat{S}_\lambda, \\
\Delta_\theta &= \widehat{S}(\lambda)^T \widehat{Q}_{\theta\theta}^1(\lambda) \widehat{S}_\lambda + \widehat{S}(\lambda)^T \widehat{Q}_{\theta\theta}^2(\lambda) \widehat{S}_\lambda + \widehat{Q}_{\theta\theta\lambda}^3 + \widehat{Q}_{\theta\theta\lambda}^4.
\end{aligned}$$

Determinando as matrizes Δ_β e Δ_θ para o caso da perturbação das variáveis explicativas $(x_J^T, z_J^T)^T$:

Temos que

$$\ell_i^{ez}(\mu_i, \phi_i, \lambda_i) = \delta_i \log\left(\frac{1}{\phi_{i\lambda}}\right) + \delta_i \left[\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}} - \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \right] - (1 - \delta_i) \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right),$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell_i^{ez}}{\partial \lambda_i} &= \frac{-\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{\eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i} - \frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i} - \frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i} + \frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&\quad + \frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i} + \frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&\quad + \frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell_i^{exz}}{\partial \beta_j \partial \lambda_i} &= \left[\frac{-\delta_i}{\phi_{i\lambda}^2} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}}\right)^2 - \frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right)\right] \frac{d^2 \mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}^2} \right] \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&+ \left[\frac{-(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}^2} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{i\lambda}}\right)^2 + \frac{1-\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \frac{d^2 \mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}^2} \right] \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&+ \frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}^2} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) - \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right)\right] \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&- \frac{(1-\delta_i)^2}{\phi_{i\lambda}} \left[\exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right)\right] \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j} \frac{\partial \eta_{i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&- \frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right)\right] \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{\partial^2 \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j \partial \lambda_i} + \frac{1-\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{\partial^2 \eta_{1i\lambda}}{\partial \beta_j \partial \lambda_i}, \\
\frac{\partial^2 \ell_i^{exz}}{\partial \theta_L \partial \lambda_i} &= \left[\frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}^2} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) - \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right)\right] \right. \\
&- \left. \frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}^2} \left[\exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right)\right] \right] \frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{d\mu_{i\lambda}}{d\eta_{1i\lambda}} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \theta_L} \frac{\partial \eta_{1i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&+ \left[\frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}^2} \left[1 + 2 \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) - 2 \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) - \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right)^2\right] \left(\frac{\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}}\right)^2 \right. \\
&+ \left. \frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \left[-1 - \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right)\right] \frac{d^2 \phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}^2} \right] \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \theta_L} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&- \left[\frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}^2} \left[2 \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right)^2\right] \left(\frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}}\right)^2 \right. \\
&+ \left. \frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \frac{d^2 \phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}^2} \right] \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \theta_L} \frac{\partial \eta_{2i\lambda}}{\partial \lambda_i} \\
&+ \left[\frac{\delta_i}{\phi_{i\lambda}} \left[-1 - \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right)\right] \right. \\
&+ \left. \frac{(1-\delta_i)}{\phi_{i\lambda}} \exp\left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \left(\frac{w_i - \mu_{i\lambda}}{\phi_{i\lambda}}\right) \right] \frac{d\phi_{i\lambda}}{d\eta_{2i\lambda}} \frac{\partial^2 \eta_{2i\lambda}}{\partial \theta_L \partial \lambda_i}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_\beta &= \widehat{\widehat{X}}^T(\lambda) \widehat{Q}_{\beta\beta}^1(\lambda) \widehat{\widehat{X}}_\lambda + \widehat{\widehat{X}}^T(\lambda) \widehat{Q}_{\beta\beta}^2(\lambda) \widehat{\widehat{X}}_\lambda + \widehat{\widehat{X}}^T(\lambda) \widehat{Q}_{\theta\beta}^1(\lambda) \widehat{\widehat{S}}_\lambda, \\
&+ \widehat{\widehat{X}}^T(\lambda) \widehat{Q}_{\theta\beta}^2(\lambda) \widehat{\widehat{S}}_\lambda + \widehat{Q}_{\beta\beta\lambda}^3 + \widehat{Q}_{\beta\beta\lambda}^4 \\
\Delta_\theta &= \widehat{\widehat{S}}(\lambda)^T \widehat{Q}_{\theta\beta}^1(\lambda) \widehat{\widehat{X}}_\lambda + \widehat{\widehat{S}}(\lambda)^T \widehat{Q}_{\theta\beta}^2(\lambda) \widehat{\widehat{X}}_\lambda + \widehat{\widehat{S}}(\lambda)^T \widehat{Q}_{\theta\theta}^1(\lambda) \widehat{\widehat{S}}_\lambda \\
&+ \widehat{\widehat{S}}(\lambda)^T \widehat{Q}_{\theta\theta}^2(\lambda) \widehat{\widehat{S}}_\lambda + \widehat{Q}_{\theta\theta\lambda}^3 + \widehat{Q}_{\theta\theta\lambda}^4.
\end{aligned}$$

Determinando $C_{\zeta w}$:

Temos que

$$\frac{\partial \ell}{\partial w_i} = \frac{\delta_i}{\phi_i} \left[1 - \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right)\right] - \frac{(1-\delta_i)}{\phi_i} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right),$$

então

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_j \partial w_i} &= \left[\frac{\delta_i}{\phi_i^2} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) + \frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i^2} \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] \frac{d\mu_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_j}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_L \partial w_i} &= \left[\frac{\delta_i}{\phi_i^2} \left[-1 + \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - \delta_i)}{\phi_i^2} \left[\exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) + \exp\left(\frac{w_i - \mu_i}{\phi_i}\right) \right] \right] \frac{d\phi_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \theta_L},\end{aligned}$$

logo

$$C_{\zeta w} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^T \Omega_3 M_1 P_\beta^1 + \tilde{X}^T \Omega_4 M_1 P_\beta^1 \\ \tilde{S}^T \Omega_3 M_2 P_\theta^1 + \tilde{S}^T \Omega_4 M_2 P_\theta^2 \end{pmatrix}.$$

Referências Bibliográficas

- Barreto-Souza, W. and Vasconcellos, K. L. (2011). Bias and skewness in a general extreme-value regression model. *Computational statistics & data analysis*, 55(3):1379–1393.
- Cook, R. D. (1986). Assessment of local influence. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 133–169.
- Cook, R. D. and Weisberg, S. (1982). *Residuals and influence in regression*. New York: Chapman and Hall.
- Espinheira, P. L., Ferrari, S. L., and Cribari-Neto, F. (2008). On beta regression residuals. *Journal of Applied Statistics*, 35(4):407–419.
- Kalbfleisch, J. D. and Prentice, R. L. (1973). Marginal likelihoods based on cox’s regression and life model. *Biometrika*, 60(2):267–278.
- Kotz, S. and Nadarajah, S. (2000). *Extreme value distributions*, volume 31. World Scientific.
- Lawless, J. F. (2011). *Statistical models and methods for lifetime data*, volume 362. John Wiley & Sons.
- Lawrance, A. J. (1988). Regression transformation diagnostics using local influence. *Journal of the American Statistical Association*, 83(404):1067–1072.
- Lemonte, A. J. and Patriota, A. G. (2011). Influence diagnostics in birnbaum–saunders nonlinear regression models. *Journal of Applied Statistics*, 38(5):871–884.
- Lesaffre, E. and Verbeke, G. (1998). Local influence in linear mixed models. *Biometrics*, pages 570–582.

- Meeker, W. and Escobar, L. A. (1998). Statistical methods for reliability data. John Wiley & Sons. *New York*.
- Nelson, W. (1982). Applied life data analysis. *Statistics, Published by John Wiley & Sons, Inc., New York, NY*.
- Park, C. and Lee, S. B. (2012). Parameter estimation from censored samples using the expectation-maximization algorithm. *arXiv preprint arXiv:1203.3880*.
- Paula, G. A. (1993). Assessing local influence in restricted regression models. *Computational statistics & data analysis*, 16(1):63–79.
- Rocha, A. V. and Simas, A. B. (2011). Influence diagnostics in a general class of beta regression models. *TEST*, 20(1):95–119.
- Thomas, W. and Cook, R. D. (1990). Assessing influence on predictions from generalized linear models. *Technometrics*, 32(1):59–65.
- Verbeke, G. and Molenberghs, G. (2000). *Linear mixed models for longitudinal data*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York.
- Wei, B.-C., Hu, Y.-Q., and Fung, W.-K. (1998). Generalized leverage and its applications. *Scandinavian Journal of statistics*, 25(1):25–37.