

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o número máximo de retas
duas a duas disjuntas em
superfícies não singulares em \mathbb{P}^3

Dayane Santos de Lira

JOÃO PESSOA – PB
FEVEREIRO DE 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o número máximo de retas
duas a duas disjuntas em
superfícies não singulares em \mathbb{P}^3

por

Dayane Santos de Lira

sob a orientação da

Prof^a. Dr^a. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2017

L768s Lira, Dayane Santos de.
Sobre o número máximo de retas duas a duas disjuntas em
superfícies não singulares em P^3 / Dayane Santos de Lira.-
João Pessoa, 2017.
82 f. : il.-

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia.
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Retas Duas a Duas Disjuntas. 3. Superfície
de Fermat. 4. Quártica de Schur. 5. Família de Rams. I. Título.

Sobre o número máximo de retas duas a duas disjuntas em superfícies não singulares em \mathbb{P}^3

por

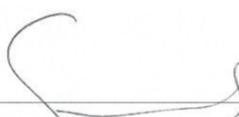
Dayane Santos de Lira ¹

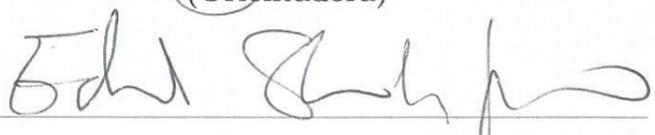
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

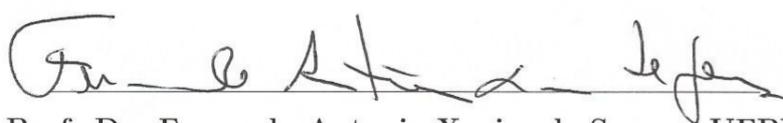
Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 24 de Fevereiro de 2017.

Banca Examinadora:


Prof.ª. Dr.ª. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia – UFPB
(Orientadora)


Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro - UFPE
(Examinador Externo)


Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza - UFPB
(Examinador Interno)

¹A autora foi bolsista da Capes durante a elaboração desta dissertação.

Dedico este trabalho aos meus pais Rubens e Ivonete pelo otimismo, compreensão e admiração. Ao meu amado e querido noivo Walber pelo companheirismo, compreensão, força e apoio.

“ Nossa maior fraqueza é a desistência. O caminho mais certo para o sucesso é sempre tentar apenas uma vez mais.”

Thomas A. Edison

Agradecimentos

A Deus por me propor coragem, força, persistência e sabedoria.

A minha orientadora Jacqueline, por todos os ensinamentos, paciência, dedicação, disponibilidade, confiança, atenção e responsabilidade.

A minha família em especial meus pais Rubens e Ivonete por acreditarem em mim.

Ao meu noivo Walber, por sempre me incentivar, apoiar, me ensinar a lutar diante de qualquer situação e a nunca desistir seja qual for o resultado ou desafio.

A minha sogra Dona Socorro, por ter me acolhido mesmo antes de me conhecer.

A todos os meus colegas do mestrado, em especial Djair Paulino (meu monitor que sempre estava disponível para tirar minhas 31 dúvidas, além de me ajudar na resolução de várias questões), Thiago Luiz (meu irmão da geometria algébrica), Thiago Santos, Esaú Alves, Ricardo Silva, Fábio Leite, José Ribeiro por sempre me apoiarem e me ajudarem em todos os momentos difíceis presentes no mestrado, pelos ensinamentos, companheirismo, paciência e atenção.

Aos mestrandos e doutorandos que tive a oportunidade de conhecer na UFPB, em especial Djair Paulino, Thiago Luiz, Thiago Santos, José Ribeiro, Esaú Alves, Fábio Leite, Ricardo Silva, Sylvia Ferreira, Breno Souza, Sally Andria, Emanuelle Claudia, Laíse Dias, Clemerson Menezes, Luis Alba, Camila Sibelle, Isabelly Camila, Antonival Lopes, José Júnior, Ageu Freire, Renato Silvestre, Diego Dias, Rossane Gomes, Franciélia Souza, Antonio de Padua, Marcos Aurélio, Marcius Cavalcante, Lindinês Silva, Janiely Silva, Mariana Ferreira, Rafael Pereira, entre outros.

A todos os professores do mestrado pelos ensinamentos, paciência, atenção e disponibilidade.

A coordenação em especial ao coordenador Daniel Pellegrino e ao vice-coordenador Joedson Santos pela responsabilidade e atenção.

Ao ex-coordenador Uberlândio Batista, pela atenção e incentivo.

A secretaria do DM em especial a secretária Roseli e as ex-secretárias Carolina e Alaíce, pela responsabilidade, pontualidade e atenção.

Aos meus amigos, em especial Maria José e Santana Alves pelo carinho e atenção.

A banca examinadora pela disponibilidade em participar.

Aos meus ex-professores da graduação, em especial Flávius Gorgônio e Luciano Barros, pela confiança e apoio.

A Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho objetiva determinar a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas que uma superfície não singular de grau d em \mathbb{P}^3 pode conter. No caso dos graus $d = 1$ e $d = 2$ verificamos que estes valores são zero e infinito, respectivamente. Além disso, no caso de grau $d = 3$ mostramos que o número máximo de retas duas a duas disjuntas é 6, ditas configurações foram estudadas em 1863 pelo suíço Ludwig Schläfli (1814-1895) em [15]. Para o caso $d = 4$, em 1975 o russo Viacheslav Nikulin em [10] mostrou que as superfícies quárticas não singulares contêm no máximo 16 retas duas a duas disjuntas. No nosso trabalho, conseguimos mostrar que a famosa quártica de Schur atinge essa cota e que quártica de Fermat possui no máximo 12 retas duas a duas disjuntas. Determinamos ainda cotas inferiores para o número máximo de retas duas a duas disjuntas no caso de superfícies não singulares de grau $d \geq 5$. Por exemplo, a família de Rams em [11] nos permite achar uma dessas cotas inferiores.

Palavras-chave: Retas duas a duas disjuntas, superfície de Fermat, quártica de Schur, família de Rams.

Abstract

This work aims to determine the maximum number of pairwise disjoint lines that a non-singular surface of degree d in \mathbb{P}^3 can contain. In the case of degrees $d = 1$ and $d = 2$ we found that these values are zero and infinite, respectively. Furthermore, in the case of degree $d = 3$ we did show that the maximum number of pairwise disjoint lines is 6, these configurations were studied in 1863 by the Swiss Ludwig Schläfli (1814-1895) in [15]. For the case $d = 4$, in 1975 the Russian Viacheslav Nikulin in [10] showed that non-singular quartic surfaces contain at most 16 pairwise disjoint lines. In our work, we have been able to show that Schur's famous quartic achieves this bound and that Fermat's quartic has at most 12 pairwise disjoint lines. We also determined lower bounds for the maximum number of pairwise disjoint lines in the case of non-singular surfaces of degree $d \geq 5$. For example, the Rams's family in [11] allows us to find one of these lower bounds.

Keywords: Pairwise disjoint lines, Fermat surface, Schur's quartic, Rams's Family.

Sumário

Introdução	1
1 Retas disjuntas em superfícies não singulares de grau $d \leq 3$ em \mathbb{P}^3	4
1.1 Retas em um plano	4
1.2 Retas em superfícies quádricas não singulares	8
1.3 Retas em superfícies cúbicas não singulares	11
2 Retas disjuntas em superfícies quárticas não singulares	24
2.1 Retas na quártica de Fermat	24
2.2 Retas disjuntas na quártica de Schur	30
2.3 A quártica não singular geral	38
3 Estudo de r_d para $d \geq 5$	39
3.1 Família de superfícies de Fermat	39
3.2 Família de superfícies de Rams	43
3.3 Família de Boissière-Sarti	51
A Resultados Básicos de Geometria Algébrica	55
A.1 Resultados gerais	55
A.2 Resultados sobre retas em \mathbb{P}^3	59
A.3 Mudança de Coordenadas Projetivas	62
A.4 Mergulho de Plücker	63
A.5 Fibras de Kodaira	65
B Retas na quártica de Schur	66
Referências Bibliográficas	71

Notações

No decorrer deste trabalho:

- \mathcal{R} denota o anel dos polinômios $\mathbb{C}[\underline{x}]$ sendo $\underline{x} = x_0, x_1, x_2, x_3$;
- \mathcal{R}_d denota o conjunto dos polinômios homogêneos de grau d em \mathcal{R} ;
- $\mathcal{I}(Y)$ denota o ideal associado a um subconjunto Y de \mathbb{P}^n ;
- $\phi(S)$ denota o conjunto de todas as retas contidas na superfície $S \subseteq \mathbb{P}^3$;
- $r(S) = \text{máx} \{k \in \mathbb{N} \mid \exists l_1, l_2, \dots, l_k \in \phi(S) \text{ tais que } l_i \cap l_j = \emptyset, \forall i \neq j\}$;
- $r_d = \text{máx} \{r(S) \mid S \text{ é uma superfície não singular de grau } d \text{ em } \mathbb{P}^3\}$;
- $\phi_l(S) = \{m \in \phi(S) \mid m \neq l \text{ e } l \cap m \neq \emptyset\}$, para cada reta $l \in \phi(S)$.

Introdução

Existem diversos trabalhos onde se pesquisa a quantidade máxima de retas em superfícies não singulares em \mathbb{P}^3 . De fato para grau $d = 1, 2$ este número é infinito (conforme mostramos no capítulo 1 deste trabalho), para $d = 3$ este é exatamente 27, fato este provado em 1849 pelo britânico Arthur Cayley em seu artigo “*On the triple tangent planes of surfaces of the third order*” [6], para $d = 4$ não excede o valor de 64 como podemos observar no artigo do italiano Beniamino Segre “*The maximum number of lines lying on a quartic surface*” [17] de 1943 . Outro fato importante já conhecido sobre $d = 4$, é que a quártica de Schur possui exatamente 64 retas, isto foi verificado pelo matemático alemão Friedrich Schur em seu trabalho “*Ueber einer besondere Class von Flächen vierter Ordnung*” [16]. Já para grau superior este número ainda é desconhecido, embora já exista uma cota inferior como podemos observar no artigo “*Counting Lines on Surfaces*” [5], dos matemáticos Samuel Boissière e Alessandra Sarti de 2007.

Um problema análogo nessa direção diz respeito ao número máximo de retas duas a duas disjuntas que uma superfície não singular em \mathbb{P}^3 pode conter. Sabe-se que para os graus $d = 1$ e $d = 2$ este número é zero e infinito respectivamente, para $d = 3$ este número é 6, de fato estas configurações de retas foram estudadas pelo suíço Ludwig Schläfli em seu artigo “*On the distribution of surfaces of the third order into species, in reference to the absence or presence of singular points, and the reality of their lines*” [15] no ano de 1863. No caso de grau $d = 4$ realizamos várias pesquisas e não conseguimos encontrar (na bibliografia ao nosso alcance) resposta para a seguinte pergunta:

“Qual é a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas que a quártica de Schur possui? ”

Ou ainda,

“Qual é a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas que a quártica de Fermat possui? ”

E por último:

“Qual é a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas que superfícies não singulares de grau $d \geq 5$ em \mathbb{P}^3 possuem? ”

Durante nossa pesquisa nos deparamos com o artigo do matemático russo Viacheslav V. Nikulin “*On Kummer Surfaces*” [10] de 1975, o qual deu um importante passo sobre o estudo do número máximo de retas duas a duas disjuntas em superfícies quárticas não singulares. Neste artigo, Nikulin provou que toda quártica não singular em \mathbb{P}^3 contém no máximo 16 retas duas a duas disjuntas. Outro marco importante se deu no ano de 1984 quando o matemático Japonês Yoichi Miyaoka publicou o artigo “*The Maximal Number of Quotient Singularities on Surfaces with Given Numerical Invariants*” [9], no qual apresenta uma cota superior para a quantidade de retas duas a duas disjuntas de superfícies não singulares de grau $d \geq 4$ em \mathbb{P}^3 . Sendo esta dada pela fórmula

$$2d(d - 2).$$

No decorrer do nosso trabalho o leitor irá observar que esta cota é atingida em superfícies cúbicas não singulares em geral e para a famosa quártica de Schur.

Além dos resultados acima, também merecem destaque os artigos “*Smooth quartic surfaces with 352 conics*” [3] e “*Smooth Kummer surfaces in Projective three-space*” [4] dos matemáticos Barth e Bauer, onde o primeiro têm como um dos principais objetivos mostrar a existência de quárticas suaves em \mathbb{P}^3 , as quais possuem 16 cônicas suaves duas a duas disjuntas. E o segundo dá exemplos de superfícies de Kummer suaves em \mathbb{P}^3 contendo 16 curvas racionais duas a duas disjuntas para qualquer grau. Salientamos que neste trabalho não iremos nos aprofundar no estudo dos artigos de Bauer, Barth e Nikulin, devido ao fato de depender de alguns conteúdos os quais não estão ao nosso alcance no momento, tais como superfícies de Kummer, divisores de curvas, variedades jacobianas, polarização do tipo (1,9), etc.

Em 2004 o matemático polonês Slawomir Rams em seu artigo “*Projective surfaces with many skew lines*” [11] dá o exemplo de uma superfície não singular de grau $d \geq 6$ em \mathbb{P}^3 que denotaremos por R_d , a qual possui

$$d(d - 2) + 2$$

retas duas a duas disjuntas. Verificamos no nosso trabalho que sendo $d \geq 3$ este número é uma cota inferior para $r(R_d)$, já para $d \geq 5$ temos $r(R_d) = d(d - 2) + 2$, ou seja, esse número é atingido.

No ano de 2007 os matemáticos Samuel Boissière e Alessandra Sarti publicaram o artigo [5], o qual trata entre outras coisas de exibir uma superfície não singular de grau d em \mathbb{P}^3 , a qual possui $d(d - 2) + 4$ retas duas a duas disjuntas, se d for ímpar com $d \geq 7$. Vale salientar que no nosso trabalho generalizamos o resultado de Boissière-Sarti para $d = 4k$ e verificamos que a cota também é atingida para $d = 5$.

Como já sabemos, a quantidade máxima de retas em superfícies não singulares de grau $d \geq 5$ em \mathbb{P}^3 é desconhecido. O mesmo ainda acontece para a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas. Assim sendo, iremos focar no estudo de retas duas a duas disjuntas em superfícies não singulares em \mathbb{P}^3 com base nos artigos de [11], [10], [1], [5] e [9] com o objetivo de calcular a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas para superfícies não singulares de grau $1 \leq d \leq 4$, e para grau superior iremos apenas dar uma cota inferior para o número de retas duas a duas disjuntas estudando algumas famílias.

Nosso trabalho está dividido em 3 capítulos, sendo assim distribuídos: No *Capítulo 1*, estudamos a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas em superfícies não singulares de grau d , $1 \leq d \leq 3$. O *Capítulo 2* é dedicado ao estudo da quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas em algumas superfícies quárticas não singulares. No *Capítulo 3*, determinamos cotas inferiores para superfícies não singulares de grau $d \geq 5$ ao estudarmos as famílias, as quais nomeamos por famílias de Fermat, Rams e Boissière-Sarti.

O *Apêndice A* é dedicado à exposição de alguns resultados necessários para uma melhor compreensão do trabalho (Este é destinado principalmente para leitores não familiarizados com conceitos básicos da geometria algébrica tais como superfícies, retas, espaço projetivo, propriedades de retas, etc). Por fim temos o *Apêndice B*, o qual é destinado ao estudo das retas, suas distribuições em 21 planos e interseções na quártica de Schur possibilitando um maior entendimento no que diz respeito à seção 2.2 deste trabalho.

Destacamos que a pesquisa do tema desta dissertação é importante na classificação das superfícies cúbicas não singulares, módulo transformações conformes, onde aparecem “twistor lines” (que são retas duas a duas disjuntas), segundo o trabalho de 2012 “*Twistor lines on cubic surfaces*” dos matemáticos John Armstrong, Massimiliano Povero e Simon Salamon [1], no qual fazem um breve resumo de cotas de retas duas a duas disjuntas já mencionadas acima, e além disso, mostram geometricamente algumas configurações de retas duas a duas disjuntas dadas por Schläfli como por exemplo o “double six”, o qual será visto no nosso trabalho. Além disso, na classificação das superfícies quárticas não singulares tem-se que X é uma superfície de Kummer se, e somente se, X contém 16 curvas racionais duas a duas disjuntas ([10], [4]).

Em suma, este trabalho nos proporcionou uma grande oportunidade para conhecer mais sobre a configuração das retas em algumas superfícies não singulares no que diz respeito a interseção. Acreditamos que com isto teremos uma maior facilidade para estudar tais superfícies de forma mais detalhada e também no estudo da classificação das mesmas.

Capítulo 1

Retas disjuntas em superfícies não singulares de grau $d \leq 3$ em \mathbb{P}^3

É conhecido que toda superfície em \mathbb{P}^3 de grau $d \leq 3$ sempre contém retas. Por exemplo, para $d = 1$, S é um plano e contém infinitas retas, isso se deve ao fato de $\phi(S)$ estar em bijeção com \mathbb{P}^2 , sendo $S = Z(f)$ com $f \in \mathcal{R}_1$. Para o caso $d = 2$ temos que estas superfícies também possuem infinitas retas, podendo isso ser verificado com o auxílio do Teorema da Classificação das Quádricas em \mathbb{P}^3 (veja Teorema 4, pág. 411 em [7]). Além disso as quádricas não singulares (veja Definições A.3 e A.4 no Apêndice A) são isomorfas a superfície $Z(x_0x_3 - x_1x_2)$, a qual possui exatamente duas famílias de retas parametrizadas por \mathbb{P}^1 .

No caso $d = 3$ é sabido que estas contêm pelo menos uma reta podendo isso ser verificado através do Teorema da Dimensão das Fibras (veja Teorema 6, pág. 76 em [18]), e para as não singulares é verificado que estas possuem exatamente 27 retas, como por exemplo a famosa superfície cúbica de Fermat $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$.

Uma questão análoga na Geometria Algébrica diz respeito ao número máximo de retas duas a duas disjuntas que uma superfície em \mathbb{P}^3 pode conter, tal resultado é conhecido apenas para superfícies de grau $d \leq 4$. No decorrer deste capítulo, iremos explorar a existência, bem como a quantidade de retas duas a duas disjuntas que superfícies não singulares de grau $d \leq 3$ em \mathbb{P}^3 podem conter. Para isso iremos enunciar e demonstrar alguns resultados os quais serão de grande auxílio para concluir tal trabalho.

1.1 Retas em um plano

Inicialmente iremos apresentar algumas definições e observações as quais servirão de auxílio para uma melhor compreensão dos resultados os quais iremos apresentar no decorrer deste trabalho. Vejamos:

Definição 1.1. Sendo V um espaço vetorial N -dimensional sobre um corpo \mathbb{K} . Para cada d , $0 \leq d \leq N$ definimos por $G_d(V) = \{W \mid W \leq V \text{ e } \dim W = d\}$ a grassmanniana de subespaços de dimensão d de V .

Definição 1.2. Sendo $V = \mathbb{K}^{n+1}$ um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} denotamos por $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = G_1(\mathbb{K}^{n+1})$ o n -espaço projetivo sobre o corpo \mathbb{K} . Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dizemos que este é o n -espaço projetivo complexo e o denotamos simplesmente por \mathbb{P}^n .

Observação 1.1. De fato:

- (i) Para $n = 0$ temos que \mathbb{P}^0 é um ponto;
- (ii) Para $n = 1$, \mathbb{P}^1 é chamada reta projetiva complexa;
- (iii) Para $n = 2$, \mathbb{P}^2 é chamado plano projetivo complexo;
- (iv) Para $n = 3$, \mathbb{P}^3 é chamado espaço projetivo complexo.

Definição 1.3. Sendo V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{K} . Definimos a projetivização de V por: $\mathbb{P}(V) = G_1(V)$.

Definição 1.4. Seja $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ e $r \geq 0$. Λ é chamado variedade r -linear se, existe $W \in G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $\Lambda = \mathbb{P}(W)$. Se $r = 1$, Λ será denominada reta em \mathbb{P}^n . Ou seja, $l \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma reta se, e somente se, $l = \mathbb{P}(W)$ com $W \in G_2(\mathbb{C}^{n+1})$.

Observação 1.2. Considerando $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^3$ e W um subespaço de \mathbb{C}^4 . Temos

- (i) $r = 0$, $\dim W = 1$, $W = [u]$ então $\Lambda = \{[u]\}$ é um ponto;
- (ii) $r = 1$, $\dim W = 2$, então $\Lambda \equiv \mathbb{P}^1$ é uma reta;
- (iii) $r = 2$, $\dim W = 3$, $W = [u, v, w]$ então $\Lambda \equiv \mathbb{P}^2$ é um plano;
- (iv) $r = 3$, $\dim W = 4$, então $\Lambda \equiv \mathbb{P}^3$.

Sabendo que um plano em \mathbb{P}^3 é determinado pelos zeros de um polinômio $L \in \mathcal{R}_1$ não nulo, nesta seção consideraremos o plano $S = Z(L)$, sendo $L \in \mathcal{R}_1$ não nulo. Para o cálculo de retas em tal superfície basta observar que existe um isomorfismo entre $\phi(S)$ e \mathbb{P}^2 . Vejamos a demonstração de tal afirmação bem como outros fatos os quais nos levarão a concluir que um plano em \mathbb{P}^3 não contém retas duas a duas disjuntas.

Proposição 1.1. Seja $S = Z(L)$ um plano em \mathbb{P}^3 . Então

- (i) $l \in \phi(S)$ se, e somente se, $\mathcal{I}(l) = \langle L, M \rangle$, com $\{L, M\}$ linearmente independentes em \mathcal{R}_1 .

(ii) Se $\{M_0, M_1, M_2\} \subseteq \mathcal{R}_1$ é tal que $\{L, M_0, M_1, M_2\}$ é uma base de \mathcal{R}_1 , temos que

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \phi(S) \\ [b_0 : b_1 : b_2] &\longmapsto Z(L, b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2) \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Demonstração. (i) Assumamos neste item que $\mathcal{I}(l) = \langle L_1, L_2 \rangle$ sendo L_1 e L_2 formas lineares linearmente independentes em \mathcal{R}_1 . Se $l \subseteq S$ temos que $\mathcal{I}(S) \subseteq \mathcal{I}(l)$. Como $S = Z(L)$ pelo teorema dos zeros de Hilbert (veja Teorema A.5 no Apêndice A) segue-se que $\mathcal{I}(S) = \sqrt{\langle L \rangle} = \langle L \rangle$ (pois $\langle L \rangle$ é primo). Portanto $L \in \mathcal{I}(l) = \langle L_1, L_2 \rangle$, assim $L = \alpha L_1 + \beta L_2$ (*) sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos. Agora analisemos os seguintes casos:

$\alpha = 0$: Neste caso temos $L = \beta L_2$ sendo $\beta \neq 0$. Assim, $\langle L_1, L_2 \rangle = \langle L_1, \beta L_2 \rangle = \langle L_1, L \rangle$. Observemos que L_1, L são linearmente independentes. De fato, caso não o fossem existiria λ tal que $L_1 = \lambda L$ ou $L = \lambda L_1$, em ambos os casos teríamos que L_1, L_2 seriam linearmente dependentes. O que seria um absurdo.

$\alpha \neq 0$: Neste caso temos, $L_1 = \frac{L}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} L_2$. Assim $\langle L_1, L_2 \rangle = \langle \frac{L}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} L_2, L_2 \rangle = \langle \frac{L}{\alpha}, L_2 \rangle = \langle L, L_2 \rangle$ com L, L_2 linearmente independentes, pois caso contrário utilizando argumento análogo ao anterior teríamos que L_1, L_2 seriam linearmente dependentes.

Reciprocamente observe que, se $\mathcal{I}(l) = \langle L, M \rangle$ temos, que um ponto $p \in l$ se, e somente, se $L(p) = M(p) = 0$. Daí $p \in Z(L) = S$ e portanto $l \subset S$.

(ii) Neste item consideremos $b = [b_0 : b_1 : b_2]$ e $c = [c_0 : c_1 : c_2]$ em \mathbb{P}^2 . Note que:

- ψ está bem definida.

Primeiramente observemos que $\psi(b) = Z(L, b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2)$ é uma reta em S (veja Corolário A.13 no Apêndice A). De fato, sendo $\{L, M_0, M_1, M_2\}$ uma base de \mathcal{R}_1 temos que $b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2$ (com $b \in \mathbb{P}^2$) e L são linearmente independentes. Assim, $\psi(b)$ é uma reta, além disso, pela própria construção, esta encontra-se em S . Agora suponha que $b = c$, assim para algum $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ temos $b_i = \lambda c_i$ daí $\psi(b) = Z(L, b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2) = Z(L, \lambda c_0M_0 + \lambda c_1M_1 + \lambda c_2M_2) = Z(L, \lambda(c_0M_0 + c_1M_1 + c_2M_2)) = Z(L, c_0M_0 + c_1M_1 + c_2M_2) = \psi(c)$.

- ψ é injetiva.

Suponha que $\psi(b) = \psi(c)$. Desse modo temos

$Z(L, b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2) = Z(L, c_0M_0 + c_1M_1 + c_2M_2)$. Assim, tomando

o ideal associado em ambos os lados temos $\langle L, b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2 \rangle = \langle L, c_0M_0 + c_1M_1 + c_2M_2 \rangle$. Daí, $b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2 = AL + B(c_0M_0 + c_1M_1 + c_2M_2)$ com $A, B \in \mathbb{C}$. Assim, $AL + (-b_0 + Bc_0)M_0 + (-b_1 + Bc_1)M_1 + (-b_2 + Bc_2)M_2 = 0$. Sendo $\{L, M_0, M_1, M_2\}$ uma base de \mathcal{R}_1 temos $A = 0$, $b_0 = Bc_0$, $b_1 = Bc_1$, $b_2 = Bc_2$ com $B \neq 0$. Portanto $b = c$.

- ψ é sobrejetiva.

Seja $l \in \phi(S)$. Assim, $l \subset S$ e por (i) temos que $\mathcal{I}(l) = \langle L, M \rangle$ com $\{L, M\}$ linearmente independentes em \mathcal{R}_1 . Assim sendo $\{L, M_0, M_1, M_2\}$ uma base de \mathcal{R}_1 , temos $M = aL + a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2$. Uma vez que $\{L, M\}$ são linearmente independentes segue-se que $[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$ e $\langle L, M \rangle = \langle L, aL + \sum_{i=0}^2 a_iM_i \rangle = \langle L, \sum_{i=0}^2 a_iM_i \rangle$. Assim, $l = Z(\mathcal{I}(l)) = \psi([a_0 : a_1 : a_2])$. Portanto ψ é sobrejetiva. □

Corolário 1.2. Se S é um plano, então $\phi(S)$ é infinito.

Agora note que se $S = Z(L)$ com $L \in \mathcal{R}_1$ não nulo, então $C(S) = \{v \in \mathbb{C}^4 \mid L(v) = 0\}$ é um $\text{su}\{w_0, w_1, w_2\}$ base de $C(S)$. Considerando tais condições temos que

Proposição 1.3. A aplicação abaixo é uma bijeção

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{P}^2 &\longrightarrow S \\ b = [b_0 : b_1 : b_2] &\longmapsto p = [b_0w_0 + b_1w_1 + b_2w_2]. \end{aligned}$$

Demonstração. No que segue consideraremos $c = [c_0 : c_1 : c_2]$ e $d = [d_0 : d_1 : d_2]$ em \mathbb{P}^2 .

- φ está bem definida.

Primeiramente observemos que $L(p) = 0$, assim $p \in S$. Sejam $c, d \in \mathbb{P}^2$ tal que $c = d$ assim temos $c_i = \lambda d_i$ para algum $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, $i \in \{0, 1, 2\}$. Daí, temos $\varphi(c) = [c_0w_0 + c_1w_1 + c_2w_2] = [\lambda d_0w_0 + \lambda d_1w_1 + \lambda d_2w_2] = \varphi(d)$. Portanto φ está bem definida.

- φ é injetiva.

Sejam $b, c \in \mathbb{P}^2$ tais que $\varphi(b) = \varphi(c)$. Daí, $[b_0w_0 + b_1w_1 + b_2w_2] = [c_0w_0 + c_1w_1 + c_2w_2]$, assim para algum $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ temos que $b_0 = \lambda c_0$, $b_1 = \lambda c_1$ e $b_2 = \lambda c_2$. Logo, $b = c$. E portanto, φ é injetiva.

- φ é sobrejetiva.

Seja $q = [w] \in S$, então $w \in C(S)$, logo $w = d_0w_0 + d_1w_1 + d_2w_2$. Claramente temos que $\varphi([d_0 : d_1 : d_2]) = q$.

□

Observação 1.3. Se $L = \sum_{i=0}^3 a_i x_i$, com $a_3 \neq 0$, então $\varphi(b) = [b_0 : b_1 : b_2 : -\sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{a_3} b_i]$ se escolhermos $w_i = e_i - \frac{a_i}{a_3} e_3$ com $i = 0, 1, 2$, sendo $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de \mathbb{C}^4 . Logo, se $l = Z(M) \subset \mathbb{P}^2$ for uma reta, concluímos que $\varphi(l) = Z(L, M)$ é uma reta em S .

Proposição 1.4. Sejam l_1 e l_2 retas em \mathbb{P}^2 , então $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$.

Demonstração. Denotemos $l_1 = \mathbb{P}(W_1)$ e $l_2 = \mathbb{P}(W_2)$, com $W_1, W_2 \in G_2(\mathbb{C}^3)$. Observe-mos que $\dim(W_1 \cap W_2) \neq 0$, pois caso contrário teríamos $\dim(W_1 + W_2) = 4$, o que não pode acontecer pois $W_1 + W_2 \leq \mathbb{C}^3$. Desse modo temos que existe $0 \neq u \in W_1 \cap W_2$. Portanto, $[u] \in l_1 \cap l_2$. □

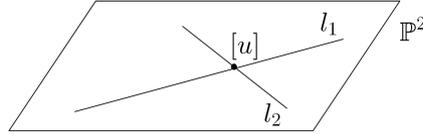


Figura 1.1: Interseção de duas retas quaisquer em \mathbb{P}^2

Pelos resultados acima, podemos concluir que toda superfície dada por um polinômio em \mathcal{R}_1 possui infinitas retas, além disso o conjunto $\phi(S)$ é não vazio e $r_1 = 0$. Ou seja, planos em \mathbb{P}^3 não contêm retas duas a duas disjuntas.

1.2 Retas em superfícies quádricas não singulares

Para o caso $d = 2$ temos que toda superfície quádrica em \mathbb{P}^3 contém infinitas retas, para ver isto basta aplicar o Teorema geral da Classificação das Quádricas em \mathbb{P}^n , no caso $n = 3$.

Teorema 1.5. (*Teorema de classificação das hipersuperfícies quádricas em \mathbb{P}^n*) Seja F um polinômio homogêneo não nulo de grau 2 em $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $T \cdot F$ é igual a exatamente um dos polinômios.

$$\begin{cases} F_0 = x_0^2 \\ F_1 = x_0^2 + x_1^2 \\ \vdots \\ F_n = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2. \end{cases}$$

1. Retas disjuntas em superfícies não singulares de grau $d \leq 3$ em \mathbb{P}^3

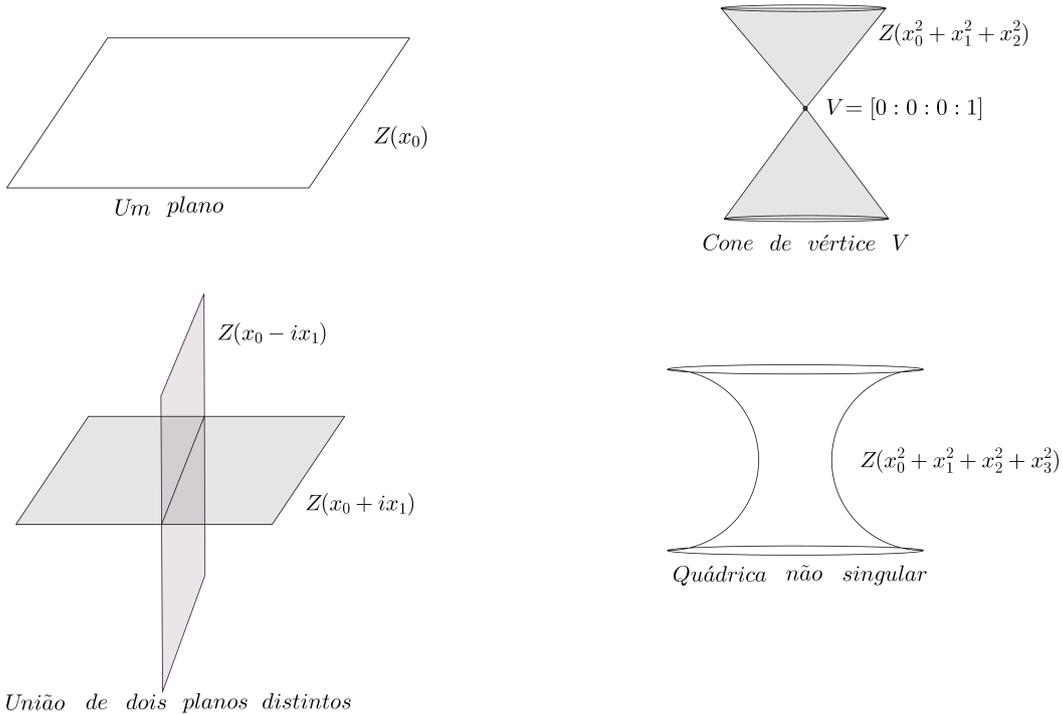
Em suma, toda quádrlica é projetivamente equivalente a uma quádrlica definida pela equação $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_i^2 = 0$, para algum $i \in \{0, \dots, n\}$.

Demonstração. Ver Teorema 4, pág. 411 em [7]. □

Corolário 1.6. Seja $F \in \mathcal{R}_2$ não nulo. Então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T \cdot F$ é exatamente um dos polinômios

$$\begin{cases} F_0 = x_0^2 \\ F_1 = x_0^2 + x_1^2 \\ F_2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \\ F_3 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{cases}$$

Com o auxílio do Corolário 1.6 podemos concluir que uma superfície quádrlica em \mathbb{P}^3 assume uma das seguintes formas geométricas (as quais possuem infinitas retas. Veja [19], págs. 6 e 7):



No que diz respeito à quantidade de retas duas a duas disjuntas nas superfícies quádrlicas não singulares, este número também é infinito. Isso se deve ao fato de que estas superfícies são isomorfas à superfície $Q = Z(x_0x_3 - x_1x_2) \subset \mathbb{P}^3$ (veja Lema 1.0.2, pág. 18 em [2]), a qual possui exatamente duas famílias de retas \mathcal{L} e \mathcal{M} tais que $\phi(Q) = \mathcal{L} \dot{\cup} \mathcal{M}$. A seguir construíremos as famílias de retas \mathcal{L} e \mathcal{M} em Q , bem como algumas propriedades de tais famílias.

Teorema 1.7. *Existem \mathcal{L} e \mathcal{M} famílias de retas na superfície quádrlica não singular $Q = Z(x_0x_3 - x_1x_2)$ parametrizadas por \mathbb{P}^1 tais que*

- (1) $L_p \cap L_q = \emptyset$, $M_p \cap M_q = \emptyset$, para quaisquer que sejam $L_p, L_q \in \mathcal{L}$, $M_p, M_q \in \mathcal{M}$, sendo $p, q \in \mathbb{P}^1$ com $p \neq q$.
- (2) $L_p \cap M_q \neq \emptyset$, para quaisquer $p, q \in \mathbb{P}^1$. De fato, dita interseção consiste de um único ponto.
- (3) Para qualquer $x \in Q$ existem únicas retas $L \in \mathcal{L}$ e $M \in \mathcal{M}$ tais que $L \cap M = \{x\}$.
- (4) Para qualquer reta $m \in \phi(Q)$ verifica-se que $m \in \mathcal{L}$ ou $m \in \mathcal{M}$.

Demonstração. Consideremos agora

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ ([a_0 : a_1], [b_0 : b_1]) &\longmapsto [a_0b_0 : a_0b_1 : a_1b_0 : a_1b_1]. \end{aligned}$$

Observemos que claramente φ está bem definida, além disso é injetiva e tem como imagem Q . De fato, sejam $([c_0 : c_1], [d_0 : d_1]), ([a_0 : a_1], [b_0 : b_1]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tais que $\varphi(c, d) = \varphi(a, b)$. Assim temos $(c_0d_0, c_0d_1, c_1d_0, c_1d_1) = \lambda(a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_1b_1)$ para algum $\lambda \neq 0$. Daí, após alguns cálculos temos que $([c_0 : c_1], [d_0 : d_1]) = ([a_0 : a_1], [b_0 : b_1])$. Portanto φ é injetiva. Agora vamos mostrar que φ é sobrejetiva sobre Q . Consideremos $q = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in Q$ e analisemos os seguintes casos:

Caso 1: $x_3 \neq 0$.

Neste caso, considere $a = [x_1 : x_3]$ e $b = [x_2 : x_3]$ em \mathbb{P}^1 . Note que $\varphi(a, b) = [x_1x_2 : x_1x_3 : x_2x_3 : x_3^2] = [x_0x_3 : x_1x_3 : x_2x_3 : x_3^2] = q$.

Caso 2: $x_3 = 0$.

Neste caso $q = [x_0 : 0 : x_2 : 0]$ ou $q = [x_0 : x_1 : 0 : 0]$. Observemos que, $\varphi([x_0 : x_2], [1 : 0]) = [x_0 : 0 : x_2 : 0] \in \text{Im}(\varphi)$ e $\varphi([1 : 0], [x_0 : x_1]) = [x_0 : x_1 : 0 : 0] \in \text{Im}(\varphi)$. Portanto $Q \subseteq \text{Im}(\varphi)$. Agora sendo $p = [a_0b_0 : a_0b_1 : a_1b_0 : a_1b_1] \in \varphi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, note que $p \in Q$. E o resultado segue.

Agora vamos provar a existência das famílias de retas \mathcal{L} e \mathcal{M} . Para isto, para cada $p = [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$ e $q = [b_0 : b_1] \in \mathbb{P}^1$, consideremos

$$L_p = \{[a_0u : a_0v : a_1u : a_1v] \in \mathbb{P}^3 \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$$

e

$$M_q = \{[b_0u : b_1u : b_0v : b_1v] \in \mathbb{P}^3 \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Vamos analisar apenas para a família \mathcal{L} , pois para a família \mathcal{M} a verificação é análoga. Observemos que sendo $u = 1$ e $v = 0$ obtemos $w_1 = (a_0, 0, a_1, 0)$ e sendo $u = 0$ e $v = 1$ temos $w_2 = (0, a_0, 0, a_1)$ a partir da reta $L_p \in \mathcal{L}$. Notemos que $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^4$ são linearmente independentes tais que $L_p = \mathbb{P}(W)$, se $W = [w_1, w_2]$. Por outro lado, observemos que $L_p = Z(a_1x_0 - a_0x_2, a_1x_1 - a_0x_3)$ e $M = Z(b_1x_0 - b_0x_1, b_1x_2 - b_0x_3)$.

Vamos agora provar os itens acima afirmados:

- (1) Sendo $p = [a_0 : a_1]$ e $q = [b_0 : b_1]$ distintos em \mathbb{P}^1 , consideremos $L_p = \mathbb{P}([u_1, u_2])$ com $u_1 = (a_0, 0, a_1, 0)$, $u_2 = (0, a_0, 0, a_1)$ e $L_q = \mathbb{P}([v_1, v_2])$ com $v_1 = (b_0, 0, b_1, 0)$ e $v_2 = (0, b_0, 0, b_1)$. Pelo Lema A.15 (no Apêndice A) temos que $L_p \cap L_q = \emptyset \Leftrightarrow$

$$\{u_1, u_2, v_1, v_2\} \text{ é base de } \mathbb{C}^4 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ b_0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & b_1 \end{vmatrix} = (b_1a_0 - a_1b_0)^2 \neq 0.$$

De modo análogo temos $M_p \cap M_q = \emptyset$.

- (2) Para a prova deste item basta observarmos que o ponto $[a_0b_0 : a_0b_1 : a_1b_0 : a_1b_1] \in L_{[a_0:a_1]} \cap M_{[b_0:b_1]}$ e este é único.
- (3) Consideremos $x = [d_0 : d_1 : d_2 : d_3] \in Q$, o que equivale a dizer que $d_0d_3 = d_1d_2$. Assim, $x = [d_0d_3 : d_1d_3 : d_2d_3 : d_3^2]$. Observemos que, caso $d_3 \neq 0$ então $x \in L_{[d_1:d_3]} \cap M_{[d_2:d_3]}$, caso contrário temos $x = [d_0 : 0 : d_2 : 0]$ ou $x = [d_0 : d_1 : 0 : 0]$, no primeiro caso temos $x \in L_{[1:d_2]} \cap M_{[1:0]}$, já para o segundo caso temos $x \in L_{[1:0]} \cap M_{[1:d_1]}$. A unicidade se dá pelo fato das retas serem disjuntas em cada família.
- (4) Sejam $m \subset Q$ e $p = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3] \in \mathbb{P}^3$ um ponto de m . Assumamos que $p_0 \neq 0$ daí $p_3 = p_1p_2$. Além disso, temos $\mathbb{T}_pQ = Z(p_1p_2x_0 - p_2x_1 - p_1x_2 + x_3)$. Pela Proposição A.14 (no Apêndice A) temos que $m \subset \mathbb{T}_pQ$, desse modo $m \subseteq \mathbb{T}_pQ \cap Q = Z(p_1p_2x_0 - p_1x_1 - p_1x_2 + x_3, x_0x_3 - x_1x_2)$. Após alguns cálculos obtemos $m \subseteq L_{[1:p_2]} \cup M_{[1:p_1]}$. O que nos leva a concluir que $m \in \mathcal{L}$ ou $m \in \mathcal{M}$.

□

1.3 Retas em superfícies cúbicas não singulares

No caso de superfícies cúbicas não singulares em \mathbb{P}^3 estas possuem exatamente 27 retas. Já com relação à quantidade de retas duas a duas disjuntas, tais superfícies possuem no máximo 6 como veremos adiante após a prova de alguns resultados.

Proposição 1.8. Seja S uma superfície irredutível de grau $d \geq 2$. Se $l \in \phi(S)$ e H é um plano contendo l , então verifica-se que $H \cap S = l \cup \mathcal{C}_H$, onde \mathcal{C}_H é uma curva plana de grau $d - 1$.

Demonstração. Ver Lema 1.2, pág. 23 em [13]. □

Definição 1.5. A curva \mathcal{C}_H na Proposição 1.8 é chamada de curva residual de l em H , ou simplesmente curva residual.

A seguir denotaremos $\phi_{\mathcal{C}_H}(S) = \{m \in \phi(S) \mid m \cap \mathcal{C}_H \neq \emptyset\}$.

Proposição 1.9. Com as notações da Proposição 1.8, se S for não singular, verifica-se que:

1. As retas contidas em \mathcal{C}_H (caso exista) são sempre distintas da reta $l \in \phi(S)$.
2. Sendo $m \in \phi_l(S)$, então a curva \mathcal{C}_H contém a reta m como uma de suas componentes, considerando $H = \langle l, m \rangle$. Assim temos $H \cap S = l \cup m \cup \mathcal{C}'_H$.
3. A curva \mathcal{C}_H é reduzida.

Demonstração. Ver Teorema 1.5, pág. 24, Proposições 1.6 e 1.7, pág. 25 em [13]. □

Teorema 1.10. Seja $l \in \phi(S)$. Então $\phi(S) = \phi_l(S) \cup \phi_{\mathcal{C}_H}(S)$ para qualquer plano H contendo l , sendo \mathcal{C}_H a curva residual de l no plano H .

Demonstração. Pela definição de $\phi_l(S)$ e $\phi_{\mathcal{C}_H}(S)$, segue-se que $\phi_l(S) \cup \phi_{\mathcal{C}_H}(S) \subseteq \phi(S)$. Para a inclusão oposta consideremos $L \in \phi(S)$. Denotando por H o plano que contém l e \mathcal{C}_H , teremos duas possibilidades:

$L \subset H$: Neste caso teremos $L \subset l$ ou $L \subset \mathcal{C}_H$. De fato, intersectando ambos os membros da inclusão $L \subset H$ por S temos $L \subset H \cap S = l \cup \mathcal{C}_H$, e o resultado segue.

$L \not\subset H$: Admitamos que $L \cap H = \{p\}$. Assim, intersectando ambos os lados da inclusão $L \subset S$ por H teremos $L \subset \phi_l(S)$ ou $L \subset \phi_{\mathcal{C}_H}(S)$.

□

Por tal resultado provado acima, podemos concluir que:

Corolário 1.11. Sejam $m_1, m_2, \dots, m_d \in \phi(S)$ coplanares, com S de grau $d \geq 2$. Então, $\phi(S) = \phi_{m_1}(S) \cup \phi_{m_2}(S) \cup \dots \cup \phi_{m_d}(S)$.

Teorema 1.12. Seja S uma superfície não singular de grau 3 contendo uma reta l . Então existem exatamente 5 planos distintos contendo tal reta, digamos H_1, H_2, H_3, H_4 e H_5 . Tais que $H_i \cap S = l \cup C_i$, sendo $C_i = l_i \cup l'_i$ uma cônica singular reduzida para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Demonstração. Ver Proposição 7.3, pág. 112 em [14] e Proposição 4.0.3, pág. 39 em [2]. \square

Lema 1.13. Com as notações do Teorema 1.12 considerando $H_i = \langle l_i, l'_i \rangle$ planos contendo l , sendo $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Então para qualquer $i \neq j$ verifica-se que

- (1) $l_i \cap l_j = \emptyset$.
- (2) $l_i \cap l'_j = \emptyset$.
- (3) $l'_i \cap l'_j = \emptyset$.

Demonstração. Para o primeiro item suponhamos por absurdo que $l_i \cap l_j \neq \emptyset$, sendo $i \neq j$. Assim, digamos que $l_i \cap l_j = \{p\}$. Uma vez que cada um dos planos contém a reta l temos que $H_i \cap H_j = l$, intersectando ambos os membros dessa igualdade por l_i obtemos $l_i \cap H_j = l_i \cap l$. Agora intersectando essa nova igualdade por l_j teremos $\{p\} = l_i \cap l_j \cap l$, daí pelo Lema A.16 (no Apêndice A) obtemos $H_i = H_j$ o que é um absurdo. A demonstração dos demais itens é análoga. Vejamos geometricamente na Figura 1.2:

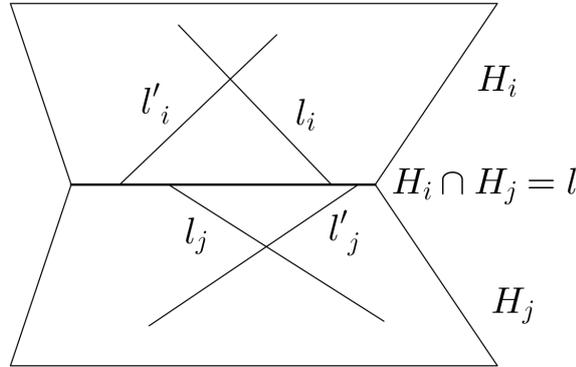


Figura 1.2: Planos H_i e H_j ($i \neq j$)

\square

Corolário 1.14. Com as mesmas condições do Teorema 1.12, verifica-se que

- (1) $\#\phi(S) \geq 11$.
- (2) Existem $l, m \in \phi(S)$ disjuntas.

Demonstração. 1. Pelo Teorema 1.12 temos que existem exatamente 5 planos distintos H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 em \mathbb{P}^3 contendo a reta l , tais que $H_i \cap S = l \cup C_i$, sendo $C_i = l_i \cup l'_i$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Assim podemos considerar $\Sigma = \{l, l_1, l'_1, l_2, l'_2,$

$\dots, l_5, l'_5\} \subseteq \phi(S)$. Segue do item (1) da Proposição 1.9 que as retas l, l_i, l'_i são distintas, desse modo temos que $\sharp\Sigma = 11$, e o resultado segue.

2. Segue do Lema 1.13. □

Proposição 1.15. Para quaisquer $l, m \in \phi(S)$ com $l \neq m$, verifica-se que:

1. $\sharp\phi_l(S) = 10$.

$$2. \sharp(\phi_l(S) \cap \phi_m(S)) = \begin{cases} 1 & \text{se } l \cap m \neq \emptyset \\ 5 & \text{se } l \cap m = \emptyset \end{cases}.$$

Demonstração. 1. Pelo Teorema 1.12 temos que existem exatamente cinco planos H_i com $i = 1, 2, 3, 4, 5$ contendo a reta l tais que $H_i \cap S = l \cup l_i \cup l'_i$. Denotemos $\Sigma_l = \{l_1, l'_1, l_2, l'_2, \dots, l_5, l'_5\}$. Concluimos a partir da demonstração no Corolário 1.14 que $\sharp\Sigma_l = 10$, além disso, $\Sigma_l \subseteq \phi_l(S)$. Agora se $m \in \phi_l(S)$ temos que $H = \langle l, m \rangle$ é um plano contendo l , desse modo $H = H_i$ para algum $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Uma vez que $H \cap S = l \cup l_i \cup l'_i$ segue-se que $m = l_i$ ou $m = l'_i$.

2. Primeiramente, assumamos que $l, m \in \phi(S)$ tais que $l \cap m \neq \emptyset$ e $l \neq m$. Sabemos que existe um único plano contendo l e m , digamos H . Assim, pela Proposição 1.8 podemos considerar $H \cap S = l \cup m \cup L_H$ sendo L_H uma reta componente da cônica residual \mathcal{C}_H . Observemos que $L_H \in \phi_l(S) \cap \phi_m(S)$, uma vez que L_H, l e m são coplanares. Tomemos agora $L \in \phi_l(S) \cap \phi_m(S)$. Assim pelo Lema A.16 (no Apêndice A) segue-se que $L \subset \langle l, m \rangle = H$. Daí $L = L_H$. Portanto, $\sharp\phi_l(S) \cap \phi_m(S) = 1$, sendo $l \cap m \neq \emptyset$ e $l \neq m$.

Agora para a segunda parte consideremos $H_i = \langle l_i, l'_i \rangle, i = 1, 2, \dots, 5$ os planos do Teorema 1.12. Considerando o Corolário 1.11 temos que $m \in \phi_l(S)$ ou $m \in \phi_{l_i}(S)$ ou $m \in \phi_{l'_i}(S)$. Observemos que $m \notin \phi_{l_i}(S) \cap \phi_{l'_i}(S)$ e $m \notin \phi_l(S)$, pois caso contrário teríamos $m \cap l \neq \emptyset$. Por simplicidade denotaremos $m_i \in \{l_i, l'_i\}$ a única reta que intersecta m no plano H_i para $i = 1, 2, \dots, 5$. Assim, temos $\{m_1, m_2, \dots, m_5\} \subset \phi_m(S) \cap \phi_l(S)$. Agora sendo $m'_i \in \{l_i, l'_i\}$ a única reta que não intersecta a reta m no conjunto $\{l_i, l'_i\}$. Desse modo, segue-se que $\{m_1, m_2, \dots, m_5\} \subseteq \phi_l(S) \cap \phi_m(S) \subseteq \phi_l(S) = \{m_1, m'_1, \dots, m_5, m'_5\}$. Como $m'_i \cap m = \emptyset$ para todo i , temos que $\phi_l(S) \cap \phi_m(S) = \{m_1, m_2, \dots, m_5\}$. Portanto, $\sharp(\phi_l(S) \cap \phi_m(S)) = 5$, sendo $l \cap m = \emptyset$. Geometricamente temos a Figura 1.3.

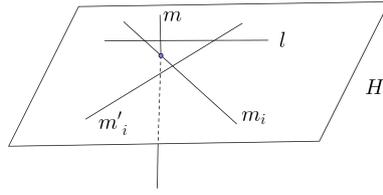


Figura 1.3: Retas disjuntas m e m'_i no caso $l \cap m = \emptyset$

□

Agora consideremos $L_1, L_2 \in \phi(S)$ tais que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Pela demonstração da Proposição 1.15 podemos assumir que:

$$\begin{aligned}\phi_{L_1}(S) &= \{a_1, c_1, a_2, c_2, \dots, a_5, c_5\} \\ \phi_{L_2}(S) &= \{b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_5, c_5\},\end{aligned}$$

sendo $H_i = \langle a_i, c_i \rangle$ e $\tilde{H}_i = \langle b_i, c_i \rangle$ com $i = 1, 2, \dots, 5$. De modo que $\phi_{L_1}(S) \cap \phi_{L_2}(S) = \{c_1, c_2, \dots, c_5\}$.

Lema 1.16. Com as notações acima temos que:

1. $a_i \cap a_j = \emptyset$, $c_i \cap c_j = \emptyset$, $a_i \cap c_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, com $i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$.
2. $b_i \cap b_j = \emptyset$, $b_i \cap c_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, com $i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$.
3. $L_1 \cap b_i = \emptyset$ e $L_2 \cap a_i = \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$.

Demonstração. As afirmações 1 e 2 seguem da própria determinação de $\phi_{L_1}(S)$ e $\phi_{L_2}(S)$ respectivamente. Para a afirmação 3 suponhamos que $L_1 \cap b_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Então $L_1 \cap b_i \neq \emptyset$ e $L_1 \cap c_i \neq \emptyset$. Assim, $L_1 \subset \langle b_i, c_i \rangle \supset L_2$, logo $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ o que é um absurdo. Analogamente verifica-se que $L_2 \cap a_i = \emptyset$, para todo i . □

Corolário 1.17. Com o uso das notações acima consideremos agora as seguintes retas $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 = L_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 = L_1$. Verifica-se que:

1. $\{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ são retas na superfície S duas a duas disjuntas.
2. $\{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ são retas em S duas a duas disjuntas.
3. $r_3 \geq 6$.
4. $a_i \cap b_i = \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$.
5. $a_i \cap b_j \neq \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, \dots, 6\}$, com $i \neq j$.

Demonstração. As afirmações 1 e 2 seguem do Lema 1.16. Já a afirmação 3 segue da própria definição de r_3 . Para a afirmação 4, observemos que para $i = 6$ o resultado é satisfeito. Agora suponhamos que $b_i \cap a_i \neq \emptyset$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Assim temos que $b_i \subset \langle a_i, c_i \rangle \supset L_i$. Desse modo, $b_i \cap L_1 \neq \emptyset$, o que é um absurdo. Para a prova do último item primeiramente observemos que no caso $j \neq 6$ temos que $b_j \not\subset \langle a_i, c_i \rangle = H_i$ daí pelo Corolário 1.11 segue-se que $a_i \cap b_j \neq \emptyset$, já para o caso em que $j = 6$, o resultado segue da própria definição de $\phi_{L_1}(S)$.

□

A configuração das retas do Colorário 1.17 é chamada de double six (veja pág. 6 em [1]), também pode ser representada como na Figura 1.4.

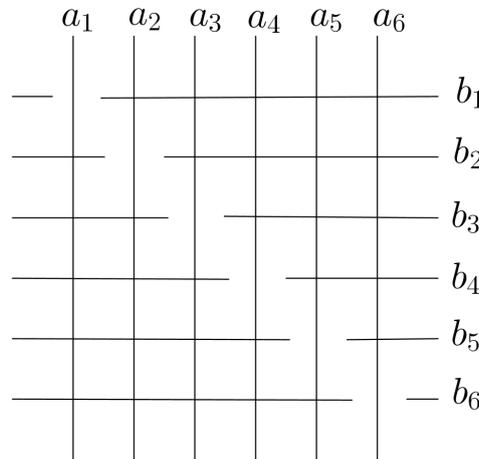


Figura 1.4: Double six

Observemos que para cada $i \neq j$, sendo $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ podemos considerar o plano $H_{ij} = \langle a_i, b_j \rangle$. Assim, sendo l_{ij} a reta residual à cônica $a_i \cup b_j$ no plano H_{ij} obtemos $H_{ij} \cap S = a_i \cup b_j \cup l_{ij}$. Assim, podemos considerar as seguintes retas:

$$l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{15}, l_{16}, l_{23}, l_{24}, l_{25}, l_{26}, l_{34}, l_{35}, l_{36}, l_{45}, l_{46}, l_{56}.$$

Veremos agora um resultado, o qual nos auxiliará no cálculo das 27 retas em uma cúbica não singular em \mathbb{P}^3 .

Lema 1.18. Considerando as notações acima e sendo $\Delta = \{l_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 6\}$. Verifica-se que:

- (a) $\Delta \cap \{a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6\} = \emptyset$;
- (b) $l_{ij} \cap a_k \neq \emptyset$ se, e somente se, $k \in \{i, j\}$;

- (c) $l_{ij} \cap b_k \neq \emptyset$ se, e somente se, $k \in \{i, j\}$;
- (d) $l_{ij} = l_{kt}$ se, e somente se, $i = k$ e $j = t$, sendo $i < j$ e $k < t$;
- (e) Se $l_{ij} \neq l_{kt}$ então $l_{ij} \cap l_{kt} \neq \emptyset$ se, e somente se, $\{i, j\} \cap \{k, t\} = \emptyset$.

Demonstração. Para o item (a) considere $l_{ij} \in \Delta$. Segue da construção das retas em Δ que $l_{ij} \neq a_i$. A seguir verifiquemos que $l_{ij} \neq a_k$ com $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ e $k \neq i$. Suponhamos por absurdo que $l_{ij} = a_k$ com $k \neq i$, daí segue-se que $a_k \subset H_{ij} = \langle a_i, b_j \rangle$, assim $a_k \cap a_i \neq \emptyset$, o que é um absurdo. Analogamente verifica-se que $l_{ij} \neq b_k$. Agora para o item (b) suponhamos por absurdo que $a_k \cap l_{ij} \neq \emptyset$ e $k \notin \{i, j\}$. Observemos que sendo $k \neq i$ e $k \neq j$ então $a_k \cap a_i = \emptyset$ e $a_k \cap b_j \neq \emptyset$, respectivamente. Assim segue-se que $a_k \subset \langle l_{ij}, b_j \rangle = H_{ij} \supset a_i$, daí $a_k \cap a_i \neq \emptyset$ sendo $i \neq k$, o que é um absurdo. Reciprocamente temos que sendo $i = k$ então segue da construção de l_{ij} que $l_{ij} \subset \langle a_k, b_j \rangle = H_{kj}$, daí temos $l_{ij} \cap a_k \neq \emptyset$. Agora sendo $k = j$ segue do Corolário 1.11 que a_j intersecta uma das retas no conjunto $\{a_i, b_j, l_{ij}\}$ desde que $a_j \not\subset H_{ij}$. Pelo Lema 1.16 e Corolário 1.17, temos que $a_i \cap a_j = \emptyset$ sendo $i \neq j$ e $a_j \cap b_j = \emptyset$ para qualquer j . Portanto, $l_{ij} \cap a_j \neq \emptyset$. Analogamente verificamos para o item (c).

Para o item (d) sendo $l_{ij} = l_{kt}$ então temos $l_{ij} \cap a_i = l_{kt} \cap a_i$, assim pelo item (b) segue-se que $l_{kt} \cap a_i \neq \emptyset$, daí $i \in \{k, t\}$. Analogamente temos que $l_{kt} \cap b_j \neq \emptyset$ e $j \in \{k, t\}$. Portanto $k = i$ e $t = j$. A recíproca é trivial. Para o item (e), observemos que sendo $\{i, j\} \cap \{k, t\} = \emptyset$ então $i \notin \{k, t\}$ e $j \notin \{k, t\}$. Assim, pela demonstração do Teorema 1.10 podemos concluir que $l_{ij} \cap l_{kt} \neq \emptyset$. Reciprocamente suponhamos que $\{i, j\} \cap \{k, t\} \neq \emptyset$. Desse modo temos duas possibilidades $i \in \{k, t\}$ ou $j \in \{k, t\}$.

Vamos verificar a primeira possibilidade, pois a segunda é análoga. Observemos que caso $j \in \{k, t\}$ então $l_{ij} = l_{kt}$ o que seria um absurdo. Sendo assim iremos considerar $j \notin \{k, t\}$, desse modo teremos dois subcasos a considerar:

Caso 1.1 $i = k$, $j \neq k$ e $j \neq t$.

Neste caso temos que $l_{kt} = l_{it}$. Assim, considerando o plano da Figura 1.5, temos que se $l_{it} \subset H_{ij}$ então $l_{it} \in \{a_i, b_j, l_{ij}\}$.

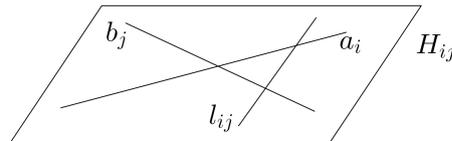


Figura 1.5: Plano H_{ij} .

Já sabemos que $\Delta \cap \{a_1, \dots, a_6\} = \emptyset = \Delta \cap \{b_1, \dots, b_6\}$, assim $l_{it} = l_{ij}$ o que nos leva a concluir que $t = j$, sendo isso um absurdo. Desse modo segue-

se que $l_{it} \not\subset H_{ij}$, assim l_{it} só pode intersectar umas das retas no conjunto $\{a_i, b_j, l_{ij}\}$, pelo item (a) já sabemos que $l_{it} \cap a_i \neq \emptyset$, assim $l_{it} \cap b_j = \emptyset$ e $l_{it} \cap l_{ij} = \emptyset$, o que é um absurdo.

Caso 1.2: $i = t, j \neq k$ e $j \neq t$.

Para este caso a demonstração é análoga ao caso 1.1.

□

Observação 1.4. A igualdade $l_{ij} = l_{ji}$, para todo $i \neq j$ é verificada. De fato assumindo que $i < j$ temos $l_{ij} \in \Delta$, além disso $l_{ij} \cap a_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \in \{i, j\}$ e $l_{ij} \cap b_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \in \{i, j\}$. Desse modo temos $l_{ij} \cap a_j \neq \emptyset$ e $l_{ij} \cap b_i \neq \emptyset$. Daí $l_{ij} \subset \langle a_j, b_i \rangle = H_{ji}$, assim $l_{ij} = l_{ji}$. De modo análogo verifica-se que $l_{ji} = l_{ij}$ sendo $j < i$.

Teorema 1.19. *A superfície S contém exatamente 27 retas, isto é, $\#\phi(S) = 27$.*

Demonstração. Observe que $\#\phi(S) \geq 27$, pois $\{a_1, \dots, a_6\} \dot{\cup} \{b_1, \dots, b_6\} \dot{\cup} \Delta \subseteq \phi(S)$. Se $l \in \phi(S)$ e considerarmos o plano H_{ij} da Figura 1.5, temos $l \subset H_{ij}$ ou $l \cap H_{ij} = \{p\}$. Para o primeiro caso temos que $l \in \{a_i, b_j, l_{ij}\}$, já para o segundo caso temos que $l \in \phi_{a_i}(S)$ ou $l \in \phi_{b_j}(S)$ ou $l \in \phi_{l_{ij}}(S)$ (e somente um desses casos). Pela Proposição 1.15 sabemos que cada um desses conjuntos possui exatamente 10 retas, observando o item (5) do Corolário 1.17 e os itens (b), (c) e (e) do Lema 1.18 segue-se que $\phi_{a_i}(S) = \{b_k \mid k \neq i, k \in \{1, 2, \dots, 6\}\} \cup \{l_{ik} \mid k \neq i, k \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$, $\phi_{b_j}(S) = \{a_k \mid k \neq j, k \in \{1, 2, \dots, 6\}\} \cup \{l_{jk} \mid k \neq j, k \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$ e $\phi_{l_{ij}}(S) = \{a_i, a_j, b_i, b_j, i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\} \cup \{l_{st} \mid \{s, t\} \cap \{i, j\} = \emptyset, s, t \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$, o que nos permite concluir a nossa demonstração. □

No que segue do texto usaremos as notações $I_6 = \{1, 2, \dots, 6\}$, $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}$, $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ e $\Delta = \{l_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 6\}$. Mais adiante veremos dois importantes resultados, que nos permitirão concluir que a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas existente em S é 6.

Lema 1.20. Sejam L_1, L_2, \dots, L_k retas em Δ . Verifica-se que:

- (1) L_1, L_2 são disjuntas se, e somente se, existe $\{\alpha, \beta_1, \beta_2\} = \omega_1 \subset I_6$ com $\#\omega_1 = 3$ tal que $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$ e $L_2 = l_{\alpha\beta_2}$.
- (2) L_1, L_2, L_3 são duas a duas disjuntas se, e somente se, exatamente uma das condições a seguir é verificada: existe $\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \omega_2 \subset I_6$ com $\#\omega_2 = 4$ tal que $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$, $L_2 = l_{\alpha\beta_2}$ e $L_3 = l_{\alpha\beta_3}$. Ou existe $\omega_1 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ com $\#\omega_1 = 3$ tal que $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$, $L_2 = l_{\alpha\beta_2}$ e $L_3 = l_{\beta_1\beta_2}$.

- (3) L_1, \dots, L_4 são duas a duas disjuntas se, e somente se, existe $\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} = \omega_3 \subset I_6$ com $\sharp \omega_3 = 5$ tal que $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$, $L_2 = l_{\alpha\beta_2}$, $L_3 = l_{\alpha\beta_3}$ e $L_4 = l_{\alpha\beta_4}$.
- (4) L_1, \dots, L_5 são duas a duas disjuntas se, e somente se, existe $\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\} = I_6$ tais que $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$, $L_2 = l_{\alpha\beta_2}, \dots, L_5 = l_{\alpha\beta_5}$.
- (5) Não existem 6 retas duas a duas disjuntas em Δ .

Demonstração. Para o item (1) considerando $L_1 = l_{ij}$ e $L_2 = l_{kt}$ tais que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, pelo item (e) do Lema 1.18 notemos que $\{i, j\} \cap \{k, t\}$ consiste de um único índice, digamos α , sendo assim temos $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$ e $L_2 = l_{\alpha\beta_2}$, com $\{i, j\} = \{\alpha, \beta_1\}$ e $\{k, t\} = \{\alpha, \beta_2\}$. A recíproca deste item assim como a dos itens (2), (3) e (4) segue direto do item (e) do Lema 1.18. Para o item (2) sejam $L_1, L_2, L_3 \in \Delta$ duas a duas disjuntas. Uma vez que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ então pelo item (1) existe $\omega_1 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2\} \subset I_6$ com $\sharp \omega_1 = 3$ tal que $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$ e $L_2 = l_{\alpha\beta_2}$. Agora como $L_1 \cap L_3 = \emptyset$ e $L_2 \cap L_3 = \emptyset$, sendo $L_3 = l_{nm}$ temos duas possibilidades a considerar:

1^a) $\alpha \in \{n, m\}$

Neste caso temos que $L_3 = l_{\alpha\beta_3}$ sendo $\beta_3 \neq \beta_1$ e $\beta_3 \neq \beta_2$, pois caso contrário teríamos $L_3 = L_1$ e $L_3 = L_2$ respectivamente, o que nos leva a concluir que existe $\omega_2 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} \subset I_6$ com $\sharp \omega_2 = 4$ tal que $L_i = l_{\alpha\beta_i}$, $i = 1, 2, 3$.

2^a) $\alpha \notin \{n, m\}$

Temos que $\beta_i \in \{n, m\}$, pois $L_i \cap L_3 = \emptyset$ para $i = 1, 2$. Assim temos que $L_3 = l_{\beta_1\beta_2}$, uma vez que $\beta_1 \neq \beta_2$. Para este caso observemos que existe $\omega_2 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2\} \subset I_6$, onde $\sharp \omega_2 = 3$ tal que $L_i = l_{\alpha\beta_i}$, com $i = 1, 2$ e $L_3 = l_{\beta_1\beta_2}$.

Agora para o item (3) sendo L_1, \dots, L_4 são duas a duas disjuntas então em particular temos que L_1, L_2, L_3 são duas a duas disjuntas. Assim pelo item anterior temos duas possibilidades ao considerarmos $L_4 = l_{nm}$.

(a) $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$, $L_2 = l_{\alpha\beta_2}$ e $L_3 = l_{\alpha\beta_3}$, sendo $\sharp \omega_2 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 4$.

Como $L_4 \cap L_s = \emptyset$, para todo $s \in \{1, 2, 3\}$ temos os seguintes casos:

i. $\alpha \in \{n, m\}$

Neste caso temos $L_4 = l_{\alpha\beta_4}$ com $\beta_4 \notin \omega_2$. Assim, existe $\omega_3 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} \subset I_6$ tal que $\sharp \omega_3 = 5$ e $L_i = l_{\alpha\beta_i}$, com $i = 1, \dots, 4$.

ii. $\alpha \notin \{n, m\}$

Uma vez que $L_4 \cap L_s = \emptyset$ então temos $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} \subset \{n, m\}$ o que é um absurdo.

(b) $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$, $L_2 = l_{\alpha\beta_2}$ e $L_3 = l_{\beta_1\beta_2}$

Para esta possibilidade também temos dois casos a considerar, vejamos:

i. $\alpha \in \{n, m\}$

Neste caso temos que $L_4 = l_{\alpha r}$ com $\{n, m\} = \{\alpha, r\}$, uma vez que $L_4 \cap L_3 = \emptyset$ temos que $r \in \{\beta_1, \beta_2\}$ o que é um absurdo, pois $\alpha \neq \beta_1$ e $\alpha \neq \beta_2$.

ii. $\alpha \notin \{n, m\}$

Para este caso como $L_4 \cap L_1 = \emptyset$ e $L_4 \cap L_2 = \emptyset$ então temos que $\beta_1 \in \{n, m\}$ e $\beta_2 \in \{n, m\}$ daí $L_4 = L_3$ o que também é um absurdo.

A demonstração do item (4) é análoga a possibilidade (a) do item (3). Considerando agora o item (5) suponhamos que $L_1, \dots, L_6 \in \Delta$ e são duas a duas disjuntas. Em particular, temos que $L_1, \dots, L_5 \in \Delta$ e também são duas a duas disjuntas. Desse modo pelo item (4) temos que $L_1 = l_{\alpha\beta_1}, \dots, L_5 = l_{\alpha\beta_5}$ sendo $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_5\} = I_6$. Assim, $L_6 = l_{\alpha k}$ com $k \neq \alpha$, então $k = p$ para algum $p \in \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\} = \omega$, com $\#\omega = 5$. Assim $L_6 = L_i$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$, o que seria um absurdo.

□

Teorema 1.21. *Se $\Gamma = \{\mathcal{C} \subset \phi(S) \mid \mathcal{C} \text{ é formado por retas duas a duas disjuntas e } \#\mathcal{C} = 6\}$, então verifica-se que $\#\Gamma = 72$.*

Demonstração. Segue da demonstração do Teorema 1.19 que $\phi(S) = \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B} \dot{\cup} \Delta$. Assim se $\mathcal{C} \in \Gamma$ temos que $\mathcal{C} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{A}) \dot{\cup} (\mathcal{C} \cap \mathcal{B}) \dot{\cup} (\mathcal{C} \cap \Delta)$. Vamos agora estudar a cardinalidade do conjunto $\mathcal{C} \cap \Delta$, para isso consideremos os seguintes casos

Caso 1: $\#(\mathcal{C} \cap \Delta) = 6$.

Pelo item (5) do Lema 1.20 temos que este caso não ocorre, pois em Δ no máximo 5 retas podem ser duas a duas disjuntas.

Caso 2: $\#(\mathcal{C} \cap \Delta) = 5$.

Se $\mathcal{C} = \{L_1, \dots, L_6\}$ então podemos assumir que $\mathcal{C} \cap \Delta = \{L_1, \dots, L_5\}$. Assim, pelo Lema 1.20 existe $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_5\} = I_6$ tal que $L_i = l_{\alpha\beta_i}$, sendo $i \in \{1, \dots, 5\}$. Desse modo temos que $L_6 \notin \Delta$, assim $L_6 \in \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B}$. Digamos que $L_6 \in \mathcal{A}$, sendo assim temos que $L_6 = a_k$, para algum $k \in I_6$, assim $L_6 \cap l_{\alpha\beta_i} = \emptyset \Leftrightarrow k \neq \alpha$ e $k \neq \beta_i$, para todo $i \in \{1, \dots, 5\}$. Daí segue-se que $k \notin I_6$ o que é um absurdo. Analogamente chegamos a um absurdo ao supor que $L_6 \in \mathcal{B}$.

Caso 3: $\#(\mathcal{C} \cap \Delta) = 4$.

Neste caso podemos assumir que $\mathcal{C} \cap \Delta = \{L_1, \dots, L_4\}$ sendo que $L_i = l_{\alpha\beta_i}$ com $i \in \{1, \dots, 4\}$ e $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\} = \omega_3$ tal que $\#\omega_3 = 5$. Assim temos que

$L_5, L_6 \in \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B}$. Suponhamos que $L_5 \in \mathcal{A}$, desse modo $L_5 = a_\gamma$ para algum $\gamma \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Como $L_5 \cap L_i = \emptyset$ sendo $1 \leq i \leq 4$, temos que $a_\gamma \cap l_{\alpha\beta_i} = \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, 4\}$, daí segue-se que $\gamma \neq \alpha$ e $\gamma \neq \beta_i$, $i \in \{1, \dots, 4\}$, assim $\gamma \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$.

Observemos que como $L_6 \neq L_5$ e $L_6 \cap L_i = \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, 5\}$, então $L_6 \notin \mathcal{A}$, pois caso contrário $L_6 = a_j$ com $j \neq \alpha$, $j \neq \gamma$ e $j \neq \beta_i$ para todo $i \in \{1, \dots, 4\}$. Como tal escolha para j não é possível, concluimos que $L_6 \notin \mathcal{A}$. Logo, só resta a possibilidade de que $L_6 \in \mathcal{B}$. Usando as mesmas ideias do caso $L_5 = a_\gamma$, concluimos que $L_6 = b_\gamma$. Portanto, $\mathcal{C} = \{l_{\alpha\beta_1}, l_{\alpha\beta_2}, l_{\alpha\beta_3}, l_{\alpha\beta_4}, a_\gamma, b_\gamma\}$ com $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\} \cup \{\gamma\} = \{1, 2, \dots, 6\}$. Note que temos $6 \cdot 5 = 30$ possibilidades para escolher $\alpha \in \{1, \dots, 6\}$ e $\{\beta_1, \dots, \beta_4\} \subset I_6 - \{\alpha\}$. Sendo assim, neste caso obtemos 30 elementos de Γ .

Caso 4: $\sharp(\mathcal{C} \cap \Delta) = 3$.

Assumamos que $\mathcal{C} \cap \Delta = \{L_1, L_2, L_3\}$. Temos então duas possibilidades a considerar:

(i) $L_i = l_{\alpha\beta_i}$ com $\sharp\{\alpha, \beta_i\} = 4$, sendo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Suponhamos que $L_4, L_5 \in \mathcal{A}$, assim $L_4 = a_\gamma$ e $L_5 = a_\delta$, com $\gamma, \delta \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, assim temos que $L_6 \notin \mathcal{A}$, logo $L_6 \in \mathcal{B}$, desse modo $L_6 = b_k$ sendo $k \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, daí $k = \gamma$ ou $k = \delta$, o que é um absurdo. Analogamente chegamos a um absurdo ao supor que $L_4, L_5 \in \mathcal{B}$ e $L_6 \in \mathcal{A}$.

(ii) $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$, $L_2 = l_{\alpha\beta_2}$ e $L_3 = l_{\beta_1\beta_2}$ com $\sharp\{\alpha, \beta_1, \beta_2\} = 3$. Assim $L_4, L_5, L_6 \in \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B}$. Tendo em consideração que $a_i \cap b_j \neq \emptyset$ se $i \neq j$, então temos que $L_4, L_5, L_6 \in \mathcal{A}$ ou $L_4, L_5, L_6 \in \mathcal{B}$. Para a primeira condição observemos que $L_4 = a_{\delta_1}, L_5 = a_{\delta_2}, L_6 = a_{\delta_3}$ sendo $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ desde que $L_i \cap L_j = \emptyset$, sendo $4 \leq i \leq 6$ e $1 \leq j \leq 3$. Desse modo temos $\mathcal{C} = \{l_{\alpha\beta_1}, l_{\alpha\beta_2}, l_{\beta_1\beta_2}, a_{\delta_1}, a_{\delta_2}, a_{\delta_3}\}$ (1). Analogamente para a segunda condição temos $\mathcal{C} = \{l_{\alpha\beta_1}, l_{\alpha\beta_2}, l_{\beta_1\beta_2}, b_{\delta_1}, b_{\delta_2}, b_{\delta_3}\}$ (2). Notemos que tanto em (1) quanto em (2) temos 20 possibilidades para escolher os índices α, β_1, β_2 em I_6 , assim obtemos mais 40 elementos em Γ .

Caso 5: $\sharp(\mathcal{C} \cap \Delta) = 2$.

Para este caso temos que $\mathcal{C} \cap \Delta = \{L_1, L_2\}$, sendo $L_1 = l_{\alpha\beta_1}$ e $L_2 = l_{\alpha\beta_2}$ com $\sharp\{\alpha, \beta_1, \beta_2\} = 3$. Assim temos que $L_3, L_4, L_5, L_6 \in \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B}$. Sendo assim temos que $L_i = a_k$ ou $L_i = b_k$ para $i = 3, \dots, 6$, com $k \notin \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$, pois

$L_i \cap L_j = \emptyset$, com $3 \leq i \leq 6$ e $1 \leq j \leq 2$. Sendo $L_3, L_4, L_5 \in \mathcal{A}$ temos $L_3 = a_{\theta_1}, L_4 = a_{\theta_2}, L_5 = a_{\theta_3}$, com $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Assim concluímos que $L_6 \in \mathcal{B}$ e com as mesmas ideias da possibilidade (i) do caso 4 chegamos a um absurdo.

Caso 6: $\sharp(\mathcal{C} \cap \Delta) = 1$.

Analogamente ao caso 5 chegamos a um absurdo.

Caso 7: $\sharp(\mathcal{C} \cap \Delta) = \emptyset$.

Para este caso teremos que $L_i \in \mathcal{A}$ ou $L_i \in \mathcal{B}$, com $i \in I_6$. O que nos dá mais 2 elementos de Γ .

Portanto, Γ contém exatamente $30 + 40 + 2 = 72$ elementos.

□

Pelo que acabamos de provar, podemos concluir que superfícies cúbicas não singulares contém exatamente 72 conjuntos de 6 retas duas a duas disjuntas. A partir daí podemos concluir ainda que:

Teorema 1.22. *Superfícies cúbicas não singulares possuem no máximo 6 retas duas a duas disjuntas.*

Demonstração. Sabemos que existem 6 retas duas a duas disjuntas em S , por exemplo as retas em \mathcal{A} . Suponhamos que $r_3 \geq 7$, assim existem L_1, L_2, \dots, L_7 retas em S duas a duas disjuntas. Consideremos agora $\mathcal{C} = \{L_1, L_2, \dots, L_6\}$. Desse modo pelo Teorema 1.21 temos $\mathcal{C} \in \Gamma$. Além disso, a partir da demonstração deste mesmo Teorema temos os seguintes casos a considerar:

Caso 1: $\mathcal{C} = \mathcal{A}$.

Uma vez que $\phi(S) = \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B} \dot{\cup} \Delta$, então temos que $L_7 \in \mathcal{B} \dot{\cup} \Delta$. Digamos que $L_7 \in \mathcal{B}$, assim $L_7 = b_k$, para algum $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Desse modo, segue-se que $L_7 \cap a_i \neq \emptyset$ se $i \neq k$, o que é um absurdo. Agora se $L_7 = l_{nm}$, com $n, m \in I_6$, então temos que $L_7 \cap a_n \neq \emptyset$, para algum $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$, o que também é um absurdo.

Caso 2: $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

Usando a demonstração do caso acima trocando a_i 's pelos b_i 's também chegamos a um absurdo.

Caso 3: $\mathcal{C} = \{l_{\alpha\beta_1}, l_{\alpha\beta_2}, l_{\beta_1\beta_2}, a_{\delta_1}, a_{\delta_2}, a_{\delta_3}\}$, com $\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3\} = I_6$, sendo $L_1 = l_{\alpha\beta_1}, L_2 = l_{\alpha\beta_2}, L_3 = l_{\beta_1\beta_2}, L_4 = a_{\delta_1}, L_5 = a_{\delta_2}$ e $L_6 = a_{\delta_3}$.

Primeiramente admitamos que $L_7 = a_k$. Como $L_7 \cap L_i = \emptyset$, para $1 \leq i \leq 3$ então $k \notin \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Sendo assim, $k \in \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, logo $L_7 = a_{\delta_i}$, para

algun $i \in \{1, 2, 3\}$. Portanto, $L_7 \in \mathcal{C}$, o que é um absurdo. Supondo agora que $L_7 = b_k$ teremos $L_7 \cap a_{\delta_i} \neq \emptyset$ para $\delta_i \in \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} - \{k\}$. Por último sendo $L_7 = l_{nm}$ temos $L_7 = L_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3\}$, pois como $L_7 \cap a_{\delta_i} = \emptyset$ então $n, m \in \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Caso 4: $\mathcal{C} = \{l_{\alpha\beta_1}, l_{\alpha\beta_2}, l_{\beta_1\beta_2}, b_{\delta_1}, b_{\delta_2}, b_{\delta_3}\}$, com $\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3\} = I_6$, sendo $L_1 = l_{\alpha\beta_1}, L_2 = l_{\alpha\beta_2}, L_3 = l_{\beta_1\beta_2}, L_4 = b_{\delta_1}, L_5 = b_{\delta_2}$ e $L_6 = b_{\delta_3}$.

Neste caso ao considerarmos $L_7 = a_k$ ou $L_7 = b_k$ ou $L_7 = l_{nm}$, chegamos a um absurdo de maneira semelhante ao caso anterior.

Caso 5: $\mathcal{C} = \{l_{\alpha\beta_1}, l_{\alpha\beta_2}, l_{\alpha\beta_3}, l_{\alpha\beta_4}, a_\delta, b_\delta\}$, com $\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \delta\} = I_6$, sendo $L_1 = l_{\alpha\beta_1}, L_2 = l_{\alpha\beta_2}, L_3 = l_{\alpha\beta_3}, L_4 = l_{\alpha\beta_4}, L_5 = a_\delta$ e $L_6 = b_\delta$.

Para este caso supondo $L_7 = a_k$ então temos que $k = \delta$, pois $L_7 \cap L_i = \emptyset$ com $i \in \{1, \dots, 4\}$, assim $L_7 \in \mathcal{C}$. De modo análogo temos tal absurdo ao supor que $L_7 = b_k$. Agora sendo $L_7 = l_{nm}$, temos $\{n, m\} \in \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, pois $L_7 \cap L_i = \emptyset$ sendo $i = 5, 6$. Assim observemos que caso $\alpha \in \{n, m\}$ então $L_7 = L_i$ para algum $i \in \{1, \dots, 4\}$, o que é um absurdo. Por outro lado se $\alpha \notin \{n, m\}$ temos $L_7 = l_{\beta_i\beta_j}$, daí $L_7 \cap l_{\alpha\beta_k} \neq \emptyset$ para $\beta_k \in \{\beta_1, \dots, \beta_4\} - \{\beta_i, \beta_j\}$, o que também nos dá um absurdo.

Portanto, toda superfície cúbica não singular em \mathbb{P}^3 possui no máximo 6 retas duas a duas disjuntas. □

Capítulo 2

Retas disjuntas em superfícies quárticas não singulares

Sabe-se que sempre é possível encontrar uma superfície não singular de grau $d \geq 4$, que não contém retas, por exemplo pode-se mostrar utilizando um método chamado de estratificação que a superfície dada pelo polinômio $x_3^d + x_0x_1^{d-1} + x_1x_2^{d-1} + x_2x_0^{d-1} \in \mathcal{R}$ não contém retas (veja Proposição 1.5, pág. 14 em [13]). Para o caso de superfícies não singulares de grau $d = 4$ em \mathbb{P}^3 sabe-se que estas possuem no máximo 64 retas, fato este provado em 1943 pelo italiano Beniamino Segre em seu artigo “*The maximum number of lines lying on a quartic surface*” ([17]).

Outro marco na Geometria Algébrica diz respeito à quártica de Schur $x_0^4 - x_0x_1^3 - x_2^4 + x_2x_3^3 = 0$, a qual possui exatamente 64 retas, sendo tal resultado desenvolvido pelo alemão Friedrich Schur em 1882 em seu artigo “*Ueber eine besondere Class von Flächen vierter Ordnung*” ([16]). O que também se conhece é que a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas que uma superfície quártica pode ter é 16 (veja [10]). No decorrer deste capítulo iremos determinar a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas nas superfícies quárticas não singulares de Fermat e Schur (em \mathbb{P}^3), e comentar brevemente o caso das superfícies quárticas em geral.

2.1 Retas na quártica de Fermat

Na Geometria Algébrica a quártica de Fermat é a superfície definida pela equação $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$, nesta seção tal superfície será denotada por F . Considerando as raízes quartas da unidade $\{1, i, -1, -i\}$, observemos que sendo $\varphi(x, y) = x^4 + y^4$, então verifica-se que $\varphi(x, y) = (x - \mu y)(x - i\mu y)(x + \mu y)(x + i\mu y)$, sendo $\mu \in \mathbb{C}$ com $\mu^4 = -1$.

Considerando agora $\mathcal{U} = \{\mu, -\mu, i\mu, -i\mu\}$ com $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\mu^4 = -1$. Definamos,

$$\mathcal{L}_1 = \{l_1(a, b) = Z(x_0 - ax_1, x_2 - bx_3) \mid (a, b) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{l_2(a, b) = Z(x_0 - ax_2, x_1 - bx_3) \mid (a, b) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}\}$$

$$\mathcal{L}_3 = \{l_3(a, b) = Z(x_0 - ax_3, x_1 - bx_2) \mid (a, b) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}\}.$$

Teorema 2.1. *Com as notações acima. Verifica-se que:*

1. $\mathcal{L}_i \subset \phi(F)$ e $\#\mathcal{L}_i = 16$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$.
3. $\phi(F) = \mathcal{L}_1 \dot{\cup} \mathcal{L}_2 \dot{\cup} \mathcal{L}_3$ e $\#\phi(F) = 48$.

Demonstração. 1. Sendo $l \in \mathcal{L}_1$ temos $l = l_1(a, b) = Z(x_0 - ax_1, x_2 - bx_3)$ com $a, b \in \mathcal{U}$. Note que $F = \varphi(x_0, x_1) + \varphi(x_2, x_3)$, daí $\mathcal{L}_1 \subset \phi(F)$. Analogamente podemos mostrar que $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3 \subset \phi(F)$.

Agora como cada par (a, b) define um elemento de \mathcal{L}_i , com $i \in \{1, 2, 3\}$ então temos que $\#\mathcal{L}_i \leq 16$. Suponhamos que $(a, b), (a', b')$ são pares em \mathcal{U}^2 tais que $l_i(a, b) = l_i(a', b')$. Iremos considerar o caso $i = 1$, pois os demais casos são verificados de modo análogo. Temos então que um ponto $p = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in l_1(a, b) \Leftrightarrow x_0 = ax_1$ e $x_2 = bx_3$, e $p \in l_1(a', b') \Leftrightarrow x_0 = a'x_1$ e $x_2 = b'x_3$. Por outro lado o ponto $q = [a : 1 : b : 1] \in l_1(a, b)$ o que nos dá $a = a'$ e $b = b'$. Portanto, $\#\mathcal{L}_1 = 16$.

2. Suponhamos que $l \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Assim, $l = l_1(a, b)$ para algum par $(a, b) \in \mathcal{U}^2$ e $l = l_2(a', b')$ para algum par $(a', b') \in \mathcal{U}^2$. Logo, $l = Z(x_0 - ax_1, x_2 - bx_3) = Z(x_0 - a'x_2, x_1 - b'x_3)$. Notemos que $q = [a : 1 : b : 1] \in l = l_1(a, b)$, assim $q \in l_2(a', b')$ o que nos dá $a = a'b$ e $1 = b'$, daí $(b')^4 = 1$, o que é um absurdo. Considerando os pontos $r = [a' : b' : 1 : 1]$ e $p = [a : 0 : 1 : 0]$ e usando as mesmas ideias do primeiro caso, chegamos a um absurdo ao supor que $l \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$ e $l \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3$, respectivamente.

3. Pelo item 1 segue que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \subset \phi(F)$. Agora considerando a estratificação $\{E_i\}_{i=1}^6$, de $G_2(\mathbb{C}^4)$ (veja Definição A.15 e Observação A.8 no Apêndice A), temos que sendo l uma reta em $\phi(F)$, então $l = \mathbb{P}(W)$ para algum $W \in G_2(\mathbb{C}^4) = E_1 \dot{\cup} E_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} E_6$. Observemos que se $W \in E_6 \dot{\cup} E_5 \dot{\cup} E_3$, então $p = [0 : 0 : 0 : 1] \in l$, mas $p \notin F$ o que nos leva a concluir que $l \not\subset F$. Assim, as retas em F devem necessariamente ser da forma $\mathbb{P}(W)$ com $W \in E_1 \dot{\cup} E_2 \dot{\cup} E_4$, temos então 3 casos a considerar, vejamos:

Caso 1: $W = W_{\alpha,\beta} = [(0, 1, 0, \alpha), (0, 0, 1, \beta)] \in E_4$.

Neste caso temos que todo ponto de l é da forma $[0 : w_1 : w_2 : \alpha w_1 + \beta w_2]$, com $[w_1 : w_2] \in \mathbb{P}^1$. Assim, $l \subset F$ se, e somente se, a seguinte igualdade é satisfeita $w_1^4 + w_2^4 + (\alpha w_1 + \beta w_2)^4 = 0$, para todo $[w_1 : w_2] \in \mathbb{P}^1$. Desenvolvendo tal igualdade, temos $w_1^4(1 + \alpha^4) + w_2^4(1 + \beta^4) + 4\alpha^3\beta w_1^3 w_2 + 6\alpha^2\beta^2 w_1^2 w_2^2 + 4\alpha\beta^3 w_1 w_2^3 = 0$ para todo $[w_1 : w_2] \in \mathbb{P}^1$. Como tal expressão polinomial se anula em todos os pontos de \mathbb{P}^1 , então temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 1 + \alpha^4 = 0 \\ 1 + \beta^4 = 0 \\ 4\alpha^3\beta = 0 \\ 6\alpha^2\beta^2 = 0 \\ 4\alpha\beta^3 = 0 \end{cases}$$

o qual não possui solução, isto é, no estrato E_4 não há retas, logo $l \notin \phi(F)$.

Caso 2: $W = W_{\alpha,\beta,\gamma} = [(1, \alpha, 0, \beta), (0, 0, 1, \gamma)] \in E_2$.

Para este caso, observemos que todo ponto da reta l é da forma $[u_1 : \alpha u_1 : u_2 : \beta u_1 + \gamma u_2]$, com $[u_1 : u_2] \in \mathbb{P}^1$. Desse modo, $l \subset F$, se, e somente se, $u_1^4 + \alpha^4 u_1^4 + u_2^4 + (\beta u_1 + \gamma u_2)^4 = 0$ para todo $[u_1 : u_2] \in \mathbb{P}^1$. Desenvolvendo esta equação, temos

$$\begin{cases} 1 + \alpha^4 + \beta^4 = 0 \\ 1 + \gamma^4 = 0 \\ 4\beta^3\gamma = 0 \\ 4\beta\gamma^3 = 0 \\ 6\beta^2\gamma^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \alpha^4 + \beta^4 = 0 \\ 1 + \gamma^4 = 0 \\ \beta\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \alpha^4 = 0 \\ 1 + \gamma^4 = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

o que nos possibilita encontrar 16 soluções, isto é, no estrato E_2 existem 16 retas de F . Agora observemos que sendo $W_{\alpha,\beta,\gamma} = [(1, \alpha, 0, \beta), (0, 0, 1, \gamma)]$, a partir das soluções do sistema acima temos $W_{\alpha,0,\gamma} = [(1, \alpha, 0, 0), (0, 0, 1, \gamma)]$. Multiplicando o primeiro vetor por $-\alpha^3$ e o segundo por $-\gamma^3$, obtemos

$$W_{\alpha,0,\gamma} = [(-\alpha^3, 1, 0, 0), (0, 0, -\gamma^3, 1)].$$

Notemos que $(-\alpha^3)^4 = [(-1)(\alpha^3)]^4 = (-1)^4 \alpha^{12} = (\alpha^4)^3 = -1$. Analogamente verificamos que $(-\gamma^3)^4 = -1$. Agora observemos que, sendo

$l_1(a, b) = Z(x_0 - ax_1, x_2 - bx_3)$, então a parametrização desta reta é dada por $[ua : u : bv : v]$ onde $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. Assim, tomando $u = 1, v = 0$ e $u = 0, v = 1$ respectivamente temos

$$l_1(a, b) = \mathbb{P}([(a, 1, 0, 0), (0, 0, b, 1)]). \quad (2.1)$$

De modo análogo verificamos que

$$l_2(a, b) = \mathbb{P}([(a, 0, 1, 0), (0, b, 0, 1)]) \quad (2.2)$$

e

$$l_3(a, b) = \mathbb{P}([(a, 0, 0, 1), (0, b, 1, 0)]). \quad (2.3)$$

Desse modo, podemos concluir que as retas encontradas no estrato E_2 pertencem ao conjunto \mathcal{L}_1 .

Caso 3: $W = W_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} = [(1, 0, \alpha, \beta), (0, 1, \gamma, \delta)] \in E_1$.

Neste caso todo ponto da reta l é da forma $[v_1 : v_2 : \alpha v_1 + \gamma v_2 : \beta v_1 + \delta v_2]$, com $[v_1 : v_2] \in \mathbb{P}^1$. Sendo assim, $l \subset F$ se, e somente se, $v_1^4 + v_2^4 + (\alpha v_1 + \gamma v_2)^4 + (\beta v_1 + \delta v_2)^4 = 0$ para todo $[v_1 : v_2] \in \mathbb{P}^1$, o que nos dá o seguinte resultado

$$\begin{cases} 1 + \alpha^4 + \beta^4 = 0 \\ 1 + \gamma^4 + \delta^4 = 0 \\ 4\alpha^3\gamma + 4\beta^3\delta = 0 \\ 4\alpha\gamma^3 + 4\beta\delta^3 = 0 \\ 6\alpha^2\gamma^2 + 6\beta^2\delta^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \alpha^4 + \beta^4 = 0 & (I) \\ 1 + \gamma^4 + \delta^4 = 0 & (II) \\ \alpha^3\gamma = -\beta^3\delta & (III) \\ \alpha\gamma^3 = -\beta\delta^3 & (IV) \\ \alpha^2\gamma^2 = -\beta^2\delta^2 & (V) \end{cases}$$

multiplicando a equação (IV) por (V) obtemos $(\alpha^3\gamma)\gamma^4 = \beta^3\delta^5$, substituindo (III) em tal igualdade teremos $\beta^3\delta(\delta^4 + \gamma^4) = 0$, assim de (II) temos $\beta\delta = 0$. Sendo assim, temos dois casos a considerar:

Caso 3.1: $\beta = 0$ e $\alpha\gamma = 0$.

Sendo $\beta = \alpha = 0$ então por (I) teremos um absurdo. Agora para $\beta = 0$ e $\gamma = 0$ teremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 1 + \alpha^4 = 0 \\ 1 + \delta^4 = 0 \end{cases}$$

o qual possui 16 soluções, assim encontramos mais 16 retas em F . Além disso, temos $W_{\alpha, 0, 0, \delta} = [(1, 0, \alpha, 0), (0, 1, 0, \delta)]$, analogamente ao que fizemos no caso 2, temos que estas 16 retas estão em \mathcal{L}_2 .

Caso 3.2: $\delta = 0$ e $\alpha\gamma = 0$.

Com as mesmas ideias do Caso 3.1, conseguimos encontrar mais 16 retas em F , as quais encontram-se no conjunto \mathcal{L}_3 .

Portanto $\phi(S) = \mathcal{L}_1 \dot{\cup} \mathcal{L}_2 \dot{\cup} \mathcal{L}_3$ e $\#\phi(S) = 48$.

□

Pelo que fizemos acima, podemos concluir que a quártica de Fermat possui exatamente 48 retas, e estas podem ser divididas em 3 conjuntos disjuntos onde cada um possui exatamente 16 retas. Sabendo a quantidade de retas, vamos então estudar o comportamento destas no que diz respeito à interseção, para que assim possamos verificar qual a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas existente em tal superfície.

Proposição 2.2. Com as notações de $l_1(a, b)$, $l_2(a, b)$ e $l_3(a, b)$ dadas pelas expressões (2.1), (2.2) e (2.3) respectivamente. Verifica-se que:

1. $l_i(a, b) \cap l_i(a', b') = \emptyset$ se, e somente se, $a \neq a'$ e $b \neq b'$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. O número máximo de retas duas a duas disjuntas em \mathcal{L}_i , com $i \in \{1, 2, 3\}$ é 4.
3. $l_1(a, b) \cap l_2(a', b') = \emptyset$ se, e somente se, $(a', b') \notin \{(a, b), (-a, -b), (ia, ib), (-ia, -ib)\}$.
4. $l_1(a, b) \cap l_3(a', b') = \emptyset$ se, e somente se, $(a', b') \notin \{(a, b^{-1}), (-a, -b^{-1}), (ia, ib^{-1}), (-ia, -ib^{-1})\}$.
5. $l_2(a, b) \cap l_3(a', b') = \emptyset$ se, e somente se, $(a', b') \notin \{(a, b), (-a, -b), (ia, -ib), (-ia, ib)\}$.

Demonstração. 1. Sendo $l_1(a, b) = \mathbb{P}([(a, 1, 0, 0), (0, 0, b, 1)])$, pelo item (1) do Lema A.15 (no Apêndice A) temos que

$$l_1(a, b) \cap l_1(a', b') \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b' & 1 \end{vmatrix} = (a - a')(b - b') = 0 \Leftrightarrow a = a' \text{ ou } b = b'.$$

Assim, $l_1(a, b) \cap l_1(a', b') = \emptyset \Leftrightarrow a \neq a'$ e $b \neq b'$. Analogamente se verifica para os demais casos.

2. Consideremos agora a matriz M cujos os elementos são os pares de \mathcal{U}^2 que parametrizam as retas de \mathcal{L}_1 , vale salientar que os elementos de M foram organizados de tal maneira como foi definido o conjunto \mathcal{U} no início desta seção. Tem-se que:

$$M = \begin{bmatrix} (\mu, \mu) & (\mu, -\mu) & (\mu, i\mu) & (\mu, -i\mu) \\ (-\mu, \mu) & (-\mu, -\mu) & (-\mu, i\mu) & (-\mu, -i\mu) \\ (i\mu, \mu) & (i\mu, -\mu) & (i\mu, i\mu) & (i\mu, -i\mu) \\ (-i\mu, \mu) & (-i\mu, -\mu) & (-i\mu, i\mu) & (-i\mu, -i\mu) \end{bmatrix}$$

Pelo item anterior observemos que a reta $l_1(\mu, \mu)$ intersecta apenas as retas da coluna e linha onde se encontra o par (μ, μ) . Assim, deletando a coluna e a linha onde (μ, μ) se encontra, teremos os pares que parametrizam as retas as quais são disjuntas a $l_1(\mu, \mu)$, e pela contagem dos elementos dessa matriz podemos concluir que são exatamente 9. O mesmo acontece para qualquer outra escolha, sendo assim podemos concluir que para cada par $(a, b) \in \mathcal{U}^2$ as retas em \mathcal{L}_1 que são disjuntas de $l_1(a, b)$ são exatamente as 9 retas determinadas ao deletar a linha e a coluna nas quais (a, b) se encontra no arranjo matricial acima.

Agora das 9 retas duas a duas disjuntas a $l_1(\mu, \mu)$, escolhamos a reta $l_1(-\mu, -\mu)$. Vale salientar que poderíamos ter feito qualquer uma das 9 escolhas. Observemos então que as retas as quais intersectam $l_1(-\mu, -\mu)$ são exatamente as retas da linha e coluna onde se encontra $(-\mu, -\mu)$, ou seja, deletando a linha e coluna onde tal par se encontra podemos concluir que os pares restantes são exatamente os que parametrizam as retas disjuntas a $l_1(\mu, \mu)$ e a $l_1(-\mu, -\mu)$. Daí observando os pares que sobraram após a primeira e segunda eliminação, ainda pelo item 1 podemos concluir que o número máximo de retas duas a duas disjuntas em \mathcal{L}_1 é 4. Analogamente chegamos a este resultado ao considerar os conjuntos \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 .

3. Analogamente ao que fizemos no item 1 temos,

$$l_1(a, b) \cap l_2(a', b') \neq \emptyset \Leftrightarrow -(ab' - ba') = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a', b') = \lambda(a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \end{cases} \text{ para algum } 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}.$$

Elevando ambos os lados da primeira equação deste sistema a quarta potência obtemos $\lambda \in \{1, -1, i, -i\}$. Daí segue-se que, $l_1(a, b) \cap l_2(a', b') = \emptyset \Leftrightarrow (a', b') \notin \{(a, b), (-a, -b), (ia, ib), (-ia, -ib)\}$.

4. Para este item, observemos que $l_1(a, b) \cap l_3(a', b') \neq \emptyset \Leftrightarrow abb' = a' \Leftrightarrow ab' = a'b^{-1}$. Realizando procedimento análogo ao feito no item 3, concluimos que $l_1(a, b) \cap l_3(a', b') = \emptyset \Leftrightarrow (a', b') \notin \{(a, b^{-1}), (-a, -b^{-1}), (ia, ib^{-1}), (-ia, -ib^{-1})\}$.

5. Utilizando as mesmas ideias do item 4, o resultado deste item segue.

□

Observemos que com o mesmo método da demonstração do item 2 da Proposição 2.2, podemos obter o seguinte resultado:

Corolário 2.3. Sendo $\Psi_{l_1^c(a,b)}(\mathcal{L}_1) = \{l \in \mathcal{L}_1 \mid l \cap l_1(a,b) = \emptyset\}$, $\Psi_{l_1^c(a',b')}(\mathcal{L}_1) = \{l \in \mathcal{L}_1 \mid l \cap l_1(a',b') = \emptyset\}$ e $\Psi_{l_1^c(a'',b'')}(\mathcal{L}_1) = \{l \in \mathcal{L}_1 \mid l \cap l_1(a'',b'') = \emptyset\}$, então $\#(\Psi_{l_1^c(a,b)} \cap \Psi_{l_1^c(a',b')} \cap \Psi_{l_1^c(a'',b'')}) = 1$.

Corolário 2.4. A quártica de Fermat possui no máximo 12 retas duas a duas disjuntas.

Demonstração. Se $\mathcal{D} \subset \phi(F)$ for constituído por retas duas a duas disjuntas, então pelo item 3 do Teorema 2.1 temos $\mathcal{D} = (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{D}) \dot{\cup} (\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{D}) \dot{\cup} (\mathcal{L}_3 \cap \mathcal{D})$. Daí, pelo item 2 da Proposição 2.2, segue que, $\#(\mathcal{L}_i \cap \mathcal{D}) \leq 4$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Assim, $\#\mathcal{D} = \sum_{i=1}^3 \#(\mathcal{D} \cap \mathcal{L}_i) \leq 4 \cdot 3 = 12$. Portanto $r(F) \leq 12$.

Considerando agora os itens 1, 3, 4 e 5 da Proposição 2.2, temos que sendo $\{l_1(\mu, \mu), l_1(-\mu, -\mu), l_1(i\mu, i\mu), l_1(-i\mu, -i\mu)\} \in \mathcal{L}_1$, $\{l_2(\mu, -\mu), l_2(-\mu, \mu), l_2(i\mu, -i\mu), l_2(-i\mu, i\mu)\} \in \mathcal{L}_2$ e $\{l_3(\mu, i\mu), l_3(-\mu, -i\mu), l_3(-i\mu, -\mu), l_3(-i\mu, \mu)\} \in \mathcal{L}_3$. Verifica-se que todas essas retas são duas a duas disjuntas. \square

Pelo que acabamos de provar, podemos concluir que $r(F) = 12$.

2.2 Retas disjuntas na quártica de Schur

A quártica de Schur, como já foi mencionado, possui exatamente 64 retas, o que também pode ser verificado com o auxílio do método de estratificação (ver Exemplo 1.1, pág. 20 em [13]). Para o nosso objetivo, que é o de calcular a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas nesta superfície, iremos dividi-la em alguns conjuntos disjuntos, além de enunciar e demonstrar alguns resultados os quais nos possibilitarão encontrar as 64 retas bem como a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas existente em tal superfície. Salientamos que alguns resultados desta seção podem ser encontrados em [12].

A quártica de Schur é a superfície dada pela equação $x_0(x_0^3 - x_1^3) - x_2(x_2^3 - x_3^3) = 0$. Observemos que se $\phi(u, v) = u(u^3 - v^3) \in \mathbb{C}[u, v]$ então $f = \phi(x_0, x_1) - \phi(x_2, x_3)$. Além disso, temos $\phi(u, v) = u(u - v)(u - \xi v)(u - \xi^2 v)$ sendo $\xi \in \mathbb{C}$ raiz cúbica primitiva da unidade (ou seja, $\xi \neq 1$ e $\xi^3 = 1$). Vale salientar que no decorrer desta seção ξ terá esse mesmo significado, e consideraremos $\xi = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ quando for preciso, além disso, $S = Z(f)$ denotará a superfície quártica de Schur, sendo f definido como acima.

Considere $\mathcal{V} = \{0, 1, \xi, \xi^2\}$ e defina $\mathcal{L} = \{l(a, b) = Z(x_0 - ax_1, x_2 - bx_3) \mid (a, b) \in \mathcal{V}^2\}$.

Proposição 2.5. Com as notações acima, temos que, $\mathcal{L} \subseteq \phi(S)$ e $\#\mathcal{L} = 16$.

2. Retas disjuntas em superfícies quárticas não singulares

Demonstração. Sendo $l \in \mathcal{L}$, então $l = l(a, b) = \mathbb{P}([(a, 1, 0, 0), (0, 0, b, 1)])$ para algum $(a, b) \in \mathcal{V}^2$. Daí, $f(\alpha a, \alpha, \beta b, \beta) = \alpha a(\alpha^3 a^3 - \alpha^3) - \beta b(\beta^3 b^3 - \beta^3) = 0$, pois $a, b \in \mathcal{V}$ para todo $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Portanto, $\mathcal{L} \subset \phi(S)$. Agora pela definição de \mathcal{L} temos que $\#\mathcal{L} \leq 16$. Suponhamos que $(a, b), (a', b') \in \mathcal{V}^2$ são tais que $l(a, b) = l(a', b')$. Note que o ponto $p = [a : 1 : 0 : 0] \in l(a, b) = l(a', b')$, assim $p \in l(a', b')$ o que nos dá $a = a'$. Por outro lado temos que $q = [0 : 0 : b : 1] \in l(a', b')$ desse modo temos que $b = b'$. Logo, $\#\mathcal{L} = 16$. \square

Proposição 2.6. Sejam $L = Z(x_0, x_1)$ e $M = Z(x_2, x_3)$ retas em \mathbb{P}^3 . Considere $l \in \phi(S)$. Então,

1. $l \in \mathcal{L} \Leftrightarrow l \cap L \neq \emptyset$.
2. $l \in \mathcal{L} \Leftrightarrow l \cap M \neq \emptyset$.

Demonstração. Observemos que uma vez que $l \in \mathcal{L}$, então $l = l(a, b) = \mathbb{P}([(a, 1, 0, 0), (0, 0, b, 1)])$. Notemos ainda que $[a : 1 : 0 : 0] \in l \cap M$ e $[0 : 0 : b : 1] \in l \cap L$, assim $l \cap L \neq \emptyset$ e $l \cap M \neq \emptyset$. Para a recíproca do primeiro item, temos que como $l \subseteq S$ e $L \not\subseteq S$, então $l \neq L$ e $l \cap L = \{p\}$. Como $p \in L$, então $p = [0 : 0 : \alpha : \beta]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$ e como $p \in l \subseteq S$ temos $\alpha(\alpha^3 - \beta^3) = 0$. Observemos que $\beta \neq 0$, pois caso contrário teríamos $\alpha = 0$, o que não pode acontecer uma vez que $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Assim, desenvolvendo esta última igualdade e em seguida dividindo por β^4 obtemos $(\frac{\alpha}{\beta})^4 - (\frac{\alpha}{\beta}) = 0$, colocando $(\frac{\alpha}{\beta})$ em evidência e nomeando tal fração por b teremos $b(b^3 - 1) = 0$, o que nos permite afirmar que $b \in \mathcal{V}$, desse modo temos $p = [0 : 0 : b : 1]$.

Agora consideremos $w = (w_0, w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^4$ tal que $l = \mathbb{P}(W)$ sendo $W = \{(0, 0, b, 1), (w_0, w_1, w_2, w_3)\}$. De fato, W admite uma base da forma $\{(0, 0, b, 1), (w_0, w_1, w_2, 0)\}$. Suponhamos que $w_2 \neq 0$, assim $l = \mathbb{P}([(0, 0, b, 1), (n, m, 1, 0)])$, sendo $n = \frac{w_0}{w_2}$ e $m = \frac{w_1}{w_2}$. Uma vez que $l \subseteq S$, temos $f(u_1 n, u_1 m, u_0 b + u_1, u_0) = 0$ para todo $[u_0 : u_1] \in \mathbb{P}^1$, o que nos conduz à igualdade

$$u_1 n(u_1^3 n^3 - u_1^3 m^3) - (u_0 b + u_1)((u_0 b + u_1)^3 - u_0^3) = 0 \quad (2.4)$$

para todo $[u_0 : u_1] \in \mathbb{P}^1$. Tomando $u_0 = 0$ e $u_1 = 1$ temos $n(n^3 - m^3) = 1$, por outro lado sendo $u_0 = 1$ e $u_1 = -b$ obtemos $-b^4 n(-n^3 + m^3) = 0$, o que nos dá um absurdo ao supor que $b \neq 0$. Além disso, se $b = 0$ pela equação (2.4) teremos $u_1^4(n(n^3 - m^3) - 1) + u_0^3 u_1 = 0$, o que também nos dá o absurdo $1 = 0$. Daí temos $l = \mathbb{P}([(0, 0, b, 1), (w_0, w_1, 0, 0)])$, note que $[w_0 : w_1 : 0 : 0] \in l$ e como $l \subset S$, então segue-se que $w_0(w_0^3 - w_1^3) = 0$. Assim, $w_1 \neq 0$, o que nos permite verificar que $a(a^3 - 1) = 0$, sendo $a = \frac{w_0}{w_1}$, ou seja $a \in \mathcal{V}$. Portanto, $l \in \mathcal{L}$. De modo análogo verificamos a recíproca do segundo item. \square

Desse modo temos que $l \notin \mathcal{L}$ se, e somente se, $l \cap L = \emptyset$ ou $l \cap M = \emptyset$. Observemos ainda que os únicos pontos que estão em L e na superfície S são $p_1 = [0 : 0 : 0 : 1]$, $p_2 = [0 : 0 : 1 : 1]$, $p_3 = [0 : 0 : \xi : 1]$ e $p_4 = [0 : 0 : \xi^2 : 1]$, ou seja, $L \cap S = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Analogamente temos $M \cap S = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, sendo $q_1 = [0 : 1 : 0 : 0]$, $q_2 = [1 : 1 : 0 : 0]$, $q_3 = [\xi : 1 : 0 : 0]$ e $q_4 = [\xi^2 : 1 : 0 : 0]$. Assim, pela Proposição A.12 (no Apêndice A) temos que para cada ponto p_i passam exatamente 4 retas por cada q_j , com $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ (veja a Figura 2.1) e pela Proposição 2.6, estas encontram-se na família \mathcal{L} . Doravante denotaremos a reta l_{ij} como sendo a reta que passa pelos pontos p_i e q_j , com $i, j \in \{1, \dots, 4\}$.

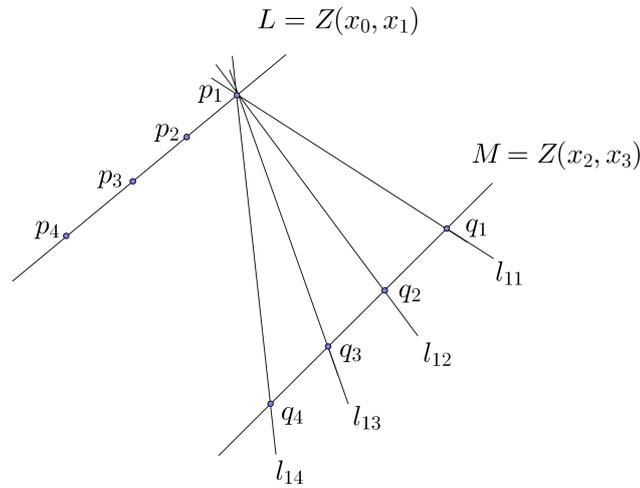


Figura 2.1: Quatro retas passando pelo ponto p_1 .

Desse modo, podemos concluir que as 16 retas de \mathcal{L} são $l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{21}, l_{22}, l_{23}, l_{24}, l_{31}, l_{32}, l_{33}, l_{34}, l_{41}, l_{42}, l_{43}, l_{44}$. Definamos agora $\mathcal{L}_{p_i} = \{l \in \mathcal{L} \mid p_i \in l\}$, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Agora sendo $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}$ formado por retas duas a duas disjuntas, então $\mathcal{E} = (\mathcal{E} \cap \mathcal{L}_{p_1}) \dot{\cup} (\mathcal{E} \cap \mathcal{L}_{p_2}) \dot{\cup} (\mathcal{E} \cap \mathcal{L}_{p_3}) \dot{\cup} (\mathcal{E} \cap \mathcal{L}_{p_4})$. Como as retas em \mathcal{L}_{p_i} passam por p_i , temos que $\#(\mathcal{E} \cap \mathcal{L}_{p_i}) \leq 1$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Desse modo temos $\#\mathcal{E} \leq 4$. Salientamos que no decorrer desta seção \mathcal{L}_{p_i} terá esse mesmo significado.

Lema 2.7. Sejam l_{ij} e l_{kt} retas em \mathcal{L} . Verifica-se que $l_{ij} \cap l_{kt} = \emptyset$, se, e somente se, $i \neq k$ e $j \neq t$.

Demonstração. Suponhamos que $i = k$ então temos $l_{ij} \cap l_{it} = \{p_i\}$ o que é um absurdo. De modo análogo teremos $l_{ij} \cap l_{kj} = \{q_j\}$ ao supor que $j = t$. Reciprocamente se $i \neq k$ então $p_i \neq p_k$, digamos que $p_i = [0 : 0 : a : 1]$ e $p_k = [0 : 0 : a' : 1]$ sendo assim temos $a \neq a'$, e sendo $j \neq t$ de modo análogo obtemos $b \neq b'$ ao considerarmos $q_j = [b : 1 : 0 : 0]$ e $q_t = [b' : 1 : 0 : 0]$. Daí pela demonstração do item 1 da Proposição 2.2 segue-se que $l_{ij} \cap l_{kt} = \emptyset$. \square

Proposição 2.8. Para cada $\sigma \in S_4$, verifica-se que $\mathcal{L}_\sigma = \{l_{1\sigma(1)}, l_{2\sigma(2)}, l_{3\sigma(3)}, l_{4\sigma(4)}\}$ é formado por retas duas a duas disjuntas. Além disso, se $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$ for constituído por retas duas a duas disjuntas com $\sharp\mathcal{G} = 4$, então $\mathcal{G} = \mathcal{L}_\sigma$ para algum $\sigma \in S_4$.

Demonstração. Note que $\sigma \in S_4$ define uma bijeção de $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ em I_4 . Assim, $I_4 = \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)\}$ e $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ para todo $i \neq j$. Desse modo pelo Lema 2.7 temos que $l_{i\sigma(i)} \cap l_{j\sigma(j)} = \emptyset$ se, e somente se, $i \neq j$ e $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Agora se $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$ é formado por retas duas a duas disjuntas e $\sharp\mathcal{G} = 4$, temos que $\mathcal{G} = \{l_{i_1j_1}, l_{i_2j_2}, l_{i_3j_3}, l_{i_4j_4}\}$. Como estas retas são duas a duas disjuntas, necessariamente $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Assim a menos de uma reordenação temos $\mathcal{G} = \{l_{1j_1}, l_{2j_2}, l_{3j_3}, l_{4j_4}\}$, além disso, como $j_m \neq j_n$ sendo $m \neq n$, então o resultado segue. □

Observemos que $l_{11} = Z(x_0, x_2)$, $l_{12} = Z(x_0 - x_1, x_2)$, $l_{13} = Z(x_0 - \xi x_1, x_2)$ e $l_{14} = Z(x_0 - \xi^2 x_1, x_2)$. Além disso,

Teorema 2.9. Para cada reta $l \in \mathcal{L}_{p_1}$, verifica-se que existem exatamente 6 planos contendo l . E em cada um desses planos existem exatamente 4 retas da superfície de Schur que são concorrentes.

Demonstração. Consideremos primeiramente a reta l_{11} . Sendo H um plano que contém esta reta, então este é da forma $H = Z(\alpha x_0 - \beta x_2)$, com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Se $\beta \neq 0$ então $H = Z(x_2 - ax_0)$, sendo $a = \frac{\alpha}{\beta}$, caso contrário teremos $H = Z(x_0)$, o qual é denominado plano no infinito e o denotaremos por H_∞ .

Agora intersectando o plano H_∞ com a superfície S , obtemos $H_\infty \cap S = l_{11} \cup C_\infty$, sendo $C_\infty = Z(x_0, x_2 - x_3) \cup Z(x_0, x_2 - \xi x_3) \cup Z(x_0, x_2 - \xi^2 x_3)$, ou seja, a curva residual no plano H_∞ consiste de exatamente 3 retas distintas as quais são l_{21} , l_{31} e l_{41} . Além disso, observe que as retas l_{11} , l_{21} , l_{31} , l_{41} passam pelo ponto $[0 : 1 : 0 : 0]$, assim tal cúbica é do tipo *IV* (veja Tabela A.1 na seção A.5 do Apêndice A).

Vamos agora estudar o plano $H = Z(x_2 - ax_0)$. Observemos que neste caso $l_{11} = Z(x_2 - ax_0, x_0)$, além disso, $H \cap S = l_{11} \cup C_a$, sendo $C_a = Z(-ax_3^3 + (a^4 - 1)x_0^3 + x_3^3)$. Assim, resta então sabermos quais os valores de $a \in \mathbb{C}$ tornam a curva residual singular, ou mais concretamente se esta possui alguma reta como componente irredutível. Ao calcular a hessiana da equação da cúbica residual, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -6(a-1)(a+1)(a-i)(a+i)x_0 & 0 & 0 \\ 0 & 6x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 6ax_3 \end{bmatrix}$$

a qual tem como determinante $\det = 216(a-1)a(a+1)(a-i)(a+i)x_0x_1x_3$, nos possibilitando encontrar os seguintes valores: $a = 0, a = 1, a = -1, a = i, a = -i$,

(os quais tornam a cúbica residual singular). Após a análise de tais valores no plano H , obtemos o resultado, o qual encontra-se na tabela B.1 (no apêndice B), onde nesta $a = \infty$ representa o plano no infinito e P_c o ponto de concorrência.

Desse modo, conseguimos 6 planos contendo a reta l_{11} . Além disso, em cada um deles há mais 3 retas pertencentes a quártica de Schur formando uma cúbica do tipo IV com a reta l_{11} . De modo análogo conseguimos 6 planos contendo a reta l_{12} , l_{13} e l_{14} , respectivamente.

Nas tabelas B.2, B.3 e B.4 (no apêndice B) ilustramos as retas que intersectam as retas l_{12} , l_{13} e l_{14} , bem como o ponto de concorrência P_c , nos possibilitando concluir que a curva residual de cada plano é uma cúbica do tipo IV . Nestas denotamos por H_a , o plano obtido a partir dos pontos singulares da curva residual, sendo estes $a = 0$, $a = 1/\sqrt{3}$, $a = -1/\sqrt{3}$, $a = i/\sqrt{3}$ e $a = -i/\sqrt{3}$, salientamos que o valor $a = \infty$ representa o plano no infinito de cada reta l_{1i} , com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. O que nos permite concluir a demonstração do Teorema. \square

Pelo que acabamos de provar concluímos então que cada uma das retas l_{1j} , com $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ é intersectada por mais 18 outras retas, sendo estas distribuídas em 6 planos distintos. Vale salientar que como as retas l_{11} , l_{12} , l_{13} e l_{14} são coplanares, existe um plano em comum contendo estas (H_a com $a = 0$), totalizando 21 planos. Salientamos ainda que alguns casos foram verificados com auxílio do software Maxima devido a extensão de alguns polinômios, o que apresenta uma certa dificuldade para realizar a fatoração. Além disso, observemos ainda que:

Proposição 2.10. Sendo $H_0 = Z(x_2)$, $H_1 = Z(x_0)$, $H_2 = Z(x_0 - x_1)$, $H_3 = Z(x_0 - \xi x_1)$, (sendo $\xi = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$) e $H_4 = Z(x_0 - \xi^2 x_1)$, (sendo $\xi^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$). E $\Omega(l) = \{H \subset \mathbb{P}^3 \mid H \text{ é o plano contendo } l \text{ e a curva residual de } l \text{ nesse plano é singular}\}$. Temos que,

1. $H_0, H_j \in \Omega(l_{1j})$ para cada $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. $\mathcal{L} = \bigcup_{i=0}^4 \{l \in \phi(S) \mid l \subset H_i\}$.

Demonstração. Para o primeiro item basta observarmos as tabelas B.1, B.2, B.3 e B.4 (no apêndice B) e notar que $l_{1j} = H_0 \cap H_j$, com $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, no que diz respeito a curva residual segue da demonstração do Teorema 2.9. Para o segundo item observemos que $\{l \in \phi(S) \mid l \subset H_0\} = \mathcal{L}_{p_1}$ e $\{l \in \phi(S) \mid l \subset H_i\} = \mathcal{L}_{q_i}$, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. \square

Sejam $\mathcal{U}_1 = \{1, -1, i, -i\}$ e $\mathcal{V}_1 = \{1, \xi, \xi^2\}$ (com $\xi = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$) os conjuntos formados pelas raízes quartas e cúbicas da unidade, respectivamente. Considere as famílias de retas $\mathcal{M}_i \subset \phi(S)$ com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, dadas por:

$$\mathcal{M}_1 = \{m_1(a, b) = \mathbb{P}([(1, 0, a, 0), (0, a^3b, 0, 1)]) \mid (a, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1\}.$$

$$\mathcal{M}_2 = \{m_2(a, b) = \mathbb{P}([\sqrt{3}a^3b, 0, b, -2], (0, \sqrt{3}a^3b, -b, -1)) \mid (a, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1\}.$$

$$\mathcal{M}_3 = \{m_3(a, b) = \mathbb{P}([\sqrt{3}a^3b, 0, b, -2\xi^2], (0, \sqrt{3}a^3b, -\xi b, -1)) \mid (a, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1\}.$$

$$\mathcal{M}_4 = \{m_4(a, b) = \mathbb{P}([\sqrt{3}a^3b, 0, b, -2\xi], (0, \sqrt{3}a^3b, -\xi^2 b, -1)) \mid (a, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1\}.$$

A partir da definição desses conjuntos conseguimos verificar que cada um destes contém exatamente 12 retas, as quais são exatamente as retas encontradas nos planos H_a das tabelas B.1, B.2, B.3 e B.4 (no apêndice B), sendo as retas $a_i, a'_i, a''_i \subset \mathcal{M}_1$, $b_i, b'_i, b''_i \subset \mathcal{M}_2$, $c_i, c'_i, c''_i \subset \mathcal{M}_3$ e $d_i, d'_i, d''_i \subset \mathcal{M}_4$, com $i = 1, 2, 3, 4$. Desse modo, conseguimos encontrar mais 48 retas na superfície de Schur, sendo que estas não pertencem ao conjunto \mathcal{L} . Além disso,

Corolário 2.11. Verifica-se que:

1. $\phi_{l_{1i}}(S) \cap \phi_{l_{1j}}(S) = \{l_{1s} \mid s \in \{1, 2, 3, 4\} - \{i, j\}\}$ se $i \neq j$.
2. $\phi(S) = \hat{\phi}_{l_{11}}(S) \dot{\cup} \hat{\phi}_{l_{12}}(S) \dot{\cup} \hat{\phi}_{l_{13}}(S) \dot{\cup} \hat{\phi}_{l_{14}}(S) \dot{\cup} \mathcal{L}_{p_1}$, sendo $\hat{\phi}_{l_{1j}}(S) = \phi_{l_{1j}}(S) - \mathcal{L}_{p_1}$.
3. $\#\hat{\phi}_{l_{1j}}(S) = 15$ para qualquer $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, $\#\phi(S) = 4 \cdot 15 + 4 = 64$.

Demonstração. Para o item 1 iremos provar apenas uma inclusão, pois a outra é trivial, pelo que já foi provado no Teorema 2.9. Seja $m \in \phi_{l_{1i}}(S) \cap \phi_{l_{1j}}(S)$ com $i \neq j$. Assim pelo item 2 do Lema A.16 (no Apêndice A) temos $m \subset \langle l_{1i}, l_{1j} \rangle$, o que nos permite concluir que $m = l_{1k}$ ou $m = l_{1t}$, sendo $k \neq t$ e $\{k, t\} \cap \{i, j\} = \emptyset$. Daí $\phi_{l_{1i}}(S) \cap \phi_{l_{1j}}(S) = \{l_{1k}, l_{1t}\}$ de modo que $\{1, 2, 3, 4\} = \{i, j, k, t\}$. Para os itens 2 e 3 temos que $\phi_{l_{1i}}(S) = \{m_i(a, b) \mid (a, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1\} \dot{\cup} (\mathcal{L}_{q_i} - \{l_{1i}\}) \dot{\cup} (\mathcal{L}_{p_1} - \{l_{1i}\})$, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Desse modo, $\hat{\phi}_{l_{1i}}(S) = \mathcal{M}_i \dot{\cup} (\mathcal{L}_{q_i} - \{l_{1i}\})$, sendo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. O que nos permite concluir as afirmações destes itens. □

A partir de agora denotaremos por $C = \{c_1 = [0 : 1], c_2 = [1 : 1], c_3 = [\xi : 1], c_4 = [\xi^2 : 1]\} \subset \mathbb{P}^1$, $\Gamma_C = \{\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid \varphi \text{ é uma MCP tal que } \varphi(C) = C\}$ (onde MCP é a forma abreviada de Mudança de Coordenadas Projetivas. Veja Definição A.13 no Apêndice A). Assim sendo, verificamos que

Lema 2.12. Γ_C é um grupo isomorfo a A_4 .

Demonstração. Pela Proposição A.17 (no Apêndice A) já temos que Γ_C é um grupo. Além disso, pela Proposição A.18 (no Apêndice A) temos que $C \cong K$ ou $C \cong D_4$ ou $C \cong A_4$, sendo K o grupo de Klein, D_4 o grupo dihedral e A_4 o grupo das permutações pares de S_4 . Agora considerando a MCP φ tal que $\varphi([x : y]) = [\xi x : y]$ com $T(x, y) = (\xi x, y)$, observemos que Γ_C possui um elemento de ordem 3. Como A_4 é o único grupo da lista K, D_4, A_4 que possui elementos de ordem 3, concluímos que $\Gamma_C \cong A_4$. □

Teorema 2.13. Denotando por $\mathcal{L} = \{l \in \phi(S) \mid l \cap L \neq \emptyset\}$ e sendo $L = Z(x_0, x_1)$. Dada $l \in \mathcal{L}$ existe $\varphi : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ MCP tal que $\varphi(S) = S$ e $\varphi(l) = l_{1k} \in \mathcal{L}$ para algum $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Demonstração. Se $l = l_{1k}$ para algum $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, então podemos considerar $\varphi = id_{\mathbb{P}^3}$. Assim vamos assumir que $l \in \mathcal{L} - \{l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}\}$. Neste caso $l = l_{ij}$ com $i \neq 1$. Pelo Lema A.20 (no Apêndice A) temos que para cada $\psi \in \Gamma_C$ podemos definir uma MCP $\tilde{\psi} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$.

Vamos agora mostrar que $\tilde{\psi}(S) = S$. Para isto vamos assumir que $\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ é determinada por $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ e $[T]^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ na base canônica de \mathbb{C}^2 . Assim

segue do Lema A.20 que $[\tilde{T}]^{-1} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & C & D \end{bmatrix}$ na base canônica de \mathbb{C}^4 .

Tendo em consideração que $S = Z(f)$ com $f = g(x_0, x_1) - g(x_2, x_3)$ com $g(u, v) = u^4 - uv^3$ temos que $\tilde{T}_\bullet f(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(\tilde{T}^{-1}(x_0, x_1, x_2, x_3))$ ¹, então segue-se que:

$$\begin{aligned} f(\tilde{T}^{-1}(x_0, x_1, x_2, x_3)) &= f(Ax_0 + Bx_1, Cx_0 + Dx_1, Ax_2 + Bx_3, Cx_2 + Dx_3) \\ &= g(Ax_0 + Bx_1, Cx_0 + Dx_1) - g(Ax_2 + Bx_3, Cx_2 + Dx_3) \\ &= g(T^{-1}(x_0, x_1)) - g(T^{-1}(x_2, x_3)) \\ &= T_\bullet g(x_0, x_1) - T_\bullet g(x_2, x_3) \\ &= \lambda g(x_0, x_1) - \lambda g(x_2, x_3) = \lambda f(x_0, x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

O que permite concluir a nossa primeira afirmação.

Para a segunda afirmação, primeiramente observamos que como $i \neq 1$, então temos $\{1, 2, 3, 4\} = \{i, 1, i_1, i_2\}$, além disso, $(i1)(i_1i_2) \in A_4$. Sabemos que $A_4 \cong \Gamma_C$, assim considere $\psi \in \Gamma_C$ a única MCP tal que ψ se corresponde com $(i1)(i_1i_2)$. Desse modo, $\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ verifica a seguinte condição: $\psi(c_1) = c_i$, $\psi(c_i) = c1$, $\psi(c_{i_1}) = c_{i_2}$ e $\psi(c_{i_2}) = c_{i_1}$, com $i \neq 1$ fixo. Daí temos $\tilde{\psi} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ satisfaz a seguinte condição:

$$\tilde{\psi}(p_1) = p_i, \tilde{\psi}(p_i) = p_1, \tilde{\psi}(p_{i_1}) = p_{i_2}, \tilde{\psi}(p_{i_2}) = p_{i_1}.$$

Analogamente temos,

$$\tilde{\psi}(q_1) = q_i, \tilde{\psi}(q_i) = q_1, \tilde{\psi}(q_{i_1}) = q_{i_2}, \tilde{\psi}(q_{i_2}) = q_{i_1}.$$

Sendo $p_1, p_i, p_{i_1}, p_{i_2}, q_1, q_i, q_{i_1}, q_{i_2}$ definidos como os p 's e q 's da figura 2.1. Assim, $\tilde{\psi}(p_i) = p_1$ e $\tilde{\psi}(q_j) = q_k$ para todo $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Agora como MCP preservam

¹Se $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ for MCP definida pelo automorfismo linear $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, então $T_\bullet F(x_0, \dots, x_n) = F(T^{-1}(x_0, \dots, x_n))$, para todo F homogêneo em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ de grau d .

retas, concluímos que $\tilde{\psi}(l_{ij}) = l_{\tilde{\psi}(p_i)\tilde{\psi}(q_j)} = l_{p_1q_k} = l_{1k}$ para todo $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. \square

Corolário 2.14. Com as notações na demonstração do Teorema 2.13, denotando $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^4 \mathcal{M}_i$ temos que se $l \in \mathcal{M}$, então $\tilde{\psi}(l) \in \mathcal{M}$.

Demonstração. Sabemos que $\phi(S) = \mathcal{L} \dot{\cup} \mathcal{M}$. Suponhamos que $\tilde{\psi}(l) \notin \mathcal{M}$. Neste caso temos, $\tilde{\psi}(l) = l_{st} \in \mathcal{L}$. Daí segue-se que, $l = (\tilde{\psi})^{-1}(l_{st}) \in \mathcal{L}$, o que é um absurdo. \square

Proposição 2.15. Verifica-se que $r(S) \leq 16$.

Demonstração. Seja $\mathcal{H} \subseteq \phi(S)$ formado por retas duas a duas disjuntas em S . Pelo item 2 do Corolário 2.11 temos que $\phi(S) = \hat{\phi}_{l_{11}}(S) \dot{\cup} \hat{\phi}_{l_{12}}(S) \dot{\cup} \hat{\phi}_{l_{13}}(S) \dot{\cup} \hat{\phi}_{l_{14}}(S) \dot{\cup} \mathcal{L}_{p_1}$, sendo $\hat{\phi}_{l_{1j}}(S) = \phi_{l_{1j}}(S) - \mathcal{L}_{p_1}$. Vamos então considerar dois casos:

Caso 1: $\mathcal{H} \cap \mathcal{L} = \emptyset$

Para este caso primeiramente observemos que $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cap \hat{\phi}_{l_{11}}(S)) \dot{\cup} (\mathcal{H} \cap \hat{\phi}_{l_{12}}(S)) \dot{\cup} (\mathcal{H} \cap \hat{\phi}_{l_{13}}(S)) \dot{\cup} (\mathcal{H} \cap \hat{\phi}_{l_{14}}(S))$. Observemos ainda que, $\sharp(\phi_{l_{1i}}(S) - \mathcal{L}) = 12$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Além disso, estas 12 retas estão distribuídas em 4 planos. De fato, temos exatamente 3 retas em cada um desses planos, as quais não estão no conjunto \mathcal{L} . Assim, podemos escolher no máximo 4 retas duas a duas disjuntas em $\phi_{l_{1i}}(S) - \mathcal{L}$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Daí, segue-se que, $\sharp\mathcal{H} = \sum_{i=1}^4 \sharp\mathcal{H} \cap (\hat{\phi}_{l_{1i}}(S) - \mathcal{L}) \leq 4 \cdot 4 = 16$.

Caso 2: $\mathcal{H} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$

A menos de uma MCP em \mathbb{P}^3 (escolhida como no Teorema 2.13) podemos assumir que $l_{1k} \in \mathcal{H}$ para exatamente um valor de $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, $\mathcal{H} \cap \hat{\phi}_{l_{1k}}(S) = \emptyset$ e $\mathcal{H} \cap \mathcal{L}_{p_1} = \{l_{1k}\}$. Observemos que $\sharp(\mathcal{H} \cap \hat{\phi}_{l_{1j}}(S)) \leq 5$, para todo $j \neq k$, sendo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. De fato, como $\sharp\hat{\phi}_{l_{1j}}(S) = 15$, sendo que essas 15 retas estão distribuídas em 5 planos, e cada um desses planos contém exatamente 3 dessas retas, então podemos escolher no máximo 5 retas duas a duas disjuntas em $\hat{\phi}_{l_{1j}}(S)$.

Assim, $\mathcal{H} = \bigcup_{\substack{j \neq k, \\ 1 \leq j \leq 3}} \mathcal{H} \cap \hat{\phi}_{l_{1j}}(S) \cup \{l_{1k}\}$, daí $\sharp\mathcal{H} = \sum_{\substack{j \neq k, \\ 1 \leq j \leq 3}} \sharp(\mathcal{H} \cap \hat{\phi}_{l_{1j}}(S)) + 1 \leq 5 \cdot 3 + 1 = 16$. Portanto, $r(S) \leq 16$.

\square

Proposição 2.16. Com as notações das famílias \mathcal{M}_i , com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Verifica-se que:

$\mathcal{J} = \{m_1(1, 1), m_1(-1, 1), m_1(i, \xi), m_1(-i, \xi), m_k(1, \xi), m_k(-1, \xi), m_k(i, 1), m_k(-i, 1)\}_{k \in \{2, 3, 4\}}$ é constituído por 16 retas duas a duas disjuntas.

Desse modo, concluímos que $r(S) = 16$. Para mais detalhes sobre a interseção das retas na superfície de Schur contidas nos conjuntos $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ e \mathcal{M}_4 listados acima, confira as tabelas B.5, B.6, B.7 e B.8 (no apêndice B) nas quais os dados foram computados com o auxílio do software Maxima. Salientamos que nestas o valor 0 representa a disjunção entre retas e o valor 1 significa a interseção entre estas.

2.3 A quártica não singular geral

Usando métodos de geometria algébrica moderna em 1975 Viacheslav Valentinovich Nikulin mostrou no artigo “*On Kummer surfaces*” que toda superfície quártica não singular contém no máximo 16 retas duas a duas disjuntas, assim, $r_4 \leq 16$. Desse modo, tendo em consideração a Proposição 2.16 concluímos que $r_4 = 16$.

Nesse momento surge então a seguinte indagação: é possível determinar a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas em superfícies de grau $d \geq 5$? Se sim, qual seria esse valor? A verdade é que para grau $d \geq 5$ este valor ainda é desconhecido, o que se sabe é que existe uma cota superior para a quantidade de retas duas a duas disjuntas para tal grau. Com estas indagações em mente iremos explorar no próximo capítulo algumas famílias de superfícies com o objetivo de obter cotas inferiores para r_d , se $d \geq 5$.

Capítulo 3

Estudo de r_d para $d \geq 5$

Usando conceitos de geometria algébrica moderna como classes de Chern, divisor canônico, etc. Yorchu Miyaoka em 1984 a partir da Proposição 2.1.1 no artigo “*The Maximal Number of Quotient Singularities on Surfaces with given Numerical Invariants*” concluiu (na pág. 162 em [9]) que se $S \subseteq \mathbb{P}^3$ for uma superfície de grau $d \geq 4$ não singular, então $r(S) \leq 2d(d-2)$. Assim, $r_d \leq 2d(d-2)$ para todo $d \geq 4$.

Note que $r_4 \leq 16$. Assim essa cota é a mesma que Nikulin obteve em 1975. De fato, o valor de r_d é desconhecido para $d \geq 5$. Assim, o objetivo deste capítulo é obter cotas inferiores para r_d ao estudar algumas famílias de superfícies não singulares de grau $d \geq 5$.

3.1 Família de superfícies de Fermat

Seja $\mathcal{F} = \{F_d = Z(x_0^d + x_1^d + x_2^d + x_3^d) \mid d \geq 1\}$, a família de superfícies de Fermat. Para o nosso estudo iremos focar no caso em que $d \geq 3$, vale salientar que a prova de alguns resultados será omitida devido ao fato de ser análoga para o caso $d = 4$, o qual foi visto no capítulo anterior. Assim como foi feito para o caso $d = 4$ escolha $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^d = -1$ e $\xi \in \mathbb{C}$ raiz primitiva d -ésima da unidade e considere $\mathcal{U} = \{\omega, \omega\xi, \omega\xi^2, \dots, \omega\xi^{d-1}\}$.

Notemos que $\phi(x, y) = x^d + y^d = (x - \omega y)(x - \omega\xi y) \dots (x - \omega\xi^{d-1}y)$. Consideremos então

$$\mathcal{L}_1 = \{l_1(a, b) = Z(x_0 - ax_1, x_2 - bx_3) \mid a, b \in \mathcal{U}\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{l_2(a, b) = Z(x_0 - ax_2, x_1 - bx_3) \mid a, b \in \mathcal{U}\}$$

$$\mathcal{L}_3 = \{l_3(a, b) = Z(x_0 - ax_3, x_1 - bx_2) \mid a, b \in \mathcal{U}\}.$$

Teorema 3.1. *Com as notações acima. Temos que:*

1. $\mathcal{L}_i \subset \phi(F_d)$ e $\#\mathcal{L}_i = d^2$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

3. Estudo de r_d para $d \geq 5$

2. $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

3. $\phi(F_d) = \mathcal{L}_1 \dot{\cup} \mathcal{L}_2 \dot{\cup} \mathcal{L}_3$.

Demonstração. Os itens 1 e 2 provam-se de modo análogo ao caso $d = 4$ (veja Teorema 2.1). Para a prova do item 3 iremos considerar a estratificação E_6, \dots, E_1 de $G_2(\mathbb{C}^4)$. Observemos que $[0 : 0 : 0 : 1]$ pertence a todas as retas nos estratos E_6, E_5 e E_3 , mas $[0 : 0 : 0 : 1] \notin F_d$. Portanto, não existem retas contidas em F_d nesses estratos. Analisemos agora os demais estratos, considerando $l = \mathbb{P}(W)$, sendo $W \in E_1 \dot{\cup} E_2 \dot{\cup} E_4$:

Estrato E_4 :

Neste estrato temos que $W = [(0, 1, 0, \alpha), (0, 0, 1, \beta)]$, assim os pontos da reta l são da forma $[0 : u : v : \alpha u + \beta v]$ e $l \subset F_d$ se, e somente se, $u^d + v^d + (u\alpha + v\beta)^d = 0$ para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. Daí obtemos que $u^d + v^d + \alpha^d u^d + \beta^d v^d + \sum_{k=1}^{d-1} \binom{d}{k} u^k \alpha^k v^{d-k} \beta^{d-k} = 0$ para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. O que nos possibilita obter o seguinte sistema

$$\begin{cases} 1 + \alpha^d = 0 \\ 1 + \beta^d = 0 \\ \alpha^k \beta^{d-k} = 0 \end{cases}$$

para todo $1 \leq k \leq d-1$, o qual não possui solução.

Estrato E_2 :

Para este estrato, observemos que $W \in E_2$, se, e somente se, $W = [(1, \alpha, 0, \beta), (0, 0, 1, \gamma)]$. Desse modo, $l = \{[u : \alpha u : v : \beta u + \gamma v] \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$, daí temos $l \subset F_d$ se, e somente se, $(1 + \alpha^d + \beta^d)u^d + (1 + \gamma)v^d + \sum_{k=1}^{d-1} \binom{d}{k} \beta^k \gamma^{d-k} u^k v^{d-k} = 0$. Nos permitindo obter o sistema abaixo

$$\begin{cases} 1 + \alpha^d + \beta^d = 0 \\ 1 + \gamma^d = 0 \\ \beta^k \gamma^{d-k} = 0 \end{cases}$$

para qualquer $1 \leq k \leq d-1$. Observando a última equação do sistema temos que $\gamma = 0$ ou $\beta = 0$. Sendo $\gamma = 0$, teremos $1 = 0$, o que é um absurdo, já para o caso em que $\beta = 0$ obtemos d^2 retas. De fato, uma vez que $\beta = 0$ temos $l = \mathbb{P}([(1, \alpha, 0, 0), (0, 0, 1, \gamma)]) = Z(\alpha x_0 - x_1, \gamma x_2 - x_3) = Z(x_0 - (-\alpha^{d-1})x_1, x_2 - (-\gamma^{d-1})x_3)$, além disso, observemos que $-\alpha^{d-1}, -\gamma^{d-1} \in \mathcal{U}$ e $l \in \mathcal{L}_1$.

Estrato E_1 :

Para o estrato E_1 temos que $l = \{[u : v : \alpha u + \gamma v : \beta u + \delta v] \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$. De modo análogo ao que fizemos nos casos anteriores, temos $l \subset F_d$ se, e somente se,

o seguinte sistema tem solução

$$\begin{cases} 1 + \alpha^d + \beta^d & = 0 \\ 1 + \gamma^d + \delta^d & = 0 \\ \alpha^k \gamma^{d-k} + \beta^k \delta^{d-k} & = 0 \end{cases}$$

para todo $1 \leq k \leq d-1$. Vamos então, considerar dois casos:

Caso 1: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são todos não nulos.

Observando a última igualdade do sistema acima, temos que sendo $k = 1$, então $\alpha\gamma^{d-1} = -\beta\delta^{d-1}$ o que nos possibilita obter a seguinte igualdade $\frac{\alpha}{\beta} = -\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{d-1}$. Elevando ambos os membros dessa última igualdade ao quadrado obtemos $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{2d-2}$ (3). Agora sendo $k = 2$ da última igualdade do mesmo sistema obtemos $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = -\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{d-2}$ (4). Igualando (3) e (4) obtemos $\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{2d-2} = -\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{d-2}$ (5), multiplicando ambos os membros de (5) por $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{d-2}$, obtemos $\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^d = -1$, o que nos fornece $\delta^d + \gamma^d = 0$, o que é um absurdo.

Caso 2: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ algum deles é nulo.

Primeiramente suponhamos $\alpha = 0$, observando a última equação do sistema acima temos $\beta\delta = 0$, mas se $\beta = 0$ o sistema não terá solução. Assim, admitindo que $\delta = 0$ conseguimos encontrar d^2 retas, sendo todas pertencentes ao conjunto \mathcal{L}_3 . De fato, sendo $\alpha = 0$ e $\delta = 0$, então $l = \mathbb{P}(W) = ((1, 0, 0, \beta), (0, 1, \gamma, 0)) = Z(x_0 - (-\beta^{d-1})x_3, x_1 - (-\gamma^{d-1})x_2)$.

Agora vamos verificar para o caso em que $\gamma = 0$. Observemos que neste caso δ não pode ser nulo, assim admitindo $\beta = 0$ conseguimos encontrar mais d^2 retas, estando estas em \mathcal{L}_2 . De fato, neste caso $l = \mathbb{P}([(1, 0, \alpha, 0), (0, 1, 0, \delta)]) = Z(x_0 - (-\alpha^{d-1})x_2, x_1 - (-\delta^{d-1})x_3)$.

Verificamos que os casos em que $\beta = 0$ e $\delta = 0$ satisfaz as mesmas condições dos casos $\gamma = 0$ e $\alpha = 0$ respectivamente, isto é, sendo $\beta = 0$ conseguimos d^2 retas em \mathcal{L}_2 , e sendo $\delta = 0$ encontramos d^2 retas em \mathcal{L}_3 .

□

Pelo que acabamos de provar podemos concluir que:

Corolário 3.2. $\#\phi(S) = 3d^2$.

De modo análogo ao que fizemos para o caso em que $d = 4$, com as notações acima podemos considerar o seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Verifica-se que:*

1. $l_i(a, b) \cap l_i(a', b') = \emptyset$ se, e somente se, $a \neq a'$ e $b \neq b'$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. $l_1(a, b) \cap l_2(a', b') = \emptyset$ se, e somente se, $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$.
3. $l_1(a, b) \cap l_3(a', b') = \emptyset$ se, e somente se, $ab \neq \frac{a'}{b'}$.
4. $l_2(a, b) \cap l_3(a', b') = \emptyset$ se, e somente se, $ab \neq a'b'$.
5. O número máximo de retas duas a duas disjuntas em \mathcal{L}_i é d .

Demonstração. Os itens de 1 a 4 provam-se de modo análogo ao feito para o caso $d = 4$ (veja Proposição 2.2). Para o item 5 basta observarmos que as retas em \mathcal{L}_i são parametrizadas por $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_1$. Assim, podemos representar os pares de $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_1$ que parametrizam as retas em \mathcal{L}_i como o arranjo abaixo

$$\begin{bmatrix} (\omega, \omega) & (\omega, \xi\omega) & \dots & (\omega, \xi^{d-1}\omega) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (\xi^{d-1}\omega, \omega) & (\xi^{d-1}\omega, \xi\omega) & \dots & (\xi^{d-1}\omega, \xi^{d-1}\omega) \end{bmatrix}.$$

Segue do item (1) deste Teorema que a escolha das retas que são disjuntas da reta $l_i(a, b)$ são determinadas ao deletar a linha e a coluna na posição onde encontra-se (a, b) . Como, no máximo podemos deletar $(d - 1)$ linhas e colunas, o que implica que podemos escolher no máximo d retas duas a duas disjuntas em \mathcal{L}_i . \square

Corolário 3.4. Verifica-se que $2d \leq r(F_d) \leq 3d$, para todo $d \geq 3$.

Demonstração. Como $\phi(F_d) = \mathcal{L}_1 \dot{\cup} \mathcal{L}_2 \dot{\cup} \mathcal{L}_3$, concluímos que se $\mathcal{K} \subset \phi(F_d)$ for constituído por retas duas a duas disjuntas, então $\#\mathcal{K} = \sum_{i=1}^3 \#(\mathcal{K} \cap \mathcal{L}_i) \leq 3d$. Daí segue-se que, $r(F_d) \leq 3d$. Resta-nos agora provar que $2d \leq r(F_d)$ sendo $d \geq 3$. Para isso iremos considerar os casos em que d é par e d é ímpar.

Se d for par considere $\mathcal{N}_1 = \{l_1(a, a) \in \mathcal{L}_1 \mid a \in \mathcal{U}\}$. Observe que a partir do item (1) do Teorema 3.3 temos que \mathcal{N}_1 é constituído por d retas duas a duas disjuntas. Notemos também que a partir do item (2) deste mesmo Teorema temos que $l_1(a, a) \cap l_2(a', b') = \emptyset \Leftrightarrow a' \neq b'$. Considere agora $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{L}_2$ definido da seguinte forma $\mathcal{N}_2 = \{l_2(\omega, \xi\omega), l_2(\xi\omega, \omega), l_2(\xi^2\omega, \xi^3\omega), l_2(\xi^3\omega, \xi^2\omega), \dots, l_2(\xi^{d-2}\omega, \xi^{d-1}\omega), l_2(\xi^{d-1}\omega, \xi^{d-2}\omega)\}$. Considerando os itens (1) e (2) do Teorema 3.3 podemos verificar que as retas em $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ são duas a duas disjuntas. Assim, obtemos $2d$ retas duas a duas disjuntas se d for par.

Agora sendo d ímpar considere $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{L}_1$ definido da seguinte forma $\mathcal{G}_1 = \{l_1(\omega, \xi\omega), l_1(\xi\omega, \omega), l_1(\xi^2\omega, \xi^3\omega), l_1(\xi^3\omega, \xi^2\omega), \dots, l_1(\xi^{d-3}\omega, \xi^{d-2}\omega), l_1(\xi^{d-2}\omega, \xi^{d-3}\omega),$

$l_1(\xi^{d-1}\omega, \xi^{d-1}\omega)\}$ com $\omega = -1$. Novamente pelo item (1) do Teorema 3.3 temos que \mathcal{G}_1 possui d retas duas a duas disjuntas. Seja $\mathcal{U}_d = \{1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{d-1}\}$, o conjunto das raízes d -ésimas da unidade e $\mathcal{U}' = \{ab \in \mathcal{U}_d \mid l_1(a, b) \in \mathcal{G}_1\}$. Notemos que $\#\mathcal{U}' \leq \frac{d-1}{2} + 1 = \frac{d+1}{2}$ e $d - \frac{(d+1)}{2} \geq 1$, se $d \geq 3$.

A seguir escolha $\xi^{i_0} \in \mathcal{U}_d - \mathcal{U}'$ e considere $\mathcal{G}_3 = \{l_3(-\eta\xi^{i_0}, -\eta) \in \mathcal{L}_3 \mid \eta \in \mathcal{U}_d\}$. Ainda considerando o item (1) do Teorema 3.3 concluímos que \mathcal{G}_3 possui d retas duas a duas disjuntas e do item (3) do Teorema 3.3 que $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_3$ é constituído por $2d$ retas duas a duas disjuntas. O que permite concluir a nossa desigualdade. \square

3.2 Família de superfícies de Rams

Nesta seção, temos como principal objetivo estudar a família de superfícies $\{R_d\}$ de grau $d \geq 1$ em \mathbb{P}^3 , sendo R_d definida pelo seguinte polinômio

$$f = x_0^{d-1}x_1 + x_1^{d-1}x_2 + x_2^{d-1}x_3 + x_3^{d-1}x_0.$$

Lema 3.5. A superfície R_d é não singular para todo $d \neq 2$.

Demonstração. Se $d = 1$ então temos que R_1 é um plano, assim R_1 é não singular. Agora assuma que $d \geq 2$. Derivando f parcialmente e igualando a zero temos,

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \partial_0 f = x_3^{d-1} + (d-1)x_0^{d-2}x_1 = 0 & (1)' \quad x_3^{d-1} = -(d-1)x_0^{d-2}x_1 \\ (2) \quad \partial_1 f = x_0^{d-1} + (d-1)x_1^{d-2}x_2 = 0 & (2)' \quad x_0^{d-1} = -(d-1)x_1^{d-2}x_2 \\ (3) \quad \partial_2 f = x_1^{d-1} + (d-1)x_2^{d-2}x_3 = 0 & (3)' \quad x_1^{d-1} = -(d-1)x_2^{d-2}x_3 \\ (4) \quad \partial_3 f = x_2^{d-1} + (d-1)x_3^{d-2}x_0 = 0 & (4)' \quad x_2^{d-1} = -(d-1)x_0x_3^{d-2} \end{array} \Leftrightarrow$$

Seja $P = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ uma solução desse sistema. Observemos que se $x_i = 0$ para algum $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ então $x_j = 0$ para todo $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Assim vamos assumir que $x_i \neq 0$ para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Multiplicando (4) por x_3 obtemos $x_2^{d-1}x_3 + (d-1)x_0x_3^{d-1} = 0$. Substituindo (1)' na última igualdade obtida temos $x_2^{d-1}x_3 - (d-1)^2x_0^{d-1}x_1 = 0$ (5). Agora substituindo (2)' em (5), temos $x_2^{d-1}x_3 + (d-1)^3x_1^{d-1}x_2 = 0$ (6). Finalmente substituindo (3)' em (6), concluímos que $x_2^{d-1}x_3 - (d-1)^4x_2^{d-1}x_3 = 0 \Leftrightarrow (1 - (d-1)^4)x_2^{d-1}x_3 = 0 \Leftrightarrow (d-1)^4 = 1$. Sendo que $d = 2$ é a única solução natural de $(d-1)^4 = 1$. Portanto, $Sing(R_d) = \emptyset$ se $d \neq 2$. \square

Proposição 3.6. Seja $S \subseteq \mathbb{P}^3$ uma superfície não singular de grau d . Assuma que $L, M \in \phi(S)$ e $L \cap M = \emptyset$. Então, $\phi_L(S) \cap \phi_M(S)$ consiste de retas duas a duas disjuntas, se $\#\phi_L(S) \cap \phi_M(S) \geq 2$.

3. Estudo de r_d para $d \geq 5$

Demonstração. Suponha que $\#(\phi_L(S) \cap \phi_M(S)) \geq 2$. Considere $l, m \in \phi_L(S) \cap \phi_M(S)$, com $l \neq m$. Suponhamos que $l \cap m \neq \emptyset$. Assim, l e m geram um plano, isto é, $\langle l, m \rangle$ é um plano. Uma vez que, $L, M \subset S$, então segue-se que $L, M \subset \langle l, m \rangle$, o que é um absurdo. \square

Considere agora $L_1 = Z(x_0, x_2)$ e $L_2 = Z(x_1, x_3)$. Note que

$$L_1 = \{[0 : 0 : 0 : 1]\} \cup \{[0 : 1 : 0 : \alpha] \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \quad (3.1)$$

e

$$L_2 = \{[0 : 0 : 1 : 0]\} \cup \{[1 : 0 : \beta : 0] \mid \beta \in \mathbb{C}\}. \quad (3.2)$$

Teorema 3.7. *Com as notações acima. Verifica-se que:*

- (1) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ e $L_i \in \phi(R_d)$ para $i = 1, 2$.
- (2) $\#(\phi_{L_1}(R_d) \cap \phi_{L_2}(R_d)) = d(d-2) + 2$ para todo $d \geq 3$.
- (3) $\#\phi(R_4) = 52$.
- (4) $\phi(R_d) = \phi_{L_1}(R_d) \cap \phi_{L_2}(R_d) \cup \{L_1, L_2\}$ se $d \geq 5$.

Demonstração. (1) É uma verificação direta a partir das equações que determinam L_1, L_2 e R_d .

- (2) Seja $l \subset R_d$ uma reta que intersecta L_1 e L_2 . Tendo em consideração (3.1) e (3.2) temos 4 casos a considerar:

Caso 1: $l = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)]) = Z(x_0, x_1)$

Neste caso o ponto $p = [0 : 0 : 1 : 1] \in l$, mas $p \notin R_d$, logo $l \not\subset R_d$.

Caso 2: $l = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (1, 0, \beta, 0)])$ para algum $\beta \in \mathbb{C}$.

Para este caso, se $p \in l$ então $p = [v : 0 : \beta v : u]$, com $[u : v] \in \mathbb{P}^1$, daí temos $l \subset R_d$ se, e somente se, $v^{d-1}\beta^{d-1}u + u^{d-1}v = 0$ para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. O que nos possibilita chegar na igualdade $1 = 0$, o que é um absurdo. Logo $l \not\subset R_d$.

Caso 3: $l = \mathbb{P}([(0, 1, 0, \alpha), (0, 0, 1, 0)])$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$.

A verificação desde caso dá-se de modo análogo ao caso 2, nos possibilitando chegar ao mesmo absurdo.

Caso 4: $l = \mathbb{P}([(0, 1, 0, \alpha), (1, 0, \beta, 0)])$ para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Observemos que se $p \in l$, então $p = [v : u : \beta v : \alpha u]$ com $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. Assim, $l \subset R_d$ se, e somente se, $uv^{d-1} + \beta u^{d-1}v + \alpha\beta^{d-1}uv^{d-1} + \alpha^{d-1}u^{d-1}v = 0$ para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. Nos dando o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 1 + \alpha\beta^{d-1} & = & 0 \\ \beta + \alpha^{d-1} & = & 0 \end{cases} .$$

Da segunda equação temos $\beta = -\alpha^{d-1}$. Substituindo esse valor na primeira equação e em seguida multiplicando por $(-1)^{d-1}$ obtemos,

$$\begin{cases} \alpha^{d(d-2)+2} & = & (-1)^d \\ \beta & = & -\alpha^{d-1} \end{cases} .$$

Note que neste sistema existem $d(d-2) + 2$ soluções da equação $\alpha^{d(d-2)+2} = (-1)^d$ (isto para cada d). Assim, obtemos as retas $L_\alpha = \mathbb{P}([(0, 1, 0, \alpha), (1, 0, -\alpha^{d-1}, 0)])$ com α solução de $\alpha^{d(d-2)+2} = (-1)^d$. Portanto, $\sharp(\phi_{L_1}(R_d) \cap \phi_{L_2}(R_d)) = d(d-2) + 2$. Além disso, pela Proposição 3.6 temos que estas $d(d-2) + 2$ retas são duas a duas disjuntas.

- (3) Para a prova deste item iremos utilizar a estratificação E_6, \dots, E_1 de $G_2(\mathbb{C}^4)$. Salientamos que após alguns cálculos verificamos que nos estratos E_6, E_4 e E_3 não há retas. Já nos estratos E_5 e E_2 há exatamente uma reta em cada um deles, sendo estas $L_1 = Z(x_0, x_2)$ e $L_2 = Z(x_1, x_3)$, respectivamente. Vamos agora verificar o estrato E_1 .

Sabemos que neste estrato, uma reta l é dada pela projetivização do seguinte subespaço $[(1, 0, \alpha, \beta), (0, 1, \gamma, \delta)]$ para algum $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Note que os pontos $[1 : 0 : \alpha : \beta]$, $[0 : 1 : \gamma : \delta] \in l$ e para que estes estejam em R_4 se faz necessário que as seguintes equações sejam satisfeitas:

$$\beta(\alpha^3 + \beta^2) = 0 \tag{3.3}$$

e

$$\gamma(1 + \gamma^2\delta) = 0 \tag{3.4}$$

Vamos então dividir as soluções destas equações em quatro conjuntos distintos, vejamos:

I'	II'
$\beta = 0$ $\gamma = 0$	$\beta = 0$ $\gamma \neq 0$
III'	IV'
$\beta \neq 0$ $\gamma = 0$	$\beta \neq 0$ $\gamma \neq 0$

Figura 3.1: Quatro conjuntos distintos que estratificam E_1 .

Conjunto I' : Neste conjunto, temos $l = \mathbb{P}([(1, 0, \alpha, 0), (0, 1, 0, \delta)])$. Assim, um ponto p em l é da forma $p = [u : v : \alpha u : \delta v]$ para $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. Desse modo, $l \subset R_4$ se, e somente se, $u^3v + \alpha uv^3 + \alpha^3 \delta u^3v + \delta^3 uv^3 = 0$. De onde concluímos que $\alpha + \delta^3 = 0$ e $1 + \alpha^3 \delta = 0$, o que nos permite encontrar 10 retas em R_4 .

Conjunto II' : Pela equação (3.4) temos $\delta = -\frac{1}{\gamma^2}$. Assim, $l = \mathbb{P}([(1, 0, \alpha, 0), (0, 1, \gamma, -\frac{1}{\gamma^2})])$. Realizando uma mudança de base temos, $l = \mathbb{P}([(1, 0, \alpha, 0), (0, \gamma^2, \gamma^3, -1)])$. Assim, $l \subset R_4$ se, e somente se, $\gamma^2 u^3 v + \alpha \gamma^6 uv^3 + \gamma^9 v^4 + (\alpha u + \gamma^3 v)^3 (-v) - uv^3 = 0$. Daí obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \gamma^2 - \alpha^3 = 0 \\ -2\alpha\gamma^6 - 1 = 0 \\ -3\alpha^2\gamma^3 = 0 \end{cases} .$$

Como $\gamma \neq 0$, então pela última equação do sistema temos $\alpha = 0$, o que é um absurdo ao considerar a segunda equação. Portanto, neste conjunto não há retas.

Conjunto III' : Neste caso temos que $l = \mathbb{P}([(1, 0, \alpha, \beta), (0, 1, 0, \delta)])$. Assim sendo $p \in l$, então $p = [u : v : \alpha u : \beta u + \delta v]$. Daí, $l \subset R_4$ se, e somente se, $u^3v + \alpha uv^3 + \alpha^3 u^3(\beta u + \delta v) + (\beta u + \delta v)^3 u = 0$, o que nos permite obter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 + \alpha^3 \delta + 3\beta^2 \delta = 0 \\ \alpha + \delta^3 = 0 \\ \alpha^3 \beta + \beta^3 = 0 \\ 3\beta \delta^2 = 0 \end{cases} .$$

Pela última equação temos $\delta = 0$, substituindo este valor na primeira

equação teremos o absurdo de que $1 = 0$. Portanto, não há retas neste conjunto.

Conjunto IV': Para este conjunto, observemos que sendo $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$ então $\alpha \neq 0$ e $\delta \neq 0$. Assim, $l = \mathbb{P}([(1, 0, \alpha, \beta), (0, \gamma^2, \gamma^3, -1)])$ com $\alpha^3 + \beta^2 = 0$. Desse modo, após alguns cálculos chegamos a conclusão de que $l \subset R_d$ se, e somente se, o seguinte sistema é satisfeito:

$$\begin{cases} \gamma^2 + 3\alpha^2\beta\gamma^3 - \alpha^3 - 3\beta^2 = 0 \\ -2\alpha\gamma^6 + \beta\gamma^9 - 1 = 0 \\ \alpha^3\beta + \beta^3 = 0 \\ 3\alpha\beta\gamma^6 - 3\alpha^2\gamma^3 + 3\beta = 0 \end{cases}.$$

Com o auxílio do software Maxima conseguimos obter 40 soluções para este sistema. Portanto, a superfície quártica de Rams possui exatamente $2 + 10 + 40 = 52$ retas.

- (4) Para a prova deste item primeiramente consideremos $L_1 = Z(x_0, x_2), H_1 = Z(x_0)$ e $H_2 = Z(x_2)$ planos contendo L_1 . Note que:

$$\begin{aligned} H_1 \cap R_d &= Z(x_0, x_1^{d-1}x_2 + x_2^{d-1}x_3) \\ &= Z(x_0, x_2(x_1^{d-1} + x_2^{d-2}x_3)) \\ &= Z(x_0, x_2) \cup Z(x_0, x_1^{d-1} + x_2^{d-2}x_3) \\ &= L_1 \cup C_1 \end{aligned}$$

sendo C_1 a curva residual no plano H_1 . Analogamente temos, $H_2 \cap R_d = Z(x_2, x_0) \cup Z(x_2, x_0^{d-2}x_1 + x_3^{d-1}) = L_1 \cup C_2$, sendo C_2 a curva residual no plano H_2 .

Vamos agora dividir as retas $l \subset R_d$ em 4 conjuntos disjuntos, vejamos

I	II
$l \cap L_1 \neq \emptyset$	$l \cap L_1 = \emptyset$
$l \cap L_2 = \emptyset$	$l \cap L_2 \neq \emptyset$
$l \cap L_1 \neq \emptyset$	$l \cap L_1 = \emptyset$
$l \cap L_2 \neq \emptyset$	$l \cap L_2 = \emptyset$
III	IV

Figura 3.2: Quatro conjuntos disjuntos que estratificam $\phi(R_d)$.

Primeiramente lembremos que $L_1 = \{[0 : 0 : 0 : 1]\} \cup \{[0 : 1 : 0 : \alpha] \mid \alpha \in$

\mathbb{C} e $L_2 = \{[x_0 : 0 : x_2 : 0] \mid [x_0 : x_2] \in \mathbb{P}^1\}$. Iniciaremos nossa análise no conjunto I . Seja l uma reta em R_d tal que $l \cap L_1 \neq \emptyset$ e $l \cap L_2 = \emptyset$. Assim, $l = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (a, b, c, d)])$ ou $l = \mathbb{P}([(0, 1, 0, \alpha), (a, b, c, d)])$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$. Tendo em vista o fato de que $l \cap L_2 = \emptyset$, obtemos $l = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (a, 1, c, 0)])$ ou $l = \mathbb{P}([(0, 1, 0, \alpha), (a, 0, c, 1)])$. Desse modo, temos dois casos a considerar:

Caso 1: $l = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (a, 1, c, 0)])$

Neste caso, se $p \in l$ então $p = [av : v : cv : u]$ com $[u : v] \in \mathbb{P}^1$, daí $l \subset R_d$ se, e somente se, $a^{d-1}v^d + cv^d + c^{d-1}uv^{d-1} + au^{d-1}v = 0$ para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. O que nos possibilita encontrar como resultado $a = c = 0$. Logo, $l = L_1$.

Caso 2: $l = \mathbb{P}([(0, 1, 0, \alpha), (a, 0, c, 1)])$

Para este caso, se $p \in l$, então p é da forma $[au : u : cv : \alpha u + v]$ com $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. Desse modo, $l \subset R_d$ se, e somente se, $(a^{d-1} + a\alpha^{d-1})u^d + c^{d-1}v^d + cu^{d-1}v + (\alpha c^{d-1} + a)uv^{d-1} + \sum_{k=1}^{d-2} \binom{d-1}{k} (\alpha u)^k v^{d-1-k} au = 0$, daí obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{d-1} + a\alpha^{d-1} = 0 \\ c^{d-1} = 0 \\ \alpha c^{d-1} + a = 0 \\ c + a\alpha^{d-2} = 0 \\ a\alpha_{1 \leq k \leq d-3}^k = 0 \end{array} \right.$$

Da segunda e terceira equação do sistema acima obtemos $a = c = 0$, assim $l = \mathbb{P}((0, 1, 0, \alpha), (0, 0, 0, 1))$. Daí temos, $l = L_1$.

Salientamos que ao verificar o conjunto II , temos que $l = L_2$. A verificação para este conjunto dá-se de modo análogo ao que foi feito para o conjunto I , assim iremos omití-la. No que diz respeito ao conjunto III basta considerar o segundo item deste Teorema.

Para o conjunto IV , primeiramente observemos que como $l \cap L_1 = \emptyset$, então $l \not\subset H_i$, para $i = 1, 2$. Além disso, temos necessariamente que $l \cap C_1 \neq \emptyset$ e $l \cap C_2 \neq \emptyset$, sendo C_1, C_2 as curvas residuais encontradas anteriormente. De fato, temos que $\{l \subset R_d \mid l \cap L_i = \emptyset, i = 1, 2\} \subseteq \{l \subset R_d \mid l \cap C_i \neq \emptyset, i = 1, 2\}$. Note que $C_1 = \{[0 : 0 : 0 : 1]\} \cup \{[0 : \alpha : 1 : -\alpha^{d-1}] \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$. De fato, sendo $p = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ temos que $p \in C_1$ se, e somente se, $x_0 = 0$ e $x_1^{d-1} + x_2^{d-2}x_3 = 0$. Observemos então os seguintes casos:

Caso 2.1: $x_2 = 0$

Para este caso obtemos o ponto $p = [0 : 0 : 0 : 1]$.

Caso 2.2: $x_2 \neq 0$

Neste caso temos que $p = [0 : x_1 : x_2 : x_3] \in C_1$ se, e somente se, $x_1^{d-1} + x_2^{d-2}x_3 = 0$. Dividindo tal equação por x_2^{d-1} , obtemos $(\frac{x_1}{x_2})^{d-1} + \frac{x_3}{x_2} = 0$. Agora dividindo as coordenadas de p por x_2 e denotando por $\alpha = \frac{x_1}{x_2}$, da última igualdade obtida temos $p = [0 : \alpha : 1 : -\alpha^{d-1}]$. Logo, $C_1 = \{[0 : 0 : 0 : 1]\} \cup \{[0 : \alpha : 1 : -\alpha^{d-1}] \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$.

De modo análogo, temos $C_2 = \{[0 : 1 : 0 : 0]\} \cup \{[1 : -\beta^{d-1} : 0 : \beta] \mid \beta \in \mathbb{C}\}$. A seguir vamos considerar $l \subset R_d$ tal que $l \cap C_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$. Pelo que provamos acima, teremos 4 casos a considerar, vejamos:

Caso 1: $l = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)])$

Note que, neste caso $l = Z(x_0, x_2)$, isto é, $l = L_1$. O que não pode acontecer, pois no conjunto em questão (conjunto IV) $l \cap L_i = \emptyset$, com $i = 1, 2$.

Caso 2: $l = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (1, -\beta^{d-1}, 0, \beta)])$ para algum $\beta \in \mathbb{C}$.

Neste caso, temos $l \subset R_d$ se, e somente se, $u^{d-1}v + \sum_{k=1}^{d-2} \binom{d-1}{k} \beta^{d-1-k} v^{d-k} u^k = 0$, com $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. O que nos possibilita encontrar o absurdo de que $1 = 0$.

Caso 3: $l = \mathbb{P}([(0, \alpha, 1, -\alpha^{d-1}), (0, 1, 0, 0)])$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$.

De modo análogo ao caso anterior chegamos ao mesmo absurdo.

Até o presente momento vimos que os subespaços $[(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)]$, $[(0, 0, 0, 1), (1, -\beta^{d-1}, 0, \beta)]$, $[(0, \alpha, 1, -\alpha^{d-1}), (0, 1, 0, 0)]$ não determinam retas em R_d . Vamos agora verificar o último caso.

Caso 4: $l = \mathbb{P}([(0, \alpha, 1, -\alpha^{d-1}), (1, -\beta^{d-1}, 0, \beta)])$ para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Neste caso temos $l \subset R_d$ se, e somente, $\alpha uv^{d-1} + (-1)^{d-1} \beta^{(d-1)^2} uv^{d-1} + \beta u^{d-1} v + (-1)^{d-1} \alpha^{(d-1)^2} u^{d-1} v + \sum_{k=1}^{d-2} \binom{d-1}{k} \alpha^k (-1)^{d-1-k} \beta^{(d-1)(d-1-k)} u^{k+1} v^{d-1-k} + \sum_{k=1}^{d-2} \binom{d-1}{k} (-1)^k \alpha^{(d-1)k} \beta^{d-1-k} u^k v^{d-k} = 0$. Denotando $j = k+1$ obtemos,

$$\begin{cases} \alpha + (-1)^{d-1} \beta^{(d-1)^2} - (d-1) \alpha^{d-1} \beta^{d-2} = 0 \\ \beta + (-1)^{d-1} \alpha^{(d-1)^2} - (d-1) \alpha^{d-2} \beta^{d-1} = 0 \\ \binom{d-1}{j-1} \alpha^{j-1} (-1)^{d-j} \beta^{(d-1)(d-j)} + \binom{d-1}{j} (-1)^j \alpha^{(d-1)j} \beta^{d-1-j} = 0 \end{cases}$$

para cada j , $2 \leq j \leq d-2$.

Observemos que $\alpha = 0$ se, e somente se, $\beta = 0$ e sendo assim teremos $l = Z(x_1, x_3)$, ou seja $l = L_2$ o que não pode acontecer. Além disso, se $d \geq 6$, podemos considerar $j = 2$, $j = 3$ e $j = 4$ na última equação do

sistema acima, e obtemos respectivamente

$$\begin{cases} \alpha(-1)^d \beta^{(d-1)(d-2)} = -\frac{(d-2)}{2} \alpha^{(d-1)^2} \beta^{d-3} & (1) \\ \alpha^2(-1)^d \beta^{(d-1)(d-3)} = -\frac{(d-3)}{3} \alpha^{(d-1)^3} \beta^{d-4} & (2) \\ \alpha^3(-1)^d \beta^{(d-1)(d-4)} = -\frac{(d-4)}{4} \alpha^{(d-1)^4} \beta^{d-5} & (3) \end{cases} .$$

Dividindo (2) por (1) e (3) por (2), obtemos respectivamente, $\frac{1}{\beta^{d-2}} = \frac{2(d-3)}{3(d-2)} \alpha^{d-2}$ e $\frac{1}{\beta^{d-2}} = \frac{3(d-4)}{4(d-3)} \alpha^{d-2}$, igualando estas duas equações temos $d(d-6) = 0$. O que não pode acontecer para $d \geq 7$. Salientamos que embora tal resultado nos permita concluir que para as superfícies de Rams de grau $d \geq 7$ existam apenas $d(d-2) + 4$ retas, utilizando o processo de estratificação e realizando procedimentos análogos ao que fizemos no item anterior, chegamos a conclusão de que sendo $d = 5, 6$ a superfície de Rams possui exatamente $d(d-2) + 4$ retas. Sendo estas encontradas nos estratos E_5, E_2 e E_1 . Salientamos ainda que $d(d-2) + 2$ dessas retas são encontradas no conjunto onde $\beta = \gamma = 0$. Desse modo, concluimos nossa afirmação. □

Corolário 3.8. $r(R_d) \geq d(d-2) + 2$ para todo $d \geq 3$ e $r(R_d) = d(d-2) + 2$ se $d \notin \{3, 4\}$.

Demonstração. Segue do item (2) do Teorema 3.7 que $r(R_d) \geq d(d+2) + 2$ para todo $d \geq 3$. Assuma que $d \notin \{3, 4\}$.

Seja $\mathcal{P} \subset \phi(R_d)$ formado por retas duas a duas disjuntas. Assim, segue do item (4) do Teorema 3.7 que $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cap (\phi_{L_1}(R_d) \cap \phi_{L_2}(R_d)) \dot{\cup} \mathcal{P} \cap \{L_1, L_2\}$. Desse modo temos dois casos a considerar:

Caso 1: $\mathcal{P} \cap \{L_1, L_2\} = \emptyset$

Neste caso $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cap (\phi_{L_1}(R_d) \cap \phi_{L_2}(R_d))$. Daí, $\mathcal{P} \subseteq \phi_{L_1}(R_d) \cap \phi_{L_2}(R_d)$, o que nos permite concluir que $\#\mathcal{P} \leq \#(\phi_{L_1}(R_d) \cap \phi_{L_2}(R_d)) = d(d-2) + 2$.

Caso 2: $\mathcal{P} \cap \{L_1, L_2\} \neq \emptyset$

Suponha que $L_1 \in \mathcal{P}$, assim $\mathcal{P} \cap (\phi_{L_1}(R_d) \cap \phi_{L_2}(R_d)) = \emptyset$ uma vez que \mathcal{P} é formado por retas duas a duas disjuntas. Daí, segue-se que $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cap \{L_1, L_2\}$, o que nos possibilita concluir que $\#\mathcal{P} \leq 2$. Assim, $\#\mathcal{P} \leq d(d-2) + 2$ para todo $\mathcal{P} \subset \phi(R_d)$ formado por retas duas a duas disjuntas (desde que, $\#\mathcal{P} \leq 2 \leq d(d-2) + 2$). Sabemos que $\#(\phi_{L_1}(R_d) \cap \phi_{L_2}(R_d)) = d(d-2) + 2$. Portanto, $r(R_d) = d(d-2) + 2$, se $d \notin \{3, 4\}$. □

Pelo que acabamos de provar, podemos concluir que:

Corolário 3.9. $r_d \geq d(d-2) + 2$ para todo $d \geq 5$.

3.3 Família de Boissière-Sarti

A família de superfícies de Boissière-Sarti será denotada neste trabalho como sendo

$$\mathcal{BS} = \{S_d = Z(x_0^{d-1}x_1 + x_0x_1^{d-1} + x_2^{d-1}x_3 + x_2x_3^{d-1}) \subset \mathbb{P}^3 \mid d \geq 1\}.$$

Vamos agora verificar para quais valores de d uma superfície de Bossière-Sarti é não singular. Primeiramente observamos que, sendo $f = x_0^{d-1}x_1 + x_0x_1^{d-1} + x_2^{d-1}x_3 + x_2x_3^{d-1}$ para $d \geq 2$ temos,

$$\begin{aligned} (1) \quad \partial_0 f &= (d-1)x_0^{d-2}x_1 + x_1^{d-1} = x_1(x_1^{d-2} + (d-1)x_0^{d-2}) \\ (2) \quad \partial_1 f &= x_0^{d-1} + (d-1)x_0x_1^{d-2} = x_0(x_0^{d-2} + (d-1)x_1^{d-2}) \\ (3) \quad \partial_2 f &= (d-1)x_2^{d-2}x_3 + x_3^{d-1} = x_3(x_3^{d-2} + (d-1)x_2^{d-2}) \\ (4) \quad \partial_3 f &= x_2^{d-1} + (d-1)x_2x_3^{d-2} = x_2(x_2^{d-2} + (d-1)x_3^{d-2}). \end{aligned}$$

Observemos que $x_0 = 0$ se, e somente se, $x_1 = 0$. Vamos então assumir que $x_0 \neq 0$ e $x_1 \neq 0$. Neste caso segue de (1) e (2) que $x_1^{d-2} = -(d-1)x_0^{d-2}$ e $x_0^{d-2} = -(d-1)x_1^{d-2}$. De onde concluímos que $1 = (d-1)^2$, o que nos permite concluir que $d = 2$. De modo análogo podemos verificar para o caso em que $x_2 \neq 0$ e $x_3 \neq 0$. Logo, a superfície de Bossieré-Sarti é não singular para todo $d \neq 2$.

Teorema 3.10. *Sejam $L_1 = Z(x_0, x_2)$ e $L_2 = Z(x_1, x_3)$. Então,*

- (1) L_1 e L_2 são retas disjuntas em S_d .
- (2) $\sharp(\phi_{L_1}(S_d) \cap \phi_{L_2}(S_d)) = d(d-2) + 2$ para todo $d \geq 3$.

Demonstração. Para a primeira afirmação basta considerar as definições de L_1 , L_2 e S_d . Já para a segunda, observemos que $L_1 = \{[0 : 0 : 0 : 1]\} \dot{\cup} \{[0 : 1 : 0 : \alpha] \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ e $L_2 = \{[1 : 0 : 0 : 0]\} \dot{\cup} \{[\beta : 0 : 1 : 0] \mid \beta \in \mathbb{C}\}$. Desse modo temos 4 casos a considerar:

Caso 1: $l = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)])$

Neste caso, observemos que $l = Z(x_1, x_2)$, além disso, $l \subset S_d$.

Caso 2: $l = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (\beta, 0, 1, 0)])$, Caso 3: $l = \mathbb{P}([(0, 1, 0, \alpha), (1, 0, 0, 0)])$

Nos casos 2 e 3 chegamos ao absurdo de que $1 = 0$ ao supor que $l \subset S_d$.

Caso 4: $l = \mathbb{P}([(0, 1, 0, \alpha), (\beta, 0, 1, 0)])$

Neste caso temos $l \subset S_d$ se, e somente se, $\beta^{d-1}uv^{d-1} + \beta u^{d-1}v + \alpha uv^{d-1} + \alpha^{d-1}u^{d-1}v = 0$, para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. O que nos permite obter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta^{d-1} = 0 \\ \beta + \alpha^{d-1} = 0 \end{cases}$$

Note que $\alpha = 0$ se, e somente se, $\beta = 0$. Neste caso, $l = Z(x_0, x_3) \subset S_d$. Vamos agora verificar o caso em $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Observe que pelo sistema acima temos

$$\begin{cases} \alpha = -\beta^{d-1} \\ \beta = -\alpha^{d-1} \end{cases} \quad (3.5)$$

Substituindo a segunda igualdade de (3.5) na primeira obtemos $\alpha = -(-\alpha^{d-1})^{d-1}$. O que nos permite obter $(-1)^d = \alpha^{d(d-2)}$. Assim, para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $(-1)^d = \alpha^{d(d-2)}$ obtemos a reta $L_\alpha = \mathbb{P}([(0, 1, 0, \alpha), (-\alpha^{d-1}, 0, 1, 0)])$, obtendo assim, $d(d-2) + 1$ retas duas a duas disjuntas em S_d para este caso.

Desse modo, concluímos nossa segunda afirmação. □

Observação 3.1. A família de retas $\Lambda = \{L_\alpha = \mathbb{P}([(0, 1, 0, \alpha), (-\alpha^{d-1}, 0, 1, 0)]) \mid \alpha^{d(d-2)} = (-1)^d\}$ coincide com a família de retas $L_\eta = \{[-\eta u : v : u : -\eta^{d-1}v] \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$, a qual é considerada na demonstração no Teorema 5.1, pág. 49 em [5].

Nesse momento, surge a seguinte questão: É possível achar outras retas em S_d para $d \geq 5$, digamos m_1, m_2, \dots, m_k duas a duas disjuntas tais que $m_1, \dots, m_k, L_\alpha$ (sendo L_α as $d(d-2)$ retas encontradas acima) sejam duas a duas disjuntas?

A resposta para esta indagação é afirmativa. Vejamos,

Proposição 3.11. Considere $d \geq 4$. Verifica-se que S_d contém $d(d-2) + 4$ retas duas a duas disjuntas, se d é ímpar ou múltiplo inteiro de 4.

Demonstração. Sejam $M_1 = Z(x_1, x_2 + x_3) = \mathbb{P}([(1, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 1)])$ e $M_2 = Z(x_3, x_0 + x_1) = \mathbb{P}([(0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0)])$. Note que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ e que $M_1, M_2 \subset S_d$ se, e somente se, d é ímpar. De fato, $M_1 \subset S_d$ se, e somente se, $(-x_3)^{d-1}x_3 + x_3^{d-1}(-x_3) = 0$. Daí, temos que $M_1 \subset S_d$ se, e somente se, $(-1)^{d-1}x_3^d + (-1)x_3^d = 0$, o que só acontece caso d seja ímpar. De modo análogo verificamos para a reta M_2 . Após a realização de alguns cálculos utilizando determinante e a parametrização das $d(d-2) + 2$ retas encontradas na demonstração do Teorema 3.10 e as retas M_1 e M_2 em

questão, conseguimos chegar a conclusão de que M_1, M_2 e L_α são duas a duas disjuntas. Assim, conseguimos $d(d-2) + 4$ retas duas a duas disjuntas em S_d .

Considere agora $M_3 = Z(x_0, x_2 + \varepsilon x_3) = \mathbb{P}([(0, 1, 0, 0), (0, 0, -\varepsilon, 1)])$ e $M_4 = Z(x_2, x_0 + \varepsilon x_1) = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (-\varepsilon, 1, 0, 0)])$, sendo ε a raiz primitiva da unidade para grau $d-2$. Observe que, $M_3 \subset S_d$. De fato, sendo $M_3 = Z(x_0, x_2 + \varepsilon x_3)$ então pela notação da superfície S_d temos $(-\varepsilon x_3)^{d-1} x_3 + (-\varepsilon x_3) x_3^{d-1} = (\varepsilon^{d-1} - \varepsilon) x_3^d = 0$. O que nos permite chegar a conclusão $\varepsilon^{d-2} = 1$. De modo análogo, verifica-se que $M_4 \subset S_d$. Considerando tais retas e as retas L_α obtemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ -\alpha^{d-1} & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\varepsilon \alpha^d \quad e \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ -\alpha^{d-1} & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon .$$

Além disso,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 1 \end{vmatrix} = 1 - \varepsilon \quad e \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 .$$

Note que as linhas destas matrizes são formadas pelas coordenadas dos vetores dos subespaços que definem as retas M_i , com $i \in \{1, 3, 4\}$ e L_α . Desse modo, pelo resultado do determinante das duas primeiras matrizes temos que $M_3 \cap L_\alpha = \emptyset$ e $M_4 \cap L_\alpha = \emptyset$. Observe que sendo ε raiz primitiva da unidade e $d \geq 4$ então, $1 - \varepsilon \neq 0$, logo $M_1 \cap M_3 = \emptyset$ e $M_1 \cap M_4 = \emptyset$ (pelos resultados dos determinantes das duas últimas matrizes). De modo análogo, chegamos a conclusão de que $M_2 \cap M_3 = \emptyset$ e $M_2 \cap M_4 = \emptyset$. O que nos permite concluir que as retas M_i , com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ e L_α são duas a duas disjuntas. Logo, obtemos $d(d-2) + 4$ retas duas a duas disjuntas em S_d sendo d ímpar.

Vamos agora verificar a afirmação para $d = 4k$, com $k \in \mathbb{N}$. Para isso, considere $\tilde{M}_1 = Z(x_1, x_2 - ix_3)$ e $\tilde{M}_2 = Z(x_3, x_0 - ix_1)$. Observe que tais retas estão em S_d , para todo $d = 4k$, com $k \in \mathbb{N}$. De fato, $\tilde{M}_1 \subset S_d$ se, e somente se, $(ix_3)^{d-1} x_3 + ix_3 x_3^{d-1} = 0$. Assim, $\tilde{M}_1 \subset S_d$ se, e somente se, $(i^{d-1} + i)x_3^d = 0$, daí temos $i^{d-1} = -i$, o que nos dá $i^{d-4} = 1$, logo $d = 4k$ com $k \in \mathbb{N}$. O mesmo se verifica para \tilde{M}_2 . Além disso,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ -\alpha^{d-1} & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 1 \end{vmatrix} = -i - \varepsilon \quad e \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = i .$$

Note que as duas primeiras linhas dessas matrizes são as coordenadas dos vetores de um subespaço que define a reta \tilde{M}_1 e as demais correspondem as coordenadas dos vetores dos subespaços que determinam as retas $L_\alpha \subset \Lambda$, M_3 e M_4 respectivamente. Observe ainda que sendo $\varepsilon \neq -i$ o resultado da segunda matriz é diferente de zero. Resultados análogos a estes são obtidos ao considerar a reta \tilde{M}_2 . Assim, podemos concluir que sendo d múltiplo de 4, conseguimos encontrar $d(d-2) + 4$ retas duas a duas disjuntas em S_d . \square

Pelo que acabamos de provar, podemos concluir que $r_d \geq d(d-2) + 4$ para $d \geq 4$ sendo d ímpar ou múltiplo inteiro de 4. Salientamos que o resultado acima não foi encontrado em nenhuma literatura a qual tivemos acesso.

Apêndice A

Resultados Básicos de Geometria Algébrica

Nesta parte do trabalho exibiremos alguns conceitos e resultados, os quais servirão de apoio para o desenvolvimento no texto, bem como para uma melhor compreensão desta dissertação.

A.1 Resultados gerais

Observação A.1. (1) Sendo V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{K} e sendo $\mathbb{P}(V)$ a projetivização de V . Como cada subespaço de dimensão 1 de V é gerado por um vetor não nulo, temos: $\mathbb{P}(V) = \{[v] \mid v \neq 0, v \in V\}$ sendo $[v] = \{\lambda v \in V \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

(2) Sendo $[u]$ e $[v]$ pontos em \mathbb{P}^n , então $[u] \neq [v] \Leftrightarrow u$ e v são linearmente independentes.

Observação A.2. Se $[u] \in \mathbb{P}^n$ com $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)$. Então usaremos a notação $[u] = [u_0 : u_1 : \dots : u_n]$. Neste caso u_0, u_1, \dots, u_n são chamadas de coordenadas homogêneas do ponto $[u]$.

Exemplo A.1. Sendo $p = [1 : 0 : 1 : 0] \in \mathbb{P}^3$, então $1, 0, 1, 0$ são as coordenadas homogêneas de p .

Observação A.3. No decorrer deste apêndice \mathcal{T} denotará o anel dos polinômios $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ e \mathcal{T}_d o conjunto dos polinômios homogêneos de grau d em \mathcal{T} .

Teorema A.1. *Sendo Λ uma variedade r -linear em \mathbb{P}^n . Então existem L_1, L_2, \dots, L_{n-r} polinômios em \mathcal{T}_1 linearmente independentes tais que $\Lambda = Z(L_1) \cap \dots \cap Z(L_{n-r})$.*

Demonstração. Ver Teorema 1.2.4, pág. 6 em [8]. □

Definição A.1. Seja $f \in \mathcal{T}$ não nulo, dizemos que f é um polinômio homogêneo de grau d se, e somente se, $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Notação: $\mathcal{T}_d = \{\text{polinômios homogêneos de grau } d\} \cup \{0\}$ para cada $d \geq 0$ inteiro.

Definição A.2. Seja $f \in \mathcal{T}_d$. Definimos os zeros de f como sendo $Z(f) = \{[u] \in \mathbb{P}^n \mid f(u) = 0\}$.

Exemplo A.2. Seja $F \in \mathcal{T}_d$. Para $d = 0$ temos que $F = 0$ ou $F = a_0 \neq 0 \in \mathbb{C}$. Assim, temos que $Z(0) = \mathbb{P}^1$ ou $Z(a_0) = \emptyset$.

Exemplo A.3. Se $G \in \mathcal{T}_d$ tal que $G = H_1 H_2$ sendo $H_i \in \mathcal{T}_{d_i}$ com $d_1 + d_2 = d$. Então $Z(G) = Z(H_1) \cup Z(H_2)$. De fato, sendo $[v] \in \mathbb{P}^n$, temos que $[v] \in Z(G) \Leftrightarrow G(v) = 0 \Leftrightarrow H_1(v)H_2(v) = 0 \Leftrightarrow H_1(v) = 0$ ou $H_2(v) = 0 \Leftrightarrow [v] \in Z(H_1)$ ou $[v] \in Z(H_2)$.

Definição A.3. Sendo $S = Z(f)$ uma superfície qualquer com $f \in \mathcal{T}_d$. Dizemos que um ponto $p \in \mathbb{P}^n$ é um ponto singular de S , se, e somente se, p é solução do sistema de equação $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Definição A.4. Dizemos que uma superfície $S \subseteq \mathbb{P}^n$ é singular, se esta possui algum ponto singular, caso contrário dizemos que esta é não singular.

Definição A.5. O conjunto dos pontos singulares de uma superfície singular S é denotado por $Sing(S)$.

Observação A.4. Sendo $f \in \mathcal{T}_1$ não nulo então temos que, $S = Z(f) \subset \mathbb{P}^n$ não admite pontos singulares. Já para $d \geq 2$ sempre há hipersuperfícies singulares, por exemplo $Z(x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2)$.

Definição A.6. Seja $S = Z(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ com $f \in \mathcal{T}_d$. Para qualquer $x \in S$ definimos o hiperplano tangente a S em x por $\mathbb{T}_x S = Z(f_0(x)x_0 + f_1(x)x_1 + \dots + f_n(x)x_n)$, onde $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i$. Observe que se $x \notin Sing(S)$ com $d \geq 1$, então $\mathbb{T}_x S$ é de fato um hiperplano.

Definição A.7. Sendo I um ideal em \mathcal{T} . Dizemos que I é homogêneo se, existirem F_1, F_2, \dots, F_k homogêneos (não necessariamente do mesmo grau) tais que $\langle F_1, \dots, F_k \rangle = I$.

Exemplo A.4. $I = \langle x_0 + x_1^3, 2x_0 \rangle = \langle x_1^3, x_0 \rangle$ é um ideal homogêneo em $\mathbb{C}[x_0, x_1]$.

Lema A.2. Seja $I \subset \mathcal{T}$ um ideal. São equivalentes:

- (1) I é homogêneo.
- (2) $f = f_0 + \dots + f_d$ sendo f_i , partes homogêneas de f . Verifica-se que se $f \in I$, então $f_i \in I$ para todo i , $0 \leq i \leq d$.

Definição A.8. Sendo $I = \langle F_1, F_2, \dots, F_k \rangle$ com $F_1, F_2, \dots, F_k \in \mathcal{T}$ homogêneos. Definimos $Z(I) = Z(F_1) \cap Z(F_2) \cap \dots \cap Z(F_k)$.

Note que a definição de $Z(I)$ independe da escolha dos geradores de I , além disso $Z(I) = Z(\sqrt{I})$.

Definição A.9. Sendo $X \subseteq \mathbb{P}^n$. Dizemos que X é um conjunto algébrico se existirem F_1, F_2, \dots, F_k homogêneos (não necessariamente do mesmo grau) tais que $X = Z(F_1) \cap Z(F_2) \cap \dots \cap Z(F_k)$. Neste caso, usamos a notação $Z(F_1, \dots, F_k) = \bigcap_{i=1}^k Z(F_i)$.

Definição A.10. Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n$. Definimos $\mathcal{I}(Y) = \langle \{F \in \mathcal{T} \mid F \text{ é homogêneo e } F(p) = 0 \text{ para todo } p \in Y\} \rangle$. Este é chamado de ideal associado a Y .

Proposição A.3. Sendo Y_1, Y_2 subconjuntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ e $I_1, I_2 \subset \mathcal{T}$ ideais. Verifica-se que

- (1) Se $Y_1 \subseteq Y_2$ então $\mathcal{I}(Y_2) \subseteq \mathcal{I}(Y_1)$.
- (2) Se $I_1 \subseteq I_2$ então $Z(I_2) \subseteq Z(I_1)$.
- (3) $\mathcal{I}(Y_1 \cup Y_2) = \mathcal{I}(Y_1) \cap \mathcal{I}(Y_2)$.
- (4) $I_i \subseteq \mathcal{I}(Z(I_i))$, com $i = 1, 2$.
- (5) $Y_i \subseteq Z(\mathcal{I}(Y_i))$, com $i = 1, 2$.
- (6) $Z(\mathcal{I}(Y_i)) = \overline{Y}_i$, com $i = 1, 2$.

Demonstração. (1) Seja $f \in \mathcal{I}(Y_2)$. Assim temos que, $f(p) = 0$ para qualquer $p \in Y_2$. Uma vez que $Y_1 \subseteq Y_2$ segue-se que $f(p) = 0$ para qualquer $p \in Y_1$. Desse modo temos $f \in \mathcal{I}(Y_1)$.

(2) Análogo ao anterior.

(3) Observemos que $g \in \mathcal{I}(Y_1 \cup Y_2) \Leftrightarrow g(p) = 0$ para todo $p \in Y_1$ e $g(p) = 0$ para todo $p \in Y_2 \Leftrightarrow g \in \mathcal{I}(Y_1)$ e $g \in \mathcal{I}(Y_2) \Leftrightarrow g \in \mathcal{I}(Y_1) \cap \mathcal{I}(Y_2)$.

(4) Sendo $I_i \subseteq \mathcal{T}$, com $i = 1, 2$. Temos que se $f \in I_i$ então $f(p) = 0$ para todo $p \in Z(I_i)$. Assim temos $f \in \mathcal{I}_i(Z(I_i))$.

(5) Seja $p \in Y_i$, com $i = 1, 2$. Temos $g(p) = 0$ para qualquer $g \in \mathcal{I}(Y_i)$. Assim, segue o resultado.

(6) Pelo item anterior temos $\overline{Y}_i \subseteq Z(\mathcal{I}(Y_i))$, com $i = 1, 2$. Para a outra inclusão usamos o fato de $\overline{Y}_i = \bigcap F$, sendo F fechados de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ que contém Y_i .

□

Proposição A.4. Sendo \mathbb{K} um corpo temos $\mathcal{I}(a_1, \dots, a_n) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$.

Demonstração. Observe que se $f \in \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ então $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, logo $f \in \mathcal{I}(a_1, \dots, a_n)$. Por outro lado, sendo $f \in \mathcal{I}(a_1, \dots, a_n)$, então após dividir f por $x_i - a_i$, com $i = 1, \dots, n$. Concluimos que f é da forma $f = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)h_i$, portanto $f \in \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$. \square

Teorema A.5. (*Zeros de Hilbert*) Sendo \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado e I um ideal homogêneo em \mathcal{T} tal que $Z(I) \neq \emptyset$. Então $\mathcal{I}(Z(I)) = \sqrt{I}$.

Demonstração. Ver Teorema 9, pág. 384 em [7]. \square

Proposição A.6. Sendo I um ideal homogêneo em \mathcal{T} , temos que $Z(I) = \emptyset \Leftrightarrow \sqrt{I} = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$.

Demonstração. Sendo $Z(I) = \emptyset$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ então temos que $\mathcal{Z}(I) = \{(0, 0, \dots, 0)\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n+1}$. Aplicando o Teorema A.5 no caso afim temos $\mathcal{I}(0, 0, \dots, 0) = \sqrt{I}$. Daí pela Proposição A.4 temos que $\sqrt{I} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$. Para a recíproca devemos lembrar que $Z(I) = Z(\sqrt{I})$. \square

Proposição A.7. Sendo L_1, \dots, L_k formas lineares em \mathcal{T} então, $\sqrt{\langle L_1, L_2, \dots, L_k \rangle} = \langle L_1, \dots, L_k \rangle$.

Demonstração. Ver Proposição A.2, pág. 51 em [19]. \square

Proposição A.8. Sendo $L_1, L_2, \dots, L_n \in \mathcal{T}_1$ onde $\{L_1, \dots, L_n\}$ são linearmente independentes de \mathcal{T} , então $\langle L_1, L_2, \dots, L_n \rangle$ é um ideal primo.

Demonstração. Ver Teorema 1.2, pág. 4 em [13]. \square

Definição A.11. Sendo $f \in \mathcal{T}$. Dizemos que f é livre de quadrados se, e somente se $\sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle$.

Assumindo que f admite a fatoração $f = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ sendo $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{T}$ polinômios irreduzíveis distintos e $n_1, \dots, n_k \geq 1$ inteiros, concluimos que f é livre de quadrados se, e somente se, $n_1 = \dots = n_k = 1$.

Proposição A.9. Sejam $f, g \in \mathcal{T}_d$ de mesmo grau e livres de quadrados. Se $Z(f) = Z(g)$ então $f = \lambda g$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema A.5 e usar o fato de que os polinômios são de mesmo grau. \square

Definição A.12. Se $f \in \mathcal{T}_d$ for livre de quadrados. Então $Z(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ é chamado de hiperplano se $d = 1$. Já para o caso $d \geq 2$ é chamada de hipersuperfície de grau d .

No caso de $n = 3$ temos as seguintes nomenclaturas:

$d = 1$ - plano projetivo;

$d = 2$ - superfície quádriga;

$d = 3$ - superfície cúbica;

$d = 4$ - superfície quártica.

Em suma, em \mathbb{P}^3 temos que $Z(f)$ é chamado de plano sendo $d = 1$, e superfície caso $d \geq 2$.

Observação A.5. As hipersuperfícies em \mathbb{P}^2 são chamadas curvas planas. Se a curva tiver grau 2 ela é chamada de cônica.

Proposição A.10. Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é irredutível se, e somente se, $\mathcal{I}(X)$ é primo.

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneos tais que $fg \in \mathcal{I}(X)$. Desse modo temos $X \subseteq Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$, assim, $X = (X \cap Z(f)) \cup (X \cap Z(g))$. Denotando por $X_1 = X \cap Z(f)$ e $X_2 = X \cap Z(g)$, uma vez que X é irredutível e X_1, X_2 são fechados de X temos que $X = X_1$ ou $X = X_2$ daí segue-se que $f \in \mathcal{I}(X)$ ou $g \in \mathcal{I}(X)$. Aplicando o Lema A.2, concluímos que $\mathcal{I}(X)$ é primo. Reciprocamente assumamos que $X = X_1 \cup X_2$ sendo X_i , com $i = 1, 2$ fechados em X . Assim, $X_i = X \cap Z(J_i)$, sendo J_i , $i = 1, 2$ ideais homogêneos. Observe que $X = X \cap (Z(J_1) \cup Z(J_2))$, daí $X \subset Z(J_1) \cup Z(J_2)$, logo $\mathcal{I}(X) \supset \mathcal{I}(Z(J_1)) \cap \mathcal{I}(Z(J_2))$. Uma vez que $\mathcal{I}(X)$ é primo, segue-se que $\mathcal{I}(X) \supset \mathcal{I}(Z(J_1))$ ou $\mathcal{I}(X) \supset \mathcal{I}(Z(J_2))$, aplicando Z nas inclusões obtemos $X = X_1$ ou $X = X_2$. Portanto, X é irredutível. \square

Proposição A.11. Toda variedade r -linear em \mathbb{P}^n é irredutível.

Demonstração. Segue do Teorema A.1 e das Proposições A.7, A.8 e A.10. \square

A.2 Resultados sobre retas em \mathbb{P}^3

Lembremos que $l \subset \mathbb{P}^3$ é uma reta se $l = \mathbb{P}(W)$ para algum $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$.

Proposição A.12. Sejam $p, q \in \mathbb{P}^3$ pontos distintos. Então existe uma única reta passando por esses dois pontos. A qual é denotada por $l_{p,q}$.

Demonstração. Ver Proposição 1.1, pág. 4 em [13]. \square

Corolário A.13. Seja $l \subseteq \mathbb{P}^3$, l é uma reta se, e somente se, existem $L_1, L_2 \in \mathcal{R}_1$ linearmente independentes tais que $l = Z(L_1) \cap Z(L_2)$.

Demonstração. Sendo $l \subseteq \mathbb{P}^3$ uma reta. Então temos que l é uma variedade 1-linear. Desse modo, pelo Teorema A.1 segue-se que existem formas lineares L_1, L_2 em \mathcal{R}_1 linearmente independentes tais que $l = Z(L_1) \cap Z(L_2)$. Para a recíproca, sendo $L_1, L_2 \in \mathcal{R}_1$ linearmente independentes escolha $W_i = \{v \in \mathbb{C}^4 \mid L_i(v) = 0\} \leq \mathbb{C}^4$ de dimensão 3 tal que $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$. Assim temos, $Z(L_i) = \mathbb{P}(W_i)$, $i = 1, 2$, o que nos permite concluir que $l = Z(L_1) \cap Z(L_2) = \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$. Portanto, l é uma reta em \mathbb{P}^3 . \square

Proposição A.14. Se $S = Z(f) \subseteq \mathbb{P}^3$ com $f \in \mathcal{R}_d$ e $p \in l \in \phi(S)$. Então $l \subseteq \mathbb{T}_p S$.

Demonstração. Consideremos $l = Z(L_1, L_2)$ sendo L_1, L_2 polinômios linearmente independentes. Assim, $f = HL_1 + GL_2$ sendo H, G não ambos nulos em \mathcal{R} . Denotemos $\mathbb{T}_p S = Z(L_p)$ sendo $L_p = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)x_i$. Observemos que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = H(p)\frac{\partial L_1}{\partial x_i}(p) + G(p)\frac{\partial L_2}{\partial x_i}(p)$. Após alguns cálculos obtemos que $L_p = H(p)L_1 + G(p)L_2$. Portanto, $l \subseteq \mathbb{T}_p S$. \square

Observação A.6. Se l_1, l_2 são retas distintas em \mathbb{P}^n com $n \geq 3$, tais que $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$. Então usualmente denotamos o único plano que contém l_1 e l_2 por $\langle l_1, l_2 \rangle$ e dizemos que este é o plano gerado por l_1, l_2 . Caso $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ então $\langle l_1, l_2 \rangle$ é uma variedade linear de dimensão 3 que contém l_1 e l_2 . De fato $\langle l_1, l_2 \rangle$ é a menor variedade linear contendo l_1 e l_2 .

Lema A.15. Sejam l_1 e l_2 retas distintas em \mathbb{P}^3 .

(1) Se $l_i = \mathbb{P}(W_i)$ com $W_i \in G_2(\mathbb{C}^4)$ para $i = 1, 2$ então

- (i) $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ se, e somente, se $\dim(W_1 + W_2) = 3$. Neste caso existe um único plano em \mathbb{P}^3 contendo l_1 e l_2 , sendo este dado por $\mathbb{P}(W_1 + W_2) = \langle l_1, l_2 \rangle$.
- (ii) $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ se, e somente, se $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^4$. Neste caso não existe plano em \mathbb{P}^3 contendo l_1 e l_2 .

(2) Se $l_i = Z(L_{i1}, L_{i2})$ sendo $\{L_{i1}, L_{i2}\}$ linearmente independentes, com $i = 1, 2$. Então, $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \{L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}\}$ é linearmente dependente. Neste caso, o espaço gerado $[L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}]$ tem dimensão 3 como subespaço de \mathcal{R}_1 . Além disso, existem $\{L_1, L_2, M\}$ base de $[L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}]$ tal que $\mathcal{I}(l_i) = \langle L_i, M \rangle$ para $i = 1, 2$. Logo, $\langle l_1, l_2 \rangle = Z(M)$.

Demonstração. 1. Para a primeira afirmação observemos que $l_1 \cap l_2 = \{p\}$ se, e somente se, $p = [u]$ sendo $u \in W_1 \cap W_2$. Uma vez que $l_1 \neq l_2$, segue-se que $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, daí $\dim(W_1 + W_2) = 3$. Desse modo temos que $\mathbb{P}(W_1 + W_2)$ é

um plano em \mathbb{P}^3 contendo l_1 e l_2 . Para a unicidade denotemos $\pi_1 = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$ e π_2 um outro plano em \mathbb{P}^3 que contém l_1 e l_2 . Assim, temos que $\pi_2 = \mathbb{P}(U)$ sendo U um subespaço vetorial de \mathbb{C}^4 e de dimensão 2, além disso, $U \supseteq W_1 + W_2$. Portanto $\pi_1 = \pi_2$.

Para a segunda afirmação uma vez que $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ então temos que $W_1 \cap W_2 = 0$. Por outro lado sendo $W_i \in G_2(\mathbb{C}^4)$ segue-se que $\dim(W_1 + W_2) = 4$ e o resultado segue.

2. Para a primeira parte suponhamos que $\{L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}\}$ é linearmente independentes. Assim, segue-se que $Z(L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{14}) = \emptyset$, logo $l_1 \cap l_2 = \emptyset$. Já para a segunda parte assumindo que $\{L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}\}$ é linearmente dependente em \mathcal{R}_1 temos $[L_{11}, L_{12}] \leq [L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}]$. Assim, $\dim[L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}] = 3$, pois caso $\dim[L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}] = 2$ ou 4, então teríamos $l_1 = l_2$ ou $[L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}]$ seria linearmente independentes. O que seria um absurdo.

Para a última parte, observemos que existem $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que $\alpha_1 L_{11} + \alpha_2 L_{12} + \beta_1 L_{21} + \beta_2 L_{22} = 0$ (\star). Como $\{L_{11}, L_{12}\}$ e $\{L_{21}, L_{22}\}$ são linearmente independentes em \mathcal{R}_1 , então temos que $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$ ou $\beta_2 \neq 0$. Por (\star) segue-se que $\alpha_1 L_{11} + \alpha_2 L_{12} = -\beta_1 L_{21} - \beta_2 L_{22}$. Denotemos $M = \alpha_1 L_{11} + \alpha_2 L_{12} = -\beta_1 L_{21} - \beta_2 L_{22}$, assim temos $M = \alpha_1 L_{11} + \alpha_2 L_{12} \in \mathcal{I}(l_1)$ e $M = -\beta_1 L_{21} - \beta_2 L_{22} \in \mathcal{I}(l_2)$. Observemos que sendo $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$, então $\mathcal{I}(l_1) = \langle M, L_{12} \rangle$ ou $\mathcal{I}(l_1) = \langle M, L_{11} \rangle$. Analogamente temos $\mathcal{I}(l_2) = \langle M, L_{21} \rangle$ ou $\mathcal{I}(l_2) = \langle M, L_{22} \rangle$. Daí, concluímos que existem $L_1, L_2 \in \mathcal{R}_1$ tais que $\mathcal{I}(l_1) = \langle M, L_1 \rangle$ e $\mathcal{I}(l_2) = \langle M, L_2 \rangle$, caso $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$. Assim, $Z(M)$ é um plano contendo l_1 e l_2 , portanto $\langle l_1, l_2 \rangle = Z(M)$.

□

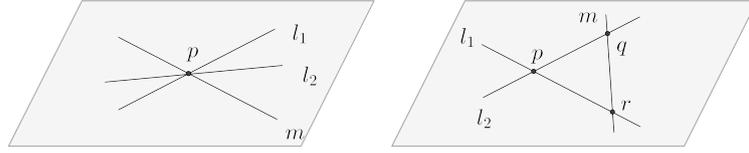
Lema A.16. Seja $S \subseteq \mathbb{P}^3$ uma superfície não singular de grau d . Verifica-se que

- (1) Para quaisquer duas retas distintas $l_1, l_2 \in \phi(S)$ tais que $l_1 \cap l_2 = \{p\}$ temos que existe um único plano contendo l_1 e l_2 e este é o $\mathbb{T}_p S$. Assim temos $\langle l_1, l_2 \rangle = \mathbb{T}_p S$.
- (2) Para qualquer reta $m \in \phi_{l_1}(S) \cap \phi_{l_2}(S)$ com $l_1 \cap l_2 = \{p\}$ tem-se que $m \subset \mathbb{T}_p S = \langle l_1, l_2 \rangle$.

Demonstração. (1) Segue da Proposição A.14 e do Lema A.15.

- (2) Temos duas possibilidades, $m \cap l_1 \cap l_2 = \{p\}$ ou $m \cap l_1 = \{r\}$ e $m \cap l_2 = \{q\}$ sendo $r \neq q$. Para o primeiro caso é claro, para o segundo temos que sendo $q \neq r$, então pela Proposição A.12 existe uma única reta $l_{q,r}$ passando por q e r , como tais pontos encontram-se no plano $\langle l_1, l_2 \rangle$, segue-se que $m = l_{q,r}$ logo pelo item

anterior temos $m \subset \mathbb{T}_p S$. Geometricamente temos:



□

A.3 Mudança de Coordenadas Projetivas

Definição A.13. Considerando $Aut(\mathbb{C}^{n+1}) = \{T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \mid T \text{ é } \mathbb{C} - \text{linear}\}$. Dizemos que uma função $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ é uma Mudança de Coordenadas Projetivas (MCP) se, existe $T \in Aut(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $\varphi([u]) = [T(u)]$, para todo $[u] \in \mathbb{P}^n$.

Exemplo A.5. Temos que,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x : y] &\longmapsto [ax + by : cx + dy] \end{aligned}$$

é uma MCP, sempre que $ad - bc \neq 0$.

Proposição A.17. Seja C um subconjunto finito de \mathbb{P}^1 . Então $\Gamma_C = \{\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid \varphi \text{ é uma MCP tal que } \varphi(C) = C\}$ é um subgrupo de $Aut(\mathbb{P}^1)$.

Demonstração. Primeiramente observemos que $id_{\mathbb{P}^1} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \in \Gamma_C$. Agora sendo $\varphi([v]) = [T(v)]$, com $T \in Aut(\mathbb{C}^2)$ temos que $\varphi^{-1} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, daí $\varphi^{-1}([v]) = [T^{-1}(v)]$, como $\varphi(C) = C$, então $\varphi^{-1}(C) = C$, logo Γ_C possui elemento inverso. Por último, sendo $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma_C$ temos $\varphi_1 \circ \varphi_2(C) = \varphi_1(\varphi_2(C)) = \varphi_1(C) = C$. □

Exemplo A.6. Se $C = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \subset \mathbb{P}^1$, com $p_1 = [0 : 1]$, $p_2 = [1 : 1]$, $p_3 = [\xi : 1]$, $p_4 = [\xi^2 : 1]$, então Γ_C é um subgrupo de $Aut(\mathbb{P}^1)$ isomorfo a A_4 (veja Lema 2.12).

Proposição A.18. Seja $C \subseteq \mathbb{P}^1$ tal que $\sharp C = 4$. Então, $\Gamma_C = \{\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid \varphi \text{ é uma MCP tal que } \varphi(C) = C\}$ é isomorfo ao grupo de Klein K ou ao grupo dihedral D_4 ou ao grupo A_4 .

Demonstração. Ver Teorema 2.10, pág. 22 em [19]. □

Proposição A.19. Sejam $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1$ dois a dois distintos e $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1$ dois a dois distintos. Existe uma única $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ MCP tal que $\varphi(P_i) = Q_i$, com $i = 1, 2, 3$.

Demonstração. Ver Corolário 2.3, pág. 14 em [19]. \square

Lema A.20. Se $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ for uma MCP dada por $\varphi([u : v]) = [\alpha u + \beta v : \gamma u + \delta v]$, então $\tilde{\varphi} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ dada por $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [\alpha x_0 + \beta x_1 : \gamma x_0 + \delta x_1 : \alpha x_2 + \beta x_3 : \gamma x_2 + \delta x_3]$ também é uma MCP.

Demonstração. Sendo $\varphi([u : v]) = [\alpha u + \beta v : \gamma u + \delta v]$ uma MCP, temos $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dado por $T(u, v) = (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$ é um isomorfismo linear. Assim, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Observemos então que $\tilde{T} : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ dado por $\tilde{T}(x_0, x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_0 + \beta x_1, \gamma x_0 + \delta x_1, \alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_2 + \delta x_3)$ é um isomorfismo linear, pois $\det[\tilde{T}] = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \neq 0$ sendo $[\tilde{T}]$ a matriz associada a \tilde{T} da base canônica na base canônica. \square

A.4 Mergulho de Plücker

Considerando $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$. Fixemos $\eta = \{v, w\}$ base de W sendo $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_0, w_1, w_2, w_3)$. Agora consideremos $M_\eta \in M_{2 \times 4}(\mathbb{C})$ dada por

$$M_\eta = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Sendo $\eta' = \{v', w'\}$ uma outra base de W , verifica-se que $p_{ij} = \xi p'_{ij}$ para algum $\xi \neq 0$ (Veja [13], pág. 9), onde p_{ij}, p'_{ij} são os determinantes dos menores 2×2 de M_η e $M_{\eta'}$, respectivamente isto é,

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{bmatrix} = v_i w_j - v_j w_i, \text{ com } 0 \leq i < j \leq 3.$$

Assim podemos definir

$$\begin{aligned} \Upsilon : G_2(\mathbb{C}^4) &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ W &\longmapsto [p_{01} : p_{02} : \dots : p_{23}]. \end{aligned}$$

Proposição A.21. Υ está bem definida, é injetiva e $Im(\Upsilon) = \mathbf{Q}$, sendo $\mathbf{Q} = Z(f)$, onde $f = x_0 x_5 - x_1 x_4 + x_2 x_3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_5]$.

Demonstração. Ver Proposição 2.0.6, pág. 13 em [8]. \square

Definição A.14. A aplicação Υ é chamada de Mergulho de Plücker e a hipersuperfície \mathbf{Q} é chamada de quádrlica de Plücker.

Observação A.7. Se $\Theta = \{l \mid l \text{ é uma reta em } \mathbb{P}^3\}$, então Υ induz uma bijeção entre $G_2(\mathbb{C}^4)$ e Θ . Assim através do Mergulho de Plücker podemos pensar que cada reta em \mathbb{P}^3 se corresponde com um ponto em \mathbf{Q} .

Definição A.15. Chamamos de **estratificação de $G_2(\mathbb{C}^4)$** a seguinte partição $G_2(\mathbb{C}^4) = E_1 \dot{\cup} E_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} E_6$, onde cada E_i , com $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ é chamado de estrato, sendo

$$\begin{aligned} E_6 &= \{W \in G_2(\mathbb{C}^4) : p_{01} = p_{02} = p_{03} = p_{12} = p_{13} = 0 \text{ e } p_{23} \neq 0\} \\ E_5 &= \{W \in G_2(\mathbb{C}^4) : p_{01} = p_{02} = p_{03} = p_{12} = 0 \text{ e } p_{13} \neq 0\} \\ E_4 &= \{W \in G_2(\mathbb{C}^4) : p_{01} = p_{02} = p_{03} = 0 \text{ e } p_{12} \neq 0\} \\ E_3 &= \{W \in G_2(\mathbb{C}^4) : p_{01} = p_{02} = 0 \text{ e } p_{03} \neq 0\} \\ E_2 &= \{W \in G_2(\mathbb{C}^4) : p_{01} = 0 \text{ e } p_{02} \neq 0\} \\ E_1 &= \{W \in G_2(\mathbb{C}^4) : p_{01} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Vejam como é representado cada E_i , com $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$:

Primeiramente consideremos a matriz M_η . Se $p_{01} \neq 0$, então por meio de operações elementares podemos considerar o menor 2×2 dado por $\begin{bmatrix} v_0 & v_1 \\ w_0 & w_1 \end{bmatrix}$ como sendo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assim obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{bmatrix}$, sendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, cujas linhas ainda determinam uma base de W .

Agora considerando as condições do estrato E_2 e usando as mesmas ideias utilizadas para o estrato E_1 , obtemos $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Observação A.8. Prosseguindo com tal processo obtemos os seguintes subespaços de \mathbb{C}^4 os quais são dois a dois disjuntos:

$$\begin{aligned} E_6 &= \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}, \\ E_5 &= \{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}} \text{ sendo } W_\alpha = [(0, 1, \alpha, 0), (0, 0, 0, 1)], \\ E_4 &= \{W_{\alpha, \beta}\}_{\alpha, \beta \in \mathbb{C}} \text{ sendo } W_{\alpha, \beta} = [(0, 1, 0, \alpha), (0, 0, 1, \beta)], \\ E_3 &= \{W_{\alpha, \beta}\}_{\alpha, \beta \in \mathbb{C}} \text{ sendo } W_{\alpha, \beta} = [(1, \alpha, \beta, 0), (0, 0, 0, 1)], \\ E_2 &= \{W_{\alpha, \beta, \gamma}\}_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}} \text{ sendo } W_{\alpha, \beta, \gamma} = [(1, \alpha, 0, \beta), (0, 0, 1, \gamma)], \\ E_1 &= \{W_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}\}_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}} \text{ sendo } W_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} = [(1, 0, \alpha, \beta), (0, 1, \gamma, \delta)]. \end{aligned}$$

seguinte diagrama

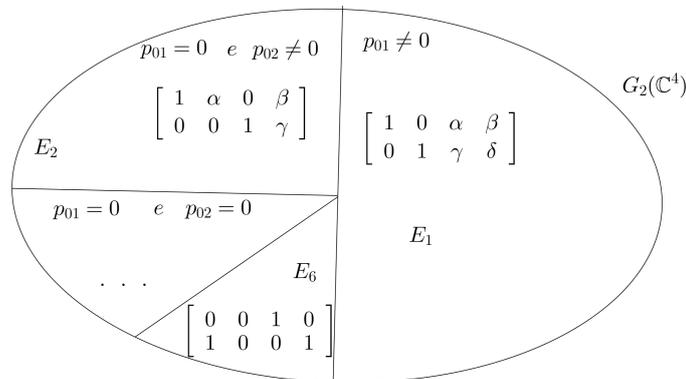


Figura A.1: $G_2(\mathbb{C}^4)$ repartida em seis conjuntos disjuntos

A.5 Fibras de Kodaira

Finalizamos este apêndice com a tabela A.1, na qual ilustramos as fibras singulares de acordo com a classificação de Kodaira (veja [12], pág. 3) para as curvas residuais que aparecem ao estudarmos as superfícies quárticas não singulares.

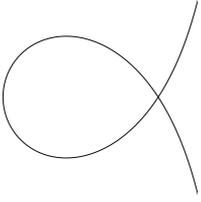
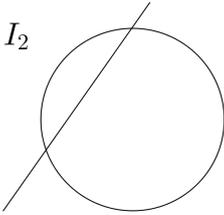
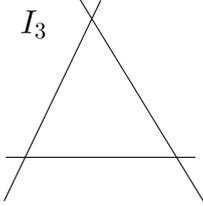
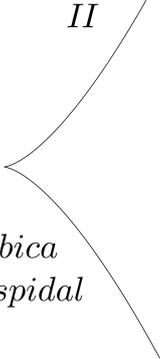
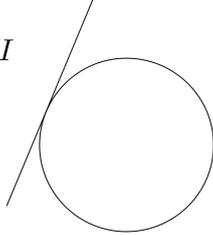
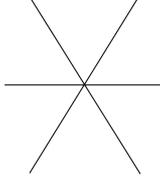
<p>I_1</p>  <p><i>Cúbica nodal</i></p>	<p>I_2</p>  <p><i>Duas curvas racionais que se encontram em dois pontos</i></p>	<p>I_3</p>  <p><i>Três curvas racionais que se encontram em três pontos</i></p>
<p>II</p>  <p><i>Cúbica cuspidal</i></p>	<p>III</p>  <p><i>Duas curvas racionais que se encontram em um ponto</i></p>	<p>IV</p>  <p><i>Três curvas racionais que se encontram em um ponto</i></p>

Tabela A.1: Fibras de Kodaira em quárticas não singulares

Apêndice B

Retas na quártica de Schur

Como já foi mencionado no decorrer do texto a quártica de Schur possui exatamente 64 retas. Dividimos estas em 5 subconjuntos, sendo estes \mathcal{L} , \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 , \mathcal{M}_3 e \mathcal{M}_4 . De modo que o conjunto \mathcal{L} possui exatamente 16 retas e os demais possuem 12 retas cada. Sendo

$$\mathcal{L} = \{l(a, b) = Z(x_0 - ax_1, x_2 - bx_3) \mid (a, b) \in \mathcal{V}^2\}$$

$$\mathcal{M}_1 = \{m_1(a, b) = \mathbb{P}([(1, 0, a, 0), (0, a^3b, 0, 1)]) \mid (a, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1\}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{m_2(a, b) = \mathbb{P}[(\sqrt{3}a^3b, 0, b, -2), (0, \sqrt{3}a^3b, -b, -1)] \mid (a, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1\}$$

$$\mathcal{M}_3 = \{m_3(a, b) = \mathbb{P}[(\sqrt{3}a^3b, 0, b, -2\xi^2), (0, \sqrt{3}a^3b, -\xi b, -1)] \mid (a, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1\}$$

$$\mathcal{M}_4 = \{m_4(a, b) = \mathbb{P}[(\sqrt{3}a^3b, 0, b, -2\xi), (0, \sqrt{3}a^3b, -\xi^2b, -1)] \mid (a, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1\}$$

sendo $\mathcal{V} = \{0, 1, \xi, \xi^2\}$ (onde ξ é uma raiz cúbica primitiva da unidade), \mathcal{U}_1 e \mathcal{V}_1 os conjuntos formados pelas raízes quartas e cúbicas da unidade, respectivamente.

Já sabemos que para as retas l_{1j} , com $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ existem exatamente 6 planos contendo cada uma delas e que a curva residual em cada plano é singular do tipo *IV*. Salientamos que a representação das retas que intersectam l_{11} , l_{12} , l_{13} e l_{14} encontra-se nas tabelas B.1, B.2, B.3 e B.4 respectivamente. No que diz respeito a interseção das retas nos conjuntos \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 , \mathcal{M}_3 e \mathcal{M}_4 encontram-se nas tabelas B.5, B.6, B.7 e B.8, onde o valor 0 significa que as retas são disjuntas e o valor 1 que elas se intersectam.

Vale salientar que as interseções das retas dos conjuntos \mathcal{M}_2 , \mathcal{M}_3 e \mathcal{M}_4 são análogas às das retas em \mathcal{M}_1 na tabela B.5, as interseções entre as retas dos conjuntos \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_3 e entre \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_4 são análogas as das retas em \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 na tabela B.6, e as interseções das retas dos conjuntos \mathcal{M}_3 e \mathcal{M}_4 são análogas às das retas em \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_3 da tabela B.8.

$H_a = Z(x_2 - ax_0)$	Retas componentes da cúbrica residual C_a	P_c
$a = \infty$	$l_{21} = Z(x_0, x_2 - x_3)$ $l_{31} = Z(x_0, x_2 - \xi x_3)$ $l_{41} = Z(x_0, x_2 - \xi^2 x_3)$	$[0 : 1 : 0 : 0]$
$a = 0$	$l_{12} = Z(x_2, x_0 - x_1)$ $l_{13} = Z(x_2, x_0 - \xi x_1)$ $l_{14} = Z(x_2, x_0 - \xi^2 x_1)$	$[0 : 0 : 0 : 1]$
$a = 1$	$a_1 = Z(x_2 - x_0, x_3 - x_1)$ $a'_1 = Z(x_2 - x_0, x_3 - \xi x_1)$ $a''_1 = Z(x_2 - x_0, x_3 - \xi^2 x_1)$	$[1 : 0 : 1 : 0]$
$a = -1$	$a_2 = Z(x_2 + x_0, x_1 + x_3)$ $a'_2 = Z(x_2 + x_0, x_1 + \xi x_3)$ $a''_2 = Z(x_2 + x_0, x_1 + \xi^2 x_3)$	$[1 : 0 : -1 : 0]$
$a = i$	$a_3 = Z(x_2 - ix_0, x_1 + ix_3)$ $a'_3 = Z(x_2 - ix_0, x_1 + i\xi x_3)$ $a''_3 = Z(x_2 - ix_0, x_1 + i\xi^2 x_3)$	$[1 : 0 : i : 0]$
$a = -i$	$a_4 = Z(x_2 + ix_0, x_1 - ix_3)$ $a'_4 = Z(x_2 + ix_0, x_1 - i\xi x_3)$ $a''_4 = Z(x_2 + ix_0, x_1 - i\xi^2 x_3)$	$[1 : 0 : -i : 0]$

 Tabela B.1: Retas na quártica de Schur que intersectam l_{11} .

$H_a = Z(a(x_0 - x_1) - x_2)$	Retas componentes da cúbrica residual C_a	P_c
$a = \infty$	$l_{22} = Z(x_0 - x_1, x_2 - x_3)$ $l_{32} = Z(x_0 - x_1, x_2 - \xi x_3)$ $l_{42} = Z(x_0 - x_1, x_2 - \xi^2 x_3)$	$[1 : 1 : 0 : 0]$
$a = 0$	$l_{11} = Z(x_0, x_2)$ $l_{13} = Z(x_0 - \xi x_1, x_2)$ $l_{14} = Z(x_0 - \xi^2 x_1, x_2)$	$[0 : 0 : 0 : 1]$
$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$b_1 = Z(\frac{1}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{3}})$ $b'_1 = Z(\frac{1}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} + \frac{\xi x_3}{\sqrt{3}})$ $b''_1 = Z(\frac{1}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} + \frac{\xi^2 x_3}{\sqrt{3}})$	$[1 : -2 : \sqrt{3} : 0]$
$a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$b_2 = Z(-\frac{1}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} - \frac{x_3}{\sqrt{3}})$ $b'_2 = Z(-\frac{1}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} - \frac{\xi x_3}{\sqrt{3}})$ $b''_2 = Z(-\frac{1}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} - \frac{\xi^2 x_3}{\sqrt{3}})$	$[1 : -2 : -\sqrt{3} : 0]$
$a = \frac{i}{\sqrt{3}}$	$b_3 = Z(\frac{i}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{3}}x_3)$ $b'_3 = Z(\frac{i}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} - \frac{i\xi}{\sqrt{3}}x_3)$ $b''_3 = Z(\frac{i}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} - \frac{i\xi^2}{\sqrt{3}}x_3)$	$[1 : -2 : \sqrt{3}i : 0]$
$a = -\frac{i}{\sqrt{3}}$	$b_4 = Z(-\frac{i}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{3}}x_3)$ $b'_4 = Z(-\frac{i}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} + \frac{i\xi}{\sqrt{3}}x_3)$ $b''_4 = Z(-\frac{i}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1) - x_2, \frac{2x_0+x_1}{\sqrt{3}} + \frac{i\xi^2}{\sqrt{3}}x_3)$	$[1 : -2 : -\sqrt{3}i : 0]$

 Tabela B.2: Retas na quártica de Schur que intersectam l_{12} .

B. Retas na quártica de Schur

$H_a = Z(a(x_0 - \xi x_1) - x_2)$	Retas componentes da cúbica residual C_a	P_c
$a = \infty$	$l_{23} = Z(x_0 - \xi x_1, x_2 - x_3)$ $l_{33} = Z(x_0 - \xi x_1, x_2 - \xi x_3)$ $l_{43} = Z(x_0 - \xi x_1, x_2 - \xi^2 x_3)$	$[\xi : 1 : 0 : 0]$
$a = 0$	$l_{11} = Z(x_0, x_2)$ $l_{12} = Z(x_0 - x_1, x_2)$ $l_{14} = Z(x_0 - \xi^2 x_1, x_2)$	$[0 : 0 : 0 : 1]$
$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$c_1 = Z\left(\frac{x_0 - \xi x_1}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $c'_1 = Z\left(\frac{x_0 - \xi x_1}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{\xi x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $c''_1 = Z\left(\frac{x_0 - \xi x_1}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{\xi^2 x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$	$[1 : 1 + \sqrt{3}i : \frac{1 - \xi(1 - \sqrt{3}i)}{\sqrt{3}} : 0]$
$a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$c_2 = Z\left(-\frac{x_0 - \xi x_1}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $c'_2 = Z\left(-\frac{x_0 - \xi x_1}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{\xi x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $c''_2 = Z\left(-\frac{x_0 - \xi x_1}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{\xi^2 x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$	$[1 : 1 + \sqrt{3}i : \frac{-1 + \xi(1 - \sqrt{3}i)}{\sqrt{3}} : 0]$
$a = \frac{i}{\sqrt{3}}$	$c_3 = Z\left(\frac{i(x_0 - \xi x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{i x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $c'_3 = Z\left(\frac{i(x_0 - \xi x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{i \xi x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $c''_3 = Z\left(\frac{i(x_0 - \xi x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{i \xi^2 x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$	$[1 : 1 + \sqrt{3}i : \frac{i - \xi(1 - \sqrt{3}i)}{\sqrt{3}} : 0]$
$a = -\frac{i}{\sqrt{3}}$	$c_4 = Z\left(-\frac{i(x_0 - \xi x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{i x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $c'_4 = Z\left(-\frac{i(x_0 - \xi x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{i \xi x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $c''_4 = Z\left(-\frac{i(x_0 - \xi x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi^2 x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{i \xi^2 x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$	$[1 : 1 + \sqrt{3}i : \frac{-i + \xi(1 - \sqrt{3}i)}{\sqrt{3}} : 0]$

Tabela B.3: Retas na quártica de Schur que intersectam l_{13} .

$H_a = Z(a(x_0 - \xi^2 x_1) - x_2)$	Retas componentes da cúbica residual C_a	P_c
$a = \infty$	$l_{24} = Z(x_0 - \xi^2 x_1, x_2 - x_3)$ $l_{34} = Z(x_0 - \xi^2 x_1, x_2 - \xi x_3)$ $l_{44} = Z(x_0 - \xi^2 x_1, x_2 - \xi^2 x_3)$	$[\xi^2 : 1 : 0 : 0]$
$a = 0$	$l_{11} = Z(x_0, x_2)$ $l_{12} = Z(x_0 - x_1, x_2)$ $l_{13} = Z(x_0 - \xi x_1, x_2)$	$[0 : 0 : 0 : 1]$
$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$d_1 = Z\left(\frac{(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{i x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $d'_1 = Z\left(\frac{(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{i \xi x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $d''_1 = Z\left(\frac{(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{i \xi^2 x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$	$[1 : 1 - \sqrt{3}i : \frac{1 - \xi^2(1 - \sqrt{3}i)}{\sqrt{3}} : 0]$
$a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$d_2 = Z\left(-\frac{(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{i x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $d'_2 = Z\left(-\frac{(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{i \xi x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $d''_2 = Z\left(-\frac{(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{i \xi^2 x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$	$[1 : 1 - \sqrt{3}i : \frac{-1 + \xi^2(1 - \sqrt{3}i)}{\sqrt{3}} : 0]$
$a = \frac{i}{\sqrt{3}}$	$d_3 = Z\left(\frac{i(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{i x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $d'_3 = Z\left(\frac{i(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{i \xi x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $d''_3 = Z\left(\frac{i(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{i \xi^2 x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$	$[1 : 1 - \sqrt{3}i : \frac{i - \xi^2(1 - \sqrt{3}i)}{\sqrt{3}} : 0]$
$a = -\frac{i}{\sqrt{3}}$	$d_4 = Z\left(-\frac{i(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{i x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $d'_4 = Z\left(-\frac{i(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{i \xi x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$ $d''_4 = Z\left(-\frac{i(x_0 - \xi^2 x_1)}{\sqrt{3}} - x_2, \frac{2\xi x_0 + x_1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{i \xi^2 x_3}{\sqrt[6]{3}}\right)$	$[1 : 1 - \sqrt{3}i : \frac{-i + \xi^2(1 - \sqrt{3}i)}{\sqrt{3}} : 0]$

Tabela B.4: Retas na quártica de Schur que intersectam l_{14} .

	$m_1(1, 1)$	$m_1(1, \xi)$	$m_1(1, \xi^2)$	$m_1(-1, 1)$	$m_1(-1, \xi)$	$m_1(-1, \xi^2)$	$m_1(i, 1)$	$m_1(i, \xi)$	$m_1(i, \xi^2)$	$m_1(-i, 1)$	$m_1(-i, \xi)$	$m_1(-i, \xi^2)$
$m_1(1, 1)$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$m_1(1, \xi)$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$m_1(1, \xi^2)$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$m_1(-1, 1)$	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$m_1(-1, \xi)$	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$m_1(-1, \xi^2)$	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$m_1(i, 1)$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$m_1(i, \xi)$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$m_1(i, \xi^2)$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$m_1(-i, 1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$m_1(-i, \xi)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$m_1(-i, \xi^2)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Tabela B.5: Intersecção entre as retas de \mathcal{M}_1 .

	$m_2(1, 1)$	$m_2(1, \xi)$	$m_2(1, \xi^2)$	$m_2(-1, 1)$	$m_2(-1, \xi)$	$m_2(-1, \xi^2)$	$m_2(i, 1)$	$m_2(i, \xi)$	$m_2(i, \xi^2)$	$m_2(-i, 1)$	$m_2(-i, \xi)$	$m_2(-i, \xi^2)$
$m_2(1, 1)$	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
$m_2(1, \xi)$	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
$m_2(1, \xi^2)$	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
$m_2(-1, 1)$	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$m_2(-1, \xi)$	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
$m_2(-1, \xi^2)$	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
$m_2(i, 1)$	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$m_2(i, \xi)$	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$m_2(i, \xi^2)$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
$m_2(-i, 1)$	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$m_2(-i, \xi)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$m_2(-i, \xi^2)$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Tabela B.6: Intersecção entre as retas de \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 .

	$m_2(1, 1)$	$m_2(1, \xi)$	$m_2(1, \xi^2)$	$m_2(-1, 1)$	$m_2(-1, \xi)$	$m_2(-1, \xi^2)$	$m_2(i, 1)$	$m_2(i, \xi)$	$m_2(i, \xi^2)$	$m_2(-i, 1)$	$m_2(-i, \xi)$	$m_2(-i, \xi^2)$
$m_3(1, 1)$	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
$m_3(1, \xi)$	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
$m_3(1, \xi^2)$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
$m_3(-1, 1)$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$m_3(-1, \xi)$	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
$m_3(-1, \xi^2)$	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
$m_3(i, 1)$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
$m_3(i, \xi)$	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
$m_3(i, \xi^2)$	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$m_3(-i, 1)$	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
$m_3(-i, \xi)$	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
$m_3(-i, \xi^2)$	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0

Tabela B.7: Intersecção entre as retas de \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_3 .

	$m_2(1, 1)$	$m_2(1, \xi)$	$m_2(1, \xi^2)$	$m_2(-1, 1)$	$m_2(-1, \xi)$	$m_2(-1, \xi^2)$	$m_2(i, 1)$	$m_2(i, \xi)$	$m_2(i, \xi^2)$	$m_2(-i, 1)$	$m_2(-i, \xi)$	$m_2(-i, \xi^2)$
$m_4(1, 1)$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$m_4(1, \xi)$	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
$m_4(1, \xi^2)$	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
$m_4(-1, 1)$	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
$m_4(-1, \xi)$	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
$m_4(-1, \xi^2)$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
$m_4(i, 1)$	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
$m_4(i, \xi)$	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
$m_4(i, \xi^2)$	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
$m_4(-i, 1)$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
$m_4(-i, \xi)$	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
$m_4(-i, \xi^2)$	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1

Tabela B.8: Intersecção entre as retas de \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_4 .

Referências Bibliográficas

- [1] ARMSTRONG, J., POVERO, M. & SALAMON, S., *Twistor lines on cubic surfaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec., Torino, vol. 71, 3-4, p. 317-338, 2013.
- [2] ASSIS, C.F.C., *As 27 retas numa superfície cúbica não singular em \mathbb{P}^3* , Dissertação de mestrado, DM-UFPB, 2004.
- [3] BARTH, W. & BAUER, T., *Smooth quartic surfaces with 352 conics*, Manuscripta Mathematica, vol. 85, p. 409-418, 1994.
- [4] BAUER, T., *Smooth Kummer surfaces in projective three-space*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 125, n. 9, p. 2537-2541, 1997.
- [5] BOISSIÉRE, S. & SARTI, A., *Counting Lines on Surfaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci, vol. 6, n. 1, p. 39-52, 2007.
- [6] CAYLEY, A., *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*, The Cambridge and Dublin Math., v. 4, p. 118-132, 1849.
- [7] COX, D., LITTLE, J. & O'SHEA, D., *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, New York, 3ª Ed., 2006.
- [8] LISBOA, V. J., *O problema das 4 retas do cálculo de Schubert*, Dissertação de mestrado, DM-UFPB, 2011.
- [9] MIYAOKA, Y., *The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants.*, Mathematische Annalen, vol. 268, n. 2, p. 159-171, 1984.
- [10] NIKULIN, V.V., *On Kummer surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., n. 2, vol. 39, p. 278-293, 1975.
- [11] RAMS, S., *Projective surfaces with many skew lines*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 133, n. 1, p. 11-13, 2004.

- [12] RAMS, S. & SCHÜTT, M., *64 lines on smooth quartic surfaces*, Mathematische Annalen, vol. 362, n. 1-2, p. 679-698, 2015.
- [13] RÊGO, T.L.O., *Sobre o número máximo de retas numa superfície não singular de grau 4 em \mathbb{P}^3* , Dissertação de mestrado, DM-UFPB, 2016.
- [14] REID, M., *Undergraduate Algebraic Geometry*, London Mathematical Society Texts 12, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [15] SCHÄLAFLI, L., *On the distribution of surfaces of the third order into species, in reference to the absence or presence of singular points, and the reality of their lines*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 153, n. 6, p. 193-241, 1863.
- [16] SCHUR, F., *Ueber einer besondere Class von Flächen vieter Ordnung*, Math. Ann. 20, p. 254-296, 1882.
- [17] SEGRE, B., *The maximum number of lines lying on a quartic surface*, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Ser. 14, p. 86-96, 1943.
- [18] SHAFAREVICH, I. R., *Basic algebraic geometry 1*, New York, Springer-Verlag, 1997.
- [19] SILVA, S.A.V., *Sobre o número máximo de retas em superfícies de grau d em \mathbb{P}^3* , Dissertação de mestrado, DM-UFPB, 2016.