Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Operadores Lineares Cohen Fortemente Somantes

Fábio da Silva de Siqueira Leite

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Operadores Lineares Cohen Fortemente Somantes

por

Fábio da Silva de Siqueira Leite

sob a orientação do

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2017

L533o Leite, Fábio da Silva de Siqueira.

Operadores lineares Cohen fortemente somantes / Fábio da Silva de Siqueira Leite. - João Pessoa, 2016.

95 f. : il. -

Orientador: Jamilson Ramos Campos.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Operadores Cohen - Fortemente somantes. 3. Operadores absolutamente somantes. 4. Ideais de operadore. 5. Espaços de sequências. 6. Ideal dual. I. Título.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Operadores Lineares Cohen Fortemente Somantes

por

Fábio da Silva de Siqueira Leite [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 21 de fevereiro de 2017.

Banca Examinadora:

Jamilson Ramos Campos

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho – UFU
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)

[1]O autor foi bolsista do(a) CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ao meu pai (in memorian).

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida.

À minha família, pelo apoio e compreensão, sem os quais este projeto não seria possível.

À minha companheira Germana, pela compreensão e constante apoio.

Ao meu professor e orientador Jamilson Ramos Campos, pelo inestimável apoio, paciência e disponibilidade. Pelos agradáveis momentos de discussão, importante fonte de inspiração e aprendizado.

Aos professores da AESA-CESA, instituição onde tive o prazer de fazer a licenciatura em matemática e começar a sonhar com dias melhores. Em especial, aos professores Juscelino Arcanjo (o famoso Madeira), Dayse Socorro Alves e ao casal Isabel Cristina e Ronaldo Andrade.

Aos professores do PGMAT: Jamilson Ramos Campos, Manassés Xavier de Souza, Milton de Lacerda Oliveira, Lizandro Sanchez Challapa, Napoleon Caro Tuesta e, especialmente, à professora Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia, com os quais tive o prazer de pagar ao menos uma disciplina e aprender muita matemática.

Aos professores Geraldo Botelho e Joedson Santos, membros da Banca Examinadora, por aceitarem nosso convite e por suas valorosas contribuições ao trabalho.

Ao professor Uberlandio Batista Severo, pelo incentivo e disponibilidade para tirar minhas dúvidas sobre o programa meses antes do início da seleção.

Aos colegas e amigos do PGMAT, em especial à Ricardo Bruno, Dayanne Santos, Esaú Alves e Djair Paulino pelos agradáveis momentos compartilhados.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo de nosso trabalho é estudar a classe dos operadores Cohen fortemente p-somantes. Inicialmente, apresentamos resultados básicos de Análise Funcional necessários ao desenvolvimento do texto e, em seguida, tratamos dos espaços de sequências que serão usados na definição e estudo das classes de operadores envolvidas no trabalho, como necessariamente a classe dos operadores absolutamente somantes. Apresentamos também o espaço das sequências Cohen-Khalil fortemente (q,p)-somáveis e o espaço das sequências Cohen fortemente p-somáveis, como caso particular do primeiro. A partir disto, definimos a classe dos operadores Cohen fortemente p-somantes e a classe dos operadores Cohen-Khalil fortemente (s,r,p)-somantes que, sob certas condições, são equivalentes. Concluímos com um estudo, sob o ponto de vista da teoria dos ideais de operadores, usando o ambiente abstrato criado por G. Botelho e J. R. Campos, para mostrar que Π_p e $\mathcal{D}_p$ são ideais de Banach e valem as relações $\Pi_p^{\text{dual}} = \mathcal{D}_{p^*}$ e $\mathcal{D}_{p^*}^{\text{dual}} = \Pi_p$, onde p e p^* são índices conjugados.

Palavras-chave: Operadores Cohen fortemente somantes, operadores absolutamente somantes, ideais de operadores, espaços de sequências, ideal dual.

Abstract

The goal of our work is to study the class of the Cohen strongly summing operators. Initially, we present basic results from Functional Analysis that are necessary for the development of the text and then we deal with sequence spaces which will be used to define and study the classes of operators involved in this work, as necessarily the class of the absolutely summing operators. We also study the sequence space of the Cohen-Khalil strongly (q, p)-summable sequences and the sequence space of the Cohen strongly p-summable sequences, as a particular instance of the former. From this, we define the class of the Cohen strongly p-summing operators and the class of the Cohen-Khalil strongly (s, r, p)-summing operators which, under certain conditions, are equivalent. We conclude with a study, from the viewpoint of the operator ideal theory, using the abstract environment created by G. Botelho and J. R. Campos, in order to show that Π_p and $\mathcal{D}_p$ are Banach ideals and the relations $\Pi_p^{\text{dual}} = \mathcal{D}_{p^*}$ and $\mathcal{D}_{p^*}^{\text{dual}} = \Pi_p$ are valid, where p and p^* are conjugate indexes.

Keywords: Cohen strongly summing operators, absolutely summing operators, operator ideals, sequence spaces, dual ideal.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{N}_0$ denota o conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos;
- $\mathbb{K}$ denota o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- E, F e G denotam espaços vetoriais normados;
- $\mathcal{L}(E, F)$ denota o conjunto de todos os operadores lineares e contínuos de E em F;
- B_E denota a bola unitária fechada no espaço E;
- $\mathring{B}_E$ denota a bola unitária aberta no espaço E;
- E' denota o dual topológico do espaço E;
- $\arg(\cdot)$ denota a função argumento de um número complexo;
- $\det(\cdot)$ denota a função determinante $\det\colon \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$;
- $\operatorname{tr}(\cdot)$ denota a função traço $\operatorname{tr}\colon \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$;
- ℓ_p denota o espaço das sequências $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{K}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < \infty$;
- $\dim E$ denota a dimensão do espaço E;
- $\operatorname{Im}(f)$ denota a imagem da aplicação f;
- $\ker(T)$ denota o núcleo do operador linear T;
- $E \overset{1}{\hookrightarrow} F$ denota $E \subseteq F$ e $\|x\|_F \leq \|x\|_E$ para todo $x \in E$;

- $E \overset{1}{=} F$ denota $E = F$ e $\|x\|_F = \|x\|_E$ para todo $x \in E$;
- $(x_j)_{j=1}^n$ denota a sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$;
- $\operatorname{int} A$ denota o interior do conjunto A;
- id_E denota a aplicação identidade em E;
- $|A|$ denota a cardinalidade do conjunto A;
- e_n denota a sequência $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ cujos termos são todos nulos com exceção do n-ésimo;
- $\|\cdot\|_1$ denota a norma $\|\cdot\|_1 : E \times F \to [0, \infty)$ dada por $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F$;
- (X, Σ) denota o espaço mensurável formado pelo conjunto X e pela σ-álgebra Σ;
- $M^+(X, \Sigma)$ denota o conjunto das funções Σ-mensuráveis não negativas $f \colon X \to [0, \infty)$;
- $[x]$ denota o espaço vetorial gerado pelo vetor x.

Introdução

Um importante resultado devido a A. Dvoretzky e C. Rogers [11] estabelece que, em espaços vetoriais de dimensão infinita, nem toda série incondicionalmente convergente converge absolutamente. A. Grothendieck [12] propôs uma nova demonstração deste fato e formulou o conceito de operadores absolutamente somantes, a saber, operadores que melhoram a convergência de séries: um operador é dito absolutamente somante se transforma séries incondicionalmente convergentes em absolutamente convergentes. As ideias de A. Grothendieck foram exploradas nos trabalhos de A. Pietsch [21], J. Lindenstrauss e A. Pelczyński [16] e B. Mitjagin e A. Pelczyński [17], que melhoraram a apresentação geral da teoria.

Em [21] A. Pietsch introduziu a classe dos operadores absolutamente p-somantes, uma generalização da classe dos operadores absolutamente somantes, e mostrou que o operador $\mathrm{id}\colon \ell_1 \hookrightarrow \ell_2$ é absolutamente 2-somante mas que o operador $\mathrm{id}'\colon (\ell_2)' \hookrightarrow (\ell_1)'$ não o é. Tal fato serviu de inspiração para J. S. Cohen no sentido da busca de uma caracterização para o dual dessa classe. Em seu trabalho [8], Cohen caracterizou o dual da classe dos operadores absolutamente p-somantes, definindo um novo espaço de sequências e uma nova classe de operadores, atualmente chamada de classe dos operadores Cohen fortemente p^*-somantes, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Em paralelo, muitas outras classes de operadores entre espaços de Banach estavam sendo estudadas. A. Pietsch [22] encarregou-se de criar um ambiente abstrato para o estudo dessas classes. Nascia, então, a teoria dos ideais de operadores.

Em nosso trabalho, estudamos a classe $\mathcal{D}_p$ dos operadores Cohen fortemente p-somantes. Usamos o espaço das sequências Cohen-Khalil fortemente (q,p)-somáveis, uma generalização do espaço das sequências Cohen fortemente p-somáveis, definido por R. Khalil [14], para definir a classe $\mathcal{C}_{(s,r;p)}$ dos operadores Cohen-Khalil fortemente (s,r,p)-somantes e então mostrar que, na verdade, $\mathcal{C}_{(s,r;p)} = \mathcal{D}_p$, com $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p^*}$. Este é um resultado de coincidência observado por J. R. Campos em [6], como consequência do Teorema de Dominação de Pietsch Generalizado [19].

Para mostrar que as classes Π_p e $\mathcal{D}_p$ são ideais de Banach, fazemos uso do ambiente abstrato criado por G. Botelho e J. R. Campos em [3].

Em [1], H. Apiola determina os duais topológicos dos espaços $\ell_p^w(E)$ e $\ell_p\langle E\rangle$. Usaremos esse e outros resultados para mostrar que $\mathcal{D}_{p^*}^{\text{dual}} = \Pi_p$ e $\Pi_p^{\text{dual}} = \mathcal{D}_{p^*}$.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1 apresentamos resultados básicos de Análise Funcional que serão usados ao longo do texto.

O Capítulo 2 é fundamental para os capítulos subsequentes. Nele estudamos os espaços de sequências que serão usados na definição dos operadores absolutamente (p,q)-somantes, ainda no Capítulo 2.

O Capítulo 3 é dedicado aos operadores Cohen fortemente p-somantes. Nesse capítulo estudamos o espaço das sequências Cohen-Khalil fortemente (q,p)-somáveis e o espaço das sequências Cohen fortemente p-somáveis. Em seguida, definimos as classes $\mathcal{D}_p$ e $\mathcal{C}_{(s,r;p)}$ dos operadores Cohen fortemente p-somantes e dos operadores Cohen-Khalil fortemente (s,r,p)-somantes, respectivamente. Concluímos com a prova de que $\mathcal{D}_p = \mathcal{C}_{(s,r;p)}$, com $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p^*}$.

No Capítulo 4 fazemos uma breve introdução à teoria dos ideais de operadores. Nosso principal objetivo neste capítulo é mostrar que Π_p e $\mathcal{D}_p$ são ideais de Banach e, além disso, $\mathcal{D}_{p^*}^{\text{dual}} = \Pi_p$ e $\Pi_p^{\text{dual}} = \mathcal{D}_{p^*}$.

No Apêndice A apresentamos resultados que servem de apoio à leitura, bem como resultados que completam alguns pontos apresentados no texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos resultados básicos de análise funcional que nos auxiliarão no desenvolvimento do trabalho. Algumas demonstração são omitidas ou por serem simples ou devido às limitações impostas a um texto dessa natureza. Um pequeno número de resultados auxiliares, por conta de suas especificidades, compõem o apêndice. Os livros [5], [10] e [13] foram as principais referências para a elaboração desta introdução.

1.1 Resultados Clássicos de Análise Funcional

Nesta seção, apresentamos conceitos e resultados clássicos de Análise Funcional. Comecemos por relembrar as definições de norma e de espaço de Banach.

Definição 1.1. Seja E um espaço vetorial. Uma *norma* em E é uma aplicação

$$\|\cdot\|_E \colon E \longrightarrow [0,\infty),\ x \longmapsto \|x\|_E,$$

que satisfaz as seguintes condições:

N1) $\|x\|_E \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

N2) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.

N3) $\|x+y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ para todos x e $y \in E$ (desigualdade triangular).

Neste caso, o par $(E,\ \|\cdot\|_E)$ é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente, espaço normado. Quando não houver risco de ambiguidade, escreveremos $\|\cdot\|$ no lugar de $\|\cdot\|_E$.

Definição 1.2. Um espaço normado E é dito de *Banach* quando é completo na métrica

$$d(x,y) = \|x-y\|, x, y \in E,$$

induzida pela norma.

Os subespaços fechados de um espaço de Banach E têm uma importância particular, como mostra a

Proposição 1.3. Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço de E. Então, F é Banach se, e somente se, F é fechado em E.

Demonstração: Suponha F um espaço de Banach e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em F tal que $x_n \to x \in E$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\| &= \|x_m - x + x - x_n\| \\ &\leq \|x_m - x\| + \|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

para todos $m, n > n_0$. Consequentemente, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em F e assim existe $y \in F$ tal que $x_n \to y$. Por unicidade, $x = y \in F$ e, portanto, F é fechado em E.

Reciprocamente, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F. Então, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E e existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Como F é fechado, segue-se que $x \in F$, ou seja, F é um espaço de Banach. ■

Sejam E e F espaços normados. Uma aplicação $T \colon E \to F$ é dita *linear* se satisfaz:

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todos $x, y \in E$; e

(ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $x \in E$.

Se para todos $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$, então T é, por definição, uma aplicação contínua.

Frenquentemente substituímos a definição de operador linear contínuo por uma das equivalências abaixo.

Teorema 1.4. *Sejam E, F espaços normados e $T \colon E \to F$ um operador linear. São equivalentes:*

(a) *T é Lipschitziano.*

(b) *T é uniformemente contínuo.*

(c) *T é contínuo.*

(d) *T é contínuo em algum ponto de E.*

(e) *T é contínuo na origem.*

(f) $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| < \infty$.

(g) *Existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$ para todo $x \in E$.*

Demonstração: Da teoria dos espaços métricos, sabemos que as implicações (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) são sempre válidas e não dependem da linearidade de T.

(d)$\Rightarrow$(e) Digamos que T é contínuo no ponto $x_0 \in E$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Seja $x \in E$ tal que $\|x\| < \delta$. Então, $\|x\| = \|x + x_0 - x_0\| < \delta$ implica

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(0)\| &= \|T(x) - 0\| = \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\| \\ &= \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \varepsilon\end{aligned}$$

donde T é contínuo na origem.

(e)$\Rightarrow$(f) Sendo T contínuo na origem, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| < 1$ sempre que $\|x\| < \delta$. Daí, $\|x\| \leq 1$ implica $\left\|\frac{\delta}{2}x\right\| < \delta$ que por sua vez implica

$$\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\| < 1$$

para todo $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$. Logo,

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

(f)$\Rightarrow$(g) Se $x = 0$ a desigualdade é trivialmente satisfeita para qualquer $c > 0$. Seja $x \in E \setminus \{0\}$. Então,

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|T(y)\| =: c < \infty.$$

Portanto, $\|T(x)\| \leq c\,\|x\|$ para todo $x \in E$.

(g)$\Rightarrow$(a) Para todos $x, y \in E$, temos

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq c\,\|x - y\|,$$

isto é, T é Lipschitziano. ■

Dados E e F espaços normados, denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores lineares e contínuos entre E e F. Com as operações usuais, $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial normado com norma dada por

$$\|T\| := \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F .$$

Mais ainda, se F for Banach, então $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach (veja [5], Proposição 2.1.4). Em particular, se $F = \mathbb{K}$, então $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ é sempre Banach. Neste caso, $(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \|\cdot\|)$ é o dual topológico E' de E. Os elementos de E' são chamados de funcionais lineares.

Proposição 1.5. Sejam E, F e G espaços normados. Se $A \in \mathcal{L}(E, G)$ e $B \in \mathcal{L}(G, F)$, então $B \circ A \in \mathcal{L}(E, F)$ e

$$\|B \circ A\| \leq \|B\| \|A\|.$$

Demonstração: A linearidade do operador $B \circ A$ segue da linearidade dos operadores A e B. Além disso, para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|(B \circ A)(x)\| &= \|B(A(x))\| \leq \|B\| \, \|A(x)\| \\ &\leq \|B\| \, \|A\| \, \|x\| . \end{aligned}$$

Logo, $B \circ A \in \mathcal{L}(E, F)$. Finalmente, tomando o supremo com $x \in B_E$, obtemos

$$\|B \circ A\| \leq \|B\| \, \|A\| .$$

■

Enunciamos agora os principais resultados desta seção, a saber, o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema do Gráfico Fechado e o Teorema de Hahn-Banach. Por se tratarem de resultados clássicos de Análise Funcional, faremos apenas demonstrações de alguns desses resultados (os mais simples ou ilustrativos) e apontamos referências das demais.

O Teorema de Banach-Steinhaus estabelece condições necessárias para que a limitação pontual de uma família de operadores lineares contínuos implique limitação uniforme. Para demonstrá-lo, precisaremos do seguinte resultado da teoria dos espaços métricos:

Teorema 1.6 (Baire). *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não vazio.*

Demonstração: Veja [5, Teorema 2.3.1]. ■

Teorema 1.7 (**Banach-Steinhaus**). *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E,F)$ satisfazendo a seguinte condição: para cada $x \in E$ existe $c_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < c_x.$$

Então,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty.$$

Demonstração: O conjunto

$$\{x \in E\colon\ \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0,n])$$

é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $i \in I$, pois a aplicação $\|\cdot\| \circ T_i$ é contínua. Como a interseção de conjuntos fechado é sempre um fechado, segue que o conjunto

$$A_n := \left\{x \in E\colon\ \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| \leq n\right\} = \bigcap_{i\in I} \{x \in E\colon\ \|T_i(x)\| \leq n\}$$

é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Com efeito, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq E$ por definição. Para a inclusão contrária, dado $x \in E$ existem $c_x < \infty$ e $n_0(x) \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < c_x \leq n_0,$$

donde $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Pelo Teorema 1.6, $\operatorname{int} A_k \neq \varnothing$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo, dado $a \in \operatorname{int} A_k$ existe $r > 0$ tal que a bola fechada de centro a e raio r está contida no aberto $\operatorname{int} A_k$, ou seja,

$$\{x \in E\colon\ \|x - a\| \leq r\} \subseteq \operatorname{int} A_k.$$

Seja $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$. Note-se que, se $x = a + ry$, então $\|x - a\| = \|ry\| \leq r$ e, portanto, $x \in A_k$. Daí,

$$\|T_i(x-a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq 2k,$$

para todo $i \in I$. Logo, $\|T_i(ry)\| = \|T_i(x-a)\| \leq 2k$ e $\|T_i(y)\| \leq \dfrac{2k}{r}$ para todo $i \in I$ e todo $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$. Tomando o supremo sobre $y \in B_E$ obtemos

$$\|T_i\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|T_i(y)\| \leq \frac{2k}{r},$$

para todo $i \in I$. Por fim, tomando o supremo sobre os índices $i \in I$ concluímos que

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| \leq \frac{2k}{r} < \infty.$$

■

Corolário 1.8. Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E, F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F para todo x em E. Se

$$T \colon E \to F \text{ é definido por } T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x),$$

então T é um operador linear contínuo.

Demonstração: Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x, y \in E$. Então,

$$\begin{aligned} T(x + \lambda y) &= \lim_n T_n(x + \lambda y) = \lim_n (T_n(x) + \lambda T_n(y)) \\ &= \lim_n T_n(x) + \lambda \left(\lim_n T_n(y)\right) = T(x) + \lambda T(y). \end{aligned}$$

Logo, T é linear.

Da hipótese de convergência segue que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é limitada para todo $x \in E$. Daí,

$$\sup_n \|T_n(x)\| < \infty,$$

para todo $x \in E$. Pelo Teorema 1.7, existe $c > 0$ tal que $\sup_n \|T_n\| \leq c$. Além disso,

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \, \|x\| \leq c \, \|x\| \, ,$$

para todos $x \in E$ e $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$ concluímos que $\|T(x)\| \leq c \, \|x\|$ para todo $x \in E$, o que acarreta a continuidade de T. ■

Uma aplicação $T \colon E \to F$ é *aberta* se $T(A)$ é aberto em F para todo conjunto A aberto em E. O próximo teorema estabelece quando um operador linear e contínuo entre espaços de Banach é uma aplicação aberta.

Teorema 1.9 (**Teorema da Aplicação Aberta**). *Sejam E, F espaços de Banach e $T \colon E \to F$ um operador linear, contínuo e sobrejetor. Então, T é uma aplicação aberta.*

Em particular, todo operador linear, contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.

Demonstração: Veja [5, Teorema 2.4.2]. ∎

O gráfico de um operador linear $T\colon E \to F$ é, por definição, o conjunto

$$\mathrm{G}(T) \coloneqq \{(x, T(x))\colon x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Da linearidade de T segue que $\mathrm{G}(T)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$. Vejamos que a continuidade de T é equivalente ao fato de $\mathrm{G}(T)$ ser fechado na topologia produto de $E \times F$.

Teorema 1.10 (**Teorema do Gráfico Fechado**). *Sejam E, F espaços de Banach e $T\colon E \to F$ um operador linear. Então, T é contínuo se, e somente se, $\mathrm{G}(T)$ é fechado em $E \times F$.*

Demonstração: Se T é contínuo, então a função

$$\begin{aligned} f\colon E \times F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \|T(x) - y\| \end{aligned}$$

é contínua. De fato, seja $(x_k, y_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $E \times F$ tal que $(x_k, y_k) \to (x, y)$, isto é, $x_k \to x$ em E e $y_k \to y$ em F. Da continuidade de T segue que $T(x_k) \to T(x)$ em F. Consequentemente, $T(x_k) - y_k \to T(x) - y$ e, pela continuidade da função $\|\cdot\|$ segue que $\|T(x_k) - y_k\| \to \|T(x) - y\|$. Portanto, f é contínua. Logo, $\mathrm{G}(T) = f^{-1}(\{0\})$ é fechado.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathrm{G}(T)$ seja fechado. É bem conhecido que o produto cartesiano $E \times F$ de espaços de Banach também é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_1$. Da Proposição 1.3 segue que $\mathrm{G}(T)$ também é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_1$.
Afirmação: A aplicação $\pi\colon \mathrm{G}(T) \to E$, dada por $\pi(x, T(x)) = x$, é linear, contínua e bijetora.

Com efeito, dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x, T(x)), (y, T(y)) \in \mathrm{G}(T)$ temos

$$\begin{aligned} \pi((x, T(x)) + \lambda(y, T(y))) &= \pi(x + \lambda y, T(x) + \lambda T(y)) = \pi(x + \lambda y, T(x + \lambda y)) \\ &= x + \lambda y = \pi(x, T(x)) + \lambda \pi(y, T(y)), \end{aligned}$$

donde π é linear. Da relação $x \in E \mapsto T(x) \in F$, segue que $\pi(\mathrm{G}(T)) = E$, ou seja, π é sobrejetiva. Já $\pi(x, T(x)) = 0$ implica $x = 0$, donde $T(x) = 0$ e, por isso, $\ker(\pi) = \{0\}$.

Assim, π é injetiva. A continuidade de π segue da desigualdade

$$\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1 .$$

Seja A um subconjunto aberto de $G(T)$. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, $(\pi^{-1})^{-1}(A) = A$ é aberto, logo π^{-1} é uma aplicação contínua (e linear, pois π é linear). Assim, existe $c > 0$ tal que

$$\left\|\pi^{-1}(x)\right\|_1 = \|(x, T(x))\|_1 \leq c\,\|x\|,$$

para todo $x \in E$. Daí,

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\|_1 \leq c\,\|x\|,$$

para todo $x \in E$. Portanto, T é contínuo. ■

O Teorema da Hahn-Banach destaca-se pelo alcance de suas aplicações, bem como pelo número de consequências imediatas que possui. A versão enunciada a seguir é válida para espaços vetoriais reais e complexos.

Teorema 1.11 (Hahn-Banach). *Sejam E um espaço vetorial e $p\colon E \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a|\,p(x) \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \text{ e todo } x \in E, \text{ e}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

Se $G \subseteq E$ é um subespaço vetorial e $\varphi\colon G \to \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\widetilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{K}$ que estende φ, isto é, $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, e que satisfaz $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração: Veja [5, Teorema 3.1.2]. ■

Apresentamos agora três consequências imediatas do Teorema de Hahn-Banach. Embora sejam corolários, estes resultados também são conhecidos como Teoremas de Hahn-Banach. Os dois últimos serão usados inúmeras vezes ao longo deste trabalho, indistintamente sob a mesma nomenclatura.

Corolário 1.12. Sejam G um subespaço de um espaço normado E e $\varphi\colon G \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Demonstração: Consideremos a função $p\colon E \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|\varphi\| \|x\|$. Para todo $a \in \mathbb{K}$ e todos $x, y \in E$, temos

$$p(ax) = \|\varphi\| \|ax\| = |a| \|\varphi\| \|x\| = |a| \, p(x)$$

e

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|\varphi\| \|x+y\| \leq \|\varphi\| (\|x\| + \|y\|) \\ &= \|\varphi\| \|x\| + \|\varphi\| \|y\| = p(x) + p(y). \end{aligned}$$

Como $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| = p(x)$ para todo $x \in G$, pelo Teorema de Hahn-Banach existe um funcional linear $\widetilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e que satisfaz $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x) = \|\varphi\| \|x\|$ para todo $x \in E$. Logo, $\widetilde{\varphi}$ é contínuo e $\|\widetilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\varphi\| = \sup_{x \in B_G} |\varphi(x)| &= \sup_{x \in B_G} |\widetilde{\varphi}(x)| \\ &\leq \sup_{x \in B_E} |\widetilde{\varphi}(x)| = \|\widetilde{\varphi}\|. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. ■

Corolário 1.13. Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.

Demonstração: Sejam $G = [x_0]$ o espaço gerado por x_0 e $\varphi\colon G \to \mathbb{K}$ o funcional linear contínuo dado por $\varphi(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Então, pelo Corolário 1.12 existe $\widetilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{K}$ funcional linear contínuo tal que $\widetilde{\varphi}$ coincide com φ em G e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Portanto, $\widetilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|$ e

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\| &= \sup_{\|\lambda x_0\| \leq 1} |\varphi(\lambda x_0)| \\ &= \sup_{\|\lambda x_0\| \leq 1} |\lambda| \|x_0\| = \sup_{\|\lambda x_0\| \leq 1} \|\lambda x_0\| = 1. \end{aligned}$$

■

Corolário 1.14. Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \max\{|\varphi(x)| \colon \varphi \in E' \; e \; \|\varphi\| = 1\}.$$

Demonstração: Dado $x \in E$, vale $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\|$ para todo $\varphi \in E'$. Daí,

$$\sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} (\|\varphi\| \|x\|) = \|x\|.$$

Pelo Corolário 1.13 existe $\psi \in E'$ tal que $\|\psi\| = 1$ e $\psi(x) = \|x\|$. Logo,

$$\|x\| = \psi(x) \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|$$

e com isso ganhamos a primeira igualdade.

A segunda igualdade segue de

$$\max \{|\varphi(x)| \colon \varphi \in E' \text{ } e \text{ } \|\varphi\| = 1\} \leq \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|$$

e de

$$\sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| = \|x\| = \psi(x) \leq \max \{|\varphi(x)| \colon \varphi \in E' \text{ } e \text{ } \|\varphi\| = 1\}.$$

■

1.2 Operadores de Posto Finito e Adjunto de um operador

Um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é dito de *posto finito* quando $\dim(\mathrm{Im}(T)) < \infty$. O operador $\varphi \otimes y \colon E \to F$ dado por $\varphi \otimes y(x) := \varphi(x)y$, onde $\varphi \in E'$ e $y \in F$, é um exemplo de operador linear contínuo de posto finito. De fato, dados $a, b \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\varphi \otimes y(a + \lambda b) = \varphi(a + \lambda b)y = \varphi(a)y + \lambda\varphi(b)y = \varphi \otimes y(a) + \lambda\varphi \otimes y(b),$$

donde $\varphi \otimes y$ é linear. A continuidade de $\varphi \otimes y$ segue da igualdade

$$\|\varphi \otimes y(x)\| = \|\varphi(x)y\| \leq \|\varphi\| \|y\| \|x\|,$$

válida para todo $x \in E$. Mais ainda, $\|\varphi \otimes y\| = \sup_{x \in B_E} \|\varphi(x)y\| = \|\varphi\| \|y\|$. Como $\varphi \otimes y(E) \subseteq [y]$, concluímos que $\varphi \otimes y$ é um operador linear contínuo de posto finito. Denotaremos por $\mathcal{F}(E, F)$ o conjunto dos operadores lineares contínuos de posto finito de E em F. Tais operadores possuem a seguinte caracterização

Proposição 1.15. Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então T é de posto finito se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$ e $y_1, \ldots, y_n \in F$ tais que $T = \varphi_1 \otimes y_1 + \cdots + \varphi_n \otimes y_n$.

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador de posto finito, digamos $\dim(T(E)) = n$. Então, para todo $x \in E$, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (que dependem de x) e uma base

$\{y_1, \ldots, y_n\}$ do espaço $T(E)$ tais que o operador T escreve-se de maneira única por

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i. \tag{1.1}$$

Então definimos as funções $\varphi_i : E \to \mathbb{K}$ pondo $\varphi_i(x) = \alpha_i$. Se $a, b \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a + \lambda b) y_i = T(a + \lambda b) &= T(a) + \lambda T(b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a) y_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda \varphi_i(b) y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\varphi_i(a) + \lambda \varphi_i(b)\right] y_i.
\end{aligned}$$

Pela unicidade da representação (1.1), $\varphi_i(a+\lambda b) = \varphi_i(a) + \lambda\varphi_i(b)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, logo cada φ_i é linear. É simples mostrar que a função $\|\cdot\|_s : T(E) \to [0, \infty)$ dada por $\|T(x)\|_s := \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)|$ define uma norma em $T(E)$. Como $T(E)$ tem dimensão finita, a norma de F restrita a $T(E)$ e a norma $\|\cdot\|_s$ são equivalentes, logo existe $k > 0$ tal que

$$|\varphi_i| \leq \|T(x)\|_s \leq k \|T(x)\| \leq k \|T\| \|x\|,$$

para todos $x \in E$, $i = 1, \ldots, n$. Portanto, $\varphi_i \in E'$ para todo $i = 1, \ldots, n$. De (1.1) segue que $T = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes y_i$.

Reciprocamente, se $T = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes y_i$, então $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $T(E) \subseteq [y_1, \ldots, y_n]$, donde $T \in \mathcal{F}(E, F)$. ■

Para cada $T \in \mathcal{L}(E, F)$, definimos o operador $T' \colon F' \to E'$ pondo

$$T'(\varphi)(x) := \varphi(T(x)),$$

para todos $x \in E$ e $\varphi \in F'$. Dizemos que T' é o *adjunto* de T.

Proposição 1.16. Se $T \in \mathcal{L}(E, F)$, então $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ e $\|T'\| = \|T\|$. Além disso, se T é um isomorfismo (isométrico), então T' também o é.

Demonstração: Primeiro, vejamos que o operador T' está bem definido, ou seja, que $T'(\varphi) \in E'$ para todo $\varphi \in F'$. De fato, dados $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
T'(\varphi)(x + \lambda y) = \varphi(T(x + \lambda y)) &= \varphi(T(x)) + \lambda\varphi(T(y)) \\
&= T'(\varphi)(x) + \lambda T'(\varphi)(y)
\end{aligned}$$

e

$$\|T'(\varphi)(x)\| = \|\varphi(T(x))\| \leq \|\varphi\| \, \|T\| \, \|x\| \, , \tag{1.2}$$

donde $T'(\varphi) \in E'$. Mostremos agora que T' é linear. Sejam $\varphi, \psi \in E'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} T'(\varphi + \lambda\psi)(x) &= (\varphi + \lambda\psi)(T(x)) = \varphi(T(x)) + \lambda\psi(T(x)) \\ &= T'(\varphi)(x) + \lambda T'(\psi)(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Logo, $T'(\varphi + \lambda\psi) = T'(\varphi) + \lambda T'(\psi)$ e portanto T' é linear. Tomando o supremo sobre $x \in B_E$ em (1.2), obtemos

$$\|T'(\varphi)\| \leq \|\varphi\| \, \|T\| \, , \tag{1.3}$$

para todo $\varphi \in F'$. Assim, $T' \in \mathcal{L}(F', E')$. Tomando o supremo sobre $\varphi \in B_{F'}$ em (1.3), concluímos que $\|T'\| \leq \|T\|$. A desigualdade contrária segue de

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \sup_{\varphi \in B_{F'}} |\varphi(T(x))| = \sup_{\varphi \in B_{F'}} |T'(\varphi)(x)| \\ &\leq \|x\| \sup_{\varphi \in B_{F'}} \|T'(\varphi)\| = \|x\| \, \|T'\| \, . \end{aligned}$$

Portanto, $\|T\| = \|T'\|$.

Agora, suponhamos que T seja um isomorfismo isométrico. Então $T^{-1} \colon F \to E$ é, além de linear, contínuo. Para cada $\varphi \in E'$, consideremos $\xi \in F'$ dado por $\xi(z) = \varphi(T^{-1}(z))$. Como

$$T'(\xi)(x) = \xi(T(x)) = \varphi(T^{-1}(T(x))) = \varphi(x)$$

para todo $x \in E$, obtemos $T'(\xi) = \varphi$ e, por isso, T' é sobrejetor. Seja $\psi \in \ker(T')$. Então

$$\psi(T(x)) = T'(\psi)(x) = 0, \tag{1.4}$$

para todo $x \in E$. Como T é sobrejetor, (1.4) implica que $\psi(y) = 0$ para todo $y \in F$, donde T' é injetor. Para garantir que T' é um isomorfismo, resta mostrar que $(T')^{-1}$ é contínuo, já que a inversa de um operador linear é sempre linear. Mas isso decorre imediatamente do fato (de fácil demonstração) de que $(T')^{-1} = (T^{-1})'$. Para concluir, mostremos que $\|T'(\varphi)\| = \|\varphi\|$ para todo $\varphi \in F'$. Como T é um isomorfismo isométrico, $x \in B_E$ se, e somente se, $T(x) \in B_F$. Daí,

$$\|T'(\varphi)\| = \sup_{x \in B_E} |T'(\varphi)(x)| = \sup_{x \in B_E} |\varphi(T(x))|$$

$$= \sup_{T(x)\in B_F} |\varphi(T(x))| = \sup_{z\in B_F} |\varphi(z)| = \|\varphi\| .$$

■

A seguir listamos algumas propriedades dos operadores adjuntos. Tais propriedades são de fácil verificação, logo omitiremos suas demonstrações.

Proposição 1.17. Sejam E e F espaços normados.

(a) $(\mathrm{id}_E)' = \mathrm{id}_{E'}$.

(b) Seja $0 \in \mathcal{L}(E,F)$ o operador nulo. Então $0'$ é o operador nulo de F' em E'.

(c) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E,F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então $(A+B)' = A' + B'$ e $(\lambda A)' = \lambda A'$.

(d) Sejam $A \in \mathcal{L}(E,F)$ e $B \in \mathcal{L}(F,G)$. Então $(A \circ B)' = B' \circ A'$.

1.3 Séries em Espaços de Banach

Na reta, uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita *absolutamente convergente* se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge. Quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ diverge, dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é *condicionalmente convergente*. Finalmente, uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita *incondicionalmente convergente* se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge para toda permutação $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Além disso, vale o

Teorema 1.18. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série de números reais. Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge para toda permutação $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Neste caso, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ para toda permutação $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Demonstração: Veja [13, Teorema 1.1.2]. ■

A reciproca desse teorema é verdadeira para séries em espaços de dimensão finita (Teorema 1.25) e sua validade para séries em espaços quaisquer foi um problema que permaneceu aberto por muito tempo até que A. Dvoretzky e C. Rogers, em seu célebre trabalho [11] de 1950, provaram que, em espaços de dimensão infinita, existem séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes. O principal objetivo dessa seção é estabelecer esse resultado.

O próximo teorema, devido a Riemann, será útil no que segue.

Teorema 1.19 (Riemann). *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série de números reais condicionalmente convergente. Então*

(i) *para todo $s \in \mathbb{R}$ existe uma permutação $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s$.*

(ii) *existem permutações* $\sigma, \pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tais que* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = +\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = -\infty$.

Demonstração: Veja [13, Teorema 1.1.3]. ∎

Definição 1.20. Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *absolutamente somável* quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente, e que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *incondicionalmente somável* quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge para toda permutação $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Em particular, diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *somável* quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge para $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

A soma de uma sequência incondicionalmente somável não depende da permutação considerada:

Teorema 1.21. *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ implica $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = x$ para toda permutação $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Demonstração: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$. Suponha que, para alguma permutação $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s' \neq s$. Então existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(s) \neq \varphi(s')$, pois do contrário teríamos $\psi(s) = \psi(s')$ para todo $\psi \in E'$. Daí, $\psi(s - s') = 0$ para todo $\psi \in E'$ e, consequentemente, pelo Teorema de Hahn-Banach,

$$\|s - s'\| = \sup_{\psi \in B_{E'}} |\psi(s - s')| = 0,$$

donde $s = s'$, contradizendo o que assumimos a princípio. Como

$$\lim_k \sum_{n=1}^{k} \varphi(x_n) = \lim_k \varphi\left(\sum_{n=1}^{k} x_n\right) = \varphi\left(\lim_k \sum_{n=1}^{k} x_n\right) = \varphi(s)$$

e

$$\lim_k \sum_{n=1}^{k} \varphi(x_{\pi(n)}) = \lim_k \varphi\left(\sum_{n=1}^{k} x_{\pi(n)}\right) = \varphi\left(\lim_k \sum_{n=1}^{k} x_{\pi(n)}\right) = \varphi(s'),$$

segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{\pi(n)}).$$

Logo, pelo Teorema 1.18, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)$ não é absolutamente convergente. Pelo Teorema 1.19 existe uma permutação $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{\sigma(n)})$ diverge. Por isso, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ também diverge, contradizendo a hipótese de convergência incondicional. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ para toda permutação $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. ∎

Em algumas situações é preferível substituir a definição de sequência incondicionalmente somável por uma equivalente. Dai o seguinte teorema:

Teorema 1.22. *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. São equivalentes:*

(i) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência incondicionalmente somável.*

(ii) *para cada $\varepsilon > 0$ existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando M é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com mim $M > m_\varepsilon$, temos $\left\| \sum\limits_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$.*

(iii) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é subsérie somável, isto é, para qualquer sequência estritamente crescente $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de inteiros positivos, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ converge.*

(iv) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável, ou seja, para qualquer escolha de $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tem-se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ convergente.*

Demonstração: (i)$\Rightarrow$(ii) Suponhamos que não vale (ii). Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe M subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > m$ e $\left\|\sum_{n\in M} x_n\right\| \geq \varepsilon_0$. Assim, para $m = 1$ existe $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que

$$\min M_1 > 1 \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{k \in M_1} x_k \right\| \geq \varepsilon_0.$$

Recursivamente, para $m = \max M_n$ existe $M_{n+1} \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que

$$\min M_{n+1} > \max M_n \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{k \in M_{n+1}} x_k \right\| \geq \varepsilon_0, \tag{1.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe uma permutação $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que leva cada intervalo $A_n := [\min M_n, \min M_n + |M_n| - 1]$ em M_n para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $|A_n| = |M_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, as uniões $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ são formadas por conjuntos disjuntos dois a dois. De fato, $M_n \cap M_{n+1} = \varnothing$ por construção e, de $|M_n| \leq \max M_n - \min M_n + 1$, segue que

$$\min M_n + |M_n| - 1 \leq \max M_n < \min M_{n+1},$$

logo $A_n \cap A_{n+1} = \varnothing$.

Afirmação: A sequência $\left(\sum_{n=1}^{k} x_{\pi(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$ não é de Cauchy em E. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k = k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\min M_{k+1} > \max M_k > n$. Logo,

$$\min M_{k+1} + |M_{k+1}| - 1 \geq \min M_{k+1} - 1 \geq \max M_k > n.$$

Como $\pi(A_{k+1}) = M_{k+1}$, segue que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\min M_{k+1}+|M_{k+1}|-1} x_{\pi(n)} - \sum_{n=1}^{\min M_{k+1}-1} x_{\pi(n)}\right\| &= \left\|\sum_{n=\min M_{k+1}}^{\min M_{k+1}+|M_{k+1}|-1} x_{\pi(n)}\right\| \\ &= \left\|\sum_{n\in M_{k+1}} x_n\right\| \overset{(1.5)}{\geq} \varepsilon_0,\end{aligned}$$

donde $(\sum_{n=1}^{k} x_{\pi(n)})_{k=1}^{\infty}$ não é de Cauchy em E. Consequentemente, $(\sum_{n=1}^{k} x_{\pi(n)})_{k=1}^{\infty}$ é divergente e, portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não é incondicionalmente somável.

(ii)$\Rightarrow$(i) Seja $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\sum_{n\in M} x_n\right\| < \varepsilon$ sempre que $M \subseteq \mathbb{N}$ é finito com $\min M > m_\varepsilon$. Sejam $j_1, j_2, \cdots, j_{m_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tais que $\sigma(j_1) = 1, \sigma(j_2) = 2, \cdots, \sigma(j_{m_\varepsilon}) = m_\varepsilon$. Se $n_\varepsilon = \max\{j_1, j_2, \cdots, j_{m_\varepsilon}\}$, então $\{j_1, j_2, \cdots, j_{m_\varepsilon}\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n_\varepsilon\}$ e, por isso,

$$\{1, 2, \cdots, m_\varepsilon\} \subseteq \sigma\left(\{1, 2, \cdots, n_\varepsilon\}\right).$$

Sejam $s > r - 1 > n_\varepsilon$ e $M := \{\sigma(r), \sigma(r+1), \cdots, \sigma(s)\}$. Então, $\min M > m_\varepsilon$ donde

$$\left\|\sum_{n=1}^{s} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{r-1} x_{\sigma(n)}\right\| = \left\|\sum_{n=r}^{s} x_{\sigma(n)}\right\| = \left\|\sum_{n\in M} x_n\right\| < \varepsilon.$$

Assim, a sequência $(\sum_{n=1}^{k} x_{\sigma(n)})_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E e, portanto, convergente.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Dado $\varepsilon > 0$ existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\sum_{n\in M} x_n\right\| < \varepsilon$ para todo $M \subseteq \mathbb{N}$ finito com $\min M > m_\varepsilon$. Como $k_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $s > r - 1 > m_\varepsilon$ implica $k_s > k_r > r - 1 > m_\varepsilon$. Seja $M := \{k_r, k_{r+1}, \cdots, k_s\}$. Então, $\min M = k_r > m_\varepsilon$ e

$$\left\|\sum_{n=1}^{s} x_{k_n} - \sum_{n=1}^{r-1} x_{k_n}\right\| = \left\|\sum_{n=r}^{s} x_{k_n}\right\| = \left\|\sum_{n\in M} x_n\right\| < \varepsilon,$$

donde a sequência $(\sum_{n=1}^{j} x_{k_n})_{j=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E e, portanto, convergente.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Seja $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1$ ou $\varepsilon_n = -1$. Sejam $S^+ := \{n \in \mathbb{N}\colon \varepsilon_n = 1\}$ e $S^- := \{n \in \mathbb{N}\colon \varepsilon_n = -1\}$. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é subsérie somável, então as séries $\sum_{n\in S^+} x_n$ e $\sum_{n\in S^-} x_n$ são convergentes. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existem $n_1 = n_1(\varepsilon) \in S^+$ e $n_2 = n_2(\varepsilon) \in S^-$ tais que

$$\left\|\sum_{n\in M^+} x_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left\|\sum_{n\in M^-} x_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.6}$$

para todos $q_1 > p_1 > n_1$ e $q_2 > p_2 > n_2$, onde $M^+ := \{n \in S^+\colon p_1 \leq n \leq q_1\}$ e $M^- :=$

$\{n \in S^- : p_2 \leq n \leq q_2\}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. De (1.6), segue que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n x_n\right\| &= \left\|\sum_{n\in M^+} x_n - \sum_{n\in M^-} x_n\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{n\in M^+} x_n\right\| + \left\|\sum_{n\in M^-} x_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

para todos $q > p > n_0$. Pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ é convergente. Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável.

(iv)$\Rightarrow$(ii) Seja $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Suponhamos que não vale (ii). Novamente, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe M subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > m$ e $\left\|\sum_{k\in M} x_k\right\| \geq \varepsilon_0$. Daí, para $m = 1$ existe $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que $\min M_1 > 1$ e $\left\|\sum_{k\in M_1} x_k\right\| \geq \varepsilon_0$. Recursivamente, para $m = \max M_n$ existe $M_{n+1} \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que $\min M_{n+1} > \max M_n$ e $\left\|\sum_{k\in M_{n+1}} x_k\right\| \geq \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Já observamos que $M_n \cap M_{n+1} = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ dada por

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \\ -1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe M_n tal que $\min M_n > k$. Daí, $p := \min M_n$ e $q := \max M_n$ implicam que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=p}^{q} (1+\varepsilon_k) x_k\right\| &= \left\|\sum_{k\in M_n} (1+\varepsilon_k) x_k\right\| = \left\|\sum_{k\in M_n} 2x_k\right\| \\ &= 2\left\|\sum_{k\in M_n} x_k\right\| \geq 2\varepsilon_0,\end{aligned}$$

por (1.7). Assim, a série $\sum_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon_k)x_k$ é divergente donde $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ou $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k x_k$ não convergem. Portanto, $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ não é sinal somável. ■

Em espaços de Banach, convergência absoluta sempre implica convergência incondicional, ou seja, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável. Veremos que convergência incondicional implica convergência absoluta apenas em dimensão finita. Antes disso, temos a seguinte caracterização:

Proposição 1.23. Um espaço normado E é Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável.

Demonstração: Sejam E um espaço de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência absolutamente somável em E e $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $y_n := \|x_n\|$. Então, a sequência de números reais $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável, logo incondicionalmente somável. Assim sendo, $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_{\sigma(n)}\right\| = \sum_{n=1}^{\infty} y_{\sigma(n)} < \infty$. Pelo Critério de Cauchy para séries, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)}\right\| &= \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| \\ &\leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

para todos $n \geq m > n_0$. Consequentemente, a sequência $(\sum_{n=1}^{k} x_{\sigma(n)})_{k=1}^{\infty}$ das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é de Cauchy em E, logo existe $x \in E$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{k} \sum_{n=1}^{k} x_{\sigma(n)} = x.$$

Reciprocamente, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon = \dfrac{1}{2^k} > 0$, existe $n_0 = n_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \dfrac{1}{2^k}$ para todos $n, m > n_0$. Sejam $n_1 := n_0(\frac{1}{2}) + 1$ e, para $k > 1$, $n_k := \max\{n_0(\frac{1}{2^k}), n_{k-1}\} + 1$. Dessa forma, obtemos uma sequência de índices $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tais que $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < \frac{1}{2^k}$. Pelo Critério de Comparação, a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \quad \text{implica} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < \infty.$$

Por hipótese, toda série absolutamente somável é incondicionalmente somável. Em particular, $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = a$ para algum $a \in E$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{k} x_{n_{k+1}} &= \lim_{k} \left(x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) \right) \\ &= x_{n_1} + \lim_{k} \sum_{j=1}^{k}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) = x_{n_1} + a,\end{aligned}$$

ou seja, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que possui subsequência convergente para $x_{n_1} + a$. Então, $x_n \to x_{n_1} + a \in E$ e, portanto, E é Banach. ■

Observação 1.24. A proposição anterior também pode ser usada na forma alternativa: Um espaço normado E é Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável em E é somável. Veja demonstração dessa outra forma em [23], Chapter 6, Proposition 4.

Em dimensão finita vale o seguinte resultado:

Teorema 1.25. *Seja E um espaço normado n-dimensional. Então, toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ incondicionalmente somável em E é absolutamente somável.*

Demonstração: É bem conhecido o fato de que $\dim E = n$ implica $E \cong \mathbb{R}^n$ caso E seja um espaço vetorial real ou $E \cong \mathbb{C}^n$ caso E seja um espaço vetorial complexo. Logo, basta considerar séries absolutamente somáveis em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$.

Caso 1: $n = 1$. Comecemos com o caso real: seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Suponhamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não seja absolutamente somável. Então, pelo Teorema 1.19, existe uma permutação $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é divergente. Portanto, toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ incondicionalmente somável em $\mathbb{R}$ é absolutamente somável. Agora, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência incondicionalmente somável em $\mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $x_n = a_n + ib_n$, onde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Seja $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação. Digamos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = x = a + ib$ e consideremos a norma da soma $\|\cdot\|_S : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ dada por $\|a + ib\|_S = |a| + |b|$. Consequentemente,

$$\left| a - \sum_{n=1}^{j} a_{\sigma(n)} \right| \leq \left\| \left(a - \sum_{n=1}^{j} a_{\sigma(n)} \right) + \left(ib - \sum_{n=1}^{j} ib_{\sigma)n} \right) \right\|_S$$

e

$$\left| b - \sum_{n=1}^{j} b_{\sigma(n)} \right| \leq \left\| \left(a - \sum_{n=1}^{j} a_{\sigma(n)} \right) + \left(ib - \sum_{n=1}^{j} ib_{\sigma)n} \right) \right\|_S,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, donde $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = a$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)} = b$. Portanto, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ são sequências incondicionalmente somáveis em $\mathbb{R}$ e assim

$$\sum_{n=1}^{j} \|x_n\|_S = \sum_{n=1}^{j} |a_n| + \sum_{n=1}^{j} |b_n|,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e isso implica que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável em $\mathbb{C}$.

Caso 2: $n > 1$. Seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência incondicionalmente somável em $\mathbb{K}^n$, ou seja, $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{K}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} x^{\sigma(k)} = x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ para toda permutação $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Como

$$\left| x_i - \sum_{k=1}^{j} x_i^{\sigma(k)} \right| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{j} x^{\sigma(k)} \right\|_S,$$

para todos $j \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$, seque que $(x_i^k)_{k=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável em $\mathbb{K}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, logo, pelo Caso 1, $(x_i^k)_{k=1}^{\infty}$ é absolutamente somável em $\mathbb{K}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Daí,

$$\sum_{k=1}^{j} \left\| x^k \right\|_S = \sum_{k=1}^{j} \left| x_1^k \right| + \cdots + \sum_{k=1}^{j} \left| x_n^k \right|,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e isso implica que $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ é absolutamente somável em $\mathbb{K}^n$. ■

O próximo teorema garante a existência, em todo espaço de Banach de dimensão infinita, de uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável. Para demonstrá-lo, precisaremos do seguinte lema:

Lema 1.26. Seja E um espaço de Banach de dimensão $2n$. Então existem n vetores $y_1, \dots, y_n$, tais que para quais quer escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tem-se

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \right\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

Demonstração: Vamos encontrar um isomorfismo $u \colon \ell_2^{2n} \to E$ de modo que

$$|\mathrm{tr}(u^{-1}v)| \leq 2n\|v\|, \tag{1.9}$$

para todo operador $v \colon \ell_2^{2n} \to E$ e, em seguida, selecionar $y_1, \dots, y_n \in E$ de modo que a desigualdade (1.8) seja satisfeita. A ideia é escolher apropriadamente n vetores $z_1, \dots, z_n \in \ell_2^{2n}$ e definir $y_j = u(z_j)$.

A esfera unitária de $\mathcal{L}(\ell_2^{2n}, E)$ é compacta, pois $\dim(\mathcal{L}(\ell_2^{2n}, E)) < \infty$. Pela continuidade da função determinante, existe um operador $u \in \mathcal{L}(\ell_2^{2n}, E)$ com $\|u\| = 1$ tal que

$$|\det(u)| = \max\left\{ |\det(v)| \colon v \in \mathcal{L}(\ell_2^{2n}, E) \ e \ \|v\| = 1 \right\}.$$

Provemos que u tem a propriedade desejada. Sejam ε um escalar não nulo e $v \in \mathcal{L}(\ell_2^{2n}, E)$. Pela escolha de u,

$$\frac{|\det(u + \varepsilon v)|}{\|u + \varepsilon v\|^{2n}} = \left| \det\left(\frac{u + \varepsilon v}{\|u + \varepsilon v\|} \right) \right| \leq |\det(u)|,$$

donde

$$|\det(u + \varepsilon v)| \leq |\det(u)| \|u + \varepsilon v\|^{2n} \leq |\det(u)| (1 + |\varepsilon| \|v\|)^{2n} \tag{1.10}$$

Seja $\mathrm{id} \colon \ell_2^{2n} \to \ell_2^{2n}$ o operador identidade. Como $|\det(u)| \neq 0$, segue que u é invertível. Logo, pela Proposição A.1,

$$|\det(u + \varepsilon v)| = |\det(u(\mathrm{id} + \varepsilon u^{-1} v))| = |\det(u)| |\det(\mathrm{id} + \varepsilon u^{-1} v)|$$

$$= |\det(u)||1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + C(\varepsilon)|$$

e $C(\varepsilon)$ satisfaz

$$\frac{|C(\varepsilon)|}{|\varepsilon|} \longrightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Usando a fórmula do binômio de Newton, obtemos

$$|1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + C(\varepsilon)| = \frac{|\det(u + \varepsilon v)|}{\det(u)} \overset{(1.10)}{\leq} (1 + |\varepsilon| \|v\|)^{2n} = 1 + 2n|\varepsilon|\|v\| + S(\varepsilon), \quad (1.11)$$

onde $S(\varepsilon)$ também satisfaz

$$\frac{|S(\varepsilon)|}{|\varepsilon|} \longrightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Escreva ε como $\varepsilon = \delta e^{-i\theta}$, onde $\delta > 0$ e $\theta = \arg(\mathrm{tr}(u^{-1}v))$ ($\theta = 0$ se $\mathrm{tr}(u^{-1}v) = 0$). Então, $\delta = |\varepsilon|$. Como $\mathrm{tr}(u^{-1}v) = |\mathrm{tr}(u^{-1}v)|e^{i\theta}$, segue que

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) &= \delta e^{-i\theta} |\mathrm{tr}(u^{-1}v)| e^{i\theta} = \delta |\mathrm{tr}(u^{-1}v)| \\ &= |\varepsilon||\mathrm{tr}(u^{-1}v)| = |\varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v)|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v)| = 1 + |\varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v)|. \quad (1.12)$$

Por (1.11) e (1.12), temos

$$1 + |\varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v)| - |C(\varepsilon)| \leq |1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + C(\varepsilon)| \leq 1 + 2n|\varepsilon|\|v\| + S(\varepsilon).$$

Logo,

$$|\mathrm{tr}(u^{-1}v)| \leq 2n\|v\| + \frac{S(\varepsilon) + |C(\varepsilon)|}{|\varepsilon|}. \quad (1.13)$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (1.13), obtemos (1.9).

Para concluir nossa demonstração, precisaremos do seguinte fato: se $P\colon \ell_2^{2n} \to \ell_2^{2n}$ é um operador projeção com imagem m-dimensional então $\|uP\| \geq \dfrac{m}{n}$. Com efeito,

$$m = \mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}(u^{-1}uP) \overset{(1.9)}{\leq} 2n\|uP\|. \quad (1.14)$$

Como u é contínuo, $\dim(\ell_2^{2n}) < \infty$ e $1 = \|u\| = \sup_{\|x\|=1}\|u(x)\|$, existe $z_1 \in \ell_2^{2n}$ tal que $\|z_1\| = 1$ e $\|u(z_1)\| = 1$. Seja P_1 a projeção ortogonal de ℓ_2^{2n} sobre sobre o complemento ortogonal $[z_1]^\perp$ de z_1. Como $[z_1]^\perp$ tem dimensão $2n-1$, segue de (1.14) que $\|uP_1\| \geq \dfrac{2n-1}{2n}$. Logo, existe $z_2 \in [z_1]^\perp$ tal que $\|z_2\| = 1$ e $\|u(z_2)\| = \|P_1(z_2)\| \geq \dfrac{2n-1}{2n}$.

Agora, seja P_2 a projeção ortogonal de ℓ_2^{2n} sobre $[z_1, z_2]^\perp$. Então, $\|uP_2\| \geq \dfrac{2n-2}{2n}$ e existe $z_3 \in [z_1, z_2]^\perp$ tal que $\|z_3\| = 1$ e $\|u(z_3)\| = \|u(P_2(z_3))\| \geq \dfrac{2n-2}{2n}$. Repetindo este processo, obtemos n vetores ortogonais $z_1, \cdots, z_n \in \ell_2^{2n}$.

Para $y_j = u(z_j)$, $j = 1, \cdots, n$, temos

$$\|y_j\| = \|u(z_j)\| \geq \frac{2n-j+1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

pois $2n - j + 1 \in [n+1, 2n] \subseteq \mathbb{N}$ implica que $\dfrac{2n-j+1}{2n} \in [\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}, 1] \subseteq \mathbb{N}$; e

$$\|y_j\| = u(z_j) \leq \|u\|\|z_j\| = 1.$$

Finalmente, para quaisquer escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^n \alpha_j y_j\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^n \alpha_j u(z_j)\right\| = \left\|u\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j z_j\right)\right\| \leq \|u\| \left\|\sum_{j=1}^n \alpha_j z_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^n \alpha_j z_j\right\| = \left(\left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k z_k \right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\langle \alpha_1 z_1, \alpha_1 z_1 \rangle + \cdots + \langle \alpha_n z_n, \alpha_n z_n \rangle)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\alpha_1 \bar{\alpha}_1 \langle z_1, z_1 \rangle + \cdots + \alpha_n \bar{\alpha}_n \langle z_n, z_n \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.27 (Dvoretsky-Rogers). *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então, para qualquer escolha de $(\lambda_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$, existe uma sequência incondicionalmente somável $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E com $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, se escolhermos $(\lambda_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2 - \ell_1$, obtemos uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável.*

Demonstração: A ideia é mostrar que para todo elemento $(\lambda_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$, existe uma sequência sinal somável $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E com $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e então usar o Teorema 1.22.

Seja $(\lambda_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$. De forma análoga à demonstração da Proposição 1.23, podemos construir uma sequência de índices $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n_k}^{n} |\lambda_n|^2 \leq \frac{1}{2^{2k}}$. Como dim $E = \infty$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $E_k \subseteq E$ subespaço de E com dim $E_k = 2(n_{k+1} - n_k)$. Pelo Lema 1.26, existem $(n_{k+1} - n_k)$ vetores,

$y_{n_k},\ y_{n_k+1}, \ldots,\ y_{n_{k+1}-1}$, tais que $\dfrac{1}{2} \leq \|y_j\| \leq 1$, com $n_k \leq j \leq n_{k+1}-1$, e

$$\left\| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_n y_n \right\| \leq \left(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.15}$$

para quaisquer escalares $\alpha_{n_k}, \ldots, \alpha_{n_{k+1}-1}$. Consequentemente,

$$\left\| \sum_{n=n_k}^{N} \alpha_n y_n \right\| \leq \left(\sum_{n=n_k}^{N} |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

para quaisquer escalares $\alpha_{n_k}, \ldots, \alpha_N$, onde $n_k \leq N \leq n_{k+1}-1$ (basta fazer $\alpha_j = 0, N < j \leq n_{k+1}-1$).

Seja $x_n := \dfrac{\lambda_n}{\|y_n\|} \cdot y_n$. Então, $\|x_n\| = |\lambda_n|$ e, para toda escolha de $\varepsilon_n = \pm 1$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=n_k}^{N} \varepsilon_n x_n \right\| &= \left\| \sum_{n=n-k}^{N} \frac{\varepsilon_n \lambda_n}{\|y_n\|} \cdot y_n \right\| \overset{(1.15)}{\leq} \left(\sum_{n=n_k}^{N} \frac{|\varepsilon_n|^2 |\lambda_n|^2}{\|y_n\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n=n_k}^{N} 4|\lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \left(\sum_{n=n_k}^{N} |\lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{-k+1}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Em particular, se $n_k < n < m \leq n_{k+1}-1$, fazendo $\alpha_{n_k} = 0, \cdots, \alpha_{n-1} = 0, \alpha_n = \varepsilon_n, \ldots, \alpha_m = \varepsilon_m$ temos

$$\left\| \sum_{l=n}^{m} \varepsilon_l x_l \right\| = \left\| \sum_{l=n_k}^{m} \alpha_l x_l \right\| \leq 2^{-k+1}. \tag{1.17}$$

Para concluir a nossa demonstração, mostraremos que a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ é de Cauchy. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ é convergente, isto é, a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável e, pelo Teorema 1.22, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon$. Se $n_{k_0} < n \leq m$, então existem inteiros positivos t e $k \geq k_0$ tais que $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ e $n_{k+t} \leq m \leq n_{k+t+1}$. Daí,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=n}^{m} \varepsilon_l x_l \right\| &\leq \left\| \sum_{l=n}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_l x_l \right\| + \left\| \sum_{l=n_{k+1}}^{n_{k+2}-1} \varepsilon_l x_l \right\| + \cdots + \left\| \sum_{l=n_{k+t}}^{m} \varepsilon_l x_l \right\| \\ &\leq 2^{-k+1} + 2^{-(k+1)+1} + \cdots + 2^{-(k+t)+1} \\ &\leq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

por (1.16) e (1.17). Portanto, a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ é de

Cauchy, como queríamos mostrar. ■

Observação 1.28. É sempre possível escolher uma sequência $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 - \ell_1$. A razão para isso será demonstrada no Capítulo 2, Proposição 2.12.

Existe uma versão fraca do Teorema de Dvoretsky-Rogers cuja demonstração pode ser encontrada em [10, Teorema 2.18]. As definições de sequências fracamente e fortemente p-somáveis está no capítulo seguinte.

Teorema 1.29 (**Dvoretsky-Rogers Fraco**)**.** *Seja* $1 \leq p < \infty$*. Todo espaço de Banach de dimensão infinita possui uma sequência fracamente p-somável que não é fortemente p-somável.*

Capítulo 2

Operadores Lineares Absolutamente Somantes

Neste capítulo, estudamos os espaços de sequências $\ell_\infty(E)$, $\ell_p(E)$, $\ell_p^w(E)$, $\ell_\infty^w(E)$, $\ell_p^u(E)$ e a classe dos operadores lineares absolutamente (p,q)-somantes. Nossas principais referências foram o livro [10] e os trabalhos [18] e [24].

2.1 Espaços de Sequências

Esta seção é dedicada ao estudo dos espaços de sequências a valores vetoriais $\ell_\infty(E)$, $\ell_p(E)$, $\ell_p^w(E)$, $\ell_\infty^w(E)$ e $\ell_p^u(E)$, onde E é um espaço normado. Esses espaços são conceitos fundamentais necessários ao estudos das classes de operadores que apresentaremos mais adiante. Mais precisamente, iremos apresentar cada espaço, mostrar em que condições são completos e estabelecer relações de inclusão entre eles.

No que segue usaremos a notação $(x_n)_{n=1}^\infty$ para denotar uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e a notação $(x_n)_{n=1}^k$ para denotar a sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots)$.

2.1.1 Espaço das sequências limitadas

Seja E um espaço vetorial normado. Denotamos por $\ell_\infty(E)$ o conjunto de todas as *sequências limitadas* em E, isto é, sequencias $(x_n)_{n=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ tais que existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Simbolicamente,

$$\ell_\infty(E) = \big\{(x_n)_{n=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} \colon (x_n)_{n=1}^\infty \ \text{ é limitada em } \ E\big\}.$$

É simples mostrar que $\ell_\infty(E)$ é um espeço vetorial com as operações usuais de sequências e que a função $\|\cdot\|_\infty \colon \ell_\infty(E) \to [0, \infty)$ dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty := \sup_n \|x_n\|_E,$$

está bem definida e caracteriza uma norma em $\ell_\infty(E)$.

Proposição 2.1. $(\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach se, e somente se, E é um espaço de Banach.

Demonstração: Suponha que $\ell_\infty(E)$ seja um espaço de Banach e considere a aplicação $i \colon E \to \ell_\infty(E)$, dada por $i(x) := (x, 0, 0, \cdots)$. Como $\|i(x)\|_\infty = \|(x, 0, 0, \cdots)\|_\infty = \|x\|$, para todo x, então $i \colon E \to \mathrm{Im}\,(i)$ é um isomorfismo isométrico.
Afirmação: $\mathrm{Im}\,(i)$ é fechado em $\ell_\infty(E)$. De fato, seja $a \in \overline{\mathrm{Im}\,(i)}$. Então existe uma sequencia $(i(x_n))_{n=1}^\infty$ em $\mathrm{Im}\,(i)$ tal que $i(x_n) \to a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|i(x_n) - a\|_\infty < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Como $\|a_k\| \leq \|(x_n - a_1, a_2, a_3, \ldots)\|_\infty$ para todo $k > 1$ e $\|x_n - a_1\| \leq \|(x_n - a_1, a_2, a_3, \ldots)\|_\infty$, seque que $a_k = 0$ para todo $k > 1$ e $x_n \to a_1$. Como i é contínua, $i(x_n) \to i(a_1) = (a_1, 0, 0, \ldots) = a$.

Dessa forma, $(\mathrm{Im}\,(i), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Portanto, E também o é.

Reciprocamente, sejam E um espaço de Banach e $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_\infty(E)$, com $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^k - x^r\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todos $k, r > k_0$. Em particular,

$$\|x_j^k - x_j^r\| \leq \sup_i \|x_i^k - x_i^r\| = \|x^k - x^r\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Consequentemente, para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, a sequência $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em E. Definamos a sequência $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ em E por $y_j = \lim_k x_j^k$.
Afirmação: $y \in \ell_\infty(E)$ e $x^k \to y$. De fato, como $\|x_j^k - x_j^r\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todos $k, r > k_0$ e todo $j \in \mathbb{N}$, fazendo $r \to \infty$, temos $\|x_j^k - y_j\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $k > k_0$ e todo $j \in \mathbb{N}$. Em particular, para $k = k_0 + 1$. Assim, $\sup_j \|x_j^{K_0+1} - y_j\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ e, por isso, $(x_j^{k_0+1} - y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. Portanto, $y = x^{k_0+1} - (x^{k_0+1} - y) \in \ell_\infty(E)$. Finalmente,

$$\|x^k - y\|_\infty = \sup_j \|x_j^k - y_j\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para todo $k > k_0$, o que implica $x^k \to y$. ∎

2.1.2 Espaço das sequências p-somáveis

Sejam E um espaço vetorial normado e $1 \leq p < \infty$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E é *fortemente p-somável* se $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p < \infty$. Denotamos por $\ell_p(E)$ o conjunto de todas as sequências p-somáveis em E, ou seja,

$$\ell_p(E) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \right\}.$$

Com as operações usuais de sequências, $\ell_p(E)$ é um espaço vetorial. Além disso, com o uso da Desigualdade de Minkowski ([5], Proposição 1.4.2), não é difícil mostrar que a função $\|\cdot\|_p : \ell_p(E) \to [0, \infty)$, dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma em $\ell_p(E)$.

Proposição 2.2. $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach se, e somente se, E é um espaço de Banach.

Demonstração: Como $\ell_p(E)$ contém uma cópia isométrica de E pela aplicação $x \in E \mapsto (x, 0, 0, \cdots) \in \ell_p(E)$, segue que se $\ell_p(E)$ é um espaço de Banach então E também o é. Reciprocamente, seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(E)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0(\varepsilon) = k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|x^k - x^r\right\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todos $k, r > k_0$. Em particular,

$$\left\|x_j^k - x_j^r\right\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_n^k - x_n^r\right\|^p = \left\|x^k - x^r\right\|_p^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \tag{2.1}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e para todos $k, r > k_0$. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_j^k)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E. Definamos $y \coloneqq (y_j)_{j=1}^{\infty}$, onde $y_j = \lim\limits_{k\to\infty} x_j^k$.
Afirmação: $y \in \ell_p(E)$ e $x^k \to y$.

Com efeito, (2.1) implica que

$$\sum_{n=1}^{m} \left\|x_n^k - x_n^r\right\|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todos $k, r > k_0$. Fazendo $r \to \infty$, temos

$$\sum_{n=1}^{m} \left\|x_n^k - y_n\right\|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $k > k_0$. Agora, fazendo $m \to \infty$ segue-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_n^k - y_n\right\|^p = \left\|x^k - y\right\|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

para todo $k > k_0$. Consequentemente, $x^k \to y$ e, tomando $k = k_0 + 1$, temos que $x^{k_0+1} - y = (x_n^{k_0+1} - y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. Logo, $y = x^{k_0+1} - (x^{k_0+1} - y) \in \ell_p(E)$. ■

2.1.3 Espaço das sequências fracamente p-somáveis

Sejam E um espaço vetorial normado e $1 \leq p < \infty$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é *fracamente p-somável* se $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty$ para todo $\varphi \in E'$. Denotamos por $\ell_p^w(E)$ o conjunto de todas as sequências fracamente p-somáveis em E. Em símbolos,

$$\ell_p^w(E) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty, \forall\, \varphi \in E' \right\}.$$

Não é difícil verificar que, com as operações usuais de sequências, $\ell_p^w(E)$ é um espaço vetorial.

Nosso objetivo é mostrar que $\ell_p^w(E)$ também é um espaço de Banach. Antes, definiremos uma norma para este espaço.

Proposição 2.3. A função $\|\cdot\|_{w,p} : \ell_p^w(E) \to [0, \infty)$, dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma em $\ell_p^w(E)$.

Demonstração: Antes de mais nada, precisamos mostrar que a função $\|\cdot\|_{w,p}$ está bem definida.

Pela definição do espaço $\ell_p^w(E)$, para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, o operador $T_x \colon E' \to \ell_p$, dado por $T_x(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$, está bem definido e
Afirmação: $T_x \in \mathcal{L}(E', \ell_p)$.

Com efeito, dados $\varphi, \psi \in E'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, segue que

$$T_x(\lambda\varphi + \psi) = ((\lambda\varphi + \psi)(x_n))_{n=1}^{\infty} = \lambda(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty} + (\psi(x_n))_{n=1}^{\infty} = \lambda T_x(\varphi) + T_x(\psi).$$

Portanto, T_x é linear. Mostremos que o gráfico de T_x é fechado. Seja $(\varphi_k, T_x(\varphi_k))_{k=1}^{\infty}$ uma sequência convergente em $E' \times \ell_p$, digamos $(\varphi_k, T_x(\varphi_k))_{k=1}^{\infty} \to (\varphi, y)$, isto é, $\varphi_k \to \varphi$ em E' e $T_x(\varphi_k) \to y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ em ℓ_p. Da última convergência segue que para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\varphi_k(x_j) - y_j|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_k(x_n) - y_n|^p = \|(\varphi_k(x_n))_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty}\|_p^p < \varepsilon^p$$

para todo $k > k_0$ e todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, $\varphi_k(x_j) \overset{k}{\to} y_j$ em $\mathbb{K}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $\varphi_k \to \varphi$ implica que $\varphi_k(x_j) \overset{k}{\to} \varphi(x_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela unicidade do limite, $\varphi(x_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} = (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty} = T_x(\varphi)$ o que implica que o gráfico de T_x é fechado. Portanto, para todo $x \in \ell_p^w(E)$, o operador T_x é contínuo, pelo Teorema do Gráfico Fechado, e a função $\|\cdot\|_{w,p}$ está bem definida, pois para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ temos

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|T_x(\varphi)\| = \|T_x\|.$$

Resta mostrar que $\|\cdot\|_{w,p}$ satisfaz as condições estabelecidas na Definição 1.1. As propriedades N2 e N3 são imediatas. Como $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} = \|T_x\|$, segue que $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} \geq 0$ para todo $x \in \ell_p^w(E)$. Finalmente, se $x = 0 \in \ell_p^w(E)$, então $\|x\|_{w,p} = 0$. Reciprocamente, $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} = 0$ implica que $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p = 0$ para todo $\varphi \in B_{E'}$. Logo, $\varphi(x_n) = 0$ para todo $\varphi \in B_{E'}$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\|x_n\| = \sup\limits_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_n)| = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim $(x_n)_{n=1}^{\infty} = 0$. ■

Proposição 2.4. $(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{w,p})$ é um espaço de Banach se, e somente se, E é um espaço de Banach.

Demonstração: Novamente, a aplicação $x \in E \mapsto (x, 0, 0, \cdots) \in \ell_p^w(E)$ garante que se $\ell_p^w(E)$ é Banach, então E é Banach. Reciprocamente, suponha que E seja um espaço de Banach e seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^w(E)$. Note que, $x^k = (x_n^k)_{n=1}^{\infty}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|x^k - x^r\right\|_{w,p} = \left\|(x_n^k - x_n^r)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi(x_n^k - x_n^r)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

para todos $k, r > k_0$. Assim, para todo $\varphi \in B_{E'}$ e todo $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\left|\varphi(x_i^k - x_i^r)\right|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi(x_n^k - x_n^r)\right|^p \leq \left[\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi(x_n^k - x_n^r)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p < \varepsilon^p, \tag{2.2}$$

para todos $k, r > k_0$. Portando, $\left|\varphi(x_i^k - x_i^r)\right| < \varepsilon$, $\forall \varphi \in B_{E'}, \forall k, r > k_0, \forall i \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\left\|x_i^k - x_i^r\right\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi(x_i^k - x_i^r)\right| < \varepsilon,$$

para todos $k, r > k_0$ e todo $i \in \mathbb{N}$. Isto implica que a sequência $(x_i^k)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E para todo $i \in \mathbb{N}$. Seja $y := (y_i)_{i=1}^{\infty}$, onde $\lim\limits_{k \to \infty} x_i^k = y_i$.
Afirmação: $y \in \ell_p^w(E)$ e $x^k \to y$.

Com efeito, como por (2.2), para cada $m \in \mathbb{N}$, cada $\varphi \in B_{E'}$ e para todos $k, r > k_0$, temos

$$\sum_{n=1}^{m} \left|\varphi(x_n^k - x_n^r)\right|^p < \varepsilon^p,$$

e fazendo $r \to \infty$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{m} \left|\varphi(x_n^k - y_n)\right|^p \leq \varepsilon^p,$$

para todo $k > k_0$, todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $\varphi \in B_{E'}$. Agora, fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi(x_n^k - y_n)\right|^p \leq \varepsilon^p, \tag{2.3}$$

para todo $k > k_0$ e todo $\varphi \in B_{E'}$. Portanto, $(x^k - y) \in \ell_p^w(E)$ para todo $k > k_0$. Em particular, para $k = k_0 + 1$, $(x^{k_0+1} - y) \in \ell_p^w(E)$, donde $y = x^{k_0+1} - (x^{k_0+1} - y) \in \ell_p^w(E)$. Além disso, de (2.3) temos

$$\left\|x^k - y\right\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi(x_n^k - y_n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

para todo $k > k_0(\varepsilon)$, ou seja, $x^k \to y$ em $\ell_p^w(E)$. ■

Encerramos esta subseção com uma caracterização do espaço $\ell_p^w(E)$. Para demonstrá-la, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.5. Sejam $1 < p < \infty$, E um espaço de Banach e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$.

(a) O operador $T_x \colon \ell_{p^*} \to E$ dado por $T_x((\lambda_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ está bem definido, é linear e contínuo.

(b) $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n\| =: \|T_x\|$.

Demonstração: (a) Seja $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência das somas parciais da série $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$. Se $n > m$, então

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_m\| &= \left\|\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i x_i\right\| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i x_i\right)\right| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i)\right| \qquad (2.4) \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\left(\sum_{i=m+1}^{n} |\lambda_i|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{i=m+1}^{n} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=m+1}^{n} |\lambda_i|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=m+1}^{n} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}$ e $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, a expressão (2.4) nos diz que a sequência $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, donde a série $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ é convergente. Assim, T_x está bem definido. T_x é claramente linear. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left| \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i) \right| \\
&\leq \left\| (\lambda_i)_{i=1}^{n} \right\|_{p^*} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\| (\varphi(x_i))_{i=1}^{n} \right\|_p,
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\|T_x((\lambda_i)_{i=1}^{\infty})\| \leq \|(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*} \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p}$$

donde $T_x \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$.

(b) Como, para todo $\varphi \in E'$ e todo $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned}
\|(\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_p &= \sup_{\psi \in B_{(\ell_p)'}} |\psi((\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty})| \\
&= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi(x_i) \right| \\
&= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \left| \varphi \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \right) \right|,
\end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned}
\|(x_i)_{i=}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|(\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_p \\
&= \sup_{\left\|(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{p^*},\ \|\varphi\| \leq 1} \left| \varphi \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \right) \right| \\
&= \sup_{\left\|(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{p^*} \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \right\|.
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.6. Seja E um espaço de Banach.

(a) Os espaços $\ell_p^w(E)$ e $\mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$ são isomorfos isometricamente para $1 < p < \infty$.

(b) Os espaços $\ell_1^w(E)$ e $\mathcal{L}(c_0, E)$ são isomorfos isometricamente.

Demonstração: Seja $J\colon \mathcal{L}(\ell_{p^*}, E) \to \ell_p^w(E)$ dado por $J(T) = (T(e_i))_{i=1}^{\infty}$. Para todos $\varphi \in E'$, $T \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$, temos $\varphi \circ T \in (\ell_{p^*})'$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(T(e_i))|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi \circ T)(e_i)|^p < \infty,$$

pois $(e_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$ (ver Proposição A.5). Assim J está bem definido. Verifica-se facilmente que J é linear. Pelo Lema 2.5,

$$\begin{aligned}
\|J(T)\|_{w,p} &= \|(T(e_i))_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \\
&= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i T(e_i) \right\| \\
&= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \right) \right\| \\
&= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \|T((\lambda_i)_{i=1}^{\infty})\| = \|T\|,
\end{aligned}$$

para todo $T \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$. Logo, J é uma isometria linear. Para cada $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, seja $T_x \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$ definido como no lema anterior. Assim,

$$J(T_x) = (T_x(e_i))_{i=1}^{\infty} = (x_i)_{i=1}^{\infty}$$

e, portanto, J é sobrejetivo. Então J é um isomorfismo isométrico. ■

Observação 2.7. Para uso posterior, observamos que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E)}$ implica $(J_E(x_i))_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E'')}$, onde J_E é o mergulho canônico de E em E''. De fato, como J_E é uma isometria, pelo Lema 2.5 temos

$$\begin{aligned}
\|(J_E(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i J_E(x_i) \right\| \\
&= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| J_E\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \right) \right\| \\
&= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \right) \right\| \\
&= \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \leq 1.
\end{aligned}$$

Seja E um espaço vetorial normado. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é *fracamente limitada* se $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ para todo $\varphi \in E'$. Denotamos por $\ell_\infty^w(E)$ o conjunto de todas as sequências fracamente limitas em E.

$\ell_\infty^w(E)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências e, de forma inteiramente análoga à Proposição 2.3, mostra-se que a função $\|\cdot\|_{w,\infty} : \ell_\infty^w(E) \to [0, \infty)$, dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,\infty} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_\infty$$

define uma norma em $\ell_\infty^w(E)$.

A partir dessa definição, seria natural mostrar que $(\ell_\infty^w(E), \|\cdot\|_{w,\infty})$ é um espaço de Banach. Entretanto isso não é necessário, pois mostraremos que $\ell_\infty^w(E) = \ell_\infty(E)$ isometricamente. Este fato será usado sem menção especial ao longo do texto.

Definição 2.8. Seja E um espaço vetorial normado. Um subconjunto $A \subseteq E$ é *fracamente limitado* se $\varphi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$ para todo funcional $\varphi \in E'$.

As definições de conjunto limitado e conjunto fracamente limitado são equivalentes como mostra o

Lema 2.9. Sejam E um espaço vetorial normado e A um subconjunto de E. Então, A é limitado se, e somente se, A é fracamente limitado.

Demonstração: Suponha A limitado e seja $M \geq 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in A$. Então, para cada $\varphi \in E'$, temos $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|M\|$ para todo $x \in A$. Portando, A é fracamente limitado. Reciprocamente, para cada $\varphi \in E'$ seja $M_\varphi \geq 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq M_\varphi$ para todo $x \in A$. Consequentemente,

$$|J_E(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq M_\varphi$$

para todo $x \in A$, onde J_E é o mergulho canônico de E em E''. Assim, $(J_E(x))_{x \in A}$ é uma família de operadores lineares e contínuos pontualmente limitada. Sendo E' um espaço de Banach, segue do Teorema de Banach-Steinhaus que

$$\sup_{x \in A} \|J_E(x)\| < \infty.$$

Finalmente,

$$\|J_E(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |J_E(x)(\varphi)| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|,$$

para todo $x \in E$. Logo,

$$\sup_{x \in A} \|x\| = \sup_{x \in A} \|J_E(x)\| < \infty, \tag{2.5}$$

e assim A é limitado. ∎

Proposição 2.10. Para todo E espaço vetorial normado, $\ell_\infty^w(E) = \ell_\infty(E)$ isometricamente.

Demonstração: Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$ e $\varphi \in E'$. Então,

$$\sup_n |\varphi(x_n)| \leq \sup_n (\|\varphi\| \, \|x_n\|) = \|\varphi\| \sup_n \|x_n\| < \infty,$$

donde $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty^w(E)$. Reciprocamente, $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty^w(E)$ implica que, para todo $\varphi \in E'$, a sequência $(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty$ é limitada, logo o conjunto $\{x_j \colon j \in \mathbb{N}\}$ dos termos da sequência que tomamos em $\ell_\infty^w(E)$ é fracamente limitado. Pelo Lema 2.9, $\{x_j \colon j \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Portanto $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,\infty} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sup_n |\varphi(x_n)| \right) \\
&\overset{A.2}{=} \sup_n \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_n)| \right) = \sup_n \|x_n\| = \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty .
\end{aligned}$$

■

2.1.4 Espaço das sequências incondicionalmente p-somáveis

Sejam E um espaço vetorial normado e $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço das sequências em E que são *incondicionalmente p-somáveis* por

$$\ell_p^u(E) := \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E) \colon \lim_{k \to \infty} \|(x_n)_{n=k}^\infty\|_{w,p} = 0 \right\}.$$

Em geral, $\ell_p^u(E) \subsetneq \ell_p^w(E)$ pela Observação A.6.

A justificativa para o termo incondicionalmente p-somável vem do fato de que as sequências incondicionalmente somáveis em E são exatamente as sequências de $\ell_1^u(E)$ (veja [9], Proposição 8.3). Daí, naturalmente, como extensão do conceito, chamam-se as sequências de $\ell_p^u(E)$ de incondicionalmente p-somáveis.

Este espaço não demanda uma norma particular, pois o mesmo é fechado em $\ell_p^w(E)$. Assim $\left(\ell_p^u(E), \|\cdot\|_{w,p}\right)$ é um espaço de Banach. É o que mostra a

Proposição 2.11. Seja E um espaço de Banach. $\ell_p^u(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_p^w(E)$ e, portanto, é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{w,p}$.

Demonstração: A verificação de que $\ell_p^u(E)$ é um subespaço vetorial de ℓ_p^w é imediata. Mostremos que $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$. Sejam $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em

$\ell_p^u(E)$ e $x \in \ell_p^w(E)$ tais que $x^k \to x$ em $\ell_p^w(E)$. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k = (x_n^k)_{n=1}^\infty \in \ell_p^u(E)$. Logo,

$$\lim_{l\to\infty} \left\|(x_n^k)_{n=l}^\infty\right\|_{w,p} = 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $l_0 = l_0(\varepsilon, k) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|(x_n^k)_{n=l}^\infty\right\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.6}$$

para todo $l > l_0$. Por outro lado, $x^k \to x$ em $\ell_p^w(E)$ implica que existe $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} > \left\|x^k - x\right\|_{w,p} = \left\|(x_n^k - x_n)_{n=1}^\infty\right\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^\infty \left|\varphi(x_n^k - x_n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \geq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=l}^\infty \left|\varphi(x_n^k - x_n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(x_n^k)_{n=l}^\infty - (x_n)_{n=l}^\infty\right\|_{w,p} \end{aligned} \tag{2.7}$$

para todo $k > k_0$ e todo $l \in \mathbb{N}$.

De (2.6) e (2.7), para $l > l_0(\varepsilon, k_0)$ e $k = k_0 + 1$, temos

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=l}^\infty\|_{w,p} &= \left\|(x_n)_{n=l}^\infty - (x_n^k)_{n=l}^\infty + (x_n^k)_{n=l}^\infty\right\|_{w,p} \\ &\leq \left\|(x_n)_{n=l}^\infty - (x_n^k)_{n=l}^\infty\right\|_{w,p} + \left\|(x_n^k)_{n=l}^\infty\right\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $\lim\limits_{l\to\infty} \|(x_n)_{n=l}^\infty\|_{w,p} = 0$. Com isso obtemos que $x \in \ell_p^u(E)$ e, portanto, $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(x)$. ■

2.1.5 Relações de inclusão entre espaços de sequências

Encerramos esta seção com os seguintes resultados de inclusão entre os espaços de sequências estudados até aqui:

Proposição 2.12. Sejam $1 \leq p \leq q < \infty$ e E um espaço de Banach. Então

(i) $\ell_p(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q(E)$.

(ii) $\ell_p^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^w(E)$.

(iii) $\ell_p^u(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^u(E)$.

Mais ainda, as continências são estritas para $p < q$.

Demonstração: (i) Seja $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência em $\ell_p(E)$. Então,

$$\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < \infty,$$

donde $\lim\limits_j \|x_j\| = 0$ e, por isso, $\sup\limits_j \|x_j\| =: \lambda < \infty$. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{q-p} \|x_j\|^p \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda^{q-p} \|x_j\|^p = \lambda^{q-p} \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p.$$

Fazendo $n \to \infty$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q \leq \lambda^{q-p} \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p,$$

ou seja,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q^q \leq \lambda^{q-p} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p^p. \tag{2.8}$$

Portanto, $\ell_p(E) \subseteq \ell_q(E)$.

Como

$$\|x_k\| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $\lambda = \sup\limits_j \|x_j\| \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p$. Logo, de (2.8) obtemos que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q^q \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p^{q-p} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p^p = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p^q,$$

isto é, $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p$ para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$.

Observamos que se $1 \leq p < q < \infty$, então $\ell_p(E) \subsetneq \ell_q(E)$. De fato, $p < q$ implica $\dfrac{q}{p} > 1$. Logo, dado $x \neq 0$, a sequência $\left(\dfrac{x}{j^{\frac{1}{p}}}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$, pois

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\frac{x}{j^{\frac{1}{p}}}\right\|^q = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left|\frac{1}{j^{\frac{1}{p}}}\right| \|x\|\right)^q = \|x\|^q \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{q}{p}}} < \infty.$$

Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\frac{x}{j^{\frac{1}{p}}}\right\|^p = \|x\|^p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty,$$

donde $\left(\dfrac{x}{j^{\frac{1}{p}}}\right)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p(E)$.

(ii) Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em $\ell_p^w(E)$. Pelo item (i),

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_q \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p} < \infty.$$

Portanto, $\ell_p^w(E) \subseteq \ell_q^w(E)$ e $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}$ para todo sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$.

De modo semelhante ao item (i), mostra-se que se $p < q$ então $\left(\frac{x}{j^{\frac{1}{p}}}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E) \setminus \ell_p^w(E)$.

(iii) Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em $\ell_p^u(E)$. De $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}$, segue que $\left\|(x_j)_{j=k}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \left\|(x_j)_{j=k}^{\infty}\right\|_{w,p}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\lim_k \left\|(x_j)_{j=k}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \lim_k \left\|(x_j)_{j=k}^{\infty}\right\|_{w,p} = 0.$$

Portanto, $\ell_p^u(E) \subseteq \ell_q^u(E)$ e, pelo item (ii), $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}$, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$. É imediato mostrar que se $p < q$ então $\left(\frac{x}{j^{\frac{1}{p}}}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E) \setminus \ell_p^u(E)$. $\blacksquare$

Proposição 2.13. Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Então

(i) $\ell_p(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^u(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$.

(ii) $\ell_p(E) = \ell_p^w(E)$ se, e somente se, $\dim E < \infty$.

Demonstração: (i) A inclusão $\ell_p^u(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E)$ segue imediatamente da Proposição 2.11.

Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Então,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty,$$

para todo $\varphi \in E'$. Logo, o conjunto $\{x_j \colon j \in \mathbb{N}\}$ dos termos da sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é fracamente limitado e, pelo Lema 2.9, é limitado, ou seja, existe $M \geq 0$ tal que $\|x_j\| \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$, isto é, $\ell_p^w(E) \subseteq \ell_\infty(E)$. Além disso,

$$\|x_k\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_k)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando o supremo sobre $k \in \mathbb{N}$, obtemos $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}$, donde $\ell_p^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$.

Agora, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. Então,

$$\begin{aligned}
\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\|\varphi\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi\| = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p,
\end{aligned}$$

donde $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p$. Por outro lado, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ implica $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$, logo

$$\lim_n \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{w,p} \leq \lim_n \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_p = 0.$$

Portanto, $\ell_p(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^u(E)$.

(ii) Esta igualdade segue imediatamente do Teorema Dvoretsky-Rogers Fraco (Teorema 1.29). ■

Observação 2.14. Os espaços $\ell_p(E), \ell_p^u(E)$ e $\ell_p^w(E)$ possuem a seguinte propriedade: Seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência convergente em qualquer desses espaços, digamos $x^k \to x$ em $\ell_p(E)$. Como $\ell_p(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|x_j^k - x_j\right\|_E \leq \left\|x^k - x\right\|_\infty \leq \left\|x^k - x\right\|_p < \varepsilon$$

para todo $k > k_0$ e todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, $x_j^k \xrightarrow{k} x_j$ em E para todo $j \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que convergência nesses espaços de sequências implica em convergência coordenada a coordenada.

Essa e alguns outros tipos de propriedades dos espaços de sequências foram estudados abstratamente num trabalho de G. Botelho e J. R. Campos em [3].

Observação 2.15. Denotamos por $c_{00}(E)$ o conjunto formado por todas as sequências eventualmente nulas em E, isto é,

$$c_{00} := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} \colon \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0 \text{ para todo } n > n_0\right\}.$$

Não é difícil mostrar que $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado incompleto (ver [5], Seção 1.1). Note que $c_{00}(E) \subseteq \ell_p(E)$, para todo $p \in [1, \infty)$. De fato, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}(E)$ implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n > n_0$ donde $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = (\sum_{n=1}^{n_0} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

2.2 Operadores Lineares Absolutamente (p, q)-somantes

Dados E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$, os operadores $\widehat{T}^s \colon \ell_p(E) \to \ell_p(F)$ e $\widehat{T}^w \colon \ell_p^w(E) \to \ell_p^w(F)$, induzidos por T pela relação $(x_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto (T(x_j))_{j=1}^{\infty}$, são tais que $\widehat{T}^s \in \mathcal{L}(\ell_p(E), \ell_p(F))$ e $\widehat{T}^w \in \mathcal{L}(\ell_p^w(E), \ell_p^w(F))$ para todo $p \in [1, \infty)$. De fato,

$$\left\|\widehat{T}^s((x_j)_{j=1}^{\infty})\right\|_p = \left\|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T\|^p \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|T\| \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p, \tag{2.9}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e, como $\dfrac{\varphi \circ T}{\|T\|} \in B_{E'}$ para todos $\varphi \in B_{F'}$ e $T \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\left\| \widehat{T}^w((x_j)_{j=1}^{\infty}) \right\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T\|^p \left| \frac{\varphi \circ T}{\|T\|}(x_j) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|T\| \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi \circ T}{\|T\|}(x_j) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|T\| \sup_{\psi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\psi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|T\| \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Assim, os operadores $\widehat{T}^s$ e $\widehat{T}^w$ estão bem definidos. Além disso, $\widehat{T}^s$ e $\widehat{T}^w$ são claramente lineares, logo contínuos por (2.9) e (2.10).

Agora, sejam E um espaço de Banach de dimensão infinita e $i\colon E \to E$ o operador inclusão. Pelo Teorema de Dvoretsky-Rogers Fraco, o operador $\widehat{i}\colon \ell_p^w(E) \to \ell_p(E)$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto (i(x_j))_{j=1}^{\infty}$, nunca está bem definido para todo $p \in [1, \infty)$.

A discussão acima motiva a seguinte definição:

Definição 2.16. Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $T\colon E \to F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que T é *absolutamente* (p,q)*-somante* (ou simplesmente (p,q)-somante), se o operador induzido

$$\begin{aligned}
\widehat{T}\colon \ell_q^w(E) &\longrightarrow \ell_p(F) \\
(x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^{\infty}
\end{aligned}$$

está bem definido. Neste caso $\widehat{T}$ será claramente linear.

O conjunto formado por todos os operadores (p,q)-somantes de E em F será denotado por $\Pi_{p,q}(E,F)$. Quando $p = q$, escreveremos $\Pi_p(E,F)$ no lugar de $\Pi_{p,p}(E,F)$. Neste caso, diremos que $T \in \Pi_p(E,F)$ é um operador absolutamente p-somante.

A seguir, apresentamos algumas caracterizações para operadores absolutamente (p,q)-somantes:

Proposição 2.17. Sejam E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E,F)$. São equivalentes:

(i) T é (p,q)-somante.

(ii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.11}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$.

(iii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.

(iv) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$.

(v) $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$.

Denotamos por $\pi_{p,q}(T)$ o ínfimo dos K tais que a desigualdade (2.11) continua válida. Mais ainda, temos que $\pi_{p,q}(T) = \left\|\widehat{T}\right\|$.

Demonstração: (i)$\Rightarrow$(ii) Se $\widehat{T}$ for contínuo, então

$$\left\|\widehat{T}((x_j)_{j=1}^{\infty})\right\|_p \leq \left\|\widehat{T}\right\| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q},$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Em particular,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\widehat{T}((x_j)_{j=1}^{n})\right\|_p \leq \left\|\widehat{T}\right\| \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q},$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$, e

$$\pi_{p,q}(T) \leq \left\|\widehat{T}\right\|. \tag{2.12}$$

Portanto, basta mostrar que $\widehat{T}$ é contínuo. Como $\widehat{T}$ é linear, resta provar que o gráfico de $\widehat{T}$ é fechado e aplicar o Teorema do Gráfico Fechado.

Seja $(x^k, \widehat{T}(x^k))_{k=1}^{\infty}$ uma sequência convergente no produto cartesiano $\ell_q^w(E) \times \ell_p(F)$, digamos $(x^k, \widehat{T}(x^k)) \to (x, y)$. Então,

$$x^k \to x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \text{ em } \ell_q^w(E) \tag{2.13}$$

e

$$\widehat{T}(x^k) \longrightarrow y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \text{ em } \ell_p(F). \tag{2.14}$$

Pela Observação 2.14, a expressão (2.13) implica em $x_j^k \xrightarrow{k} x_j$ em E para todo $j \in \mathbb{N}$. Como T é contínuo, segue que

$$\lim_k T(x_j^k) = T(x_j), \tag{2.15}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, também pela Observação 2.14, a expressão (2.14) implica em $T(x_j^k) \xrightarrow{k} y_j$ em F para todo $j \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\lim_k T(x_j^k) = y_j, \tag{2.16}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. De (2.15) e (2.16) obtemos que $T(x_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, o gráfico de $\widehat{T}$ é fechado.

(ii)⇒(iii) Se existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \cdots, n$, então, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\lim_n \sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_n \left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_n \left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_n \left[K \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] = K \sup_n \left[\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&\overset{A.2}{=} K \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\sup_n \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] = K \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= K \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

(iii)⇒(i) Se vale (iii), então vale (i) trivialmente. Além disso,

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{T}\right\| &= \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\leq 1} \left\|\widehat{T}((x_j)_{j=1}^{\infty})\right\|_p \\ &\leq \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\leq 1} K\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} = K,\end{aligned}$$

donde $\left\|\widehat{T}\right\| \leq \pi_{p,q}(T)$. Isto, junto com (2.12), nos garante que $\left\|\widehat{T}\right\| = \pi_{p,q}(T)$.

(iii)⇒(iv)⇒(v) São óbvio, pois $\ell_q^u(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^w(E)$.

(v)⇒(ii) Se vale (v), então o operador

$$\begin{aligned}\widehat{T}\colon \ell_q^u(E) &\longrightarrow \ell_p(F) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^{\infty}\end{aligned}.$$

está bem definido. Como $\widehat{T}$ é linear, de forma análoga à feita na implicação (i)⇒(ii) mostra-se que o gráfico de $\widehat{T}$ é fechado. Portanto $\widehat{T}$ é contínuo e, ainda como em (i)⇒(ii),

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\widehat{T}((x_j)_{j=1}^{n})\right\|_p \leq \left\|\widehat{T}\right\| \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$. ∎

Observação 2.18. Sejam E, F espaços de Banach. Se $p < q$, então apenas o operador nulo pode ser (p, q)-somante. De fato, pela Proposição 2.12, existe $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q \setminus \ell_p$. Logo, para todo $x \in E$ a sequência $(\lambda_j x)_{j=1}^{\infty}$ pertence a $\ell_q^w(E)$. Suponhamos que, do contrário, exista $T \in \Pi_{p,q}(E, F)$ tal que $T \neq 0$. Então, existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|T(\lambda_j x)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(\lambda_j x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\|T(x)\|\left(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq K \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^q\,|\varphi(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= K \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}|\varphi(x)|\right] \\ &= K\,\|x\|\left(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Tomando o sup para $x \neq 0$, temos

$$\|T\| \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Finalmente, fazendo $n \to \infty$, chegamos ao absurdo $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$.

Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A, B \in \Pi_{p,q}(E, F)$. Então,

$$\begin{aligned}
\left\| ((A + \lambda B)(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_p &= \left\| (A(x_j))_{j=1}^{\infty} + \lambda (B(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_p \\
&\leq \left\| (A(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_p + |\lambda| \left\| (B(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_p \\
&\leq \pi_{p,q}(A) \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} + |\lambda| \, \pi_{p,q}(B) \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \\
&= (\pi_{p,q}(A) + |\lambda| \, \pi_{p,q}(B)) \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q}
\end{aligned}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Daí,

$$A + \lambda B \in \Pi_{p,q}(E, F)$$

e

$$\pi_{p,q}(A + \lambda B) \leq \pi_{p,q}(A) + |\lambda| \, \pi_{p,q}(B). \tag{2.17}$$

Logo, $\Pi_{p,q}(E, F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$ para todos E e F espaços de Banach.

Neste ponto, a pergunta natural a ser feita é: $\Pi_{p,q}(E, F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E, F)$ para quaisquer espaços de Banach E e F? Na Proposição A.7 mostramos que não. Portanto $\Pi_{p,q}(E, F)$ demanda uma norma completa.

Proposição 2.19. A função $\pi_{p,q}(\cdot) \colon \Pi_{p,q}(E, F) \to [0, \infty)$, dada por

$$\pi_{p,q}(T) = \left\| \widehat{T} \right\|,$$

onde $\widehat{T}$ é o operador induzido, define uma norma em $\Pi_{p,q}(E, F)$.

Demonstração: Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A, B \in \Pi_{p,q}(E, F)$. Mostremos que $\pi_{p,q}(\cdot)$ satisfaz as condições estabelecidas na Definição 1.1:

N1) Como $\pi_{p,q}(A) = \left\| \widehat{A} \right\|$, $\pi_{p,q}(A) \geq 0$ para todo $A \in \Pi_{p,q}(E, F)$. Além disso, $\pi_{p,q}(A) = 0$ se, e somente se, $\left\| \widehat{A} \right\| = 0$. Mas isso ocorre se, e somente se, $\widehat{A} = 0$, que claramente equivale a $A = 0$.

N2) $\pi_{p,q}(\lambda A) = \left\| \lambda \widehat{A} \right\| = |\lambda| \left\| \widehat{A} \right\| = |\lambda| \, \pi_{p,q}(A)$.

N3) Foi provado em (2.17).

■

Observação 2.20. Se $T \in \Pi_{p,q}(E,F)$, então

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(T) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$. Fazendo $n = 1$, temos

$$\|T(x)\| \leq \pi_{p,q}(T) \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \pi_{p,q}(T) \, \|x\|,$$

para todo $x \in E$, de onde obtemos

$$\|T\| \leq \pi_{p,q}(T),$$

para todo $T \in \Pi_{p,q}(E,F)$.

A seguir, mostramos que vale a seguinte inclusão:

Teorema 2.21 (Teorema de Inclusão). *Sejam E e F espaços de Banach. Suponha que $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$, $j = 1, 2$, satisfazem $p_1 \leq p_2$, $q_1 \leq q_2$ e $\dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{p_1} \leq \dfrac{1}{q_2} - \dfrac{1}{p_2}$. Então,*

$$\Pi_{p_1,q_1}(E,F) \subseteq \Pi_{p_2,q_2}(E,F)$$

e

$$\pi_{p_2,q_2}(T) \leq \pi_{p_1,q_1}(T),$$

para todo $T \in \Pi_{p_1,q_1}(E,F)$.

Demonstração: Dividiremos a nossa demonstração em dois casos:
Caso 1: $q_1 = q_2 = q$.

Pela Proposição 2.12, $\ell_{p_1}(F) \subseteq \ell_{p_2}(F)$. Se $T \in \Pi_{p_1,q}(E,F)$, o operador induzido

$$\widehat{T} \colon \ell_q^w(E) \longrightarrow \ell_{p_1}(F) \subseteq \ell_{p_2}(F)$$

está bem definido. Logo, $T \in \Pi_{p_2,q}(E,F)$. Além disso, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, vale

$$\left\|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_2} \leq \left\|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_1} \leq \pi_{p_1,q}(T) \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q},$$

donde $\pi_{p_2,q}(T) \leq \pi_{p_1,q}(T)$ para todo $T \in \Pi_{p_1,q}(E,F)$.
Caso 2: $q_1 < q_2$.

Neste caso, $\dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{p_1} \leq \dfrac{1}{q_2} - \dfrac{1}{p_2}$ implica $p_1 < p_2$. Definamos p e q pelas expressões

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}.$$

Sejam $T \in \Pi_{p_1,q_1}(E,F)$, $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$. Tomando

$$\lambda_j := \|T(x_j)\|^{\frac{p_2}{p}}, \tag{2.18}$$

$j = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned} \|T(\lambda_j x_j)\|^{p_1} &= |\lambda_j|^{p_1} \|T(x_j)\|^{p_1} = \|T(x_j)\|^{\frac{p_1 p_2}{p}} \|T(x_j)\|^{p_1} \\ &= \|T(x_j)\|^{p_1 p_2 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) + p_1} = \|T(x_j)\|^{p_2}, \end{aligned}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$. Daí,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_1}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \|T(\lambda_j x_j)\|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leq \pi_{p_1,q_1}(T) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{q_1} |\varphi(x_j)|^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$. Como $\dfrac{1}{\frac{q}{q_1}} + \dfrac{1}{\frac{q_2}{q_1}} = 1$, a desigualdade de Hölder garante que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{q_1} |\varphi(x_j)|^{q_1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{q} \right)^{\frac{q_1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q_2}}, \tag{2.20}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$.

De (2.19) e (2.20), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(T) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{q} \right)^{\frac{q_1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right]^{\frac{1}{q_1}} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(T) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$.

De $\dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{p_1} \leq \dfrac{1}{q_2} - \dfrac{1}{p_2}$, segue que $\dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{p}$, isto é, $p \leq q$ e assim

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.22}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$.

Por (2.18), (2.21) e (2.22), temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(T) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(T) \left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$.

Suponha que $\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}} \neq 0$. Então, dividindo ambos os membros da inequação (2.23) por $\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}}$, concluímos que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \pi_{p_1,q_1}(T) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}, \tag{2.24}$$

pois $\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2} = \dfrac{1}{p}$ implica $\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_2}$.

Como a inequação (2.24) continua válida se $\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, então provamos que $T \in \Pi_{p_2,q_2}(E, F)$ e $\pi_{p_2,q_2}(T) \leq \pi_{p_1,q_1}(T)$, para todo $T \in \Pi_{p_1,q_1}(E, F)$. ■

Observação 2.22. Se $p_1 = q_1$ e $p_2 = q_2$ no Teorema 2.21, então $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ implica

$$\Pi_{p_1}(E, F) \subseteq \Pi_{p_2}(E, F).$$

Finalizamos esta seção com um importante resultado da teoria dos operadores absolutamente p-somantes. Em essência, esse tipo de resultado relaciona a teoria de operadores absolutamente somantes com a teoria da medida. Sua demonstração pode ser encontrada em [10, Teorema 2.12].

Definição 2.23. Um subconjunto A do dual E' de um espaço de Banach E é dito *nor-*

mante para E se

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in N,\ \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|$$

para todo $x \in E$.

Teorema 2.24 (**Teorema de Dominação de Pietsch**). *Sejam $1 \leq p < \infty$, E e F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e K um subconjunto de $B_{E'}$ normante para E e compacto com relação à topologia fraca-estrala. Então T é p-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ em K tal que, para cada $x \in E$,*

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_K |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.25}$$

Neste caso, $\pi_p(T)$ é o ínfimo das constantes C que satisfazem (2.25).

Capítulo 3

Operadores Cohen Fortemente Somantes

Inspirado no trabalho do J. S. Cohen [8], que caracterizou o adjunto de um operador absolutamente somante, R. Khalil [14] introduziu o espaço das sequências, aqui denominadas Cohen-Khalil (q,p)-somáveis, do qual o espaço das sequências Cohen fortemente p-somáveis é um caso particular. Optamos por começar o estudo dos operadores lineares Cohen fortemente p-somantes através desses espaços mais gerais. Além dos artigos citados, também recorremos aos trabalhos [6] e [7] durante a elaboração deste texto.

3.1 Espaço das Sequências Cohen-Khalil fortemente (q,p)-somáveis

Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p, q \leq \infty$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita *Cohen-Khalil fortemente* (q,p)*-somável* quando $(\varphi_n(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$ para toda sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E')$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Denotamos por $\ell_{q,p}\langle E\rangle$ o conjunto de todas as sequências Cohen-Khalil fortemente (q,p)-somáveis em E, isto é,

$$\ell_{q,p}\langle E\rangle = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} \colon (\varphi_n(x_n)) \in \ell_q,\ \forall\ (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E')\right\}.$$

Não é difícil verificar que, com as operações usuais de sequências, $\ell_{q,p}\langle E\rangle$ é um espaço vetorial. De maneira semelhante ao que fizemos no Capítulo 2, estudaremos a norma do espaço $\ell_{q,p}\langle E\rangle$ e mostraremos que, com essa norma, $\ell_{q,p}\langle E\rangle$ é um espaço de Banach.

Proposição 3.1. A função $\|\cdot\|_{q,p} : \ell_{q,p}\langle E\rangle \to [0,\infty)$, dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} := \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

define uma norma em $\ell_{q,p}\langle E\rangle$.

Demonstração: Para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$, definamos o operador

$$\begin{aligned} T_x \colon \ell_{p^*}^w(E') &\longrightarrow \ell_q \\ (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} &\longmapsto (\varphi_n(x_n))_{n=1}^{\infty} \end{aligned}.$$

Como $x \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$, segue que T_x está bem definido. É trivial mostrar que T_x é linear. A fim de garantir que a função $\|\cdot\|_{q,p}$ está bem definida, mostremos que T_x é contínuo para cada $x \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$.

Seja $(\varphi^k, T_x(\varphi^k))_{k=1}^{\infty}$ uma sequência convergente em $\ell_{p^*}^w(E')\times\ell_q$, digamos $(\varphi^k, T_x(\varphi^k)) \to (\varphi, y)$, ou seja,

$$\left| \begin{array}{l} (\varphi_n^k)_{n=1}^{\infty} = \varphi^k \xrightarrow{k} \varphi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \ \text{ em } \ \ell_{p^*}^w(E'), \ \text{ e} \\ (\varphi_n^k(x_n))_{n=1}^{\infty} = T_x(\varphi^k) \longrightarrow y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \ \text{ em } \ \ell_q. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Pela Observação 2.14 segue de (3.1) que

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_n^k \xrightarrow{k} \varphi_n \ \text{ em } \ E', \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}, \ \text{ e} \\ \varphi_n^k(x_n) \xrightarrow{k} y_n \ \text{ em } \ \mathbb{K}, \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Por (3.2), $\varphi_n^k(x) \xrightarrow{k} \varphi_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in E$. Em particular, $\varphi_n^k(x_n) \xrightarrow{k} \varphi_n(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por unicidade, $\varphi_n(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde

$$(\varphi_n^k(x_n))_{n=1}^{\infty} = T_x(\varphi^k) \longrightarrow y = (y_n)_{n=1}^{\infty} = (\varphi_n(x_n))_{n=1}^{\infty} = T_x(\varphi).$$

Consequentemente, o gráfico de T_x é fechado e, portanto, T_x é contínuo para todo $x \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$.

Para concluir, mostremos que $\|\cdot\|_{q,p}$ satisfaz as condições **N1**, **N2** e **N3** da Definição 1.1:

N1) É claro que $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} \geq 0$ para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$ e que $\|0\|_{q,p} = 0$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$ tal que $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} = 0$. Pela Observação 2.15, $(\varphi\delta_{ij})_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E')$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, para todos $\varphi \in E'$ e $j \in \mathbb{N}$. Se $\varphi \in B_{E'}$, então

$$\|(\varphi\delta_{ij})_{i=1}^{\infty}\|_{w,p^*} = \sup_{\psi \in B_{E''}} |\psi(\varphi)| = \|\varphi\| \leq 1$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|x_j\| &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j)| = \sup_{(\varphi\delta_{ij})_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell^w_{p^*}(E')}} \|(\varphi\delta_{i,j}(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_q \\ &\leq \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell^w_{p^*}(E')}} \left\|(\varphi_j(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_q = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,p} = 0, \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty} = 0$.

N2) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$. Então,

$$\begin{aligned} \|\lambda(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} = \|(\lambda x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell^w_{p^*}(E')}} \|(\varphi_n(\lambda x_n))_{n=1}^{\infty}\|_q \\ &= |\lambda| \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell^w_{p^*}(E')}} \|(\varphi_n(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_q = |\lambda| \, \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} . \end{aligned}$$

N3) Sejam $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$. Então,

$$\begin{aligned} \|(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} = \|(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell^w_{p^*}(E')}} \|(\varphi_n(a_n + b_n))_{n=1}^{\infty}\|_q \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell^w_{p^*}(E')}} \|(\varphi_n(a_n))_{n=1}^{\infty} + (\varphi_n(b_n))_{n=1}^{\infty}\|_q \\ &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell^w_{p^*}(E')}} \left(\|(\varphi_n(a_n))_{n=1}^{\infty}\|_q + \|(\varphi_n(b_n))_{n=1}^{\infty}\|_q\right) \\ &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell^w_{p^*}(E')}} \|(\varphi_n(a_n))_{n=1}^{\infty}\|_q + \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell^w_{p^*}(E')}} \|(\varphi_n(b_n))_{n=1}^{\infty}\|_q \\ &= \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} + \|(b_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} . \end{aligned}$$

■

No artigo [14], o autor não estabelece nenhuma relação de inclusão entre o espaço de sequências $\ell_{q,p}\langle E\rangle$ para diferentes valores de parâmetros nem com os demais espaços de sequências conhecidos. Até onde sabemos, a proposição a seguir trata-se de uma primeira abordagem dessa questão.

Proposição 3.2. Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p, q, p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$.

(a) Se $q_1 \leq q_2$, então $\ell_{q_1,p}\langle E\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_{q_2,p}\langle E\rangle$ para todo p.

(b) Se $p_1 \leq p_2$, então $\ell_{q,p_1}\langle E\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_{q,p_2}\langle E\rangle$ para todo q.

(c) Se $1 < p \leq \infty$, então $\ell_{1,p}\langle E\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(E)$ e para $p = 1$ temos $\ell_{1,p}\langle E\rangle = \ell_p(E)$.

(d) Se $1 < q \leq \infty$, então $\ell_{q,1}\langle E\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q(E)$ e para $q = 1$ temos $\ell_{q,1}\langle E\rangle = \ell_q(E)$.

(e) $\ell_{q,p}\langle E\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$ para todos q e p.

Demonstração: (a) Seja $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{q_1,p}\langle E\rangle$. Então $\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)|^{q_1} < \infty$ para toda $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(E')$. Pela Proposição 2.13,

$$\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)|^{q_2} \leq \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)|^{q_1},$$

para toda $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(E')$. Portanto $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{q_2,p}\langle E\rangle$ e $\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{q_2,p} \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{q_1,p}$.
(b) $p_1 \leq p_2$ implica $p_2^* \leq p_1^*$. Daí, pela Proposição 2.12, $\ell_{p_2^*}^w(E') \subseteq \ell_{p_1^*}^w(E')$. Logo, se $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{q,p_1}\langle E\rangle$ teremos

$$\begin{aligned}\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{q,p_2} &= \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p_2^*}^w(E')}} \left(\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p_1^*}^w(E')}} \left(\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{q,p_1}.\end{aligned}$$

(c) Sejam $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{1,p}\langle E\rangle$ e $1 < p < \infty$. Então $\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)| < \infty$ para toda $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(E')$, donde

$$\left|\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x_i)\right| \leq \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)| < \infty, \tag{3.3}$$

para toda $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(E')$. Pelas Proposições A.4 e 2.13 e por (3.3), segue que

$$\begin{aligned}\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p &= \sup_{\psi \in B_{(\ell_p(E))'}} |\psi((x_i)_{i=1}^\infty)| = \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(E')}} \left|\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x_i)\right| \\ &\leq \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \left|\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x_i)\right| \leq \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)| \\ &= \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{1,p}.\end{aligned}$$

Portanto, $\ell_{1,p}\langle E\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(E)$. O caso $p = \infty$ é contemplado no item (e).

Seja $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1(E)$. Como

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)| &\leq \sum_{i=1}^\infty \|\varphi_i\| \, \|x_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_\infty \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^\infty \|x_i\| < \infty,\end{aligned}$$

para toda $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty^w(E')} = B_{\ell_\infty(E')}$, temos

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{1,1} = \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(E')}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| \leq \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_1 .$$

Por outro lado, se $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{1,1}\langle E\rangle$, considere a sequência $(\psi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(E')}$ dada por

$$\psi_i = \begin{cases} 0, & \text{caso } x_i = 0, \\ \text{funcional } \gamma_i \text{ tal que } \|\gamma_i\| = 1 \text{ e } \gamma_i(x_i) = \|x_i\|, & \text{caso } x_i \neq 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

Sequência esta construída com o auxílio do Teorema de Hahn-Banach. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(x_i)| \\ &\leq \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(E')}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| = \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{1,1} , \end{aligned}$$

e portanto $\ell_{1,1}\langle E\rangle = \ell_1(E)$.
(d) O caso $q = 1$ segue do item anterior e o caso $q = \infty$ é contemplado no item (e). Seja $1 < q < \infty$. Para cada $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{q,1}\langle E\rangle$, seja $(\psi_i)_{i=1}^{\infty}$ construída como em (3.4). Temos,

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_q &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty^w(E')}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{q,1} , \end{aligned}$$

o que conclui a prova de (d).
(e) Seja $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$. Então,

$$\begin{aligned} \|x_j\| &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j)| = \sup_{(\varphi\delta_{ij})_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \|(\varphi\delta_{i,j}(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_q \\ &\leq \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \|(\varphi_i(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_q = \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{q,p} , \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim concluímos que $\ell_{q,p}\langle E\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$. ■

Observação 3.3. Não conseguimos estabelecer uma relação entre o espaço $\ell_{q,p}\langle E\rangle$ e os espaços $\ell_p(E)$ e/ou $\ell_q(E)$ para $p, q > 1$.

Proposição 3.4. Seja E um espaço de Banach. Então $(\ell_{q,p}\langle E\rangle, \|\cdot\|_{q,p})$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência absolutamente somável em $\ell_{q,p}\langle E\rangle$, isto é, $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x^k\right\|_{q,p}<\infty$ com $x^k=(x_n^k)_{n=1}^{\infty}\in\ell_{q,p}\langle E\rangle$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Pela Observação 1.24, basta mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty}x^k$ converge em $\ell_{q,p}\langle E\rangle$. Dividiremos a nossa demonstração em dois casos:

Caso 1: $q=1$.

Da Proposição 3.2 temos $\left\|x_n^k\right\|_E\leq\left\|x^k\right\|_{\infty}\leq\left\|x^k\right\|_{q,p}$ para todos $k,n\in\mathbb{N}$, donde

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_n^k\right\|_E\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x^k\right\|_{q,p}<\infty, \tag{3.5}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Pela Observação 1.24 e a completude de E, para cada $n\in\mathbb{N}$, tem-se $\sum_{k=1}^{\infty}x_n^k=x_n$, onde $x_n\in E$. Logo, basta mostrar que $(\sum_{k=1}^{\infty}x_n^k)_{n=1}^{\infty}=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell_{1,p}\langle E\rangle$ e que $\sum_{k=1}^{\infty}x^k=(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Note que, pelo Critério de Comparação, (3.5) implica

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_n(x_n^k)\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_n(x_n^k)\right|<\infty, \tag{3.6}$$

para todos $n\in\mathbb{N}$ e $\varphi_n\in E'$, pois para todo $j\in\mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{j}\varphi_n(x_n^k)\right|\leq\sum_{k=1}^{j}\left|\varphi_n(x_n^k)\right|\leq\|\varphi_n\|\sum_{k=1}^{j}\left\|x_n^k\right\|_E.$$

Além disso, pela continuidade de φ_n, $\sum_{k=1}^{\infty}x_n^k=\lim_j\sum_{k=1}^{j}x_n^k=x_n$ implica em

$$\begin{aligned}\varphi_n(x_n)&=\lim_j\varphi_n\left(\sum_{k=1}^{j}x_n^k\right)\\&=\lim_j\sum_{k=1}^{j}\varphi_n(x_n^k)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_n(x_n^k),\end{aligned} \tag{3.7}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

Seja $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ o espaço de medida onde $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é a σ-álgebra das partes de $\mathbb{N}$ e μ é a medida de contagem. De (3.6), a função

$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{N}&\longrightarrow\mathbb{R}\\n&\longmapsto\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_n(x_n^k)\right|\end{aligned}$$

está bem definida. Sejam $\psi_k,f_j\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ dadas por $\psi_k(n)=\left|\varphi_n(x_n^k)\right|$ e $f_j(n)=\sum_{k=1}^{j}\left|\varphi_n(x_n^k)\right|$ para todos $k,j\in\mathbb{N}$. Então, $f_j=\sum_{k=1}^{j}\psi_k$ e $f_j\leq f_{j+1}$ para todo $j\in\mathbb{N}$. Por construção, $f_j(n) \xrightarrow{j} f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema da Convergência Monótona (veja o Apêndice A, Teorema A.8),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \lim_j \int_{\mathbb{N}} f_j d\mu = \lim_j \int_{\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{j} \psi_k \right) d\mu \\ = \lim_j \sum_{k=1}^{j} \int_{\mathbb{N}} \psi_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} \psi_k d\mu\end{aligned}$$

donde, pela Proposição A.9, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi_n(x_n^k) \right| \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} \psi_k d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_k(n) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n(x_n^k) \right| \right).\end{aligned} \tag{3.8}$$

De (3.6), (3.7) e (3.8), obtemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n(x_n^k) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi_n(x_n^k) \right| \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n(x_n^k) \right| \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| x^k \right\|_{1,p} < \infty,\end{aligned}$$

para toda sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}$. Consequentemente, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{1,p} \langle E \rangle$. Como a série $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| x^k \right\|_{1,p}$ é convergente, temos

$$\begin{aligned}\left\| (x_n)_{n=1}^{\infty} - \sum_{k=1}^{j} x^k \right\|_{1,p} &= \left\| \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} x_n^k \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_{1,p} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} x_n^k \right) \right| \right) \\ &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left| \varphi_n(x_n^k) \right| \right) \\ &\overset{(3.8)}{=} \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n(x_n^k) \right| \right) \\ &\leq \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n(x_n^k) \right| \right) \right) \\ &= \sum_{k=j+1}^{\infty} \left\| x^k \right\|_{1,p} \xrightarrow{j} 0,\end{aligned}$$

donde $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = (x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Caso 2: $q > 1$.

Como $(\ell_q)' = \ell_{q^*}$, temos

$$\left\|(\varphi_n(x_n))_{n=1}^{\infty}\right\|_q = \sup_{\psi \in B_{(\ell_q)'}} \left|\psi((\varphi_n(x_n))_{n=1}^{\infty})\right| = \sup_{(\theta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{q^*}}} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \varphi_n(x_n)\right|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{q,p} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \left\|(\varphi_n(x_n))_{n=1}^{\infty}\right\|_q \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \left(\sup_{(\theta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{q^*}}} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \varphi_n(x_n)\right|\right).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Como no *Caso 1*, devemos mostrar que $(\sum_{k=1}^{\infty} x_n^k)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$ e que $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Sejam $(\theta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{q^*}}$ e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}$. De (3.6), segue que a função

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} |\theta_n| \left|\varphi_n(x_n^k)\right| = |\theta_n| \sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi_n(x_n^k)\right| \end{aligned}$$

está bem definida. Sejam $\xi_k, g_j \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funções dadas por $\xi_k(n) = |\theta_n| \left|\varphi_n(x_n^k)\right|$ e $g_j(n) = \sum_{k=1}^{j} |\theta_n| \left|\varphi_n(x_n^k)\right|$ para todos $k, j \in \mathbb{N}$. Então, $g_j = \sum_{k=1}^{j} \xi_k$, $g_j \leq g_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e, por construção, $g_j(n) \to g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} g d\mu = \lim_j \int_{\mathbb{N}} g_j d\mu = \lim_j \int_{\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{j} \xi_k\right) d\mu \\ = \lim_j \sum_{k=1}^{j} \int_{\mathbb{N}} \xi_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} \xi_k d\mu.\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição A.9,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\theta_n| \left|\varphi_n(x_n^k)\right|\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} g(n) = \int_{\mathbb{N}} g d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} \xi_k d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_k(n)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\theta_n| \left|\varphi_n(x_n^k)\right|\right).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Adaptando o raciocínio usado em (3.6) e (3.7), temos

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\theta_n\varphi_n(x_n^k)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|\theta_n|\left|\varphi_n(x_n^k)\right| < \infty, \tag{3.11}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_n \in E'$. Além disso,

$$\theta_n\varphi_n(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty}\theta_n\varphi_n(x_n^k), \tag{3.12}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por (3.10), (3.11), (3.12) e pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\varphi_n(x_n)\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|\theta_n\varphi_n(x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\theta_n\varphi_n(x_n^k)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\theta_n|\left|\varphi_n(x_n^k)\right|\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\theta_n|\left|\varphi_n(x_n^k)\right|\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\|(\theta_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q^*}\left\|(\varphi_n(x_n^k))_{n=1}^{\infty}\right\|_q\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\|(\theta_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q^*}\left\|x^k\right\|_{q,p}\right) = \|(\theta_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q^*}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x^k\right\|_{q,p} < \infty,
\end{aligned}$$

para todas $(\theta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{q^*}}$ e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}$. Logo, por (3.9),

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,p} = \sup_{\left\|(\theta_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{q^*},\left\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p^*}\leq 1}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\varphi_n(x_n)\right| < \infty$$

e assim $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}\langle E\rangle$. ■

3.2 Espaço das Sequências Cohen Fortemente p-somáveis

Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Uma sequencia $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é *Cohen fortemente p-somável* se a série $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x_n)|$ convergir para toda $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E')$, com $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$. Originalmente, não foi essa a definição dada por Cohen em [8]. Lá, uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é Cohen fortemente p-somável se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_n)$ convergir para toda $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E')$. No entanto, em [7], Campos mostrou que essas definições são equivalentes. Denotamos por $\ell_p\langle E\rangle$ o conjunto de todas as sequências Cohen fortemente

p-somáveis em E, isto é,

$$\ell_p \langle E \rangle = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_n)| < \infty, \ \forall \ (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E') \right\}.$$

Verifica-se facilmente que, com as operações usuais de sequências, $\ell_p \langle E \rangle$ é um espaço vetorial. Note que $\ell_p \langle E \rangle = \ell_{1,p} \langle E \rangle$, isto é, as sequências Cohen fortemente somáveis são um caso particular do que vimos na Seção 3.1. Assim, como já demonstrado, $(\ell_p \langle E \rangle, \|\cdot\|_{1,p})$ é um espaço de Banach. A propósito, esta também não foi a norma introduzida por Cohen em [8]. Ele definiu uma norma em $\ell_p \langle E \rangle$ pela expressão

$$\sigma_p((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n) \right|.$$

Porém, em [18], Nogueira mostrou que $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{1,p} = \sigma_p((x_n)_{n=1}^{\infty})$. Dessa maneira, faremos uso das duas expressões indistintamente ao longo do texto.

A próxima proposição segue imediatamente como caso particular da Proposição 3.2.

Proposição 3.5. Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$.

(i) Se $1 < p \leq \infty$, então $\ell_p \langle E \rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(E)$.

(ii) Se $p = 1$, então $\ell_p \langle E \rangle = \ell_p(E)$.

3.3 Operadores Lineares Cohen Fortemente p-somantes

Sejam E, F espaços de Banach e $1 < p \leq \infty$. Um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é dito *Cohen fortemente p-somante* quando

$$(T(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \langle F \rangle \quad \text{sempre que} \quad (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E),$$

isto é, quando o operador

$$\begin{aligned} \widehat{T} \colon \ell_p(E) &\longrightarrow \ell_p \langle F \rangle \\ (x_n)_{n=1}^{\infty} &\longmapsto (T(x_n))_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

está bem definido (e neste caso é claramente linear).

Denotamos por $\mathcal{D}_p(E, F)$ o conjunto dos operadores Cohen fortemente p-somantes de E em F. Pela Proposição 3.5 e por (2.9), $\mathcal{D}_1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$. Este é o motivo de termos excluído o caso $p = 1$ na definição acima.

Observação 3.6. Um fato curioso neste capítulo, como será visto nas demonstrações de resultados a seguir, é que embora estejamos lidando com operadores lineares, faz-se necessário alguns resultados da teoria de operadores multilineares, como no caso particular dos operadores bilineares. Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados, com $n \geq 2$. Um operador $T\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é n-linear (ou multilinear) se é linear em cada variável. Neste caso, T é contínuo se, e somente se, existe $M > 0$ tal que

$$\|T(x_1, \ldots, x_n)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_n\|, \tag{3.13}$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Não é difícil verificar que, com as operações usuais de operadores, o conjunto $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ dos operadores n-lineares contínuos é um espaço vetorial normado, com norma dada por

$$\|T\| = \sup_{x \in B_{E_1 \times \cdots \times E_n}} \|T(x)\|.$$

Mais ainda, $\|T\|$ é o ínfimo das constantes M que satisfazem (3.13). Também vale o Teorema do Gráfico Fechado para operadores n-lineares, isto é, um operador n-linear T é contínuo se, e somente se, o gráfico de T é fechado (veja [7]).

Vamos demonstrar algumas caracterizações para operadores Cohen fortemente p-somantes.

Proposição 3.7. Para $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $1 < p \leq \infty$, são equivalentes:

(i) T é Cohen fortemente p-somante.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(T(x_n))| \leq C \left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \left\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p^*},$$

sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^{w}(F')$.

(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{m} |\varphi_n(T(x_n))| \leq C \left\|(x_n)_{n=1}^{m}\right\|_p \left\|(\varphi_n)_{n=1}^{m}\right\|_{w,p^*}, \tag{3.14}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_n \in E$ e $\varphi_n \in F'$, $n = 1, \ldots, m$.

Demonstração: (i)$\Rightarrow$(ii) Seja $T\colon E \to F$ um operador Cohen fortemente p-somante. Então o operador (linear) induzido $\widehat{T}\colon \ell_p(E) \to \ell_p \langle F \rangle$ está bem definido e assim o operador

$$\begin{aligned}\widetilde{T}\colon \ell_{p^*}^w(F')\times \ell_p(E) &\longrightarrow \ell_1\\ ((\varphi_n)_{n=1}^\infty,(x_n)_{n=1}^\infty) &\longmapsto (\varphi_n(T(x_n)))_{n=1}^\infty\end{aligned}$$

também está bem definido e é bilinear.

Afirmação: $\widetilde{T}$ tem gráfico fechado.

De fato, seja $(\varphi^k,x^k,\widetilde{T}(\varphi^k,x^k))_{k=1}^\infty$ uma sequência em $\ell_{p^*}^w(F')\times\ell_p(E)\times\ell_1$ tal que $(\varphi^k,x^k,\widetilde{T}(\varphi^k,x^k))\to(\varphi,x,y)$, isto é,

$$\left|\begin{array}{l}(\varphi^k,x^k)\longrightarrow(\varphi,x)\ \text{ em }\ \ell_{p^*}^w(F')\times\ell_p(E),\ \text{ e}\\ \widetilde{T}(\varphi^k,x^k)\longrightarrow y\ \text{ em }\ \ell_1,\end{array}\right. \tag{3.15}$$

onde $\varphi=(\varphi_n)_{n=1}^\infty$, $x=(x_n)_{n=1}^\infty$ e $y=(y_n)_{n=1}^\infty$. De (3.15), segue que $y=\lim_k\widetilde{T}(\varphi^k,x^k)=\lim_k(\varphi_n^k(T(x_n^k)))_{n=1}^\infty$ e pela Observação 2.14, (3.15) temos

$$\left|\begin{array}{l}\lim_k\varphi_n^k(T(x_n^k))=y_n\ \text{ e}\\ \lim_k\varphi_n^k(T(x_n^k))=\varphi_n(T(x_n)),\end{array}\right.$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Por unicidade do limite, $\varphi_n(T(x_n))=y_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, donde

$$\widetilde{T}(\varphi^k,x^k)\xrightarrow{k} y=(y_n)_{n=1}^\infty=(\varphi_n(T(x_n)))_{n=1}^\infty=\widetilde{T}(\varphi,x).$$

Portanto, $\widetilde{T}$ tem o gráfico fechado e, por isso, é um operador contínuo. Daí, existe $M>0$ tal que

$$\sum_{n=1}^\infty|\varphi_n(T(x_n))|=\left\|\widetilde{T}((\varphi_n)_{n=1}^\infty,(x_n)_{n=1}^\infty)\right\|_1\leq M\left\|(x_n)_{n=1}^\infty\right\|_p\left\|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\right\|_{w,p^*}, \tag{3.16}$$

para toda $(x_n)_{n=1}^\infty\in\ell_p(E)$ e toda $(\varphi_n)_{n=1}^\infty\in\ell_{p^*}^w(F')$.

(iii)⇒(ii) Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty\in\ell_p(E)$ e $(\varphi_n)_{n=1}^\infty\in\ell_{p^*}^w(F')$. Se vale (iii), então

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty|\varphi_n(T(x_n))|&=\sup_m\sum_{n=1}^m|\varphi_n(T(x_n))|\\ &\leq\sup_m\left(C\left\|(x_n)_{n=1}^m\right\|_p\left\|(\varphi_n)_{n=1}^m\right\|_{w,p^*}\right)\\ &=C\left\|(x_n)_{n=1}^\infty\right\|_p\left\|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\right\|_{w,p^*}.\end{aligned}$$

(ii)⇒(i) e (ii)⇒(iii) são imediatas. ■

Para cada $T\in\mathcal{D}_p(E,F)$, denotemos por $d_p(T)$ o ínfimo das constantes C que satisfazem a desigualdade (3.14). Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A, B \in \mathcal{D}_p(E,F)$, para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, $x_n \in E$ e $\varphi_n \in F'$, $n = 1, \ldots, m$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n((A+\lambda B)(x_n))| &\leq \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n(A(x_n))| + \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n(\lambda B(x_n))| \\ &= \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n(A(x_n))| + |\lambda| \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n(B(x_n))| \\ &\leq (d_p(A) + |\lambda|\, d_p(B)) \left\|(x_n)_{n=1}^{m}\right\|_p \left\|(\varphi_n)_{n=1}^{m}\right\|_{w,p^*}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Portanto $\mathcal{D}_p(E,F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E,F)$.

Assim como o espaço $\Pi_{p,q}(E,F)$, o espaço $\mathcal{D}_p(E,F)$ não é fechado em $\mathcal{L}(E,F)$ em geral (Após a leitura do Capítulo 4, veja Apêndice A, Proposição A.7, para compreender esse fato).

Proposição 3.8. O ínfimo das constantes C que satisfazem a desigualdade (3.14) define uma norma em $\mathcal{D}_p(E,E)$, denotada por $d_p(\cdot)$. Além disso, $\left\|\widetilde{T}\right\| = d_p(T)$.

Demonstração: Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A, B \in \mathcal{D}_p(E,F)$. Mostremos que $d_p(\cdot)$ satisfaz as condições **N1**, **N2** e **N3** da Definição 1.1:

N1) É claro que $d_p(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{D}_p(E,F)$ e que $A = 0$ implica $d_p(A) = 0$. Seja $d_p(A) = 0$. Então, fazendo $m = 1$ em (3.14), segue que $|\varphi(A(x))| = 0$ para todos $\varphi \in F', x \in E$. Logo, $\|A(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{F'}} |\varphi(A(x))| = 0$ para todo $x \in E$. Portanto, $A = 0$.

N2) Fazendo $A = 0$ em (3.17), obtemos $d_p(\lambda B) \leq |\lambda|\, d_p(B)$. Por outro lado, de

$$\sum_{n=1}^{m} |\varphi_n(\lambda B(x_n))| = |\lambda| \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n(B(x_n))| \leq d_p(\lambda B) \left\|(x_n)_{n=1}^{m}\right\|_p \left\|(\varphi_n)_{n=1}^{m}\right\|_{w,p^*}$$

temos $|\lambda|\, d_p(B) \leq d_p(\lambda B)$. Assim, $d_p(\lambda B) = |\lambda|\, d_p(B)$.

N3) Segue imediatamente de (3.17).

Finalmente, temos $d_p(T) \leq \left\|\widetilde{T}\right\|$ por (3.16) e que $\left\|\widetilde{T}\right\| \leq d_p(T)$ pela desigualdade

$$\begin{aligned} \left\|\widetilde{T}\right\| &= \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p, \left\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p^*} \leq 1} \left\|(\varphi_n(T(x_n)))_{n=1}^{\infty}\right\|_1 \\ &\leq \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p, \left\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p^*} \leq 1} \left(d_p(T) \left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \left\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p^*}\right) = d_p(T). \end{aligned}$$

■

Observação 3.9. Se $T \in \mathcal{D}_p(E,F)$, então $\left\|\widehat{T}\right\| = \left\|\widetilde{T}\right\| = d_p(T)$. De fato,

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{T}\right\| &= \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \left\|\widehat{T}((x_n)_{n=1}^{\infty})\right\|_{1,p} = \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \left\|(T(x_n))_{n=1}^{\infty}\right\|_{1,p} \\ &= \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \left(\sup_{\left\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p^*} \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(T(x_n))| \right) = \left\|\widetilde{T}\right\|.\end{aligned}$$

3.4 Operadores Lineares Cohen-Khalil Fortemente (s,r,p)-somantes

Como dissemos anteriormente, embora nosso trabalho lide exclusivamente com operadores lineares, faremos uso de um resultado da teoria dos operadores multilineares para estabelecer uma inesperada equivalência entre a classe dos operadores Cohen fortemente p-somantes e a classe dos operadores Cohen-Khalil fortemente (s,r,p)-somantes, que definiremos nesta seção. A referida ferramenta começou a ser desenvolvida por G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda em [4], e teve sua versão final apresentada por D. Pellegrino, J. Santos e J. B. Seoane-Sepúlveda em [19].

Sejam $X_1,...,X_n,Y$ e $E_1,...,E_r$ conjuntos não-vazios arbitrários, $\mathcal{H}$ uma família de funções de $X_1 \times \cdots \times X_n$ em Y. Sejam $K_1,...,K_t$ espaços topológicos de Hausdorff compactos, $G_1,...,G_t$ espaços de Banach e suponha que as aplicações

$$\left\{\begin{array}{l} R_j \ : \ K_j \times E_1 \times \cdots \times E_r \times G_j \to [0,\infty) \ , \ j = 1,...,t \ , \\ S \ : \ \mathcal{H} \times E_1 \times \cdots \times E_r \times G_1 \times \cdots \times G_t \to [0,\infty) \end{array}\right.$$

possuam as seguintes propriedades:

1. Para cada $x^{(l)} \in E_l$ e $b \in G_j$, com $(j,l) \in \{1,...,t\} \times \{1,...,r\}$, a aplicação

$$(R_j)_{x^{(1)},...,x^{(r)},b} \ : \ K_j \to [0,\infty) \ ,$$

definida por $(R_j)_{x^{(1)},...,x^{(r)},b}(\varphi) = R_j\left(\varphi, x^{(1)},...,x^{(r)}, b\right)$, é contínua;

2. As seguintes desigualdades são válidas:

$$\left\{\begin{array}{l} R_j\left(\varphi, x^{(1)},...,x^{(r)}, \eta_j b^{(j)}\right) \leq \eta_j R_j\left(\varphi, x^{(1)},...,x^{(r)}, b^{(j)}\right) \\ S\left(f, x^{(1)},...,x^{(r)}, \alpha_1 b^{(1)},...,\alpha_t b^{(t)}\right) \geq \alpha_1 ... \alpha_t S\left(f, x^{(1)},...,x^{(r)}, b^{(1)},...,b^{(t)}\right) \end{array}\right.$$

para todos $\varphi \in K_j$, $x^{(l)} \in E_l$ (com $l = 1,...,r$), $0 \leq \eta_j, \alpha_j \leq 1$, $b^{(j)} \in G_j$, $j = 1,...,t$ e $f \in \mathcal{H}$.

Sob essas condições, temos a seguinte definição (veja [19, Definição 4.4]):

Definição 3.10. Sejam $0 < p_1, ..., p_t, p_0 < \infty$, com $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_t}$. Uma aplicação $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ em $\mathcal{H}$ é $R_1, ..., R_t$-S-*abstrato* $(p_1, ..., p_t)$-*somante* se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{m}\left(S\left(f, x_i^{(1)}, ..., x_i^{(r)}, b_i^{(1)}, ..., b_i^{(t)}\right)\right)^{p_0}\right)^{1/p_0}\\ &\leq C\prod_{k=1}^{t}\sup_{\varphi\in K_k}\left(\sum_{i=1}^{m} R_k\left(\varphi, x_i^{(1)}, ..., x_i^{(r)}, b_i^{(k)}\right)^{p_k}\right)^{1/p_k}\end{aligned}$$

para todos $x_1^{(s)}, ..., x_m^{(s)} \in E_s,\ b_1^{(s)}, ..., b_m^{(s)} \in G_l,\ m \in \mathbb{N}$ e $(s, l) \in \{1, ..., r\} \times \{1, ..., t\}$.

Para a demonstração do próximo teorema veja [19, Teorema 4.6].

Teorema 3.11 (Teorema da Dominação de Pietsch Generalizado). *Uma aplicação $f \in \mathcal{H}$ é $R_1, ..., R_t$-S-abstrato $(p_1, ..., p_t)$-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e medidas de probabilidade de Borel μ_k em $K_k,\ k = 1, ..., t$, tais que*

$$S\left(f, x^{(1)}, ..., x^{(r)}, b^{(1)}, ..., b^{(t)}\right) \leq C\prod_{k=1}^{t}\left(\int_{K_k} R_k\left(\varphi, x^{(1)}, ..., x^{(r)}, b^{(k)}\right)^{p_k} d\mu_k\right)^{1/p_k},$$

para todos $x^{(l)} \in E_l,\ l = 1, ..., r$ e $b^{(k)} \in G_k$, com $k = 1, ..., t$.

Para cada $T \in \mathcal{L}(E, F)$, definamos $\Phi_T \colon F' \times E \to \mathbb{K}$ pondo $\Phi_T(\varphi, x) := \varphi(T(x))$. É imediato verificar que $\Phi_T \in \mathcal{L}(F', E; \mathbb{K})$.

Proposição 3.12. Sejam E, F espaços de Banach. Então $T \in \mathcal{D}_p(E, F)$ se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} |\Phi_T(\varphi_i, x_i)| \leq C \left\|(x_i)_{i=1}^m\right\|_p \left\|(\varphi_i)_{i=1}^m\right\|_{w,p^*}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração: Segue imediatamente do Teorema 3.7. ■

Fazendo $n = 2$ na Definição 3.10 e escolhendo

$$\left|\begin{array}{l} t = 2 \ \text{ e } \ r = 1 \\ E_1 = \{0\} \\ K_1 = \{0\} \ \text{ e } \ K_2 = B_{F''} \text{ munido da topologia fraca-estrela} \\ G_1 = E \ \text{ e } \ G_2 = F' \\ \mathcal{H} = \mathcal{L}(F', E; \mathbb{K}) \\ p_0 = 1, p_1 = p \ \text{ e } \ p_2 = p^* \\ S\colon \mathcal{L}(F', E; \mathbb{K}) \times \{0\} \times E \times F' \longrightarrow [0, \infty), \\ \text{dada por } \ S(\xi, 0, x, \varphi) = |\xi(\varphi, x)| \\ R_1\colon \{0\} \times \{0\} \times E \longrightarrow [0, \infty), \ \text{ dada por } \ R_1(0, 0, x) = \|x\| \\ R_2\colon B_{F''} \times \{0\} \times F' \longrightarrow [0, \infty), \ \text{ dada por } \ R_2(\psi, 0, \varphi) = |\psi(\varphi)| \end{array}\right. \tag{3.18}$$

concluímos que $(R_1)_{0,x}\colon \{0\} \to [0, \infty)$ e $(R_2)_{0,\varphi}\colon B_{F''} \to [0, \infty)$ são claramente contínuas, com

$$\left|\begin{array}{l} R_1(0, 0, \eta_1 x) = \|\eta_1 x\| = \eta_1 R_1(0, 0, x) \\ R_2(\psi, 0, \eta_2 \varphi) = |\psi(\eta_2 \varphi)| = \eta_2 |\psi(\varphi)| \\ S(\xi, 0, \alpha_1 x, \alpha_2 \varphi) = |\xi(\alpha_2 \varphi, \alpha_1 x)| = \alpha_1 \alpha_2 S(\xi, 0, x, \varphi) \end{array}\right.$$

para todos $(0, 0, x) \in \{0\} \times \{0\} \times E$, $(\psi, 0, \varphi) \in B_{F''} \times \{0\} \times F'$, $(\xi, 0, x, \varphi) \in \mathcal{L}(F', E; \mathbb{K}) \times \{0\} \times E \times F'$ e $0 \leq \eta_1, \eta_2, \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$, donde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} S(\Phi_T, 0, x_i, \varphi_i) &= \sum_{i=1}^{m} |\Phi_T(\varphi_i, x_i)| \\ &\leq C \left\|(x_i)_{i=1}^m\right\|_p \left\|(\varphi_i)_{i=1}^m\right\|_{w,p^*} \\ &= C \sup_{\varphi \in B_{\{0\}}} \left(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\psi \in B_{F''}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\psi(\varphi_i)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= C \sup_{\varphi \in B_{\{0\}}} \left(\sum_{i=1}^{m} R_1(0, 0, x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\psi \in B_{F''}} \left(\sum_{i=1}^{m} R_2(\psi, 0, \varphi_i)^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

para todo $T \in \mathcal{D}_p(E, F)$. Portanto, com as escolhas que fizemos, $T \in \mathcal{D}_p(E, F)$ se, e somente se, Φ_T é R_1, R_2-S-abstrato (p, p^*)-somante. Logo, pelo Teorema 3.11, existem $C > 0$ e medidas de probabilidade de Borel μ_1, μ_2 em $\{0\}$ e $B_{F''}$, respectivamente, tais que

$$|\Phi_T(\varphi, x)| = |\varphi(T(x))| \leq C \|x\| \left(\int_{B_{F''}} |\psi(\varphi)|^{p^*} \, d\mu_2(\varphi)\right)^{\frac{1}{p^*}} \tag{3.19}$$

para todos $x \in E$, $\varphi \in F'$.

Acabamos de demonstrar que vale o

Teorema 3.13 (**Dominação de Pietsch para operadores Cohen fortemente somantes**). *Sejam* $1 \leq p < \infty$, *E e F espaços de Banach,* $T \in \mathcal{L}(E, F)$. *Então T é Cohen fortemente p-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ em $B_{F''}$ tais que, para cada $x \in E$ e cada $\varphi \in F'$*

$$|\varphi(T(x))| \leq C \|x\| \left(\int_{B_{F''}} |\psi(\varphi)|^{p^*} \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.20}$$

Neste caso, $d_p(T)$ é o ínfimo das constantes C que satisfazem (3.20).

Observação 3.14. O teorema acima foi posto aqui nesta seção, em vez de na anterior, deliberadamente, para o seu uso em comparação à nova classe que será imediatamente definida.

Definição 3.15. Sejam E, F espaços de Banach, $1 \leq s, p^* < \infty$ e $1 < r \leq \infty$, com $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p^*}$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é dito Cohen-Khalil fortemente (s, r, p)-somante se o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T} \colon \ell_r(E) &\longrightarrow \ell_{s,p} \langle E \rangle \\ (x_n)_{n=1}^{\infty} &\longmapsto (T(x_n))_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

está bem definido (e neste caso é claramente linear).

Denotamos por $\mathcal{C}_{(s,r;p)}(E, F)$ o conjunto dos operadores Cohen-Khalil fortemente (s, r, p)-somantes.

Como aconteceu com as demais classes de operadores estudadas, temos as seguintes caracterizações:

Proposição 3.16. Sejam $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $1 \leq p^* < \infty$ e

$$(s, r) \in \Gamma = \left\{ (s, r) \in [1, \infty) \times (1, \infty] \colon \frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p^*} \right\}.$$

São equivalentes:

(i) T é Cohen-Khalil fortemente (s, r, p)-somante.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C \, \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_r \, \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p^*}$$

sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_r(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(F')$.

(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T(x_i))|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C \left\| (x_i)_{i=1}^m \right\|_r \left\| (\varphi_i)_{i=1}^m \right\|_{w,p^*}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração: Análoga à Proposição 3.7. ■

Proposição 3.17. Sejam E, F espaços de Banach. Então $T \in \mathcal{C}_{(s,r;p)}(E, F)$ se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |\Phi_T(\varphi_i, x_i)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C \left\| (x_i)_{i=1}^m \right\|_r \left\| (\varphi_i)_{i=1}^m \right\|_{w,p^*}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração: Segue imediatamente da proposição anterior. ■

Observe que, tomando $p_0 = s$, $p_1 = r$, $p_2 = p^*$ e mantendo as outras escolhas em (3.18), concluímos que $T \in \mathcal{C}_{(s,r;p)}(E, F)$ se, e somente se, Φ_T é R_1, R_2-S-abstrato (r, p^*)-somante. Daí, pelo Teorema 3.11, existem $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ em $B_{F''}$ tais que

$$|\Phi_T(\varphi, x)| = |\varphi(T(x))| \leq C \|x\| \left(\int_{B_{F''}} |\psi(\varphi)|^{p^*} \, d\mu_2(\varphi) \right)^{\frac{1}{p^*}}, \tag{3.21}$$

para todos $x \in E$ e $\varphi \in F'$. Com isso, também vale o

Teorema 3.18 (Dominação de Pietsch para operadores Cohen-Khalil fortemente somantes). *Sejam $1 \leq p < \infty$, E e F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então T é Cohen-Khalil fortemente (s, r, p)-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ em $B_{F''}$ tais que, para cada $x \in E$ e cada $\varphi \in F'$*

$$|\varphi(T(x))| \leq C \|x\| \left(\int_{B_{F''}} |\psi(\varphi)|^{p^*} \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.22}$$

Como consequência dos Teoremas 3.13 e 3.18, temos o seguinte resultado de coincidência:

Corolário 3.19. Para $1 \leq p^* < \infty$ fixo e quaisquer $(s, r) \in \Gamma$,

$$\mathcal{C}_{(s,r;p)}(E, F) = \mathcal{C}_{(1,p;p)}(E, F) = \mathcal{D}_p(E, F).$$

O resultado que acabamos de obter é um caso particular do próximo teorema, devido a J. R. Campos [6, Theorem 3.2]:

Teorema 3.20. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação e sejam*

$$0 < q_0, q_1, p_0, p_1, p^* < \infty$$

tais que

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p^*} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p^*}.$$

Se $(R_1)_{(x,b)}(\cdot)$ é constante para cada x e cada b, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) *f é R_1, R_2-S-abstrato (q_1, p^*)-somante.*

(ii) *f é R_1, R_2-S-abstrato (p_1, p^*)-somante.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.11, f é R_1, R_2-S-abstrato (q_1, p^*)-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e medidas de probabilidade de Borel μ_i em K_i, $i = 1, 2$, tais que

$$S(f, x, b_1, b_2) \leq C \prod_{i=1}^{2} \left(\int_{K_i} R_i(\varphi, x, b_i)^{p_i} d\mu_i \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Como, por hipótese,

$$\left(\int_{K_1} R_1(\varphi, x, b_1)^{p_1} d\mu_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} = R_1(\varphi, x, b_1)$$

para qualquer $\varphi \in K_1$ fixo, segue que f é R_1, R_2-S-abstrato (q_1, p^*)-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ em K_2 tais que

$$S(f, x, b_1, b_2) \leq C \left(R_1(\varphi, x, b_1) \right) \left(\int_{K_2} R_2(\varphi, x, b_2)^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.23}$$

Por outro lado, aplicando o mesmo argumento ao item (ii), obtemos que f é R_1, R_2-S-abstrato (p_1, p^*)-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ em K_2 tais que

$$S(f, x, b_1, b_2) \leq C\left(R_1(\varphi, x, b_1)\right)\left(\int_{K_2} R_2(\varphi, x, b_2)^{p^*} d\mu\right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.24}$$

O resultado segue então de (3.23) e (3.24). ■

Capítulo 4

Ideais de Operadores

Neste capítulo, sob o ponto de vista da teoria de ideais de operadores, vamos mostrar, como anunciamos na introdução de nosso trabalho, que os operadores Cohen fortemente somantes são adjuntos de operadores absolutamente somantes, e vice-versa. Antes disso, faremos uma introdução à teoria dos ideais de operadores tendo como principais referências os trabalhos [9], [22] e [20]. Faremos uso, também, de resultados de pesquisas recentes que nos conduzem de maneira mais objetiva a resultados que buscamos.

4.1 Ideais de Banach

Um *ideal* de operadores $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para todos espaços de Banach E e F, suas componentes $\mathcal{I}(E,F) := \mathcal{L}(E,F) \cap \mathcal{I}$ gozam das seguintes propriedades:

(i) $\mathcal{I}(E,F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E,F)$ tal que $\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{I}(E,F)$.

(ii) A propriedade de ideal: se $v \in \mathcal{L}(F_0,F)$, $T \in \mathcal{I}(E_0,F_0)$ e $u \in \mathcal{L}(E,E_0)$, então a composição $v \circ T \circ u$ pertence a $\mathcal{I}(E,F)$.

Dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal normado*, se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ tal que

(a) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita à componente $\mathcal{I}(E,F)$ é uma norma, para todos espaços de Banach E e F.

(b) O funcional $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ é tal que $\|\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$.

(c) $\|T_1 \circ T_2 \circ T_3\|_{\mathcal{I}} \leq \|T_1\| \, \|T_2\|_{\mathcal{I}} \, \|T_3\|$, sempre que $T_1 \in \mathcal{L}(F_0,F)$, $T_2 \in \mathcal{I}(E_0,F_0)$ e $T_3 \in \mathcal{L}(E,E_0)$.

Além disso, se todas as componentes $\mathcal{I}(E,F)$ são espaços completos relativamente à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, dizemos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal de Banach*. Quando todas as componentes $\mathcal{I}(E,F)$ são fechadas em $\mathcal{L}(E,F)$ com relação à norma usual de operadores, dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal fechado*. Logo, se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado, então $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

O teorema a seguir traz uma equivalência da definição de ideal de Banach.

Teorema 4.1. *Seja $\mathcal{I}$ uma subclasse de $\mathcal{L}$ na qual está definida uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0,\infty)$. Então $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de Banach se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ *e* $\|\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$.

(ii) $T_1 \circ T_2 \circ T_3 \in \mathcal{I}(E,F)$ *e* $\|T_1 \circ T_2 \circ T_3\|_{\mathcal{I}} \leq \|T_1\| \, \|T_2\|_{\mathcal{I}} \, \|T_3\|$, *sempre que* $T_1 \in \mathcal{L}(F_0,F)$, $T_2 \in \mathcal{I}(E_0,F_0)$ *e* $T_3 \in \mathcal{L}(E,E_0)$.

(iii) *Se* $T_n \in \mathcal{I}(E,F)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}} < \infty$, *então* $T \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathcal{I}(E,F)$ *e* $\|T\|_{\mathcal{I}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}}$.

Demonstração: Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de Banach, então valem (i), (ii) e (iii) trivialmente.

Reciprocamente, suponhamos que valem (i), (ii) e (iii). Sejam $A, B \in \mathcal{I}(E,F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, com E e F espaços de Banach quaisquer. A aplicação $\mu_\lambda \colon F \to F$ dada por $\mu_\lambda(y) = \lambda y$ é claramente linear, contínua e tal que $\|\mu_\lambda\| = |\lambda|$. Logo,

$$\lambda B = \mu_\lambda \circ B \circ \mathrm{id}_E \in \mathcal{I}(E,F)$$

por (ii). Sejam $N_1 \colon E \to F$, $N_2 \colon \mathbb{K} \to F$ operadores nulos e $\varphi \in E'$. Por (i) e (ii),

$$N_1 = N_2 \circ \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \circ \varphi \in \mathcal{I}(E,F).$$

Mais ainda, $\|N_1\|_{\mathcal{I}} = 0$. Tomando a sequência T_n em (iii) pondo $T_1 = A$, $T_2 = \lambda B$ e $T_n = N_1$, para todo $n \geq 3$, concluímos que $A + \lambda B \in \mathcal{I}(E,F)$ e assim $\mathcal{I}(E,F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E,F)$, para todos espaços de Banach E e F. Sejam $\varphi \in E'$, $y \in F$ e $T_y \colon \mathbb{K} \to F$ dado por $T_y(\lambda) = \lambda y$. É imediato que $T_y \in \mathcal{L}(\mathbb{K},F)$ para todo $y \in F$. Note que

$$\varphi \otimes y = T_y \circ \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \circ \varphi,$$

logo $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}(E,F)$ por (i) e (ii), e pela Proposição 1.15 temos $\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{I}(E,F)$, para todos espaços de Banach E e F. A propriedade de ideal é satisfeita por (ii). Agora, mostremos que a função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a $\mathcal{I}(E,F)$ satisfaz as condições de norma, para todos espaços de Banach E e F:

N1) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ é não negativa por hipótese. Também já observamos que $\|T\|_{\mathcal{I}} = 0$ se $T = 0$. Seja $T \in \mathcal{I}(E,F)$ tal que $\|T\|_{\mathcal{I}} = 0$. Se T não for o operador nulo, então existe $x_0 \in E$ tal que $T(x_0) \neq 0$. Assim, existe $\psi \in F'$ tal que $\|\psi\| = 1$ e $\psi(T(x_0)) = \|T(x_0)\|$. É simples mostrar que a aplicação $\xi\colon \mathbb{K} \to E$ dada por $\xi(\lambda) = \frac{\lambda}{\|T(x_0)\|}x_0$ pertence a $\mathcal{L}(\mathbb{K},E)$. Logo, $\psi \circ T \circ \xi(\lambda) = \psi\left(\frac{\lambda}{\|T(x_0)\|}T(x_0)\right) = \lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Por (ii),

$$\|\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|\psi \circ T \circ \xi\|_{\mathcal{I}} \leq \|\psi\| \, \|T\|_{\mathcal{I}} \, \|\xi\| = 0,$$

contradizendo (i). Portanto, $T = 0$.

N2) Sejam $T \in \mathcal{I}(E,F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Como $\lambda T = \mu_\lambda \circ T \circ \mathrm{id}_E$, segue por (ii) que

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{I}} \leq \|\mu_\lambda\| \, \|T\|_{\mathcal{I}} \, \|\mathrm{id}_E\| = |\lambda| \, \|T\|_{\mathcal{I}}.$$

Para obter a desigualdade contrária, basta considerar o operador $\mu_{\frac{1}{\lambda}}\colon F \to F$ dado por $\mu_{\frac{1}{\lambda}}(y) = \frac{1}{\lambda}y$, onde $\lambda \neq 0$. Claramente, $\mu_{\frac{1}{\lambda}}$ também é linear, contínuo e $\left\|\mu_{\frac{1}{\lambda}}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}$. Da igualdade $T = \mu_{\frac{1}{\lambda}} \circ \lambda T \circ \mathrm{id}_E$, obtemos que $|\lambda| \, \|T\|_{\mathcal{I}} \leq \|\lambda T\|_{\mathcal{I}}$, novamente por (ii).

N3) segue-se de (iii).

Resta mostrar que $\mathcal{I}(E,F)$ é um espaço completo com relação a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, para todos espaços de Banach E e F, mas isso é uma consequência imediata do item (iii) juntamente com a Proposição 1.23. Portanto, $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de Banach. ■

Proposição 4.2. Sejam E e F espaços de Banach e $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado. Então

(a) $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{I}}$ para todo $T \in \mathcal{I}(E,F)$.

(b) $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \, \|y\|$.

Demonstração: (a) Sejam $T \in \mathcal{I}(E,F)$, $\varphi \in F'$, $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. De $\varphi(T(x))\mathrm{id}_{\mathbb{K}}(\lambda) = \varphi(T(x))\lambda$ e $\varphi \circ T \circ \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \otimes x(\lambda) = \varphi(T(\lambda x)) = \varphi(T(x))\lambda$, segue que as funções $\varphi(T(x))\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\varphi \circ T \circ \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \otimes x\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ são iguais para todo $x \in E$. Logo,

$$\begin{aligned} |\varphi(T(x))| &= \|\varphi(T(x))\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi \circ T \circ \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \otimes x\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|\varphi\| \, \|T\|_{\mathcal{I}} \, \|\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \otimes x\| = \|\varphi\| \, \|T\|_{\mathcal{I}} \, \|x\|, \end{aligned}$$

para todos $\varphi \in F'$ e $x \in E$. Tomando o supremo sobre φ e sobre x nas bolas de seus respectivos espaços, temos

$$\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| \leq \sup_{x \in B_E} \left(\|T\|_{\mathcal{I}} \, \|x\|\right) = \|T\|_{\mathcal{I}}.$$

(b) Sejam $y \in F$, $\varphi \in E'$ e $T_y \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, F)$ o operador dado por $T_y(\lambda) = \lambda y$. Então $\varphi \otimes y = T_y \circ \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \circ \varphi$ e assim

$$\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|T_y \circ \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \circ \varphi\|_{\mathcal{I}} \leq \|T_y\| \, \|\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \, \|\varphi\| = \|y\| \, \|\varphi\| \, .$$

A desigualdade contrária se obtém diretamente pelo item (a), $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \, \|y\|$. ∎

Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Definimos o *fecho* de $\mathcal{I}$, que será denotado por $\overline{\mathcal{I}}$, pondo $\overline{\mathcal{I}}(E, F) := \overline{\mathcal{I}(E, F)}$ para todos espaços de Banach E e F, onde o fecho será tomado em relação à norma usual de operadores.

Proposição 4.3. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Então $(\overline{\mathcal{I}}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

Demonstração: Basta mostrar que $\overline{\mathcal{I}}$ é um ideal, pois, neste caso, $(\overline{\mathcal{I}}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado e, como $\overline{\mathcal{I}}(E, F) := \overline{\mathcal{I}(E, F)}$, de Banach com a norma usual. Sejam E e F espaços de Banach. $\overline{\mathcal{I}}(E, F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E, F)$ pois todo elemento de $\overline{\mathcal{I}}(E, F)$ é limite de operadores lineares contínuos de E em F. Além disso, $\mathcal{F}(E, F) \subseteq \mathcal{I}(E, F) \subseteq \overline{\mathcal{I}(E, F)}$. Mostremos que $\overline{\mathcal{I}}$ tem a propriedade de ideal. Sejam $A \in \mathcal{L}(F_0, F)$, $T \in \overline{\mathcal{I}}(E_0, F_0)$ e $B \in \mathcal{L}(E, E_0)$, com E_0 e F_0 espaços de Banach. Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{I}(E_0, F_0)$ tal que $T_n \to T$. Então $(A \circ T_n \circ B)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathcal{I}(E, F)$, pois, por hipótese, $\mathcal{I}$ é um ideal. Note que

$$\begin{aligned} \|A \circ T_n \circ B(x) - A \circ T \circ B(x)\| &= \|A(T_n(B(x)) - T(B(x)))\| \\ &= \|A \circ (T_n - T)(B(x))\| \leq \|A\| \, \|T_n - T\| \, \|B\| \, \|x\| \end{aligned}$$

para todos $x \in E$ e $n \in \mathbb{N}$. Tomando o supremo sobre $x \in B_E$, obtemos

$$\|A \circ T_n \circ B - A \circ T \circ B\| = \sup_{x \in B_E} \|(A \circ T_n \circ B - A \circ T \circ B)(x)\| \leq \|A\| \, \|T_n - T\| \, \|B\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\|T_n - T\| \to 0$, segue que $A \circ T_n \circ B \to A \circ T \circ B$ e, por isso, $A \circ T \circ B \in \overline{\mathcal{I}}(E, F)$. Assim, $\overline{\mathcal{I}}$ é um ideal de operadores. ∎

Exemplo 4.4. A classe $\mathcal{F}$ é um ideal de operadores. De fato, dados $A, B \in \mathcal{F}(E, F)$, com E e F Banach, e $\lambda \in \mathbb{K}$, existem $n, k \in \mathbb{N}, \varphi_i, \psi_j \in E', y_i, z_j \in F$, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, k$, tais que

$$A = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes y_i \quad \text{e} \quad \lambda B = \sum_{j=1}^{k} \lambda \psi_j \otimes z_j,$$

pela Proposição 1.15. Logo, $A + \lambda B = \sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes y_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda \psi_j \otimes z_j$ donde $A + \lambda B \in \mathcal{F}(E, F)$, novamente pela Proposição 1.15. Assim, $\mathcal{F}(E, F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E, F)$

que contém, por definição, os operadores lineares contínuos de posto finito, para todos espaços de Banach E e F. Vejamos, agora, que $\mathcal{F}$ tem a propriedade de ideal. Sejam $A \in \mathcal{L}(F_0, F)$, $T \in \mathcal{F}(E_0, F_0)$ e $B \in \mathcal{L}(E, E_0)$. Pela Proposição 1.15, $T = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes y_i$ para alguns $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_i \in E_0'$, $y_i \in F_0$. Daí,

$$\begin{aligned} A \circ T \circ B(x) &= A\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i(B(x))y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(B(x))A(y_i) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes A(y_i)(B(x)), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Logo, $A\circ T\circ B(E) \subseteq [A(y_1), \ldots, A(y_n)]$ e, portanto, $A\circ T\circ B \in \mathcal{F}(E, F)$.

Proposição 4.5. $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$ não é um ideal de Banach.

Demonstração: Seja $T\colon c_0 \to \ell_1$ o operador dado por $T((\lambda_i)_{i=1}^\infty) = \left(\frac{\lambda_i}{2^i}\right)_{i=1}^\infty$. Como

$$\sum_{i=1}^n \left|\frac{\lambda_i}{2^i}\right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_\infty}{2^i} = \|(\lambda_i)_{i=1}^\infty\|_\infty \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, fazendo $n \to \infty$, segue que $\sum_{i=1}^n \left|\frac{\lambda_i}{2^i}\right| < \infty$, donde T está bem definido. É simples mostrar que $T \in \mathcal{L}(c_0, \ell_1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $T_n\colon c_0 \to \ell_1$ pondo

$$T_n((\lambda_i)_{i=1}^\infty) = \left(\frac{\lambda_i}{2^i}\right)_{i=1}^n.$$

T_n é claramente linear, contínuo e, como $T_n(c_0) \subseteq [e_1, \ldots, e_n]$, de posto finito para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|T - T_n\| &= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in B_{c_0}} \|(T - T_n)((\lambda_i)_{i=1}^\infty)\|_1 \\ &= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in B_{c_0}} \left\|\left(\frac{\lambda_i}{2^i}\right)_{i=n+1}^\infty\right\|_1 \\ &= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in B_{c_0}} \sum_{i=n+1}^\infty \frac{|\lambda_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^\infty \frac{1}{2^i} \xrightarrow{n} 0. \end{aligned}$$

Portanto, $T_n \overset{\|\cdot\|}{\to} T$. Note que $T(2^i e_i) = e_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, logo $T \notin \mathcal{F}(c_0, \ell_1)$, pois $T(c_0)$ contém uma infinidade de vetores linearmente independentes. Portanto, $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$ não é um ideal de Banach. ■

Exemplo 4.6. Um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$, com E e F Banach, é dito *aproximável*, se existe uma sequência $(T_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{F}(E, F)$ tal que $T_n \overset{\|\cdot\|}{\to} T$. Denotamos por $\mathcal{A}(E, F)$

o conjunto formado por todos os operadores aproximáveis de E em F. Observe que $\mathcal{A}(E,F)=\overline{\mathcal{F}(E,F)}$ e, portanto, $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$ é um ideal de Banach, pela Proposição 4.3.

Usaremos o conceito de classes de sequências linearmente estáveis introduzido por G. Botelho e J. R. Campos [3], para mostrar que $(\Pi_p,\pi_p(\cdot))$ e $(\mathcal{D}_p,d_p(\cdot))$ são ideais de Banach:

Uma *classe de sequências* X é uma aplicação que, a cada espaço de Banach E, faz corresponder o espaço de Banach $X(E)\subseteq E^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\left| \begin{array}{l} c_{00}(E)\subseteq X(E)\overset{1}{\hookrightarrow}\ell_\infty(E) \ \text{ e} \\ \|e_j\|_{X(\mathbb{K})}=1, \ \ \forall \ \ j\in\mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Sejam X e Y classes de sequências. Um operador $T\in\mathcal{L}(E,F)$ é dito $(X;Y)$*-somante* se $(T(x_i))_{i=1}^\infty\in Y(F)$ sempre que $(x_i)_{i=1}^\infty\in X(E)$. Neste caso, escrevemos $T\in\mathcal{L}_{X;Y}(E,F)$ e definimos

$$\|T\|_{X;Y}:=\left\|\widehat{T}\right\|_{\mathcal{L}(X(E),Y(F))},$$

onde $\widehat{T}\in\mathcal{L}(X(E),Y(F))$ é o operador induzido.

Uma classe de sequências X é dita *linearmente estável* se $\mathcal{L}_{X;X}(E,F)\overset{1}{=}\mathcal{L}(E,F)$ para todos os espaços de Banach E e F, isto é, para todo $T\in\mathcal{L}(E,F)$ verifica-se que $(T(x_i))_{i=1}^\infty\in X(F)$ sempre que $(x_i)_{i=1}^\infty\in X(E)$ e $\left\|\widehat{T}\right\|=\|T\|$.

Com as definições acima, temos o seguinte teorema, um dos principais resultados de [3]:

Teorema 4.7. *Sejam X e Y classes de sequências linearmente estáveis tais que $X(\mathbb{K})\overset{1}{\hookrightarrow}Y(\mathbb{K})$. Então $(\mathcal{L}_{X;Y},\|\cdot\|_{X;Y})$ é um ideal de Banach.*

Demonstração: Veja [3, Theorem 3.6]. ∎

Sejam E, F espaços de Banach e $X\in\{\ell_p(\cdot),\ell_p^w(\cdot),\ell_p\langle\cdot\rangle\}$. É imediato que $c_{00}(E)\subseteq X(E)$ e, pelas Proposições 2.13 e 3.5, $X(E)\overset{1}{\hookrightarrow}\ell_\infty(E)$. Também é simples verificar que $\|e_i\|_{X(\mathbb{K})}=1$ para todo $i\in\mathbb{N}$. Dessa forma, $\ell_p(\cdot),\ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_p\langle\cdot\rangle$ são classes de sequências. Além disso, para todo $T\in\mathcal{L}_{X;X}(E,F)$, sendo $x\in B_E$, temos $(x,0,0,...)\in B_{X(E)}$ e portanto

$$\begin{aligned} \left\|\widehat{T}\right\| &= \sup_{(x_i)_{i=1}^\infty\in B_{X(E)}}\left\|\widehat{T}((x_i)_{i=1}^\infty)\right\|_{X(F)} \\ &= \sup_{(x_i)_{i=1}^\infty\in B_{X(E)}}\|(T(x_i))_{i=1}^\infty\|_{X(F)} \qquad (4.1) \\ &\geq \sup_{(x_i)_{i=1}^\infty\in B_{X(E)}}\|(T(x_i))_{i=1}^\infty\|_\infty \end{aligned}$$

$$\geq \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| = \|T\| .$$

Proposição 4.8. As classes de sequências $\ell_p(\cdot), \ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_p \langle \cdot \rangle$, $1 \leq p < \infty$, são linearmente estáveis.

Demonstração: De (2.9), (2.10) e (4.1) segue que $\mathcal{L}_{\ell_p(\cdot);\ell_p(\cdot)}(E,F) \overset{1}{=} \mathcal{L}(E,F)$ e $\mathcal{L}_{\ell_p^w(\cdot);\ell_p^w(\cdot)}(E,F) \overset{1}{=} \mathcal{L}(E,F)$ para todos espaços de Banach E e F. Seja $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Para toda sequência $(\psi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(F')$, temos

$$(\psi_i \circ T)_{i=1}^{\infty} = (T'(\psi_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E'), \tag{4.2}$$

pois $\ell_{p^*}^w(\cdot)$ é linearmente estável como acabamos de mostrar. Mais ainda, $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ implica $\widehat{T'} \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}^w(F'), \ell_{p^*}^w(E'))$, donde

$$\begin{aligned}
\|(\psi_i \circ T)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p^*} &= \|(T'(\psi_i))_{i=1}^{\infty}\|_{w,p^*} \\
&= \left\|\widehat{T'}((\psi_i)_{i=1}^{\infty})\right\|_{w,p^*} \\
&\leq \left\|\widehat{T'}\right\| \|(\psi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p^*} \\
&= \|T'\| \, \|(\psi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p^*} \\
&= \|T\| \, \|(\psi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p^*} ,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde a última igualdade vem da Proposição 1.16.

De (4.2) segue que $(T(x_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_p \langle F \rangle$ sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p \langle E \rangle$, pois

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(T(x_i))| = \sum_{i=1}^{\infty} |(\psi_i \circ T)(x_i)| < \infty$$

para toda $(\psi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(F')$.

Por (4.3), $(\psi_i \circ \frac{T}{\|T\|})_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}$ sempre que $(\psi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(F')}$, logo

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{T}((x_i)_{i=1}^{\infty})\right\|_{1,p} &= \|(T(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_{1,p} \\
&= \sup_{(\psi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(F')}} \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(T(x_i))| \\
&= \|T\| \sup_{(\psi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(F')}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \left(\psi_i \circ \frac{T}{\|T\|} \right) (x_i) \right| \\
&\leq \|T\| \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| \\
&= \|T\| \, \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{1,p} .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$\widehat{T}$ é claramente linear e, por (4.4), contínuo com $\left\|\widehat{T}\right\| \leq \|T\|$. Finalmente, por (4.1), segue que $\left\|\widehat{T}\right\| = \|T\|$. Portanto, $\ell_p \langle \cdot \rangle$ é linearmente estável. ■

Proposição 4.9. $(\Pi_p, \pi_p(\cdot))$ e $(\mathcal{D}_p, d_p(\cdot))$ são ideais de Banach.

Demonstração: Como $\ell_p(\cdot), \ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_p \langle \cdot \rangle$ são classes de sequências linearmente estáveis, resta mostrar que $\ell_p^w(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(\mathbb{K})$, $\ell_p(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p \langle \mathbb{K} \rangle$ e aplicar o Teorema 4.7.

Sejam $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p^w(\mathbb{K})$ e $(y_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p(\mathbb{K})$. Então, pela Proposição 2.13,

$$\begin{aligned}
\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p &= \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p(\mathbb{K}))'}} |\varphi((x_i)_{i=1}^\infty)| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p^w(\mathbb{K}))'}} |\varphi((x_i)_{i=1}^\infty)| = \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{w,p}
\end{aligned}$$

e, pelas Proposições 2.13 e A.4,

$$\begin{aligned}
\|(y_i)\|_{1,p} &= \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p\langle\mathbb{K}\rangle)'}} |\varphi((y_i)_{i=1}^\infty)| \\
&= \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(\mathbb{K}')}} \left| \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(y_i) \right| \\
&= \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(\mathbb{K}')}} \left| \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(y_i) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p(\mathbb{K}))'}} |\varphi((y_i)_{i=1}^\infty)| = \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_p \,,
\end{aligned}$$

o que nos mostra que $\ell_p^w(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \ell_p(\mathbb{K})$ e $\ell_p(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \ell_p \langle \mathbb{K} \rangle$. Portanto, pelo Teorema 4.7, $(\mathcal{L}_{\ell_p^w(\cdot);\ell_p(\cdot)}, \|\cdot\|_{\ell_p^w(\cdot);\ell_p(\cdot)}) = (\Pi_p, \pi_p(\cdot))$ e $(\mathcal{L}_{\ell_p(\cdot);\ell_p\langle\cdot\rangle}, \|\cdot\|_{\ell_p(\cdot);\ell_p\langle\cdot\rangle}) = (\mathcal{D}_p, d_p(\cdot))$ são ideais de Banach. ■

Observação 4.10. Como, pela Proposição 2.12, $\ell_q^w(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \ell_p(\mathbb{K})$, para todos $1 \leq q \leq p < \infty$, podemos concluir, do mesmo Teorema 4.7, que $(\Pi_{p,q}, \pi_{p,q}(\cdot))$ é um ideal de Banach.

A seguir, listamos mais alguns exemplos de ideais de Banach. A verificação de que essas classes são de fato ideais e completos pode ser encontrada em [9], [22] e [20].

Nos exemplos abaixo, E e F denotam espaços de Banach.

Exemplo 4.11. Um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é dito *compacto* quando $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F. Denotamos por $\mathcal{K}(E, F)$ o conjunto formado por todos os operadores compactos de E em F. $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

Exemplo 4.12. Se $\overline{T(B_E)}$ é fracamente compacto em F, onde $T \in \mathcal{L}(E,F)$, dizemos que T é um operador *fracamente compacto*. $\mathcal{W}(E,F)$ denota o conjunto dos operadores francamente compactos de E em F. $(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

Exemplo 4.13. Um operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é dito *completamente contínuo* quando, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E tal que $x_n \stackrel{w}{\to} x$ em E, verifica-se que $T(x_n) \to T(x)$ em F. O conjunto dos operadores completamente contínuos de E em F é denotado por $\mathcal{CC}(E,F)$. $(\mathcal{CC}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

Exemplo 4.14. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é *nuclear* se existem sequências $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ em E' e $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ em F tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \|y_i\| < \infty$ e, para todo $x \in E$,

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes y_i(x).$$

Denotamos por $\mathcal{N}(E,F)$ o conjunto de todos os operadores nucleares de E em F. A função $\|\cdot\|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N}(E,F) \to [0,\infty)$ dada por

$$\|T\|_{\mathcal{N}} := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \|y_i\| : T = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes y_i \right\},$$

define uma norma em $\mathcal{N}(E,F)$ tal que $(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ é um ideal de Banach,

Exemplo 4.15. Um operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é dito *separável* se $T(E)$ é um subespaço separável de F. $\mathcal{S}(E,F)$ denota o conjunto de todos os operadores separáveis de E em F. $(\mathcal{S}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

4.2 Propriedades do Ideal Dual

Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Definimos o *ideal dual* de $\mathcal{I}$, denotado $\mathcal{I}^{\mathrm{dual}}$, por

$$\mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(E,F) := \{T \in \mathcal{L}(E,F) \colon T' \in \mathcal{I}(F',E')\},$$

para todos espaços de Banach E e F. Dados $A, B \in \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(E,F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $(A + \lambda B)' = A' + \lambda B'$, pela Proposição 1.17. Como $\mathcal{I}$ é um ideal, temos $A' + \lambda B' \in \mathcal{I}(F',E')$ donde $A + \lambda B \in \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(E,F)$. Sejam $\varphi \in E'$ e $y \in F$. É fácil verificar que a aplicação $\xi_y \colon F' \to \mathbb{K}$ dada por $\xi_y(\psi) = \psi(y)$ é um funcional linear contínuo. Da definição do adjunto do operador $\varphi \otimes y$, segue que $(\varphi \otimes y)' = \xi_y \otimes \varphi$. Como $\mathcal{I}$ é um ideal, temos $\xi_y \otimes \varphi \in \mathcal{I}(F',E')$, logo $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(E,F)$. Pela Proposição 1.15, segue que $\mathcal{F}(E,F) \subseteq$

$\mathcal{I}^{\text{dual}}(E, F)$. Usando a propriedade de ideal de $\mathcal{I}$ e a Proposição 1.17, temos

$$(B \circ T \circ A)' = A' \circ T' \circ B' \in \mathcal{I}(F', E'),$$

sempre que $A' \in \mathcal{L}(E_0', E')$, $T' \in \mathcal{I}(F_0', E_0')$ e $B' \in \mathcal{L}(F', F_0')$. Consequentemente, $B \circ T \circ A \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E, F)$, sempre que $A \in \mathcal{L}(E, E_0)$, $T \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E_0, F_0)$ e $B \in \mathcal{L}(F_0, F)$. Com isso, provamos a

Proposição 4.16. Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, então $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ também o é.

Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores. Para cada $T \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E, F)$, definamos

$$\|T\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} := \|T'\|_{\mathcal{I}}\,.$$

Com essa definição, vale o seguinte resultado:

Proposição 4.17. Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado de operadores, então $(\mathcal{I}^{\text{dual}}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}})$ também o é.

Demonstração: Pela Proposição 1.17, o fato de $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ ser uma norma em $\mathcal{I}(F', E')$ implica que $\|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}}$ é uma norma em $\mathcal{I}^{\text{dual}}(E, F)$. Mais ainda, $\|\text{id}_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} = \|(\text{id}_{\mathbb{K}})'\|_{\mathcal{I}} = \|\text{id}_{\mathbb{K}'}\|_{\mathcal{I}} = 1$. Pela Proposição 1.16,

$$\begin{aligned}\|B \circ T \circ A\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} &= \|A' \circ T' \circ B'\|_{\mathcal{I}} \leq \|A'\|\,\|T'\|_{\mathcal{I}}\,\|B'\| \\ &= \|A\|\,\|T\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}}\,\|B\|\end{aligned}$$

sempre que $A \in \mathcal{L}(E, E_0)$, $T \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E_0, F_0)$ e $B \in \mathcal{L}(F_0, F)$. Portanto, $(\mathcal{I}^{\text{dual}}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}})$ é um ideal normado. ■

Proposição 4.18. Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de Banach, então $(\mathcal{I}^{\text{dual}}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}})$ também o é. Em particular, se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado, então $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ também é um ideal fechado.

Demonstração: Sejam E, F espaços de Banach e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência absolutamente somável em $\mathcal{I}^{\text{dual}}(E, F)$. Como $\|T_n\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} = \|T_n'\|_{\mathcal{I}}$, segue que $(T_n')_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência absolutamente somável em $\mathcal{I}(F', E')$. Pelo Teorema 4.1, $v := \sum_{n=1}^{\infty} T_n' \in \mathcal{I}(F', E')$. Pelas Proposições 1.16 e 4.2, obtemos que

$$\|T_n\| = \|T_n'\| \leq \|T_n'\|_{\mathcal{I}} = \|T_n\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}}\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Critério de Comparação, $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável em $\mathcal{L}(E, F)$ e, como E é completo, pela Proposição 1.23, existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T$. Das Proposições 1.16 e 1.17, segue que

$$\left\| T' - \sum_{n=1}^{k} T_n' \right\| = \left\| \left(T - \sum_{n=1}^{k} T_n \right)' \right\| = \left\| T - \sum_{n=1}^{k} T_n \right\|,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\left\| T - \sum_{n=1}^{k} T_n \right\| \xrightarrow{k} 0$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} T_n' = T'$ e pela unicidade do limite $T' = v \in \mathcal{I}(F', E')$, donde $T \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E, F)$. Portanto, $(\mathcal{I}^{\text{dual}}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}})$ é um ideal de Banach.

Em particular, se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado, então, por definição, $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach. Neste caso, pela Proposição 1.16, $\|T\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} := \|T'\| = \|T\|$, para todos $T \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E, F)$. Do exposto acima, $(\mathcal{I}^{\text{dual}}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach. ■

Apresentamos, agora, o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.19. *Seja* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$.

(a) *Se* $1 \leq p < \infty$, *então* $\mathcal{D}_{p^*}^{\text{dual}} = \Pi_p$. *Neste caso,* $d_{p^*}(T') = \pi_p(T)$.

(b) *Se* $1 < p^* \leq \infty$, *então* $\Pi_p^{\text{dual}} = \mathcal{D}_{p^*}$. *Neste caso,* $d_{p^*}(T) = \pi_p(T')$.

Demonstração: (a) Sejam $T \in \Pi_p(E, F)$, $(\varphi_i)_{i=1}^n \in \ell_{p^*}(F')$ e $(\psi_i)_{i=1}^n \in \ell_p^w(E'')$. Pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\psi_i(T'(\varphi_i))| &= \sum_{i=1}^{n} |T''(\psi_i)(\varphi_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|T''(\psi_i)\| \, \|\varphi_i\| \\ &\leq \|(T''(\psi_i))_{i=1}^n\|_p \, \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

para todo natural n. Como T é absolutamente p-somante, então T'' também é absolutamente p-somante e $\pi_p(T) = \pi_p(T'')$ (veja [21, Proposition 18]). Assim

$$\|(T''(\psi_i))_{i=1}^n\|_p \leq \pi_p(T) \, \|(\psi_i)_{i=1}^n\|_{w,p}. \tag{4.6}$$

De (4.5) e (4.6), obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} |\psi_i(T'(\varphi_i))| \leq \pi_p(T) \, \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*} \, \|(\psi_i)_{i=1}^n\|_{w,p},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, pela Proposição 3.7, $T' \in \mathcal{D}_{p^*}(F', E')$ e $d_{p^*}(T') \leq \pi_p(T)$.

Reciprocamente, sejam $T' \in \mathcal{D}_{p^*}(F', E')$, $(x_i)_{i=1}^n \in \ell_p^w(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^n \in \ell_{p^*}(F')$. Como

$(T'(\varphi_i))_{i=1}^n \in \ell_{p^*} \langle E' \rangle = (\ell_p^w(E))'$ (veja Apêndice A, Proposição A.4), então

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^n \varphi_i(T(x_i))\right| &= \left|\sum_{i=1}^n T'(\varphi_i)(x_i)\right| \\
&= \|(T'(\varphi_i))_{i=1}^n\|_{1,p^*} \left|\sum_{i=1}^n \frac{T'(\varphi_i)}{\|(T'(\varphi_i))_{i=1}^n\|_{1,p^*}}(x_i)\right| \\
&= \|(T'(\varphi_i))_{i=1}^n\|_{1,p^*} \left|\psi((x_i)_{i=1}^n)\right| \qquad (4.7)\\
&\le \|(T'(\varphi_i))_{i=1}^n\|_{1,p^*} \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p^w(E))'}} |\varphi((x_i)_{i=1}^n)| \\
&= \|(T'(\varphi_i))_{i=1}^n\|_{1,p^*} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p}
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, como $T' \in \mathcal{D}_{p^*}(F', E')$,

$$\left|\sum_{i=1}^n \varphi_i(T(x_i))\right| \le d_{p^*}(T') \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De $\ell_{p^*}(F') = (\ell_p(F))'$ e da expressão acima, segue que

$$\begin{aligned}
\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p &= \sup_{\psi \in B_{(\ell_p(F))'}} |\psi((T(x_i))_{i=1}^n)| = \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(F')}} \left|\sum_{i=1}^n \varphi_i(T(x_i))\right| \\
&\le d_{p^*}(T') \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p}
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $T \in \Pi_p(E, F)$ e $\pi_p(T) \le d_{p^*}(T')$.

(b) Sejam $T' \in \Pi_{p^*}(F', E')$, $(\varphi_i)_{i=1}^n \in \ell_p^w(F')$ e $(x_i)_{i=1}^n \in \ell_{p^*}(E)$. Então $(T'(\varphi_i))_{i=1}^n \in \ell_p(E')$ e, como $(\ell_{p^*}(E))' = \ell_p(E')$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^n \varphi(T(x_i))\right| &= \left|\sum_{i=1}^n T'(\varphi_i)(x_i)\right| \\
&= \|(T'(\varphi_i))_{i=1}^n\|_p \left|\sum_{i=1}^n \frac{T'(\varphi_i)}{\|(T'(\varphi_i))_{i=1}^n\|_p}(x_i)\right| \\
&\le \|(T'(\varphi_i))_{i=1}^n\|_p \left|\psi((x_i)_{i=1}^n)\right| \\
&\le \|(T'(\varphi_i))_{i=1}^n\|_p \sup_{\varphi \in B_{(\ell_{p^*}(E))'}} |\varphi((x_i)_{i=1}^n)| \\
&\le \pi_p(T') \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p^*},
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e concluímos que

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{1,p^*} \le \pi_p(T') \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p^*},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $T \in \mathcal{D}_{p^*}(E,F)$ e $d_{p^*}(T) \leq \pi_p(T')$.

Reciprocamente, sejam $T \in \mathcal{D}_{p^*}(E,F)$, $(\varphi_i)_{i=1}^n \in \ell_p^w(F')$ e $(\psi_i)_{i=1}^n \in \ell_{p^*}(E'')$. Como T é Cohen fortemente p^*-somante, segue que T'' também o é e $d_{p^*}(T) = d_{p^*}(T'')$ (veja [1, Theorem 3.4]). Além disso, $(T''(\psi_i))_{i=1}^n \in \ell_{p^*}\langle F''\rangle = (\ell_p^w(F'))'$ (veja Apêndice A, Proposição A.4), logo

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^n \psi_i(T'(\varphi_i))\right| &= \left|\sum_{i=1}^n T''(\psi_i)(\varphi_i)\right| \\
&= \left\|(T''(\psi_i))_{i=1}^n\right\|_{1,p^*} \left|\sum_{i=1}^n \frac{T''(\psi_i)}{\left\|(T''(\psi_i))_{i=1}^n\right\|_{1,p^*}}(\varphi_i)\right| \\
&\leq \left\|(T''(\psi_i))_{i=1}^n\right\|_{1,p^*} \left|\psi((\varphi_i)_{i=1}^n)\right| \\
&\leq d_{p^*}(T'') \left\|(\psi_i)_{i=1}^n\right\|_{p^*} \sup_{\xi \in B_{(\ell_p^w(F'))'}} \left|\xi((\varphi_i)_{i=1}^n)\right| \\
&= d_{p^*}(T) \left\|(\psi_i)_{i=1}^n\right\|_{p^*} \left\|(\varphi_i)_{i=1}^n\right\|_{w,p},
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o supremo sobre $(\psi_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(E'')}$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|(T'(\varphi_i))_{i=1}^n\right\|_p &= \sup_{\psi \in B_{(\ell_p(E'))'}} \left|\psi((T'(\varphi_i))_{i=1}^\infty)\right| \\
&= \sup_{(\psi_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(E'')}} \left|\sum_{i=1}^n \psi_i(T'(\varphi_i))\right| \\
&\leq d_{p^*}(T) \left\|(\varphi_i)_{i=1}^n\right\|_{w,p},
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $T' \in \Pi_p(F',E')$ e $\pi_p(T') \leq d_{p^*}(T)$. ■

Corolário 4.20. Se $p_1 \leq p_2$, então $\mathcal{D}_{p_2}(E,F) \subseteq \mathcal{D}_{p_1}(E,F)$.

Demonstração: Pelo teorema anterior, $T \in \mathcal{D}_{p_2}(E,F)$ se, e somente se, $T' \in \Pi_{p_2^*}(F',E')$. Como $p_1 \leq p_2$, segue que $p_2^* \leq p_1^*$ o que implica $T' \in \Pi_{p_2^*}(F',E') \subseteq \Pi_{p_1^*}(F',E')$, pela Observação 2.22. Usando novamente o teorema anterior, temos $T' \in \Pi_{p_1^*}(F',E')$ se, e somente se, $T \in \mathcal{D}_{p_1}(E,F)$. ■

4.3 Ideais Injetivos e Sobrejetivos

Sejam E, F e G espaços normados. Uma aplicação $I \in \mathcal{L}(E,F)$ é dita uma *isometria* ou *injeção métrica* se $\|I(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$. Uma aplicação sobrejetiva $Q \in \mathcal{L}(E,F)$ é dita uma *sobrejeção métrica* se $\|Q(x)\| = \inf\{\|y\| : Q(y) = Q(x)\}$ para todo $x \in E$.

Definição 4.21. Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é *injetivo* se dados um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e uma injeção métrica $I \in \mathcal{L}(F, G)$ tais que $I \circ T \in \mathcal{I}(E, G)$, tem-se $T \in \mathcal{I}(E, F)$.

Definição 4.22. Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é *sobrejetivo* se dados um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e uma sobrejeção métrica $Q \in \mathcal{L}(G, E)$ tais que $T \circ Q \in \mathcal{I}(G, F)$, tem-se $T \in \mathcal{I}(E, F)$.

Na demonstração do principal resultado desta seção faremos uso dos seguintes lemas:

Lema 4.23. Seja $Q \in \mathcal{L}(G, E)$ uma sobrejeção métrica. Então

(a) $\|Q\| \leq 1$.

(b) $Q(\mathring{B}_G) = \mathring{B}_E$.

Demonstração: (a) Como $\|Q(x)\| = \inf\{\|y\| : Q(x) = Q(y)\}$, segue que $\|Q(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$, pois $\|x\| \in \{\|y\| : Q(x) = Q(y)\}$. Consequentemente, $\|Q\| \leq 1$.
(b) Seja $x \in \mathring{B}_G$. Então, pelo item (a),

$$\|Q(x)\| \leq \|Q\| \, \|x\| < 1,$$

donde $Q(x) \in \mathring{B}_E$.

Por outro lado, dado $y \in \mathring{B}_E$, temos por hipótese que existe $y' \in G$ tal que $Q(y') = y$ e

$$\|y\| = \|Q(y')\| = \inf\{\|x\| : Q(x) = Q(y') = y\}.$$

Pela caracterização do ínfimo, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in G$ com $Q(x) = y$ tal que

$$\|y\| - \frac{1}{n} < \|x\| \leq \|y\| < 1.$$

Consequentemente, $x \in \mathring{B}_G$ e $Q(x) = y$. Assim $y \in Q(\mathring{B}_G)$. ■

Lema 4.24.

(a) Seja $I \in \mathcal{L}(F, G)$ uma injeção métrica. Então I' é uma sobrejeção métrica.

(b) Seja $Q \in \mathcal{L}(G, E)$ uma sobrejeção métrica. Então Q' é uma injeção métrica.

Demonstração: (a) Veja [22, Proposition B.3.9.1].
(b) Para todo $\varphi \in E'$, pelo Lema 4.23 temos

$$\|Q'(\varphi)\| = \sup_{x \in B_G} |Q'(\varphi)(x)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{x \in \mathring{B}_G} |Q'(\varphi)(x)| \\
&= \sup_{x \in \mathring{B}_G} |\varphi(Q(x))| \\
&= \sup_{y \in \mathring{B}_E} |\varphi(y)| = \|\varphi\|,
\end{aligned}
$$

onde na segunda e na última igualdades estamos usando o fato de que

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| < 1} \|T(x)\|,$$

para todo $T \in \mathcal{L}(E, F)$ (veja [5], Exercício 2.7.8). Portanto, Q' é uma injeção métrica. ■

Teorema 4.25. *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores.*

(a) *Se $\mathcal{I}$ é injetivo, então $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ é sobrejetivo.*

(b) *Se $\mathcal{I}$ é sobrejetivo, então $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ é injetivo.*

Demonstração: (a) Sejam E, F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $Q \in \mathcal{L}(G, E)$ uma sobrejeção métrica tais que $T \circ Q \in \mathcal{I}^{dual}(G, F)$. Pelo Lema 4.24, Q' é uma injeção métrica e, pela Proposição 1.17,

$$Q' \circ T' = (T \circ Q)' \in \mathcal{I}(F', G').$$

Como $\mathcal{I}$ é injetivo, $T' \in \mathcal{I}(F', E')$, isto é, $T \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E, F)$. Assim $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ é sobrejetivo.
(b) Sejam E, F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $I \in \mathcal{L}(F, G)$ uma injeção métrica tais que $I \circ T \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E, G)$. Pelo Lema 4.24, I' é uma sobrejeção métrica e, pela Proposição 1.17,

$$T' \circ I' = (I \circ T)' \in \mathcal{I}(G', E').$$

Como $\mathcal{I}$ é sobrejetivo, $T' \in \mathcal{I}(F', E')$, isto é, $T \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E, F)$ e assim $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ é injetivo. ■

Corolário 4.26. $\mathcal{D}_{p^*}$ é sobrejetivo.

Demonstração: Sejam E, F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $I \in \mathcal{L}(F, G)$ uma injeção métrica tais que $I \circ T \in \Pi_p(E, G)$. Pelo Teorema 2.17,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|I(T(x_i))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|(I(T(x_i)))_{i=1}^{\infty}\|_p
\end{aligned}
$$

$$\leq \pi_p(I \circ T) \left\| (x_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w,p},$$

para toda $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Consequentemente, $T \in \Pi_p(E, F)$ e, portanto, Π_p é injetivo. Pelos Teoremas 4.25 e 4.19, $\mathcal{D}_{p^*}$ é sobrejetivo. ■

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste apêndice, colecionamos certos fatos (alguns demonstrados) que completam pontos apresentados no texto, além de resultados auxiliares. Comecemos com o seguinte resultado de Álgebra Linear:

Proposição A.1. Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Então, para todo escalar ε existe um escalar $c_n(\varepsilon)$ tal que

$$\det(I_n + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(A) + c_n(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|c_n(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0,$$

onde $I_n \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é a matriz identidade.

Demonstração: Faremos indução em n. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem dois. Então

$$\begin{aligned}\det(I_2 + \varepsilon A) &= (1+\varepsilon a_{11})(1+\varepsilon a_{22}) - \varepsilon^2 a_{21}a_{12}\\ &= 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(A) + \varepsilon^2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}).\end{aligned}$$

Logo, tomando $c_2(\varepsilon) = \varepsilon^2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$, segue que $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|c_2(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0$.

Agora, suponhamos o resultado válido para matrizes de ordem $n-1$, $n \geq 3$. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem n. Então

$$\det(I_n + \varepsilon A) = (1+\varepsilon a_{11})\det(A_{11}) + c_0(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|c_0(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0,$$

onde $c_0(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$ e A_{i1} é a matriz obtida a partir de A retirando-se a i-ésima linha e a primeira coluna. Da hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}\det(I_n + \varepsilon A) &= (1+\varepsilon a_{11})[1 + \varepsilon \mathrm{tr}(A_{11}) + c_{n-1}(\varepsilon)] + c_0(\varepsilon)\\ &= 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(A) + c_{n-1}(\varepsilon) + \varepsilon^2 a_{11}\mathrm{tr}(A_{11}) + \varepsilon a_{11}c_{n-1}(\varepsilon) + c_0(\varepsilon).\end{aligned}$$

Tomando $c_n(\varepsilon) = c_{n-1}(\varepsilon) + \varepsilon^2 a_{11}\mathrm{tr}(A_{11}) + \varepsilon a_{11} c_{n-1}(\varepsilon) + c_0(\varepsilon)$, concluímos que

$$\det(I_n + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(A) + c_n(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|c_n(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

A seguir, apresentamos uma propriedade do supremo de uma função $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$ que foi empregada na demonstrações de alguns resultados no decorrer deste trabalho.

Proposição A.2. Sejam A e B conjuntos não vazios e $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$ uma função. Então,

$$\sup_{x\in A}\left(\sup_{y\in B} f(x,y)\right) = \sup_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right).$$

Demonstração: *Caso 1:* $\sup_{x\in A}\left(\sup_{y\in B} f(x,y)\right) = \infty$ ou $\sup_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right) = \infty$.

Se $\sup_{x\in A}\left(\sup_{y\in B} f(x,y)\right) = \infty$, então para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $x_0 \in A$ tal que $\sup_{y\in B} f(x_0,y) > M$, donde existe $y_0 \in B$ tal que $f(x_0,y_0) > M$. Logo,

$$\sup_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right) \geq \sup_{x\in A} f(x,y_0) \geq f(x_0,y_0) > M$$

e isto implica que $\sup_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right) = \infty$. Analogamente, $\sup_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right) = \infty$ implica $\sup_{x\in A}\left(\sup_{y\in B} f(x,y)\right) = \infty$.

Caso 2: $p = \sup_{x\in A}\left(\sup_{y\in B} f(x,y)\right) < \infty$ e $q = \sup_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right) < \infty$.

Se $p = \sup_{x\in A}\left(\sup_{y\in B} f(x,y)\right) < \infty$, então $\sup_{y\in B} f(x,y) \leq p$ para todo $x \in A$. Logo, $f(x,y) \leq p$ para todo $x \in A$ e todo $y \in B$. Daí, $\sup_{x\in A} f(x,y) \leq p$ para todo $y \in B$ e, portanto, $q = \sup_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right) \leq p$. Analogamente, $q = \sup_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right) < \infty$ implica $p = \sup_{x\in A}\left(\sup_{y\in B} f(x,y)\right) \leq q$. Portanto, $p = q$. ■

A seguir, apresentamos o resultado de que $(\ell_p(E))' = \ell_{p^*}(E')$, $(\ell_p^w(E))' = \ell_{p^*}\langle E'\rangle$ e $(\ell_p\langle E\rangle)' = \ell_{p^*}^w(E')$. Para isso, precisaremos do Princípio da Reflexividade Local Fraco.

Teorema A.3 (Princípio da Reflexividade Local Fraco). *Sejam M e F espaços normados, $\dim M < \infty$, $R \in \mathcal{L}(M, F'')$ e N um subespaço de F' com $\dim N < \infty$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe um operador $S \in \mathcal{L}(M, F)$ tal que*

(a) $\|S\| \leq (1+\varepsilon)\|R\|$.

(b) $\varphi(S(y)) = R(y)(\varphi)$ *para todos* $\varphi \in N$, $y \in M$.

Demonstração: Veja [9, página 73]. ■

Proposição A.4. Sejam E um espaço de Banach e $p \in [1,\infty)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

(i) Os espaços $(\ell_p(E))'$ e $\ell_{p^*}(E')$ são isomorfos isometricamente por meio da relação

$$\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}(E') \mapsto J(\varphi) \in (\ell_p(E))', \text{ dada por } J(\varphi)((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i),$$

para toda $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$.

(ii) Os espaços $(\ell_p^w(E))'$ e $\ell_{p^*}\langle E'\rangle$ são isomorfos isometricamente por meio da relação

$$\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}\langle E'\rangle \mapsto J(\varphi) \in (\ell_p^w(E))', \text{ dada por } J(\varphi)((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i),$$

para toda $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$.

(iii) Os espaços $(\ell_p\langle E\rangle)'$ e $\ell_{p^*}^w(E')$ são isomorfos isometricamente por meio da relação

$$\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E') \mapsto J(\varphi) \in (\ell_p\langle E\rangle)', \text{ dada por } J(\varphi)((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i),$$

para toda $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$.

Demonstração: O item (i) resulta de uma generalização do caso particular $E = \mathbb{K}$ e sua demonstração é bem conhecida. O item (iii) tem demonstração análoga ao item (ii), porém não necessita do Princípio da Reflexividade Local Fraco. Dessa forma, demonstraremos apenas o item (ii).

Primeiro, mostremos que o operador J do item (ii) está bem definido. Pela Observação 2.7,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)\right| &\leq \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \sum_{i=1}^{n} \left|\varphi_i\left(\frac{x_i}{\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p}}\right)\right| \\
&= \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \sum_{i=1}^{n} \left|J_E\left(\frac{x_i}{\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p}}\right)(\varphi_i)\right| \\
&\leq \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \sup_{(\psi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E'')}} \sum_{i=1}^{n} |\psi_i(\varphi_i)| \\
&= \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \|(\varphi_i)_{i=1}^{n}\|_{1,p^*},
\end{aligned}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)\right| \leq \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{1,p^*}. \tag{A.1}$$

Logo, $J((\varphi_i)_{i=1}^{\infty})$ está bem definido para toda $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}\langle E'\rangle$. É fácil verificar que

$J((\varphi_i)_{i=1}^{\infty})$ é linear, logo (A.1) implica que $J((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}) \in (\ell_p^w(E))'$ para toda $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}\langle E'\rangle$, daí a boa definição de J. É igualmente simples mostrar que J é linear. Assim, tomando o supremo sobre $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E)}$ em (A.1), temos

$$\|J((\varphi_i)_{i=1}^{\infty})\| \leq \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{1,p^*},$$

provando que J é contínuo e $\|J\| \leq 1$.

Seja $I_i\colon E \to \ell_p^w(E)$ a i-ésima injeção canônica, isto é, $I_i(x) = (\delta_{ij}x)_{j=1}^{\infty}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Seja $I\colon (\ell_p^w(E))' \to \ell_{p^*}\langle E'\rangle$ o operador dado por $I(\varphi) = (\varphi \circ I_i)_{i=1}^{\infty}$. Vejamos que I está bem definido. Sejam $(\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E'')$, $M = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$, $N = [\psi_i, \ldots, \psi_n]$, $\psi_i = \varphi \circ I_i$, $\varphi \in (\ell_p^w(E))'$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{id}_{E''}\big|_M$ e $\delta > 0$. Então pelo Princípio da Reflexividade Local Fraco, existe $S \in \mathcal{L}(M, E)$ tal que

$$\left|\begin{array}{l} \|S\| \leq (1+\delta)\left\|\mathrm{id}_{E''}\big|_M\right\| = 1+\delta \ \text{ e} \\ \psi_i(S(\xi_i)) = \xi_i(\psi_i) \end{array}\right.$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Logo,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\psi_i)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \psi_i(S(\xi_i))\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} \varphi \circ I_i(S(\xi_i))\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(\delta_{ij}S(\xi_i))_{j=1}^{n}\right| \\ &= |\varphi((S(\xi_i))_{i=1}^{n})| \leq \|\varphi\| \, \|(S(\xi_i))_{i=1}^{n}\|_{w,p}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Pelo Lema 2.5, obtemos

$$\|(S(\xi_i))_{i=1}^{n}\|_{w,p} \leq \|S\| \, \|(\xi_i)_{i=1}^{n}\|_{w,p} \leq (1+\delta)\, \|(\xi_i)_{i=1}^{n}\|_{w,p}. \tag{A.3}$$

De (A.2) e (A.3), segue que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\psi_i)\right| \leq (1+\delta)\, \|\varphi\| \, \|(\xi_i)_{i=1}^{n}\|_{w,p}$$

e, fazendo $\delta \to 0$ e depois $n \to \infty$, obtemos

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\varphi \circ I_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\psi_i)\right| \leq \|\varphi\| \, \|(\xi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} < \infty, \tag{A.4}$$

para toda $(\xi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p^w(E'')$, donde I está bem definido. I é claramente linear e, por (A.4),

$$\|I(\varphi)\|_{1,p^*} \leq \|\varphi\|.$$

Portanto, I é contínuo com $\|I\| \leq 1$. Note que $I \circ J = \mathrm{id}_{\ell_{p^*}\langle E'\rangle}$ e $J \circ I = \mathrm{id}_{(\ell_p^w(E))'}$. Daí,

$$\|\varphi\| = \|J \circ I(\varphi)\| = \|J(I(\varphi))\| \leq \|I(\varphi)\| \leq \|\varphi\|,$$

e assim J é uma isometria. Portanto, $(\ell_p^w(E))' \cong \ell_{p^*}\langle E'\rangle$ isometricamente. ■

Proposição A.5.

(a) Seja $1 < p < \infty$. Então $(e_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$ e $\|(e_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} = 1$.

(b) Seja $1 \leq p < \infty$. Então $(e_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(c_0)$.

Demonstração: (a) De fato, como $\ell_p^w(\mathbb{K}) = \ell_p(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned}\|(e_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{(\ell_{p^*})'}} \left(\sum_{i=1}^\infty |\varphi(e_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{(\lambda_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p}} \left(\sum_{i=1}^\infty |\lambda_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1.\end{aligned}$$

(b) Consideremos o isomorfismo isométrico

$$b = (b_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1 \overset{J}{\longmapsto} J(b) \in (c_0)', \quad J(b)((a_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty a_i b_i.$$

Para cada $\varphi \in (c_0)'$, seja $b = (b_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1$ tal que $J(b) = \varphi$. Como $\ell_1 \subseteq \ell_p$, segue que

$$\sum_{i=1}^\infty |\varphi(e_i)|^p = \sum_{i=1}^\infty |J(b)(e_i)|^p = \sum_{i=1}^\infty |b_i|^p < \infty.$$

■

Observação A.6. Uma consequência imediata da proposição anterior é que $\ell_p^w(E)$ não está contido em $\ell_p^u(E)$ em geral. De fato,

$$\begin{aligned}\|(e_i)_{i=1}^\infty\|_{w,2} &= \sup_{\varphi \in B_{\ell_2'}} \left(\sum_{i=1}^\infty |\varphi(e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^\infty |\psi(e_i)|\right)^{\frac{1}{2}} \geq |\psi(e_n)|,\end{aligned}$$

para todos $\psi \in B_{\ell_2'}$, $n \in \mathbb{N}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $\psi_n \in B_{\ell_2'}$ o funcional tal que $\|\psi_n\| = 1$ e $\psi_n(e_n) = \|e_n\|_2 = 1$. Logo,

$$\|(e_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,2} \geq |\psi_n(e_n)| = 1, \forall \;\; n \in \mathbb{N},$$

donde $\lim_{n\to\infty} \|(e_i)_{i=n}^{\infty}\|_{w,2} \neq 0$. Portanto, $(e_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2^w(\ell_2) \setminus \ell_2^u(\ell_2)$.

Proposição A.7. Os ideais Π_p e $\mathcal{D}_p$ não são fechados.

Demonstração: Seja $T\colon \ell_2 \to \ell_2$ o operador dado por

$$T((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \left(\frac{x_i}{\log(i+1)}\right)_{i=1}^{\infty}.$$

Mostremos que T está bem definido. Como $\lim_i \frac{1}{\log(i+1)} = 0$, segue que $\left\|\left(\frac{1}{\log(i+1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{\infty} < \infty$. Logo,

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{x_i}{\log(i+1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\left(\frac{1}{\log(i+1)}\right)\right\|_{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Fazendo $k \to \infty$, temos $\left\|\left(\frac{x_i}{\log(i+1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_2 < \infty$ e, portanto, T está bem definido.

Afirmação: T não é absolutamente 2-somante. De fato, suponhamos que $T \in \Pi_2(\ell_2, \ell_2)$. Então, pelo Teorema 2.17, existe $K > 0$ tal que

$$\left\|(T(x^k))_{k=1}^{\infty}\right\|_2 \leq K \left\|(x^k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{w,2}$$

para toda $(x^k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2^w(\ell_2)$. Em particular,

$$\|(T(e_i))_{i=1}^{\infty}\|_2 \leq K \|(e_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,2} = K.$$

Assim, como $T(e_i) = \frac{1}{\log(i+1)} e_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\frac{1}{\log(i+1)}e_i\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(\log(i+1))^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq K$$

e portanto a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(i+1))^2}$ seria convergente, o que é um absurdo. Portanto, T não é 2-somante.

Agora, seja $T_n\colon \ell_2 \to \ell_2$ a sequência de operadores dados por

$$T_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \left(\frac{x_i}{\log(i+1)}\right)_{i=1}^{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathcal{F}(\ell_2, \ell_2) \subseteq \Pi_2(\ell_2, \ell_2)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(T - T_n)((x_i)_{i=1}^{\infty})\|_2 &= \left\| \left(\frac{x_i}{\log(i+1)} \right)_{i=n+1}^{\infty} \right\|_2 \\
&= \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\|x_i\|^2}{|\log(i+1)|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\|x\|_2}{\log(n+1)},
\end{aligned}$$

donde

$$\|T - T_n\| = \sup_{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_2}} \|(T - T_n)((x_i)_{i=1}^{\infty})\|_2 \leq \frac{1}{\log(n+1)} \xrightarrow{n} 0.$$

Logo, $T_n \to T \notin \Pi_2(\ell_2, \ell_2)$ e, portanto, Π_p não é um ideal fechado.

Suponhamos que $\mathcal{D}_p$ seja um ideal fechado. Como $T_n \to T$, segue que $T_n' \to T'$, pois $\|T - T_n\| = \|(T - T_n)'\| = \|T' - T_n'\|$. Pela Proposição 4.19, o fato de $T_n \in \Pi_2(\ell_2, \ell_2)$ implica em $T_n' \in \mathcal{D}_2((\ell_2)', (\ell_2)')$. Como $\mathcal{D}_2$ é fechado, $T' \in \mathcal{D}_2((\ell_2)', (\ell_2)')$. Novamente pela Proposição 4.19, $T \in \Pi_2(\ell_2, \ell_2)$, mas isso é uma contradição pelo que acabamos de provar acima. Portanto, $\mathcal{D}_p$ não é um ideal fechado. ■

O próximo resultado é bem conhecido em Teoria da Medida e possui um grande número de aplicações em análise.

Teorema A.8 (**Teorema da Convergência Monótona**). *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência monótona não decrescente de funções em $M^+(X, \Sigma)$ que converge pontualmente para f. Então*

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu.$$

Demonstração: Veja [2, Teorema 4.6] ■

Encerramos com a seguinte aplicação do Teorema da Convergência Monótona

Proposição A.9. Sejam μ a medida de contagem e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a σ-álgebra das partes de $\mathbb{N}$. Se $f \in M^+(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, então

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(k) := \begin{cases} f(k) & \text{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Assim, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $M^+(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ tal que $f_n \leq f_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, se $n > k$, então $f_n(k) - f(k) = f(k) - f(k) = 0$, donde $\lim_{n\to\infty} f_n(k) = f(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que as f_n são funções simples. Logo, usando o Teorema da Convergência Monótona e a definição da integral de uma função simples, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} f d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\mu(\{k\}) \right) + 0\mu(\mathbb{N} \setminus \{1, \cdots, n\}) \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] H. Apiola, *Duality between spaces of p-summable sequences, (p,q)-summing operators and characterizations of nuclearity*, Mathematische Annalen, **219** (1976), 53-64.

[2] R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley, 1995.

[3] G. Botelho e J. R. Campos, *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators*, Monatsh Math, (2016), doi:10.1007/s00605-016-0963-4.

[4] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *A unified Pietsch domination theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **365** (2010), 269-276.

[5] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[6] J. R. Campos, *An abstract result on Cohen strongly summing operators*, Linear Algebra and its Applications, **439** (2013), 4047-4055.

[7] J. R. Campos, *Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes*, Tese de doutorado, UFPB (2013).

[8] J. S. Cohen, *Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates*, Mathematische Annalen, **201** (1973), 177-200.

[9] A. Defant e K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*, Vol. 176, Elsevier, 1993.

[10] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Univ. Press, 1995.

[11] A. Dvoretzky e C. Rogers, *Absolutely and inconditional convergence in normed linear spaces*, Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, **36** (1950), 192-197.

[12] A. Grothendieck, *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers*, Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo, **8** (1956), 81-110.

[13] M. I. Kadets e V. M. Kadets, *Series in Banach spaces: conditional and unconditional convergence*, Birkhäuser Verlag, 1997.

[14] R. Khalil, *On some Banach space sequences*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, **25** (1982), 231-241.

[15] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with applications*, Wiley, 1989.

[16] J. Lindenstrauss e A. Pelczyński, *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications*, Studia Mathematica, **29** (1968), 276-326.

[17] B. Mitjagin e A. Pelczyński, *Nuclear operators and approximative dimension*, Proc. of ICM, Moscow, 1966, 366-372.

[18] D. F. Nogueira, *Espaços de sequências vetoriais e ideais de operadores*, Dissertação de mestrado, UFU (2016).

[19] D. Pellegrino, J. Santos e J. B. Seoane-Sepúlveda, *Some techniques on nonlinear analysis and applications*, Advances in Mathematics, **229** (2012), 1235-1265.

[20] G. M. R. Pereira, *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach*, Dissertação de mestrado, UFU (2012).

[21] A. Pietsch, *Absolut p-summierende abbildungen in normierten räumen*, Studia Mathematica, **28** (1967), 333-353.

[22] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

[23] H. Royden, *Real Analysis*, 2nd Edition, Macmillan, 1968.

[24] J. S. Santos, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de mestrado, UFPB (2008).