Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Uma versão generalizada do Teorema de Extrapolação para operadores não-lineares absolutamente somantes

Lisiane Rezende dos Santos

2016

Universidade Federal de Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Uma versão generalizada do Teorema de Extrapolação para operadores não-lineares absolutamente somantes

por

Lisiane Rezende dos Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

Março de 2016

João Pessoa-PB

S237u Santos, Lisiane Rezende dos.
Uma versão generalizada do Teorema de Extrapolação para operadores não-lineares absolutamente somantes / Lisiane Rezende dos Santos.- João Pessoa, 2016.
84f.
Orientador: Joedson Silva dos Santos
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Operadores absolutamente somantes. 3. Aplicações multilineares absolutamente somantes. 4. Polinômios absolutamente somantes. 5. Teorema de Extrapolação. 6. Espaços de Banach.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Uma versão generalizada do Teorema de Extrapolação para operadores não-lineares absolutamente somantes

por

Lisiane Rezende dos Santos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFPB(Orientador)

Prof. Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino - UFRN

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque - UFPB

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB(Suplente)

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus, por me ajudar nessa caminhada, dando-me coragem para superar as adversidades, me ajudando nas escolhas dos melhores caminhos e por me fazer acreditar que iria vencer.

- Agradeço ao meu orientador, por ter me ensinado com disciplina o trabalho acadêmico, me fornecendo uma base, sem a qual não conseguiria escrever este trabalho. Obrigada por sempre estar disponível para sanar as minhas dúvidas, pelas sucessivas revisões do texto e por seu auxílio constante no período de construção desta dissertação. Joedson, obrigada pelas suas sugestões que me levaram a conseguir conquistar essa grande vitória.

- Ao meu noivo, Cristiano, que apesar da distância, soube compreender como ninguém a fase pela qual eu estava passando. Obrigada por suportar o meu estresse, por me aconselhar e por entender as minhas dificuldades. Agradeço-lhe, muito meu amor!

- Meus pais, Maria Joselma e José Carlos, que sempre me apoiaram e acreditaram em mim. Sei que muitas das vezes deixaram de realizarem seus próprios sonhos, para que eu pudesse realizar os meus... Amo muito vocês!

- A minha irmã Jeocástria, por ser o meu espelho e me socorrer sempre que precisei, mesmo quando o assunto não era da sua área. Ao meu irmão Allysson, pelo incentivo e pela presença sempre constante em minha vida. Obrigada por estarem ao meu lado e acreditarem em mim!

- As minhas amigas, Gerlândia, Thaís e Rainelly que sempre tentaram me ajudar, sendo tirando alguma dúvida ou escultando os meus desabafos. Agradeço a Deus por ter colocado vocês na minha vida.

- Não posso deixar de agradecer a minha “boadrasta”Mônica, que com suas palavras amigas, muitas vezes me confortaram quando estava triste. E a meu querido sobrinho David, por ser esse anjo que alegra os meus dias. Titia te ama muito!

- Aos professores do curso de Licenciatura e Pós-graduação em Matemática dos campus de Itabaiana e de João Pessoa, que contribuíram direta ou indiretamente na minha formação. Muito obrigada pela dedicação e paciência, vocês foram fundamentais para a evolução do meu conhecimento. Graças a vocês me sinto apta a continuar com minha vida acadêmica.

- Aos meus amigos do mestrado: Ageu, Camila, Clemerson, Isabelly, Jhonatas, Leon, Luíz, Renato e Sally pelo apoio, coleguismo e amizade durante todo o curso. Jamais poderei esquecê-los. Foi bom poder contar com vocês!

- Agradeço a Fundação CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo apoio com a bolsa concedida durante os anos do curso.

- E por fim, agradeço a todos que não mencionei por esquecimento, mas que de alguma maneira, colaboraram para a realização e conclusão dessa dissertação. A vocês, minha sincera gratidão.

Resumo

Neste trabalho, dissertamos sobre uma recente versão geral do Teorema de Extrapolação, devida a Botelho, Pellegrino, Santos e Seoane-Sepúlveda [6], que melhora e unifica vários teoremas do tipo Extrapolação para certas classes de funções que generalizam o ideal dos operadores lineares absolutamente p-somantes.

Palavras-Chave: Operadores absolutamente somantes, Aplicações multilineares absolutamente somantes, Polinômios absolutamentes somantes, Teorema de Extrapolação, espaços de Banach.

Abstract

In this work we study a recent general version of the Extrapolation Theorem, due to Botelho, Pellegrino, Santos and Seoane-Sepúlveda [6] that improves and unifies a number of known Extrapolation-type theorems for classes of mappings that generalize the ideal of absolutely p-summing linear operators.

Key-Words: Absolutely summing operators, Absolutely summing multilinear mappings, Absolutely summing polynomials, Extrapolation Theorem, Banach spaces.

Sumário

1 Operadores absolutamente (p, q)-somantes **1**

1.1 Operadores absolutamente (p, q)-somantes 1

1.2 Teoremas de Extrapolação para operadores lineares absolutamente somantes 18

2 Versões gerais dos teoremas do tipo Extrapolação **32**

2.1 Ambiente Abstrato 32

2.2 Versões gerais dos Teoremas de Extrapolação 1.2.13 e 1.2.14 35

3 Aplicações do TEG **45**

3.1 Operadores lineares absolutamente p-somante 45

3.2 Operadores multilineares p-dominados 47

3.3 Polinômios homogêneos p-dominados 50

3.4 Melhoramento do Teorema de Extrapolação presente em [22] 53

Apêndice **57**

Referências Bibliográficas **69**

Introdução

Podemos dizer que um conceito fundamental da teoria dos operadores absolutamente somantes está baseada em dois conceitos: sequência absolutamente e incondicionalmente somável. Dada uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço vetorial normado X, dizemos que ela é absolutamente somável se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ e é incondicionalmente somável se $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge, para qualquer permutação $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Um resultado devido Dirichlet [11] garante que uma sequência de números reais é absolutamente somável se, e somente se, é incondicionalmente somável. Porém, A. Dvoretzky e C. A. Rogers [12], provaram que todo espaço de Banach de dimensão infinita possui uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente.

Considerando X e Y espaços de Banach de dimensão infinita, um operador linear limitado $u : X \to Y$ é dito *absolutamente somante* se ele leva sequências incondicionalmente somáveis em sequências absolutamente somáveis. Este conceito foi introduzido por A. Grothendieck, na década de 50, na ocasião ele chamava esse tipo de operadores de "application semi-intégrales à droite". Somente na década seguinte foi que A. Pietsch [24] introduziu o conceito dos operadores absolutamente p-somantes (os operadores absolutamente somantes são exatamente os operadores absolutamente 1-somantes) e B. Mitiagin e A. Pelczyński [19] estenderam esse conceito e definiram os operadores absolutamente (p, q)-somantes. Um dos pilares na teoria linear dos operadores absolutamente somantes é o Teorema da Dominação de Pietsch que, além de dar condições necessária e suficiente para esses operadores, conecta a teoria desses operadores com a teoria da medida. Outros resultados importantes são os Teoremas de Extrapolação, devido a B. Maurey e a G.

Pisier [18, 26]. Usando estes dois últimos resultados podemos obter uma extensão do famoso Teorema de Grothendieck.

Em 1983, A. Pietsch [25] esboçou um projeto para o estudo das aplicações multilineares e polinômios absolutamente somantes e, em 1989, R. Alencar e M. C. Matos [1] começaram a desenvolver o projeto de Pietsch. A partir de então, vários autores se interessaram pelo assunto e atualmente existe uma extensa literatura não-linear relacionada ao tema.

Recentemente, uma versão não-linear do Teorema de Extrapolação foi demonstrada por D. Chen e B. Zheng em [9], para a classe das aplicações Lipschitz p-somantes. Em [22] foi dada uma abordagem abstrata para o Teorema de Extrapolação que recupera conhecidos teoremas do tipo Extrapolação e mostra que outras classes de operadores satisfazem um teorema desse tipo. Porém, em pelo menos um caso essa versão parece não funcionar. Neste trabalho, vamos estudar uma outra versão ainda mais geral do Teorema de Extrapolação que melhora e recupera tanto a abordagem abstrata de [22] quanto as versões onde essa abordagem para não ser eficaz.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1, faremos um breve resumo da teoria linear dos operadores absolutamente somantes, demonstrando alguns resultados importantes dessa teoria, incluindo algumas versões do Teorema de Extrapolação.

No Capítulo 2, estudaremos versões abstratas do Teorema de Extrapolação que melhora e recupera vários teorema desse tipo.

No Capítulo 3, o leitor poderá verificar que os conhecidos teoremas de Extrapolação para algumas classes de operadores somantes seguirá como consequência quase imediata de uma versão abstrata apresentada no capítulo anterior. A fonte dos resultados principais dos Capítulos 2 e 3 da presente dissertação é o artigo ([6]).

O Capítulo 4 é voltado a resultados básicos que serão utilizados em todo o trabalho.

Notação e Terminologia

- $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$.

- Em quase todo o texto, X, Y, G, H, X_i, Y_i denotarão espaços de Banach. Denotaremos por $\|\cdot\|$ a norma de um espaço de Banach X.

- B_X e X^* denotarão, respectivamente, a bola unitária fechada e o dual topológico de um espaço de Banach X.

- Um operador de posto finito $T : X \to Y$ é um operador linear cuja a imagem tem dimensão finita.

- $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ é o espaço das classes de equivalência de funções reais p-integráveis no sentido de Lebesgue, onde Ω é um conjunto, Σ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω e μ é uma medida definida em Σ. Caso não haja dúvida usaremos simplesmente $L_p(\mu)$ ou $L_p(\Omega, \mu)$.

- $C(K)$ é o espaço das funções contínuas de K em $\mathbb{K}$, onde K é um espaço topológico compacto de Hausdorff.

- Seja $1 \leq p \leq \infty$. Os espaços ℓ_p e ℓ_p^n denotarão o espaço $L_p(\mu)$, quando μ for uma medida de contagem em $\mathbb{N}$ e $\{1, \ldots, n\}$, respectivamente.

- $\mathcal{L}(X; Y)$ denotará o espaço das aplicações lineares limitadas de X em Y.

- Seja X um espaço de Banach. Os espaços $\ell_p(X)$ e $\ell_{p,w}(X)$ denotarão, respectivamente, o espaço de todas as sequências fortemente p-somantes e fracamente p-somantes em X.

- Sejam X e Y espaços de Banach, $\Pi_{p,q}(X; Y)$ denotará o espaço dos operadores limitados (p, q)-somantes de X em Y, $\mathcal{L}_{p,q}(^n X; Y)$ indicará o espaço dos operadores multilineares limitados p-dominados e $\mathcal{P}_{p,q}(^n X; Y)$ denotará o espaço dos polinômios homogêneos limitados p-dominados.

- Em geral, os ideais serão denotados por $\mathcal{I}, \mathcal{M}, \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$.

- $\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,(p_1,\ldots,p_t)}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ denotará o espaço de todos as aplicações $R_1, \ldots, R_t$-S-abstrata $(p_1, \ldots, p_t)$-somante.

Capítulo 1

Operadores absolutamente (p, q)-somantes

Inspirados no trabalho de A. Grothendieck, B. Mitiagin e A. Pelczyński [19], e A. Pietsch [24] deram início aos estudos dos operadores lineares absolutamente (p, q)-somantes. Nesse capítulo faremos uma breve apresentação sobre operadores lineares absolutamente (p, q)-somantes, inclusive mostraremos algumas teoremas do tipo Extrapolação para essa classe de operadores.

1.1 Operadores absolutamente (p, q)-somantes

Na presente seção discutiremos sobre o conceito de sequências fortemente e fracamente p-somantes e, em seguida, veremos alguns resultados para os operadores (p, q)-somantes.

Definição 1.1.1 *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é **fortemente p-somante** se a sequência de escalares $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ pertence a ℓ_p, ou seja*

(i) Se $1 \leq p < \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty.$$

(ii) Se $p = \infty$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty.$$

Notação 1.1.2 *Denotaremos por $\ell_p(X)$ o espaço de todas as sequências fortemente p-somantes em X.*

Definiremos, de modo natural, a norma em $\ell_p(X)$ da seguinte maneira:

(i) Se $1 \leq p < \infty$,

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Se $p = \infty$,

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} := \sup_n \|x_n\|.$$

Proposição 1.1.3 *O espaço vetorial $\ell_p(X)$ munido da norma $\|\cdot\|_p$ é um espaço de Banach, para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Ver [27, Proposição 2.3.2]. ■

Definição 1.1.4 *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é **fracamente p-somante** se a sequência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ pertencem a ℓ_p, para todo $\varphi \in X^*$, isto é*

(i) Se $1 \leq p < \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty.$$

(ii) Se $p = \infty$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(x_n)| < \infty.$$

Notação 1.1.5 *Indicaremos por $\ell_{p,w}(X)$ o espaço de todas as sequências fracamente p-somantes em X.*

Definiremos, de modo natural, a norma em $\ell_{p,w}(X)$ da seguinte maneira:

(i) Se $1 \leq p < \infty$,

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w} := \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Se $p = \infty$,

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty,w} := \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}.$$

Proposição 1.1.6 *O espaço vetorial $\ell_{p,w}(X)$ munido da norma $\|\cdot\|_{p,w}$ é um espaço de Banach, para $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, $\ell_{\infty,w}(X) = \ell_{\infty}(X)$.*

Demonstração. Ver [27, Proposição 2.3.4]. ■

Observação 1.1.7 *Sejam X, Y espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, a correspondência*

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (u(x_n))_{n=1}^{\infty}$$

sempre induz dois operadores lineares limitados:

$$\hat{u}^s : \ell_p(X) \to \ell_p(Y) \text{ e } \hat{u}^w : \ell_{p,w}(X) \to \ell_{p,w}(Y).$$

Em ambos os casos, $\|\hat{u}^s\| = \|\hat{u}^w\| = \|u\|$. De fato, sejam $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$ e $\hat{u}^s(x) = (ux_n)_{n=1}^{\infty}$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n\|^p \leq \|u\|^p \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$$

portanto o operador $\hat{u}^s$ está bem definido. Agora observe que dados $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$ e $\varphi \in Y^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(ux_n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi \circ u(x_n)|^p < \infty$$

como $\hat{u}^w(x) = (ux_n)_{n=1}^{\infty}$ então o operador $\hat{u}^w$ está bem definido. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}^s\| &= \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq 1} \|(ux_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \\
&= \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|u\| \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|u\|.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ux\| = \sup_{\|(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x,0,0,\ldots)\|_p \leq 1} \|\hat{u}^s((y_n)_{n=1}^{\infty})\|_p \leq \|\hat{u}^s\|.$$

Logo, $\|\hat{u}^s\| = \|u\|$.

Observe também que dado $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$,

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}^w\| &= \sup_{\|x\|_{p,w} \leq 1} \|(ux_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w} \\
&= \sup_{\|x\|_{p,w} \leq 1} \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(ux_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\|x\|_{p,w} \leq 1} \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi \circ u}{\|\varphi \circ u\|}(x_n) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|\varphi \circ u\| \right] \\
&\leq \sup_{\|x\|_{p,w} \leq 1} \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \|x\|_{p,w} \|\varphi \circ u\| \\
&\leq \sup_{\|x\|_{p,w} \leq 1} \|x\|_{p,w} \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \|\varphi\| \|u\| \\
&\leq \|u\|.
\end{aligned}$$

Além disso, por Hahn Banach

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|ux\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\varphi\in B_{Y^*}} |\varphi(ux)| \\
&= \sup_{\|(y_n)_{n=1}^{\infty}=(x,0,0,\dots)\|_{p,w}\leq 1} \|\hat{u}^w((y_n)_{n=1}^{\infty})\|_{p,w} \\
&\leq \|\hat{u}^w\|.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\hat{u}^s\| = \|\hat{u}^w\| = \|u\|$.

Observação 1.1.8 *Afirmamos que* $\ell_p(X) \subset \ell_{p,w}(X)$*. De fato, sejam* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$ *e* $\varphi \in X^*$*. Daí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \leq \|\varphi\|^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty.$$

Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$.

Seja $1 \leq p < \infty$. Em alguns momentos é propício trabalhar com o seguinte espaço

$$\ell_{p,u}(X) = \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X); \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{p,w} = 0\right\},$$

que possui a seguinte propriedade: $\ell_{p,u}(X)$ é um subespaço fechado de $\ell_{p,w}(X)$. (Ver [27, Proposição 2.3.6]).

Definição 1.1.9 *Sejam X, Y espaços de Banach,* $u \in \mathcal{L}(X,Y)$ *e* $1 \leq q,p < \infty$*. O operador u é dito* ***absolutamente*** (p,q)***-somante*** *(ou simplesmente,* (p,q)***-somante****) se dado* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$ *tivermos que* $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$*, isto é, se existe um operador induzido*

$$\begin{aligned}
\hat{u} : \ell_{q,w}(X) &\to \ell_p(Y) \\
(x_n)_{n=1}^{\infty} &\mapsto (u(x_n))_{n=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Com essa definição, veremos que o operador $\hat{u}$ é limitado.

Notação 1.1.10 *Denotaremos por $\Pi_{p,q}(X;Y)$ o conjunto de todos os operadores (p,q)-somantes de X em Y. Quando $p=q$, escrevemos simplesmente $\Pi_p(X;Y)$ em vez de $\Pi_{p,p}(X;Y)$.*

É fácil verificar que $\Pi_p(X;Y)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X;Y)$. Agora veremos algumas caracterizações para operadores (p,q)-somantes.

Proposição 1.1.11 *Sejam X, Y espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(X,Y)$. Os seguintes itens são equivalentes:*

(i) u é (p,q)-somante;

(ii) Existe $K>0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.1}$$

para quaisquer $x_1,\dots,x_n$ em X e n natural;

(iii) Existe $K>0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty}\in \ell_{q,w}(X)$;

(iv) Existe $K>0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty}\in \ell_{q,u}(X)$;

(v) $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ *sempre que* $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$.

Denotaremos por $\pi_{p,q}(u)$ *o ínfimo das constantes* K *tais que a desigualdade (1.1) é válida. Além disso,* $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$.

Demonstração. Iremos provar as equivalências acima da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc} (i) & \Rightarrow & (ii) & \Rightarrow & (iii) & \Rightarrow & (i) \\ & & \Uparrow & & \Downarrow & & \\ & & (v) & \Leftarrow & (iv) & & \end{array}$$

Seguindo o esquema acima, primeiramente iremos provar que $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponha que u seja (p, q)-somante. Note que, se $\hat{u}$ for contínuo teremos que para qualquer $x_1, \ldots, x_n \in X$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \|(u(x_k))_{k=1}^{n}\|_p \\ &= \|\hat{u}((x_k)_{k=1}^{n})\|_p \\ &\leq \|\hat{u}\| \|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q,w} \\ &= \|\hat{u}\| \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

E assim, a implicação estará provada.

Para provar que $\hat{u}$ é limitado usaremos o Teorema do Gráfico Fechado: suponhamos que

$$\begin{cases} \left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty} \longrightarrow x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ em } \ell_{q,w}(X), \\ \hat{u}\left(x^{(k)}\right) \longrightarrow y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ em } \ell_p(Y). \end{cases}$$

Pela convergência da sequência $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ em $\ell_{q,w}(X)$, segue que, dado $\epsilon > 0$, existe k_0 natural tal que

$$\sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left\|x^{(k)} - x\right\|_{q,w} < \epsilon,$$

para todo $k \geq k_0$. E assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right)\right|^q < \epsilon^q \text{ para todo } \varphi \in B_{X^*}. \tag{1.3}$$

Como ϵ^q domina cada termo da série (1.3), tem-se

$$\left\|x_n^{(k)} - x_n\right\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right)\right| < \epsilon$$

para todo $k \geq k_0$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada n natural a sequência $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para x_n em X. E pela continuidade da u, obtemos que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} u\left(x_n^{(k)}\right) = u(x_n), \tag{1.4}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Agora, como $\left(\hat{u}\left(x^{(k)}\right)\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\ell_p(Y)$, dado $\epsilon > 0$, existe k_1 natural tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\|u\left(x_n^{(k)}\right) - y_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\left(u\left(x_n^{(k)}\right)\right)_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p = \left\|\hat{u}\left(x^{(k)}\right) - y\right\|_p < \epsilon,$$

para todo $k \geq k_1$. Consequentemente,

$$\left\|u\left(x_n^{(k)}\right) - y_n\right\|^p < \epsilon,$$

para todo $k \geq k_1$ e cada n natural. Daí,

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} u\left(x_n^{(k)}\right) = y_n, \tag{1.5}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. E assim, por (1.4) e (1.5), temos que $u(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\hat{u}(x) = (u(x_n))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty} = y.$$

Como $\hat{u}$ é linear, segue pelo Teorema do Gráfico Fechado que $\hat{u}$ é contínuo.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$. Então

$$
\begin{aligned}
\|(u(x_k))_{k=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(1.1)}{\leq} \sup_n \left[K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&\overset{\text{Anexo } 1}{=} K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = K\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w},
\end{aligned}
$$

e isso conclui a implicação. $(iii) \Rightarrow (i)$ Segue de (iii) que $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$. Ou seja, existe um operador induzido e limitado

$$
\begin{aligned}
\hat{u} : \ell_{q,w}(X) &\to \ell_p(Y) \\
(x_n)_{n=1}^{\infty} &\mapsto (u(x_n))_{n=1}^{\infty}.
\end{aligned}
$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Dado $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X) \subset \ell_{q,w}(X)$, pelo item (iii), existe $K > 0$ tal que

$$
\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
$$

E assim, obtemos o item (iv).

$(iv) \Rightarrow (v)$ Observe que, dado $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X) \subset \ell_{q,w}(X)$

$$
\sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w} < \infty
$$

e por (iv) obtemos que $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$.

$(v) \Rightarrow (ii)$ Se $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$, então a seguinte aplicação está bem definida

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \ell_{q,u}(X) &\to \ell_p(Y) \\ (x_k)_{k=1}^{\infty} &\mapsto (u(x_k))_{k=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Para provar a continuidade de $\tilde{u}$ basta prosseguir de maneira análoga a demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$. Dados $x_1, \ldots, x_n \in X$ observe que $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in \ell_{q,u}(X)$ e assim,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \|(u(x_k)_{k=1}^{n})\|_p \\ &= \|\tilde{u}((x_k)_{k=1}^{n})\|_p \\ &\leq \|\tilde{u}\| \|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q,w} \\ &= \|\tilde{u}\| \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Finalmente, iremos provar que $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$. Por (1.6), temos que $\pi_{p,q}(u) \leq \|\hat{u}\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\| &= \sup_{\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} \|\hat{u}((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_p \\ &= \sup_{\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} K \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w} = K. \end{aligned}$$

E assim, além de obtermos a igualdade desejada temos que $\pi_{p,q}(\cdot)$ é uma norma. ∎

Assim, o espaço dos operadores (p,q)-somantes, $\Pi_{p,q}(X;Y)$, munido da norma $\pi_{p,q}(\cdot)$ é um espaço vetorial normado.

Observação 1.1.12 *O único operador (p, q)-somante com $p < q$ é o operador nulo. Com efeito, suponha que $X \neq 0$. Como $p < q$, podemos encontrar $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q - \ell_p$, por exemplo $(n^{\frac{-1}{p}})_{n=1}^{\infty} \in \ell_q - \ell_p$. Sendo assim, para $0 \neq x \in X$ tem-se que $(\lambda_k x)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$, pois dado $\varphi \in X^*$*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(\lambda_k x)|^q &= \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x)|^q |\lambda_k|^q \\ &= |\varphi(x)|^q \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^q \\ &\leq c \cdot \|x\|^q \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^q < \infty.\end{aligned}$$

Agora, suponha que existe $u \neq 0$ absolutamente (p, q)-somante. Logo, existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(\lambda_k x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para todo n natural.

E assim,

$$\|u(x)\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = K\|x\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

então,

$$\|u\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

logo, $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$ (absurdo).

Observação 1.1.13 *Seja $u \in \Pi_{p,q}(X; Y)$, temos que*

$$\|u\| \leq \pi_{p,q}(u). \tag{1.7}$$

De fato, tomando $n = 1$ e $x_1 = x$ em (1.1) temos

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x)| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \pi_{p,q}(u)\|x\| = \pi_{p,q}(u).
\end{aligned}$$

Definição 1.1.14 *Um **ideal de operadores** $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach, tal que, para quaisquer espaços de Banach X e Y, as componentes $\mathcal{I}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y) \cap \mathcal{I}$ satisfazem:*

(i) $\mathcal{I}(X,Y)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X,Y)$ que contém os operadores lineares contínuos de posto finito;

(ii) A propriedade de ideal: se H e G são espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, $v \in \mathcal{I}(Y,G)$ e $t \in \mathcal{L}(G,H)$, então a composição $t \circ v \circ u$ está em $\mathcal{I}(X,H)$.

Definição 1.1.15 *Um **ideal normado de operadores** $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de operadores $\mathcal{I}$ munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0,\infty]$ tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a $\mathcal{I}(X,Y)$ é uma norma para quaisquer espaços de Banach X e Y;

(ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$, com $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por $id_{\mathbb{K}}(x) = x$;

(iii) Se H e G são espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, $v \in \mathcal{I}(Y,G)$ e $t \in \mathcal{L}(G,H)$, então $\|t \circ v \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \cdot \|v\|_{\mathcal{I}} \cdot \|u\|$.

*Um ideal normado é um **ideal de Banach** (ou ideal completo) se, para todos espaços de Banach X e Y, as componentes $(\mathcal{I}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ forem completas, isto é, $(\mathcal{I}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um espaço de Banach.*

Teorema 1.1.16 $(\Pi_{p,q}, \pi_{p,q}(\cdot))$ *é um ideal normado de operadores lineares, para $1 \leq q \leq p < \infty$.*

Demonstração. Inicialmente vejamos que $\Pi_{p,q}$ é um ideal. Primeiramente vamos mostrar que os operadores de posto finito são (p,q)-somante. Seja $u : X \to Y$ definida por $u(\cdot) = \varphi(\cdot)y$, com $0 \neq \varphi \in X^*$ e $y \in Y$. Lembre-se que, pela monotonicidade da norma usual em ℓ_p, se $q \leq p$ então $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$. Sendo assim, dados $x_1, \ldots, x_n \in X$ e n natural

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \|\varphi(x_k)\cdot y\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \|y\|^p \frac{\|\varphi\|^p}{\|\varphi\|^p} |\varphi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|y\|\|\varphi\| \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi(x_k)|^p}{\|\varphi\|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|y\|\|\varphi\| \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\psi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{q\leq p}{\leq} \|y\|\|\varphi\| \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\psi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Logo, $u \in \Pi_{p,q}(X;Y)$. Além disso,

$$\pi_{p,q}(u) \overset{(1.7)}{\geq} \|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\varphi(x)\cdot y\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\varphi(x)\|\|y\| = \|\varphi\|\|y\|$$

e por (1.8) $\pi_{p,q}(u) \leq \|y\|\|\varphi\|$. Assim, $\pi_{p,q}(u) = \|y\|\|\varphi\|$.

Seja $v : X \to Y$ um operador de posto finito, pelo Anexo 2, temos que

$$v(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\cdot)\cdot y_k, \text{ com } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^* \text{ e } y_1, \ldots, y_n \in Y$$

assim, v é (p,q)-somante.

Agora, sejam $w \in \mathcal{L}(X_0; X)$, $v \in \Pi_{p,q}(X;Y)$ e $u \in \mathcal{L}(Y; Y_0)$. Pela Observação 1.1.7, temos que w e u sempre induzem dois operadores lineares limitados, destes escolheremos os seguintes operadores: $\hat{u}^s : \ell_p(Y) \to \ell_p(Y_0)$ e $\hat{w}^w : \ell_{q,w}(X_0) \to \ell_{q,w}(X)$ com, $\|\hat{u}^s\| = \|u\|$

e $\|\hat{w}^w\| = \|w\|$. Como v é (p, q)-somante, por definição, temos que existe um operador induzido limitado $\hat{v} : \ell_{q,w}(X) \to \ell_p(Y)$, o qual, já provamos ser contínuo, com $\pi_{p,q}(v) = \|\hat{v}\|$. Agora, fazendo a composição desses operadores obtemos o operador $\widehat{u \circ v \circ w} = \hat{u}^s \circ \hat{v} \circ \hat{w}^w :$ $\ell_{q,w}(X_0) \to \ell_p(Y_0)$. Logo, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X_0)$ temos

$$\begin{aligned}\hat{u}^s \circ \hat{v} \circ \hat{w}^w((x_n)_{n=1}^{\infty}) &= \hat{u}^s \circ \hat{v}((w(x_n))_{n=1}^{\infty}) \\ &= \hat{u}^s \circ ((v \circ w(x_n))_{n=1}^{\infty}) \\ &= (u \circ v \circ w(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(Y_0).\end{aligned}$$

Então, $u \circ v \circ w \in \Pi_{p,q}(X_0; Y_0)$, com

$$\pi_{p,q}(u \circ v \circ w) = \|\widehat{u \circ v \circ w}\| = \|\hat{u}^s \circ \hat{v} \circ \hat{w}^w\| \leq \|\hat{u}^s\| \cdot \|\hat{v}\| \cdot \|\hat{w}^w\| = \|u\| \cdot \pi_{p,q}(v) \cdot \|w\|.$$

Agora, vejamos que $\pi_{p,q}(\cdot)$ cumpri as condições $(i), (ii)$ e (iii) para que $(\Pi_{p,q}, \pi_{p,q}(\cdot))$ seja um ideal normado. Dado $x \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}|x| &= \|(x, 0, 0, \ldots)\|_p \\ &= \|(id_{\mathbb{K}}(x), id_{\mathbb{K}}(0), id_{\mathbb{K}}(0), \ldots)\|_p \\ &\leq \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \cdot \|(x, 0, 0, \ldots)\|_{q,w} \\ &= \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \cdot |x|,\end{aligned}$$

assim, $1 \leq \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}})$. Por outro lado, como $q \leq p$ pela monotonicidade da norma usual em ℓ_p, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |id_{\mathbb{K}}(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |id_{\mathbb{K}}(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{\mathbb{K}^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

para toda sequência $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(\mathbb{K})$. Logo, $1 \geq \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}})$, e assim $1 = \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}})$. ■

Proposição 1.1.17 $(\Pi_{p,q}, \pi_{p,q}(\cdot))$ *é um ideal de Banach, para* $1 \leq q \leq p < \infty$*.*

Demonstração. Dados X e Y espaços de Banach, seja $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $(\Pi_{p,q}(X;Y), \pi_{p,q}(\cdot))$. Usando a Observação 1.7, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 natural, tal que

$$\|v_m - v_n\| \overset{(1.7)}{\leq} \pi_{p,q}(v_m - v_n) < \epsilon$$

para todo $m, n \geq n_0$. Logo, $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X;Y)$ e, portanto, convergente. Digamos que, $v \in \mathcal{L}(X;Y)$ é o limite dessa sequência. Vamos mostrar que v é (p,q)-somante. Defina o seguinte operador:

$$\begin{aligned}\hat{v} : \ell_{q,w}(X) &\to \ell_{p,w}(Y) \\ (x_k)_{k=1}^{\infty} &\mapsto (v(x_k))_{k=1}^{\infty}\end{aligned}$$

Observe que $\hat{v}$ está bem definido, pois, dados $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$ e $\varphi \in Y^*$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(v(x_k))|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi \circ v(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi \circ v(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,\end{aligned}$$

já que, $\varphi \circ v \in X^*$. Logo, $(v(x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(Y)$. Como, $v_n \in \Pi_{p,q}(X;Y)$, para todo n natural existe um operador induzido,

$$\begin{aligned}\widehat{v_n} : \ell_{q,w}(X) &\to \ell_p(Y) \\ (x_k)_{k=1}^{\infty} &\mapsto (v_n(x_k))_{k=1}^{\infty},\end{aligned}$$

linear e limitado.

Como $\|\widehat{v_n}\| = \pi_{p,q}(v_n)$ a sequência $(\widehat{v_n})_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(\ell_{q,w}(X);\ell_p(Y))$ que é um espaço de Banach, pois $\ell_p(Y)$ é completo. Sendo assim, $(\widehat{v_n})_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $u \in \mathcal{L}(\ell_{q,w}(X);\ell_p(Y))$. Daí, dados $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$ e $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|\widehat{v_n}((x_k)_{k=1}^{\infty}) - u((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_p < \epsilon$$

para todo $n \geq n_1$. Agora, seja $(y_k)_{k=1}^{\infty} = u((x_k)_{k=1}^{\infty}) \in \ell_p(Y)$ então,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|v_n(x_k) - y_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(v_n(x_k))_{k=1}^{\infty} - (y_k)_{k=1}^{\infty}\|_p < \epsilon$$

para todo $n \geq n_1$. Portanto, para todo k natural, temos

$$\|v_n(x_k) - y_k\| < \epsilon$$

para todo $n \geq n_1$. Como v_n converge para v em $\mathcal{L}(X;Y)$, segue que, dado $\epsilon > 0$ existe n_2 natural tal que

$$\|v_n(x_k) - v(x_k)\| < \epsilon$$

para todo $n \geq n_2$ e k natural. Tomando o máximo entre n_1 e n_2, obtemos que $v(x_k) = y_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. E assim, $(v(x_k))_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$, consequentemente, $\hat{v}((x_k)_{k=1}^{\infty}) = (v(x_k))_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty} = u((x_k)_{k=1}^{\infty})$, para todo $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$, daí $\hat{v} = u$. Portanto, v é (p, q)-somante. ∎

1.2 Teoremas de Extrapolação para operadores lineares absolutamente somantes

Nesta seção apresentaremos os teoremas do tipo Extrapolação devido a Maurey [18] e Pisier [26], e um resultado que surgiu a partir da combinação desses dois teoremas.

Teorema 1.2.1 *(Ver [10, Exemplo 2.9 (b)]). Seja μ uma medida regular positiva de Borel sobre espaço compacto e de Hausdorff K. O operador canônico,*

$$\begin{aligned} J_{\mu,p} : C(K) &\to L_p(\mu) \\ f &\mapsto [f] \end{aligned}$$

é p-somante, e $\pi_p(J_{\mu,p}) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

Demonstração. Suponha que a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é fracamente p-somante em $C(K)$. Então, $(\varphi(f_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$, para todo $\varphi \in C(K)^*$. Seja,

$$\begin{aligned} \varphi_t : C(K) &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

para cada $t \in K$. Note que, φ_t é linear, pois

$$\varphi_t(f + \alpha \cdot g) = (f + \alpha \cdot g)(t) = f(t) + \alpha \cdot g(t) = \varphi_t(f) + \alpha \cdot \varphi_t(g)$$

para cada $f, g \in C(K)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Observe também que,

$$|\varphi_t(f)| = |f(t)| \leq \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

Como K é compacto e f é contínua temos que $f(K) \subset \mathbb{R}$ é compacto e, assim, $\sup_{t \in K} |f(t)|$ está bem definido. Logo φ_t é limitado, daí $\varphi_t \in C(K)^*$ para cada $t \in K$. Então, $(\varphi_t(f_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ e, portanto, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|^p$ converge para cada $t \in K$. Consequente, a função $g(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\cdot)|^p$ é contínua em K. Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \|J_{\mu,p}(f_n)\|_{L_p(\mu)}^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_K |f_n(t)|^p d\mu(t) \\
&= \lim_j \sum_{n=1}^{j} \int_K |f_n(t)|^p d\mu(t) \\
&= \lim_j \int_K \sum_{n=1}^{j} |f_n(t)|^p d\mu(t) \\
&= \int_K |g(t)| d\mu(t) < \infty,
\end{aligned}$$

pois $g \in C(K)$. Assim, $(J_{\mu,p}(f_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(L_p(\mu))$, logo $J_{\mu,p}$ é p-somante. Agora, lembre que

$$\|(f_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w} = \sup_{\varphi \in B_{C(K)^*}} \|(\varphi(f_n))_{n=1}^{\infty}\|_p.$$

Como $\varphi_t \in B_{C(K)^*}$, para cada $t \in K$, temos que

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |f_k(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{m} |\varphi_t(f_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(\varphi_t(f_k))_{k=1}^{m}\|_p \leq \|(f_k)_{k=1}^{m}\|_{p,w}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \|J_{\mu,p}(f_k)\|_p^p &= \sum_{k=1}^{m} \int_K |f_k(t)|^p d\mu(t) \\
&= \int_K \sum_{k=1}^{m} |f_k(t)|^p d\mu(t) \\
&\leq (\|(f_k)_{k=1}^{m}\|_{p,w})^p \int_K d\mu(t) \\
&= \mu(K) \left(\|(f_k)_{k=1}^{m}\|_{p,w}\right)^p.
\end{aligned}$$

Assim, $\pi_p(J_{\mu,p}) \leq (\mu(K))^{\frac{1}{p}}$. Além disso, $(\mu(K))^{\frac{1}{p}} \leq \|J_{\mu,p}\| \leq \pi_p(J_{\mu,p})$. Com efeito, como $J_{\mu,p}$ é p-somante temos que $\pi_p(J_{\mu,p}) \geq \|J_{\mu,p}\|$. Agora considerando a função constante $f \equiv 1$ que pertence a $C(K)$, segue que

$$\|J_{\mu,p}\| \geq \|J_{\mu,p}(f)\|_{L_p(\mu)} = (\mu(K))^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto, $\pi_p(J_{\mu,p}) = (\mu(K))^{\frac{1}{p}}$. ■

O teorema a seguir é um dos pilares da teoria linear dos operadores absolutamente somantes e é de fundamental importância na demonstração do Teorema de Extrapolação de Maurey.

Teorema 1.2.2 *(Teorema da Dominação de Pietsch). Suponha que $1 \leq p < \infty$, $u : X \to Y$ um operador linear e limitado entre espaços de Banach e $K \subset B_{X^*}$ um compacto na topologia fraca estrela. Então u é p-somante se, e somente se, existem uma constante C e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em K tal que para cada $x \in X$*

$$\|ux\| \leq C \cdot \left(\int_K |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.9}$$

Além disso, $\pi_p(u)$ é a menor de todas as constantes C que satisfaz (1.9).

Demonstração. Ver [10, Teorema 2.12]. ■

Como consequência imediata do Teorema da Dominação de Pietsch, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.2.3 *(Teorema de Inclusão) Se $1 \leq r \leq p < \infty$, então $\Pi_r(X;Y) \subset \Pi_p(X;Y)$. Além disso, para $u \in \Pi_r(X;Y)$ temos que $\pi_p(u) \leq \pi_r(u)$.*

Definição 1.2.4 *(Ver [10, p. 60]). Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\lambda > 1$. O espaço de Banach X é dito ser um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ se cada subespaço de dimensão finita E de X está contido em um subespaço de dimensão finita F de X, para o qual existe um isomorfismo $v : F \to \ell_p^{dimF}$, com $\|v\| \, \|v^{-1}\| < \lambda$.*

Teorema 1.2.5 *Se (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida qualquer e $1 \leq p \leq \infty$, então $L_p(\mu)$ é um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ para cada $\lambda > 1$.*

Demonstração. Ver [10, Teorema 3.2]. ■

Proposição 1.2.6 *Sejam $1 < r < p < \infty$ e X um espaço de Banach, então $\Pi_p(X;\ell_p) = \Pi_r(X;\ell_p)$ se, e somente se, existe $c > 0$ tal que $\pi_r(v) \leq c \cdot \pi_p(v)$ para todo $v \in \Pi_p(X;\ell_p)$.*

Demonstração. Do Corolário 1.2.3 sabemos que a inclusão $i : \Pi_r(X;\ell_p) \hookrightarrow \Pi_p(X;\ell_p)$ é linear, contínua e injetiva. Se $\Pi_p(X;\ell_p) = \Pi_r(X;\ell_p)$, temos que i também é sobrejetiva. Assim, pelo Teorema da Aplicação Aberta, a inversa da inclusão é contínua. Portanto, existe $c > 0$ tal que $\pi_r(v) = \pi_r(i^{-1}(v)) \leq c \cdot \pi_p(v)$ para todo $v \in \Pi_p(X;\ell_p)$.

Reciprocamente, seja $v \in \Pi_p(X;\ell_p)$, como

$$\pi_r(v) \leq c \cdot \pi_p(v) \text{ para todo } v \in \Pi_p(X;\ell_p).$$

Temos que, $\pi_r(v) < \infty$. Portanto, $v \in \Pi_r(X;\ell_p)$. A outra inclusão segue do Teorema de Inclusão. ■

Observação 1.2.7 *Por (1.1), temos que os operadores p-somantes são determinados por um número finitos de elementos de X, então na proposição acima podemos trocar ℓ_p por ℓ_p^n para todo n natural, ou seja, vale a Proposição 1.2.6 com ℓ_p^n, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Proposição 1.2.8 *Sejam $1 < r < p < \infty$, X um espaço de Banach e μ uma medida. Suponha que $\Pi_p(X;\ell_p^m) = \Pi_r(X;\ell_p^m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Então $\Pi_p(X;L_p(\mu)) = \Pi_r(X;L_p(\mu))$ se, e somente se, existe $c > 0$ tal que $\pi_r(v) \leq c \cdot \pi_p(v)$ para todo $v \in \Pi_p(X;L_p(\mu))$.*

Demonstração. Seja $v \in \Pi_p(X, L_p(\mu)) = \Pi_r(X, L_p(\mu))$. Dados $x_1, \ldots, x_n \in X$, considere $E = span\{x_1, \ldots, x_n\}$ o subespaço gerado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Como $L_p(\mu)$ é um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, $\{v(x_1), \ldots, v(x_n)\}$ (consequentemente o gerado por ele) está contido em um subespaço de dimensão finita F de $L_p(\mu)$ para o qual podemos encontrar um isomorfismo $T : F \longrightarrow \ell_p^m$, onde $m = \dim F$, com $\|T^{-1}\| \cdot \|T\| < \lambda$ e $\lambda > 1$. Sejam p o operador projeção e v_0 a restrição de v, como v é p-somante então v_0 é p-somante, e assim $T \circ p \circ v_0 \in \Pi_p(E, \ell_p^m) = \Pi_r(E, \ell_p^m)$

. Então, pela observação anterior,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}\|v(x_i)\|^r\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\|T^{-1}\circ T\circ p\circ v_0(x_i)\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \|T^{-1}\|\left(\sum_{i=1}^{n}\|T\circ p\circ v_0(x_i)\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \|T^{-1}\|\cdot\pi_r(T\circ p\circ v_0)\cdot\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\varphi(x_i)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \|T^{-1}\|\cdot c\cdot\pi_p(T\circ p\circ v_0)\cdot\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\varphi(x_i)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \|T^{-1}\|\|T\|\cdot c\cdot\pi_p(v_0)\cdot\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\varphi(x_i)|^r\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\pi_r(v)\leq\lambda\cdot c\cdot\pi_p(v)$ para cada $\lambda>1$. Logo, $\pi_r(v)\leq c\cdot\pi_p(v)$. A prova da recíproca é imediata. A hipótese nos diz que $\Pi_p(X;L_p(\mu))\subseteq\Pi_r(X;L_p(\mu))$ e, por outro lado, sempre temos que $\Pi_r(X;L_p(\mu))\subseteq\Pi_p(X;L_p(\mu))$. E assim, obtemos a igualdade desejada. ■

Proposição 1.2.9 *Sejam $1<r<p<\infty$, X um espaço de Banach, μ uma medida e $m\in\mathbb{N}$. Então $\Pi_p(X;\ell_p^m)=\Pi_r(X;\ell_p^m)$ se, e somente se, $\Pi_p(X;L_p(\mu))=\Pi_r(X;L_p(\mu))$.*

Demonstração. Seja $v\in\Pi_p(X;L_p(\mu))$. Usando a hipótese de que $\Pi_p(X;\ell_p^m)=\Pi_r(X;\ell_p^m)$ e os mesmos argumentos da proposição anterior é possível mostrar que $v\in\Pi_r(X;L_p(\mu))$. Logo, $\Pi_p(X;L_p(\mu))\subset\Pi_r(X;L_p(\mu))$. Como a outra inclusão é sempre válida, temos a igualdade.

Reciprocamente, basta considerar μ como sendo a medida de contagem sobre o conjunto $\{1,\ldots,m\}$. ■

Observação 1.2.10 *As três proposições anteriores nos informam que, se X é um espaço de Banach, $m\in\mathbb{N}$ e μ uma medida, então para $1<r<p<\infty$ as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\Pi_p(X; \ell_p) = \Pi_r(X; \ell_p)$;

(ii) $\Pi_p(X; \ell_p^m) = \Pi_r(X; \ell_p^m)$;

(iii) $\Pi_p(X; L_p(\mu)) = \Pi_r(X; L_p(\mu))$.

Observação 1.2.11 *Seja X um espaço de Banach. Então existe uma imersão natural de $X \hookrightarrow C(B_{X^*})$. Com efeito, seja*

$$\begin{array}{rccccc} T: & X & \to & C(B_{X^*}) & & \\ & x & \mapsto & Tx: & B_{X^*} \to & \mathbb{R} \\ & & & & f \mapsto & f(x) \end{array}$$

Note que T é linear, pois dado $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$T(x + \alpha \cdot y)(f) = f(x + \alpha \cdot y) = f(x) + \alpha f(y) = Tx(f) + \alpha Ty(f) = (Tx + \alpha Ty)(f).$$

Para toda $f \in B_{X^*}$. Então,

$$T(x + \alpha \cdot y) = T(x) + \alpha T(y).$$

Além disso, T é uma isometria,

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)| = \sup_{f \in B_{X^*}} |Tx(f)| = \|Tx\|. \tag{1.10}$$

A seguir demonstraremos a versão de Maurey do Teorema de Extrapolação para operadores lineares absolutamente somantes:

Teorema 1.2.12 *(Ver [18] ou [10, Teorema 3.17]). Sejam $1 < r < p < \infty$ e X um espaço de Banach tal que*

$$\Pi_p(X; \ell_p) = \Pi_r(X; \ell_p).$$

Então, para cada espaço de Banach Y,

$$\Pi_p(X; Y) = \Pi_1(X; Y).$$

Demonstração. Pelas observações anteriores podemos trocar o conjunto ℓ_p por $L_p(\mu)$, e além disso, para provarmos que

$$\Pi_p(X;Y) = \Pi_1(X;Y)$$

basta provar que existe $c > 0$ tal que, para todo $u \in \Pi_p(X;Y)$,

$$\pi_1(u) \leq c \cdot \pi_p(u).$$

Sendo assim, considere $K := B_{X^*}$, o qual é um espaço compacto de Hausdorff na topologia fraca estrela de X^*, e $\mathcal{P}(B_{X^*})$ a coleção de todas as medidas regulares de probabilidade de Borel em B_{X^*}.

Como temos uma imersão isométrica natural $X \hookrightarrow C(B_{X^*})$, cada $\mu \in \mathcal{P}(B_{X^*})$ dá origem a um operador

$$j_{\mu,p} = J_{\mu,p} \circ T : X \to L_p(\mu)$$

donde $J_{\mu,p}$ é o operador canônico de $C(B_{X^*}) \to L_p(\mu)$ e T é a imersão da Observação 1.2.11. Então para cada $x \in X$ temos

$$j_{\mu,p}(x) = J_{\mu,p}(T(x)) = [T(x)]$$

e

$$\begin{aligned}
\|j_{\mu,p}(x)\|_{L_p(\mu)} &= \|[T(x)]\|_{L_p(\mu)} \\
&= \left(\int_{B_{X^*}} |T(x)(\varphi)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Além disso, como $r < p$ tem-se que $L_p(\mu) \subset L_r(\mu)$ e, assim, pela monotonicidade da norma usual em $L_p(\mu)$, $j_{\mu,p} \in L_r(\mu)$ com

$$\|j_{\mu,p}(x)\|_{L_r(\mu)} = \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^r d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{r}}. \tag{1.11}$$

Por hipótese, temos que $\pi_r(u) \leq c \cdot \pi_p(u)$ para todo $u \in \Pi_p(X; L_p(\mu))$. Como $J_{\mu,p}$ é p-somante e T é linear e limitada, temos que o operador $j_{\mu,p}$ é p-somante. Com efeito, dados $x_1, \ldots, x_n \in X$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} \|j_{\mu,p}(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \|J_{\mu,p} \circ T(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(J_{\mu,p}) \cdot \|T\| \cdot \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(1.10)}{=} \pi_p(J_{\mu,p}) \cdot \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

E assim,

$$\pi_r(j_{\mu,p}) \leq c \cdot \pi_p(j_{\mu,p}) \leq c \cdot \pi_p(J_{\mu,p}) = c \cdot (\mu(B_{X^*}))^{\frac{1}{p}} = c. \tag{1.12}$$

Como $\Pi_p(X; L_p(\mu)) = \Pi_r(X; L_p(\mu))$ então $j_{\mu,p}$ é também r-somante. Além disso, podemos usar o Teorema da Dominação de Pietsch para produzir uma medida $\hat{\mu} \in \mathcal{P}(B_{X^*})$ tal que

$$\begin{aligned}
\|j_{\mu,p}(x)\|_{L_p(\mu)} &\leq \pi_r(j_{\mu,p}) \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^r d\hat{\mu}(\varphi)\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\overset{(1.12) \text{ e } (1.11)}{\leq} c \cdot \|j_{\hat{\mu},p}(x)\|_{L_r(\hat{\mu})} \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Seja $u : X \to Y$ um operador p-somante, onde Y é um espaço de Banach qualquer. O Teorema da Dominação de Pietsch fornece-nos uma medida $\mu_0 \in \mathcal{P}(B_{X^*})$ tal que

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \cdot \|j_{\mu_0,p}(x)\|_{L_p(\mu_0)} \tag{1.14}$$

para todo $x \in X$. Vamos construir uma medida $\lambda \in \mathcal{P}(B_{X^*})$ e uma constante $C > 0$ tal que

$$\|j_{\mu_0,p}(x)\|_{L_p(\mu_0)} \leq C \cdot \|j_{\lambda,p}(x)\|_{L_1(\lambda)} \tag{1.15}$$

para todo $x \in X$.

Para cada $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ seja $\hat{\mu}_n$ construída como em (1.13). Começando por μ_0 defina uma sequência $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ em $\mathcal{P}(B_{X^*})$, onde $\mu_{n+1} = \hat{\mu}_n$ para $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Defina também $\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\mu_n$ pertencente a $\mathcal{P}(B_{X^*})$. Desde que $1 < r < p$, podemos encontrar $0 < \theta < 1$ com $\frac{1}{r} = \theta + \frac{(1-\theta)}{p}$ então,

$$1 = r\theta + \frac{r(1-\theta)}{p} = \frac{1}{\frac{1}{r\theta}} + \frac{1}{\frac{p}{r(1-\theta)}}.$$

Observe que $r = r\theta + (1-\theta)r$, assim

$$\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_r(\mu_n)}^r = \int_{B_{X^*}} |T(x)\varphi|^r d\mu_n(\varphi) = \int_{B_{X^*}} |T(x)\varphi|^{r\theta} \cdot |T(x)\varphi|^{(1-\theta)r} d\mu_n(\varphi).$$

Aplicando Hölder nos conjugados $\frac{1}{r\theta}$ e $\frac{p}{r(1-\theta)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{X^*}} |T(x)\varphi|^r d\mu_n(\varphi) &\leq \left(\int_{B_{X^*}} (|T(x)\varphi|^{r\theta})^{\frac{1}{r\theta}} d\mu_n(\varphi)\right)^{r\theta} \\
&\quad \times \left(\int_{B_{X^*}} (|T(x)\varphi|^{(1-\theta)r})^{\frac{p}{(1-\theta)r}} d\mu_n(\varphi)\right)^{\frac{r(1-\theta)}{p}} \\
&= \left(\int_{B_{X^*}} |T(x)\varphi| d\mu_n(\varphi)\right)^{r\theta} \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |T(x)\varphi|^p d\mu_n(\varphi)\right)^{\frac{r(1-\theta)}{p}} \\
&= \|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_1(\mu_n)}^{r\theta} \cdot \|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)}^{r(1-\theta)}
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_r(\mu_n)} \leq \|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_1(\mu_n)}^{\theta} \cdot \|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)}^{(1-\theta)}. \tag{1.16}$$

Por (1.13) e pela definição da sequência μ_n, obtemos que

$$\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)} \leq c \cdot \|j_{\hat{\mu}_n,p}(x)\|_{L_r(\hat{\mu}_n)} = c \cdot \|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_r(\mu_{n+1})}.$$

E assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)} \leq c\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_r(\mu_{n+1})}.$$

Por (1.16) e aplicado Hölder nos conjugados $\frac{1}{\theta}$ e $\frac{1}{1-\theta}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)} &\leq c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|^{\theta}_{L_1(\mu_{n+1})} \cdot \|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|^{1-\theta}_{L_p(\mu_{n+1})} \\
&= c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1})^{\theta}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|^{\theta}_{L_1(\mu_{n+1})}(2^{-n-1})^{1-\theta}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|^{1-\theta}_{L_p(\mu_{n+1})} \\
&\leq c \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_1(\mu_{n+1})}\right)^{\theta} \\
&\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_p(\mu_{n+1})}\right)^{1-\theta}. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

Acrescentado o termo positivo $\|j_{\mu_0,p}(x)\|_{L_p(\mu_0)}$ em $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_p(\mu_{n+1})}$, na desigualdade (1.17) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)} &\leq c\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_1(\mu_{n+1})}\right)^{\theta} \\
&\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_p(\mu_{n+1})} + \|j_{\mu_0,p}(x)\|_{L_p(\mu_0)}\right)^{1-\theta} \\
&= c\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_1(\mu_{n+1})}\right)^{\theta} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)}\right)^{1-\theta} \\
&= c\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_1(\mu_{n+1})}\right)^{\theta} \cdot 2^{1-\theta}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)}\right)^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

Por (1.14)

$$\|j_{\mu_0,p}(x)\|_{L_p(\mu_0)} \geq \frac{\|u(x)\|}{\pi_p(u)} \tag{1.18}$$

para todo $x \in X$, daí, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)} > 0$ e podemos multiplicar a desigualdade acima por $\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)}\right)^{\theta-1}$ e, assim,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)}\right)^{\theta} \leq c \cdot 2^{(1-\theta)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_1(\mu_{n+1})}\right)^{\theta}.$$

Elevando a $\frac{1}{\theta}$ em ambos os lados,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)} \leq c^{\frac{1}{\theta}} 2^{\frac{(1-\theta)}{\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_{n+1},p}(x)\|_{L_1(\mu_{n+1})}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_p(\mu_n)} &\leq c^{\frac{1}{\theta}} 2^{\frac{(1-\theta)}{\theta}} \cdot 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_1(\mu_n)} \\ &= (2c)^{\frac{1}{\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_1(\mu_n)}.\end{aligned}$$

E assim,

$$\frac{1}{2}\|j_{\mu_0,p}(x)\|_{L_p(\mu_0)} \leq (2c)^{\frac{1}{\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_1(\mu_n)}.$$

Como, $\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\mu_n$, temos que

$$(2c)^{\frac{1}{\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\|j_{\mu_n,p}(x)\|_{L_1(\mu_n)} = (2c)^{\frac{1}{\theta}} \cdot \|j_{\lambda,p}(x)\|_{L_1(\lambda)}.$$

Assim,

$$\|j_{\mu_0,p}(x)\|_{L_p(\mu_0)} \leq 2 \cdot (2c)^{\frac{1}{\theta}} \cdot \|j_{\lambda,p}(x)\|_{L_1(\lambda)}.$$

Logo, conseguimos provar (1.15) com $C = 2 \cdot (2c)^{\frac{1}{\theta}}$. Para concluir a demonstração basta observar que

$$\|ux\| \overset{(1.14)}{\leq} \pi_p(u) \cdot \|j_{\mu_0,p}(x)\|_{L_p(\mu_0)} \leq C \cdot \pi_p(u) \cdot \|j_{\lambda,p}(x)\|_{L_1(\lambda)}.$$

Portanto, pelo Teorema da Dominação de Pietsch, temos

$$\pi_1(u) \leq C \cdot \pi_p(u)$$

para todo $u \in \Pi_p(X;Y)$. ∎

Agora veremos um teorema de Extrapolação devido a Pisier:

Teorema 1.2.13 *(Ver [18, Colorário 91] e [26, Teorema 5.13]). Sejam $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. Se*

$$\Pi_p(X;Y) = \Pi_r(X;Y)$$

para todo espaço de Banach Y e algum $0 < r < p$, então

$$\Pi_p(X;Y) = \Pi_l(X;Y)$$

para todo espaço de Banach Y e todo $0 < l < p$.

Omitiremos a demonstração desse teorema porque no Capítulo 2, mais especificamente o Teorema 2.2.2, será demonstrada uma versão generalizado do mesmo. E para reforçar sua importância, daremos uma aplicação concreta desse resultado. Se X tem cotipo 2, então

$$\Pi_2(X;Y) = \Pi_p(X;Y)$$

para todo espaço de Banach Y e $1 \leq p < 2$ (ver [10, Corolário 11.16]). Combinando esse resultado com o Teorema 1.2.13, obtemos

$$\Pi_2(X;Y) = \Pi_p(X;Y)$$

para todo espaço de Banach Y e $0 < p < 2$. Agora, usando o fato de que ℓ_1 tem cotipo 2 tem-se

$$\Pi_p(\ell_1; \ell_2) = \mathcal{L}(\ell_1; \ell_2)$$

para cada $0 < p < \infty$. Esse resultado é uma extensão do Teorema de Grothendieck.

Combinando os teoremas de Maurey e Pisier obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.14 *Sejam $1 < r < p < \infty$ e X um espaço de Banach. Se*

$$\Pi_p(X; \ell_p) = \Pi_r(X; \ell_p),$$

então

$$\Pi_p(X; Y) = \Pi_l(X; Y)$$

para todo espaço de Banach Y e cada $0 < l < p$.

Demonstração. Por hipótese podemos usar o Teorema 1.2.12 para obter $\Pi_p(X; Y) = \Pi_1(X; Y)$ para todo espaço de Banach Y. Agora podemos aplicar o Teorema 1.2.13 para $r = 1$ e, assim obtemos o resultado desejado. ■

O Teorema 1.2.14 é claramente um melhoramento dos Teoremas 1.2.12 e 1.2.13. Note que, apesar de possuir a mesma hipótese do Teorema 1.2.12, ele estende seu resultado para o intervalo $0 < p < 1$. E, além disso, ele melhora a hipótese do Teorema 1.2.13.

Veremos a seguir um resultado para operadores lineares absolutamente somantes, que nos será útil posteriormente. Ele dá condições necessária e suficiente para que ocorra a coincidência do tipo $\Pi_p(X; Y) = \Pi_r(X; Y)$ para todo espaço de Banach Y e $0 < r < p$.

Lema 1.2.15 *(Ver [6, Lema 3.4]). Sejam $1 \leq p < \infty$, $0 < r < p$ e X um espaço de Banach. Os seguintes itens são equivalentes:*

(i) $\Pi_p(X; Y) = \Pi_r(X; Y)$ *para todo espaço de Banach Y;*

(ii) Existe uma constante $C > 0$, de modo que, para cada medida $\mu \in \mathcal{P}(B_{X^*})$ existe uma medida $\mu_1 \in \mathcal{P}(B_{X^*})$ tal que

$$\left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^r d\mu_1(\varphi) \right)^{\frac{1}{r}} \tag{1.19}$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Sabemos que, para cada espaço de Banach Y, o operador inclusão $I : \Pi_r(X;Y) \to \Pi_p(X;Y)$ é linear, contínua e injetiva. Por (i) $\Pi_p(X;Y) = \Pi_r(X;Y)$, assim I também é sobrejetiva, e pela Proposição 1.1.17 temos que $\Pi_p(X;Y)$ e $\Pi_r(X;Y)$ são espaços de Banach. Desse modo, pelo Teorema da Aplicação Aberta, a inversa da inclusão é contínua. Assim, existe $C > 0$ tal que $\pi_r(v) = \pi_r(I^{-1}(v)) \leq C \cdot \pi_p(v)$ para todo $v \in \Pi_p(X;Y) = \Pi_r(X;Y)$. Dada uma medida μ, da Demonstração do Teorema 1.2.12 sabemos que $j_{\mu,p} = J_\mu \circ T$ é p-somante para cada $\mu \in \mathcal{P}(B_{X^*})$, segue da hipótese que

$$\pi_r(j_{\mu,p}) \leq C \cdot \pi_p(j_{\mu,p}) \overset{(1.12)}{\leq} C. \tag{1.20}$$

Pelo Teorema da Dominação de Pietsch, existe uma medida μ_1 tal que para cada $x \in X$

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{B_{X^*}} |T(x)\varphi|^p d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|j_{\mu,p}(x)\|_{L_p(\mu)} \\
&\overset{(1.9)}{\leq} \pi_r(j_{\mu,p}) \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^r d\mu_1(\varphi)\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\overset{(1.20)}{\leq} C \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^r d\mu_1(\varphi)\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

A recíproca segue de imediato pelo Teorema da Dominação de Pietsch. ■

Observação 1.2.16 *Observe que o Lema 1.2.15 ainda é válido se substituirmos $0 < r < p$ e $\Pi_p(X;Y) = \Pi_r(X;Y)$ para todo espaço de Banach Y por $1 < r < p$ e $\Pi_p(X;\ell_p) = \Pi_r(X;\ell_p)$ (ver [10, p.71]).*

Capítulo 2

Versões gerais dos teoremas do tipo Extrapolação

É natural nos questionarmos se os teoremas do tipo Extrapolação são mantidos nas generalizações dos operadores lineares absolutamente somantes. O nosso principal interesse nesse capítulo é apresentar uma abordagem abstrata do Teorema de Extrapolação 1.2.14 com o intuito de unificar todos os teoremas do tipo Extrapolação.

2.1 Ambiente Abstrato

Nesta seção vamos resgatar o ambiente abstrato presente em [23].

Sejam n, s, t números naturais, X_i, Y e E_k conjuntos arbitrários não-vazios, com $i = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, s$, $\mathcal{H}$ uma família não-vazia de aplicações de $X_1 \times \cdots \times X_n$ em Y, G_j espaços de Banach, K_j espaços topológicos compactos de Hausdorff,

$$R_j : K_j \times E_1 \times \cdots \times E_s \times G_j \to [0, \infty) \text{ e } S_Y : \mathcal{H} \times E_1 \times \cdots \times E_s \times G_1 \times \cdots \times G_t \to [0, \infty)$$

aplicações arbitrárias, com $j = 1, \ldots, t$.

Definição 2.1.1 *Sejam $0 < p_1, \ldots, p_t, q < \infty$ de modo que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_t}$. Uma aplicação*

*$f \in \mathcal{H}$ é $R_1, \ldots, R_t$-S-**abstrata** $(p_1, \ldots, p_t)$-**somante**, se existe $C \geq 0$ tal que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} S_Y\left(f, x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(s)}, b_i^{(1)}, \ldots, b_i^{(t)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \cdot \prod_{j=1}^{t} \sup_{\varphi \in K_j} \left(\sum_{i=1}^{m} R_j\left(\varphi, x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(s)}, b_i^{(j)}\right)^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}},$$

para todo $x_1^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)} \in E_k$ e $b_1^{(j)}, \ldots, b_m^{(j)} \in G_j$, $m \in \mathbb{N}$ e $(k, j) \in \{1, \ldots, s\} \times \{1, \ldots, t\}$.

Observação 2.1.2 *(i) Como S_Y depende de $\mathcal{H}$ deveríamos escrever $S_{X_1,\ldots,X_n,Y}$. Porém, $X_1, \ldots, X_n$ serão fixados e, assim, escreveremos simplesmente S_Y.*

(ii) Se tomarmos $n = s = t = 1$ a definição acima equivale a presente em [22] que veremos na Seção 3.4.

Notação 2.1.3 *(a) Denotaremos por $\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,(p_1,\ldots,p_t)}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ o conjunto de todos as aplicações $R_1, \ldots, R_t$-S-abstrata $(p_1, \ldots, p_t)$-somante. Quando $p_1 = \ldots = p_t = p$ escreveremos apenas $\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,p}(X_1, \ldots, X_n; Y)$;*

(b) Indicaremos por $\mathcal{P}(K_j)$ a coleção de todas as medidas regulares de probabilidade de Borel em K_j, $j = 1, \ldots, t$.

A seguir, veremos duas hipótese da versão geral do Teorema da Dominação de Pietsch:

(1) R_j é tal que a aplicação

$$(R_j)_{x^{(1)},\ldots,x^{(s)},b^{(j)}} : K_j \to [0, \infty)$$

definida por

$$(R_j)_{x^{(1)},\ldots,x^{(s)},b^{(j)}}(\varphi) = R_j\left(\varphi, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)$$

é contínua para todo $x^{(k)} \in E_k$ e $b^{(j)} \in G_j$ com $(k, j) \in \{1, \ldots, s\} \times \{1, \ldots, t\}$.

(2) As seguintes desigualdades se mantêm:

$$\begin{cases} R_j\left(\varphi, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, \eta_j b^{(j)}\right) \leq \eta_j \cdot R_j\left(\varphi, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) \\ S_Y\left(f, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, \alpha_1 b^{(1)}, \ldots, \alpha_t b^{(t)}\right) \geq \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_t \cdot S_Y\left(f, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(t)}\right) \end{cases}$$

para todo $\varphi \in K_j$, $x^{(k)} \in E_k$, $b^{(j)} \in G_j$, $0 \leq \eta_j, \alpha_j \leq 1$, com $(k,j) \in \{1,\ldots,s\} \times \{1,\ldots,t\}$ e $f \in \mathcal{H}$

O teorema a seguir é uma versão abstrata do Teorema da Dominação de Pietsch.

Teorema 2.1.4 *Suponha que as hipótese (1) e (2) acima, são válidas. Uma aplicação $f \in \mathcal{H}$ é $R_1,\ldots,R_t - S$-abstrata $(p_1,\ldots,p_t)$-somante se, e somente se, existe $C \geq 0$ e uma medida $\mu^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$, $j = 1,\ldots,t$, de modo que para todo $x^{(k)} \in E_k$ e $b^{(j)} \in G_j$ com $(k,j) \in \{1,\ldots,s\} \times \{1,\ldots,t\}$,*

$$S_Y\left(f, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(1)},\ldots,b^{(t)}\right) \leq C \cdot \prod_{j=1}^{t} \left(\int_{K_j} R\left(\varphi, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)^{p_j} d\mu^{(j)}(\varphi) \right)^{\frac{1}{p_j}}. \quad (2.1)$$

Corolário 2.1.5 *Sejam $0 < p_1,\ldots,p_t, q < \infty$ e $0 < r_1,\ldots,r_t, r < \infty$ tais que*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_t},\ \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_t}\ \text{e}\ r_i < p_i,\ i = 1,\ldots\ t.$$

Então

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,(r_1,\ldots,r_t)}(X_1,\ldots,X_n;Y) \subset \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,(p_1,\ldots,p_t)}(X_1,\ldots,X_n;Y).$$

2.2 Versões gerais dos Teoremas de Extrapolação 1.2.13 e 1.2.14

Na presente seção iremos demonstrar a versão generalizada do Teorema de Extrapolação 1.2.14 e, para isso, iremos usar o ambiente abstrata da seção anterior.

Antes vamos demonstrar dois resultados cruciais para essa tarefa. E, para isso, precisaremos da seguinte condição:

(D_1) Seja $1 < r < p < \infty$. Se, para cada espaço de Banach Y tem-se

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,p}(X_1,\ldots,X_n;Y) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,r}(X_1,\ldots,X_n;Y)$$

então para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$ existe uma constante $C_j > 0$ de modo que, para cada medida $\lambda^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ existe uma medida $\lambda_1^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ tal que

$$\left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\lambda^{(j)}\right)} \leq C_j \cdot \left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_r\left(K_j,\lambda_1^{(j)}\right)}$$

para todo $\left(x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right) \in E_1 \times \ldots \times E_s \times G_j$.

No primeiro resultado veremos que a recíproca da hipótese (D_1) é sempre válida.

Lema 2.2.1 *Seja $0 < r_j \leq p_j < \infty$, $j = 1,\ldots,t$. Suponha que para cada j existe uma constante $C_j > 0$ de modo que, para cada medida $\lambda^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ existe uma medida $\lambda_1^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ tal que*

$$\left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_{p_j}\left(K_j,\lambda^{(j)}\right)} \leq C_j \cdot \left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_{r_j}\left(K_j,\lambda_1^{(j)}\right)}$$

para todo $\left(x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right) \in E_1 \times \ldots \times E_s \times G_j$, então

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,(r_1,\ldots,r_t)}(X_1,\ldots,X_n;Y) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,(p_1,\ldots,p_t)}(X_1,\ldots,X_n;Y).$$

para cada espaço de Banach Y.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,(p_1,\ldots,p_t)}(X_1,\ldots,X_n;Y)$. Pelo Teorema 2.1.4 existe $C \geq 0$ e uma medida $\lambda^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ com $j = 1,\ldots,t$, de modo que para todo $x^{(k)} \in E_k$ e $b^{(j)} \in G_j$ com $(k,j) \in \{1,\ldots,s\} \times \{1,\ldots,t\}$,

$$\begin{aligned} S_Y\left(f, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(1)},\ldots,b^{(t)}\right) &\leq C \cdot \prod_{j=1}^{t} \left(\int_{K_j} R_j\left(\varphi, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)^{p_j} d\lambda^{(j)}(\varphi) \right)^{\frac{1}{p_j}} \\ &= C \cdot \prod_{j=1}^{t} \left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right) \right\|_{L_{p_j}\left(K_j,\lambda^{(j)}\right)} \\ &\leq C \cdot \prod_{j=1}^{t} C_j \left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right) \right\|_{L_{r_j}\left(K_j,\lambda_1^{(j)}\right)} \\ &= L \cdot \prod_{j=1}^{t} \left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right) \right\|_{L_{r_j}\left(K_j,\lambda_1^{(j)}\right)} \end{aligned}$$

onde $L = C \cdot \prod_{j=1}^{t} C_j$. Portanto, pelo Teorema 2.1.4, $f \in \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,(r_1,\ldots,r_t)}(X_1,\ldots,X_n;Y)$. A outra inclusão segue de imediato pelo Teorema 2.1.4 e a monotonicidade da norma dos espaços $L_p(\mu)$. ∎

O segundo resultado é uma generalização não-linear do Teorema 1.2.13.

Teorema 2.2.2 *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Se* (D_1) *é válido e*

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,p}(X_1,\ldots,X_n;Y) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,r}(X_1,\ldots,X_n;Y)$$

para todo espaço de Banach Y *e para algum* $0 < r < p$, *então*

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,p}(X_1,\ldots,X_n;Y) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,l}(X_1,\ldots,X_n;Y)$$

para todo espaço de Banach Y *e* $0 < l < p$.

Demonstração. Por (D_1), para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$ existe uma constante $C_j > 0$ de modo que, para cada medida $\lambda^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ existe uma medida $\lambda_1^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ tal que

$$\left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j, \lambda^{(j)}\right)} \leq C_j \cdot \left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_r\left(K_j, \lambda_1^{(j)}\right)} \tag{2.2}$$

para todo $\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) \in E_1 \times \ldots \times E_s \times G_j$. Pelo Lema 2.2.1, é suficiente mostrar que para cada $l < \min\{1, r\}$ e cada $j \in \{1, \ldots, t\}$, existe uma constante $C_{l,j} > 0$ de modo que para cada medida $\lambda^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ existe uma medida $\mu^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ tal que

$$\left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j, \lambda^{(j)}\right)} \leq C_{l,j} \cdot \left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_l\left(K_j, \mu^{(j)}\right)}$$

para todo $\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) \in E_1 \times \ldots \times E_s \times G_j$.

Observe que se $\left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j, \lambda^{(j)}\right)} = 0$ a desigualdade acima é válida, sendo assim, suponha o contrário. Começando com $\lambda^{(j)} = \lambda_0^{(j)}$ e aplicando consecutivamente (2.2) obtemos uma sequência $\left(\lambda_n^{(j)}\right)_{n=0}^{\infty}$ em $\mathcal{P}(K_j)$ tal que para todo $\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) \in E_1 \times \ldots \times E_s \times G_j$,

$$\left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j, \lambda_n^{(j)}\right)} \leq C_j \cdot \left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_r\left(K_j, \lambda_{n+1}^{(j)}\right)}. \tag{2.3}$$

Desde que $l < r < p$, existe $\theta \in (0,1)$ de modo que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{l} + \frac{1-\theta}{p}$.

Pela Proposição 3, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_r\left(K_j, \lambda_{n+1}^{(j)}\right)} &= \left(\int_{K_j} R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)^r d\lambda_{n+1}^{(j)}(\varphi)\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_{K_j} R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)^l d\lambda_{n+1}^{(j)}(\varphi)\right)^{\frac{\theta}{l}} \\
&\times \left(\int_{K_j} R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)^p d\lambda_{n+1}^{(j)}(\varphi)\right)^{\frac{1-\theta}{p}} \\
&= \left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_l\left(K_j, \lambda_{n+1}^{(j)}\right)}^{\theta} \\
&\times \left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j, \lambda_{n+1}^{(j)}\right)}^{1-\theta}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Usaremos a partir de agora

$$R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) = R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right)$$

para simplificar a notação.

Sendo assim, usando (2.3), (2.4), a desigualdade de Hölder nos conjugados $\frac{1}{\theta}$ e $\frac{1}{1-\theta}$ em $(*)$ e acrescentando os termos $\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_l\left(K_j,\lambda_0^{(j)}\right)}, \left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\lambda_0^{(j)}\right)}$ em $(**)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\lambda_n^{(j)}\right)} &\overset{(2.3)}{\leq} C_j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_r\left(K_j,\lambda_{n+1}^{(j)}\right)} \\
&\overset{(2.4)}{\leq} C_j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|^{\theta}_{L_l\left(K_j,\lambda_{n+1}^{(j)}\right)} \\
&\times \left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|^{1-\theta}_{L_p\left(K_j,\lambda_{n+1}^{(j)}\right)} \\
&= C_j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1})^{\theta}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|^{\theta}_{L_l\left(K_j,\lambda_{n+1}^{(j)}\right)} \\
&\times (2^{-n-1})^{1-\theta}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|^{1-\theta}_{L_p\left(K_j,\lambda_{n+1}^{(j)}\right)} \\
&= C_j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_l\left(K_j,\lambda_{n+1}^{(j)}\right)}\right)^{\theta} \\
&\times \left(2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\lambda_{n+1}^{(j)}\right)}\right)^{1-\theta} \\
&\overset{(*)}{\leq} C_j \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_l\left(K_j,\lambda_{n+1}^{(j)}\right)}\right)^{\theta} \\
&\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\lambda_{n+1}^{(j)}\right)}\right)^{1-\theta} \\
&\overset{(**)}{\leq} C_j \cdot \left(2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_l\left(K_j,\lambda_n^{(j)}\right)}\right)^{\theta} \\
&\times \left(2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\lambda_n^{(j)}\right)}\right)^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right) \right\|_{L_p\left(K_j,\lambda_n^{(j)}\right)} \leq (2C_j)^{\frac{1}{\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right) \right\|_{L_l\left(K_j,\lambda_n^{(j)}\right)}. \quad (2.5)$$

Agora usando o fato que $l<1$ e a Proposição 4 nas aplicações $g_n(\cdot) = 2^{-n-1}R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right) \right\|_{L_l\left(K_j,\lambda_n^{(j)}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \left(\int_{K_j} R_j\left(\varphi,(x),b^{(j)}\right)^l d\lambda_n^{(j)}(\varphi) \right)^{\frac{1}{l}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{K_j} 2^{-l(n+1)} \cdot R_j\left(\varphi,(x),b^{(j)}\right)^l d\lambda_n^{(j)}(\varphi) \right)^{\frac{1}{l}} \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-l(n+1)} \int_{K_j} R_j\left(\varphi,(x),b^{(j)}\right)^l d\lambda_n^{(j)}(\varphi) \right)^{\frac{1}{l}}. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Assim, por (2.5) e (2.6), temos

$$\begin{aligned}
\left\| R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right) \right\|_{L_p\left(K_j,\lambda_0^{(j)}\right)} &\leq 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right) \right\|_{L_p\left(K_j,\lambda_n^{(j)}\right)} \\
&\overset{(2.5)}{\leq} 2 \cdot (2\cdot C_j)^{\frac{1}{\theta}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right) \right\|_{L_l\left(K_j,\lambda_n^{(j)}\right)} \right) \\
&\overset{(2.6)}{\leq} 2 \cdot (2\cdot C_j)^{\frac{1}{\theta}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-l(n+1)} \int_{K_j} R_j\left(\varphi,(x),b^{(j)}\right)^l d\lambda_n^{(j)}(\varphi) \right)^{\frac{1}{l}} \\
&= C'_{l,j} \left\| R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right) \right\|_{L_l\left(K_j,\eta^{(j)}\right)}
\end{aligned}$$

onde $C'_{l,j} = 2\cdot(2\cdot C_j)^{\frac{1}{\theta}}$ e $\eta^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-l(n+1)}\lambda_n^{(j)}$. Considere a medida em $\mathcal{P}(K_j)$,

$$\mu^{(j)} = \frac{\eta^{(j)}}{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-l(n+1)}}$$

Então,

$$\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\lambda_0^{(j)}\right)} \leq C_{l,j}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_l\left(K_j,\mu^{(j)}\right)}$$

onde $C_{l,j}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{-l(n+1)}\right)C'_{l,j}$. ■

Para demonstrar a versão generalizada do Teorema de Extrapolação 1.2.14 precisaremos da seguinte hipótese:

(C_1) Seja $1<r<p<\infty$. Se

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,p}(X_1,\ldots,X_n;\ell_p)=\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,r}(X_1,\ldots,X_n;\ell_p)$$

então para cada $j\in\{1,\ldots,t\}$ existe uma constante $C_j>0$ de modo que, para cada medida $\mu^{(j)}\in\mathcal{P}(K_j)$ existe uma medida correspondente $\hat{\mu}^{(j)}$ em $\mathcal{P}(K_j)$ tal que

$$\left\|R_j\left(\cdot,x^{(1)},\ldots,x^{(s)},b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu^{(j)}\right)} \leq C_j\cdot\left\|R_j\left(\cdot,x^{(1)},\ldots,x^{(s)},b^{(j)}\right)\right\|_{L_r\left(K_j,\hat{\mu}^{(j)}\right)}$$

para todo $\left(x^{(1)},\ldots,x^{(s)},b^{(j)}\right)\in E_1\times\ldots\times E_s\times G_j$.

Observe que a condição (C_1) é uma pequena variação da hipótese (D_1). Na verdade, a condição (C_1) implica a condição (D_1).

Agora estamos aptos a demonstrar o principal resultado deste capítulo, presente em [6]. Aqui nós o chamaremos de Teorema de Extrapolação Generalizado - TEG.

Teorema 2.2.3 *(Teorema de Extrapolação Generalizado - TEG). Seja $1<r<p<\infty$. Se (C_1) é válido e*

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,p}(X_1,\ldots,X_n;\ell_p)=\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,r}(X_1,\ldots,X_n;\ell_p)$$

então,

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,p}(X_1,\ldots,X_n;Y)=\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,l}(X_1,\ldots,X_n;Y)$$

para qualquer espaço de Banach Y e $0 < l < p$.

Demonstração. Iremos mostrar que $\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,p}(X_1,\ldots,X_n;Y) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t\text{-}S,1}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ para qualquer espaço de Banach Y e, em seguida, aplicaremos o Teorema 2.2.2 para $r = 1$.

Pelo Lema 2.2.1, é suficiente provar que, para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$ existe uma constante $C_j > 0$ de modo que, para cada medida $\mu_0^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ existe uma medida $\bar{\mu}^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$, tal que,

$$\left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu_0^{(j)}\right)} \leq C_j \cdot \left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_1\left(K_j,\bar{\mu}^{(j)}\right)}$$

para todo $\left(x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right) \in E_1 \times \ldots \times E_s \times G_j$.

Observe que se $\left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu_0^{(j)}\right)} = 0$ a desigualdade acima é válida, sendo assim, suponha o contrário.

Por (C_1) sabemos que, para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$ existe uma constante $C_j > 0$ de modo que, para cada medida $\mu_0^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ existe uma medida $\hat{\mu}_0^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ tal que

$$\left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu_0^{(j)}\right)} \leq C_j \cdot \left\|R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right)\right\|_{L_r\left(K_j,\hat{\mu}_0^{(j)}\right)} \tag{2.7}$$

para todo $\left(x^{(1)},\ldots,x^{(s)}, b^{(j)}\right) \in E_1 \times \ldots \times E_s \times G_j$.

Começando com $\mu_0^{(j)}$ defina a sequência $\left(\mu_n^{(j)}\right)_{n=0}^{\infty}$ em $\mathcal{P}(K_j)$, onde $\mu_{n+1}^{(j)} = \hat{\mu}_n^{(j)}$. Defina também $\bar{\mu}^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ da seguinte maneira,

$$\bar{\mu}^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\mu_n^{(j)}. \tag{2.8}$$

Desde que, $1 < r < p$ existe $\theta \in (0,1)$ de modo que

$$\frac{1}{r} = \theta + \frac{1-\theta}{p}.$$

Daí, pela Proposição 3, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) \right\|_{L_r\left(K_j, \mu_n^{(j)}\right)} &= \left(\int_{K_j} R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)^r d\mu_n^{(j)}(\varphi) \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_{K_j} R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) d\mu_n^{(j)}(\varphi) \right)^{\theta} \\
&\times \left(\int_{K_j} R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right)^p d\mu_n^{(j)}(\varphi) \right)^{\frac{1-\theta}{p}} \\
&= \left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) \right\|_{L_1\left(K_j, \mu_n^{(j)}\right)}^{\theta} \\
&\times \left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) \right\|_{L_p\left(K_j, \mu_n^{(j)}\right)}^{1-\theta}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Usaremos a partir de agora $R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) = R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right)$ para simplificar a notação. Sendo assim, por (2.7), (2.9),

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right) \right\|_{L_p\left(K_j, \mu_n^{(j)}\right)} &\overset{(2.7)}{\leq} C_j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right) \right\|_{L_r\left(K_j, \hat{\mu}_n^{(j)}\right)} \\
&= C_j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right) \right\|_{L_r\left(K_j, \mu_{n+1}^{(j)}\right)} \\
&\overset{(2.9)}{\leq} C_j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right) \right\|_{L_1\left(K_j, \mu_{n+1}^{(j)}\right)}^{\theta} \\
&\times \left\| R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right) \right\|_{L_p\left(K_j, \mu_{n+1}^{(j)}\right)}^{1-\theta} \\
&= C_j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1})^{\theta} \left\| R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right) \right\|_{L_1\left(K_j, \mu_{n+1}^{(j)}\right)}^{\theta} \\
&\times (2^{-n-1})^{1-\theta} \left\| R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right) \right\|_{L_p\left(K_j, \mu_{n+1}^{(j)}\right)}^{1-\theta} \\
&= C_j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right) \right\|_{L_1\left(K_j, \mu_{n+1}^{(j)}\right)} \right)^{\theta} \\
&\times \left(2^{-n-1} \left\| R_j\left(\cdot, (x), b^{(j)}\right) \right\|_{L_p\left(K_j, \mu_{n+1}^{(j)}\right)} \right)^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

Usando agora a desigualdade de Hölder com os conjugados $\frac{1}{\theta}$ e $\frac{1}{1-\theta}$ em $(*)$, e acrescentando os termos $\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_1\left(K_j,\mu_0^{(j)}\right)}$ e $\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu_0^{(j)}\right)}$ em $(**)$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu_n^{(j)}\right)} &\overset{(*)}{\leq} C_j\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_1\left(K_j,\mu_{n+1}^{(j)}\right)}\right)^{\theta}\\
&\quad\times\left(2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu_{n+1}^{(j)}\right)}\right)^{1-\theta}\\
&\overset{(**)}{\leq} C_j\cdot\left(2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_1\left(K_j,\mu_n^{(j)}\right)}\right)^{\theta}\\
&\quad\times\left(2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu_n^{(j)}\right)}\right)^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu_n^{(j)}\right)} \leq (2C_j)^{\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_1\left(K_j,\mu_n^{(j)}\right)}\right)$$

Agora, note que,

$$\begin{aligned}
\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_1\left(K_j,\bar{\mu}^{(j)}\right)} &= \int_{K_j} R(\varphi,(x),b^{(j)})\ d\left[\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\mu_n^{(j)}\right](\varphi)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\int_{K_j} R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\ d\mu_n^{(j)}(\varphi)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_1\left(K_j,\mu_n^{(j)}\right)}
\end{aligned}$$

assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu_n^{(j)}\right)} \leq (2C_j)^{\frac{1}{\theta}}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_1\left(K_j,\bar{\mu}^{(j)}\right)}$$

e, em particular,

$$2^{-1}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_p\left(K_j,\mu_0^{(j)}\right)} \leq (2C_j)^{\frac{1}{\theta}}\left\|R_j\left(\cdot,(x),b^{(j)}\right)\right\|_{L_1\left(K_j,\bar{\mu}^{(j)}\right)}$$

Portanto, $C'_j = 2 \cdot (2C_j)^{\frac{1}{\theta}}$ é a constante desejada. Como (C_1) implica (D_1), a demonstração segue ao aplicarmos o Teorema 2.2.2 com $r = 1$. ∎

Capítulo 3

Aplicações do TEG

Neste capítulo iremos usar o TEG para recuperar e melhorar os conhecidos teoremas do tipo Extrapolação, incluindo a primeira versão abstrata presente em [22] e os casos onde ela parece não funcionar.

3.1 Operadores lineares absolutamente p-somante

Observe que, $v \in \Pi_p(X;Y)$ se, e somente se, $v \in \mathcal{H}_{RS,p}(X,Y)$, com $E = X$, $G = \mathbb{R}$, $K = B_{X^*}$, com a topologia fraca estrela, $\mathcal{H}(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y)$ e R, S_Y definidas da seguinte forma:

$$R : B_{X^*} \times X \times \mathbb{R} \to [0,\infty),\ \ R(\varphi, x, b) = |\varphi(x)|$$

e

$$S_Y : \mathcal{L}(X;Y) \times X \times \mathbb{R} \to [0,\infty),\ \ S_Y(v, x, b) = \|v(x)\|.$$

De fato, pelas escolhas acima vemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é equivalente a

$$\left(\sum_{i=1}^{m} S_Y(v, x_i, b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} R(\varphi, x_i, b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

para todo $(x_i, b_i) \in X \times \mathbb{R}$, com $i = 1, \ldots, m$ e $c > 0$.

Seja $1 < r < p < \infty$, se $\mathcal{H}_{RS,p}(X, \ell_p) = \Pi_p(X; \ell_p) = \Pi_r(X; \ell_p) = \mathcal{H}_{RS,r}(X, \ell_p)$ pela Observação 1.2.16 existe uma constante $C > 0$, de modo que para cada medida $\mu \in \mathcal{P}(B_{X^*})$ existe uma medida $\bar{\mu} \in \mathcal{P}(B_{X^*})$ tal que

$$\begin{aligned}
\|R(\cdot, x, b)\|_{L_p(B_{X^*}, \mu)} &= \left(\int_{B_{X^*}} R(\varphi, x, b)^p d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^r d\mu_1(\varphi)\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= C \cdot \left(\int_{B_{X^*}} R(\varphi, x, b)^r d\mu_1(\varphi)\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= C \cdot \|R(\cdot, x, b)\|_{L_r(B_{X^*}, \bar{\mu})}
\end{aligned}$$

para cada $(x, b) \in E \times G$. E assim, garantimos a hipótese (C_1) do Teorema de Extrapolação Generalizado. Portanto, resgatamos o Teorema 1.2.14.

3.2 Operadores multilineares p-dominados

Os operadores multilineares dominados é um exemplo de uma classe que satisfaz um teorema do tipo Extrapolação, no qual a versão abstrata em [22] parece não funcionar[1].

Notação 3.2.1 *Sejam X, Y espaços de Banach e n natural. Denotaremos por $\mathcal{L}(^nX;Y)$ o conjunto de todos as aplicações n-lineares limitadas de X^n em Y com a norma* sup.

Definição 3.2.2 *Sejam X, Y espaços de Banach e n natural. Dado $p \leq n$, uma aplicação $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ é dita ser p-**dominada** se $\left(T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{p}{n}}(Y)$ sempre que $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X_k)$, com $k = 1, \ldots, n$.*

Notação 3.2.3 *Indicaremos por $\mathcal{L}_{d,p}(^nX;Y)$ o conjunto de todos as aplicações p-dominada.*

Observação 3.2.4 *$T \in \mathcal{L}(^nX;Y)$ é p-dominada se, e somente se, existe $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left\|T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}} \leq C \prod_{k=1}^{n} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi\left(x_j^{(k)}\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.1}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_j^{(k)} \in X$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$. Além disso, o ínfimo das constantes C satisfazendo (3.1) é uma norma em $\mathcal{L}_{d,p}(^nX;Y)$, que denotaremos por $\|T\|_{d,p}$.

Teorema 3.2.5 *Sejam $1 < r < p < \infty$ e X um espaço de Banach. Se*

$$\mathcal{L}_{d,p}(^nX;\ell_p) = \mathcal{L}_{d,r}(^nX;\ell_p), \tag{3.2}$$

então

$$\mathcal{L}_{d,p}(^nX;Y) = \mathcal{L}_{d,l}(^nX;Y).$$

para todo espaço de Banach Y e cada $0 < l < p$.

[1] Não conseguimos escolher os parâmetros para que a desigualdade 3.1 seja equivalente a 3.17.

Demonstração. Afirmação: $T \in \mathcal{L}(^nX;Y)$ é p-dominada se, e somente se, é $R_1,\ldots,R_n$-S-abstrata $(p,\ldots,p)$-somante, com

$$\begin{cases} t = n \\ G_j = X \text{ e } K_j = B_{X^*},\ j = 1,\ldots,n \\ E_k = \mathbb{K},\ k = 1,\ldots,s \\ \mathcal{H} = \mathcal{L}(^nX;Y) \\ p_j = p,\ j = 1,\ldots,n \\ S_Y\left(T, b^{(1)},\ldots,b^{(s)}, x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\right) = \left\|T\left(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\right)\right\| \\ R_j\left(\varphi, b^{(1)},\ldots,b^{(s)}, x^{(j)}\right) = \left|\varphi\left(x^{(j)}\right)\right|,\ j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Com efeito, pelas escolhas feitas acima tem-se que a desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|T\left(x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(n)}\right)\right\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}} \leq C\prod_{j=1}^{n}\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi\left(x_i^{(j)}\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

é equivalente a

$$\left(\sum_{i=1}^{m} S_Y\left(T, b_i^{(1)},\ldots,b_i^{(s)}, x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(n)}\right)^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}} \leq C\prod_{j=1}^{n}\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{m} R_j\left(\varphi, b_i^{(1)},\ldots,b_i^{(s)}, x_i^{(j)}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $(b_i^{(k)}, x_i^{(j)}) \in \mathbb{K}\times X$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ e $k = 1,\ldots,s$.

Assim, usando a hipótese temos

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_n\text{-}S,p}(^nX;\ell_p) = \mathcal{L}_{d,p}(^nX;\ell_p) = \mathcal{L}_{d,r}(^nX;\ell_p) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_n\text{-}S,r}(^nX;\ell_p)$$

Da definição de operadores p-somantes temos que $\Pi_p(X;\ell_p) = \mathcal{L}_{d,p}(^1X;\ell_p)$ para todo p e pelas Proposições 5 e 6, tem-se que $\mathcal{L}_{d,p}$ é cud e csm para todo p, além disso, por hipótese $\mathcal{L}_{d,p}(^nX;\ell_p) = \mathcal{L}_{d,r}(^nX;\ell_p)$. Daí, podemos usar a Proposição 7 tomando $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{L}_{d,p}$ e $\mathcal{M}_2 = \mathcal{L}_{d,r}$ para obtermos $\Pi_p(X;\ell_p) = \mathcal{L}_{d,p}(^1X;\ell_p) \subset \mathcal{L}_{d,r}(^1X;\ell_p) = \Pi_r(X;\ell_p)$. Como a outra inclusão é sempre válida, tem-se $\Pi_p(X;\ell_p) = \Pi_r(X;\ell_p)$. Assim, pela Observação

1.2.16 para cada $j = 1, \ldots, n$ existe uma constante $C_j > 0$ de modo que, para cada medida $\mu^{(j)} \in \mathcal{P}(B_{X^*})$ existe uma medida $\bar{\mu}^{(j)} \in \mathcal{P}(B_{X^*})$ tal que

$$\left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) \right\|_{L_p\left(B_{X^*}, \mu^{(j)}\right)} \leq C_j \cdot \left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) \right\|_{L_r\left(B_{X^*}, \bar{\mu}^{(j)}\right)}$$

para todo $\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, b^{(j)}\right) \in E_1 \times \ldots \times E_s \times G_j$.

Portanto, a condição (C_1) é satisfeita e pelo TEG segue-se que

$$\mathcal{L}_{d,p}(^n X; Y) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_n\text{-}S,p}(^n X; Y) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_n\text{-}S,l}(^n X; Y) = \mathcal{L}_{d,l}(^n X; Y)$$

para todo espaço de Banach Y e cada $0 < l < p$. ■

Observação 3.2.6 *O Teorema 2.2.3 melhora o Teorema de Extrapolação para aplicações multilineares dominadas de [20, Teorema 4.2], porque estende sua validade para o intervalo $0 < l < 1$.*

3.3 Polinômios homogêneos p-dominados

Notação 3.3.1 *Sejam X, Y espaços de Banach e n natural. Denotaremos por $\mathcal{P}({}^nX;Y)$ o conjunto de todos os polinômios contínuos n-homogêneas de X em Y com a norma* sup *usual.*

Definição 3.3.2 *(Ver [17]). Sejam X, Y espaços de Banach e n natural. Dado $p \leq n$, um polinômio contínuo n-homogêneo P de X em Y é dita ser* ***p-dominado*** *se $(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{p}{n}}(Y)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$.*

Observação 3.3.3 *Em [17] M. Matos mostrou que $P \in \mathcal{P}({}^nX;Y)$ é p-dominado se, e somente se, existe $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|P(x_j)\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.4}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_j \in X$, $j = 1, \ldots, m$.

Notação 3.3.4 *Indicaremos por $\mathcal{P}_{d,p}({}^nX;Y)$ o conjunto de todos os polinômios contínuos n-homogêneos p-dominado.*

Teorema 3.3.5 *Sejam $1 < r < p < \infty$ e X um espaço de Banach. Se*

$$\mathcal{P}_{d,p}({}^nX;\ell_p) = \mathcal{P}_{d,r}({}^nX;\ell_p), \tag{3.5}$$

então

$$\mathcal{P}_{d,p}({}^nX;Y) = \mathcal{P}_{d,l}({}^nX;Y)$$

para todo espaço de Banach Y e cada $0 < l < p$.

Demonstração. Afirmação: $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ é p-dominado se, e somente se, é R_1-S-abstrato p-somante, com

$$\begin{cases} t = n = s = 1 \\ E_1 = X,\ G_1 = \mathbb{K},\ K_1 = B_{X^*} \ e \ p_1 = p \\ \mathcal{H} = \mathcal{P}(^nX;Y) \\ S_Y(P,x,b) = |b|\|P(x)\|^{\frac{1}{n}} \\ R_1(\varphi,x,b) = |b||\varphi(x)| \end{cases} \tag{3.6}$$

De fato, pelas escolhas acima temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|P(x_j)\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

é equivalente a

$$\left(\sum_{i=1}^{m} S_Y(P,x_i,b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} R_1(\varphi,x_i,b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $(x_i,b_i) \in X \times \mathbb{K}$, com $i = 1,\ldots,m$. Usando a hipótese temos

$$\mathcal{H}_{R_1\text{-}S,p}(^nX;\ell_p) = \mathcal{P}_{d,p}(^nX;\ell_p) = \mathcal{P}_{d,r}(^nX;\ell_p) = \mathcal{H}_{R_1\text{-}S,r}(^nX;\ell_p).$$

Da definição de operadores p-somantes $\Pi_p(X;Y) = \mathcal{P}_{d,p}(^1X;Y)$ para todo p, pela Proposição 8 $\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\Pi_p)} = \mathcal{P}^n_{d,p}$ e pela Proposição 9 tem-se que $\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\Pi_p)}$ e $\mathcal{P}^n_{d,p}$ são cud e csm. Além disso, por hipótese $\mathcal{P}_{d,p}(^nX;\ell_p) = \mathcal{P}_{d,r}(^nX;\ell_p)$. Sendo assim, tomando $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}^n_{d,p}$ e $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{P}^n_{d,r}$ na Proposição 10 conseguimos que $\Pi_p(X;\ell_p) = \mathcal{P}_{d,p}(^1X;\ell_p) \subset \mathcal{P}_{d,r}(^1X;\ell_p) = \Pi_r(X;\ell_p)$. Como a outra inclusão é sempre válida, tem-se $\Pi_p(X;\ell_p) = \Pi_r(X;\ell_p)$. Daí, pela Observação 1.2.16 existe uma constante $C_1 > 0$ de modo que, para cada medida $\mu \in \mathcal{P}(K_1)$

existe uma medida $\bar{\mu} \in \mathcal{P}(K_1)$ tal que

$$\|R_1(\cdot, x, b)\|_{L_p(B_{X^*},\mu)} \leq C_1 \cdot \|R_1(\cdot, x, b)\|_{L_r(B_{X^*},\bar{\mu})}$$

para todo $(x, b) \in E_1 \times G_1$.

Logo, a condição (C_1) é satisfeita e pelo TEG segue-se que

$$\mathcal{P}_{d,p}(^nX; Y) = \mathcal{H}_{R_1\text{-}S,p}(^nX; Y) = \mathcal{H}_{R_1\text{-}S,l}(^nX; Y) = \mathcal{P}_{d,l}(^nX; Y)$$

para todo espaço de Banach Y e cada $0 < l < p$. ■

Observação 3.3.6 *(i) Note que o Teorema 2.2.3 melhora o Teorema de Extrapolação para polinômios homogêneos dominados de [20, Teorema 4.1], pois estende sua validade para o intervalo* $0 < l < 1$.

(ii) É verdade que $P \in \mathcal{P}_{d,p}(^nX; Y)$ *se e, somente se, a aplicação multilinear simétrica associada é p-dominada. Porém, o Teorema de Extrapolação para polinômios homogêneos dominados não segue do Teorema de Extrapolação de aplicações multilineares dominadas. Isso ocorre pelo fato de que a igualdade* $\mathcal{P}_{d,p}(^nX; Y) = \mathcal{P}_{d,r}(^nX; Y)$ *não implica a igualdade* $\mathcal{L}_{d,p}(^nX; Y) = \mathcal{L}_{d,r}(^nX; Y)$, *para maiores informações ver [4, Observação 4.2]. Pela mesma razão, o caso multilinear não resulta do polinomial.*

3.4 Melhoramento do Teorema de Extrapolação presente em [22]

Nesta seção iremos apresentar a versão melhorada do Teorema de Extrapolação presente em [22].

Sejam X é um espaço topológico e K um espaço compacto de Hausdorff tal que X mergulha em $C(K)$, $E = X \times X$ e $\mathcal{P}(K)$ a coleção de todas as medidas regulares de probabilidade na σ-álgebra de Borel em K. Indicaremos por $j_\mu = j_{\mu,p} : X \to L_p(\mu) := L_p(K,\mu)$ a composição da inclusão $X \hookrightarrow C(K)$ com o operador canônico $C(K) \to L_p(\mu)$. Suponha as seguintes condições:

(1) Para qualquer espaço de Banach Y e todo $q \in \{1, r, p\}$, $\mathcal{H}_{RS,q}(X;Y)$ é um espaço vetorial e o ínfimo das constantes C satisfazendo a condição (3.17) da Definição 9, é uma norma para $\mathcal{H}_{RS,q}(X;Y)$ denotada por $\pi_{RS,q}(\cdot)$, tal que $(\mathcal{H}_{RS,q}(X;Y), \pi_{RS,q}(\cdot))$ é um espaço de Banach.

(2) Para quaisquer espaços de Banach Y, Z, se $h \in \mathcal{H}(X;Y)$ e $T : Y \to Z$ é um operador linear limitado, então

$$S_Z(T \circ h, (x,e), b) \leq \|T\| \cdot S_Y(h, (x,e), b).$$

(3) A aplicação $j_\mu \in \mathcal{H}(X; L_p(K,\mu))$ e para todo $((x,e),b) \in E \times G$,

$$S_{L_p(K,\mu)}(j_\mu, (x,e), b) = \|R(\cdot, (x,e), b)\|_{L_p(K,\mu)}.$$

(4) Se $\{j_\mu(x_1), \ldots, j_\mu(x_m), j_\mu(e_1), \ldots, j_\mu(e_m)\}$ está contido em um subespaço de dimensão finita F de $L_p(K,\mu)$ e $p_F : L_p(K,\mu) \to F$ denota qualquer projeção, então

$$\sum_{i=1}^{m} S_{L_p(K,\mu)}(j_\mu, (x_i,e_i), b_i)^r = \sum_{i=1}^{m} S_F(p_F \circ j_\mu, (x_i,e_i), b_i)^r. \tag{3.7}$$

Além disso, $p_F \circ j_\mu \in \mathcal{H}_{RS,p}(X;F)$ e existe $c_1 > 0$ (não depende da F) tal que

$$\pi_{RS,p}(p_F \circ j_\mu) \leq c_1 \cdot \pi_{RS,p}(j_\mu). \tag{3.8}$$

Teorema 3.4.1 *Sejam* $1 < r < p < \infty$. *Se* (1)-(4) *são satisfeitas e*

$$\mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p) = \mathcal{H}_{RS,r}(X;\ell_p),$$

então

$$\mathcal{H}_{RS,p}(X;Y) = \mathcal{H}_{RS,l}(X;Y)$$

para qualquer espaço de Banach Y *e cada* $0 < l < p$.

Demonstração. Iremos verificar que a condição (C_1) é satisfeita, e assim o Teorema 2.2.3 recupera este teorema.

Seja $\mu \in \mathcal{P}(K)$, pelo Teorema 1.2.5, temos que $L_p(K,\mu)$ é um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ para todo $\lambda > 1$, e assim, podemos afirmar que para cada $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ e $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ em X, o subespaço de $L_p(K,\mu)$ gerado por $\{j_\mu(x_1),\ldots,j_\mu(x_m),j_\mu(e_1),\ldots,j_\mu(e_m)\}$ está contido em um subespaço de dimensão finita F de $L_p(K,\mu)$ para o qual podemos encontrar um isomorfismo $T : F \longrightarrow \ell_p^{\dim F}$, com

$$\|T^{-1}\| \cdot \|T\| < \lambda. \tag{3.9}$$

Pela hipótese (3), j_μ é RS-abstrata p-somante e

$$\pi_{RS,p}(j_\mu) \leq 1. \tag{3.10}$$

Consequentemente, por (3.10) e (3.8), temos

$$\pi_{RS,p}(p_F \circ j_\mu) \leq c_1, \tag{3.11}$$

e, pelas hipóteses (2) e (3), temos que $T \circ p_F \circ j_\mu \in \mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p^{\dim F})$. Finalmente, pelo Lema 1, existe $c_2 > 0$ tal que

$$T \circ p_F \circ j_\mu \in \mathcal{H}_{RS,r}(X;\ell_p^{\dim F}) \tag{3.12}$$

e

$$\pi_{RS,r}(T \circ p_F \circ j_\mu) \leq c_2 \cdot \pi_{RS,p}(T \circ p_F \circ j_\mu). \tag{3.13}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{m} S_{L_p(K,\mu)}(j_\mu, (x_j, e_j), b_j)^r\right)^{\frac{1}{r}} &\overset{(3.7)}{=} \left(\sum_{j=1}^{m} S_{L_p(K,\mu)}(T^{-1} \circ T \circ p_F \circ j_\mu, (x_j, e_j), b_j)^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\overset{Hip.\ (2)}{\leq} \|T^{-1}\| \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} S_{\ell_p^{\dim F}}(T \circ p_F \circ j_\mu, (x_j, e_j), b_j)^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\overset{(3.12)}{\leq} \|T^{-1}\| \cdot \pi_{RS,r}(T \circ p_F \circ j_\mu) \cdot \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, (x_j, e_j), b_j)^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\overset{(3.13)}{\leq} c_2 \cdot \|T^{-1}\| \cdot \pi_{RS,p}(T \circ p_F \circ j_\mu) \cdot \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, (x_j, e_j), b_j)^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq c_2 \cdot \|T^{-1}\| \cdot \|T\| \cdot \pi_{RS,p}(p_F \circ j_\mu) \cdot \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, (x_j, e_j), b_j)^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\overset{(3.9)\text{ e }(3.11)}{\leq} c_2 \cdot \lambda \cdot c_1 \cdot \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, (x_j, e_j), b_j)^r\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\pi_{RS,r}(j_\mu) \leq c_2 \cdot \lambda \cdot c_1,$$

e, pelo Teorema 2, existe $\hat{\mu} \in \mathcal{P}(K)$ tal que

$$S_{L_p(K,\mu)}(j_\mu, (x, e), b) \leq c_2 \cdot \lambda \cdot c_1 \cdot \left(\int_K R(\varphi, (x, e), b)^r d\hat{\mu}(\varphi)\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{3.14}$$

para todo $((x, e), b) \in E \times G$. Sendo assim,

$$\|R(\cdot, (x, e), b)\|_{L_p(K,\mu)} \overset{Hip.\ (3)}{=} S_{L_p(K,\mu)}(j_\mu, (x, e), b) \overset{(3.14)}{\leq} c_2 \cdot \lambda \cdot c_1 \cdot \|R(\cdot, (x, e), b)\|_{L_r(K,\hat{\mu})},$$

para todo $((x, e), b) \in E \times G$. Portanto, a condição (C_1) é satisfeita. ■

Observação 3.4.2 *O Teorema 3.2.5 é, de fato, um melhoramento do [22, Teorema 3.1], pois ele descarta uma das condições exigida em [22, Teorema 3.1] e estende sua validade para* $0 < l < 1$.

Apêndice

Proposição 1 Seja $(a_{mn})_{m,n}$ uma sequência de escalares positivos.

(a) Se $\sup_m \sup_n a_{mn} = \infty$, então $\sup_n \sup_m a_{mn} = \infty$.

Com efeito, seja $\sup_n a_{mn} = c_m$. Por hipótese, temos que $\sup_m c_m = \infty$ e, assim, dado $N > 0$, existe m_0 tal que $\sup_n a_{m_0 n} = c_{m_0} > N$. Pela definição de supremo, obtemos que, existe n_0 tal que $a_{m_0 n_0} > N$ e, portanto, $\sup_n \sup_m a_{mn} = \infty$.

(b) Se $\sup_m \sup_n a_{mn} = b < \infty$, então $\sup_n \sup_m a_{mn} = b$.

De fato, considere $\sup_n a_{mn} = c_m$. Por hipótese, temos que $\sup_m c_m = b$ e, pela definição de supremo, dado $\epsilon > 0$, existe m_0 tal que

$$\sup_n a_{m_0 n} = c_{m_0} > b - \epsilon.$$

Usando novamente a definição de supremo, encontramos n_0, tal que

$$a_{m_0 n_0} > c_{m_0} - \frac{\epsilon}{2} > b - \epsilon$$

assim,

$$d = \sup_n \sup_m a_{mn} \geq \sup_n a_{m_0 n} \geq a_{m_0 n_0} > b - \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $d \geq b$. Por outro lado, observe que $d < \infty$, pois caso contrário, pelo item (a), teríamos que $b = \infty$. Sendo assim, seja $\sup_m a_{mn} = c_n$.

Sabemos que $\sup_n c_n = d$ e, assim, dado $\epsilon > 0$, existe n_1 tal que

$$\sup_n a_{mn_1} = c_{n_1} > d - \epsilon.$$

E pela definição de supremo, obtemos que, existe m_1 tal que $a_{m_1 n_1} > c_{n_1} - \frac{\epsilon}{2} > d - \epsilon$ e, assim,

$$b = \sup_m \sup_n a_{mn} \geq \sup_m a_{mn_1} \geq a_{m_1 n_1} > d - \epsilon.$$

Pela arbitrariedade de ϵ, $d \leq b$.

Proposição 2 Se $v : X \to Y$ é um operador linear de posto finito, então

$$v(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\cdot) \cdot y_k, \text{ com } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^* \text{ e } y_1, \ldots, y_n \in Y.$$

Com efeito, por definição, a imagem de v tem dimensão finita, considere $n = \dim v(X)$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ uma base de $v(X)$. Para cada vetor y_i da base, associaremos o funcional linear ψ_i definido por $\psi_i(y_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Pela Álgebra Linear, temos que o conjunto $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ é uma base de $v(X)^*$. Como $\{y_1, \ldots, y_n\}$ é base de $v(X)$, dado $x \in X$ existem $\lambda_{1,x}, \ldots, \lambda_{n,x} \in \mathbb{K}$ de modo que $v(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,x} \cdot y_j$. Sendo assim,

$$\psi_i(v(x)) = \sum_{j=1}^{n} \psi_i(\lambda_{j,x} \cdot y_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,x} \cdot \psi_i(y_j) = \lambda_{i,x}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Agora, basta considerar $\varphi_j = \psi_j \circ v$, e observar que, $\varphi_j \in X^*$, pois é a composição de dois operadores lineares limitados.

Proposição 3 *(Desigualdade de Littlewood, [13, p.55]). Suponha que* $0 < p_0 < p_1 < \infty$ *e* $0 < \theta < 1$. *Defina* p *de modo que*

$$\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Se $f \in L_{p_0}(\mu) \cap L_{p_1}(\mu)$ *então* $f \in L_p(\mu)$ *e*

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Proposição 4 *(Desigualdade reversa de Minkowski, [13, Proposição 5.3.1]). Suponha que* $0 < p < 1$ *e* $f, g \in L_p(\mu)$ *funções não-negativas. Então*

$$\left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A seguir veremos alguns conceitos sobre operadores multilineares e polinomiais.

Definição 1 *Sejam* $X_1, \ldots, X_n, Y$ *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e* n *natural. Uma aplicação*

$$T : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$$

é dita ser ***multilinear (ou*** n***-linear)*** *se* T *é linear em cada variável, ou seja, se para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $x^{(i)}, \bar{x}^{(i)} \in X_i$*, com* $i = 1, \ldots, n$*, tem-se*

$$T(x^{(1)}, \ldots, \alpha x^{(i)} + \bar{x}^{(i)}, \ldots, x^{(n)}) = \alpha \cdot T(x^{(1)}, \ldots, x^{(i)}, \ldots, x^{(n)}) + T(x^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(i)}, \ldots, x^{(n)}).$$

Se T *for limitada dizemos que* $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

Teorema 1 *(Pietsch, Geiss, 1985)[14].* $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ *é p-dominada se, e somente se, existem uma constante* D *e medidas regulares de probabilidade de Borel* μ_k *em* $B_{X_k^*}$ *(com a topologia fraca estrela), tais que, para todos* $x^{(k)} \in X_k$*, com* $k = 1, \ldots, n$

$$\left\|T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right)\right\| \leq D \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\int_{B_{X_k^*}} \left|\varphi\left(x^{(k)}\right)\right|^p d\mu_k(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.15}$$

Além disso, $\|T\|_{d,p}$ *é a menor de todas as constantes* D *que satisfaz (3.15).*

Definição 2 *Um operador* $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ *é dito ser* ***tipo finito*** *se puder ser* *escrito da seguinte forma:*

$$T(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j^{(1)}(x_1)\ldots\varphi_j^{(n)}(x_n)\cdot y_j,$$

com $\varphi_j^{(k)}\in X_k^*,\ y_j\in Y$ *e* $(j,k)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}$.

Definição 3 *Um* ***ideal de operadores multilineares*** *(ou multi-ideal)* $\mathcal{M}$ *é uma subclasse da classe de todos os operadores multilineares entre espaços de Banach, tal que, para todo* n *e quaisquer espaços de Banach* $X_1,\ldots,X_n,Y$*, as componentes* $\mathcal{M}(X_1,\ldots,X_n;Y):=\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;Y)\cap\mathcal{M}$ *satisfazem:*

(i) $\mathcal{M}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ *que contém os operadores* n*-lineares de tipo finito;*

(ii) A propriedade de ideal: se $G_1,\ldots,G_n$ *e* H *são espaços de Banach,* $u_j\in\mathcal{L}(G_j,X_j)$*, para* $j=1,\ldots,n$*,* $T\in\mathcal{M}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ *e* $\varphi\in\mathcal{L}(Y,H)$*, então a composição* $\varphi\circ T\circ(u_1,\ldots,u_n)$ *está em* $\mathcal{M}(G_1,\ldots,G_n;H)$.

Definição 4 *Um* ***ideal normado*** *(resp. quase-normado) de operadores multilineares* $(\mathcal{M},\|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ *é um ideal de operadores multilineares* $\mathcal{M}$ *munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ *tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ *restrita a* $\mathcal{M}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ *é uma norma (resp. quase-norma) para quaisquer espaços de Banach* $X_1,\ldots,X_n,Y$ *e para todo* n *natural;*

(ii) $\|T(b_1,\ldots,b_n)\|_{\mathcal{M}}=1$*, com* $T:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ *dada por* $T(b_1,\ldots,b_n)=b_1\cdot\ldots\cdot b_n$*;*

(iii) Se $G_1,\ldots,G_n$ *e* H *são espaços de Banach,* $u_j\in\mathcal{L}(G_j,X_j)$*, para* $j=1,\ldots,n$*,* $T\in\mathcal{M}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ *e* $\varphi\in\mathcal{L}(Y,H)$*, então* $\|\varphi\circ T\circ(u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathcal{M}}\leq\|\varphi\|\cdot\|T\|_{\mathcal{M}}\cdot\|u_1\|\cdot\ldots\cdot\|u_n\|$.

Um ideal normado é um ***ideal de Banach****, ou ideal completo, (resp. quase-Banach) se, para todos espaços de Banach* $X_1,\ldots,X_n,Y$*, as componentes* $(\mathcal{M}(X_1,\ldots,X_n;Y),\|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ *forem completas.*

Definição 5 *Um ideal de operadores multilineares $\mathcal{M}$ é* ***fechado sob a diferenciação (closed under differentiation, cud)*** *se para todo n, quaisquer espaços de Banach $X_1, \ldots, X_n, Y$ e $T \in \mathcal{M}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, tem-se que todo operador obtido fixando $n-1$ vetores $x^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n)}$ pertence a $\mathcal{M}(X_j; Y)$ para todo $j = 1, \ldots, n$.*

Definição 6 *Um ideal de operadores multilineares $\mathcal{M}$ é* ***fechado para a multiplicação por escalar (closed for scalar multiplication, csm)*** *se para todo n, quaisquer espaços de Banach $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, Y$, $T \in \mathcal{M}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ e $\varphi \in X_{n+1}^*$, tem-se $\varphi T \in \mathcal{M}(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}; Y)$, onde, $\varphi T(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \varphi(x_{n+1}) \cdot T(x_1, \ldots, x_n)$.*

Proposição 5 $(\mathcal{L}_{d,p}, \|\cdot\|_{d,p})$ *é cud para todo p.*

Demonstração. Dados n natural, $X_1, \ldots, X_n, Y$ espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}_{d,p}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Fixe $x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(i-1)}, x_k^{(i+1)}, \ldots, x_k^{(n)}$ e considere o operador

$$\begin{aligned} \bar{T} &: X_i \to Y \\ x_j^{(i)} &\mapsto T\left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(i-1)}, x_j^{(i)}, x_k^{(i+1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right), \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $p \geq \frac{p}{n}$, temos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m \left\|\bar{T}\left(x_j^{(i)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^m \left\|T\left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(i-1)}, x_j^{(i)}, x_k^{(i+1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \left\|T\left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(i-1)}, x_j^{(i)}, x_k^{(i+1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right)\right\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}} \\ &\leq \|T\|_{d,p} \prod_{r=1}^n \sup_{\varphi \in B_{X_r^*}} \left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi\left(x_j^{(r)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|T\|_{d,p} \cdot \prod_{l \leq n,\ l \neq i} \left\|\left(0, 0, \ldots, x_k^{(l)}, 0, 0, \ldots\right)\right\|_{p,w} \cdot \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{p,w} \\ &= \|T\|_{d,p} \cdot \prod_{l \leq n,\ l \neq i} \left\|x_k^{(l)}\right\| \cdot \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{p,w}. \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{T} \in \mathcal{L}_{d,p}(X_i; Y)$. ■

Proposição 6 *$(\mathcal{L}_{d,p}, \|\cdot\|_{d,p})$ é csm para todo p.*

Demonstração. Usando as condições (3.15) do Teorema 1 e (1.9) do Teorema 1.2.2 temos que, dados n natural, $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, Y$ espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}_{d,p}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ e $\varphi \in X_{n+1}^*$ e $x^{(k)} \in X_k$, com $k = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(i)}, \ldots, x^{(n)}, x^{(n+1)}\right)\right\| &= \left\|\varphi\left(x^{(n+1)}\right) T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(i)}, \ldots, x^{(n)}\right)\right\| \\
&\leq \left|\varphi\left(x^{(n+1)}\right)\right| \cdot \left\|T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(i)}, \ldots, x^{(n)}\right)\right\| \\
&\overset{(3.15)}{\leq} \left|\varphi\left(x^{(n+1)}\right)\right| \cdot D \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\int_{B_{X_k^*}} \left|\psi\left(x^{(k)}\right)\right|^p d\mu_k(\psi)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(1.9)}{\leq} C \cdot \left(\int_{B_{X_{n+1}^*}} \left|\psi\left(x^{(n+1)}\right)\right|^p d\mu_{n+1}(\psi)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times D \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\int_{B_{X_k^*}} \left|\psi\left(x^{(k)}\right)\right|^p d\mu_k(\psi)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \cdot D \cdot \prod_{k=1}^{n+1} \left(\int_{B_{X_k^*}} \left|\psi\left(x^{(k)}\right)\right|^p d\mu_k(\psi)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}; Y)$. ■

Proposição 7 *Sejam $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ ideais multilineares tais que $\mathcal{M}_0(^nX; Y) \cap \mathcal{M}_1(^nX; Y) \subset \mathcal{M}_2(^nX; Y)$ para algum natural n e espaços de Banach X e Y. Se $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ são csm e $\mathcal{M}_2$ é cud então $\mathcal{M}_0(^1X; Y) \cap \mathcal{M}_1(^1X; Y) \subset \mathcal{M}_2(^1X; Y)$.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{M}_0(^1X; Y) \cap \mathcal{M}_1(^1X; Y)$. Fixando $x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, seja $\varphi_j \in X^*$, tal que, $\varphi_j(x^{(j+1)}) = 1$, com $j = 1, \ldots, n-1$. Sendo assim, considere o seguinte operador

$$A : X \times \cdots \times X \to Y$$

definido por, $A(\cdot) = \varphi_{n-1} \ldots \varphi_1 T(\cdot)$. Por hipótese, $\mathcal{M}_0$ e $\mathcal{M}_1$ são csm, então $A \in$

$\mathcal{M}_0(^nX;Y) \cap \mathcal{M}_1(^nX;Y) \subset \mathcal{M}_2(^nX;Y)$. Assim, defina o seguinte operador,

$$\begin{aligned} \bar{A} : X &\to Y \\ x &\mapsto A(x, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{M}_2$ é cud, temos que, $\bar{A} \in \mathcal{M}_2(^1X;Y)$. Além disso, dado $x \in X$,

$$\bar{A}(x) = A(x, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = \varphi_{n-1} \ldots \varphi_1 T(x, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = \varphi_{n-1}(x^{(n)}) \ldots \varphi_1(x^{(2)})T(x) = T(x).$$

Portanto, $T \in \mathcal{M}_2(^1X;Y)$. ∎

Para maiores informações sobre aplicações multilineares dominadas ver [2, 7, 14, 15, 16, 25].

Definição 7 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um operador $P : X \to Y$ é um polinômio* ***n-homogêneo*** *se existe $T \in L(^nX;Y)$ tal que para todo $x \in X$, tem-se $P(x) = T(x, \ldots, x)$.*

Definição 8 *Um polinômio contínuo $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ é do tipo $\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}$ ($P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}(^nX;Y)$) se existem um espaço de Banach G, um operador $T \in \mathcal{I}(X;G)$ e um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^nG;Y)$ tal que $P = Q \circ T$.*

A classe $\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} := \cup_{n,X,Y}\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}(^nX;Y)$ é chamada de ***ideal de polinômios gerado pelo método de fatoração sobre*** *$\mathcal{I}$.*

Proposição 8 *(Ver [8, Lema 1]). Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ é p-dominado se, e somente se, existem um espaço de Banach G, um operador absolutamente p-somante $T \in \mathcal{L}(X;G)$ e um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^nG;Y)$ tal que $P = Q \circ T$.*

Proposição 9 *(Ver [3, Lema 1]). Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, então $\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}$ é cud e csm.*

Proposição 10 *(Ver [3, Proposição 2]). Sejam $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ ideais polinomiais tais que $\mathcal{Q}_0(^nX;Y) \cap \mathcal{Q}_1(^nX;Y) \subset \mathcal{Q}_2(^nX;Y)$ para algum natural n e espaços de Banach X e Y. Se $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_1$ são csm e $\mathcal{Q}_2$ é cud então $\mathcal{Q}_0(^1X;Y) \cap \mathcal{Q}_1(^1X;Y) \subset \mathcal{Q}_2(^1X;Y)$.*

Para mais detalhes sobre aplicações polinomiais dominadas ver [3, 8, 17].

Agora faremos algumas adaptações no ambiente abstrato da Seção 2.1 e veremos uma outra versão abstrata do Teorema da Dominação de Pietsch [21].

Observe que, se tomarmos

$$\begin{cases} t = n = s = 1 \\ E_1 = E,\ G_1 = G,\ K_1 = K, X_1 = X \ e \ p_1 = p \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}(X;Y) \\ R_1 = R \end{cases} \tag{3.16}$$

na Definição 2.1.1, obtemos a seguinte:

Definição 9 *[5, 21] Sejam X, Y e E conjuntos arbitrários não-vazios, $\mathcal{H}(X;Y)$ uma família não-vazia de aplicações de X em Y, G um espaço de Banach, K um espaço topológico compacto de Hausdorff e $1 \leq p < \infty$. Uma aplicação $f \in \mathcal{H}(X;Y)$ é RS-**abstrata** p-**somante**, se existe $C \geq 0$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in E$ e $b_1, \ldots, b_m \in G$,*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} S_Y(f, x_i, b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{i=1}^{m} R(\varphi, x_i, b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.17}$$

onde

$$R : K \times E \times G \to [0, \infty) \ e \ S_Y : \mathcal{H}(X;Y) \times E \times G \to [0, \infty)$$

são aplicações arbitrárias.

Sendo assim, temos que $\mathcal{H}_{RS,p}(X;Y)$ é o conjunto de todos as aplicações RS-abstrata p-somante.

Agora, suponha que R é tal que a aplicação

$$R_{x,b} : K \to [0, \infty) \text{ definida por } R_{x,b}(\varphi) = R(\varphi, x, b) \tag{3.18}$$

é contínua para cada $x \in E$ e $b \in G$.

O teorema a seguir é uma versão geral do Teorema da Dominação de Pietsch, que foi demonstrada por D. Pellegrino e J. Santos [21], que é uma versão melhorada do [5, Teorema 2.2].

Teorema 2 *Seja $1 \leq p < \infty$. Suponha que S é arbitrário e R satisfaça (3.18). Uma aplicação $h \in \mathcal{H}(X;Y)$ é RS-abstrata p-somante se, e somente se, existe $C \geq 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em K tal que, para todo $a \in E$ e $b \in G$,*

$$S(h,a,b) \leq C \cdot \|R(\cdot,a,b)\|_{L_p(K,\mu)}. \tag{3.19}$$

Agora iremos mostrar que a condição (5) usada para demonstrar a versão abstrata do teorema do tipo Extrapolação em [22] pode ser obtida a partir das condições (1) e (2) do mesmo teorema. Iremos manter as notações da Seção 3.4.

Essas são as hipóteses do Teorema 3.4.1 que precisaremos para demonstrar o lema a seguir.

(1) Para qualquer espaço de Banach Y e todo $q \in \{1, r, p\}$, $\mathcal{H}_{RS,q}(X;Y)$ é um espaço vetorial e o ínfimo das constantes C satisfazendo (3.17) é uma norma para $\mathcal{H}_{RS,q}(X;Y)$ denotada por $\pi_{RS,q}(\cdot)$, tal que $(\mathcal{H}_{RS,q}(X;Y), \pi_{RS,q}(\cdot))$ é um espaço de Banach.

(2) Para quaisquer espaços de Banach Y, Z, se $h \in \mathcal{H}(X;Y)$ e $T : Y \to Z$ é um operador linear limitado, então

$$S_Z(T \circ h, (x,e), b) \leq \|T\| \cdot S_Y(h, (x,e), b).$$

O lema a seguir mostra que a hipótese (5) em [22, Teorema 3.1] pode ser retirada.

Lema 1 *Suponha que os itens* (1) *e* (2) *acima são válidos. Se $\mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p) = \mathcal{H}_{RS,r}(X;\ell_p)$, então*

(a) existe $c > 0$ tal que $\pi_{RS,r}(v) \leq c \cdot \pi_{RS,p}(v)$ para todo $v \in \mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p)$;

(b) $\mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p^m) = \mathcal{H}_{RS,r}(X;\ell_p^m)$ *para todo inteiro positivo* m*;*

(c) existe $c_2 > 0$ *tal que* $\pi_{RS,r}(v) \leq c_2 \cdot \pi_{RS,p}(v)$ *para todo* $v \in \mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p^m)$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por hipótese temos que, $\mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p) = \mathcal{H}_{RS,r}(X;\ell_p)$, então o operador inclusão $I : \mathcal{H}_{RS,r}(X;\ell_p) \to \mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p)$ é linear, contínua, injetiva e sobrejetiva. Pelo item (1), $(\mathcal{H}_{RS,t}(X;\ell_p), \pi_{RS,t}(\cdot))$ é um espaço de Banach, assim, pelo Teorema da Aplicação Aberta, a inversa da inclusão é contínua. Logo, existe $c > 0$ tal que $\pi_{RS,r}(v) = \pi_{RS,r}(I^{-1}(v)) \leq c \cdot \pi_{RS,p}(v)$ para todo $v \in \mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p)$. E assim, acabamos de provar o item (a).

Agora provaremos o item (b). Dado $m \in \mathbb{N}$, $y \in E$ e $g \in G$. Se $v \in \mathcal{H}_{RS,r}(X;\ell_p^m)$, pelo Teorema 2 e pela monotonicidade das normas $L_p(\mu)$ temos que, existe $d > 0$ tal que

$$S_{\ell_p^m}(v,y,g) \leq d \cdot \|R(\cdot,y,g)\|_{L_r(K,\mu)} \leq d \cdot \|R(\cdot,y,g)\|_{L_p(K,\mu)},$$

e assim, $\mathcal{H}_{RS,r}(X;\ell_p^m) \subset \mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p^m)$.

Iremos provar agora a outra inclusão. Seja $v \in \mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p^m)$. Defina as seguintes aplicações,

$$p_m : \ell_p \to \ell_p^m \text{ e } i_m : \ell_p^m \to \ell_p$$

donde p_m é o operador projeção e $i_m(x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_m,0,0,\ldots)$. Seja $x = (x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots) \in \ell_p$, note que,

$$\|p_m(x)\|_{\ell_p^m} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p.$$

Então,

$$\|p_m\| \leq 1 \tag{3.20}$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}$. De modo análogo, obtemos que

$$\|i_m\| = 1 \tag{3.21}$$

para todo inteiro positivo m. Sendo assim, pelo item (2) e pelo Teorema 2 existe $C_m > 0$ tal que

$$\begin{aligned} S_{\ell_p}(i_m \circ v, y, g) &\overset{Hip.(2)}{\leq} \|i_m\| \cdot S_{\ell_p^m}(v, y, g) \\ &\overset{(3.21)}{=} S_{\ell_p^m}(v, y, g) \\ &\overset{(3.19)}{\leq} C_m \cdot \|R(\cdot, y, g)\|_{L_p(K,\mu)}, \end{aligned}$$

daí, obtemos que $i_m \circ v \in \mathcal{H}_{RS,p}(X; \ell_p) = \mathcal{H}_{RS,r}(X; \ell_p)$.

Agora, dado $a \in X$, observe que

$$\begin{aligned} p_m \circ i_m \circ v(a) &= p_m \circ i_m(v_1(a), \ldots, v_m(a)) \\ &= p_m(v_1(a), \ldots, v_m(a), 0, 0, \ldots) \\ &= (v_1(a), \ldots, v_m(a)) \\ &= v(a), \end{aligned}$$

então, $p_m \circ i_m \circ v = v$. Como $i_m \circ v \in \mathcal{H}_{RS,p}(X; \ell_p) = \mathcal{H}_{RS,r}(X; \ell_p)$, pelo Teorema 2, temos que exite $c_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} S_{\ell_p^m}(v, y, g) &= S_{\ell_p^m}(p_m \circ i_m \circ v, y, g) \\ &\overset{Hip.(2)}{\leq} \|p_m\| \cdot S_{\ell_p}(i_m \circ v, y, g) \\ &\overset{(3.20)}{\leq} S_{\ell_p}(i_m \circ v, y, g) \\ &\overset{(3.19)}{\leq} c_0 \cdot \|R(\cdot, y, g)\|_{L_r(K,\mu)}, \end{aligned}$$

para todo $y \in E$, $g \in G$ e $m \in \mathbb{N}$. Novamente o Teorema 2 garante que $v \in \mathcal{H}_{RS,r}(X; \ell_p^m)$. E assim obtemos a igualdade procurada.

Finalmente provaremos (c). Sabemos que, o operador inclusão $i : \mathcal{H}_{RS,r}(X;\ell_p^m) \to \mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p^m)$ é linear, contínua e injetiva. Como $\mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p^m) = \mathcal{H}_{RS,r}(X;\ell_p^m)$, temos que i também é sobrejetiva, e pelo item (1), $\big(\mathcal{H}_{RS,t}(X;\ell_p^m), \pi_{RS,t}(\cdot)\big)$ é um espaço de Banach. Assim, pelo Teorema da Aplicação Aberta, a inversa da inclusão é contínua. Logo, existe $c_2 > 0$ tal que $\pi_{RS,r}(v) = \pi_{RS,r}(i^{-1}(v)) \leq c_2 \cdot \pi_{RS,p}(v)$ para todo $v \in \mathcal{H}_{RS,p}(X;\ell_p^m))$ e todo $m \in \mathbb{N}$. ■

Referências Bibliográficas

[1] R. Alencar and M. C. Matos, *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*, Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático 12, Universidad Complutense Madrid, (1989).

[2] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek and D. Pellegrino, *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*, Studia Math. **177** (2006), 43-65.

[3] G. Botelho and D. Pellegrino, *Two new properties of ideals of polynomials and applications*, Indag. Math. **16** (2005), 157-169.

[4] G. Botelho, D. Pellegrino, *On symmetric ideals of multilinear mappings between Banach spaces*, J. Aust. Math. Soc. **81** (2006), 141-148.

[5] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda, *A unified Pietsch Domination Theorem*, J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), 269-276.

[6] G. Botelho, D. Pellegrino, J. Santos and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Abstract extrapolation theorems for absolutely summing nonlinear operators*, J. Math. Anal. Appl. **421** (2015), 730-746.

[7] D. Carando, V. Dimant and S. Muro, *Coherent sequences of polynomials ideals on Banach spaces*, Math. Nachr. **282** (2009), 1111-1133.

[8] R. Cilia, M. D'Anna and J. Gutiérrez, *Polynomials on Banach spaces whose duals are isomorphic to* $\ell_1(\Gamma)$, Bull. Austral. Math. Soc. **70** (2004), 117-124.

[9] D. Chen and B. Zheng, *Remarks on Lipschitz p-summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 2891-2898.

[10] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, 1995.

[11] J. P. G. L. Dirichlet, *Mathematische Werke*, Band I, 1837 (Republicado por Chelsea Publ. Comp. em 1969).

[12] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 192 -197.

[13] D. J. H. Garling, *Inequalities: a journey into linear analysis*, Cambridge University Press, New York, 2007.

[14] S. Geiss, *Ideale multilinearer Abbildungen, Diplomarbeit*, 1985.

[15] G. H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952.

[16] M.C. Matos, *On multilinear mappings of nuclear type*, Rev. Mat. Complut. **6** (1993), 61-81.

[17] M. C. Matos, *Absolutely summing holomorphic mappings*, An. Acad. Brasil. Ciênc. **68** (1996), 1-13.

[18] B. Maurey, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs à valeurs dans les espaces L_p*, Soc. Math. France, Astérisque, **vol. 11**, Paris, 1974.

[19] B. Mitiagin and A. Pelczyński, *Nuclear operators and approximative dimensions*, Proceedings International Congress of Mathematics, Moscow, 1966.

[20] D. Pellegrino, *Cotype and nonlinear absolutely summing mappings*, Math. Proc. R. Ir. Acad. **105A** (2005), 75-91.

[21] D. Pellegrino and J. Santos, *A general Pietsch Domination Theorem*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), 371-374.

[22] D. Pellegrino, J. Santos and J. B. Seoane-Sepúlveda, *A general Extrapolation Theorem for absolutely summing operators*, Bull. London Math. Soc. **44** (2012), 1292-1302.

[23] D. Pellegrino, J. Santos and J.B. Seoane-Sepúlveda, *Some techniques on nonlinear analysis and applications*, Adv. Math. **229** (2012), 1235-1265.

[24] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normieten Räumen*, Studia Math. **27** (1967), 333-353.

[25] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, in: Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, *Ideals and Their Applications in Theoretical Physics*, in: Teubner-Texte Math., **vol. 67**, Teubner, Leipzig, 1983, 185-199.

[26] G. Pisier, *Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., **vol. 60**, Amer. Math. Soc., 1986.

[27] J. S. Santos, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2008.