Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Desigualdades de Sobolev e Equações Elípticas não Lineares

Leon Tarquino da Costa

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Desigualdades de Sobolev e Equações Elípticas não Lineares

por

Leon Tarquino da Costa

sob a orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2016

C837d Costa, Leon Tarquino da.
Desigualdades de Sobolev e equações elípticas não lineares / Leon Tarquina da Costa.- João Pessoa, 2016.
102f.
Orientador: João Marcos Bezerra do Ó
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Desigualdade de Sobolev. 3. Pontos críticos. 4. Condição de Neumann.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Desigualdades de Sobolev e Equações Elípticas não Lineares

por

Leon Tarquino da Costa [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 25 de fevereiro de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó– UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos – UFCG
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo – UFPB
(Examinador Interno)

[1]O autor foi bolsista do(a) CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais e a minha esposa.

Agradecimentos

À Deus.

A minha família, em especial a minha mãe Maria do Socorro Padilha da Costa, ao meu pai José Tarquino da Costa Filho e a minha esposa Ivanilde Carlos Tarquino Moureira Neta que sempre me motivaram e me incentivaram nos momentos que mais precisei, e estão sempre ao meu lado nas decisões que tomo.

Ao professor João Marcos Bezerra do Ó por ter orientado este trabalho, pelo conhecimento transmitido, pelo tempo que dedicou a mim, por me motivar, transmitindo sua experiencia de forma sábia e precisa, e principalmente, pela confiança depositada.

Aos professores da UFPB, em especial a professora Flávia Jerônimo Barbosa, e aos professores Everaldo Souto de Medeiros e Uberlândio Batista Severo.

A todos os meus colegas do milênio, mestrado e doutorado com os quais pude contar nessa jornada, em especial àqueles que transpassaram a barreira do coleguismo e se tornaram amigos como Rayssa, Ricardo, Ageu, Mariana, Thiago, Wendel, Rodrigo, Esteban, Suelena, Aparecida, e não poderia deixar de citar um que considero como irmão, Victor José Araújo de Carvalho.

A banca examinadora: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos, Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo e Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros por aceitarem participar da avaliação deste trabalho.

A CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos primeiramente algumas generalizações interessantes da famosa desigualdade de Sobolev para domínios limitados. Em seguida, iremos estudar a existência de soluções positivas para uma equação elíptica não linear, sob uma certa condição de Neumann e impondo algumas condições restritivas sobre a não linearidade. Para considerarmos hipóteses mais gerais, assumiremos condições na fronteira do domÃnio.

Palavras-chave: Desigualdade de Sobolev, Pontos Críticos, Condição de Neumann.

Abstract

In this work we first study some interesting generalizations of the famous inequality Sobolev to limited domains. Then, we will study the existence of positive solution for a nonlinear elliptic equation on a certain condition Neumann, by imposing certain restricitive condition in the nonlinearity. To we consider more general hypotheses we will assume conditions on the boundary of domain.

Keywords: Sobolev inequality, Critical points, Neumann condition.

Sumário

Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é compreender dois artigos que são de grande relevância. No primeiro, que é o artigo do Brezis-Lieb [6], estudaremos essencialmente a famosa desigualdade de Sobolev e apresentaremos algumas generalizações interessantes da mesma. No segundo, que é o artigo do Wang [19], utilizaremos a desigualdade de Sobolev para demonstrar a existência de soluções positivas para um determinado problema com condição de fronteira de Neumman, sob certas condições que especificaremos a seguir.

A desigualdade de Sobolev em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, para a norma L^2 do gradiente é dada por

$$||\nabla f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \tag{1}$$

onde $2^* = 2n/(n-2)$, para toda função f com $\nabla f \in L^2$, e com f tendendo a zero no infinito no sentido fraco, isto é, $|\{x; |f(x)| > a\}| < \infty$ para todo $a > 0$ (ver [5]). A melhor constante S_n é conhecida como sendo

$$S_n = \pi n(n-2) \left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right]^{2/n}. \tag{2}$$

A constante S_n é atingida em (1) se, e somente se,

$$f(x) = \frac{a}{[\epsilon^2 + |x-y|^2]^{n-2/2}} \tag{3}$$

para algum $a \in \mathbb{R}, \epsilon \neq 0, y \in \mathbb{R}^n$. Ver por exemplo [1], [3], [11], [15], [17], [18].

Nosso primeiro objetivo é realizar algumas modificações na desigualdade de Sobolev (1), substituindo $\mathbb{R}^n$ por um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Com isso, surgem dois problemas principais:

PROBLEMA A: Se $f \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, (1) continua válido, basta considerar

$$\tilde{f} = \begin{cases} f \text{ em } \Omega, \\ 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Note que neste caso temos

$$||\nabla \tilde{f}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} > S_n ||\tilde{f}||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}$$

uma vez que a igualdade em (1) só ocorre se f for do tipo (3). No entanto, S_n continua sendo uma constante ótima para esta desigualdade (1), uma vez que

$$J(f) = \frac{||\nabla f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{||f||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}}$$

é um invariante escalar, isto é, se $\lambda > 0$, temos

$$J(\lambda f) = J(f).$$

Referente a este problema A, provaremos as desigualdades (4) e (6):

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + C(\Omega)||f||^2_{L^p_\omega(\Omega)}, \tag{4}$$

onde $C(\Omega)$ é uma constante que depende de Ω e de n, $p = n/(n-2) = 2^*/2$, e ω denota a norma L^p fraca definida por

$$||f||_{L^p_\omega(\Omega)} = \sup_A |A|^{-1/p'} \int_A |f(x)|dx,$$

onde A é um conjunto que tem medida $|A|$ finita.

A desigualdade (4) foi motivada pela seguinte desigualdade, mais fraca, encontrada em [7],

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + C_p(\Omega)||f||^2_{L^p(\Omega)}, \tag{5}$$

que é válida para todo $p < n/(n-2)$ (com $C_p(\Omega) \to 0$ quando $p \to n/(n-2)$). Observe que (5) não continua válida se $p = n/(n-2)$. De fato, tomando f como em (3), aplicando uma função de corte para fazer f tender a zero na fronteira, e então expandindo as integrais (como em [7]) perto de $\epsilon = 0$, obtemos o resultado. Nesse sentido, a desigualdade (4) é a melhor possível.

Uma desigualdade mais forte que (4), e que envolve a norma do gradiente é

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + D(\Omega)||\nabla f||^2_{L^q_\omega(\Omega)} \tag{6}$$

com $q = n/(n-1)$. (A razão pela qual (6) é mais forte que (4) é que a desigualdade de Sobolev tem uma extensão para a norma fraca, pela desigualdade de Young em espaços L^p fraco.)

PROBLEMA B: Se $f \not\equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, então (1) não é válida em geral em Ω (basta tomar $f = 1$ em Ω). Agora vamos supor que além de Ω ser limitado, a fronteira de Ω é suave. Então pode-se esperar que (1) se mantenha, adicionando integrais de fronteira adequadas do lado esquerdo. Provaremos que para $f =$ constante $\equiv C_f$ sobre $\partial\Omega$

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} + E(\Omega)|C_f|^2 \geq S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{7}$$

Por outro lado, se f não é constante em $\partial\Omega$ então as duas desigualdades a seguir são verdadeiras:

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} + F(\Omega)||f||^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \geq S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}, \tag{8}$$

$$||\nabla f||_{L^2(\Omega)} + G(\Omega)||f||_{L^q(\partial\Omega)} \geq S_n^{1/2}||f||_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{9}$$

Se Ω é uma bola de raio R, estabeleceremos que a melhor constante em (7) é $E(\Omega) = \sigma_n R^{n-2}(n-2)$, onde σ_n é a área da superfície da bola unitária de $\mathbb{R}^n$. Para este $E(\Omega)$, (7) é uma desigualdade estrita. Dado este fato, podemos pressupor (tendo em vista a solução do problema A) que algum termo pode ser adicionado no lado direito de (7). No entanto, tal termo não pode ser nenhuma norma $L^p(\Omega)$ de f, como mostraremos.

Para concluir o estudo da primeira parte, estudaremos a demonstração de mais uma desigualdade associada a estes problemas, a saber se $\Omega = B_R(0)$, pode-se obter

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 dx + I(\Omega)||f||^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq 2^{-2/n} S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{10}$$

Uma vez encerrada as demonstrações das generalizações da desigualdade de Sobolev, nosso segundo objetivo nesta dissertação é estudar a existência de solução para dois problemas elípticos. Iniciaremos estudando o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^p + f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u &> 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha(x)u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{11}$$

onde η é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$, $p = 2^* - 1 = (n+2)/(n-2)$, $\alpha \in L^\infty(\Omega), \alpha(x) \geq 0, f(x,u)$ é mensurável em x e contínua em u e para todo $M > 0$, $\sup\{f(x,u) : x \in \Omega, 0 \leq u \leq M\}$ é finito.

Veremos que encontrar uma solução para este problema é equivalente a encontrar pontos críticos do seguinte funcional:

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}u_+^{p+1} - F(x,u)\right] dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \alpha(x)u^2 dS, \tag{12}$$

onde $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)ds$ e $u_+ = \max\{u,0\}$ e $u_- = \min\{u,0\}$. Em seguida, provaremos um de nossos teoremas principais, a saber:

Teorema 0.1. Suponha que $(3.2) - (3.4)$ são válidas e que

$$c < \frac{1}{2n}S_n^{n/2}. \tag{13}$$

Então existe uma solução u de (3.1) tal que

$$J(u) \leq c.$$

Em seguida, abordaremos o problema

$$\left\{\begin{array}{rclcc} -\Delta u & = & u^p - \lambda u & \text{em} & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \\ u & > & 0 & \text{em} & \Omega, \end{array}\right. \tag{14}$$

onde $\lambda > 0$, $\quad p = (n+2)/(n-2)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^2, n \geq 3$. Mostraremos que a função $w_\lambda(x) = \lambda^{1/(p-1)}$ é uma solução constante do problema acima, e em seguida demonstraremos um resultado, onde ficará explícita a existência de soluções não constantes, finalizando assim nossos estudos.

Organizaremos esta dissertação da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentaremos algumas definições e enunciaremos resultados fundamentais para a compreensão deste texto. Dividiremos o Capítulo 2 em duas seções. Na primeira, provaremos as desigualdades (4) e (6) e na segunda proveremos as desigualdades (7), (8), (9) e (10). Finalmente, no Capítulo 3, apresentaremos uma demonstração precisa dos Teoremas 3.1 e 3.2, encerrando assim a dissertação.

Capítulo 1

Definições e Resultados Preliminares

Nosso objetivo neste capítulo será enunciar algumas definições e resultados importantes que nos auxiliarão no entendimento deste trabalho.

1.1 Espaços L^p

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$ definiremos o espaço

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

com a norma

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Além disso, definiremos

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} f \text{ é mensurável e existe uma constante } C > 0 \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \end{array} \right\}$$

com a seguinte norma

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

onde consideramos a classe de funções iguais q.t.p. em Ω. Então, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach separável, para $1 \leq p < \infty$, e reflexivo para $1 < p < \infty$ (veja [4], pág. 103). Observamos que $|f(x)| \leq ||f||_{L^\infty(\Omega)}$ q.t.p. em Ω.

Definição 1.1. Seja $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por p' o expoente conjugado de p, isto

é, p' é o número tal que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Observação 1.1. Algumas vezes, quando formos tratar de expoente conjugado usaremos outra letra, por exemplo p e q.

Vejamos agora duas desigualdades elementares sobre espaços L^p, pois a última destas será bastante usada neste trabalho.

Lema 1.1 (Desigualdade de Young)**.** Sejam $p > 1$ e $p' > 1$ reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dados os números reais $a \geq 0$ e $b \geq 0$ teremos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Demonstração. Se $a = 0$ ou $b = 0$, a desigualdade é óbvia. Suponhamos que $a, b > 0$, então usando a concavidade da função logarítimo temos

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln(ab)} \\ &= e^{\ln(a)+\ln(b)} \\ &= e^{\frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{p'}\ln(b^{p'})} \\ &\leq e^{\ln(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{p'}b^{p'})} \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \end{aligned}$$

□

Lema 1.2 (Desigualdade de Hölder)**.** Suponhamos que $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg|dx \leq ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos.
Caso 1: $(p = 1$ e $p' = \infty)$

Sabemos que $|g(x)| \leq ||g||_{L^\infty(\Omega)}$ q.t.p. em Ω. Daí, $|f(x)g(x)| \leq ||g||_{L^\infty(\Omega)}|f(x)|$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)g(x)|dx &\leq ||g||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f(x)|dx \\ &= ||f||_{L^1(\Omega)}||g||_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

Caso 2: $(1 < p < \infty)$

Suponhamos sem perda de generalidade que $||f||_{L^p(\Omega)} \neq 0$ e $||g||_{L^{p'}(\Omega)} \neq 0$. Usando a Desigualdade de Young com $a = \frac{|f(x)|}{||f||_{L^p(\Omega)}}$ e $b = \frac{|g(x)|}{||g||_{L^{p'}(\Omega)}}$ obtemos

$$\frac{|f(x)g(x)|}{||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^{p'}(\Omega)}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{L^p(\Omega)}}\right)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{|g(x)|}{||g||_{L^{p'}(\Omega)}}\right)^{p'}.$$

Integrando em Ω teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^{p'}(\Omega)}}\int_\Omega |f(x)g(x)|dx &\leq \frac{1}{p||f||^p_{L^p(\Omega)}}\int_\Omega |f(x)|^p dx + \frac{1}{p'||g||^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}}\int_\Omega |g(x)|^{p'}dx \\
&= \frac{||f||^p_{L^p(\Omega)}}{p||f||^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{||g||^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}}{p'||f||^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^{p'}(\Omega)}$$

□

Vejamos agora alguns resultados sobre espaços L^p.

Proposição 1.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz

a) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω,

b) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n, |f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$||f_n - f||_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Demonstração. Ver [4], página 90. □

Proposição 1.2 (Teorema de Fischer-Riesz)**.** O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach, para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Ver [4], página 93. □

Proposição 1.3. Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e seja $f \in L^p(\Omega)$ tal que

$$||f_n - f||_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω,

b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k,$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. Ver [4], página 94. □

Definiremos agora a convolução de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.4 (Teorema de Young)**.** Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e seja $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável sobre $\mathbb{R}^n$ e definimos

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Além disso, $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$||f \star g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Ver [4], página 104. □

Uma generalização da proposição anterior é o seguinte resultado:

Proposição 1.5 (Teorema de Young)**.** Suponha que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$, $\;1 \leq q \leq \infty$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. Então $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e

$$||f \star g||_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}||g||_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Ver [4], página 117. □

Definimos o suporte de uma função, e denotamos por $\text{supp} f$, o fecho do conjunto $\{x; f(x) \neq 0\}$. Podemos também compreender a definição de suporte através do seguinte resultado.

Proposição 1.6 (Definição de Suporte)**.** Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Considere a família $(\omega_i)_{i \in I}$ de todos os conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ tal que para cada $i \in I$, $\; f = 0$ q.t.p. em ω_i. Seja $\omega = \cup_{i \in I} \omega_i$. Então $f = 0$ q.t.p. em ω. Definimos o $\text{supp} f$ como sendo o complementar de ω em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver [4], página 106. □

Definição 1.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ se $f \in L^p(K)$ para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$.

Definição 1.3. Dizemos que uma sequência $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^q(\Omega)$ converge fraco a $f \in L^q(\Omega)$, e escrevemos

$$f_k \rightharpoonup f \text{ em } L^q(\Omega),$$

se

$$\int_\Omega f_k g dx \to \int_\Omega f g dx, \text{ quando } k \to \infty,$$

para cada $g \in L^{q'}(\Omega)$.

Proposição 1.7. Sejam (f_n) uma sequência em $L^q(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega)$. Suponha que $f_n \rightharpoonup f$ em $L^q(\Omega)$ e $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω onde $1 \leq q < \infty$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} (||f_n||^q_{L^q(\Omega)} - ||f_n - f||^q_{L^q(\Omega)}) = ||f||^q_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [9] página 14. □

1.2 Espaços de Sobolev

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Suponha que $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, e seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Denote $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u e escrevemos $v = D^\alpha u$, quando

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, onde $C_0^\infty(\Omega)$ denota o conjunto de todas as funções de classe C^∞ de suporte compacto em Ω.

Definição 1.4. Dados $k \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$, com $1 < p < \infty$, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo formado por todas as funções de $L^p(\Omega)$ que admitem derivadas parciais fracas até ordem k em $L^p(\Omega)$, isto é,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leq k\},$$

munido da norma

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Em particular, quando $k = 1$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$, definimos o seguinte espaço

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{c} \exists g_1, g_2, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right\}$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$. Com isso, podemos escrever

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Podemos equipar o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ com a norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^p(\Omega)}.$$

Para o decorrer deste trabalho, iremos dar maior ênfase ao caso $k = 1$ e $p = 2$. Para este caso especial, daremos a seguinte notação para o espaço de Sobolev

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Dada $u, v \in H^1(\Omega)$ definiremos o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + \langle \nabla u, \nabla v\rangle dx,$$

e a norma

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Definimos também

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{W^{1,2}(\Omega)}}.$$

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, consideremos o espaço de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ definido como sendo o fecho do espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em relação a norma de Dirichlet

$$||u||_D^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)},$$

isto é, $D^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{||\cdot||_D}$.

Observação 1.2. Os elementos de $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ se anulam no infinito, no sentido que para todo $a > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > a\}| < \infty.$$

De fato, dada $f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, seja $A = \{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > a\}$, então

$$\begin{aligned} |A| &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A dx \\ &= \frac{1}{a^{2^*}} \int_{\mathbb{R}^n} a^{2^*} \chi_A dx. \end{aligned}$$

como em A, $|f(x)| > a$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} a^{2^*} \chi_A dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{2^*} dx,$$

além disso, do Teorema 1.1 abaixo temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{2^*} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^{2^*} dx.$$

Logo,

$$|A| < \infty.$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, considere $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_D}$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então por definição existe $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $||u_n - u||_D \to 0$. Defina,

$$\tilde{u}_n = \begin{cases} u_n \text{ se } x \in \Omega \\ 0 \text{ se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

então $\tilde{u}_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp}\tilde{u}_n = \text{supp}u_n$.

Proposição 1.8. $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, é reflexivo para $1 < p < \infty$ e é separável para $1 \leq p < \infty$. Além disso, $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.

Demonstração. Ver [4], página 264. □

Teorema 1.1. (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.) Suponha que $1 \leq p < n$. Existe uma constante C, que depende apenas de p e n, tal que

$$||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.1}$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos.

1) Primeiramente, suponha que $p = 1$.

Como u tem suporte compacto, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) dy_i,$$

logo,

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)| dy_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Consequentemente

$$|u(x)|^{n/(n-1)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)| dy_i \right)^{1/(n-1)}. \tag{1.2}$$

Integrando esta desigualdade com respeito a x_1 temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{n/(n-1)} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_i \right)^{1/(n-1)} dx_1 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{1/(n-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_i \right)^{1/(n-1)} dx_1 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{1/(n-1)} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i \right)^{1/(n-1)}, \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade resulta da desigualdade de Hölder generalizada.

Agora integrando (1.3) com respeito a x_2 obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{n/(n-1)} dx_1 dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_2 \right)^{1/(n-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1, i\neq 2}^{n} I_i^{1/(n-1)} dx_2,$$

onde

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1, \quad I_i := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i \quad (i = 3, \ldots, n).$$

Aplicando mais uma vez a desigualdade de Hölder generalizada, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{n/(n-1)} dx_1 dx_2 \leq& \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_2 \right)^{1/(n-1)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 dx_2 \right)^{1/(n-1)} \\
& \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{1/(n-1)}.
\end{aligned}$$

Continuando integrando com respeito a $x_3, \ldots, x_n$ obteremos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{n/(n-1)} &\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 \ldots dy_i \ldots dx_n \right)^{1/(n-1)} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx \right)^{n/(n-1)}, \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

logo,

$$||u||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq ||\nabla u||_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.5}$$

Que é a desigualdade desejada para $p = 1$.

2) Considere agora o caso $1 < p < n$.

Aplicando a estimativa (1.4) para $v := |u|^\gamma$, onde $\gamma > 1$ é escolhido convenientemente, e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma n)/(n-1)} dx\right)^{(n-1)/n} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |u|^\gamma| dx \\ &= \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |\nabla u| dx \\ &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\right)^{1/p} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Devemos escolher γ de forma que

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1}.$$

Isto é,

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1;$$

no caso em que

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*,$$

a estimativa (1.6) nos fornece

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\right)^{1/p^*} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\right)^{1/p}.$$

□

Observamos que a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev vale em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.9 (Fórmula de intergração por partes)**.** Sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta^i dS \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Demonstração. Ver [10] página 628. □

Vejamos agora um resultado que será demansiadamente usado neste trabalho.

Proposição 1.10 (Fórmulas de Green)**.** Sejam $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, então

i) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS.$

ii) $\displaystyle\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} dS.$

iii) $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS.$

Demonstração. Ver [10] página 628. □

Observamos que o item (ii) na proposição acima é também conhecido como Teorema da Divergência de Green.

Proposição 1.11 (Coordenadas Polares)**.** Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua e integrável. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0,r)} f dS \right) dr,$$

para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver [10] página 628. □

Proposição 1.12 (Teorema do Traço)**.** Suponha que Ω é limitado e que $\partial\Omega$ é C^1. Então existe um operedor linear limitado

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que

i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

ii) $||Tu||_{L^p(\partial\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com a constante C dependendo apenas de p e Ω.

Demonstração. Ver [10] página 258. □

Definição 1.5. Chamamos Tu o traço de u sobre $\partial\Omega$.

Vimos que a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev implica na imersão de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$ para $1 \leq p < n, p^* = pn/(n-p)$. Em nosso próximo resultado veremos que $W^{1,p}(\Omega)$ está de fato compactamente contido (imerso) em $L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p^*$

Definição 1.6. Sejam X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$. Dizemos que X está compactamente contido em Y, e escrevemos

$$X \subset\subset Y,$$

se

i) $||x||_Y \leq C||x||_X \quad (x \in X)$ para alguma constante C.

ii) cada sequência limitada em X é precompacta em Y.

Proposição 1.13 (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov)**.** Suponha que Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e suponha também que $\partial\Omega$ é C^1. Suponha que $1 \leq p < n$. Então

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega),$$

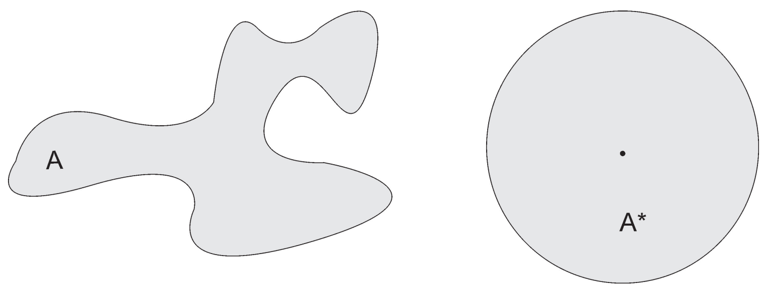
para cada $1 \leq q < p^*$.

Demonstração. Ver [10] página 272. □

1.3 Técnicas de Rearranjamento

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que tem medida finita. O rearranjamento simétrico de A denotado por A^* é uma bola aberta, cuja medida coincide com a medida de A,

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_n |x|^n < |A|\}.$$



Seja f uma função mensurável não negativa que tende a zero no infinito, no sentido que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}| < \infty \text{ para todo } t > 0.$$

Definimos o rearranjamento simétrico decrescente f^* de f simetrizando seus conjuntos de nível,

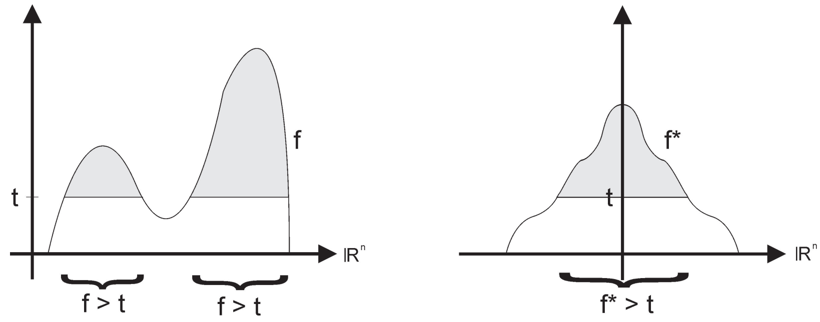
$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{f(x)>t\}^*} dt.$$

Então f^* é semicontínua inferiormente (visto que seus conjuntos de nível são abertos), e é unicamente determinado pela função de distribuição

$$\mu_f(t) = |\{x : f(x) > t\}|.$$

Por construção, f^* é equimensurável à f, isto é, os conjuntos de nível correspondentes das duas funções tem a mesma medida,

$$\mu_f(t) = \mu_{f^*}(t), \text{ para todo } t > 0$$



Devido as técnicas de rearranjamento temos:

Lema 1.3. i) $||\nabla f^*||_{L^2(\Omega^*)} \leq ||\nabla f||_{L^2(\Omega)}$.

ii) $||f^*||_{L^2(\Omega^*)} = ||f||_{L^2(\Omega)}$.

iii) $||f^*||_{L^p_\omega(\Omega^*)} = ||f||_{L^p_\omega(\Omega)}$.

Demonstração. Ver [13] e [2]. □

1.4 Capacidade

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um domínio limitado, com fronteira $\partial\Omega$ suave, e u uma função harmônica definida no complementar do conjunto $\overline{\Omega}$ e satisfazendo a condição de fronteira $u = 1$ sobre $\partial\Omega$, e $u = 0$ no infinito. A existência de u é facilmente estabelecida (de forma única), como limite de funções harmônicas u' em uma sequência crescente de domínios limitados, tendo $\partial\Omega$ como uma fronteira interior, na qual $u' = 1$, e com fronteiras exterior, nas quais $u' = 0$, tendendo ao infinito. Se Σ denota a fronteira de Ω, ou qualquer superfície suave, fechada, envolvendo Ω. Então definimos a capacidade do conjunto Ω, e denotaremos por $\mathrm{Cap}(\Omega)$, da seguinte forma:

$$\mathrm{Cap}(\Omega) = -\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \eta} dS = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla u|^2 dx, \tag{1.7}$$

onde η é o normal exterior. Para mais detalhes ver [12].

Capítulo 2

Melhores Constantes nas Desigualdades de Sobolev

Nosso objetivo nesse capítulo é demonstrar as desigualdades (4) e (6) enunciadas na Introdução deste trabalho. Para tal, precisamos de ferramentas auxiliares, a saber, as técnicas de rearranjamento simétrico decrescente que foram abordadas no capítulo anterior.

2.1 O caso $f \equiv 0$ sobre a fronteira de Ω

Teorema 2.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $n \geq 3$. Para toda $f \in H^1(\Omega)$ tal que $f \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, vale a seguinte desigualdade

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + C(\Omega)||f||^2_{L^p_\omega(\Omega)}, \tag{2.1}$$

onde $C(\Omega)$ é uma constante que depende apenas de Ω e de n, e $p = n/(n-2) = 2^*/2$.

Demonstração. Seja f^* um rearranjamento simétrico decrescente de uma função f, onde f é extendida como sendo zero em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Pelas técnicas de rearranjamento, sabemos que:

$$\begin{aligned} ||\nabla f^*||_{L^2(\Omega^*)} &\leq ||\nabla f||_{L^2(\Omega)} \\ ||f^*||_{L^{2^*}(\Omega^*)} &= ||f||_{L^{2^*}(\Omega)} \\ ||f^*||_{L^p_\omega(\Omega^*)} &= ||f||_{L^p_\omega(\Omega)} \end{aligned}$$

Desta maneira, é suficiente considerar o caso em que Ω é uma bola centrada na origem e raio R, escolhida de forma a ter o mesmo volume do domínio original, e f uma função simétrica decrescente. Seja $g \in L^\infty(\Omega)$ e defina u como sendo a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u = g & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Seja

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) + u(x) + ||u||_\infty & \text{em} \quad \Omega, \\ ||u||_\infty (R/|x|)^{n-2} & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Aplicando a desigualdade de Sobolev em ϕ, obtemos

$$||\nabla\phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq S_n ||\phi||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} ||\nabla\phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla\phi|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla(f + u + ||u||_\infty)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \left|\nabla\left(||u||_\infty \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\right)\right|^2 dx, \end{aligned}$$

como,

$$\left|\nabla\left(\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\right)\right| = \frac{(n-2)R^{n-2}}{|x|^{n-1}},$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \left|\nabla\left(\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\right)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{R^{2(n-2)}(n-2)^2}{|x|^{2n-2}} dx.$$

Usando coordenadas polares, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{R^{2(n-2)}(n-2)^2}{|x|^{2n-2}} dx = \int_{\partial(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)} d\sigma \int_R^{+\infty} \frac{R^{2(n-2)}(n-2)^2}{r^{2n-2}} r^{n-1} dr.$$

Resolvendo esta integral obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)} d\sigma \int_R^{+\infty} \frac{R^{2(n-2)}(n-2)^2}{r^{2n-2}} r^{n-1} dr &= \sigma_n R^{2(n-2)}(n-2)^2 \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^{n-1}} dr \\ &= \sigma_n R^{2(n-2)}(n-2)^2 \left[\frac{r^{-n+2}}{-n+2}\right]_R^{+\infty}. \end{aligned}$$

substituindo os valores acima ficamos com

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}\left|\nabla\left(\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\right)\right|^2 dx &= \sigma_n R^{2(n-2)}(n-2)^2\left[-\frac{R^{-n+2}}{-n+2}\right]\\
&= \sigma_n\frac{R^{2(n-2)}(n-2)^2}{R^{n-2}(n-2)}\\
&= \sigma_n R^{n-2}(n-2).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$||\nabla\phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_\Omega|\nabla(f+u+||u||_\infty)|^2dx + ||u||^2_\infty\sigma_n R^{n-2}(n-2).$$

E por outro lado,

$$
\begin{aligned}
||\phi||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}\\
&= \left(\int_\Omega|f+u+||u||_\infty|^{2^*}dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}\left|||u||_\infty\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\right|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}\\
&\geq ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

pois $u+||u||_\infty \geq 0$. E portanto,

$$\int_\Omega|\nabla(f+u)|^2dx + ||u||^2_\infty R^{n-2}(n-2)\sigma_n \geq S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}, \tag{2.4}$$

onde,

$$\sigma_n = \frac{2(\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

é a área superficial da bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Desenvolvendo (2.4), encontramos

$$\int_\Omega|\nabla f|^2dx + 2\int_\Omega\langle\nabla f,\nabla u\rangle dx + \int_\Omega|\nabla u|^2dx + ||u||^2_\infty R^{n-2}(n-2)\sigma_n \geq S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Da identidade de Green temos,

$$\int_\Omega f(\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} f\frac{\partial u}{\partial\eta}dS - \int_\Omega\langle\nabla f,\nabla u\rangle dx,$$

e como por hipótese $f\equiv 0$ sobre $\partial\Omega$ temos

$$\int_\Omega\langle\nabla f,\nabla u\rangle dx = -\int_\Omega f(\Delta u)dx,$$

usando o fato que $\Delta u = g$ em Ω obtemos

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 dx - 2\int_\Omega fg dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||_\infty^2 \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}, \qquad (2.5)$$

onde $K = R^{n-2}(n-2)\sigma_n$. Substituindo g por λg e u por λu e otimizando com respeito a λ obtemos

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 dx - 2\lambda \int_\Omega fg dx + \lambda^2 \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||_\infty^2 \right) \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Chamando

$$a = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||_\infty^2 \right) \text{ e } b = -2\int_\Omega fg dx,$$

obtemos, pelo completamento de quadrado, que

$$\begin{aligned} a\lambda^2 + b\lambda &= a\left(\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda\right) \\ &= a\left[\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(\lambda + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left(\lambda + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo $\lambda \to -b/2a$ teremos

$$a\lambda^2 + b\lambda \to -\frac{b^2}{4a} = -\frac{\left(-2\int_\Omega fg dx\right)^2}{4\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||_\infty^2\right)} = -\frac{\left(\int_\Omega fg dx\right)^2}{\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||_\infty^2\right)}.$$

Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 dx \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + \frac{\left(\int_\Omega fg dx\right)^2}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||_\infty^2}. \qquad (2.6)$$

Na desigualdade (2.6), podemos maximizar o lado direito com respeito a g. Tendo em vista a definição da norma fraca, devemos de fato restringir a nossa atenção para $g = \chi_A$, ou seja, a função característica de algum subconjunto A de Ω. Agora, vamos estabelecer algumas estimativas para alguns valores em (2.6). Denotemos por C_n constantes que dependem apenas de n. As estimativas são:

$$\int_\Omega fg dx = \int_A f dx \qquad (2.7)$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_n |A|^{1+2/n} \tag{2.8}$$

$$||u||_\infty \leq C_n |A|^{2/n} \tag{2.9}$$

De fato, a equação (2.7) é apenas porque estamos considerando $g = \chi_A$. Para verificarmos (2.8) vamos multiplicar (2.2) por u e integrar. Com isso

$$\int_\Omega (\Delta u) u dx = \int_\Omega g u dx,$$

mas, utilizando a identidade de Green temos

$$\int_\Omega (\Delta u) u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} u dS - \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u \rangle dx.$$

Como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue que,

$$\int_\Omega (\Delta u) u dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

logo,

$$-\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega g u dx = \int_A u dx.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx &= -\int_A u dx \\
&\leq \left| -\int_A (u) 1 dx \right| \\
&\leq \int_A |u||1| dx.
\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder obtemos,

$$\int_A |u||1| dx \leq \left(\int_A |u|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \left(\int_A |1|^{2n/(n+2)} dx \right)^{(n+2)/2n},$$

daí,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx &\leq \left(\int_A |u|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \left(\int_A |1|^{2n/(n+2)} dx \right)^{(n+2)/2n} \\
&= ||u||_{L^{2^*}(\Omega)} |A|^{(n+2)/(2n)} \\
&\leq S_n^{-1/2} ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} |A|^{(1/2)+(1/n)},
\end{aligned}$$

logo,

$$||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \leq S_n^{-1/2}|A|^{(1/2)+(1/n)},$$

e portando,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq C_n |A|^{1+2/n}$$

o que resulta em (2.8). Agora, fixando $y \in \Omega$, seja

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \frac{1}{n(2-n)\sigma_n}|x-y|^{2-n}.$$

Uma vez que u é solução do problema (2.2), podemos escrever, pela representação de Green,

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(x)dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{n(2-n)\sigma_n}|x-y|^{2-n} g(x)dx, \end{aligned}$$

sendo assim,

$$\begin{aligned} |u(y)| &= \left| \frac{1}{n(2-n)\sigma_n} \int_\Omega |x-y|^{2-n}\chi_A(x)dx \right| \\ &\leq C_n' \int_A |x-y|^{2-n} dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} C_n' \int_A |x-y|^{2-n} dx &\leq C_n' \left(\int_A \left(|x-y|^{2-n}\right)^{n/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/n} \left(\int_A (1)^{n/2} dx \right)^{2/n} \\ &= C_n' \left(\int_A |x-y|^{-n} dx \right)^{(n-2)/n} |A|^{2/n}. \end{aligned}$$

Desde que $|x|^{2-n}$ pertence a $L_\omega^{n/(n-2)}(\Omega)$,

$$\left(\int_A |x-y|^{-n} dx \right)^{(n-2)/n} < \infty,$$

logo,

$$\begin{aligned} |u(y)| &\leq C_n' \left(\int_A |x-y|^{-n} dx \right)^{(n-2)/n} |A|^{2/n} \\ &= C_n |A|^{2/n}. \end{aligned}$$

Daí,

$$||u||_\infty \leq C_n|A|^{2/n}.$$

Como $|A| \leq |\Omega| = \sigma_n R^n/n$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||_\infty^2 &\leq C_n|A|^{1+(2/n)} + C_n^2 K|A|^{4/n} \\
&\leq |A|^{4/n} C_n \left(\frac{|A|^{1+(2/n)}}{|A|^{4/n}} + C_n' R^{n-2} \right) \\
&\leq C_n |A|^{4/n} R^{n-2}. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Logo, substituindo (2.10) em (2.6) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla f|^2 dx &\geq S_n||f||_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + \frac{\left(\int_A f dx\right)^2}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||_\infty^2} \\
&\geq S_n||f||_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + \frac{\left(\int_A f dx\right)^2}{C_n R^{n-2}|A|^{4/n}} \\
&= S_n||f||_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_n R^{n-2}} \left(\frac{\int_A f dx}{|A|^{2/n}} \right)^2.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo em $|A|$ ficamos com

$$\begin{aligned}
||\nabla f||_{L^2(\Omega)}^2 &\geq S_n||f||_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_n R^{n-2}} \sup_A \left(\frac{\int_A f dx}{|A|^{2/n}} \right)^2 \\
&\geq S_n||f||_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_n R^{n-2}} \left(\sup_A \frac{1}{|A|^{2/n}} \int_A f dx \right)^2.
\end{aligned}$$

Usando a definição da norma fraca,

$$||\nabla f||_{L^2(\Omega)}^2 \geq S_n||f||_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_n R^{n-2}}||f||_{L_\omega^p(\Omega)}^2.$$

Uma vez que $|\Omega| = \sigma_n R^n/n$, temos

$$|\Omega|^{\frac{2-n}{n}} = \frac{\sigma_n^{\frac{2-n}{n}} R^{\frac{n(2-n)}{n}}}{n^{\frac{2-n}{n}}} = \frac{\sigma_n^{\frac{2-n}{n}}}{n^{\frac{2-n}{n}}} \frac{1}{R^{n-2}},$$

donde,

$$\frac{1}{R^{n-2}} = \frac{n^{\frac{2-n}{n}}}{\sigma_n^{\frac{2-n}{n}}} |\Omega|^{\frac{2-n}{n}}.$$

Usando o fato acima obtemos,

$$
\begin{aligned}
||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} &\geq S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + C_n^{-1}\frac{n^{\frac{2-n}{n}}}{\sigma_n^{\frac{2-n}{n}}}|\Omega|^{\frac{2-n}{n}}||f||^2_{L^p_\omega(\Omega)} \\
&= S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + C'_n|\Omega|^{\frac{2-n}{n}}||f||^2_{L^p_\omega(\Omega)} \\
&= S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + C(\Omega)||f||^2_{L^p_\omega(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Portanto (2.1) está provado (para todo Ω) com a constante

$$C(\Omega) = C'_n|\Omega|^{\frac{2-n}{n}}. \tag{2.11}$$

□

O teorema anterior foi motivado pelo estudo da seguinte desigualdade, encontrada em [7],

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} \geq S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + C_p(\Omega)||f||^2_{L^p(\Omega)}$$

que é válida para todo $p < n/(n-2)$, e além disso, $C_p(\Omega) \to 0$ quando $p \to n/(n-2)$. Esta desigualdade é considerada mais fraca que a do Teorema 2.1. Isto decorre do fato que a desigualdade acima não é válida se $p = n/(n-2)$.

Agora, faremos um resultado, considerado mais forte que o Teorema 2.1, que envolve a norma do gradiente.

Teorema 2.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $n \geq 3$ e seja $f \in H^1(\Omega)$ tal que $f \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$. Então,

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} \geq S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + D(\Omega)||\nabla f||^2_{L^q_\omega(\Omega)}, \tag{2.12}$$

com $q = \frac{n}{n-1}$.

Demonstração. Poderíamos tentar reproduzir a prova do Teorema 2.1, no entanto, para este caso, a técnica de rearranjamento não é válida, uma vez que não é verdade que $||\nabla f||_{L^q_\omega(\Omega)} \leq ||\nabla f^*||_{L^q_\omega(\Omega)}$. Todavia, ainda podemos supor que $f \geq 0$, pois trocando f por $|f|$, não alteramos nenhum das normas em (2.12). Consequentemente teremos que usar uma aproximação direta, e a constante $D(\Omega)$ em (2.12) não dependerá apenas de $|\Omega|$. Na verdade, ela vai depender da capacidade de Ω. Isto é,

$$D(\Omega) = \frac{C_n}{\text{Cap}(\Omega)}. \tag{2.13}$$

Onde $\text{Cap}(\Omega)$ foi definido na Seção 1.4. Com isso, provaremos agora nosso teorema.

Analogamente ao que fizemos na prova do Teorema 2.1, seja $g \in L^{\infty}(\Omega)$ e defina u como a solução do problema (2.2), porém vamos substituir (2.3) por

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) + u(x) + ||u||_{\infty} & \text{em} \quad \Omega \\ ||u||_{\infty} v(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2.14}$$

onde v é uma solução do problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \\ v = 1 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

com $v \to 0$ no infinito. Por definição,

$$\text{Cap}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla v|^2 dx. \tag{2.16}$$

Aplicando a desigualdade de Sobolev para ϕ obtemos

$$||\nabla \phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq S_n ||\phi||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

Note que, por um lado

$$\begin{aligned} ||\nabla \phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla \phi|^2 dx, \end{aligned}$$

usando a definição de ϕ, segue que

$$\begin{aligned} ||\nabla \phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\Omega} |\nabla (f + u + ||u||_{\infty})|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla (||u||_{\infty} v)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla (f + u)|^2 dx + ||u||^2_{\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla v|^2 dx, \end{aligned}$$

e desde que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla v|^2 dx = \text{Cap}(\Omega)$$

temos

$$||\nabla \phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\Omega} |\nabla (f + u)|^2 dx + ||u||^2_{\infty} \text{Cap}(\Omega).$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
||\phi||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \\
&= \left(\int_{\Omega} |\phi|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\phi|^{2^*} dx\right)^{2/2^*},
\end{aligned}
$$

usando novamente a definição de ϕ, segue que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} |\phi|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\phi|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} &\geq \left(\int_{\Omega} |f + u + ||u||_\infty|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \\
&= ||f + u + ||u||_\infty||^2_{L^{2^*}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

daí, como $u + ||u||_\infty > 0$ segue que

$$||\phi||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \geq ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla(f+u)|^2 dx + ||u||^2_\infty \mathrm{Cap}(\Omega) \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Sendo assim, por uma conta análoga à que foi feita na demostração do Teorema 2.1, observamos que a desigualdade (2.6) continua válida, porém com a constante K substituída por $K = \mathrm{Cap}(\Omega)$. Além disso, note que podemos reescrever (2.6) da seguinte maneira

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 dx \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + \frac{\left(\int_\Omega \langle \nabla f, \nabla u\rangle dx\right)^2}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||^2_\infty}, \tag{2.17}$$

que é válida para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Por densidade, temos que (2.17) é válida para toda $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (a razão é que para toda $u \in H_0^1 \cap L^\infty$, existe uma sequência $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_j \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $||u_j||_\infty \to ||u||_\infty$).

Agora escolhamos u para ser a solução de (2.2) onde g é dada por

$$g(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\mathrm{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)\chi_A(x)\right]. \tag{2.18}$$

Esta função u está em $L^\infty(\Omega)$. De fato, podemos escrever

$$u = w + h,$$

onde w satisfaz $\Delta w = g$ em todo $\mathbb{R}^n$, a saber,

$$w = C_n|x|^{2-n} \star g. \tag{2.19}$$

Desta forma h é harmônica em Ω, pois

$$\Delta u = \Delta(w + h)$$

implica que

$$g = g + \Delta h$$

o que resulta em

$$\Delta h = 0$$

e $h = -w$ sobre $\partial\Omega$, pois $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Nestas condições,

$$\begin{aligned} ||h||_{L^\infty(\Omega)} &\leq ||h||_{L^\infty(\partial\Omega)} \\ &= ||w||_{L^\infty(\partial\Omega)} \\ &\leq ||w||_{L^\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

com isso, usando a desigualdade triangular obtemos,

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty(\Omega)} &= ||w + h||_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq ||w||_{L^\infty(\Omega)} + ||h||_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Usando o fato que

$$||h||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||w||_{L^\infty(\Omega)},$$

temos

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq 2||w||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} w &= C_n|x|^{2-n} \star g \\ &= C_n|x|^{2-n} \star \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\operatorname{sgn} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \chi_A \right] \right) \\ &= C_n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |x|^{2-n} \right) \star \left[\left(\operatorname{sgn} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \chi_A \right], \end{aligned}$$

e como

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^{2-n} = (2-n)|x|^{1-n},$$

segue que

$$|w| \leq C_n(n-2)|x|^{1-n} \star \chi_A. \tag{2.20}$$

Uma vez que $|x|^{1-n} \in L_\omega^{n/(n-1)}$, obtemos

$$||u||_\infty \leq 2||\omega||_\infty \leq C_n'|A|^{1/n}. \tag{2.21}$$

Agora, vamos dar uma estimativa para $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$. Multiplicando (2.2) por u e integrando temos

$$\int_\Omega (\Delta u) u dx = \int_\Omega g u dx$$

mas, usando a identidade de Green,

$$\int_\Omega (\Delta u) u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} u dS - \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u \rangle dx.$$

Como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega (\Delta u) u dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx &= -\int_\Omega g u dx \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\chi_A\right] u dx,
\end{aligned}$$

usando integração por partes e o fato que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ vemos que

$$-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\chi_A\right] u dx = \int_\Omega \left[\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\chi_A\right]\frac{\partial u}{\partial x_i} dx.$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\chi_A\right]\frac{\partial u}{\partial x_i} dx &\leq \left|\int_\Omega \left[\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\chi_A\right]\frac{\partial u}{\partial x_i} dx\right| \\
&\leq \int_\Omega \left|\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |\chi_A| dx \\
&= \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |\chi_A| dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |\chi_A| dx &\leq \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\chi_A|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^2(\Omega)} |A|^{1/2},
\end{aligned}$$

como
$$||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^2(\Omega)} \leq ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$$
segue que
$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |\chi_A| dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} |A|^{1/2}$$
e portanto,
$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq |A|. \tag{2.22}$$
Finalmente, como $f = 0$ sobre $\partial\Omega$, usando novamente a identidade de Green obtemos,
$$\int_\Omega \langle \nabla f, \nabla u \rangle dx = -\int_\Omega f(\Delta u) dx$$
como $\Delta u = g$ em Ω, segue que
$$-\int_\Omega f(\Delta u) dx = -\int_\Omega f g dx,$$
e como
$$g = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\chi_A\right]$$
temos,
$$-\int_\Omega f g dx = -\int_\Omega f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\chi_A\right]\right) dx.$$
Usando integração por partes obtemos,
$$-\int_\Omega f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\chi_A\right]\right) dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left[\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\chi_A\right] dx.$$
Como
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$$
segue que
$$\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left[\left(\text{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\chi_A\right] dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \chi_A dx.$$
E portanto,
$$\int_\Omega \langle \nabla f, \nabla u \rangle dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \chi_A dx.$$

Usando estas estimativas e o fato que $|A|^{1-(2/n)} \leq |\Omega|^{1-(2/n)} \leq S_n^{-1}\mathrm{Cap}(\Omega)$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||_\infty^2 &\leq |A| + \mathrm{Cap}(\Omega)C_n'|A|^{2/n} \\
&= |A|^{2/n}(|A|^{1-2/n} + \mathrm{Cap}(\Omega)C_n') \\
&\leq |A|^{2/n}(S_n^{-1}\mathrm{Cap}(\Omega) + C_n'\mathrm{Cap}(\Omega)) \\
&= |A|^{2/n}K_n\mathrm{Cap}(\Omega),
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + K||u||_\infty^2} &\geq \frac{1}{|A|^{2/n}K_n\mathrm{Cap}(\Omega)} \\
&\geq \frac{C_n}{|A|^{2/n}\mathrm{Cap}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

E portanto (2.17) torna-se

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 dx \geq S_n||f||_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + \frac{C_n\left(\int_A \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| dx\right)^2}{\mathrm{Cap}(\Omega)|A|^{2/n}}. \tag{2.23}$$

Para verificar que $|A|^{1-(2/n)} \leq S_n^{-1}\mathrm{Cap}(\Omega)$ considere agora a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1 & \text{em} \quad \Omega \\ v(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

aplicando a desigualdade de Sobolev a esta função obtemos

$$||\nabla\tilde{v}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq S_n||\tilde{v}||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2$$

mas, por um lado

$$\begin{aligned}
||\tilde{v}||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \\
&= \left(\int_\Omega |\tilde{v}|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\tilde{v}|^{2^*} dx\right)^{2/2^*},
\end{aligned}$$

usando a definição de $\tilde{v}$, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |\tilde{v}|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\tilde{v}|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} &\geq \left(\int_\Omega 1 dx\right)^{2/2^*} \\
&= |\Omega|^{2/2^*},
\end{aligned}$$

como $2/2^* = 1 - (2/n)$, temos

$$||\tilde{v}||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \geq |\Omega|^{1-(2/n)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ||\nabla\tilde{v}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\tilde{v}|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla\tilde{v}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla\tilde{v}|^2 dx. \end{aligned}$$

Como $|\nabla\tilde{v}| = 0$ em Ω e $\Delta\tilde{v} = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ segue que

$$\int_{\Omega} |\nabla\tilde{v}|^2 dx = 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla\tilde{v}|^2 dx = \text{Cap}(\Omega).$$

Portanto,

$$||\nabla\tilde{v}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \text{Cap}(\Omega).$$

Logo,

$$\text{Cap}(\Omega) \geq S_n|\Omega|^{1-(2/n)}$$

ou seja,

$$S_n^{-1}\text{Cap}(\Omega) \geq |A|^{1-(2/n)}.$$

Desta forma, somando em (2.23) temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx &\geq \sum_{i=1}^{n} S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_n \left(\int_A \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| dx\right)^2}{\text{Cap}(\Omega)|A|^{2/n}} \\ &= nS_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + \frac{C_n}{\text{Cap}(\Omega)|A|^{2/n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_A \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| dx\right)^2 \\ &\geq nS_n||f||^2_{2^*} + \frac{C_n}{\text{Cap}(\Omega)|A|^{2/n}} \left(\int_A \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| dx\right)^2 \\ &\geq nS_n||f||^2_{2^*} + \frac{C_n}{\text{Cap}(\Omega)|A|^{2/n}} \int_A |\nabla f| dx. \end{aligned}$$

Tomando o supremo em $|A|$ obtemos

$$\begin{aligned} n\int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx &\geq nS_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + \frac{C_n}{\text{Cap}(\Omega)} \sup_A |A|^{-2/n} \left(\int_A |\nabla f| dx\right)^2 \\ &= nS_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + \frac{C_n}{\text{Cap}(\Omega)} ||\nabla f||^2_{L^q_\omega(\Omega)}, \end{aligned}$$

e portanto, dividindo a equação acima por n concluimos que

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + \frac{C_n}{\mathrm{Cap}(\Omega)} ||\nabla f||^2_{L^q_w(\Omega)}.$$

Isto completa a prova de (2.12) com a constante dada em (2.13). □

2.2 O caso $f \not\equiv 0$ sobre a fronteira de Ω

Nesta seção, estudaremos o caso em que $f \not\equiv 0$ sobre a fronteira de Ω. Iniciaremos com a prova da desigualdade (7). No entanto, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave. Para toda $f \in H^1(\Omega)$, existe w definifa em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ tal que w é harmônica, coincide com f sobre $\partial\Omega$ e quando $|x| \to \infty$, $w(x) \to 0$.

Demonstração. Suponhamos primeiramente que Ω é uma bola centrada na origem e de raio R, neste caso,

$$w(x) = \frac{C_f R^{n-2}}{|x|^{n-2}},$$

onde $f(x) = C_f$ é constante sobre $\partial\Omega$. De fato, note que se $x \in \partial\Omega$ então $|x| = R$, daí $w(x) = C_f R^{n-2}/R^{n-2} = C_f$, além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x_i}(x) &= C_f R^{n-2} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{(2-n)/2} \\
&= C_f R^{n-2} \frac{2-n}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{((2-n)/2)-1} 2x_i \\
&= C_f R^{n-2}(2-n)|x|^{-n} x_i.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}(x) &= C_f R^{n-2}(2-n) \frac{\partial}{\partial x_i}(|x|^{-n} x_i) \\
&= C_f R^{n-2}(2-n) \left[|x|^{-n} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-n/2} \right] \\
&= C_f R^{n-2}(2-n) \left[|x|^{-n} + x_i \left(-\frac{n}{2}\right) |x|^{-(n+2)} 2x_i \right] \\
&= C_f R^{n-2}(2-n)[|x|^{-n} - n|x|^{-(n+2)} x_i^2] \\
&= C_f R^{n-2}(2-n)|x|^{-n}[1 - n|x|^{-2} x_i^2].
\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}(x) &= C_f R^{n-2}(2-n)|x|^{-n}\sum_{i=1}^{n}(1-n|x|^{-2}x_i^2)\\ &= C_f R^{n-2}(2-n)|x|^{-n}(n-n|x|^{-2}|x|^2)\\ &= 0,\end{aligned}$$

ou seja, w é harmônica. Além disso, da definição de w vemos que quando $|x| \to \infty$ segue que $w(x) \to 0$.

Para a construção da função w, onde Ω é um domínio geral ver [14]. $\square$

Teorema 2.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Para toda $f \in H^1(\Omega)$ constante e não nula sobre a fronteira de Ω vale a desigualdade

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} + E(\Omega)|C_f|^2 \geq S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{2.24}$$

Demonstração. Inicialmente vamos definir a seguinte função

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ w(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.25}$$

onde w é uma função harmônica que tende a zero no infinito e coincide com f sobre $\partial\Omega$.

Suponhamos primeiramente que Ω é uma bola centrada na origem e raio R. Neste caso, como foi mostrado no Lema 2.1,

$$w(x) = \frac{C_f R^{n-2}}{|x|^{n-2}},$$

onde $f(x) = C_f$ é constante sobre $\partial\Omega$.
Aplicando a desigualdade de Sobolev para todo $\mathbb{R}^n$ a esta ϕ obtemos

$$||\nabla\phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq S_n||\phi||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

Mas, por um lado

$$||\nabla\phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\phi|^2dx = \int_{\Omega}|\nabla f|^2dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}|\nabla w|^2dx.$$

No entanto, como sabemos,

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}\left|\nabla\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\right|^2 dx=\sigma_n R^{n-2}(n-2),$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}|\nabla w|^2dx &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}|C_f|^2\left|\nabla\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\right|^2 dx\\ &= |C_f|^2\sigma_n R^{n-2}(n-2).\end{aligned}$$

Portanto,

$$||\nabla f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\int_\Omega|\nabla f|^2dx+|C_f|^2\sigma_n R^{n-2}(n-2).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}||\phi||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}\\ &= \left(\int_\Omega|f|^{2^*}dx+\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}|w|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}\\ &\geq \left(\int_\Omega|f|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}\\ &= ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Observe que $\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}|\nabla w|^2dx=\mathrm{Cap}(\Omega)$, pois

$$\begin{cases}\Delta w = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^n\setminus\Omega\\ w = \text{constante} & \text{sobre} \quad \partial\Omega\end{cases}$$

Portanto, chamando

$$E(\Omega)=\sigma_n R^{n-2}(n-2)=\mathrm{Cap}(\Omega) \tag{2.26}$$

temos

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)}+|C_f|^2E(\Omega)\geq S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)},$$

ou ainda,

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)}+\mathrm{Cap}(\Omega)|C_f|^2\geq S_n||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Ficando assim provado o teorema para o caso em que Ω é uma bola. Além disso, a desigualdade acima é uma desigualdade estrita com este $E(\Omega)$, pois a função ϕ em (2.25) não é da forma (3). Mais ainda, $E(\Omega)$ encontrada acima é a melhor constante. Para ver isto, aplicamos (2.24) com $f = f_\epsilon$ dada por (3) com $a = 1$ e $y = 0 =$ centro da bola. Ou seja,

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{[\epsilon^2 + |x|^2]^{(n-2)/2}}.$$

Desta forma temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\epsilon|^2 dx = S_n ||f_\epsilon||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.27}$$

Seja

$$w(x) = \frac{C_f R^{n-2}}{|x|^{n-2}},$$

com isso temos,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\epsilon|^2 dx &= \int_\Omega |\nabla f_\epsilon|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla f_\epsilon|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla f_\epsilon|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla f_\epsilon|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla w|^2 dx. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla w|^2 dx = |C_f|^2 \mathrm{Cap}(\Omega),$$

temos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\epsilon|^2 dx = \int_\Omega |\nabla f_\epsilon|^2 dx + |C_f|^2 \mathrm{Cap}(\Omega) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} (|\nabla f_\epsilon|^2 - |\nabla w|^2) dx.$$

Desde que

$$\nabla f_\epsilon(x) = \frac{-(n-2)}{(\epsilon^2 + |x|^2)^{n/2}} x \text{ e } \nabla w(x) = \frac{-C_f(n-2)R^{n-2}}{|x|^n} x,$$

segue que

$$|\nabla f_\epsilon(x)|^2 = \frac{(n-2)^2}{(\epsilon^2 + |x|^2)^n} |x|^2 \text{ e } |\nabla w(x)|^2 = \frac{(n-2)^2 |C_f|^2 R^{2(n-2)}}{|x|^{2n}} |x|^2.$$

Sendo assim,

$$|\nabla f_\epsilon|^2 - |\nabla w|^2 = \left(\frac{1}{(\epsilon^2 + |x|^2)^n} - \frac{|C_f|^2 R^{2(n-2)}}{|x|^{2n}} \right) (n-2)^2 |x|^2.$$

Então, fixado x em Ω e fazendo $\epsilon \to 0$ temos

$$\begin{aligned} |\nabla f_\epsilon(x)|^2 - |\nabla w(x)|^2 &\to \left(\frac{1}{|x|^{2n}} - \frac{|C_f|^2 R^{2(n-2)}}{|x|^{2n}} \right) (n-2)^2 |x|^2 \\ &= \left(\frac{1 - |C_f|^2 R^{2(n-2)}}{|x|^{2n-2}} \right) (n-2)^2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$|\nabla f_\epsilon|^2 - |\nabla w|^2 \leq \frac{(1-|C_f|^2 R^{2(n-2)})(n-2)^2}{|x|^{2n-2}}.$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^n]\setminus\Omega} (|\nabla f_\epsilon|^2 - |\nabla w|^2) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{(1-|C_f|^2 R^{2(n-2)})(n-2)^2}{|x|^{2n-2}} dx,$$

usando coordenadas polares obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{(1-|C_f|^2 R^{2(n-2)})(n-2)^2}{|x|^{2n-2}} dx &= \int_{\partial(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)} d\sigma \int_R^\infty \frac{(1-|C_f|^2 R^{2(n-2)})(n-2)^2}{r^{2n-2}} r^{n-2} dr \\ &= \sigma_n (1-|C_f|^2 R^{2(n-2)})(n-2)^2 \int_R^\infty \frac{1}{r^{n-1}} dr. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_R^\infty \frac{1}{r^{n-1}} dr = \left[\frac{r^{-n+2}}{-n+2}\right]_R^\infty,$$

temos

$$\int_R^\infty \frac{1}{r^{n-1}} dr = -\frac{1}{2-n}\frac{1}{R^{n-2}} = \frac{1}{(n-2)R^{n-2}}.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{(1-|C_f|^2 R^{2(n-2)})(n-2)^2}{|x|^{2n-2}} dx = \frac{\sigma_n (1-|C_f|^2 R^{2(n-2)})(n-2)}{R^{n-2}},$$

o que resulta em

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} (|\nabla f_\epsilon|^2 - |\nabla w|^2) dx = O(1).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\epsilon|^2 dx = \int_\Omega |\nabla f_\epsilon|^2 dx + |C_f|^2 \mathrm{Cap}(\Omega) + O(1). \tag{2.28}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_\epsilon|^{2^*} dx = \int_\Omega |f_\epsilon|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |f_\epsilon|^{2^*} dx.$$

Note que,

$$|f_\epsilon|^{2^*} = \left|\frac{1}{(\epsilon^2+|x|^2)^{(n-2)/2}}\right|^{2^*} = \frac{1}{(\epsilon^2+|x|^2)^n},$$

daí, para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, fazendo $\epsilon \to 0$ temos que

$$|f_\epsilon(x)|^{2^*} \to \frac{1}{|x|^{2n}}.$$

Além disso,

$$|f_\epsilon(x)|^{2^*} \leq \frac{1}{|x|^{2n}}.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |f_\epsilon|^{2^*}dx \to \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{1}{|x|^{2n}}dx.$$

Usando coordenadas polares temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{1}{|x|^{2n}}dx &= \int_{\partial(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)} d\sigma \int_R^\infty \frac{1}{r^{2n}}r^{n-1}dr \\ &= \sigma_n \int_R^\infty \frac{1}{r^{n+1}}dr.\end{aligned}$$

Como

$$\int_R^\infty \frac{1}{r^{n+1}}dr = \left[\frac{r^{-n}}{-n}\right]_R^\infty,$$

substituindo os valores obtemos

$$\int_R^\infty \frac{1}{r^{n+1}}dr = \frac{1}{R^n}.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |f_\epsilon|^{2^*}dx = O(1).$$

Portanto,

$$||f_\epsilon||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} = ||f_\epsilon||^2_{L^{2^*}(\Omega)} + O(1) \tag{2.29}$$

Isto mostra que $E(\Omega)$ em (2.24) é maior ou igual a $\mathrm{Cap}(\Omega)$ quando Ω é uma bola, e consequentemente que (2.26) é a melhor.

Agora consideremos Ω um domínio geral e $f(x) = C$, é constante sobre a fronteira de Ω. Podemos assumir que $C \geq 0$.

Afirmação 2.1. Substituindo f por $|f - C| + C \geq f$ temos

i) $||f||_{L^{2^*}(\Omega)} \leq ||(|f - C| + C)||_{L^{2^*}(\Omega)}$.

ii) $||\nabla f||_{L^2(\Omega)} = ||\nabla(|f - C| + C)||_{L^2(\Omega)}$.

De fato,

i) Como $|f| = |f - C + C| \leq |f - C| + C$, segue que $|(|f - C| + C)|^{2^*} \geq |f|^{2^*}$, logo

$$\left(\int_\Omega |f|^{2^*}dx\right)^{1/2^*} \leq \left(\int_\Omega |(|f - C| + C)|^{2^*}dx\right)^{1/2^*}$$

ou seja,

$$||f||_{L^{2^*}(\Omega)} \leq ||(|f-C|+C)||_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

ii) Note que, $\nabla(|f-C|+C) = \nabla(|f-C|)+\nabla(C)$. Como C é constante, $\nabla(|f-C|)+\nabla(C) = \nabla(|f-C|)$. Além disso, $\nabla(|f-C|) = \chi_{[(f-C)>0]}\nabla(f-C) - \chi_{[(f-C)<0]}\nabla(f-C)$. Como, $\nabla(f-C) = \nabla f$, pois C é constante, segue que, $\nabla(f-C) = \chi_{[f>C]}\nabla f - \chi_{[f<C]}\nabla f = (\chi_{[f>C]} - \chi_{[f<C]})\nabla f$, e portanto, $|\nabla(|f-C|+C)|^2 = |\chi_{[f>C]} - \chi_{[f<C]}|^2|\nabla f|^2$ e como

$$\chi_{[f>C]} - \chi_{[f<C]} = \begin{cases} 1 \text{ se } f > C \\ -1 \text{ se } f < C, \end{cases}$$

segue que $|\nabla(|f-C|+C)|^2 = |\nabla f|^2$, e portanto,

$$||\nabla(|f-C|+C)||_{L^2(\Omega)} = ||\nabla f||_{L^2(\Omega)}.$$

Da afirmação acima, segue que podemos assumir que $f \geq C$ em Ω. Considere a função $g = f - C$, então $g \geq 0$ em Ω e se $x_0 \in \partial\Omega$, $g(x_0) = 0$, daí podemos estender g como sendo zero em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Isto é,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - C & \text{em} \quad \Omega, \\ 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Aplicando as técnicias de rearranjamento a esta g observamos que

$$\begin{aligned} ||\nabla g^*||_{L^2(\Omega^*)} &\leq ||\nabla g||_{L^2(\Omega)} \\ ||g^*||_{L^{2^*}(\Omega^*)} &= ||g||_{L^{2^*}(\Omega)} \end{aligned}$$

onde g^* é o rearranjamento de g, e está definida na bola Ω^* cujo volume é o mesmo de Ω. Finalmente, considere $\tilde{f} = g^* + C$ em Ω^*. Como $\tilde{f}(\partial\Omega^*) = C = f(\partial\Omega)$, temos pela primeira parte da demonstração que

$$||\nabla\tilde{f}||^2_{L^2(\Omega^*)} + E(\Omega^*)|C|^2 \geq S_n||\tilde{f}||^2_{L^{2^*}(\Omega^*)}. \tag{2.30}$$

Afirmação 2.2. Como $f \geq C$ temos

i) $||\nabla f||_{L^2(\Omega)} \geq ||\nabla\tilde{f}||_{L^2(\Omega^*)}$.

ii) $||f||_{L^{2^*}(\Omega)} = ||\tilde{f}||_{L^{2^*}(\Omega^*)}$

De fato,

i) Note que, $\nabla\tilde{f} = \nabla(g^* + C) = \nabla g^*$, pois C é constante. Logo $|\nabla\tilde{f}|^2 = |\nabla g^*|^2$ e portanto

$$\begin{aligned} ||\nabla \tilde{f}||_{L^2(\Omega^*)} &= \left(\int_{\Omega^*} |\nabla \tilde{f}|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\Omega^*} |\nabla g^*|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= ||\nabla g^*||_{L^2(\Omega^*)}. \end{aligned}$$

Como,

$$||\nabla g^*||_{L^2(\Omega^*)} \leq ||\nabla g||_{L^2(\Omega)}$$

e $g(x) = f(x) - C$ em Ω, segue que

$$||\nabla \tilde{f}||_{L^2(\Omega^*)} \leq ||\nabla f||_{L^2(\Omega)}.$$

ii) Como $f \geq C, \quad f = g + C$ e $||g||_{L^{2^*}(\Omega)} = ||g^*||_{L^{2^*}(\Omega^*)}$ segue que,

$$||f||_{L^{2^*}(\Omega)} = ||\tilde{f}||_{L^{2^*}(\Omega^*)}.$$

Da afirmação anterior e de (2.30) temos que se Ω é um domínio geral, então

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} + E(\Omega)|C|^2 \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}, \tag{2.31}$$

onde $E(\Omega) = \text{Cap}(\Omega^*)$. Ficando assim provado o teorema para um domínio limitado qualquer. Notemos ainda que, com este $E(\Omega)$, (2.31) é uma desigualdade estrita, visto que é uma desigualdade estrita para a bola, ficando demonstrado o resultado. $\square$

No próximo resultado demonstraremos a desigualdade (8).

Teorema 2.4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Para toda $f \in H^1(\Omega)$ não constante e não nula sobre a fronteira de Ω vale a desigualdade

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} + F(\Omega)||f||^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}, \tag{2.32}$$

Demonstração. Vamos definir novamente a função

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ w(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.33}$$

onde w é uma função harmônica que tende a zero no infinito e coincide com f sobre

$\partial\Omega$. Aplicando a desigualdade de Sobolev a esta ϕ obtemos

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla w|^2 \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{2.34}$$

Por outro lado temos

$$\int_{\Omega^c} |\nabla w|^2 \leq F(\Omega)||f||^2_{H^{1/2}(\Omega)}.$$

E portanto,

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} + F(\Omega)||f||^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \geq S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

□

Teorema 2.5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Para toda $f \in H^1(\Omega)$ não nula e não constante sobre $\partial\Omega$ vale a desigualdade

$$||\nabla f||_{L^2(\Omega)} + G(\Omega)||f||_{L^q(\partial\Omega)} \geq S_n^{1/2} ||f||_{L^{2^*}(\Omega)}, \tag{2.35}$$

com $q = \frac{2(n-1)}{n-2}$.

Demonstração. Dada uma função f definida em Ω, consideremos uma função harmônica h em Ω que coincide com f sobre $\partial\Omega$. Sendo assim, podemos escrever

$$f = h + u \tag{2.36}$$

com $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, e portanto, pelo Teorema 2.1

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq S_n ||u||^2_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{2.37}$$

Note que, usando a identidade de Green,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla h|^2 dx &= \int_\Omega \langle \nabla h, \nabla h\rangle dx \\ &= \int_{\partial\Omega} h\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) dS - \int_\Omega h(\Delta h) dx,\end{aligned}$$

como $\Delta h = 0$ em Ω obtemos

$$\int_{\partial\Omega} h\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) dS - \int_\Omega h(\Delta h) dx = \int_{\partial\Omega} h\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) dS,$$

como $h = f$ sobre $\partial\Omega$,

$$\int_{\partial\Omega} h\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) dS = \int_{\partial\Omega} f\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) dS$$

novamente pelo fato que $\Delta h = 0$ em Ω, podemos escrever,

$$\int_{\partial\Omega} f\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}\right) dS = \int_{\partial\Omega} f\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}\right) dS - \int_{\Omega} f(\Delta h)dx,$$

e pela identidade de Green,

$$\int_{\partial\Omega} f\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}\right) dS - \int_{\Omega} f(\Delta h)dx = \int_{\Omega} \langle\nabla f, \nabla h\rangle dx.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx = \int_{\Omega} \langle\nabla f, \nabla h\rangle dx,$$

daí, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla(f-h)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla f|^2 - 2\langle\nabla f, \nabla h\rangle + |\nabla h|^2) dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Por outro lado, da desigualdade triangular obtemos,

$$||f||_{L^{2^*}(\Omega)} = ||h+u||_{L^{2^*}(\Omega)} \leq ||h||_{L^{2^*}(\Omega)} + ||u||_{L^{2^*}(\Omega)}$$

donde,

$$||u||_{L^{2^*}(\Omega)} \geq ||f||_{L^{2^*}(\Omega)} - ||h||_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{2.39}$$

Substituindo (2.38) e (2.39) em (2.37) obtemos

$$||\nabla f||_{L^2(\Omega)} + ||h||_{L^{2^*}(\Omega)} \geq S_n^{1/2} ||f||_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{2.40}$$

Afirmação 2.3. $||h||_{L^{2^*}(\Omega)} \leq G(\Omega)||f||_{L^q(\partial\Omega)}$ com $q = \frac{2(n-1)}{n-2}$.

Se mostrarmos esta afirmação, então teremos mostrado o teorema, visto que, ficaremos com,

$$\begin{aligned} ||\nabla f||_{L^2(\Omega)} + G(\Omega)||f||_{L^q(\partial\Omega)} &\geq ||\nabla f||_{L^2(\Omega)} + ||h||_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\geq S_n^{1/2} ||f||_{L^{2^*}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Provemos agora a Afirmação 2.3. Seja ψ uma solução do problema

$$\begin{cases} \Delta\psi = Y, & \text{em} \quad \Omega, \\ \psi = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.41}$$

onde Y é uma função qualquer de $L^t(\Omega)$, $t > 1$ a ser determinado. Multiplicando (2.41) por h e integrando obtemos,

$$\int_\Omega (\Delta\psi)h dx = \int_\Omega Y h dx,$$

usando a identidade de Green temos

$$\int_\Omega (\Delta\psi)h dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} h dS - \int_\Omega \langle\nabla\psi, \nabla h\rangle dx.$$

Como $f = h$ sobre $\partial\Omega$,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} h dS - \int_\Omega \langle\nabla\psi, \nabla h\rangle dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} f dS - \int_\Omega \langle\nabla\psi, \nabla h\rangle dx.$$

Usando novamente a identidade de Green e os fatos que $\Delta h = 0$ em Ω e $\psi = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \langle\nabla\psi, \nabla h\rangle dx &= \int_\Omega \psi(\Delta h) dx - \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial h}{\partial\eta} dS \\ &= 0, \end{aligned}$$

portanto,

$$\int_\Omega (\Delta\psi)h dx = \int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial\eta} f dS.$$

Logo,

$$\int_\Omega hY dx = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial\psi}{\partial\eta} dS. \tag{2.42}$$

No entanto, segue da teoria de regularidade dos espaços $L^p(\Omega)$, que $\psi \in W^{2,t}(\Omega)$ com $||\psi||_{W^{2,t}(\Omega)} \leq C||Y||_{L^t(\Omega)}$. Em particular, $||\nabla\psi||_{W^{1,t}(\Omega)} \leq C||Y||_{L^t(\Omega)}$ e, pela desigualdade do traço,

$$\left|\left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|\right|_{L^r(\partial\Omega)} \leq C||Y||_{L^t(\Omega)}, \tag{2.43}$$

onde,

$$\frac{1}{r} = \frac{n-t}{t(n-1)}. \tag{2.44}$$

Portanto, por (2.42) e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega} hY dx\right| &= \left|\int_{\partial\Omega} f\frac{\partial\psi}{\partial\eta}dS\right| \\ &\leq \int_{\partial\Omega}|f|\left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|dS \\ &\leq ||f||_{L^q(\partial\Omega)}\left|\left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|\right|_{L^r(\partial\Omega)},\end{aligned}$$

onde q e r são tais que $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{q}=1$. Usando (2.43) na desigualdade acima concluímos que,

$$\left|\int_{\Omega} hY dx\right| \leq C||f||_{L^q(\partial\Omega)}||Y||_{L^t(\Omega)}, \quad \forall \;\; Y \in L^t(\Omega). \tag{2.45}$$

Note que

$$\begin{aligned}||h||_{t'}^{t'} &= \int_{\Omega}|h|^{t'}dx \\ &= \int_{\Omega}|h||h|^{t'-1}dx.\end{aligned}$$

Usando (2.45) com $Y = h^{t'-1}$ temos

$$\int_{\Omega}|h||h|^{t'-1}dx \leq C||f||_{L^q(\partial\Omega)}||h^{t'-1}||_{L^t(\Omega)},$$

como $1/t + 1/t' = 1$, segue que $(t'-1)t = t'$ e $1/t = (t'-1)/t'$, daí

$$\begin{aligned}||h^{t'-1}||_{L^t(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega}\left(|h|^{t'-1}\right)^t dx\right)^{1/t} \\ &= \left(\int_{\Omega}|h|^{t'}dx\right)^{(t'-1)/t'}.\end{aligned}$$

Logo,

$$||h||_{t'}^{t'} \leq C||f||_{L^q(\partial\Omega)}||h||_{L^{t'}(\Omega)}^{t'-1}.$$

Donde,

$$\frac{||h||_{L^{t'}(\Omega)}^{t'}}{||h||_{L^{t'}(\Omega)}^{t'-1}} \leq C||f||_{L^q(\partial\Omega)},$$

e portanto,

$$||h||_{L^{t'}(\Omega)} \leq C||f||_{L^q(\partial\Omega)}.$$

Quando $q = 2(n-1)/(n-2)$, temos que $t' = 2^*$. Ficando assim provada nossa afirmação, com $G(\Omega) = C$.

□

Finalmente, vamos estudar o seguinte resultado, que está relacionado aos nossos estudos.

Teorema 2.6. Seja $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$. Se $f \in H^1(\Omega)$, então

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 dx + I(\Omega)||f||^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq 2^{-2/n} S_n ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Demonstração. Para simplificar os cálculos, vamos assumir que $R = 1$. Defina

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in \Omega \\ \frac{1}{|x|^{n-2}} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right), & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

Afirmação 2.4. Para esta g temos

1) $||g||_{L^{2^*}(\Omega)} = ||g||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)}$.

2) $||\nabla g||^2_{L^2(\Omega)} = ||\nabla g||^2_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)} - (n-2)||f||^2_{L^2(\partial\Omega)}$.

Vejamos esta afirmação. Defina a transformação

$$T : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \to \Omega$$

dada por $T(x) = x/|x|^2$, então T é um difeomorfismo e $|\det JT(x)| = 1/|x|^{2n}$.

1) Note que

$$\begin{aligned} ||g||^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |g|^{2^*} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \left|\frac{1}{|x|^{n-2}} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^{2n/(n-2)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{1}{|x|^{2n}} \left|f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^{2n/(n-2)} dx. \end{aligned}$$

Usando o fato que $T(x) = x/|x|^2$ e $|\det JT(x)| = 1/|x|^{2n}$, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{1}{|x|^{2n}} \left|f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^{2n/(n-2)} dx = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |f(T(x))|^{2n/(n-2)} |\det JT(x)| dx,$$

e pelo Teorema da Mudança de Variáveis segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |f(T(x))|^{2n/(n-2)} |\det JT(x)| dx = \int_\Omega |f(x)|^{2n/(n-2)} dx.$$

Desde que $f = g$ em Ω temos

$$\int_{\Omega} |f(x)|^{2n/(n-2)} dx = \int_{\Omega} |g(x)|^{2^*} dx,$$

e portanto,

$$||g||^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n \backslash \Omega)} = ||g||^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

2) Mostraremos agora o segundo item.

$$\begin{aligned} ||\nabla g||^2_{L^2(\mathbb{R}^n\backslash\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega} |\nabla g|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega} \left| \frac{1}{|x|^{n-2}} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^2 dx. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{|x|^{n-2}} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right) f\left(\frac{x}{|x|^2}\right) + \frac{1}{|x|^{n-2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-(n-2)/2} f(T(x)) + \frac{1}{|x|^{n-2}}\frac{\partial}{\partial x_i}(f(T(x))) \\ &= -(n-2)|x|^{-n} x_i f(T(x)) + |x|^{-n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(T(x)). \end{aligned}$$

Daí,

$$\nabla g(x) = -(n-2)|x|^{-n} f(T(x))x + |x|^{-n}\nabla f(T(x)).$$

Logo,

$$|\nabla g(x)|^2 = (n-2)^2 |f(T(x))|^2 |x|^{2(-n+1)} + |x|^{-2n}|\nabla f(T(x))|^2.$$

Portanto, usando o Teorema da Mudança de Variáveis obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega} |\nabla g|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega} (n-2)^2 |f(T(x))|^2 |x|^{2(-n+1)} dx + \int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega} \frac{1}{|x|^2}|\nabla f(T(x))|^2 dx \\ &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega} \frac{1}{|x|^{2n-2}} |f(T(x))|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega} |\det JT(x)||\nabla f(T(x))|^2 dx \\ &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega} \frac{1}{|x|^{2n-2}} |f(T(x))|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$||\nabla g||^2_{L^2(\Omega)} = ||\nabla g||^2_{L^2(\mathbb{R}^n\backslash\Omega)} - (n-2)||f||^2_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Continuando com a prova do teorema, aplicando a desigualdade de Sobolev em $\mathbb{R}^n$

para g obtemos

$$||\nabla g||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq S_n ||g||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

Note que, por um lado

$$\begin{aligned} ||\nabla g||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla g|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla g|^2 dx, \end{aligned}$$

como vimos na afirmação acima,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla g|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla g|^2 dx + (n-2)||f||^2_{L^2(\partial\Omega)},$$

logo

$$\begin{aligned} ||\nabla g||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= 2\int_{\Omega} |\nabla g|^2 dx + (n-2)||f||^2_{L^2(\partial\Omega)} \\ &= 2||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} + (n-2)||f||^2_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ||g||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \\ &= \left(\int_{\Omega} |g|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}, \end{aligned}$$

novamente da afirmação acima sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g|^{2^*} dx = \int_{\Omega} |g|^{2^*} dx,$$

logo

$$\begin{aligned} ||g||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} &= \left(2\int_{\Omega} |g|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \\ &= 2^{2/2^*} \left(\int_{\Omega} |f|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}. \end{aligned}$$

Usando o fato que $2/2^* = 1 - (2/n)$ ficamos com,

$$2||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} + (n-2)||f||^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq S_n 2^{1-(2/n)} ||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)},$$

daí, dividindo a equação acima por 2 ficamos com

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(n-2)}{2}||f||^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq S_n 2^{-2/n}||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)},$$

e portanto,

$$||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} + I(\Omega)||f||^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq S_n 2^{-2/n}||f||^2_{L^{2^*}(\Omega)},$$

onde, $I(\Omega) = (n-2)/2$. Ficando assim provado o teorema.

□

As desigualdades relacionadas à (10) foram obtidas por P. Cherrier em [8] para variedades gerais.

Capítulo 3

Problemas de Neumann Semilineares Elípticos com crescimento crítico

Neste capítulo provaremos alguns teoremas de existência de soluções para equações elípticas com condição de fronteira de Neumann. Na primeira seção, provaremos que, sob certas condições, existirá solução para o problema, e tal solução irá satisfazer uma propriedade relevante. Na segunda, iremos considerar um problema semelhante, e por argumentos análogos aos da primeira parte, encontraremos soluções não constantes para o problema dado.

3.1 Um Teorema de Existência Geral

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (n \geq 3)$ um domínio limitado e suave. Consideremos o problema elíptico semilinear envolvendo crescimento crítico e condições de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u & = & u^p + f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u & > & 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha(x)u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

onde η é um vetor normal, unitário, exterior a $\partial\Omega$, $p = 2^* - 1 = (n+2)/(n-2)$, $\alpha \in L^\infty(\Omega), \alpha(x) \geq 0, f$ é uma função Caratheodory, isto é, $f(x,u)$ é mensurável em x e contínua em u e para todo $M > 0$, $\sup\{f(x,u) : x \in \Omega, 0 \leq u \leq M\}$ é finito.

Assumimos ainda que existe $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(x,u)}{u} = a(x) \text{ uniformemente em } x \in \Omega, \tag{3.2}$$
$$\lim_{u\to\infty}\frac{f(x,u)}{u^p} = 0 \text{ uniformemente em } x \in \Omega. \tag{3.3}$$

Além disso, assumimos que o primeiro autovalor λ_1 do seguinte problema é positivo:

$$\begin{cases} -\Delta u - a(x)u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha(x)u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Isto é equivalente a assumirmos que

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega [|\nabla u|^2 - a(x)u^2]dx + \int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2 dS : \int_\Omega u^2 dx = 1\right\} > 0. \tag{3.4}$$

Observamos que (3.4) é satisfeito se

a) $\alpha \equiv 0, a \leq 0$ e $a \neq 0$.

b) $a \equiv 0, \alpha \geq 0$ e $\alpha \neq 0$.

Observe que a norma

$$||u||_{H^1(\Omega)} = ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)},$$

é equivalente a norma

$$||u||_H = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 - a(x)u^2)dx + \int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2 dS\right)^{1/2}.$$

De fato, por um lado, como $a, \alpha \in L^\infty(\Omega)$, então $a \leq ||a||_{L^\infty(\Omega)}, -a \leq ||a||_{L^\infty(\Omega)}, \alpha \leq ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)}$ daí,

$$\begin{aligned} ||u||_H &= \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 - a(x)u^2)dx + \int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2 dS\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega a(x)u^2 dx + \int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2 dS\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + ||a||_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega u^2 dx + ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)}\int_{\partial\Omega} u^2 dS\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $H^1(\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ (imersão do traço), segue que $||u||_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1||u||_{H^1(\Omega)}$. Logo,

$$||u||_H \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + ||a||_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega u^2 dx + ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)} C_1 ||u||^2_{H^1(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Uma vez que $||u||_{L^2(\Omega)} \leq ||u||_{H^1(\Omega)}$ temos

$$\begin{aligned} ||u||_H &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + ||a||_{L^\infty(\Omega)} ||u||^2_{H^1(\Omega)} + ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)} C_1 ||u||^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + \max\{||a||_{L^\infty(\Omega)}, C_1 ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)}\} ||u||^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

novamente, como $||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \leq ||u||_{H^1(\Omega)}$ temos

$$\begin{aligned} ||u||_H &\leq \left(||u||^2_{H^1(\Omega)} + \max\{||a||_{L^\infty(\Omega)}, C_1 ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)}\} ||u||^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2} \\ &= \left([1 + \max\{||a||_{L^\infty(\Omega)}, C_1 ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)}\}] ||u||^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2} \\ &= C ||u||_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, supondo (3.4) temos $||u||_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{C} ||u||_H$, donde segue a equivalência das normas.

Consideremos o espaço $H(\Omega) = (W^{1,2}(\Omega), || \cdot ||_H)$
Estamos interessados em obter soluções positivas para o nosso problema, sendo assim os valores de $f(x,u)$ para $u < 0$ são irrelevantes, deste modo podemos assumir

$$f(x,u) = a(x)u, \text{ para } u < 0 \text{ e } x \in \Omega.$$

Lema 3.1. O funcional $J : H(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido da seguinte maneira

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} u_+^{p+1} - F(x,u) \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u^2 dS, \tag{3.5}$$

onde $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s) ds$ e $u_+ = \max\{u, 0\}$ e $u_- = \min\{u, 0\}$. É de classe C^1 e,

$$J'(u)\varphi = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - u_+^p \varphi - f(x,u)\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u \varphi dS$$

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial v}(u) &= \lim_{t \to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\begin{array}{c} \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla (u+tv)|^2 - \frac{1}{p+1} (u+tv)_+^{p+1} - F(x, u+tv) \right] dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \alpha(x) (u+tv)^2 dS \\ - \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} u_+^{p+1} - F(x,u) \right] dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u^2 dS \end{array} \right] \end{aligned}$$

Afirmamos que

i) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla(u+tv)|^2-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right]dx=\int_\Omega\langle\nabla u,\nabla v\rangle dx.$

ii) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega\left[-\frac{1}{p+1}(u+tv)_+^{p+1}+\frac{1}{p+1}u_+^{p+1}\right]dx=-\int_\Omega u_+^p v dx.$

iii) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega[F(x,u+tv)-F(x,u)]dx=\int_\Omega f(x,u)vdx.$

iv) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}[\alpha(x)(u+tv)^2-\alpha(x)u^2]dx=\int_{\partial\Omega}\alpha(x)uvdx.$

De fato, note que $|\nabla(u+tv)|^2-|\nabla u|^2=2t\langle\nabla u,\nabla v\rangle+t^2|\nabla v|^2$ e portanto

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla(u+tv)|^2-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right]dx &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega\langle\nabla u,\nabla v\rangle+\frac{t}{2}|\nabla v|^2dx\\ &= \int_\Omega\langle\nabla u,\nabla v\rangle dx.\end{aligned}$$

Ficando assim provado o primeiro item.

Para o segundo item, note que

1) $\displaystyle\frac{1}{p+1}\frac{(u+tv)_+^{p+1}-u_+^{p+1}}{t}\to u_+^p v\quad$ q.t.p. em $\quad\Omega$.

1º caso: Fixe x tal que $u(x)>0$. Tomemos $t<1$ suficientemente pequeno de forma que $u(x)+tv(x)>0$. Considere a função

$$h(s)=\frac{1}{p+1}(u(x)+sv(x))^{p+1},$$

então

$$h'(s)=(u(x)+sv(x))^p v(x).$$

Então pelo Teorema do Valor Médio

$$h(t)-h(0)=h'(l)(t-0)\text{ com }0<l<t.$$

Isto é,

$$\frac{1}{p+1}\frac{(u(x)+tv(x))^{p+1}-(u(x))^{p+1}}{t}=(u(x)+lv(x))^p v(x),$$

sendo assim, quando $t\to 0$ temos que $l\to 0$ e daí $(u(x)+lv(x))^p v(x)\to(u(x))^p v(x)$. E portanto,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{p+1}\frac{(u(x)+tv(x))^{p+1}-(u(x))^{p+1}}{t}=(u(x))^p v(x).$$

2º caso: Fixe x de forma que $u(x)<0$, então para t suficientemente pequeno temos $(u+tv)_+(x)=0$ e $u_+(x)=0$. E neste caso não há o que fazer.

2) $\left|\frac{1}{p+1}\frac{(u+tv)_+^{p+1}(x)-u_+^{p+1}(x)}{t}\right| \leq (|u(x)|+|v(x)|)^p|v(x)| \in L^1(\Omega)$.

De fato, como já vimos anteriormente, escolhendo $t<1$ suficientemente pequeno, do Teorema do Valor Médio, podemos escrever

$$-\frac{1}{p+1}\frac{(u(x)+tv(x))^{p+1}-(u(x))^{p+1}}{t} = (u(x)+lv(x))^p v(x) \text{ com } 0<l<t.$$

Desta forma, fazendo $t\to 0$ temos que $l\to 0$ e daí

$$\begin{aligned}\left|-\frac{1}{p+1}\frac{(u+tv)_+^{p+1}(x)-u_+^{p+1}(x)}{t}\right| &\leq |u(x)+lv(x)|^p|v(x)| \\ &\leq (|u(x)|+|v(x)|)^p|v(x)|.\end{aligned}$$

Mostraremos agora que $(|u(x)|+|v(x)|)^p|v(x)| \in L^1(\Omega)$. Com efeito, usando Holder com $p+1$ e $(p+1)/p$ obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (|u(x)|+|v(x)|)^p|v(x)|dx \\ &\qquad\leq \left[\int_\Omega [(|u(x)|+|v(x)|)^p]^{(p+1)/p}\,dx\right]^{p/(p+1)}\left[\int_\Omega |v(x)|^{p+1}dx\right]^{1/(p+1)} \\ &\qquad< \infty.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos o segundo item. Para o terceiro item considere a aplicação $\Psi : L^p(\Omega)\to\mathbb{R}$ dada por,

$$\Psi(u) = \int_\Omega F(x,u(x))dx.$$

Se mostramos que $\Psi'(u)v = \int_\Omega f(x,u)vdx$ temos o que queremos. Sendo assim, queremos mostrar que

$$\omega(v) \equiv \int_\Omega F(x,u+v)dx - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega f(x,u)vdx = o(v)$$

quando $v\to 0$ em $L^p(\Omega)$. Note que

$$\begin{aligned}F(x,u+v)-F(x,u) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[F(x,u+tv)]dt \\ &= \int_0^1 F_s'(x,u+tv)vdt \\ &= \int_0^1 f(x,u+tv)vdt,\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
\omega(v) &= \int_{\Omega}\left[\int_0^1 f(x,u+tv)vdt - f(x,u)v\right]dx\\
&= \int_{\Omega}\left[\int_0^1 f(x,u+tv)vdt - \int_0^1 f(x,u)vdt\right]dx\\
&= \int_{\Omega}\int_0^1 [f(x,u+tv) - f(x,u)]vdtdx.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubibi,

$$\omega(v) = \int_0^1\int_{\Omega}[f(x,u+tv) - f(x,u)]vdxdt.$$

E pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
|\omega(v)| &\leq \int_0^1\int_{\Omega}|f(x,u+tv) - f(x,u)||v|dxdt\\
&\leq \int_0^1\left[\int_{\Omega}|f(x,u+tv) - f(x,u)|^{p'}dx\right]^{1/p'}\left[\int_{\Omega}|v|^p dx\right]^{1/p}dt\\
&= ||v||_{L^p(\Omega)}\int_0^1 ||f(x,u+tv) - f(x,u)||_{L^{p'}(\Omega)}dt\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Como, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que,

$$||v||_{L^p(\Omega)}\omega(v) \to 0 \text{ quando } ||v||_{L^p(\Omega)} \to 0,$$

segue o terceiro item. Finalmente, vamos mostrar o quarto item. Note que

1) $\frac{1}{2t}[\alpha(x)(u(x)+tv(x))^2 - \alpha(x)(u(x))^2] \to \alpha(x)u(x)v(x)$ q.t.p. em Ω.

2) $\left|\frac{1}{2t}[\alpha(x)(u(x)+tv(x))^2 - \alpha(x)(u(x))^2]\right| \leq \alpha(x)u(x)v(x) + \alpha(x)(v(x))^2 \in L^1(\Omega)$.

De fato, fixado $x \in \Omega$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2t}[\alpha(x)(u(x)+tv(x))^2 - \alpha(x)(u(x))^2] &= \frac{1}{2t}[\alpha(x)(u(x))^2 + 2t\alpha(x)u(x)v(x)\\
&\quad +t^2(v(x))^2 - \alpha(x)(u(x))^2]\\
&= \alpha(x)u(x)v(x) + \frac{t}{2}\alpha(x)(v(x))^2,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{1}{2t}[\alpha(x)(u(x)+tv(x))^2 - \alpha(x)(u(x))^2] \to \alpha(x)u(x)v(x) \text{ quando } t \to 0.$$

Tomando $t < 2$ suficientemente pequeno temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t}[\alpha(x)(u(x)+tv(x))^2 - \alpha(x)(u(x))^2] &= \alpha(x)u(x)v(x) + \frac{t}{2}\alpha(x)(v(x))^2 \\ &< \alpha(x)u(x)v(x) + \alpha(x)(v(x))^2.\end{aligned}$$

Mostremos agora que $\alpha(x)u(x)v(x) + \alpha(x)(v(x))^2 \in L^1(\Omega)$. Com efeito, usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\alpha(x)u(x)v(x) + \alpha(x)(v(x))^2|dx \\ &\qquad\leq \int_\Omega (|\alpha(x)|)(|u(x)|)(|v(x)|)dx + \int_\Omega (|\alpha(x)|)(|v(x)|^2)dx \\ &\qquad\leq ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} + ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)}||v||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad< \infty,\end{aligned}$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue o quarto item. □

Lema 3.2. Soluções fracas de (3.1) são pontos críticos não triviais do funcional (3.5) definido acima.

Demonstração. Suponha que $u \in H(\Omega)$ é uma solução fraca de (3.1), isto é, para $\varphi \in H(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega (-\Delta u)\varphi dx = \int_\Omega (u^p + f(x,u))\varphi dx.$$

Usando o Teorema da Divergência temos

$$\int_\Omega (-\Delta u)\varphi dx = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\varphi dS$$

e daí segue que,

$$\int_\Omega (\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - u^p\varphi - f(x,u)\varphi)dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x)u\varphi dS = 0,$$

pois,

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\varphi dS = \int_{\partial\Omega} \alpha(x)u\varphi dS.$$

Por outro lado, note que

$$J'(u)\varphi = \int_\Omega [\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - u_+^p\varphi - f(x,u)\varphi]dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x)u\varphi dS.$$

Portanto, se u é solução fraca de (3.1), então u é ponto crítico de J. Reciprocamente, se $u \in H(\Omega)$ é um ponto crítico de J, então

$$\begin{aligned} 0 &= J'(u)u_- \\ &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u_- \rangle - [u_+^p u_- + f(x,u)u_-]dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u u_- dS. \end{aligned}$$

Uma vez que $u = u_+ + u_-$ temos

$$\int_\Omega \langle \nabla(u_+ + u_-), \nabla u_- \rangle - [u_+^p u_- + f(x,u)u_-]dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x)(u_+ + u_-)u_- dS = 0,$$

e como, $(u_+)(u_-) = 0$ segue que

$$\int_\Omega [|\nabla u_-|^2 - a(x)u_-^2]dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u_-^2 dS = 0.$$

Afirmação 3.1. $u_- \equiv 0$.

Suponha que $u_- \neq 0$, então considere $v = u_-/||u_-||_{L^2(\Omega)}$. Desta forma, por (3.4) sabemos que $\lambda_1 > 0$, ou seja,

$$\int_\Omega \left[\left| \nabla \left(\frac{u_-}{||u_-||_{L^2(\Omega)}} \right) \right|^2 - a(x) \frac{u_-^2}{||u_-||^2_{L^2(\Omega)}} \right] dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) \frac{u_-^2}{||u_-||^2_{L^2(\Omega)}} dS > 0.$$

o que é um absurdo. Portanto, $u_- \equiv 0$, ficando assim provada a afirmação. Logo, $u > 0$ e temos que u é ponto crítico de J, então u é solução fraca de (3.1). □

Considere o nível minimax

$$c = \inf_{\psi \in \Psi} \sup_{t \in (0,1)} J(\psi(t))$$

onde $\Psi = \{\psi \in C([0,1]; H(\Omega)) : \psi(0) = 0 \text{ e } \psi(1) = \psi_0 \equiv t_0\}$, para algum t_0 fixado. Note que podemos tomar t_0 suficientemente grande de modo que $J(t\psi_0) \leq 0, \quad \forall t > 1$. De fato,

$$J(t\psi_0) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} t^2 |\nabla \psi_0|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1} \psi_0^{p+1} - F(x, t\psi_0) \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \alpha(x) t^2 \psi_0^2 dS.$$

Então usando (3.3) temos

$$\lim_{t \to \infty} J(t\psi_0) = \lim_{t \to \infty} -t^{p+1} \left\{ \int_\Omega \left[\frac{1}{p+1} \psi_0^{p+1} + \frac{F(x, t\psi_0)}{t^{p+1} \psi_0^{p+1}} \psi_0^{p+1} \right] dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\alpha(x)\psi_0^2}{t^{p-1}} dS \right\} = -\infty.$$

Logo, $J(t\psi_0) \leq 0$ para t grande.

Afirmação 3.2. $c > 0$.

De (3.2) temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|u| < \delta$ então $\left|\frac{f(x,u)}{u} - a(x)\right| < \epsilon$ e portanto

$$\left|\frac{2F(x,u)}{u^2} - a(x)\right| < \epsilon \text{ se } u \in [0,\delta].$$

Além disso de (3.3) temos que dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que se $|u| > R$, então $\left|\frac{f(x,u)}{u^p}\right| < \epsilon$, logo $|f(x,u)| < \epsilon |u^p|$ se $|u| > R$ e portanto

$$|F(x,u)| < \frac{\epsilon}{p+1}|u|^{p+1}.$$

E consequentemente, deste dois fatos obtemos

$$F(x,u) \leq \frac{a(x)+\epsilon}{2}u^2 + \frac{\epsilon}{p+1}|u|^{p+1}.$$

Por outro lado, note que

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}u_+^{p+1} - F(x,u)\right]dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2 dS,$$

somando e subtraindo o termo $(a(x)/2)u^2$ na primeira integral ficamos com

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{a(x)}{2}u^2 + \frac{a(x)}{2}u^2 - \frac{1}{p+1}u_+^{p+1} - F(x,u)\right]dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2 dS,$$

reorganizando as integrais obtemos

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega [|\nabla u|^2 - a(x)u^2]dx + \int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2 dS\right\} \\
&- \int_\Omega \left[F(x,u) - \frac{a(x)}{2}u^2 + \frac{1}{p+1}u_+^{p+1}\right]dx \\
&= \frac{1}{2}||u||_H^2 - \int_\Omega \left[F(x,u) - \frac{a(x)}{2}u^2 + \frac{1}{p+1}u_+^{p+1}\right]dx \\
&\geq \frac{1}{2}||u||_H^2 - \int_\Omega \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{p+1}|u|^{p+1} + \frac{1}{p+1}u_+^{p+1}\right]dx,
\end{aligned}$$

o que implica que $c > 0$.

Seja

$$S_n = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)}\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx; \int_\Omega |u|^{p+1}dx = 1\right\}. \tag{3.6}$$

S_n é a melhor constante da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$, onde $p+1 = 2^* = 2n/n-2$.

Sabemos que S_n depende apenas de n, e o ínfimo em (3.6) nunca é atingido quando

Ω é limitado. Lembramos que quando $\Omega = \mathbb{R}^n$ o ínfimo em (3.6) é atingido pela função

$$f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{(n-2)/2}},$$

ou depois de um reescalonamento pelas funções

$$f_\epsilon(x) = \frac{C}{(\epsilon+|x|^2)^{(n-2)/2}}$$

Lema 3.3. Seja $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$, onde $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Denote $\tilde{B} = B_1 \cap \{x_n > h(x')\}$, onde $B_1 = B(0,1)$ é a bola unitária em $\mathbb{R}^n, h(x')$ é uma função de classe C^1 definida em $\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; |x'| < 1\}$ com $h, \nabla h$ tendendo a zero quando x' está próximo de $0'$. Para toda $u \in H(B_1)$ com supp$u \subset B_1$, temos

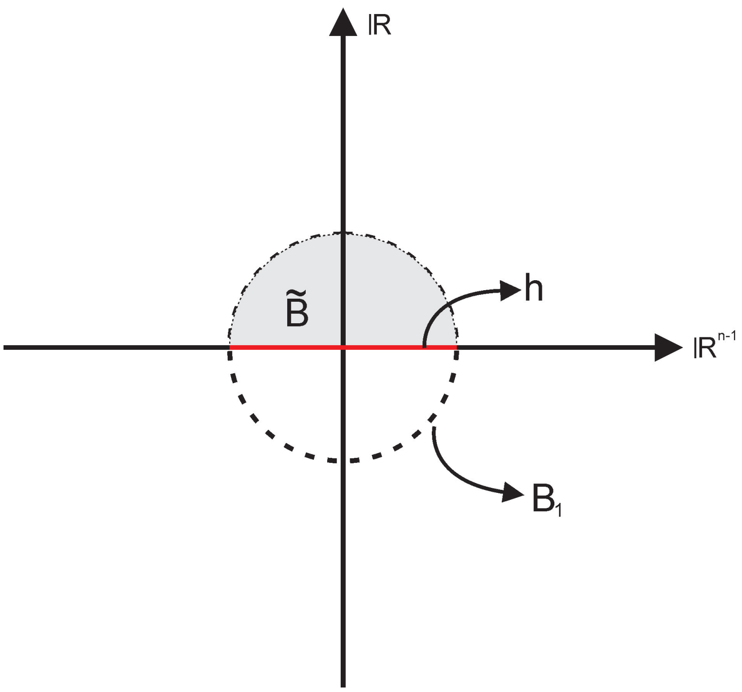
i) Se $h \equiv 0$, então

$$\int_{\tilde{B}} |\nabla u|^2 dx \geq 2^{-2/n} S_n \left[\int_{\tilde{B}} |u|^{p+1} dx\right]^{2/(p+1)}. \tag{3.7}$$

ii) para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ dependendo apenas de ϵ tal que se $|\nabla h| < \delta$ então

$$\int_{\tilde{B}} |\nabla u|^2 dx \geq (2^{-2/n} S_n - \epsilon) \left[\int_{\tilde{B}} |u|^{p+1} dx\right]^{2/(p+1)} \tag{3.8}$$

Demonstração. De fato.
i) Se $h \equiv 0$, então podemos representar $\tilde{B} = B_1 \cap \{x_n > 0\}$ da seguinte maneira:



Uma vez que os valores de $u(x)$ para $x_n < 0$ são irrelevantes (pois $\tilde{B}$ só considera os valores para $x_n > 0$), podemos assumir que $u(x', -x_n) = u(x', x_n)$, e daí escrever

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{B}} |\nabla u|^2 dx &= \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}||\nabla u||^2_{L^2(B_1)}.\end{aligned}$$

Da desigualdade de Sobolev temos

$$||\nabla u||^2_{L^2(B_1)} \geq S_n ||u||^2_{L^{2^*}(B_1)},$$

logo

$$\int_{\tilde{B}} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{2} S_n ||u||^2_{L^{2^*}(B_1)}.$$

Pelo mesmo argumente usado anteiormente podemos escrever

$$\begin{aligned}||u||_{L^{2^*}(B_1)} &= \left(\int_{B_1} |u|^{p+1} dx\right)^{2/(p+1)} \\ &= \left(2\int_{\tilde{B}} |u|^{p+1dx}\right)^{2/(p+1)},\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\tilde{B}} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{2} 2^{2/(p+1)} S_n \left(\int_{\tilde{B}} |u|^{p+1dx}\right)^{2/(p+1)},$$

desde que, $(1/2)2^{2/(p+1)} = 2^{-2/n}$, segue o resultado.

ii) Considere a seguinte transformação $y' = x'$ e $y_n = x_n - h(x')$, que endireita a parte inferior de $\tilde{B}$ e deixa nas condições do item anterior. Desta forma usando (3.7) obtemos (3.8).

□

Teorema 3.1. Suponha $(3.2) - (3.4)$ e

$$c < \frac{1}{2n} S^{n/2}. \tag{3.9}$$

Então existe uma solução u de (3.1) tal que

$$J(u) \leq c.$$

Demonstração. Usando uma versão do Teorema do Passo da Montanha contido [**?**], podemos afirmar que existe uma sequência $(u_j) \subset H(\Omega)$ tal que

$$J(u_j) \to c \text{ e } J'(u_j) \to 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega) \text{ quando } j \to \infty,$$

isto é,

$$J(u_j) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u_j|^2 - \frac{1}{p+1}(u_j)_+^{p+1} - F(x,u_j)\right] dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \alpha(x) u_j^2 dS = c + o(1) \tag{3.10}$$

e

$$J'(u_j)\varphi = \int_\Omega [\langle \nabla u_j, \nabla \varphi\rangle - (u_j)_+^p \varphi - f(x,u_j)\varphi] dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u_j \varphi dS = o(||\varphi||_H). \tag{3.11}$$

Tome $\varphi = u_j$, então

$$J'(u_j)u_j = \int_\Omega [|\nabla u_j|^2 - (u_j)_+^{p+1} - f(x,u_j)u_j] dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u_j^2 dS = o(||u_j||_H),$$

sendo assim,

$$-\frac{1}{2}J'(u_j)u_j = -\frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u_j|^2 - (u_j)_+^{p+1} - f(x,u_j)u_j] dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \alpha(x) u_j^2 dS = o(||u_j||_H).$$

Somando temos

$$\begin{aligned} J(u_j) - \frac{1}{2}J'(u_j)u_j &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega (u_j)_+^{p+1} dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(x,u_j)u_j - F(x,u_j)\right] dx \\ &= c + o(1) + o(||u_j||_H). \end{aligned}$$

Como $(1/2) - 1/(p+1) = (1/2) - (n-2)/(2n) = 1/n$, segue que

$$\frac{1}{n}\int_\Omega (u_j)_+^{p+1} dx = \int_\Omega [F(x,u_j) - \frac{1}{2}f(x,u_j)u_j] dx + c + o(1) + o(||u_j||_H).$$

Note que, se $u < 0$, então $f(x,u) = a(x)u$, daí,

$$F(x,u) - \frac{1}{2}f(x,u)u = 0,$$

pois,

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s) ds = \int_0^u a(x) s ds = a(x)\frac{u^2}{2}.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \left[F(x,u_j) - \frac{1}{2}u_j f(x,u_j)\right] dx \le \frac{1}{2n}\int_\Omega (u_j)_+^{p+1} dx + C(1 + ||u_j||_H).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_j)_+^{p+1} dx \le \frac{1}{2n}\int_\Omega (u_j)_+^{p+1} dx + C(1 + ||u_j||_H),$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)\int_{\Omega}(u_j)_+^{p+1}dx \leq C(1+||u_j||_H),$$

e portanto,

$$\int_{\Omega}(u_j)_+^{p+1} \leq C(1+||u_j||_H)$$

combinando com (3.10) obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}[|\nabla u_j|^2 - a(x)u_j^2]dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\alpha(x)u_j^2 dS \leq C(1+||u_j||_H),$$

isto é, $||u_j||_H^2 \leq C(1+||u_j||_H)$ para alguma constante C, o que implica que

$$||u_j||_H \leq C.$$

Usando o Teorema da Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov e tomando subsequências temos

$$\begin{array}{rcl} u_j \rightharpoonup u & \text{convergência fraca em} & H(\Omega) \\ u_j \rightharpoonup u & \text{convergência fraca em} & (L^{p+1}(\Omega))^* \\ u_j \to u & \text{convergência forte em} & L^q(\Omega), \forall q < p+1 \\ u_j(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em} & \Omega \\ u_j \to u & \text{convergência forte em} & L^2(\partial\Omega) \end{array}$$

onde na última convergência usamos o Teorema da Imersão Compacta no Traço. Note que,

$$\begin{array}{rcl} J'(u_j)\varphi & = & \displaystyle\int_{\Omega}[\langle\nabla u_j,\nabla\varphi\rangle - (u_j)_+^p\varphi - f(x,u_j)\varphi]dx + \int_{\partial\Omega}\alpha(x)u_j\varphi dS = o(||\varphi||_H) \\ \downarrow & & \\ J'(u)\varphi & = & \displaystyle\int_{\Omega}[\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle - (u)_+^p\varphi - f(x,u)\varphi]dx + \int_{\partial\Omega}\alpha(x)u\varphi dS = 0 \end{array} \tag{3.12}$$

quando $j \to \infty$. Com efeito,

i) $\displaystyle\int_{\Omega}\langle\nabla u_j,\nabla\varphi\rangle dx \to \int_{\Omega}\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle dx.$

Primeiramente observemos que a norma $||u||_H$ vem do seguinte produto interno

$$\langle u,v\rangle_H = \int_{\Omega}(\langle\nabla u,\nabla v\rangle - a(x)uv)dx + \int_{\partial\Omega}\alpha(x)uvdS.$$

Como $u_j \rightharpoonup u$ em $H(\Omega)$, segue que

$$\langle u_j, \varphi\rangle_H \to \langle u, \varphi\rangle_H, \forall \varphi \in H(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega (\langle \nabla u_j, \nabla \varphi\rangle - a(x)u_j\varphi)dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x)u_j\varphi dS \to \int_\Omega (\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle - a(x)u\varphi)dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x)u\varphi dS.$$

Desta forma, note que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle \nabla u_j, \nabla\varphi\rangle dx &= \int_\Omega [\langle \nabla u_j, \nabla \varphi\rangle - a(x)u_j\varphi]dx + \int_\Omega a(x)u_j\varphi dx \\ &\to \int_\Omega [\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle - a(x)u\varphi]dx + \int_\Omega a(x)u\varphi dx.\end{aligned}$$

Se mostrarmos

1) $\displaystyle\int_\Omega a(x)u_j\varphi dx \to \int_\Omega a(x)u\varphi dx.$

2) $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \alpha(x)u_j\varphi dx \to \int_{\partial\Omega} \alpha(x)u\varphi dx.$

temos o que queremos. Com efeito,

1) Usando a desigualdade de Hölder e o fato que $a \in L^\infty(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |a(x)\varphi u_j - a(x)\varphi u|dx &= \int_\Omega |a(x)||\varphi||u_j - u|dx \\ &\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\varphi||u_j - u|dx \\ &\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} ||\varphi||_{L^2(\Omega)} ||u_j - u||_{L^2(\Omega)} \\ &\to 0.\end{aligned}$$

pois, $u_j \to u$ em $L^q(\Omega), \forall q < 2^*$. Em particular, $u_j \to u$ em $L^2(\Omega)$.

Portanto, $\int_\Omega a(x)u_j\varphi dx \to \int_\Omega a(x)u\varphi dx$.

2) Como $u_j \to u$ em $L^2(\partial\Omega)$ pela imersão do traço, e usando a desigualdade de Hölder e o fato que $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ obtemos,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |\alpha(x)\varphi u_j - \alpha(x)\varphi u|dx &= \int_{\partial\Omega} |\alpha(x)||\varphi||u_j - u|dx \\ &\leq ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\partial\Omega} |\varphi||u_j - u|dx \\ &\leq ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)} ||\varphi||_{L^2(\partial\Omega)} ||u_j - u||_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\to 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\int_{\partial\Omega} \alpha(x) u_j \varphi dx \to \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u \varphi dx$.

E consequentemente,

$$\int_\Omega \langle \nabla u_j, \nabla \varphi \rangle dx \to \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx.$$

ii) $\displaystyle\int_\Omega f(x, u_j) \varphi dx \to \int_\Omega f(x, u) \varphi dx.$

De fato, sabemos de (3.2) e (3.3) que $|f(x,s)| \leq (a(x) + \epsilon)|s| + C_\epsilon |s|^p$. Lembremos que $u_j \to u$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q < 2^*$ e $u_j(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω. Como f é uma função Caratheodory, segue que, $f(x, u_j(x)) \to f(x, u(x))$ q.t.p. em Ω.

Agora, vamos dominar por uma função de $L^1(\Omega)$. Como consequência do Teorema de Riesz-Fischer sabemos que

1) Como $u_j \to u$ em $L^1(\Omega)$, então existe $h_1 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_j(x)| \leq |h_1(x)|$.

2) Como $u_j \to u$ em $L^p(\Omega)$, então existe $h_2 \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_j(x)| \leq |h_p(x)|$.

Note que,

$$|f(x,s)| \leq (a(x) + \epsilon)|s| + C_\epsilon |s|^p$$

implica que

$$|f(x, u_j(x))| \leq (a(x) + \epsilon)|u_j(x)| + C_\epsilon |u_j(x)|^p.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x, u_j(x))| dx &\leq \int_\Omega |a(x) + \epsilon||u_j(x)| dx + \int_\Omega C_\epsilon |u_j(x)|^p dx \\ &\leq (||a||_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon) \int_\Omega |h_1(x)| dx + C_\epsilon \int_\Omega |h_2(x)| dx \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Logo, $f(x, u_j(x))$ é dominada por uma função de $L^1(\Omega)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\int_\Omega f(x, u_j) dx \to \int_\Omega f(x, u) dx,$$

e portanto,

$$\int_\Omega f(x, u_j) \varphi dx \to \int_\Omega f(x, u) \varphi dx, \forall \varphi \in H(\Omega).$$

iii) $\displaystyle\int_\Omega (u_j)_+^p \varphi dx \to \int_\Omega (u)_+^p \varphi dx.$

De fato,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |(u_j)_+^p\varphi - u_+^p\varphi|dx &= \int_\Omega |\varphi||(u_j)_+^p - u_+^p|dx\\ &\leq \int_\Omega |\varphi||u_j^p - u^p|dx\\ &\to 0,\end{aligned}$$

como queríamos.

Portanto temos (3.12) e vemos que u é um ponto crítico de J. Agora vamos mostrar que u é não trivial. Suponha por absurdo que $u \equiv 0$. Então

$$\begin{cases} u_j \rightharpoonup 0 & \text{convergência fraca em} & H(\Omega)\\ u_j \rightharpoonup 0 & \text{convergência fraca em} & (L^{p+1}(\Omega))^*\\ u_j \to 0 & \text{convergência forte em} & L^q(\Omega), \forall q < p+1\\ u_j(x) \to 0 & \text{q.t.p. em} & \Omega\\ u_j \to 0 & \text{convergência forte em} & L^2(\partial\Omega)\end{cases} \tag{3.13}$$

Afirmação 3.3. i) $\displaystyle\int_\Omega F(x,u_j)dx \to 0$, quando $j \to \infty$.

ii) $\displaystyle\int_\Omega u_j f(x,u_j)dx \to 0$ quando $j \to \infty$.

iii) $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \alpha(x)u_j^2 dS$ quando $j \to \infty$.

De fato,

i) De (3.2) e (3.3) sabemos que dado $\epsilon > 0$, $|F(x,s)| \leq \epsilon|s|^{p+1} + C_\epsilon$. Sendo assim, fixado $x \in \Omega$ temos

$$|F(x,u_j(x))| \leq \epsilon|u_j(x)|^{p+1} + C_\epsilon \Rightarrow |F(x,u_j(x))| \leq C_\epsilon,$$

pois $u_j(x) \to 0$ q.t.p. em Ω.

Logo, $F(x,u_j(x)) \to 0$ q.t.p. em Ω, além disso, tomando $h(x) = C_\epsilon \in L^1(\Omega)$ temos que $|F(x,u_j(x))| \leq h(x)$, ou seja, $F(x,u_j(x))$ é dominada por uma função de $L^1(\Omega)$. Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\int_\Omega F(x,u_j)dx \to 0.$$

ii) Sabemos que dado $\epsilon > 0$, $|f(x,s)| \leq (a(x)+\epsilon)|s| + C_\epsilon|s|^p$. Como $u_j(x) \to$

0 q.t.p. em Ω, segue que

$$\begin{aligned} |u_j(x)f(x,u_j(x))| &= |u_j(x)||f(x,u_j(x))| \\ &\leq (a(x)+\epsilon)|u_j(x)|^2 + C_\epsilon |u_j(x)|^{p+1}, \end{aligned}$$

uma vez que

$$(a(x)+\epsilon)|u_j(x)|^2 + C_\epsilon |u_j(x)|^{p+1} \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

segue que $u_j(x)f(x,u_j(x)) \to 0$ q.t.p. em Ω.

Agora vamos dominar por uma função de $L^1(\Omega)$. Seja $C > 0$ uma constante, como $u_j(x) \to 0$ q.t.p. em Ω, segue que $|u_j(x)| \leq C$. Daí tomando $h_1(x) = C^2 \in L^1(\Omega)$ e $h_2(x) = C^{p+1} \in L^1(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} |u_j(x)f(x,u_j(x))| &\leq (a(x)+\epsilon)|u_j(x)|^2 + C_\epsilon |u_j(x)|^{p+1} \\ &\leq (a(x)+\epsilon)C^2 + C_\epsilon C^{p+1}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega u_j f(x,u_j)dx \to 0.$$

iii) Como $u_j \to 0$ em $L^2(\partial\Omega)$ pela imersão compacta no Traço, e usando Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \alpha(x)u_j^2 dS &\leq \int_{\partial\Omega} |\alpha(x)||u_j||u_j|dS \\ &\leq ||\alpha||_{L^\infty(\Omega)}||u_j||^2_{L^2(\Omega)}||u_j||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\partial\Omega} \alpha(x)u_j^2 dS \to 0.$$

Ficando assim provada a afirmação.

Continuando com a prova do Teorema, seja $\epsilon > 0$ uma constante suficientemente pequena, e seja $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ uma partição da unidade de $\overline{\Omega}$ escolhida de forma que diam(suppφ_α) $\leq \delta$ para cada α. Como $\partial\Omega \in C^1$ segue do Lema 3.3 que

$$\int_\Omega |\nabla(u\varphi_\alpha)|^2 dx \geq (2^{-2/n}S_n - \epsilon)\left[\int_\Omega |u\varphi_\alpha|^{p+1}dx\right]^{2/(p+1)} \tag{3.14}$$

para todo $1 \leq \alpha \leq N, \quad u \in H(\Omega)$, onde δ depende de ϵ e é suficientemente pequeno.

Note que,

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega (u_j)_+^{p+1}dx\right]^{2/(p+1)} &\leq \left[\int_\Omega |u_j|^{p+1}dx\right]^{2/(p+1)}\\ &= \left[\int_\Omega |u_j|^{2\frac{p+1}{2}}dx\right]^{2/(p+1)}\\ &= ||u_j^2||_{L^{(p+1)/2}(\Omega)},\end{aligned}$$

como $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ é uma partição da unidade de $\overline{\Omega}$, podemos escrever

$$||u_j^2||_{L^{(p+1)/2}(\Omega)} = ||\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha u_j^2||_{L^{(p+1)/2}(\Omega)},$$

da desigualdade triangular temos

$$||\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha u_j^2||_{L^{(p+1)/2}(\Omega)} \leq \sum_{\alpha=1}^N ||\varphi_\alpha u_j^2||_{L^{(p+1)/2}(\Omega)}.$$

Por definição,

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^N ||\varphi_\alpha u_j^2||_{L^{(p+1)/2}(\Omega)} &= \sum_{\alpha=1}^N \left[\int_\Omega |\varphi_\alpha u_j^2|^{(p+1)/2}dx\right]^{2/(p+1)}\\ &= \sum_{\alpha=1}^N \left[\int_\Omega |\varphi_\alpha^{1/2} u_j|^{p+1}dx\right]^{2/(p+1)},\end{aligned}$$

agora, usando (3.14) temos

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^N \left[\int_\Omega |\varphi_\alpha^{1/2} u_j|^{p+1}dx\right]^{2/(p+1)} &\leq (2^{-2/n}S_n - \epsilon)^{-1}\sum_{\alpha=1}^N \int_\Omega |\nabla(u_j\varphi_\alpha^{1/2})|^2dx\\ &\leq (2^{-2/n}S_n - \epsilon)^{-1}\left[(1+\epsilon)\int_\Omega |\nabla u_j|^2dx + C_\epsilon\int_\Omega |u_j|^2dx\right].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left[\int_\Omega (u_j)_+^{p+1}dx\right]^{2/(p+1)} \leq (2^{-2/n}S_n - \epsilon)^{-1}(1+\epsilon)\int_\Omega |\nabla u_j|^2dx + o(1), \tag{3.15}$$

quando $j \to \infty$, pois $\displaystyle\int_\Omega |u_j|^2dx \to 0$ quando $j \to \infty$.
De (3.11) e das convergências (3.13) temos,

$$\int_\Omega [|\nabla u_j|^2 - (u_j)_+^{p+1} - u_j f(x,u_j)]dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x)u_j^2dS = o(1) \tag{3.16}$$

Da Afirmação 3.3 e de (3.16) temos que

$$\int_\Omega [|\nabla u_j|^2 - (u_j)_+^{p+1}]dx = o(1),$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx = \int_\Omega (u_j)_+^{p+1} dx + o(1). \tag{3.17}$$

Analogamente, da Afirmação 3.3 e de (3.10) temos

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u_j|^2 - \frac{1}{p+1}(u_j)_+^{p+1}\right] dx = c + o(1). \tag{3.18}$$

Substituindo (3.17) em (3.18) ficamos com

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u_j|^2 - \frac{1}{p+1}|\nabla u_j|^2\right] dx = c + o(1).$$

Logo,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) |\nabla u_j|^2 dx = c + o(1),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \frac{1}{n}|\nabla u_j|^2 dx = c + o(1).$$

E, portanto, concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx \to nc \quad \text{e} \quad \int_\Omega (u_j)_+^{p+1} dx \to nc \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Sendo assim, passando o limite em (3.15) obtemos

$$\begin{aligned}
(nc)^{2/(p+1)} &\leq (2^{-2/n}S_n - \epsilon)^{-1}(1+\epsilon)(nc) \\
\Rightarrow (nc)^{1-(2/(p+1))} &\geq (2^{-2/n}S_n - \epsilon)(1+\epsilon)^{-1} \\
\Rightarrow (nc)^{2/n} &\geq (2^{-2/n}S_n - \epsilon)(1+\epsilon)^{-1} \\
\Rightarrow c^{2/n} &\geq (2^{-2/n}S_n - \epsilon)(1+\epsilon)^{-1}(n)^{-2/n} \\
\Rightarrow c &\geq (2^{-2/n}S_n - \epsilon)^{n/2}(1+\epsilon)^{-n/2}(n)^{-1} \\
\Rightarrow c &\geq \frac{1}{n}\left[\frac{2^{-2/n}S_n - \epsilon}{1+\epsilon}\right]^{n/2}
\end{aligned}$$

isto contradiz (3.9) quando $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Portanto $u \neq 0$.

Finalmente vamos mostrar que $J(u) \leq c$. Da convergência fraca $u_j \rightharpoonup u$ em $H(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,u_j)dx &\to \int_\Omega F(x,u)dx,\\ \int_\Omega u_j f(x,u_j)dx &\to \int_\Omega uf(x,u)dx\end{aligned}$$

quando $j \to \infty$. Além disso, pela imersão compacta $H(\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ temos

$$\int_{\partial\Omega} \alpha(x)u_j^2 dS \to \int_{\partial\Omega} \alpha u^2 dS \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Defina $v_j = u_j - u$, então $v_j \rightharpoonup 0$ em $H(\Omega)$.

Afirmação 3.4. i) $\displaystyle\int_\Omega (u_j)_+^{p+1}dx = \int_\Omega (v_j)_+^{p+1} + \int_\Omega u^{p+1}dx + o(1)$

ii) $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v_j|^2 dx + o(1)$

De fato, o item (i) é uma consequência imediata da Proposição 1.7. Agora vamos provar (ii). Como $v_j = u_j - u$, segue que $u_j = v_j + u$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx &= \int_\Omega |\nabla(v_j+u)|^2 dx\\ &= \int_\Omega \langle \nabla v_j + \nabla u, \nabla v_j + \nabla u\rangle dx\\ &= \int_\Omega |\nabla v_j|^2 dx + 2\int_\Omega \langle \nabla v_j, \nabla u\rangle dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\\ &= \int_\Omega |\nabla v_j|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + o(1),\end{aligned}$$

pois,

$$\int_\Omega \langle \nabla v_j, \nabla u\rangle dx \to 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

De fato, como $u_j \to u$ em $H(\Omega)$ e $||\cdot||_H$ e $||\cdot||_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes temos que

$$\int_\Omega [\langle \nabla u_j, \nabla\varphi\rangle + u_j\varphi]dx \to \int_\Omega [\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle + u\varphi]dx \text{ quando } j \to \infty \text{ e } \forall \varphi \in H(\Omega).$$

Note que, usando a desigualdade de Hölder e o fato que $u_j \to u$ em $L^2(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega (u_j - u)\varphi dx \leq ||u_j - u||_{L^2(\Omega)} ||\varphi||_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Logo,

$$\int_\Omega u_j\varphi dx \to \int_\Omega u\varphi dx \text{ quando } j \to \infty.$$

E portanto,

$$\int_\Omega \langle \nabla u_j, \nabla\varphi\rangle dx \to \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle dx, \text{ quando } j\to\infty, \forall\varphi\in H(\Omega).$$

Logo,

$$\int_\Omega \langle [\nabla u_j - \nabla u], \nabla\varphi\rangle dx \to 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \langle \nabla v_j, \nabla\varphi\rangle dx \to 0, \text{ quando } j\to\infty, \forall\varphi\in H(\Omega).$$

Em particular para $\varphi = u$ temos

$$\int_\Omega \langle \nabla v_j, \nabla u\rangle dx \to 0.$$

Fincando assim provada a afirmação.

De (3.10) e da Afirmação 3.4 temos

$$\begin{aligned} c + o(1) &= J(u_j) \\ &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u_j|^2 - \frac{1}{p+1}(u_j)_+^{p+1} - F(x,u_j)\right] dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \alpha(x) u_j^2 dS \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_j|^2 dx + o(1) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (v_j)_+^{p+1} dx \\ &- \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1} dx + o(1) - \int_\Omega F(x,u) dx + o(1) + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \alpha(x) u^2 dS + o(1). \end{aligned}$$

Logo,

$$J(u) + \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla v_j|^2 - \frac{1}{p+1}(v_j)_+^{p+1}\right] dx = c + o(1).$$

Além disso, de (3.16) e da Afirmação 3.4 temos

$$\begin{aligned} o(1) &= \int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v_j|^2 dx + o(1) - \int_\Omega (v_j)_+^{p+1} dx - \int_\Omega u^{p+1} dx + o(1) \\ &- \int_\Omega u f(x,u) dx + o(1) + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u^2 dS + o(1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} o(1) &= \int_\Omega [|\nabla u|^2 - u^{p+1} - u f(x,u)] dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u^2 dS + \int_\Omega [|\nabla v_j|^2 - (v_j)_+^{p+1}] dx \\ &= J'(u)u + \int_\Omega [|\nabla v_j|^2 - (v_j)_+^{p+1}] dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\Omega [|\nabla v_j|^2 - (v_j)_+^{p+1}] dx = o(1),$$

pois, u é ponto crítico de J. Sendo assim,

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla v_j|^2 - \frac{1}{p+1}(v_j)_+^{p+1}\right] dx = \int_\Omega \frac{1}{n}|\nabla v_j|^2 dx,$$

pois, $1/2 - 1/(p+1) = 1/n$. E portanto,

$$J(u) = c + o(1) - \frac{1}{n}\int_\Omega |\nabla v_j|^2 dx,$$

o que implica que

$$J(u) \leq c.$$

$\square$

3.2 Existência de Solução para (3.19)

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &=& u^p - \lambda u & \text{em} & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &=& 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \\ u &>& 0 & \text{em} & \Omega \end{cases} \tag{3.19}$$

onde $\lambda > 0$, $\;p = (n+2)/(n-2)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^2, n \geq 3$.

Afirmação 3.5. $w_\lambda(x) = \lambda^{1/(p-1)}$ é uma solução constante de (3.19).

De fato, por um lado

$$\begin{aligned} w_\lambda^p - \lambda w_\lambda &= \left(\lambda^{1/(p-1)}\right)^p - \lambda\left(\lambda^{1/(p-1)}\right) \\ &= \lambda^{p/(p-1)} - \lambda^{(1/(p-1))+1} \\ &= \lambda^{p/(p-1)} - \lambda^{p/(p-1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial x_i}(x) = 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n \text{ e } \forall x \in \Omega,$$

então,

$$\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x_i^2}(x) = 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n \text{ e } \forall x \in \Omega.$$

Logo,

$$\Delta w_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x_i^2} = 0,$$

e portanto,

$$-\Delta w_\lambda = w_\lambda^p - \lambda w_\lambda \text{ em } \Omega.$$

Além disso, seja $x \in \partial\Omega$, daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_\lambda}{\partial \eta}(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{w_\lambda(x + t\eta) - w_\lambda(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\lambda^{1/(p-1)} - \lambda^{1/(p-1)}}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial \eta} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Finalmente, uma vez que $\lambda > 0$ temos que $\lambda^{1/(p-1)} > 0$, isto é,

$$w_\lambda > 0 \text{ em } \Omega.$$

Uma pergunta a ser feita é: existe alguma solução não constante para este problema? Para responder esta pergunta, vamos estudar o seguinte teorema:

Teorema 3.2. O problema (3.19) possui uma solução não constante para $\lambda > 0$ suficientemente grande.

Demonstração.

Observação 3.1. Este resultado foi provado independentemente em 1991 por Adimurthi, G Mancini, The Neumann Problem for Elliptic Equation with Critical Nonlinearity.
O caso subcrítico, isto é, $p < 2^* - 1$, foi estudado por Ni-Takagi [16].

Voltemos a demonstração do teorema. As soluções de (3.19) correspondem a pontos críticos não triviais do funcional

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} u_+^{p+1} + \frac{1}{2}\lambda u^2 \right] dx. \tag{3.20}$$

Com efeito, sabemos que

$$J'(u)\varphi = \int_\Omega [\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - u_+^p \varphi + \lambda u \varphi] dx.$$

Suponha que u é solução de (3.19), então

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p - \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

Seja $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, então multiplicando (3.21) por φ e integrando obtemos

$$\int_\Omega (-\Delta u)\varphi dx = \int_\Omega (u^p - \lambda u)\varphi dx,$$

do Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (-\Delta u)\varphi dx &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\varphi dS + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle dx \\ &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle dx, \end{aligned}$$

pois $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Logo,

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle dx = \int_\Omega (u^p - \lambda u)\varphi dx.$$

Daí,

$$\int_\Omega [\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle - u^p\varphi + \lambda u\varphi]dx = 0.$$

Como $u > 0$ em Ω, segue que $u^p = u_+^p$, e, portanto,

$$\int_\Omega [\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle - u_+^p\varphi + \lambda u\varphi]dx = 0,$$

ou seja, $J'(u)\varphi = 0, \quad \forall\varphi \in C^\infty(\Omega)$, e portanto, $J'(u) \equiv 0$.

Reciprocamente, suponha que u é ponto crítico de J, então

$$\begin{aligned} 0 &= J'(u)u_- \\ &= \int_\Omega [\langle \nabla u, \nabla u_-\rangle - u_+^p u_- + \lambda u u_-]dx, \end{aligned}$$

como $u = u_+ + u_-$ temos

$$\int_\Omega [\langle \nabla(u_+ + u_-), \nabla u_-\rangle + \lambda(u_+ + u_-)u_-]dx = 0,$$

e uma vez que $(u_+)(u_-) = 0$, obtemos

$$\int_\Omega [|\nabla u_-|^2 + \lambda u_-^2] dx = 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2 dx = -\lambda \int_\Omega u_-^2 dx.$$

Como

$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2 dx \geq 0 \text{ e } -\lambda \int_\Omega u_-^2 dx \leq 0,$$

segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2 dx = 0 \text{ e } -\lambda \int_\Omega u_-^2 dx = 0.$$

O que implica que $u_- = 0$ em Ω.

Se mostrarmos que

$$c^* = \inf_{u \in H(\Omega)} \left\{ \sup_{t>0} J(tu); u \geq 0 \text{ e } u \neq 0 \right\} < \frac{1}{2n} S_n^{n/2}, \tag{3.22}$$

então pelo Teorema 3.1 obtemos uma solução u_λ satisfazendo

$$J(u_\lambda) \leq c \leq c^* < \frac{1}{2n} S_n^{n/2}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} J(w_\lambda) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla w_\lambda|^2 - \frac{1}{p+1}(w_\lambda)_+^{p+1} + \frac{1}{2}\lambda w_\lambda^2 \right] dx \\ &= \int_\Omega \left[-\frac{1}{p+1}(\lambda^{1/(p-1)})^{p+1} + \frac{1}{2}\lambda(\lambda^{1/(p-1)})^2 \right] dx \\ &= \int_\Omega \left[-\frac{1}{p+1}\lambda^{(p+1)/(p-1)} + \frac{1}{2}\lambda^{(2/(p-1))+1} \right] dx, \end{aligned}$$

pois, $|\nabla w_\lambda|^2 = 0$. Além disso, como $(p+1)/(p-1) = n/2$ temos

$$\int_\Omega \left[-\frac{1}{p+1}\lambda^{(p+1)/(p-1)} + \frac{1}{2}\lambda^{(2/(p-1))+1} \right] dx = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\lambda^{n/2} - \frac{1}{p+1}\lambda^{n/2} \right] dx,$$

e como, $1/2 - 1/(p+1) = (p-1)/2(p+1)$ obtemos

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}\lambda^{n/2} - \frac{1}{p+1}\lambda^{n/2} \right] dx = \int_\Omega \left[\frac{p-1}{2(p+1)}\lambda^{n/2} \right] dx,$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
J(w_\lambda) &= \int_\Omega \left[\frac{p-1}{2(p+1)}\lambda^{n/2}\right] dx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{2}{n}\lambda^{n/2} dx \\
&= \frac{1}{n}\lambda^{n/2}|\Omega|.
\end{aligned}
$$

Daí, se $J(w_\lambda) \geq S_n^{n/2}/2n$, ou seja,

$$\frac{1}{n}\lambda^{n/2}|\Omega| \geq \frac{1}{2n}S_n^{n/2},$$

isto é,

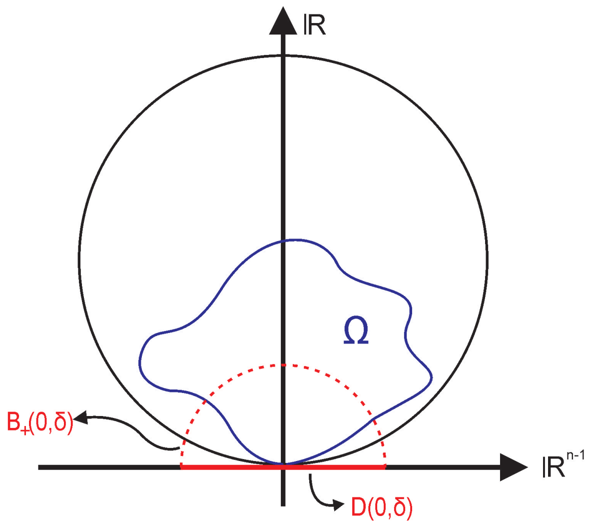
$$\lambda^{n/2} \geq \frac{1}{2|\Omega|}S_n^{n/2},$$

ou seja,

$$\lambda \geq \frac{S_n}{(2|\Omega|)^{2/n}},$$

segue que u_λ é uma solução não constante.

Agora vamos mostrar (3.22). Considere $B(\bar{x}, R)$ uma bola contendo Ω, de forma que $\partial B(\bar{x}, R) \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$. Escolhendo $x_0 \in \partial B(\bar{x}, R) \cap \bar{\Omega}$, temos que $\alpha_i \geq 1/R$ para cada $1 \leq i \leq n-1$, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ são as curvaturas principais de $\partial\Omega$ em x_0. Então podemos supor sem perda de generalidade que x_0 é a origem de $\mathbb{R}^n$ e $\Omega \subset \{x_n > 0\}$. Daí, a fronteira $\partial\Omega$ próximo da origem é representada por (rotacionando as $x_1, \ldots, x_{n-1}$ direções se necessário)



$$x_n = h(x') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i^2 + o(|x'|^2), \quad \forall x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D(0, \delta)$$

para algum $\delta > 0$, onde $D(0,\delta) = B(0,\delta) \cap \{x_n = 0\}$. Seja

$$u_\epsilon(x) = \frac{\epsilon^{(n-2)/4}}{(\epsilon + |x|^2)^{(n-2)/2}}.$$

Afirmamos que

$$Y_\epsilon = \sup_{t>0} J(tu_\epsilon) < \frac{1}{2n} S_n^{n/2} \tag{3.23}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. (Consequentemente (3.22) vale.) Denotemos

$$K_1(\epsilon) = \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx \text{ e } K_2(\epsilon) = \int_\Omega |u_\epsilon|^{p+1} dx,$$

e $g(x') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i^2$. Dividiremos a prova em dois casos:

Caso 1: $n \geq 4$**.**

Primeiramente observamos que, como

$$u_\epsilon(x) = \frac{\epsilon^{(n-2)/4}}{(\epsilon + |x|^2)^{(n-2)/2}},$$

segue que

$$\nabla u_\epsilon(x) = -\frac{(n-2)\epsilon^{(n-2)/4}}{(\epsilon + |x|^2)^{n/2}} x,$$

e consequentemente,

$$|\nabla u_\epsilon(x)|^2 = (n-2)^2 \frac{|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^n} \epsilon^{(n-2)/2}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} K_1(\epsilon) &= \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_\epsilon|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_\epsilon|^2 dx, \end{aligned}$$

e como

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_\epsilon|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+ \setminus \Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx,$$

segue que

$$\begin{aligned}
K_1(\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n_+\backslash\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' + A(\epsilon),
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
A(\epsilon) &\leq \int_{\mathbb{R}^n_+\backslash B_+(0,\delta)} |\nabla u_\epsilon|^2 dx \\
&= (n-2)^2 \epsilon^{(n-2)/2} \int_{\mathbb{R}^n_+\backslash B_+(0,\delta)} \frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^n} dx.
\end{aligned}$$

Usando a simetria desta função podemos escrever,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+\backslash B_+(0,\delta)} \frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^n} dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,\delta)} \frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^n} dx.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,\delta)} \frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^n} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,\delta)} \frac{|x|^2}{|x|^{2n}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,\delta)} \frac{1}{|x|^{2n-2}} dx,
\end{aligned}$$

usando coordenas polares temos,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,\delta)} \frac{1}{|x|^{2n-2}} dx &= \int_{\partial(\mathbb{R}^n\backslash B(0,\delta))} d\sigma \int_\delta^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{2n-2}} dr \\
&= \sigma_n \int_\delta^{+\infty} \frac{1}{r^{n-1}} dr.
\end{aligned}$$

Resolvendo esta integral obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\delta^{+\infty} \frac{1}{r^{n-1}} dr &= \left[\frac{r^{-(n-1)+1}}{-(n-1)+1}\right]_\delta^{+\infty} \\
&= \frac{1}{(n-2)\delta^{n-2}},
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$A(\epsilon) \leq C_n \frac{1}{\delta^{n-2}} \epsilon^{(n-2)/2},$$

assim, $A(\epsilon) = O(\epsilon^{(n-2)/2})$. Logo,

$$K_1(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' + O(\epsilon^{(n-2)/2}).$$

De forma análoga ao que fizemos acima temos

$$\begin{aligned}
-\int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' &= \int_{D(0,\delta)} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' - \int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' - \int_{D(0,\delta)} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' \\
&- \int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx'.
\end{aligned}$$

como

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' - \int_{D(0,\delta)} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus D(0,\delta)} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx',$$

e pelo cáculo que fizemos anteiormente,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus D(0,\delta)} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' = O(\epsilon^{(n-2)/2}),$$

segue que

$$\begin{aligned}
-\int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' &= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' - \int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' \\
&+ O(\epsilon^{(n-2)/2}).
\end{aligned}$$

Portanto, usando o fato que u_ϵ é simétrica temos

$$K_1(\epsilon) = \frac{1}{2} K_1 - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' - \int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' + O(\epsilon^{(n-2)/2}),$$

onde $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^n \cap \{x_n > 0\}$, e

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\epsilon|^2 dx.$$

Afirmação 3.6.

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\epsilon|^2 dx = (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n} dx \tag{3.24}$$

é uma constante que não depende de ϵ.

Com efeito, sabemos que

$$|\nabla u_\epsilon|^2 = (n-2)^2 \epsilon^{(n-2)/2} \frac{|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^n},$$

daí,

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\epsilon|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (n-2)^2 \epsilon^{(n-2)/2} \frac{|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^n} dx. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} (\epsilon + |x|^2)^n &= \left(\epsilon \left(1 + \frac{|x|^2}{\epsilon} \right) \right)^n \\ &= \epsilon^n \left(1 + \left| \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \right|^2 \right)^n, \end{aligned}$$

então,

$$\frac{|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^n} \epsilon^{(n-2)/2} = \frac{\epsilon^{(n-2)/2}}{\epsilon^n} \frac{|x|^2}{\left(1 + \left| \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \right|^2 \right)^n} = \epsilon^{-(n+2)/2} \frac{|x|^2}{\left(1 + \left| \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \right|^2 \right)^n}.$$

Consideremos a seguinte tranformação $y = x/\sqrt{\epsilon}$ então $dy = (1/\epsilon^{n/2}) dx$ e $|x|^2 = \epsilon |y|^2$. Logo, usando o Teorema da Mudança de Variáveis temos

$$\begin{aligned} K_1 &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-(n+2)/2} \frac{|x|^2}{\left(1 + \left| \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \right|^2 \right)^n} dx \\ &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-(n+2)/2} \frac{\epsilon |y|^2}{(1 + |y|^2)^n} \epsilon^{n/2} dy, \end{aligned}$$

como $\epsilon^{-(n+2)/2} \epsilon = \epsilon^{-n/2}$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-(n+2)/2} \frac{\epsilon |y|^2}{(1 + |y|^2)^n} \epsilon^{n/2} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n/2} \frac{|y|^2}{(1 + |y|^2)^n} \epsilon^{n/2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{(1 + |y|^2)^n} dy. \end{aligned}$$

E portanto,

$$\begin{aligned} K_1 &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^n} dy \\ &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n} dx. \end{aligned}$$

Ficando assim provada a afirmação.

Consideremos novamente a mudança $y = x/\sqrt{\epsilon}$, sendo assim, temos que na n-ésima coordenada, y_n passa a variar de 0 à $g(x')/\sqrt{\epsilon}$. Como $y_n = g(x')$ temos $g(y') = g(x')/\sqrt{\epsilon}$, daí, y_n vai variar de 0 à $\sqrt{\epsilon} g(y')$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} I(\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} (n-2)^2 \epsilon^{(n-2)/2} \frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^n} dx_n dx' \\ &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\sqrt{\epsilon} g(y')} \frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^n} dy_n dy'. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Agora, usando o Teorema do Valor Médio para integrais temos

$$\begin{aligned} I(\epsilon) &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\sqrt{\epsilon} g(y')} \frac{|y'|^2 + y_n^2}{(1+|y'|^2+y_n^2)^n} dy_n dy' \\ &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|y'|^+ C^2}{(1+|y'|^2+C^2)^n} (\sqrt{\epsilon} g(y') - 0) dy', \end{aligned}$$

onde $C = C(\epsilon, y') \in [0, \epsilon^{1/2} g(y')]$. Daí, quando $\epsilon \to 0$ segue que $C \to 0$. Portanto,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-1/2} I(\epsilon) = (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|y'|^2 g(y')}{(1+|y'|^2)^n} dy',$$

o que implica que $I(\epsilon) = O(\epsilon^{1/2})$. Além disso, note que,

$$\begin{aligned} I_1(\epsilon) &= \left| \int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_n dx' \right| \\ &= \left| (n-2)^2 \epsilon^{(n-2)/2} \int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} \frac{|x'|^2 + x_n^2}{(\epsilon + |x'|^2 + x_n^2)^n} dx_n dx' \right|, \end{aligned}$$

usando novamente o Teorema do Valor Médio para integrais temos

$$\left| \int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} \frac{|x'|^2 + x_n^2}{(\epsilon + |x'|^2 + x_n^2)^n} dx_n dx' \right| = \left| \int_{D(0,\delta)} \frac{|x'|^2 + t^2}{(\epsilon + |x'|^2 + t^2)^n} (h(x') - g(x')) dx' \right|,$$

onde $t \in [g(x'), h(x')]$. Somando e subtraindo ϵ obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{D(0,\delta)} \frac{|x'|^2+t^2}{(\epsilon+|x'|^2+t^2)^n}(h(x')-g(x'))dx'\right| &= \left|\int_{D(0,\delta)} \frac{-\epsilon+(\epsilon+|x'|^2+t^2)}{(\epsilon+|x'|^2+t^2)^n}(h(x')-g(x'))dx'\right| \\ &\leq \int_{D(0,\delta)} \frac{|h(x')-g(x')|}{(\epsilon+|x'|^2+t^2)^{n-1}}dx',\end{aligned}$$

portanto

$$I_1(\epsilon) \leq (n-2)^2\epsilon^{(n-2)/2}\int_{D(0,\delta)} \frac{|h(x')-g(x')|}{(\epsilon+|x'|^2)^{n-1}}dx'.$$

Como $h(x') = g(x') + o(|x'|^2)$, ou seja,

$$\frac{h(x')-g(x')}{|x'|^2} \to 0,$$

segue que $\forall \sigma > 0, \ \exists \ 0 < \delta_0 < \delta$ tal que

$$|h(x')-g(x')| \leq \sigma|x'|^2 \text{ se } 0 \leq |x'| \leq \delta_0.$$

Por outro lado, $\forall \sigma > 0, \ \exists C(\sigma) > 0$ tal que

$$|h(x')-g(x')| \leq C(\sigma)|x'|^{5/2} \text{ se } \delta_0 \leq |x'| \leq \delta.$$

Logo,

$$|h(x')-g(x')| \leq \sigma|x'|^2 + C(\sigma)|x'|^{5/2} \text{ para } x' \in D(0,\delta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}I_1(\epsilon) &\leq C\epsilon^{(n-2)/2}\int_{D(0,\delta)} \frac{\sigma|x'|^2+C(\sigma)|x'|^{5/2}}{(\epsilon+|x'|^2)^{n-1}}dx' \\ &\leq C\epsilon^{(n-2)/2}\int_{D(0,\delta)} \frac{\sigma|x'|^2+C(\sigma)|x'|^{5/2}}{\epsilon^{n-1}}dx',\end{aligned}$$

usando coordenadas polares e o fato que $(n-2)/2-(n-1) = -n/2$ temos

$$\begin{aligned}C\epsilon^{(n-2)/2}\int_{D(0,\delta)} \frac{\sigma|x'|^2+C(\sigma)|x'|^{5/2}}{\epsilon^{n-1}}dx' &= C\epsilon^{-n/2}\sigma_{n-1}\int_0^\delta (\sigma r^2+C(\sigma)r^{5/2})r^{n-2}dr \\ &= C_n\epsilon^{-n/2}\left[\sigma\int_0^\delta r^n dr + C(\sigma)\int_0^\delta r^{(2n+1)/2}dr\right],\end{aligned}$$

resolvendo a integral, concluímos que

$$I_1(\epsilon) \leq C_n\epsilon^{-n/2}\left[\sigma\frac{\delta^{n+1}}{n+1} + C(\sigma)\frac{2}{2n+3}\delta^{(2n+3)/2}\right],$$

fazendo $0 < \delta < \epsilon$ temos

$$I_1(\epsilon) \leq C_n \epsilon^{-n/2}[\sigma \epsilon^{n+1} + C(\sigma)\epsilon^{(2n+3)/2}].$$

Agora, fazendo $0 < \epsilon < 1$ temos

$$\begin{aligned} I_1(\epsilon) &\leq C(\sigma\epsilon^{1/2} + C(\sigma)\epsilon^{1/4}) \\ &= C\epsilon^{1/2}(\sigma + C(\sigma)\epsilon^{1/4}), \end{aligned}$$

pois, $-n/2 + (n+1) \geq 1/2$ e $-n/2 + (2n+3)/2 \geq 3/4$. O que implica que

$$I_1(\epsilon) = o(\epsilon^{1/2}) \text{ quando } \epsilon \to 0. \tag{3.26}$$

Portanto obtemos

$$K_1(\epsilon) = \frac{1}{2}K_1 - I(\epsilon) + o(\epsilon^{1/2}). \tag{3.27}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} K_2(\epsilon) &= \int_\Omega |u_\epsilon|^{p+1}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |u_\epsilon|^{p+1}dx + \int_\Omega |u_\epsilon|^{p+1}dx - \int_{\mathbb{R}^n_+} |u_\epsilon|^{p+1}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |u_\epsilon|^{p+1}dx - \int_{\mathbb{R}^n_+\backslash\Omega} |u_\epsilon|^{p+1}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |u_\epsilon|^{p+1}dx - \int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1}dx_n dx' + B(\epsilon), \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} B(\epsilon) &\leq \int_{\mathbb{R}^n_+\backslash B_+(0,\delta)} |u_\epsilon|^{p+1}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+\backslash B_+(0,\delta)} \left|\frac{\epsilon^{(n-2)/4}}{(\epsilon + |x|^2)^{(n-2)/2}}\right|^{2n/(n-2)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+\backslash B_+(0,\delta)} \frac{\epsilon^{n/2}}{(\epsilon + |x|^2)^n}dx, \end{aligned}$$

usando a simetria de u_ϵ podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n_+\backslash B_+(0,\delta)} \frac{\epsilon^{n/2}}{(\epsilon + |x|^2)^n}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,\delta)} \frac{\epsilon^{n/2}}{(\epsilon + |x|^2)^n}dx,$$

além disso, note que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \frac{\epsilon^{n/2}}{(\epsilon + |x|^2)^n} dx \leq \epsilon^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \frac{1}{|x|^{2n}} dx.$$

Usando coordenadas polares obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \frac{1}{|x|^{2n}} dx &= \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta))} d\sigma \int_\delta^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{2n}} dr \\ &= \sigma_n \int_\delta^\infty \frac{1}{r^{n+1}} dr, \end{aligned}$$

resolvendo a integral acima obtemos

$$\begin{aligned} \int_\delta^\infty \frac{1}{r^{n+1}} dr &= \left[-\frac{1}{nr^n} \right]_\delta^\infty \\ &= \frac{1}{n\delta^n}. \end{aligned}$$

Portanto

$$B(\epsilon) \leq \frac{\sigma_n}{2n\delta^n} \epsilon^{n/2},$$

donde,

$$B(\epsilon) = O(\epsilon^{n/2}).$$

Logo,

$$K_2(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^n_+} |u_\epsilon|^{p+1} dx - \int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' + O(\epsilon^{n/2}).$$

De forma análoga ao que fizemos acima temos,

$$\begin{aligned} -\int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' &= -\int_{D(0,\delta)} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' - \int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' - \int_{D(0,\delta)} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' \\ &- \int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx', \end{aligned}$$

como,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' - \int_{D(0,\delta)} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus D(0,\delta)} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx',$$

e além disso sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus D(0,\delta)} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' = O(\epsilon^{n/2}),$$

segue que,

$$\begin{aligned} -\int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' &= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' \\ &\quad -\int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' + O(\epsilon^{n/2}). \end{aligned}$$

Daí,

$$K_2(\epsilon) = \frac{1}{2}K_2 - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' - \int_{D(0,\delta)} \int_{g(x')}^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' + O(\epsilon^{n/2}).$$

Onde,

$$K_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon|^{p+1} dx.$$

Afirmação 3.7.

$$K_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^n} dx, \tag{3.28}$$

é uma constante que não depende de ϵ.

De fato, como

$$u_\epsilon(x) = \frac{\epsilon^{(n-2)/4}}{(\epsilon+|x|^2)^{(n-2)/2}},$$

segue que

$$|u_\epsilon|^{p+1} = \left|\frac{\epsilon^{(n-2)/4}}{(\epsilon+|x|^2)^{(n-2)/2}}\right|^{2n/(n-2)} = \frac{\epsilon^{n/2}}{(\epsilon+|x|^2)^n}.$$

Note que,

$$(\epsilon+|x|^2)^n = \left(\epsilon\left(1+\frac{|x|^2}{\epsilon}\right)\right)^n = \epsilon^n\left(1+\left|\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right|^2\right)^n,$$

logo,

$$|u_\epsilon(x)|^{p+1} = \frac{1}{\epsilon^{n/2}\left(1+\left|\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right|^2\right)^n}.$$

Seja $y = x/\sqrt{\epsilon}$. Então pelo Teorema da Mudança de Variáveis segue que

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon|^{p+1} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\epsilon^{n/2}\left(1+\left|\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right|^2\right)^n} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^n} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^n} dx.
\end{aligned}$$

Além disso, K_1 e K_2 satifazem (ver [?])

$$\frac{K_1}{K_2^{(n-2)/n}} = S_n.$$

Note que, com a mudança $y = x/\sqrt{\epsilon}$ temos

$$\begin{aligned}
II(\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_n dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{g(x')} \frac{\epsilon^{n/2}}{(\epsilon+|x|^2)^n} dx_n dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\sqrt{\epsilon}g(y')} \frac{1}{(1+|y|^2)^n} dy_n dy'. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Agora, usando o Teorema do Valor Médio para integrais

$$\begin{aligned}
II(\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\sqrt{\epsilon}g(y')} \frac{1}{(1+|y'|^2+y_n^2)^n} dy_n dy' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(1+|y'|^2+C^2)^n} (\sqrt{\epsilon}g(y')) dy',
\end{aligned}$$

onde $C = C(\epsilon, y') \in [0, \sqrt{\epsilon}g(y')]$. Logo quando $\epsilon \to 0$ então $C \to 0$. Portanto,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-1/2} II(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y')}{(1+|y'|^2)^n} dy'.$$

Logo,

$$II(\epsilon) = O(\epsilon^{1/2}).$$

De forma similar ao que fizemos em (3.26) temos

$$\left|\int_{D(0,\delta)}\int_{g(x')}^{h(x')}|u_\epsilon|^{p+1}dx_ndx'\right| = o(\epsilon^{1/2}) \text{ quando } \epsilon\to 0.$$

Portanto,

$$K_2(\epsilon) = \frac{1}{2}K_2 - II(\epsilon) + o(\epsilon^{1/2}). \tag{3.30}$$

Além disso, (ver [?])

$$K_3(\epsilon) = \int_\Omega u_\epsilon^2 dx = \begin{cases} O(\epsilon^{1/2}) & \text{se} \quad n = 3, \\ O(|\epsilon\log\epsilon|) & \text{se} \quad n = 4, \\ O(\epsilon) & \text{se} \quad n \geq 5. \end{cases} \tag{3.31}$$

Seja $t_\epsilon > 0$ uma constante tal que

$$\begin{aligned} J(t_\epsilon u_\epsilon) &= Y_\epsilon \\ &= \sup_{t>0} J(tu_\epsilon) \\ &= \sup_{t>0}\left[\frac{1}{2}(K_1(\epsilon)+\lambda K_3(\epsilon))t^2 - \frac{1}{p+1}K_2(\epsilon)t^{p+1}\right]. \end{aligned}$$

De $(3.27), (3.30)$ e (3.31), existem constantes positivas ϵ_0, K' e K'' tal que $K_2(\epsilon) \geq K'$, $K_1(\epsilon) + K_3(\epsilon) \leq K''$ para $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$. Daí os t_ϵ são uniformimente limitados para $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$. Note que $K_3(\epsilon) = o(\epsilon^{1/2})$ quando $n \geq 4$. Portanto,

$$\begin{aligned} Y_\epsilon &= J(t_\epsilon u_\epsilon) \\ &\leq \sup_{t>0}\left[\frac{1}{2}K_1(\epsilon)t^2 - \frac{1}{p+1}K_2(\epsilon)t^{p+1}\right] + o(\epsilon^{1/2}) \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{K_1(\epsilon)}{(K_2(\epsilon))^{(n-2)/n}}\right]^{n/2} + o(\epsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} \frac{K_1(\epsilon)}{(K_2(\epsilon))^{(n-2)/n}} &< 2^{-2/n}S_n + o(\epsilon^{1/2}) \\ &= \frac{\frac{1}{2}K_1}{(\frac{1}{2}K_2)^{(n-2)/n}} + o(\epsilon^{1/2}) \end{aligned} \tag{3.32}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o que implica em (3.23) e consequentemente em (3.22).

De fato, de (3.27), (3.30), e $II(\epsilon) = O(\epsilon^{1/2})$, segue que (3.32) é equivalente a

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}K_1 - I(\epsilon)\right)\left(\frac{1}{2}K_2\right)^{(n-2)/n} &< \frac{1}{2}K_1\left(\frac{1}{2}K_2 - II(\epsilon) + o(\epsilon^{1/2})\right)^{(n-2)/n} + o(\epsilon^{1/2})\\ &= \frac{1}{2}K_1\left[\left(\frac{1}{2}K_2\right)^{(n-2)/n} - \frac{n-2}{n}\left(\frac{1}{2}K_2\right)^{-2/n} II(\epsilon)\right] + o(\epsilon^{1/2}),\end{aligned}$$

o que se reduz a

$$\frac{I(\epsilon)}{II(\epsilon)} > \frac{n-2}{n}\frac{K_1}{K_2} + o(1) \text{ quando } \epsilon \to 0, \tag{3.33}$$

ou seja,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{I(\epsilon)}{II(\epsilon)} > \frac{n-2}{n}\frac{K_1}{K_2}. \tag{3.34}$$

De (3.25) e (3.29) temos

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{I(\epsilon)}{II(\epsilon)} &= (n-2)^2\frac{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|x'|^2 g(x')}{(1+|x'|^2)^n}dx'}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{g(x')}{(1+|x'|^2)^n}dx'}\\ &= (n-2)^2\frac{\int_0^\infty \frac{r^{n+2}}{(1+r^2)^n}dr}{\int_0^\infty \frac{r^n}{(1+r^2)^n}dr}.\end{aligned}$$

Para todo $2 \leq \beta < 2n-1$, integrando por partes obtemos

$$\int_0^\infty \frac{r^{\beta-2}}{(1+r^2)^{n-1}}dr = \frac{2(n-1)}{\beta-1}\int_0^\infty \frac{r^\beta}{(1+r^2)^n}dr.$$

Obeservando que,

$$\int_0^\infty \frac{r^\beta}{(1+r^2)^n}dr = \int_0^\infty \frac{r^{\beta-2}}{(1+r^2)^{n-1}}dr - \int_0^\infty \frac{r^{\beta-2}}{(1+r^3)^n}dr,$$

obtemos,

$$\int_0^\infty \frac{r^\beta}{(1+r^2)^n}dr = \frac{\beta-1}{2n-\beta-1}\int_0^\infty \frac{r^{\beta-2}}{(1+r^2)^n}dr. \tag{3.35}$$

Daí,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{I(\epsilon)}{II(\epsilon)} = (n-2)^2\frac{n+1}{n-3}.$$

Por outro lado, de (3.24) e (3.28), temos

$$\frac{n-2}{n}\frac{K_1}{K_2} = \frac{(n-2)^3}{n}\frac{\int_0^\infty \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n}dr}{\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^n}dr}.$$

Portanto temos (3.33) como queríamos.

Caso 2: $n = 3$.

Para este caso temos
$$u_\epsilon(x) = \frac{\epsilon^{1/4}}{(\epsilon + |x|^2)^{1/2}}.$$
Daí,
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_\epsilon(x)) &= \frac{-\epsilon^{1/4}\frac{\partial}{\partial x_i}(\epsilon + |x|^2)^{1/2}}{(\epsilon + |x|^2)} \\ &= \frac{-\epsilon^{1/4} x_i}{(\epsilon + |x|^2)^{3/2}},\end{aligned}$$
então
$$\nabla u_\epsilon(x) = \frac{-\epsilon^{1/4}}{(\epsilon + |x|^2)^{3/2}} x,$$
portanto,
$$|\nabla u_\epsilon(x)|^2 = \frac{\epsilon^{1/2}}{(\epsilon + |x|^2)^3}|x|^2.$$
Logo,
$$\begin{aligned}K_1(\epsilon) &= \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u_\epsilon|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u_\epsilon|^2 dx.\end{aligned}$$
Note que,
$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u_\epsilon|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^3_+\setminus\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx,$$
além disso,
$$\int_{\mathbb{R}^3_+\setminus\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx = \int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2 dx_3 dx' + A_1(\epsilon),$$
onde,
$$\begin{aligned}A_1(\epsilon) &\leq \int_{\mathbb{R}^3_+\setminus B_+(0,\delta)} |\nabla u_\epsilon|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_+\setminus B_+(0,\delta)} \frac{\epsilon^{1/2}|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^3} dx,\end{aligned}$$
como u_ϵ é simétrica podemos escrever
$$\int_{\mathbb{R}^3_+\setminus B_+(0,\delta)} \frac{\epsilon^{1/2}|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^3} dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\delta)} \frac{\epsilon^{1/2}|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^3} dx,$$

mas,
$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\delta)} \frac{\epsilon^{1/2}|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^3}dx \le \epsilon^{1/2}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\delta)} \frac{|x|^2}{(|x|^2)^3}dx.$$
Usando coordenadas polares observamos que
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\delta)} \frac{1}{|x|^4}dx &= \sigma_3\int_\delta^\infty \frac{1}{r^4}r^2dr\\ &= \sigma_3\int_\delta^\infty \frac{1}{r^2}dr,\end{aligned}$$
uma vez que
$$\begin{aligned}\int_\delta^\infty \frac{1}{r^2}dr &= \left[-\frac{1}{r}\right]_\delta^\infty\\ &= \frac{1}{\delta},\end{aligned}$$
segue que
$$A_1(\epsilon) \le \frac{\sigma_3}{2\delta}\epsilon^{1/2}.$$
O que implica que $A_1(\epsilon) = O(\epsilon^{1/2})$. Portanto,
$$K_1(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u_\epsilon|^2dx - \int_{D(0,\delta)}\int_0^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2dx_3dx' + O(\epsilon^{1/2}).$$
sejam $0 < a \le A < \infty$ tal que $a|x'|^2 \le h(x') \le A|x'|^2$ para $x' \in D(0,\delta)$. Sendo assim,
$$\begin{aligned}K_1(\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u_\epsilon|^2dx - \int_{D(0,\delta)}\int_0^{a|x'|^2} |\nabla u_\epsilon|^2dx_3dx' - \int_{D(0,\delta)}\int_{a|x'|^2}^{h(x')} |\nabla u_\epsilon|^2dx_3dx' + O(\epsilon^{1/2})\\ &\le \frac{1}{2}K_1 - \int_{D(0,\delta)}\int_0^{a|x'|^2} |\nabla u_\epsilon|^2dx_3dx' + O(\epsilon^{1/2}),\end{aligned}$$
onde
$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_\epsilon|^2dx.$$
Note que
$$\begin{aligned}\int_{D(0,\delta)}\int_0^{a|x'|^2} |\nabla u_\epsilon|^2dx_3dx' &= \int_{D(0,\delta)}\int_0^{a|x'|^2} \epsilon^{1/2}\frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^3}dx_3dx'\\ &= \int_{D(0,\delta)}\int_0^{a|x'|^2} \epsilon^{1/2}\frac{|x'|^2+x_3^2}{(\epsilon+|x'|^2+x_3^2)^3}dx_3dx'.\end{aligned}$$

Usando o Teorema do Valor Médio para integrais obtemos

$$\int_{D(0,\delta)}\int_0^{a|x'|^2}\epsilon^{1/2}\frac{|x'|^2+x_3^2}{(\epsilon+|x'|^2+x_3^2)^3}dx_3dx' = \int_{D(0,\delta)}\epsilon^{1/2}\frac{|x'|^2+t^2}{(\epsilon+|x'|^2+t^2)^3}(a|x'|^2)dx',$$

onde $t\in[0,a|x'|^2]$. Note que

$$\int_{D(0,\delta)}\epsilon^{1/2}\frac{|x'|^2+t^2}{(\epsilon+|x'|^2+t^2)^3}(a|x'|^2)dx' \geq C\epsilon^{1/2}\int_{D(0,\delta)}\frac{a|x'|^4}{(\epsilon+|x'|^2)^3}dx',$$

usando coordenadas polares,

$$\int_{D(0,\delta)}\frac{a|x'|^4}{(\epsilon+|x'|^2)^3}dx' = \sigma_2\int_0^\delta \frac{ar^4}{(\epsilon+r^2)^3}rdr.$$

Fazendo a mudança $s=\epsilon+r^2$ temos $ds=2rdr$, e consequentemente,

$$\begin{aligned}\int_0^\delta \frac{ar^4}{(\epsilon+r^2)^3}rdr &= \frac{1}{2}\int_\epsilon^{\epsilon+\delta^2}\frac{a(s+\epsilon)^2}{s^3}ds\\ &\geq \frac{a}{2}\int_\epsilon^{\epsilon+\delta^2}\frac{s^2}{s^3}ds\\ &= \frac{a}{2}\int_\epsilon^{\epsilon+\delta^2}\frac{1}{s}ds,\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^{\epsilon+\delta^2}\frac{1}{s}ds &= [\log s]_\epsilon^{\epsilon+\delta^2}\\ &= \log\frac{\epsilon+\delta^2}{\epsilon}.\end{aligned}$$

Tomando $0<\epsilon<1$ e $0<\epsilon<\delta$, segue que

$$\log\frac{\epsilon+\delta^2}{\epsilon}\geq|\log\epsilon|,$$

logo,

$$\int_{D(0,\delta)}\int_0^{a|x'|^2}|\nabla u_\epsilon|^2dx_3dx' \geq C_0\epsilon^{1/2}|\log\epsilon|,$$

o que implica que

$$K_1(\epsilon)\leq\frac{1}{2}K_1 - C_0\epsilon^{1/2}|\log\epsilon| + O(\epsilon^{1/2}). \tag{3.36}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
K_2(\epsilon) &= \int_{\Omega} |u_\epsilon|^{p+1} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3_+} |u_\epsilon|^{p+1} dx + \int_{\Omega} |u_\epsilon|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} |u_\epsilon|^{p+1} dx.
\end{aligned}$$

Como,

$$\int_{\Omega} |u_\epsilon|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} |u_\epsilon|^{p+1} dx = -\int_{\mathbb{R}^3_+ \setminus \Omega} |u_\epsilon|^{p+1} dx,$$

segue que

$$K_2(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^3_+} |u_\epsilon|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}^3_+ \setminus \Omega} |u_\epsilon|^{p+1} dx.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^3_+ \setminus \Omega} |u_\epsilon|^{p+1} dx = \int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_3 dx' + B_1(\epsilon),$$

onde

$$\begin{aligned}
B_1(\epsilon) &\leq \int_{\mathbb{R}^3_+ \setminus B_+(0,\delta)} |u_\epsilon|^{p+1} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,\delta)} |u_\epsilon|^{p+1} dx.
\end{aligned}$$

Uma vez que $n = 3$ segue que $p + 1 = 6$ e portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,\delta)} |u_\epsilon|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \left| \frac{\epsilon^{1/4}}{(\epsilon + |x|^2)^{1/3}} \right|^6 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,\delta)} \frac{\epsilon^{3/2}}{(\epsilon + |x|^2)^3} dx \\
&\leq \epsilon^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,\delta)} \frac{1}{|x|^6} dx.
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,\delta)} \frac{1}{|x|^6} dx &= \sigma_3 \int_\delta^\infty \frac{r^2}{r^6} dr \\
&= \sigma_3 \left[-\frac{1}{3r^3} \right]_\delta^\infty \\
&= \frac{\sigma_3}{3\delta^3},
\end{aligned}$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,\delta)} |u_\epsilon|^{p+1} dx \leq \frac{\sigma_3}{3\delta^3} \epsilon^{3/2}.$$

O que resulta em

$$B_1(\epsilon) = O(\epsilon^{3/2}).$$

Desta forma, podemos escrever

$$K_2(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^3_+} |u_\epsilon|^{p+1} dx - \int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_3 dx' + O(\epsilon^{3/2}).$$

Desde que $h(x') \leq A|x'|^2$ temos que

$$\int_{D(0,\delta)} \int_0^{h(x')} |u_\epsilon|^{p+1} dx_3 dx' \leq \int_{D(0,\delta)} \int_0^{A|x'|^2} |u_\epsilon|^{p+1} dx_3 dx',$$

com isso, observamos que

$$K_2(\epsilon) \geq \frac{1}{2} K_2 - \int_{D(0,\delta)} \int_0^{A|x'|^2} |u_\epsilon|^{p+1} dx_3 dx' + O(\epsilon^{3/2}),$$

onde

$$K_2 = \int_{\mathbb{R}^3} |u_\epsilon|^{p+1} dx.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais temos que

$$\begin{aligned}
\int_{D(0,\delta)} \int_0^{A|x'|^2} |u_\epsilon|^{p+1} dx_3 dx' &= \int_{D(0,\delta)} \int_0^{A|x'|^2} \frac{\epsilon^{3/2}}{(\epsilon + |x|^2)^3} dx_3 dx' \\
&= \int_{D(0,\delta)} \frac{\epsilon^{3/2} A|x'|^2}{(\epsilon + |x'|^2 + t^2)^3} dx' \\
&\leq \int_{D(0,\delta)} \frac{\epsilon^{3/2} A|x'|^2}{(\epsilon + |x'|^2)^3} dx',
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$K_2(\epsilon) \geq \frac{1}{2} K_2 - \int_{D(0,\delta)} \frac{\epsilon^{3/2} A|x'|^2}{(\epsilon + |x'|^2)^3} dx' + O(\epsilon^{3/2}). \tag{3.37}$$

Seja $J(t_\epsilon u_\epsilon) = Y_\epsilon = \sup_{t>0} J(tu_\epsilon)$. De $(3.31), (3.36)$ e (3.37), vemos que os t_ϵ são uniformemente limitados para $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ para algum $\epsilon_0 > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
Y_\epsilon &\leq \sup_{t>0} \left[\frac{1}{2} K_1(\epsilon) t^2 - \frac{1}{p+1} K_2(\epsilon) t^{p+1} \right] + O(\epsilon^{1/2}) \\
&= \frac{1}{n} \left[\frac{K_1(\epsilon)}{(K_2(\epsilon))^{(n-2)/n}} \right]^{n/2} + O(\epsilon^{1/2}).
\end{aligned}$$

Consequentemente se

$$\frac{K_1(\epsilon)}{(K_2(\epsilon))^{(n-2)/n}} < 2^{-2/n} S_n - O(\epsilon^{1/2}) \text{ para } \epsilon > 0 \text{ pequeno,} \tag{3.38}$$

então temos (3.23) e consequentemente (3.22).

Substituindo (3.36) e (3.37) em (3.38) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}K_1 - C_0\epsilon^{1/2}|\log \epsilon| < 2^{-2/n} S_n \left[\frac{1}{2}K_2 - O(\epsilon^{1/2})\right]^{(n-2)/n} + O(\epsilon^{1/2}) \\ = \frac{1}{2} S_n K_2^{(n-2)/n} + O(\epsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{K_1}{(K_2)^{(n-2)/n}} = S_n,$$

segue que (3.38) é válido, ficando assim provado o resultado.

□

Referências Bibliográficas

[1] Aubin, T., *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, C. R. Acad. Sci. Paris 1975, p.279-281; J. Diff. Geom. 11 1976, p.573-598.

[2] Burchard, A., *A short course on rearrangement inequalities*, class notes, 2009.

[3] Bliss,G. A., *An integral inequality*, J. London. Math. Soc. vol.5, p.40-46, 1930.

[4] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[5] Brezis, H.; Lieb, E., *Minimun action solution of some vector field equations*, Comm. Math. Phys. vol.96, p.97-113, 1984.

[6] Brezis, H.; Lieb, E. H. *Sobolev inequalities with remainder terms.* J. Funct. Anal, vol. 62, n.1, p.73?86, 1985.

[7] Brezis, H.; Nirenberg, L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math, vol. 36, p.437-477,1983.

[8] Cherrier, P., *Pròblemes de Neumann nonlinéaires sur les variétés Riemanniennes*, J. Funct. Anal. vol.57, p.154-206,1984.

[9] Evans, L. C., *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol.74. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[10] Evans, L. C., *Partial Defferential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

[11] Gidas, B.; Ni. W. M.; Nirenberg, L., *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equation in* $\mathbb{R}^n$, in "Mathematical Analysis and Applications"(L. Nachbin, Ed.), p.370-401, Academic Press, New York, 1981.

[12] GILBARG, D.;TRUNDIGER, N.S. *Elliptic Partial Diferential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[13] KESAVAN, S., *Symmetrization and applications*, Series in Analysis, 3. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.

[14] LAX, P. D., *On the existence of Green's function*, Proc. Amer. Math. Soc. vol.3,p.526?531 1952.

[15] LIEB, E., *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*, Ann. of Math. vol.118,p.349-374, 1983.

[16] NI, W. M.; TAKAGI, I., *On the Neumann problem for some semilinear elliptic equations and systems of activator-inhibitor type*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 297, p. 351-368, 1986.

[17] ROSEN, G., *Minimun value for c in the Sobolev inequality* $||\varphi||_6 \leq c||\nabla\varphi||_2$, SIAM J. Appl. Math. vol.21, p.30-32, 1971.

[18] TALENTI, G., *Best constant in Sobolev Inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. vol.110, p.353-372, 1976.

[19] WANG, X.J. *Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* J. Differential Equations,vol.93 , n.2, p.283?310, 1991.