

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

Sobre o número máximo de retas em  
superfícies não singular de grau 4 em  
 $\mathbb{P}^3$ .

Thiago Luiz de Oliveira do Rêgo

JOÃO PESSOA – PB  
AGOSTO DE 2016

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

Sobre o número máximo de retas  
numa superfície não singular de grau 4  
em  $\mathbb{P}^3$ .

por

Thiago Luiz de Oliveira do Rêgo

sob a orientação da

Prof. Dr<sup>a</sup>. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

João Pessoa – PB  
Agosto de 2016

R343s Rêgo, Thiago Luiz de Oliveira do.  
Sobre o número máximo de retas numa superfície não  
singular de grau 4 em  $\mathbb{P}^3$ / Thiago Luiz de Oliveira do Rêgo.-  
João Pessoa, 2016.  
87f. : il.  
Orientadora: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN  
1. Matemática. 2. Número máximo de retas. 3. Superfície  
quártica não singular. 4. Curva residual. 5. Característica de  
Euler.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

# Sobre o número máximo de retas numa superfície não singular de grau 4 em $\mathbb{P}^3$

por

Thiago Luiz de Oliveira do Rêgo<sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

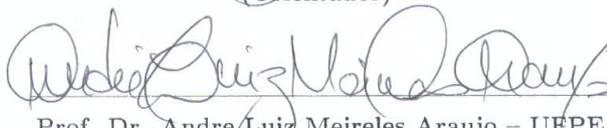
Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 14 de Setembro de 2016.

Banca Examinadora:



Prof. Dr.ª. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia – UFPB  
(Orientador)



Prof. Dr. Andre Luiz Meireles Araujo – UFPE  
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza – UFPB  
(Examinador Interno)

<sup>1</sup>O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

*Dedico este trabalho a minha família em especial a minha esposa Adeline S. de Oliveira do Rego, que me deu seu amor e confiou que eu poderia ir além.*

*"Porque Nele vivemos, e nos movemos, e existimos; como também alguns dos vossos poetas disseram: Pois somos também sua geração."*

Atos 17:28

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sua infinita graça em minha vida. Meditando no amor Dele por mim e na sua grandiosa promessa me torno melhor.

A minha família, em especial a minha sogra Aurinete Dias e a minha mãe Ana Claudia.

A minha orientadora Prof. Dr<sup>a</sup>. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia. Sua imensa paciência e ajuda tornou esse trabalho possível.

Aos professores da banca Andre Meireles, Miriam da Silva e Fernando Souza.

Aos meus colegas do mestrado e doutorado. Em especial à Sally Andria e à Dayane Santos, minhas irmãs acadêmicas.

Aos meus amigos do laboratório Milênio que estiveram ao meu lado, muitos desde a graduação, compartilhando conhecimentos, dificuldades e alegrias.

Por fim agradeço a minha esposa Adeline S. de Oliveira do Rego por ter suportado as várias e várias horas de distância física e psicológica. Por me amar e por praticar de maneira excelente o maior trabalho de todos que é o de ser mãe de Davi Luiz e Ana Liz, meus filhos

# Resumo

Em 1943, Beniamino Segre acreditou ter demonstrado que o número máximo de retas contidas numa superfície quártica não singular em  $\mathbb{P}^3$  é 64, ([16]). Mas recentemente, houve uma reviravolta nesse tema, quando os matemáticos Sławomir Rams e Matthias Schütt constataram que Segre tinha cometido um erro em seu trabalho ao esquecer as quárticas da família  $\mathcal{Z}$ , ([14]), que correspondem essencialmente as quárticas que possuem retas que podem ser incidentes a mais de 18 retas contidas na superfície. Neste trabalho, tendo como base [14], mostramos que toda quártica não singular, que não pertence a família  $\mathcal{Z}$ , contém no máximo 64 retas. Uma das ferramentas mais importantes, para mostrar esse resultado, é o estudo das fibrações  $\pi_l$  induzida por uma reta  $l$  contida na superfície, e a relação que existe entre a característica de Euler da base (em nosso caso  $\mathbb{P}^1$ ), das fibras singulares e a da superfície em questão.

**Palavras-chave:** Número máximo de retas numa quártica não singular, curva residual, característica de Euler.

# Abstract

In 1943 Beniamino Segre believed to have shown that the maximum number of lines contained in a smooth quartic surface in  $\mathbb{P}^3$  is 64, ([16]). But recently, there was a major overturn on that theme when the mathematicians Rams and Schutt found that Segre had made a mistake in his work to forget the quartic's family  $\mathcal{Z}$ , ([14]), which essentially corresponds to those quartics containing a lines that can be incident to more than 18 lines contained in the surface. In this work, based on ([14]), we show that every smooth quartic surface, which does not belong to family  $\mathcal{Z}$  contains a maximum of 64 lines. One of the most important tools to show this result, is the study of fibrations  $\pi_l$  induced by a line  $l$  contained on the surface, and the relationship between the Euler characteristic of the base ( $\mathbb{P}^1$  in our case), the fibers and the surface concerned.

**Keywords:** Maximum number of lines in a non-singular quartic, residual curve, characteristic of Euler.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Retas em superfícies em <math>\mathbb{P}^3</math></b>	<b>3</b>
1.1 Superfícies de grau $d \leq 3$ em $\mathbb{P}^3$ sempre contém retas . . . . .	3
1.2 Exemplo de uma superfície de grau $d \geq 4$ em $\mathbb{P}^3$ que não contém retas .	13
1.3 Superfícies em $\mathbb{P}^3$ contendo uma reta $l$ . . . . .	21
<b>2 A característica de Euler das fibras singulares</b>	<b>31</b>
2.1 A característica de Euler: Propriedades básicas e alguns cálculos simples	31
2.2 Cálculo da característica de Euler das fibras singulares do morfismo $\pi_l$ .	35
<b>3 Contagem do número máximo de retas nas quárticas não singulares em <math>\mathcal{Z}^c</math></b>	<b>39</b>
<b>A Hessiana de uma curva plana e resultados afins</b>	<b>51</b>
A.1 Reta tangente, multiplicidade de interseção de uma reta com uma curva e pontos de inflexão . . . . .	51
A.2 A curva Hessiana de uma curva $C$ e Alguns resultados . . . . .	57
<b>B A resultante de dois polinômios</b>	<b>65</b>
<b>C Blow up</b>	<b>70</b>

# Lista de Figuras

1.1	Plano $H \in \Omega(l)$ intersectando $S$ . . . . .	21
1.2	Planos de $\Omega(l)$ . . . . .	22
1.3	Curva $C_H$ . . . . .	24
1.4	Tipos de fibras singulares. . . . .	30
2.1	Fibra do tipo $IV$ . . . . .	35
2.2	Fibra do tipo $I_2$ . . . . .	36
2.3	Fibra do tipo $II$ . . . . .	36
2.4	Fibra do tipo $I_1$ . . . . .	37
2.5	Fibras e características de Euler. . . . .	38

# Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_k$  o conjunto de todos os polinômios homogêneos de grau  $k$  do anel  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ .

- $\mathcal{A}$  o anel  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$  e  $\mathcal{A}_k$  o conjunto  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_k$ .

As demais notações e terminologias presentes no trabalho terão seu significado expresso no decorrer do mesmo.

# Introdução

Em 1943 o matemático italiano Beniamino Segre (1903-1977) publicou um famoso artigo, cujo título é “The maximum number of lines lying on a quartic surface”, afirmando que o número máximo de retas contidas numa quártica não singular em  $\mathbb{P}^3$  é 64. Problemas desse tipo, geralmente chamados de problemas de Geometria Enumerativa, contribuíram fortemente para o desenvolvimento da Geometria Algébrica. De fato, em 1847, quase cem anos antes do artigo de Segre, Cayley e Salmon provaram que toda superfície cúbica não singular em  $\mathbb{P}^3$  contém exatamente 27 retas. Muitos acreditam que a partir desse momento se iniciou a Geometria Algébrica moderna.

Ao compararmos as superfícies cúbicas e quárticas não singulares constatamos que toda superfície cúbica não singular em  $\mathbb{P}^3$  contém retas ( cf. Teorema 1.4), o que não ocorre com as superfícies quárticas não singulares. De fato, no Exemplo 1.5, mostraremos uma superfície de grau  $d \geq 4$  que não contém retas. Entretanto Friedrich Schur (1856-1932) em 1882 exibiu uma superfície não singular de grau 4 que contém 64 retas ( cf. Exemplo 1.1). Isso provavelmente foi um dos indícios que levaram Segre a pensar na pesquisa apresentada em [16].

A demonstração que Segre tinha realizado em seu artigo estava errada, e esse erro foi descoberto apenas recentemente por Sławomir Rams e Matthias Schütt. Em 2013 eles provaram que a afirmação de Segre era realmente verdadeira, embora que seguindo os seus argumentos, Segre só poderia concluir que o número máximo de retas numa superfície quártica era 72, ( [14] ).

Neste trabalho abordamos as quárticas estudadas por Segre utilizando as técnicas do artigo publicado por Rams e Schütt. Nesse artigo foram utilizadas diversas ideias do artigo de Segre, como também a Teoria das Fibrções Elípticas desenvolvida apenas em 1950. De fato, mostraremos que se uma superfície não singular  $S$  contém uma reta então podemos estabelecer um morfismo de  $S$  em  $\mathbb{P}^1$ , e tais morfismos são exemplos de fibrções elípticas. Salientamos que o artigo de Rams e Schütt generaliza a afirmação original de Segre, pois mostra que o resultado ainda é verdadeiro para um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2 e 3.

---

O problema de saber qual é o número máximo de retas contidas em uma superfície não singular com grau  $d \geq 5$  ainda está em aberto.

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: no Capítulo 1 mostraremos que toda superfície não singular de grau menor ou igual a 3 contém retas. Além disso, exibimos uma superfície não singular de grau  $d \geq 4$  que não contém retas e também a quártica de Schur, que contém 64 retas. Na última seção desse capítulo estudamos a fibração sobre  $\mathbb{P}^1$  induzida por uma superfície não singular contendo uma reta. Encontraremos com esse estudo resultados importantes para provar o principal Teorema, (Teorema 3.4). No Capítulo 2 estudaremos as definições e alguns resultados a cerca da característica de Euler para curvas e superfícies. Mostraremos uma importante conexão entre a característica de Euler de uma superfície  $S$  contendo uma reta  $l$  com a característica de Euler das fibras singulares do morfismo  $\pi_l$  induzida por essa reta (cf. Definição 1.3).

O Capítulo 3 tem como foco a demonstração de que toda superfície não singular  $S$  que não pertence à família  $\mathcal{Z}$  (cf. Definição 3.3) contém no máximo 64 retas (Teorema 3.4). Os apêndices A, B e C tratam sobre conceitos e resultados relativos a curva hessiana, resultante de dois polinômios e Blow up. Eles foram inseridos para que o leitor, não familiarizados com esses conceitos, possa encontrar um material consistente sobre esses temas.

# Capítulo 1

## Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

Iniciaremos este capítulo mostrando que toda superfície em  $\mathbb{P}^3$  de grau  $d \leq 3$  sempre contém retas. Na segunda seção, mostraremos uma técnica, chamada estratificação, que nos permitirá de maneira bastante eficiente decidir quando uma superfície  $S$  em  $\mathbb{P}^3$  contém retas. De fato, usaremos dita estratificação para exibir de uma superfície  $S$  em  $\mathbb{P}^3$  de grau  $d \geq 4$  que não contém retas. Na terceira seção consideraremos uma superfície não singular  $S$  em  $\mathbb{P}^3$  de grau  $d \geq 3$  que contém uma certa reta  $l$ , estudaremos a interseção da superfície  $S$  com planos que contém a reta  $l$ . Essa interseção consiste da reta  $l$  e de uma curva residual reduzida de grau  $d - 1$  que não contém  $l$  como componente. Veremos que a quantidade de curvas residuais que são singulares é finita.

### 1.1 Superfícies de grau $d \leq 3$ em $\mathbb{P}^3$ sempre contém retas

Dado  $W$  um subespaço de  $\mathbb{C}^{n+1}$  denotaremos por  $\mathbb{P}(W)$ , e chamaremos de projetivização de  $W$ , o conjunto

$$\mathbb{P}(W) = \{[w] \in \mathbb{P}^n \mid w \in W - \{0\}\}.$$

Diremos que  $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$  é uma variedade  $r$ -linear se existe um subespaço  $W \subset \mathbb{C}^{n+1}$  de dimensão  $r + 1$  tal que  $\Lambda = \mathbb{P}(W)$ .

**Definição 1.1** *Diremos que  $l \subset \mathbb{P}^n$  é uma reta, se  $l$  for uma variedade 1-linear, ou seja se existe  $W \subset \mathbb{C}^{n+1}$  um subespaço de dimensão 2, tal que  $l = \mathbb{P}(W)$ .*

Vejam agora outras caracterizações de uma reta em  $\mathbb{P}^n$ . A primeira delas mostra que, assim como na geometria plana, dois pontos distintos determinam uma única reta em  $\mathbb{P}^n$ .

**Proposição 1.1** *Sejam  $p, q \in \mathbb{P}^n$  pontos distintos. Então existe uma única reta em  $\mathbb{P}^n$  passando por  $p$  e  $q$ . Essa reta será denotada por  $l_{p,q}$ .*

**Demonstração:** Se  $p = [u]$  e  $q = [v]$  são pontos distintos em  $\mathbb{P}^n$ , segue que  $u$  e  $v$  são vetores L.I em  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Seja  $W = [u, v]$  o subespaço gerado por  $u$  e  $v$ . Temos que  $W$  possui dimensão 2. Logo  $l = \mathbb{P}(W)$  determina uma reta em  $\mathbb{P}^n$ . Além disso, como  $u, v \in W$  temos que  $p, q \in l$ . Para mostrar a unicidade suponhamos que  $l' = \mathbb{P}(W')$  é uma outra reta que contém os pontos  $p$  e  $q$ . Assim os vetores  $u$  e  $v$  pertencem a  $W'$ . Logo  $W \subset W'$ . Mas desde que  $\dim W' = 2$ , concluímos que  $W = W'$ . Assim  $l = l'$ . ■

Dados  $p = [u]$  e  $q = [v]$  pontos distintos de  $\mathbb{P}^n$ , com  $u = (u_0, \dots, u_n)$  e  $v = (v_0, \dots, v_n)$ , então como  $[u, v] = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ . Segue que

$$l_{p,q} = \{[\alpha u_0 + \beta v_0 : \dots : \alpha u_n + \beta v_n] \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Isso mostra que toda reta no espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$  é apenas uma cópia da reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ .

A próxima caracterização mostra que as retas são conjuntos algébricos determinados pelos zeros de dois polinômios homogêneos de grau 1 linearmente independentes.

**Teorema 1.1** *Seja  $\Lambda$  uma variedade  $r$ -linear em  $\mathbb{P}^n$ , então existem  $L_1, \dots, L_{n-r}$  polinômios homogêneos de grau 1 em  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  linearmente independentes tais que  $\Lambda = Z(L_1, \dots, L_{n-r})$ .*

**Demonstração:** Ver pág. 6 em [11]. ■

Um hiperplano em  $\mathbb{P}^n$  é a projetivização de um subespaço  $W \subset \mathbb{C}^{n+1}$  de dimensão  $n$ . Ou seja, um hiperplano em  $\mathbb{P}^n$  é uma variedade  $(n-1)$ -linear. Como consequência do teorema acima segue que um hiperplano em  $\mathbb{P}^n$  é dado como o conjunto dos zeros de um polinômio  $L \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_1$ .

**Proposição 1.2** *Sejam  $L_1, \dots, L_k$  polinômios homogêneos de grau 1 em  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ . Suponhamos que  $\alpha = \{L_1, \dots, L_k\}$  é um conjunto L.I no subespaço  $[x_0, \dots, x_n]$  de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  dos polinômios homogêneos de grau 1. Então o ideal gerado por  $L_1, \dots, L_k$ ,  $I = \langle L_1, \dots, L_k \rangle$  é um ideal primo. Em particular  $\sqrt{I} = I$ .*

**Demonstração:** Como  $\alpha = \{L_1, \dots, L_k\}$  é L.I. em  $[x_0, \dots, x_n]$  segue que  $k \leq n+1$ . Além disso, completando a  $\alpha$  para obter uma base de  $[x_0, \dots, x_n]$ , podemos considerar  $T : W \rightarrow W$ , onde  $W = [x_0, \dots, x_n]$ , um isomorfismo tal que  $T(L_i) = x_{i-1}$ , com  $i = 1, \dots, k$ . A aplicação  $\varphi : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  definida por

$$\varphi\left(\sum a_{i_0, \dots, i_n} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}\right) = \sum a_{i_0, \dots, i_n} T(x_0)^{i_0} \cdots T(x_n)^{i_n},$$

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

define um automorfismo de anéis em  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ . Portanto, como o ideal  $\langle x_0, \dots, x_{k-1} \rangle = T(I)$  é primo em  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ , segue que  $I = \langle L_1, \dots, L_k \rangle$  é ideal primo. ■

Como consequência da proposição acima obtemos que toda variedade  $r$ -linear de  $\mathbb{P}^n$  é um conjunto irredutível. Em particular retas são irredutíveis em  $\mathbb{P}^n$ .

No caso de  $\mathbb{P}^3$  uma reta é dada pelo conjunto dos zeros de duas formas lineares  $L_1, L_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$  linearmente independentes.

No que segue do texto usaremos sempre a letra  $\mathcal{A}$  para denotar o anel  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ , (ver Notações).

**Observação 1.1** *Sejam  $f \in \mathcal{A}$  um polinômio homogêneo de grau  $d \geq 1$  e  $S = Z(f) \subset \mathbb{P}^3$  a superfície definida por  $f$ . A reta  $l = Z(L_1, L_2)$  está contida em  $S$  se, e somente se,  $f = AL_1 + BL_2$ , para algum  $A, B \in \mathcal{A}_{d-1}$ . De fato, se  $f = AL_1 + BL_2$ , com  $A, B \in \mathcal{A}_{d-1}$ , então segue que  $l \subset S$ . Reciprocamente, se  $l \subset S$ , então aplicando o Teorema dos zeros de Hilbert obtemos que  $\mathcal{I}(S) \subset \mathcal{I}(l)$ . Mas desde que  $\mathcal{I}(l) = \langle L_1, L_2 \rangle$  e como  $f \in \mathcal{I}(S)$ , tem-se que  $f \in \langle L_1, L_2 \rangle$ . Logo existem  $A', B' \in \mathcal{A}$  tais que  $f = A'L_1 + B'L_2$ . Podemos escrever  $A' = \sum_{i=0}^k A'_i$  e  $B' = \sum_{i=0}^l B'_i$ , onde cada  $A'_i$  e  $B'_j$  são homogêneos de grau  $i$  e  $j$ , respectivamente. Daí*

$$f = \sum_{i=0}^k A'_i L_1 + \sum_{i=0}^l B'_i L_2.$$

*Cada parcela  $A'_i L_1$  e  $B'_i L_2$  possui grau  $i + 1$  e  $j + 1$ , respectivamente. Desde que  $f$  é um polinômio homogêneo, e usando que dois polinômios são iguais quando suas partes homogêneas são iguais, obtemos que  $f = AL_1 + BL_2$ , onde  $A, B \in \mathcal{A}_{d-1}$ .*

Para cada polinômio  $f \in \mathcal{A}_d$  não nulo consideremos o conjunto  $R_f$  de todas as retas contidas em  $Z(f)$ . Assim

$$R_f = \{l \mid l \text{ é uma reta contida em } Z(f)\}.$$

Mostraremos adiante que no caso em que  $d \in \{1, 2, 3\}$  então  $R_f \neq \emptyset$ .

### Superfícies de grau 1

Suponhamos que  $f \in \mathcal{A}_1$  é um polinômio não nulo. Então

$$f = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$

com  $a_i \neq 0$  para algum  $i = 0, 1, 2$  ou  $3$ . Se  $l = Z(L_1, L_2)$  é uma reta contida em  $Z(f)$ , então  $f = \alpha L_1 + \beta L_2$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  não ambos nulos. Suponhamos que  $\alpha \neq 0$ , então  $L_1 = \alpha^{-1} f - \alpha^{-1} \beta L_2$ . Observemos que sob essas condições temos que  $f$  e  $L_2$  são L.I

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

em  $\mathcal{A}_1$ . Essa relação mostra que  $\langle L_1, L_2 \rangle = \langle f, L_2 \rangle$ . Portanto toda reta contida em  $Z(f)$  é da forma  $l = Z(f, L)$ , onde  $L, f \in \mathcal{A}_1$  são L.I.

**Teorema 1.2** *Seja  $f \in \mathcal{A}_1$  não nulo. Suponhamos que  $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{A}_1$  são tais que  $\alpha = \{f, M_1, M_2, M_3\}$  é base de  $\mathcal{A}_1$ . Então  $\varphi : \mathbb{P}^2 \rightarrow R_f$ , definida por  $\varphi([a : b : c]) = Z(f, aM_1 + bM_2 + cM_3)$ , é uma bijeção.*

**Demonstração:** Como  $\alpha = \{f, M_1, M_2, M_3\}$  é L.I. em  $\mathcal{A}_1$  segue que  $aM_1 + bM_2 + cM_3$ , onde  $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ , é L.I com  $f$ . Dessa forma segue que  $l = Z(f, aM_1 + bM_2 + cM_3)$  é uma reta. Além disso, é claro que  $l \subset Z(f)$ . Observemos também que se  $[a : b : c] = [a' : b' : c']$ , então  $Z(f, aM_1 + bM_2 + cM_3) = Z(f, a'M_1 + b'M_2 + c'M_3)$ . Isso mostra que a aplicação  $\varphi$  está bem definida e é injetiva. Pelo que fizemos acima temos que se  $l \subset Z(f)$  é uma reta, então  $l = Z(f, L)$ , com  $L$  e  $f$  linearmente independentes em  $\mathcal{A}_1$ . Por outro lado devem existir  $\alpha, a, b, c \in \mathbb{C}$ , não todos nulos, tais que  $L = \alpha f + aM_1 + bM_2 + cM_3$ . Nessas condições devemos ter  $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ . Daí

$$l = Z(f, \alpha f + aM_1 + bM_2 + cM_3) = Z(f, aM_1 + bM_2 + cM_3).$$

Mostrando assim que  $\varphi$  é sobrejetiva. ■

O teorema acima mostra que toda superfície  $Z(f)$ , com  $f \in \mathcal{A}_1$  não nulo, contém uma quantidade infinita de retas. Em particular  $R_f \neq \emptyset$ .

### Superfícies de grau 2

Para estudar o caso em que a superfície  $S = Z(f)$  é dada por um polinômio homogêneo não nulo de grau 2 em  $\mathcal{A}$ . Vamos precisar de um teorema de classificação bastante importante.

**Teorema 1.3** *(Teorema de classificação das hipersuperfícies quádricas em  $\mathbb{P}^n$ )* *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  um polinômio não nulo homogêneo de grau 2. Então existe uma mudança de coordenadas projetivas  $T : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  tal que  $T \bullet f$  é um dos seguintes polinômios*

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = x_0^2, \\ f_1 = x_0^2 + x_1^2, \\ \vdots \\ f_n = x_0^2 + \dots + x_n^2. \end{array} \right.$$

**Demonstração:** Ver pág. 411 de [3]. ■

**Corolário 1.1** *Seja  $f \in \mathcal{A}_2$  não nulo. Então existe uma mudança de coordenadas*

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

projetivas  $T : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$  tal que  $T_\bullet f$  é um dos seguintes polinômios

$$\begin{cases} f_0 = x_0^2, \\ f_1 = x_0^2 + x_1^2, \\ f_2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \\ f_3 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{cases}$$

Então, desde que mudança de coordenada projetiva preserva retas, para mostrar que cada superfície quádrlica  $S = Z(f)$  em  $\mathbb{P}^3$  contém retas basta mostrar que  $S_i = Z(f_i)$ , com  $i = 0, 1, 2, 3$ , contém retas.

Notemos que  $S_0 = Z(x_0^2) = Z(x_0)$ . Daí  $l = Z(x_0, ax_1 + bx_2 + cx_3)$ , com  $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ , é uma reta que está contida em  $S_0 = Z(f_0)$ . Na realidade temos que

$$R_{f_0} = \{Z(x_0, ax_1 + bx_2 + cx_3) \mid [a : b : c] \in \mathbb{P}^2\}.$$

Para mostrar que  $S_1 = Z(f_1)$  contém retas, observemos que  $f_1 = x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$ . Isso mostra que a reta  $l = Z(x_0 + ix_1, x_0 - ix_1) = Z(x_0, x_1)$  está contida em  $S_1$ . Portanto  $R_{f_1} \neq \emptyset$ . Além disso, como  $S_1$  é a união dos planos  $Z(x_0 + ix_1)$  e  $Z(x_0 - ix_1)$ , e esses contêm infinitas retas. Segue que  $S_1$  contém infinitas retas.

Vamos estudar agora a superfície  $S_2 = Z(f_2)$ . Observemos que o ponto  $v = [0 : 0 : 0 : 1]$  é o único ponto singular de  $S_2$ . Consideremos a curva  $C' = Z(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \subset \mathbb{P}^2$ . Para cada ponto  $p' = [p_0 : p_1 : p_2] \in C'$ , consideremos a reta  $l_{p',v} \subset \mathbb{P}^3$  dada por

$$l_{p',v} = \{[\alpha p_0 : \alpha p_1 : \alpha p_2 : \beta] \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Observemos que  $l_{p',v}$  está contido em  $S_2$ , pois dado  $[\alpha p_0 : \alpha p_1 : \alpha p_2 : \beta] \in l_{p',v}$  tem-se que  $f_2(\alpha p_0, \alpha p_1, \alpha p_2, \beta) = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 = 0$ . Dessa forma construímos uma família de retas  $\{l_{p',v}\}_{p' \in C'}$  contidas em  $S_2$  passando pelo ponto  $v$ . Na realidade é possível mostrar que se  $l$  é uma reta qualquer contida em  $S_2$  então  $v \in l$  e  $l \in \{l_{p',v}\}_{p' \in C'}$ . Logo  $S_2$  contém infinitas retas. Portanto  $R_{f_2} \neq \emptyset$ .

Vamos agora estudar  $S_3 = Z(f_3)$ . Notemos que  $g_0 = x_0 + ix_1, g_1 = x_0 - ix_1, g_2 = x_2 + ix_3$  e  $g_3 = -x_2 + ix_3$  são linearmente independentes em  $\mathcal{A}_1$ . Além disso,  $f_3 = g_0 g_1 - g_2 g_3$ . Isso nos mostra, por exemplo, que  $l = Z(g_0, g_2)$  está contida em  $S_3$ . Assim  $R_{f_3} \neq \emptyset$ .

Seja  $T : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$  uma mudança de coordenadas projetivas tal que  $T_\bullet g_i = x_i$ , com  $i = 0, 1, 2, 3$ . Dessa forma  $T_\bullet f_3 = x_0 x_3 - x_1 x_2$ . Ou seja,  $S_3$  é projetivamente equivalente a  $S = Z(f)$ , onde  $f = x_0 x_3 - x_1 x_2$ . Para cada ponto  $p = [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$  consideremos

as retas

$$\begin{cases} L_p = \{[a_0u : a_0v : a_1u : a_1v] \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}, \\ M_p = \{[a_0u : a_1u : a_0v : a_1v] \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}. \end{cases}$$

Observemos que a reta  $L_p$ , por exemplo, é determinada pelos pontos  $[a_0 : 0 : a_1 : 0]$  e  $[0 : a_0 : 0 : a_1]$ . Não é difícil verificar que  $L_p$  e  $M_p$  estão contidas em  $S = Z(f)$ , para todo  $p \in \mathbb{P}^1$ . Logo  $S_3$  contém uma quantidade infinita de retas. Na verdade pode-se mostrar que as famílias de retas  $\mathcal{L} = \{L_p\}_{p \in \mathbb{P}^1}$  e  $\mathcal{M} = \{M_p\}_{p \in \mathbb{P}^1}$  possuem as seguintes propriedades:

1.  $L_p \cap L_q = \emptyset$  e  $M_p \cap M_q = \emptyset$ , para todo  $p, q \in \mathbb{P}^1$ , com  $p \neq q$ .
2.  $L_p \cap M_q$  consiste em um único ponto, para todo  $p, q \in \mathbb{P}^1$ .
3. Dado  $x \in S$ , existe uma única reta  $L \in \mathcal{L}$  e  $M \in \mathcal{M}$  tais que  $L \cap M = \{x\}$ .
4. Se  $l \subset S$  é uma reta, então  $l \in \mathcal{L}$  ou  $l \in \mathcal{M}$ .

Por tudo o que fizemos até agora mostramos que  $R_f$  é um conjunto infinito sendo  $f$  um polinômio homogêneo não nulo de grau 1 ou 2.

### Superfícies de grau 3

Iremos agora estudar o caso em que  $S = Z(f)$ , onde  $f \in \mathcal{A}_3 - \{0\}$ . Esse problema é bem mais difícil que os problemas anteriores. Para resolvê-lo precisaremos introduzir novos conceitos e desenvolver um pouco mais a teoria.

**Definição 1.2** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  de dimensão  $n$ . Para cada  $0 \leq d \leq n$ , consideremos o conjunto de todos os subespaços de dimensão  $d$  de  $V$ ,*

$$G_d(V) = \{W \mid W \leq V \text{ e } \dim W = d\}.$$

*Tal conjunto é chamado de grassmanniana de subespaços de  $V$  de dimensão  $d$ .*

Existe uma identificação natural de  $G_1(\mathbb{C}^{n+1})$  com  $\mathbb{P}^n$ . Com efeito, a aplicação dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^n &\longrightarrow G_1(\mathbb{C}^{n+1}) \\ \bar{v} &\longrightarrow [v]. \end{aligned}$$

é uma bijeção. A partir dessa bijeção podemos induzir em  $G_1(\mathbb{C}^{n+1})$  uma topologia, explicitamente temos

$$U \subset G_1(\mathbb{C}^{n+1}) \text{ é fechado} \iff \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{P}^n \text{ é fechado.}$$

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

Consideremos  $\Sigma = \{l : l \text{ é uma reta em } \mathbb{P}^3\}$ . Sabemos que cada reta de  $\mathbb{P}^3$  é a projetivização de um subespaço de dimensão 2 de  $\mathbb{C}^4$ . Essa correspondência é uma bijeção. Explicitamente temos que  $\psi : G_2(\mathbb{C}^4) \rightarrow \Sigma$ ,  $W \mapsto \mathbb{P}(W)$  é uma bijeção. De modo análogo ao que foi feito anteriormente, podemos induzir uma topologia em  $G_2(\mathbb{C}^4)$  sendo esta dada por uma aplicação chamada mergulho de Plücker que definiremos a seguir.

Sejam  $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$  e  $\Delta = \{u, v\}$  uma base de  $W$ , onde  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ . Considere  $M_\Delta$  a matriz cujas linhas são determinadas pelas coordenadas do vetor  $u$  e  $v$  respectivamente

$$M_\Delta = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}.$$

Sejam  $p_{ij}$  os determinantes dos menores  $2 \times 2$  de  $M_\Delta$

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix} = u_i v_j - u_j v_i, \text{ com } 0 \leq i < j \leq 3.$$

Agora se  $\Delta' = \{u', v'\}$  é outra base de  $W$ , onde  $u' = (u'_0, u'_1, u'_2, u'_3)$  e  $v' = (v'_0, v'_1, v'_2, v'_3)$ . Então existem  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta \in \mathbb{C}$ , com  $\lambda = \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ , tais que

$$\begin{cases} u = \alpha u' + \beta v' \\ v = \gamma u' + \delta v'. \end{cases}$$

Logo  $u_i = \alpha u'_i + \beta v'_i$  e  $v_j = \gamma u'_j + \delta v'_j$ . Notemos que

$$u_i v_j - u_j v_i = (\alpha u'_i + \beta v'_i)(\gamma u'_j + \delta v'_j) - (\alpha u'_j + \beta v'_j)(\gamma u'_i + \delta v'_i) = (\alpha\delta - \gamma\beta)(u'_i v'_j - u'_j v'_i).$$

Disso resulta que  $p_{ij} = \lambda p'_{ij}$ . Dessa forma podemos considerar a função  $\omega : G_2(\mathbb{C}^4) \rightarrow \mathbb{P}^5$ , onde  $\omega(W) = [p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}]$ , com  $p_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$ ,  $0 \leq i < j \leq 3$ , onde  $\{(u_0, u_1, u_2, u_3), (v_0, v_1, v_2, v_3)\}$  é uma base de  $W$ . A função  $\omega$  é chamada de Mergulho de Plücker.

**Proposição 1.3** *A aplicação  $\omega$  é injetiva e  $Im(\omega) = Q$ , onde  $Q = Z(f)$ , com  $f = x_0 x_5 - x_1 x_4 + x_2 x_3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ .*

**Demonstração:** Ver pág. 13 de [11]. ■

A hipersuperfície quádrlica  $Q = Z(f) \subset \mathbb{P}^5$  é chamada de quádrlica de Plücker. Temos as correspondências bijetivas  $\psi^{-1} : \Sigma \rightarrow G_2(\mathbb{C}^4)$  e  $\omega : G_2(\mathbb{C}^4) \rightarrow Q$ . Salientamos que também usaremos  $\omega$  para denotar a composição  $\omega \circ \psi^{-1}$ . Logo o

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

mergulho de Plücker nos permite identificar cada reta em  $\mathbb{P}^3$  com um ponto em  $Q$ . Ou seja, podemos ver  $\sum$  como uma variedade algébrica em  $\mathbb{P}^5$ . Observemos ainda que como  $\dim Q = 4$ , então  $G_2(\mathbb{C}^4)$  tem dimensão 4.

Lembremos que  $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$  e  $\mathcal{A}_d = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_d$ , para cada  $d \geq 0$  inteiro, além disso  $\mathcal{A}_d$  é subespaço vetorial  $\mathcal{A}$ . Além disso,  $\dim \mathcal{A}_d = \binom{d+3}{3}$ .

Dada  $l$  uma reta em  $\mathbb{P}^3$ . Seja  $\mathcal{I}(l)_d$  a coleção de todos os polinômios homogêneos de grau  $d$  de  $\mathcal{I}(l)$ , ou seja,  $\mathcal{I}(l)_d = \mathcal{I}(l) \cap \mathcal{A}_d$ .

**Proposição 1.4** *Seja  $l \subset \mathbb{P}^3$  uma reta. Então a dimensão de  $\mathcal{I}(l)_d$  é dada por*

$$\dim \mathcal{I}(l)_d = \frac{d(d+1)(d+5)}{6}.$$

**Demonstração:** Sendo  $l \subset \mathbb{P}^3$  uma reta, existem  $L_1, L_2 \in \mathcal{A}_1$  linearmente independentes tais que  $l = Z(L_1, L_2)$ . Logo  $\mathcal{I}(l) = \langle L_1, L_2 \rangle$ . Para  $d = 0$ , temos que  $\mathcal{I}(l)_0 = \mathbb{C} \cap \mathcal{I}(l) = \{0\}$ . Logo  $\dim \mathcal{I}(l)_0 = 0$ . Para  $d = 1$  temos que

$$\mathcal{I}(l)_1 = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{I}(l) = [x_0, x_1, x_2, x_3] \cap \langle L_1, L_2 \rangle = [L_1, L_2].$$

Assim,  $\dim \mathcal{I}(l)_1 = 2$ . Para  $d \geq 2$  definamos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A}_{d-1} \times \mathcal{A}_{d-1} &\longrightarrow \mathcal{I}(l)_d \\ (P, Q) &\longmapsto PL_1 + QL_2. \end{aligned}$$

Observemos que  $\varphi$  é uma aplicação linear sobrejetiva. Pelo teorema do núcleo e da imagem

$$\dim(\mathcal{A}_{d-1} \times \mathcal{A}_{d-1}) = \dim \ker(\varphi) + \dim \mathcal{I}(l)_d.$$

Agora  $\ker(\varphi) = \{(P, Q) \in \mathcal{A}_{d-1} \times \mathcal{A}_{d-1} \mid PL_1 + QL_2 = 0\}$ . Logo  $(P, Q) \in \ker(\varphi)$  então  $PL_1 = -QL_2$ . Desde que  $\mathcal{A}$  é um domínio de fatoração única, segue que  $P = ML_2$  e  $Q = -ML_1$ , com  $M \in \mathcal{A}_{d-2}$ . Concluimos assim que  $\ker(\varphi) = \{(ML_2, -ML_1) : M \in \mathcal{A}_{d-2}\}$ . Portanto  $\dim \ker(\varphi) = \dim \mathcal{A}_{d-2}$ . Dessa forma

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{I}(l)_d &= \dim(\mathcal{A}_{d-1} \times \mathcal{A}_{d-1}) - \dim \ker(\varphi) \\ &= 2 \dim(\mathcal{A}_{d-1}) - \dim \mathcal{A}_{d-2} \\ &= 2 \binom{d+2}{3} - \binom{d+1}{3} \\ &= \frac{2d(d+1)(d+2)}{6} - \frac{(d-1)d(d+1)}{6} \\ &= \frac{d(d+1)}{6} (2(d+2) - (d-1)) \\ &= \frac{d(d+1)(d+5)}{6}. \end{aligned}$$

Portanto  $\dim \mathcal{I}(l)_d = \frac{d(d+1)(d+5)}{6}$  para todo  $d \geq 0$  inteiro. ■

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

Seja  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_d)$  a projetivização do espaço vetorial  $\mathcal{A}_d$ , ou seja,  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_d) = \{[g] : g \in \mathcal{A}_d - \{0\}\}$ , onde  $[g]$  é a classe de equivalência de  $g$ . Como  $\dim \mathcal{A}_d = \binom{d+3}{3}$ , então  $\dim \mathbb{P}(\mathcal{A}_d) = \binom{d+3}{3} - 1$ . Temos que  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_d)$  é uma variedade projetiva. Definamos

$$\Delta = \{([g], W) \in \mathbb{P}(\mathcal{A}_d) \times G_2(\mathbb{C}^4) \mid l = \mathbb{P}(W) \subset Z(g)\}.$$

Consideremos as projeções  $\pi_1 : \Delta \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{A}_d)$  e  $\pi_2 : \Delta \rightarrow G_2(\mathbb{C}^4)$ . Observemos que  $\pi_1$  é sobrejetiva se, e somente se, para todo  $f \in \mathcal{A}_d$ , com  $f \neq 0$ , existe uma reta  $l = \mathbb{P}(W)$  contida em  $Z(f)$ . Ou seja, se  $\pi_1$  é sobrejetiva então toda superfície de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^3$  contém ao menos uma reta. Notemos também que a pré-imagem de  $[g]$  por  $\pi_1$  é dada por

$$\pi_1^{-1}([g]) = \{[g]\} \times \{W \in G_2(\mathbb{C}^4) \mid l = \mathbb{P}(W) \subset Z(g)\}.$$

Ou seja,  $\pi_1^{-1}([g])$  está em bijeção com o conjunto das retas que estão contidas em  $Z(g)$ .

A aplicação  $\pi_2$  é sempre sobrejetiva. De fato, dado  $l = \mathbb{P}(W)$ , com  $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ , então existem  $L_1, L_2 \in \mathcal{A}_1$  linearmente independentes tais que  $l = Z(L_1, L_2)$ . Assim  $g = L_1^d \in \mathcal{A}_d$  e a superfície  $Z(g)$  contém  $l$ . Agora dado  $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$  temos que

$$\begin{aligned} \pi_2^{-1}(W) &= \{([g], W) \in \mathbb{P}(\mathcal{A}_d) \times G_2(\mathbb{C}^4) : l = \mathbb{P}(W) \subset Z(g)\} \\ &= \{[g] \in \mathbb{P}(\mathcal{A}_d) : l = \mathbb{P}(W) \subset Z(g)\} \times \{W\} \\ &= \{[g] \in \mathbb{P}(\mathcal{A}_d) : g \in \mathcal{I}(l)_d\} \times \{W\} \\ &= \mathbb{P}(\mathcal{I}(l)_d) \times \{W\}. \end{aligned}$$

Vamos aplicar o Teorema da dimensão da fibra, ver pág. 75 de [17], para calcular a dimensão de  $\Delta$ . Temos que  $\pi_2 : \Delta \rightarrow G_2(\mathbb{C}^4)$  é um morfismo sobrejetivo. Logo o Teorema da dimensão das fibras nos garante que existe um aberto não vazio  $U$  de  $G_2(\mathbb{C}^4)$  tal que

$$\dim \pi_2^{-1}(W) = \dim \Delta - \dim G_2(\mathbb{C}^4), \quad \forall W \in U.$$

Mas  $\dim \pi_2^{-1}(W) = \dim \mathbb{P}(\mathcal{I}(l)_d)$ . Agora pela Proposição 1.4 temos que  $\dim \mathcal{I}(l)_d = \frac{d(d+1)(d+5)}{6}$ , logo  $\dim \mathbb{P}(\mathcal{I}(l)_d) = \frac{d(d+1)(d+5)}{6} - 1$ . Sabemos também que  $\dim G_2(\mathbb{C}^4) = 4$ .

Portanto

$$\begin{aligned} \dim \Delta &= \dim \pi_2^{-1}(W) + \dim G_2(\mathbb{C}^4) \\ &= \dim \mathbb{P}(\mathcal{I}(l)_d) + \dim G_2(\mathbb{C}^4) \\ &= \frac{d(d+1)(d+5)}{6} - 1 + 4 \\ &= \frac{d(d+1)(d+5)}{6} + 3. \end{aligned}$$

Já vimos acima que a sobrejetividade de  $\pi_1$  implica que toda superfície de grau  $d$  contém retas. Além disso, obtemos acima uma fórmula, para cada  $d$ , que nos dá a dimensão de  $\Delta$ . Vamos agora procurar para quais valores de  $d$   $\pi_1$  poderia ser

sobrejetiva. Suponhamos que  $\pi_1 : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{A}_d)$  é sobrejetiva. Novamente pelo Teorema da dimensão das fibras segue que

$$\dim \pi_1^{-1}([g]) \geq \dim \Delta - \dim \mathbb{P}(\mathcal{A}_d), \quad \forall [g] \in \mathbb{P}(\mathcal{A}_d).$$

Para continuar o nosso estudo consideremos os seguintes exemplos:

**Exemplos 1.1** 1. *Seja  $S = Z(g)$ , com  $g = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathcal{A}$ , contém exatamente 27 retas, ver pág. 1 de [1].*

2. *Seja  $Z(f) \subset \mathbb{P}^3$ , com  $f = x_3^d + x_0 x_1^{d-1} + x_1 x_2^{d-1} + x_2 x_0^{d-1} \in \mathcal{A}$ , onde  $d \geq 4$ . Então  $Z(f)$  é uma superfície não singular que não contém retas.*

A verificação do Exemplo 2 será feita mais a frente (ver Proposição 1.5). Nos exemplos acima temos que  $\dim \pi_1^{-1}([f]) = 0$ , para todo  $d \geq 3$ , pois no primeiro exemplo  $\pi_1^{-1}([f])$  é um conjunto finito e no segundo exemplo  $\pi_1^{-1}([f])$  é vazio. Logo, caso  $\pi_1$  seja sobrejetiva, devemos ter

$$\dim \Delta = \dim \mathbb{P}(\mathcal{A}_d).$$

Isso implica que  $\frac{d(d+1)(d+5)}{6} + 3 = \frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6} - 1$ . Assim

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6} - \frac{d(d+1)(d+5)}{6} \\ &= \frac{(d+1)[(d+2)(d+3) - d(d+5)]}{6} \\ &= \frac{(d+1)[d^2 + 5d + 6 - d^2 - 5d]}{6} \\ &= d + 1. \end{aligned}$$

Concluimos assim que  $d = 3$ . Ou seja, para que  $\pi_1$  seja sobrejetiva é necessário que  $d = 3$ . Por tudo que fizemos acima chegamos ao seguinte resultado:

**Corolário 1.2** *Existem superfícies de grau  $d \geq 4$  que não contém retas.*

**Teorema 1.4** *Se  $d = 3$ , então  $\pi_1 : \Delta \longrightarrow \mathcal{A}_3$  é sobrejetiva. Em particular, toda superfície de grau 3 contém retas.*

**Demonstração:** Como  $\dim \mathcal{A}_3 = \binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = 20$  segue que  $\dim \mathbb{P}(\mathcal{A}_3) = 20 - 1 = 19$ . Além disso, a dimensão de  $\Delta$  para  $d = 3$  é dada por  $\frac{3(3+1)(3+5)}{6} + 3 = 19$ . Desde que  $\pi_1$  é morfismo entre variedades projetivas segue que  $\pi_1(\Delta)$  é um fechado de  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_3)$ . Temos pelo Exemplo 2 acima que  $\pi_1^{-1}(f)$ , onde  $f = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathcal{A}$ , é um conjunto finito. Logo, pelo teorema da dimensão das fibras, temos que  $\dim \Delta = \dim \pi_1(\Delta) = 19$ . Portanto  $\pi_1(\Delta) \subset \mathbb{P}(\mathcal{A}_3)$  é um fechado de mesma dimensão de  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_3)$ . Desde que  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_3)$  é irredutível segue que  $\mathbb{P}(\Delta) = \mathbb{P}(\mathcal{A}_3)$ . ■

Logo  $R_f \neq \emptyset$ , para todo  $f$  polinômio homogêneo de grau 1, 2 ou 3.

## 1.2 Exemplo de uma superfície de grau $d \geq 4$ em $\mathbb{P}^3$ que não contém retas

Já vimos que o conjunto de todas as retas  $\Sigma$  de  $\mathbb{P}^3$  está em bijeção com  $G_2(\mathbb{C}^4)$ . Vimos também que o mergulho de Plücker  $\omega$  ( ver Proposição 1.3), estabelece uma bijeção entre  $G_2(\mathbb{C}^4)$  e a quádriga de Plücker  $Q = Z(x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3)$ . Usaremos o mergulho de Plücker para estabelecer uma partição conveniente em  $\Sigma$ . Tal partição nos dará uma ferramenta para decidir quando uma superfície  $S$  contém ou não retas.

Definamos os seguintes subconjuntos de  $G_2(\mathbb{C}^4)$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_6 = \{W \in G_2(W) : w_{01} = w_{02} = w_{03} = w_{12} = w_{13} = 0 \text{ e } w_{23} \neq 0\} \\ E_5 = \{W \in G_2(W) : w_{01} = w_{02} = w_{03} = w_{12} = 0 \text{ e } w_{13} \neq 0\} \\ E_4 = \{W \in G_2(W) : w_{01} = w_{02} = w_{03} = 0 \text{ e } w_{12} \neq 0\} \\ E_3 = \{W \in G_2(W) : w_{01} = w_{02} = 0 \text{ e } w_{03} \neq 0\} \\ E_2 = \{W \in G_2(W) : w_{01} = 0 \text{ e } w_{02} \neq 0\} \\ E_1 = \{W \in G_2(W) : w_{01} \neq 0\}, \end{array} \right.$$

onde  $\omega(W) = [w_{01} : w_{02} : w_{03} : w_{12} : w_{13} : w_{23}]$ . Dessa forma temos que  $G_2(\mathbb{C}^4) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$ , além disso, essa união é disjunta. Chamamos essa partição de  $G_2(\mathbb{C}^4)$  de estratificação de  $G_2(\mathbb{C}^4)$ .

Se  $W \in E_6$  e  $\Delta = \{u, v\}$ , com  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ , for uma base de  $W$ , então

$$M_\Delta = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

tal que  $w_{01} = w_{02} = w_{03} = w_{12} = w_{13} = 0$  e  $w_{23} = u_2v_3 - u_3v_2 \neq 0$ . A última condição nos diz que podemos aplicar operações elementares de modo que

$$\begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando essas mudanças à matriz  $M_\Delta$ , obtemos uma nova matriz, cujas linhas ainda determinam outra base de  $W$ , dada por

$$M_{\Delta'} = \begin{bmatrix} u'_0 & u'_1 & 1 & 0 \\ v'_0 & v'_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando agora as outras relações, segue que  $u'_0 = u'_1 = v'_0 = v'_1 = 0$ . Portanto,

$$W = [(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)].$$

Fazendo alguns cálculos semelhantes aos aplicados acima descobrimos que os subespaços dessa partição possuem a seguinte base:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_6 = \{[(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]\}, \\ E_5 = \{[(0, 1, \alpha, 0), (0, 0, 0, 1)] : \alpha \in \mathbb{C}\}, \\ E_4 = \{[(0, 1, 0, \alpha), (0, 0, 1, \beta)] : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}, \\ E_3 = \{[(1, \alpha, \beta, 0), (0, 0, 0, 1)] : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}, \\ E_2 = \{[(1, \alpha, 0, \beta), (0, 0, 1, \gamma)] : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}, \\ E_1 = \{[(1, 0, \alpha, \beta), (0, 1, \gamma, \delta)] : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}\}. \end{array} \right.$$

Seja  $Z(f) \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície contendo a reta  $l \subset \mathbb{P}^3$ . Então  $l = \mathbb{P}(W)$ , para algum  $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ . Mas devemos ter  $W \in E_i$ , para um único  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Com essas ideias é possível usar essa estratificação de  $G_2(\mathbb{C}^4)$  para encontrar as retas contidas numa superfície em  $\mathbb{P}^3$ , caso ela contenha alguma reta.

**Proposição 1.5** *Seja  $Z(f) \subset \mathbb{P}^3$ , com  $f = x_3^d + x_0x_1^{d-1} + x_1x_2^{d-1} + x_2x_0^{d-1} \in \mathcal{A}$ , onde  $d \geq 4$ . Então  $Z(f)$  é uma superfície não singular que não contém retas.*

**Demonstração:** Calculando as derivadas parciais de  $f$  e igualando a zero obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} (1) \quad \partial_0 f &= x_1^{d-1} + (d-1)x_2x_0^{d-2} = 0 \\ (2) \quad \partial_1 f &= (d-1)x_0x_1^{d-2} + x_2^{d-1} = 0 \\ (3) \quad \partial_2 f &= (d-1)x_1x_2^{d-2} + x_0^{d-1} = 0 \\ (4) \quad \partial_3 f &= dx_3^{d-1} = 0. \end{aligned}$$

A equação (4) nos diz que  $x_3 = 0$ . Se tivermos  $x_0 = 0$ , então, por (1),  $x_1 = 0$ . E por (2), segue que  $x_2 = 0$ . Obtemos as mesmas conclusões se  $x_1 = 0$  ou  $x_2 = 0$ . Suponhamos por absurdo que o sistema acima tenha solução com  $x_i \neq 0$ , para  $i = 0, 1, 2$ . Multiplicando a equação (1) por  $x_0$  obtemos,  $x_0x_1^{d-1} + (d-1)x_2x_0^{d-1} = 0$ . Agora substituindo (3) nessa equação segue que  $x_0x_1^{d-1} + (d-1)x_2(1-d)x_1x_2^{d-2} = 0$ . Assim,  $x_1(x_0x_1^{d-2} + (d-1)(1-d)x_2^{d-1}) = 0$ . Daí, dividindo essa equação por  $x_1$ , tem-se  $x_0x_1^{d-2} + (d-1)(1-d)x_2^{d-1} = 0$ . Substituindo (2) na equação anterior concluímos que

$$x_0x_1^{d-2} + (d-1)(1-d)^2x_0x_1^{d-2} = x_0x_1^{d-2}(1+(d-1)^3) = 0.$$

O que implica que  $1+(d-1)^3 = 0$ . Mas isso é um absurdo pois  $d \geq 4$ , e  $x_0x_1^{d-2} \neq 0$ .

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

Portanto a superfície  $Z(f)$  é não singular.

Vamos mostrar agora que  $Z(f)$  não contém retas. Suponhamos por absurdo que  $l$  seja uma reta em  $\mathbb{P}^3$  contida em  $Z(f)$ . Então  $l = \mathbb{P}(W)$ , onde  $W \in E_i$ , para um único  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Caso 1:  $W \in E_6$ .

Usando que  $E_6 = \{[(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]\}$  e que a equação paramétrica de  $l = \mathbb{P}(W)$  é dada por  $l = \{[0 : 0 : u : v] : [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$ . Daí como  $l \subset Z(f)$  devemos ter  $f(0, 0, u, v) = v^d = 0, \forall [u : v] \in \mathbb{P}^1$ . O que claramente não ocorre. Portanto  $W \notin E_6$ .

Caso 2:  $W \in E_5$ .

Então  $W = [(0, 1, a, 0), (0, 0, 0, 1)]$ , para algum  $a \in \mathbb{C}$ . Assim  $l = \{[0 : u : au : v] : [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$ . Daí devemos ter  $f(0, u, au, v) = v^d + a^{d-1}u^d = 0$ , para todo  $[u : v] \in \mathbb{P}^1$ . Mas tomando  $[0 : 1]$  em  $\mathbb{P}^1$ , chegamos ao absurdo  $0 = 1$ . Dessa forma  $W \notin E_5$ .

Caso 3:  $W \in E_4$ .

Então  $W = [(0, 1, 0, a), (0, 0, 1, b)]$ , para algum  $a, b \in \mathbb{C}$ . Logo os pontos de  $l = \mathbb{P}(W)$  são da forma  $[0 : u : v : au + bv]$ , com  $[u : v] \in \mathbb{P}^1$ . Novamente, como  $l \subset Z(f)$ , então  $f(0, u, v, au + bv) = (ua + bv)^d + uv^{d-1} = 0$ , para todo  $[u : v] \in \mathbb{P}^1$ . Seja  $q(x, y) = (xa + by)^d + xy^{d-1}$ , em  $\mathbb{C}[x, y]$ . A condição anterior sobre  $f$  nos mostra que  $q(x, y)$  é o polinômio nulo. Aplicando o binômio de Newton para  $q(x, y)$  obtemos que

$$q(x, y) = a^d x^d + \dots + b^d y^d + xy^{d-1}.$$

Isso revela que os coeficientes  $a$  e  $b$  são nulos. Dessa forma  $q(x, y) = xy^{d-1}$ . Mas esse polinômio não é nulo. O que nos conduz a um absurdo. Portanto  $W \notin E_4$ .

Caso 4:  $W \in E_3$ .

Neste caso temos que  $W = [(1, a, b, 0), (0, 0, 0, 1)]$ , com  $a, b \in \mathbb{C}$ . Dessa forma

$$l = \{[u : au : bu : v] : [u : v] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Como  $l \subset Z(f)$ , temos que  $f(u, au, bu, v) = v^d + u(au)^{d-1} + au(bu)^{d-1} + buu^{d-1} = 0, \forall [u : v] \in \mathbb{C}$ . Porém para  $[u : v] = [0 : 1] \in \mathbb{P}^1$ , tem-se  $0 = 1$ . Concluimos, desse absurdo, que  $W \notin E_3$ .

Caso 5:  $W \in E_2$ .

Logo  $l = \{[u : au : v : bu + cv] : [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$ , com  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Agora, de  $l \subset Z(f)$ , devemos ter

$$f(u, au, v, bu + cv) = (bu + cv)^d + u(au)^{d-1} + auv^{d-1} + vu^{d-1} = 0, \forall [u : v] \in \mathbb{P}^1.$$

Consideremos o polinômio  $q(x, y) = (bx + cy)^d + x(ax)^{d-1} + axy^{d-1} + yx^{d-1} \in \mathbb{C}[x, y]$ .

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

Pela igualdade acima segue que o polinômio  $q(x, y)$  é nulo em  $\mathbb{C}[x, y]$ . Agora  $q(0, 1) = c^d$ . O que implica que  $c = 0$ . Logo  $q(x, y) = b^d x^d + a^{d-1} x^d + axy^{d-1} + yx^{d-1}$ . Como tal polinômio é nulo, segue que  $\partial_x q = db^d x^{d-1} + a^{d-1} dx^{d-1} + ay^{d-1} + (d-1)yx^{d-2} = 0$ . Logo  $\partial_x q(0, 1) = a = 0$ . Mas calculando  $q(1, 0)$ , temos  $b^d + a^{d-1} = 0$ . Implicando que  $b = 0$ . Dessa forma o polinômio  $q(x, y)$  se reduz a expressão  $q(x, y) = yx^{d-1}$ . Nos conduzindo assim a um absurdo, pois tal polinômio não é nulo. O que nos mostra que  $W \notin E_2$ .

Caso 6:  $W \in E_1$ .

Nesse último caso temos que  $W = [(1, 0, \alpha, \beta), (0, 1, \gamma, \delta)]$ , com  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ . Daí a forma paramétrica de  $l$  é  $l = \{[u : v : \alpha u + \gamma v : \beta u + \delta v] : [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$ . Usando que  $l \subset Z(f)$ , então o polinômio  $f$  deve verificar que

$$f(u, v, \alpha u + \gamma v, \beta u + \delta v) = (\beta u + \delta v)^d + uv^{d-1} + v(\alpha u + \gamma v)^{d-1} + (\alpha u + \gamma v)u^{d-1} = 0.$$

Seja  $q(x, y) = (\beta x + \delta y)^d + xy^{d-1} + y(\alpha x + \gamma y)^{d-1} + (\alpha x + \gamma y)x^{d-1} \in \mathbb{C}[x, y]$ . Pela relação acima devemos ter  $q(x, y) = 0$ . Decorre desse fato as seguintes equações:

- (1)  $q(1, 0) = \beta^d + \alpha = 0$ ,
- (2)  $q(0, 1) = \delta^d + \gamma^{d-1} = 0$ ,
- (3)  $\partial_x q(0, 1) = d\beta\delta^{d-1} + 1 + \alpha(d-1)\gamma^{d-2} = 0$ ,
- (4)  $\partial_{xx} q(0, 1) = d\beta^2\delta^{d-2} + (d-2)\alpha^2\gamma^{d-3} = 0$ ,
- (5)  $\partial_y q(1, 0) = d\delta\beta^{d-1} + \alpha^{d-1} + \gamma = 0$ ,
- (6)  $\partial_{yy} q(1, 0) = d\delta^2\beta^{d-2} + 2\gamma\alpha^{d-2} = 0$ .

Se tivermos que  $\alpha = 0$ , então, por (1),  $\beta = 0$ . Agora de (5) tem-se  $\gamma = 0$ , e finalmente, por (2),  $\delta = 0$ . Se for  $\beta = 0$ , então  $\alpha = 0$ , e obtemos o mesmo resultado. Agora se for  $\delta = 0$ , então  $\gamma = 0$ . Logo (5) segue que  $\alpha = 0$ . Em todo caso vemos que se um dos números  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ , for nulo, então todos eles são nulos. E concluímos assim que  $q(x, y) = xy^{d-1}$ . O que nos levaria a um absurdo.

Suponhamos agora que  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  são todos não nulos. Substituindo (1) em (4) segue que

$$d\beta^2\delta^{d-2} + (d-2)\beta^{2d}\gamma^{d-3} = \beta^2(d\delta^{d-2} + (d-2)\beta^{2d-2}\gamma^{d-3}) = 0.$$

Logo  $d\delta^{d-2} + (d-2)\beta^{2d-2}\gamma^{d-3} = 0$ . Multiplicando essa igualdade por  $\delta^2$ , segue que

$$d\delta^d + (d-2)\delta^2\beta^{2d-2}\gamma^{d-3} = 0.$$

Substituindo a equação (2) na igualdade acima temos que  $d(-\gamma^{d-1}) + (d-2)\delta^2\beta^{2d-2}\gamma^{d-3} = 0$ . Dividindo a equação anterior por  $\gamma^{d-3}$  encontramos a identidade

$$-d\gamma^2 + (d-2)\beta^{2d-2}\delta^2 = 0.$$

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

Agora multiplicando por  $d^2$  a igualdade anterior temos  $-d^3\gamma^2 + (d-2)(d\beta^{d-1}\delta)^2 = 0$ . Substituindo (5) nessa igualdade tem-se que

$$-d^3\gamma^2 + (d-2)(\gamma + \alpha^{d-1})^2 = 0.$$

Logo  $(-d^3 + d - 2)\gamma^2 + 2(d-2)\alpha^{d-1}\gamma + (d-2)\alpha^{2d-2} = 0$ . Isso nos mostra que  $\gamma$  é raiz do polinômio

$$p(t) = (-d^3 + d - 2)t^2 + 2(d-2)\alpha^{d-1}t + (d-2)\alpha^{2d-2} \in \mathbb{C}[t].$$

O discriminante desse polinômio é  $\Delta = 4(d-2)^2\alpha^{2d-2} - 4(d-2)\alpha^{2d-2}(-d^3 + d - 2)$ , ou seja,  $\Delta = 4(d-2)\alpha^{2d-2}d^3$ . E assim,

$$\gamma = \lambda\alpha^{d-1}, \text{ onde } \lambda = \frac{-d + 2 \pm d\sqrt{d(d-2)}}{d-2-d^3}.$$

Substituindo essa última relação em (6) vemos que  $d\delta^2\beta^{d-2} + 2\lambda\alpha^{2d-3} = 0$ . Multiplicando por  $\alpha$  tem-se

$$(7) \quad d\delta^2\beta^{d-2}\alpha + 2\lambda\alpha^{2d-2} = 0.$$

Mas da equação (1) temos  $\alpha = -\beta^d$ , e assim  $\alpha^{2d-2} = (\alpha^{d-1})^2 = [(-\beta^d)^{d-1}]^2 = \beta^{2d(d-1)}$ . Usando essas relações na equação (7) obtemos

$$-d\delta^2\beta^{2d-2} + 2\lambda\beta^{2d(d-1)} = 0.$$

Dividindo essa última igualdade por  $\beta^{2d-2}$ , segue que  $-d\delta^2 + 2\lambda\beta^{2d(d-1)^2} = 0$ . O que implica que  $\delta^2 = \frac{2\lambda\beta^{2d(d-1)^2}}{d}$  (8). De (2) tem-se  $\delta^d = -\gamma^{d-1}$ . Logo  $(\delta^2)^d = (\gamma^2)^{d-1}$ . Então de (8) temos

$$\left(\frac{2\lambda\beta^{2d(d-1)^2}}{d}\right)^d = \delta^{2d} = (\gamma^2)^{d-1} = (\lambda^2\alpha^{2(d-1)})^{d-1}.$$

Mas, novamente por (1), tem-se que  $\alpha^2 = \beta^{2d}$ . Substituindo essa relação na equação acima obtemos

$$\left(\frac{2\lambda\beta^{2d(d-1)^2}}{d}\right)^d = (\lambda^2(\beta^{2d})^{d-1})^{d-1}.$$

Simplificando dessa igualdade  $\beta^{2d(d-1)^2}$ , concluímos que

$$\left(\frac{2\lambda}{d}\right)^d = \lambda^{2(d-1)}.$$

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

Dividindo essa equação por  $\lambda^d$  e substituindo o valor de  $\lambda$  na equação resultante, encontramos a seguinte identidade para o grau  $d$  do polinômio  $f$

$$\frac{2^d}{d^d} = \left( \frac{-d + 2 \pm d\sqrt{d(d-2)}}{d-2-d^3} \right)^{d-2}, \quad \forall d \geq 4. \quad (10)$$

O caminho que percorremos até agora foi o de assumir que a superfície  $Z(f)$  contém uma reta  $l = \mathbb{P}(W)$ , onde  $W \in E_6$ . Supondo que os números  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  são não nulos, conseguimos encontrar a equação em (10). Iremos mostrar que tal equação nos conduz a um absurdo.

**Afirmção 1.1**  $\frac{2^d}{d^d} \neq \left( \frac{-d+2 \pm d\sqrt{d(d-2)}}{d-2-d^3} \right)^{d-2}, \quad \forall d \geq 4, d \in \mathbb{N}.$

Com efeito, suponhamos por absurdo que exista  $d \in \mathbb{N}$ , com  $d \geq 4$ , satisfazendo a equação (10). Escrevendo

$$\frac{2^d}{d^d} (d-2-d^3)^{d-2} = \left( -d + 2 \pm d\sqrt{d(d-2)} \right)^{d-2}.$$

É fácil ver que o lado esquerdo dessa equação é um número racional. Mostraremos que  $(-d + 2 \pm d\sqrt{d(d-2)})^{d-2}$  é um número irracional.

Fato: Se  $d \geq 3$ , com  $d \in \mathbb{N}$ , então  $\sqrt{d(d-2)}$  é irracional.

De fato, se  $n$  é um número natural, então  $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow n = m^2$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Se  $d$  for par, então  $d = 2k$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ , com  $k \geq 2$ . Logo,  $\sqrt{d(d-2)} = \sqrt{2k(2k-2)} = 2\sqrt{k(k-1)}$ . Daí, se  $\sqrt{d(d-2)} \in \mathbb{Q}$ , então  $\sqrt{k(k-1)} \in \mathbb{Q}$ . Logo,  $k(k-1) = m^2$ . Mas o máximo divisor comum de  $k$  e  $k-1$  é 1. Então devemos ter  $k = a^2$  e  $k-1 = b^2$ , com  $a, b \in \mathbb{N}$ . Isso implica que  $1 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ . Assim  $a = \pm 1$ . Do que resulta  $k = 1$ . O que é um absurdo.

Se  $d$  é ímpar, então  $d = 2k + 1$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Logo se  $\sqrt{d(d-2)} \in \mathbb{Q}$ , então  $(2k+1)(2k-1) = m^2$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Agora se  $\text{mdc}(2k+1, 2k-1) = d$ , então  $d|2k+1 - 2k+1 = 2$ . Assim  $d = 1$  ou  $d = 2$ . Mas como  $2k+1$  é ímpar tem-se que  $d = 1$ . Então devemos ter  $2k+1 = a^2$  e  $2k-1 = b^2$ , para algum  $a, b \in \mathbb{N}$ . O que nos dá  $2 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ . Logo  $2a = \pm 3$ . Um absurdo. Portanto  $\sqrt{d(d-2)}$  é irracional.

Vamos aplicar o binômio de Newton para expandir a expressão (notemos que o sinal  $\pm 1$  está fixo em cada análise)  $\left( -d + 2 \pm d\sqrt{d(d-2)} \right)^{d-2}$ .

$$\left( -d + 2 \pm d\sqrt{d(d-2)} \right)^{d-2} = \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d-2}{k} (2-d)^{d-2-k} (\pm 1)^k d^k (\sqrt{d(d-2)})^k.$$

Separando a expansão acima na soma dos termos em que  $k$  é par mais a soma dos

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

termos em que  $k$  é ímpar temos

$$\text{soma dos termos pares: } \sum_{\substack{0 \leq k \leq d-2 \\ k=2p, p \in \mathbb{N}}} \binom{d-2}{k} (2-d)^{d-2-k} (\pm 1)^k d^k (\sqrt{d(d-2)})^k,$$

$$\text{soma dos termos ímpares: } \sum_{\substack{0 \leq k \leq d-2 \\ k=2p+1, p \in \mathbb{N}}} \binom{d-2}{k} (2-d)^{d-2-k} (\pm 1)^k d^k (\sqrt{d(d-2)})^k.$$

A primeira parcela da soma acima é racional pois,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq k \leq d-2 \\ k=2p, p \in \mathbb{N}}} \binom{d-2}{k} (2-d)^{d-2-k} (\pm 1)^k d^k (\sqrt{d(d-2)})^k &= \\ \sum_{\substack{0 \leq k \leq d-2 \\ k=2p, p \in \mathbb{N}}} \binom{d-2}{2p} (2-d)^{d-2-2p} d^{2p} (d(d-2))^p. \end{aligned}$$

Porém a segunda parcela é irracional pois,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq k \leq d-2 \\ k=2p+1, p \in \mathbb{N}}} \binom{d-2}{k} (2-d)^{d-2-k} (\pm 1)^k d^k (\sqrt{d(d-2)})^k &= \\ \sum_{\substack{0 \leq k \leq d-2 \\ k=2p+1, p \in \mathbb{N}}} \binom{d-2}{2p+1} (2-d)^{d-1-2p} (\pm 1) d^{2p+1} (\sqrt{d(d-2)})^{2p+1} &= \\ (\sqrt{d(d-2)}) \left( \sum_{\substack{0 \leq k \leq d-2 \\ k=2p+1, p \in \mathbb{N}}} \binom{d-2}{2p+1} (2-d)^{d-1-2p} (\pm 1) d^{2p+1} (d(d-2))^p \right) &= \\ = (\sqrt{d(d-2)}) \mu, \end{aligned}$$

onde

$$\mu = (\pm 1) \left( \sum_{\substack{0 \leq k \leq d-2 \\ k=2p+1, p \in \mathbb{N}}} \binom{d-2}{2p+1} (2-d)^{d-1-2p} d^{2p+1} (d(d-2))^p \right) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Portanto  $(-d+2 \pm d\sqrt{d(d-2)})^{d-2}$  é irracional. O que mostra a nossa afirmação inicial.

Por tudo que fizemos até agora chegamos a conclusão que  $Z(f)$  não contém retas em  $\mathbb{P}^3$ , para todo  $d \geq 4$ . ■

Como já dissemos na introdução desse trabalho, nosso objetivo é mostrar o número máximo de retas contidas em superfícies não singulares  $S$  de grau 4 de uma certa família é 64. De fato, 64 é o número máximo de retas em qualquer superfície não singular de grau 4, ver [14].

Uma pergunta que surge naturalmente nesse contexto é saber se essa cota pode ser melhorada. O exemplo abaixo mostrará uma superfície não singular de grau 4 que contém exatamente 64 retas.

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

**Exemplo 1.1** (A quártica de Schur contém exatamente 64 retas) Consideremos a quártica de Schur  $S = Z(f) \subset \mathbb{P}^3$ , onde  $f = x_0^4 - x_0x_1^3 + x_2x_3^3 - x_2^4 \in \mathcal{A}$ . Não é difícil verificar que  $S$  é não singular. Vamos continuar usando estratificação para encontrar as retas contidas em  $S$ . Seja  $l = \mathbb{P}(W)$ , onde  $W \in E_6$ . Então  $l = \{[0 : 0 : u : v] : [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$ . Agora  $f(0, 0, u, v) = -u^4 + uv^3 \in \mathbb{C}[u, v]$  é um polinômio não nulo. Logo  $l$  não está contida em  $S$ . Se  $l = \mathbb{P}(W)$ , com  $W \in E_5$ . Então  $l = \{[0 : u : \alpha u : v] : [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$ . Temos que  $f(0, u, \alpha u, v) = \alpha u(v^3 - \alpha^3 u^3)$ . Logo  $l \subset S$  se, e somente se,  $f(0, u, \alpha u, v) = 0$  se, e somente se,  $\alpha = 0$ . Logo a reta  $l_1 = \{[0 : u : 0 : v] : [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$  está contida em  $S$ .

Consideremos agora  $l = \mathbb{P}(W)$ , com  $W \in E_4$ . Dessa forma  $l = \{[0 : u : v : \alpha u + \beta v] \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$ . Para checar se  $l \subset S$  devemos estudar o polinômio  $f(0, u, v, \alpha u + \beta v)$ . Mas  $f(0, u, v, \alpha u + \beta v) = v((\alpha u + \beta v)^3 - v^3) = 0 \Leftrightarrow g = (\alpha u + \beta v)^3 - v^3 = 0$ ,  $g \in \mathbb{C}[u, v]$ . Agora  $g = 0$  nos conduz ao sistema

$$\begin{cases} \alpha^3 = 0, & \alpha^2\beta = 0, \\ \alpha\beta^2 = 0, & \beta^3 = 1. \end{cases}$$

Portanto  $f(0, u, v, \alpha u + \beta v) = 0$  se, e somente se,  $\alpha = 0$  e  $\beta^3 = 1$ . Daí obtemos mais três retas  $l_2, l_3$  e  $l_4$  contidas em  $S$ .

Para encontrar as retas  $l = \mathbb{P}(W)$  contidas em  $S$ , onde  $W \in E_3$ , devemos estudar sob que condições o polinômio  $f(u, \alpha u, \beta u, v) = u^4 - \alpha^3 u^4 + \beta u v^3 - \beta^4 u^4 \in \mathbb{C}[u, v]$  é nulo. Obtemos que  $f(u, \alpha u, \beta u, v) = 0$  se, e somente se,  $\beta = 0$  ou  $\alpha^3 = 1$ . Temos assim mais três retas  $l_j = \mathbb{P}(W_j)$ ,  $5 \leq j \leq 7$ , com  $W_j \in E_3$ , contidas em  $S$ . De modo análogo se  $l = \mathbb{P}(W)$ , com  $W \in E_2$ , é uma reta contida em  $S$ . Então  $f(u, \alpha u, v, \beta u + \gamma v) = 0$ . Mas isso nos conduz a

$$(1 - \alpha^3)u^4 + \beta^3 u^3 v + 3\beta^2 \gamma u^2 v^2 + 3\beta \gamma^2 u v^3 + (\gamma^3 - 1)v^4 = 0.$$

Usando igualdade de polinômios encontramos que essa igualdade é verdadeira apenas quando  $\alpha^3 = 1, \beta = 0$  e  $\gamma^3 = 1$ . Logo obtemos mais nove retas  $l_8, \dots, l_{16}$  contidas em  $S$ . Assim como no exemplo anterior, encontrar as retas  $l = \mathbb{P}(W)$ , com  $W \in E_1$ , contidas em  $S$  nos dá bem mais trabalho. Se  $l = \mathbb{P}(W)$ , com  $W \in E_1$  é uma reta contida em  $S$  então  $f(u, v, \alpha u + \gamma v, \beta u + \delta v) = 0$  em  $\mathbb{C}[u, v]$ . Fazendo vários cálculos descobrimos que uma condição necessária e suficiente para que o polinômio  $f(u, v, \alpha u + \gamma v, \beta u + \delta v)$  seja nulo em  $\mathbb{C}[u, v]$  é que  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  satisfaçam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 - \alpha^4 + \alpha\beta^3 = 0, \\ -4\alpha^3\gamma + 3\beta^2\delta\alpha + \gamma\beta^3 = 0, \\ -6\alpha^2\gamma^2 + 3\beta\delta^2\alpha + 3\beta^2\delta\gamma = 0, \\ -1 - 4\alpha\gamma^3 + \alpha\delta^3 + 3\beta\delta^2\gamma = 0, \\ -\gamma^4 + \gamma\delta^3 = 0. \end{cases}$$

Com o auxílio do computador descobrimos que o sistema acima possui 48 soluções. Cada uma dessas soluções nos dá uma reta contida na superfície  $S$ . Logo obtemos  $16 + 48 = 64$  retas contidas em  $S$ .

### 1.3 Superfícies em $\mathbb{P}^3$ contendo uma reta $l$

Considere uma superfície não singular  $S \subset \mathbb{P}^3$  que contém uma reta  $l$ . Para cada plano  $H$  que contém a reta  $l$  podemos considerar a interseção  $S \cap H$ , que consiste da reta  $l$  juntamente com uma curva contida em  $H$ . Veremos nessa seção que o estudo dessas seções planas podem nos levar a uma maior compreensão quanto a quantidade de retas que uma superfície  $S$  contém.

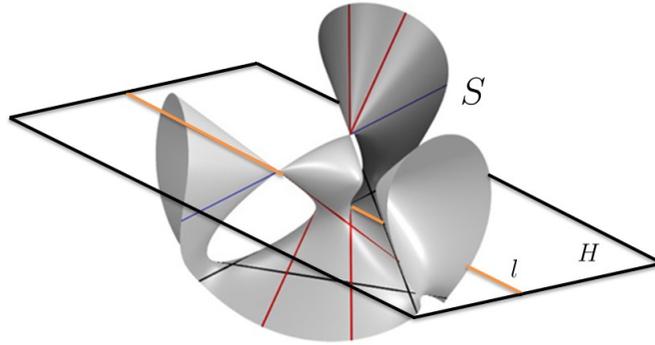


Figura 1.1: Plano  $H \in \Omega(l)$  intersectando  $S$ .

**Lema 1.1** *Seja  $l$  uma reta em  $\mathbb{P}^3$  e  $\Omega(l)$  o conjunto de todos os planos em  $\mathbb{P}^3$  que contém  $l$ . Então  $\Omega(l)$  está em bijeção com  $\mathbb{P}^1$ , ou seja,  $\Omega(l)$  é parametrizado por  $\mathbb{P}^1$ .*

**Demonstração:** Como  $l \subset \mathbb{P}^3$  é uma reta, então  $l = Z(L_1, L_2)$ , onde  $L_1, L_2 \in \mathcal{A}$  são formas lineares linearmente independentes. Seja  $H = Z(h)$  um plano contendo a reta  $l = Z(L_1, L_2)$ , onde  $h \in \mathcal{A}$  é um polinômio de grau 1. Então, aplicando o Teorema dos zeros de Hilbert, temos que  $\langle h \rangle \subset \langle L_1, L_2 \rangle$ . O que nos conduz a equação  $h = aL_1 - bL_2$ , onde  $a, b$  são constantes não ambas nulas. Isso nos induz a estabelecermos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \Omega(l) \\ [a : b] &\longrightarrow H_{[a:b]}, \quad \text{onde } H_{[a:b]} = Z(aL_1 - bL_2). \end{aligned}$$

Observemos que  $\psi$  está bem definida pois se  $[a : b] \in \mathbb{P}^1$ , então  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ , logo  $aL_1 - bL_2$  é um polinômio de grau 1 não nulo, já que  $L_1$  e  $L_2$  são linearmente independentes. Dessa forma  $Z(aL_1 - bL_2)$  define um plano em  $\mathbb{P}^3$  contendo a reta  $l$ . Além disso, se  $[a : b] = [a' : b']$  segue que  $Z(a'L_1 - b'L_2) = Z(aL_1 - bL_2)$ . Mostrando que aplicação  $\psi$  não depende das coordenadas homogêneas dos pontos em  $\mathbb{P}^1$ . Pelo que fizemos inicialmente temos que  $\psi$  é sobrejetiva. Além disso, se  $\psi([a : b]) = \psi([c : d])$ , então  $Z(aL_1 - bL_2) = Z(cL_1 - dL_2)$ , e, novamente pelo Teorema dos zeros de Hilbert,  $\langle aL_1 - bL_2 \rangle = \langle cL_1 - dL_2 \rangle$ . Assim, como os polinômios  $aL_1 - bL_2$  e  $cL_1 - dL_2$  são não nulos e de mesmo grau, existe  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $aL_1 - bL_2 = \lambda(cL_1 - dL_2)$ . Logo

$$(a - \lambda c)L_1 + (\lambda d - b)L_2 = 0,$$

e como  $L_1$  e  $L_2$  são linearmente obtemos  $a = \lambda c$  e  $b = \lambda d$ . Portanto  $\psi$  é injetiva. ■

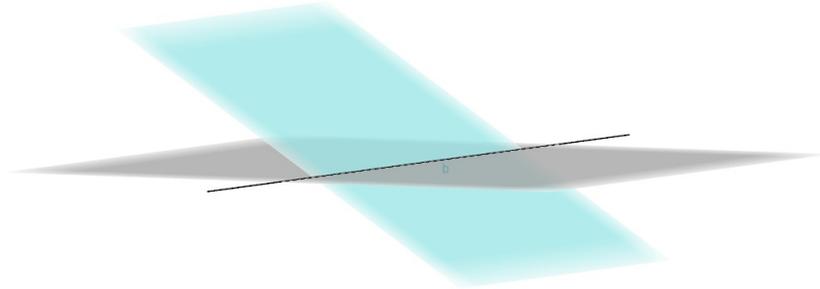


Figura 1.2: Planos de  $\Omega(l)$

Se  $l$  é uma reta contida na superfície  $S = Z(f)$ , então para cada plano  $H \in \Omega(l)$  tem-se que  $l \subset S \cap H$ . Podemos estudar a interseção  $S \cap H$  para tentar encontrar mais retas contidas na superfície  $S$ . Mostraremos adiante que essa interseção resulta na união de reta  $l$  com uma curva plana que chamaremos de curva residual.

Suponhamos que  $l$  é uma reta contida em  $S = Z(f)$ , onde  $\text{grau}(f) = d$ . Então a menos de mudança de coordenadas projetivas podemos assumir que a reta  $l$  é dada por  $l = Z(x_2, x_3)$ . Como  $l \subset Z(f)$  temos que  $f \in \langle x_2, x_3 \rangle$ . Assim podemos escrever,  $f = x_3g + x_2h$ , onde  $g, h \in \mathcal{A}$ . Podemos assumir também que  $h$  não possui a variável  $x_3$ , isto é,

$$f = x_3g + x_2h, \quad \text{onde } g \in \mathcal{A} = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3] \text{ e } h \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]. \quad (1.1)$$

Observemos também que como  $f$  é um polinômio homogêneo de grau  $d$  decorre que  $g$  e  $h$  são polinômios homogêneos, e caso não nulos, de grau  $d - 1$ .

No decorrer dessa seção iremos muitas vezes assumir que a superfície  $S = Z(f)$  contém a reta  $l = Z(x_2, x_3)$ . Logo o polinômio  $f$  pode ser escrito na configuração (1.1).

**Lema 1.2** *Suponhamos que a reta  $l$  está contida na superfície irreduzível  $S = Z(f)$ , onde  $\text{grau}(f) = d \geq 2$ , e  $H \in \Omega(l)$  um plano contendo  $l$ . Então  $H \cap S = l \cup C_H$ , sendo  $C_H$  uma curva plana de grau  $d - 1$ .*

**Demonstração:** Podemos assumir que  $l = Z(x_3, x_2)$ . Nessas condições podemos escrever  $f$  da forma (1.1). Como o plano  $H$  contém a reta  $l$ , existem  $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$  tal que  $H = Z(\alpha x_2 - \beta x_3)$ . Caso  $\beta \neq 0$  então podemos escrever  $H = Z(x_3 - ax_2)$ , onde  $a = \frac{\alpha}{\beta}$ . Logo a interseção  $H \cap S$  é dada por

$$\begin{aligned} Z(x_3 - ax_2, x_3g + x_2h) &= Z(x_3 - ax_2, ax_2g(x_0, x_1, x_2, ax_2) + x_2h) \\ &= Z(x_3 - ax_2, x_2(ag(x_0, x_1, x_2, ax_2) + h)) \\ &= l \cup Z(x_3 - ax_2, ag(x_0, x_1, x_2, ax_2) + h) \\ &= l \cup C_H, \end{aligned}$$

onde  $C_H = Z(x_3 - ax_2, a\tilde{g} + h)$ , com  $\tilde{g} = g(x_0, x_1, x_2, ax_2)$ . Notemos que  $\tilde{g}$  é obtido pela seguinte divisão

$$g = (x_3 - ax_2)q + \tilde{g}, \text{ com } q \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3].$$

Temos que  $C_H$  é a interseção do plano  $H$  com  $Z(a\tilde{g} + h)$ . Para concluir a demonstração resta mostrarmos que  $a\tilde{g} + h$  é um polinômio não nulo de grau  $d - 1$ . Como  $g$  e  $h$  são homogêneos de grau  $d - 1$ , então  $a\tilde{g} + h$  é homogêneo de grau  $d - 1$ , se  $a\tilde{g} + h \neq 0$ . Caso  $a\tilde{g} + h = 0$ , então  $h = -a\tilde{g}$ . Daí  $f = x_3g - ax_2\tilde{g}$ . Resulta disso que

$$f = x_3g - ax_2(g - q(x_3 - ax_2)) = (x_3 - ax_2)(g + ax_2q).$$

Logo  $f$  é redutível. O que é um absurdo. Concluimos assim que  $C_H$  é uma curva plana de grau  $d - 1$ . No caso em que  $\beta = 0$ , temos  $H = Z(x_2)$ . Assim  $H \cap S = Z(x_2, f) = l \cup Z(x_2, \tilde{g})$ , onde  $g = x_2q + \tilde{g}$ , com  $\tilde{g}$  homogêneo de grau  $d - 1$ . Observemos que  $\tilde{g}$  é não nulo, pois caso contrário teríamos  $g = x_2q$  o que acarretaria  $f = x_2(x_3q + h)$ . Novamente um absurdo, pois  $f$  é irreduzível. Logo  $H \cap Z(f) = l \cup C_H$ , onde  $C_H = Z(x_2, \tilde{g})$  é uma curva plana de grau  $d - 1$ . ■

Pelo que fizemos acima vemos que dada uma reta  $l$  contida numa superfície  $S = Z(f)$ , então para cada plano  $H \in \Omega(l)$  tem-se uma curva plana associada  $C_H$ . No intuito de encontrar retas contidas na superfície  $S$  podemos nos perguntar se tal

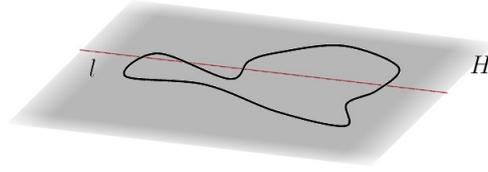


Figura 1.3: Curva  $C_H$

curva contém alguma reta. Se a resposta a essa pergunta for afirmativa, ou seja, se existe  $m \subset C_H$  uma reta, então caso  $m \neq l$  acabamos de descobrir que a superfície  $Z(f)$  contém uma segunda reta, a saber, a reta  $m$ .

No caso em que  $Z(f)$  é não singular, como já vimos assumindo, o teorema abaixo nos diz que as possíveis retas contidas em  $C_H$  são sempre distintas da reta  $l$ . A curva  $C_H$  é chamada curva residual de  $H$  em  $Z(f)$ , ou simplesmente, quando estiver claro o contexto, curva residual.

**Teorema 1.5** *Seja  $Z(f)$  uma superfície não singular de grau  $d \geq 2$  e  $l$  uma reta contida em  $Z(f)$ . Então  $l$  não é componente irredutível de  $C_H$ , onde  $H \cap Z(f) = l \cup C_H$ , para todo  $H \in \Omega(l)$ .*

**Demonstração:** Podemos assumir que  $l = Z(x_3, x_2)$ . Logo podemos escrever  $f$  na configuração (1.1). Como  $H \in \Omega(l)$ , então  $H = Z(x_3 - ax_2)$  ou  $H = Z(x_2)$ . No primeiro caso temos que  $C_H = Z(x_3 - ax_2, a\tilde{g} + h)$ , onde  $\tilde{g} = g(x_0, x_1, x_2, ax_2)$ . Suponhamos por absurdo que a reta  $l$  seja uma componente irredutível de  $C_H$ . Então  $l \subset C_H$  o que implica que  $\mathcal{I}(C_H) \subset \mathcal{I}(l)$ , e assim, pelo Teorema dos zeros de Hilbert,  $\sqrt{\langle x_3 - ax_2, a\tilde{g} + h \rangle} \subset \langle x_3, x_2 \rangle$ . Logo  $a\tilde{g} + h \in \langle x_3, x_2 \rangle$ . Dessa forma podemos escrever

$$(1) \quad a\tilde{g} + h = Ax_3 + Bx_2, \text{ onde } A, B \in \mathcal{A}.$$

Avaliando a igualdade acima em  $x_3 = 0$ , obtemos  $a\tilde{g} + h = \tilde{B}x_2$ , onde  $\tilde{B} = B(x_0, x_1, x_2, 0)$ . Derivando parcialmente a expressão de  $f$  escrita inicialmente temos que

$$\begin{cases} \partial_0 f = x_3 \partial_0 g + x_2 \partial_0 h \\ \partial_1 f = x_3 \partial_1 g + x_2 \partial_1 h \\ \partial_2 f = x_3 \partial_2 g + h + x_2 \partial_2 h \\ \partial_3 f = g + x_3 \partial_3 g. \end{cases}$$

Seja  $p \in l \cap Z(g)$ , então  $p = [x_0 : x_1 : 0 : 0]$  e  $g(p) = 0$ . Mas  $g(x_0, x_1, 0, 0) = \tilde{g}(p) = 0$ . Aplicando a equação (1) em  $p$  segue que  $h(p) = 0$ . Logo o ponto  $p$  é solução do sistema acima, ou seja,  $p \in \text{Sing}(C)$ . O que é um absurdo. Resta analisarmos o caso em que  $H = Z(x_2)$ . Nesse caso temos que  $C_H = Z(x_2, \tilde{g})$ , onde  $\tilde{g} = g(x_0, x_1, 0, x_3)$ .

Suponhamos por absurdo que  $l$  é uma componente irredutível de  $C_H$ , então, usando os mesmos argumentos iniciais, temos que  $\tilde{g} = Ax_2 + Bx_3$ , onde  $A, B \in \mathcal{A}$ . Fazendo  $x_2 = 0$  na igualdade anterior obtemos que  $\tilde{g} = \tilde{B}x_3$ , onde  $\tilde{B} = B(x_0, x_1, 0, x_3)$ . Notemos que  $\tilde{g}$  é obtido da divisão de  $g$  por  $x_2$ , ou seja,  $g = x_2q + \tilde{g}$ , onde  $\tilde{g} \in \mathcal{A}$ . Dessa forma segue que  $g = x_2q + x_3\tilde{B}$ . Assim  $l = Z(x_2, x_3) \subset Z(g)$ . Seja  $p = [x_0 : x_1 : 0 : 0] \in l \cap Z(h)$ . Logo o ponto  $\partial_i f(p) = 0$ , para todo  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Novamente um absurdo. ■

**Proposição 1.6** *Seja  $S = Z(f) \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície, onde  $f \in \mathcal{A}$  é irredutível de grau  $d \geq 3$ . Seja  $l$  uma reta contida em  $S$ . Suponhamos que  $m$  é outra reta distinta de  $l$  contida em  $S$  tal que  $l \cap m = \{p\}$ . Nessas condições temos que*

1. *Existe um único plano contendo  $l$  e  $m$ . Denotaremos tal plano por  $\langle l, m \rangle$ .*
2. *Se  $\pi = \langle l, m \rangle$ , então  $\pi \cap S = l \cup C_\pi = l \cup m \cup C'_\pi$ . Ou seja,  $C_\pi$  possui a reta  $m$  como uma de suas componentes.*

**Demonstração:** Sendo  $l$  e  $m$  retas em  $\mathbb{P}^3$  temos que  $l = \mathbb{P}(U)$  e  $m = \mathbb{P}(W)$ , onde  $U, W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ . Como  $l \cap m = \{p\}$  segue que  $\dim(U \cap W) = 1$ . Dessa forma  $V = U + W$  é um subespaço de  $\mathbb{C}^4$  de dimensão 3. Além disso,  $V$  é o menor subespaço de  $\mathbb{C}^4$  que contém  $U$  e  $W$ . Então  $\langle l, m \rangle = \mathbb{P}(V)$  é um plano em  $\mathbb{P}^3$  que contém a reta  $l$  e  $m$ . Além disso, pela construção acima, tal plano é único. O que mostra a parte 1.

Para mostrar a segunda afirmação observemos que, pelo Lema 1.2,  $\pi \cap S = l \cup C_\pi$ , onde  $\pi = \langle l, m \rangle$  e  $C_\pi$  é uma curva plana de grau  $d - 1$ . Temos que  $m \subset \pi \cap S$  e assim  $m = (m \cap l) \cup (m \cap C_\pi)$ . Como  $m \cap l = \{p\}$ , e  $m$  é irredutível, obtemos que  $m \subset C_\pi$ . Portanto  $m$  é uma componente irredutível de  $C_\pi$ . ■

Mostraremos adiante que se a superfície  $S = Z(f)$  é não singular e  $l \in R_f$  está contida no plano  $\pi$ , então mostraremos adiante que a curva residual  $C_\pi$  é reduzida. Isso nos dará mais uma ferramenta para encontrar retas em  $S$ .

**Proposição 1.7** *Seja  $S = Z(f)$  uma superfície não singular em  $\mathbb{P}^3$ , onde  $f \in \mathcal{A}$  é de grau  $d \geq 3$ , contendo uma reta  $l$ . Seja  $H \in \Omega(l)$ . Então a curva residual  $C_H$ , onde  $S \cap H = l \cup C_H$ , é reduzida.*

**Demonstração:** Novamente podemos assumir que  $l = Z(x_3, x_2)$ . Podemos escrever  $f$  da forma (1.1). Dado  $H \in \Omega(l)$  temos que  $H = Z(x_3 - \alpha x_2)$ , com  $\alpha \in \mathbb{C}$ , ou  $H = Z(x_2)$ . Suponhamos que seja  $H = Z(x_3 - \alpha x_2)$ . Dividindo  $g$  por  $x_3 - \alpha x_2$  temos  $g = (x_3 - \alpha x_2)q + \tilde{g}$ , com  $\tilde{g} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Daí

$$f = x_3((x_3 - \alpha x_2)q + \tilde{g}) + x_2h = (x_3 - \alpha x_2)(x_3q + \tilde{g}) + x_2(\alpha \tilde{g} + h),$$

$\alpha\tilde{g} + h \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  é de grau  $d - 1$ . Denotemos  $Q = x_3q + \tilde{g}$ . Dessa forma  $H \cap S = Z(x_3 - \alpha x_2, x_2(\alpha\tilde{g} + h)) = l \cup Z(x_3 - \alpha x_2, \alpha\tilde{g} + h)$ , com  $C_H = Z(x_3 - \alpha x_2, \alpha\tilde{g} + h)$ . No plano  $H$  a curva  $C_H$  é simplesmente  $C_H = Z(\alpha\tilde{g} + h)$ . Lembremos que  $\alpha\tilde{g} + h \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Suponhamos por absurdo que  $C_H$  não é reduzida, ou seja  $\alpha\tilde{g} + h = R^2P$ , sendo  $R, P \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  com  $R$  irredutível. Assim  $f = (x_3 - \alpha x_2)Q + x_2R^2P$ . E assim

$$\begin{cases} \partial_0 f = (x_3 - \alpha x_2)\partial_0 Q + x_2\partial_0(R^2P) \\ \partial_1 f = (x_3 - \alpha x_2)\partial_1 Q + x_2\partial_1(R^2P) \\ \partial_2 f = -\alpha Q + (x_3 - \alpha x_2)\partial_2 Q + R^2P + x_2\partial_2(R^2P) \\ \partial_3 f = Q + (x_3 - \alpha x_2)\partial_3 Q. \end{cases}$$

Notemos que todas as derivadas  $\partial_i(R^2P)$ , com  $0 \leq i \leq 2$ , são múltiplos de  $R$ . Consideremos agora o conjunto  $C_1 = Z(x_3 - \alpha x_2, Q, R)$ . Observemos pelas equações acima que  $C_1 \subset \text{Sing}(S)$ . Podemos escrever  $Q = (x_3 - \alpha x_2)q_1 + \tilde{Q}$ , com  $\tilde{Q} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Assim  $C_1 = Z(x_3 - \alpha x_2, \tilde{Q}, R)$ . Se for  $\tilde{Q} = 0$ , então  $C_1 = Z(x_3 - \alpha x_2, R) \neq \emptyset$ . Caso  $\tilde{Q} \neq 0$ , então  $Z(R)$  e  $Z(\tilde{Q})$  definem curvas planas em  $H$ . Pelo Teorema de Bézout segue que  $C_1 = H \cap Z(\tilde{Q}, R) \neq \emptyset$ . Em todo caso chegamos a conclusão que  $\text{Sing}(S) \neq \emptyset$ . O que contraria a nossa hipótese. O caso em que  $H = Z(x_2)$  é feito de modo análogo ao anterior.  $\blacksquare$

No caso em que  $Z(f)$  é uma superfície não singular de grau 3 em  $\mathbb{P}^3$  contendo uma reta  $l$  segue pelo que fizemos até agora que a curva residual  $C_H$ , onde  $H \in \Omega(l)$ , é uma curva plana reduzida de grau 2. Com esse contexto em mente relembremos a classificação das quádras em  $\mathbb{P}^2$  ( ver Teorema 1.3) nos diz que toda cônica é projetivamente equivalente a  $C_0 = Z(x_0^2)$ ,  $C_1 = Z(x_0^2 + x_1^2)$  ou  $C_2 = Z(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$ . Sendo  $C_1$  a única que é reduzida e singular e corresponde a união de duas retas. Assim, se  $\text{grau}(f) = 3$  temos que  $C_H$  contém uma reta, a qual corresponde a uma componente irredutível, se, e somente se,  $C_H$  é singular. De modo geral se  $C_H$  contém uma reta como componente, então  $C_H$  é singular.

Seja  $l = Z(L_1, L_2)$  uma reta contida na superfície  $Z(f)$  em  $\mathbb{P}^3$ . Temos a bijeção  $\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \Omega(l)$ , onde  $\psi([a : b]) = H_{[a:b]} = Z(aL_1 - bL_2)$ . Escrevendo  $C_{[a:b]}$  para a curva residual  $H_{[a:b]} \cap Z(f) = l \cup C_{[a:b]}$  temos que a aplicação  $\psi$  induz assim uma família de curvas planas  $\{C_{[a:b]}\}_{[a:b] \in \mathbb{P}^1}$  contidas em  $Z(f)$ . Pelo que vimos até agora para que a curva  $C_{[a:b]}$  contenha uma reta é necessário que essa seja uma curva singular.

Definamos  $\Sigma = \{[a : b] \in \mathbb{P}^1 : C_{[a:b]} \text{ é singular}\}$ . Uma pergunta que temos interesse no momento é descobrir sob quais hipóteses se pode garantir que a cardinalidade do conjunto  $\Sigma$  é finito.

Através de uma mudança de coordenadas projetivas, podemos supor, como já vimos

fazendo, que a reta  $l \subset S$  é dada por  $l = Z(x_2, x_3)$ , com  $S$  não singular. Vamos continuar com a escrita de  $f$  na forma (1.1). Com essa escrita as derivadas parciais de  $f$  são:

$$\begin{cases} \partial_0 f = x_3 \partial_0 g + x_2 \partial_0 h \\ \partial_1 f = x_3 \partial_1 g + x_2 \partial_1 h \\ \partial_2 f = x_3 \partial_2 g + h + x_2 \partial_2 h \\ \partial_3 f = g + x_3 \partial_3 g. \end{cases}$$

Então, dado  $p \in l$ , como  $S$  é não singular, o sistema anterior nos mostra que  $h(p) \neq 0$  ou  $g(p) \neq 0$ . Logo o plano tangente  $\mathbb{T}_p S = Z(\sum_0^3 \partial_i f(p) x_i)$  em um ponto  $p \in l$  é simplesmente dado por  $\mathbb{T}_p S = Z(h(p)x_2 + g(p)x_3) = \psi([h(p) : -g(p)])$ .

**Proposição 1.8** *Com as mesmas notações e hipótese acima. Verifica-se que:*

1. Se  $p \in l$  e  $H = \mathbb{T}_p S$ , então  $p \in C_H$ , onde  $C_H$  é a curva residual do plano  $H$ .
2. Se  $H \in \Omega(l)$  e  $x \in C_H - l$ , então  $H = \langle l, x \rangle$  é o único plano que contém a reta  $l$  e o ponto  $x$ , com  $H \cap S = l \cup C_H$ .
3. Se  $H \in \Omega(l)$  e  $p \in C_H \cap l$ , então  $H = \mathbb{T}_p S$ .

**Demonstração:**

1. Como  $p \in l$  temos que  $H = \mathbb{T}_p S = Z(h(p)x_2 + g(p)x_3)$ , com  $h(p) \neq 0$  ou  $g(p) \neq 0$ . Se  $g(p) \neq 0$ , então  $H = Z(x_3 + \frac{h(p)}{g(p)}x_2)$  e assim a equação de  $C_H$ , no plano  $H$ , é dada por  $C_H = Z(-\frac{h(p)}{g(p)}\tilde{g} + h)$ , onde  $\tilde{g}$  é obtido da divisão de  $g$  por  $x_3 + \frac{h(p)}{g(p)}x_2$ . Agora  $p \in C_H$ , se, e somente se,

$$-\frac{h(p)}{g(p)}\tilde{g}(p) + h(p) = 0 \Leftrightarrow h(p)(-\tilde{g}(p) + g(p)) = 0.$$

Mas como  $p \in \mathbb{T}_p S$ , segue que  $g(p) = \tilde{g}(p)$ . O que mostra que a última igualdade acima é verdadeira. Portanto  $p \in C_H$ . Caso seja  $g(p) = 0$ , então  $H = Z(x_2)$  e  $C_H = Z(\tilde{g})$ , onde  $\tilde{g}$  é obtido da divisão de  $g$  por  $x_2$ . Mas nesse caso também temos que  $g(p) = \tilde{g}(p)$ , e como  $g(p) = 0$ , segue que  $p \in C_H$ .

2. Segue diretamente do fato que dado uma reta e um ponto que não pertence a essa reta, existe um único plano que contém a reta e esse ponto.
3. Dado  $p \in l \cap C_H$ , tem-se que  $\mathbb{T}_p S = Z(h(p)x_2 + g(p)x_3) = \psi([h(p) : -g(p)])$ , e, por 1,  $p \in C_p$ , com  $\mathbb{T}_p S \cap S = l \cup C_p$ . Se  $g(p) \neq 0$ , então  $\mathbb{T}_p S = Z(x_3 + \frac{h(p)}{g(p)}x_2)$  e  $C_p = Z(-\frac{h(p)}{g(p)}\tilde{g} + h)$ , onde  $\tilde{g}$  é obtido da divisão de  $g$  por  $x_3 + \frac{h(p)}{g(p)}x_2$ . Por outro lado, como  $H \in \Omega(l)$ , temos que  $H = Z(ax_2 - bx_3) = \psi([a : b])$ .

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

Suponhamos que  $b \neq 0$  então  $H = Z(x_3 - \alpha x_2)$ , com  $\alpha = \frac{a}{b}$ , e  $C_H = Z(\alpha \hat{g} + h)$ , onde  $\hat{g}$  é obtido da divisão de  $g$  por  $x_3 - \alpha x_2$ . Como o ponto  $p \in l$ , então  $p = [p_0 : p_1 : 0 : 0]$  e assim  $g(p) = \hat{g}(p)$ . Assim  $\alpha g(p) + h(p) = 0$ , pois  $p \in C_H$ . Isso mostra que  $[\alpha : 1] = [h(p) : -g(p)]$ , ou seja,  $[a : b] = [h(p) : -g(p)]$ . Logo  $[a : b] = [h(p) : -g(p)]$ . Portanto  $H = \psi([a : b]) = \psi([h(p) : -g(p)]) = \mathbb{T}_p S$ . No caso em que  $b = 0$ , então  $H = Z(x_2)$ . E assim  $C_H = Z(\tilde{g})$ , onde  $\tilde{g}$  é obtido pela divisão de  $g$  por  $x_2$ . Como  $p \in C_H$  temos que  $\tilde{g}(p) = 0$ . Mas  $\tilde{g}(p) = g(p)$ . Daí obtemos que  $g(p) = 0$ . O que é um absurdo, pois estamos assumindo que  $g(p) \neq 0$ . O caso em que  $g(p) = 0$  é feito de modo análogo. ■

Seja  $l = Z(L_1, L_2) \subset S$ , onde  $S = Z(f)$  é não singular. Temos a bijeção  $\psi_l : \mathbb{P}^1 \rightarrow \Omega(l)$ . Além disso, para cada ponto  $p \in S$  temos um plano associado dado por  $H = \langle l, p \rangle$ , se  $p \in S - l$ , ou  $H = \mathbb{T}_p S$ , se  $p \in l \cap S$ . Formalmente temos a aplicação  $\sigma_l : S \rightarrow \Omega(l)$ ,  $\sigma_l(p) = \langle l, p \rangle$ , se  $p \notin l$ , ou  $\sigma_l(p) = \mathbb{T}_p S$ , se  $p \in l$ . Logo podemos considerar a composição  $\pi_l = \psi_l^{-1} \circ \sigma_l$ .

**Definição 1.3** *Seja  $l$  uma reta contida na superfície não singular  $S \subset \mathbb{P}^3$ . Com as mesmas notações acima, definimos  $\pi_l : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ , como a aplicação composição  $\pi_l = \psi_l^{-1} \circ \sigma_l$ .*

Através de uma mudança de coordenadas projetivas podemos assumir que a reta  $l$  é dada por  $l = Z(x_2, x_3)$ . Continuando com a escrita de  $f$  da forma (1.1). Segue que se  $p = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in S - l$ , então  $H = \langle l, p \rangle$  é dado por  $H = Z(a_3 x_2 - a_2 x_3) = \sigma(p)$ . Logo  $\psi^{-1}(H) = [a_3 : a_2]$ . Se  $p \in l$ , então  $H = \mathbb{T}_p S = Z(h(p)x_2 + g(p)x_3)$ . Logo  $\psi^{-1}(H) = [h(p) : -g(p)]$ . Dessa forma,

$$\pi_l(p) = \begin{cases} [a_3 : a_2] & , \text{ se } p \in S - l \\ [h(p) : -g(p)] & , \text{ se } p \in l. \end{cases}$$

**Proposição 1.9** *Com as mesmas notações e hipóteses acima. Temos  $\pi_l^{-1}(b) = C_b$ , sendo  $C_b$  a curva residual do plano  $H_b$ , onde  $b = [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$ .*

**Demonstração:** Seja  $b = [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$ . Então a pré-imagem de  $b$  é dada por

$$\pi_l^{-1}(b) = \{x \in S : \pi_l(x) = b\} = \{x \in S - l : \pi_l(x) = b\} \cup \{x \in l : \pi_l(x) = b\}.$$

Vamos inicialmente mostrar a inclusão  $\pi_l^{-1}(b) \subset C_b$ . Suponhamos que  $\beta \neq 0$ . Notemos que se  $x \in S - l$  e  $\pi_l(x) = b$ . Então, escrevendo  $x = [a_0 : a_1 : a_2 : a_2]$ , temos que  $\pi_l(x) = b$ , então  $[a_3 : a_2] = b = [\alpha : \beta]$ . Dessa forma podemos assumir que  $b = [a_3 : a_2]$ ,

onde  $a_2 \neq 0$ . Logo o plano  $H_b$  é dado por  $H_b = Z(x_3 - \frac{a_3}{a_2}x_2)$ , e assim a curva residual é  $C_H = Z(\frac{a_3}{a_2}\tilde{g} + h)$ , onde  $\tilde{g}$  é obtido da divisão de  $g$  por  $x_3 - \frac{a_3}{a_2}x_2$ . Observemos que como  $x \in H$ , então  $g(x) = \tilde{g}(x)$ . Agora  $x \in C_H$  se, e somente se,  $\frac{a_3}{a_2}\tilde{g}(x) + h(x) = 0$  se, e somente se  $a_3g(x) + a_2h(x) = 0$ . O que é verdade já que  $x \in S$ . Se  $x \in l$  e  $\pi_l(x) = b$ , então  $\pi_l(x) = [h(x) : -g(x)] = b$ . Logo que  $b = [h(x) : -g(x)]$  e  $g(x) \neq 0$ . Assim  $H_b = Z(x_3 + \frac{h(x)}{g(x)}x_2)$  e  $C_H = Z(-\frac{h(x)}{g(x)}\tilde{g} + h)$ , onde  $\tilde{g}$  é obtido da divisão de  $g$  por  $x_3 + \frac{h(x)}{g(x)}x_2$ . Desde que  $x \in H_b$ , segue que  $g(x) = \tilde{g}(x)$ . Agora  $x \in C_H$  se  $-\frac{h(x)}{g(x)}\tilde{g}(x) + h(x) = 0$ . O que é verdade. Portanto  $\pi_l^{-1}(b) \subset C_b$ .

Para mostrar que  $C_b \subset \pi_l^{-1}(b)$  basta observar que  $C_b$  é a curva residual do plano  $H_b$ , ou seja,  $H_b \cap S = l \cup C_b$ , com  $b = [\alpha : \beta]$ . E assim, dado  $x \in C_b - l$ , então, pela Proposição 1.8,  $H_b = \langle l, x \rangle = Z(a_3x_2 - a_2x_3)$ , onde  $x = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$ . Daí  $Z(\alpha x_2 - \beta x_3) = Z(a_3x_2 - a_2x_3)$ . Logo  $\pi_l(x) = [a_3 : a_2] = [\alpha : \beta] = b$ . Se  $x \in C_b \cap l$ , então, novamente pela Proposição 1.8,  $H_b = \mathbb{T}_x S$ , e assim  $\pi_l(x) = b$ . Concluímos assim que  $C_b \subset \pi_l^{-1}(b)$ . ■

Por tudo o que fizemos até agora mostramos que se  $S \subset \mathbb{P}^3$  é uma superfície não singular de grau  $d \geq 3$  contendo a reta  $l$ , temos que, pela Proposição 1.9,  $\pi_l : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  é um morfismo.

O teorema a seguir é bastante geral e sua demonstração está fora do nosso alcance no momento, mas sua utilidade é crucial.

**Teorema 1.6** *Seja  $\psi : X \rightarrow Y$  um morfismo de variedades algébricas sobre um corpo algebricamente fechado  $K$  de característica 0, e suponhamos que  $X$  é não singular. Então existe um aberto não vazio  $V \subset Y$  tal que  $\psi : \psi^{-1}(V) \rightarrow V$  é suave.*

**Demonstração:** Ver [9] Cor. 10.7, pág. 272 . ■

**Corolário 1.3** *Com as mesmas notações estabelecidas acima. Existe um aberto não vazio  $V \subset \mathbb{P}^1$  tal que  $\pi_l : \pi_l^{-1}(V) \rightarrow V$  é suave.*

O complementar do aberto  $V$  em  $\mathbb{P}^1$  é um fechado diferente de  $\mathbb{P}^1$ , ou seja, é a união finita de pontos. Em particular, pela suavidade de  $\pi_l$  em  $V$ ,  $\pi_l^{-1}(b) = C_b$  é singular apenas para uma quantidade finita de pontos  $b \in \mathbb{P}^1$ . Formalmente:

**Corolário 1.4** *Com as mesmas notações acima temos que  $C_b$  é singular apenas para uma quantidade finita de pontos  $b \in \mathbb{P}^1$ , sendo  $C_b$  a curva residual de  $H_b$  em  $S$ .*

Logo  $\Sigma = \{[a : b] \in \mathbb{P}^1 : C_{[a:b]} \text{ é singular} \}$  é finito. Ou seja, existe apenas uma quantidade finita de planos  $H_b \in \Omega(l)$  tal que  $C_b$  é redutível. Dessa forma, mostramos que a quantidade de curvas  $C_b$  que contém uma reta  $m$  como uma de suas componentes é finita.

## 1. Retas em superfícies em $\mathbb{P}^3$

---

No caso em que a superfície  $S = Z(f)$  é não singular de grau 4 e contém a reta  $l$ , segue que as fibras singulares do morfismo  $\pi_l : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  são curvas planas reduzidas singulares de grau 3. A menos de mudanças de coordenadas projetivas (ver [1] Prop.B.3 e Prop.B.4) tais fibras possuem equação dada por :

Tipo	$C = Z(f)$	Tipo	$C = Z(f)$
$I_1$	$C = Z(x_2x_1^2 - x_0^2(x_0 + x_2))$	$II$	$C = Z(x_1^3 - x_0x_2^2)$
$I_2$	$C = Z((x_2^2 - x_0x_1)x_2)$	$III$	$C = Z(x_0(x_2^2 - x_0x_1))$
$I_3$	$C = Z(x_0x_1x_2)$	$IV$	$C = Z(x_0x_1(x_0 + x_1))$

Tabela 1.1: Equações das fibras singulares

Onde estamos usando a notação  $I_1, I_2, I_3, II, III$  e  $IV$  estabelecida pelo matemático japonês Kunihiko Kodaira (1915 - 1997) para tais fibras.

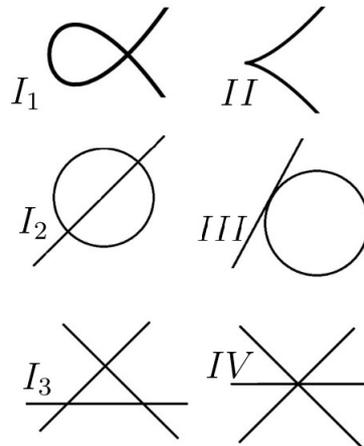


Figura 1.4: Tipos de fibras singulares.

## Capítulo 2

# A característica de Euler das fibras singulares

Nosso objetivo nesse capítulo é determinar a característica de Euler das curvas dos tipos  $I_1, I_2, I_3, II, III$  e  $IV$ . Tal estudo será fundamental para estabelecermos algumas cotas para a quantidade máxima de fibras singulares do morfismo  $\pi_l$  ( cf. Corolário 1.3) como também pelo fato de que a característica de Euler de uma superfície  $S$  contendo a reta  $l$  é calculada a partir da característica de Euler da fibra genérica e das fibras singulares de  $\pi_l$ .

Salientamos que o cálculo de tais características será realizado usando propriedades da característica de Euler e a técnica do blow up. De fato, o blow up será usado apenas para calcular a característica de Euler de uma curva, mas iremos desenvolver essa teoria com mais detalhes, no apêndice, em vista que sua relevância ultrapassa os limites desse trabalho.

### 2.1 A característica de Euler: Propriedades básicas e alguns cálculos simples

Enquanto *Leonhard Paul Euler* (1707-1783) estudava poliedros ele notou que o número  $V - A + F$ , onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces, seguia um interessante padrão. Mais explicitamente, para aqueles poliedros que eram "homeomorfos" a esfera  $S^2$  tem-se que o número  $V - A + F$  é sempre 2. O número  $V - A + F$  é chamado de característica de Euler de um poliedro.

Posteriormente ocorreram diversas generalizações do conceito de "característica de Euler". Com o desenvolvimento da topologia notou-se que tal número, além de ser um invariante topológico, conectava diversos fatos inesperados, como por exemplo o teorema de Gauss-Bonnet

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R)$$

em geometria diferencial (ver [2]), que mostra que a característica de Euler de uma região  $R$  numa superfície  $S$ ,  $\chi(R)$ , está conectada com a soma das integrais das curvaturas geodésicas da fronteira de  $R$  nos arcos regulares  $C_i$ , da integral na região  $R$  da curvatura gaussiana  $K$ , mais a soma dos ângulos externos  $\theta_j$  dos arcos regulares  $C_i$ .

De modo geral a característica de Euler é uma função  $\chi$  que associa a uma classe de espaços topológicos um número inteiro.

Por exemplo no conjunto  $\{P \subset \mathbb{R}^3 : P \text{ é um poliedro}\}$  a característica de Euler é definida por  $\chi(P) = V - A + F$ . Já na coleção

$$\{S \subset \mathbb{R}^3 : S \text{ é uma superfície compacta orientável em } \mathbb{R}^3\},$$

a característica de Euler é dada por  $\chi(S) = 2 - 2g$ , onde  $g$  é o gênero da superfície  $S$ , ou seja é o número de "buracos" de  $S$ . Além disso, se  $\chi(S) = \chi(S')$ , então  $S$  e  $S'$  são homeomorfas, esse é de fato um teorema de classificação, ver Proposição 4 pág. 327 em [2].

Não temos a pretensão aqui de estabelecer toda a teoria necessária para definir a característica de Euler para um conjunto algébrico projetivo qualquer. Na realidade as definições gerais sobre característica de Euler nesse contexto, bem como suas propriedades e resultados, estão fora do nosso alcance. Nos contentaremos em dar definições para alguns casos e em utilizarmos propriedades para calcular algumas características de Euler de curvas que serão ferramentas importantes para alcançarmos os objetivos almejados.

O nosso maior interesse é calcular a característica de Euler de curvas planas e de superfícies não singulares. Com esse intuito temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.1** *Seja  $C \subset \mathbb{P}^2$  uma curva plana não singular de grau  $d$ . Então a característica de Euler de  $C$  é  $\chi(C) = 2 - 2g$ , onde  $g$  é o gênero da curva  $C$  que é dado por  $g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ .*

**Demonstração:** Ver [8] pág. 220. ■

Também temos interesse em saber como calcular a característica de Euler de uma superfície não singular  $S \subset \mathbb{P}^3$ .

**Teorema 2.2** *Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície não singular de grau  $d$ . Então*

$$\chi(S) = d^3 - 4d^2 + 6d.$$

**Demonstração:** Ver pág. 64 em [4]. ■

**Exemplo 2.1** *Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  é uma superfície não singular de grau  $d$ . Se  $d = 3$ , então  $\chi(S) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = 9$ . Se  $d = 4$ , então  $\chi(S) = 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 = 24$ .*

Iremos precisar calcular a característica de Euler em alguns exemplos que não podem ser aplicadas as fórmulas dos teoremas 2.1 e 2.2. Por isso, além dos teoremas anteriores também utilizaremos várias propriedades da característica de Euler.

**Proposição 2.1** *Seja  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. A característica de Euler  $\chi$  é unicamente determinada pelas seguintes propriedades:*

1. (Normalização)  $\chi(p) = 1, p \in X$ .
2. (Invariância topológica) Se  $X$  e  $Y$  são homeomorfos, então  $\chi(X) = \chi(Y)$ .
3. (Propriedades da invariância homotópica) Se  $X$  e  $Y$  são compactos e homotopicamente equivalentes, então  $\chi(X) = \chi(Y)$ .
4. (Multiplicativa)  $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$
5. (Excisão) Se  $F \subset X$  é fechado, então  $\chi(X) = \chi(F) + \chi(X - F)$ .

**Demonstração:** Ver [13]. ■

A partir da propriedade 5 podemos extrair uma importante fórmula:

**Proposição 2.2** *Sejam  $F_1, F_2 \subset X$  fechados tais que  $X = F_1 \cup F_2$ . Então*

$$\chi(X) = \chi(F_1) + \chi(F_2) - \chi(F_1 \cap F_2).$$

**Demonstração:** Desde que  $F_1$  é fechado segue que  $\chi(X) = \chi(F_1) + \chi(X - F_1)$ . Mas  $X - F_1 = F_2 - F_1 \cap F_2$ . Como  $F_1 \cap F_2$  é fechado em  $F_2$ . Temos também que  $\chi(F_2) = \chi(F_1 \cap F_2) + \chi(F_2 - F_1 \cap F_2)$ . Logo  $\chi(X - F_1) = \chi(F_2 - F_1 \cap F_2) = \chi(F_2) - \chi(F_1 \cap F_2)$ . Assim

$$\chi(X) = \chi(F_1) + \chi(F_2) - \chi(F_1 \cap F_2).$$
■

**Corolário 2.1** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  um fechado tal que  $X = F_1 \cup \dots \cup F_k$ , onde  $F_1, \dots, F_k$  são fechados, com  $F_i \cap F_j = \emptyset$ , se  $i \neq j$ . Então  $\chi(X) = \sum_{i=1}^k \chi(F_i)$ .*

A característica de Euler de uma superfície será uma ferramenta importante para fazermos estimativas do número de fibras singulares do morfismo  $\pi_l : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ , onde  $S$  é uma superfície não singular contendo uma reta  $l$ .

O teorema abaixo será muito importante neste trabalho.

**Teorema 2.3** *Seja  $M$  uma superfície não singular e  $f : M \longrightarrow B$  um morfismo sobrejetivo, onde  $B$  é uma curva. Sendo  $C_i = f^{-1}(p_i)$  as fibras singulares de  $f$ , então*

$$\chi(M) = \chi(B) \cdot \chi(C) + \sum_i (\chi(C_i) - \chi(C)),$$

onde  $\chi(C)$  é a característica de Euler da fibra genérica  $C$  do morfismo  $f$ .

**Demonstração:** Ver páginas 509 e 510 em [8]. ■

**Corolário 2.2** *Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície não singular de grau  $d$  contendo uma reta  $l$ . Seja  $\pi_l : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$  o morfismo da Definição (1.3). Sendo  $C_i = \pi_l^{-1}(p_i)$  as fibras singulares de  $\pi_l$ , então*

$$\chi(S) = 2\chi(C) + \sum_i (\chi(C_i) - \chi(C)),$$

onde  $\chi(C)$  é a característica de Euler da fibra genérica  $C$  do morfismo  $\pi_l$ .

**Demonstração:** Basta usar o Teorema 2.3 e notar que como  $\mathbb{P}^1$  é uma curva não singular de grau 1, então  $\chi(\mathbb{P}^1) = 2$ , pelo Teorema 2.1. ■

**Observação 2.1** *Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície não singular de grau  $d$  contendo uma reta  $l$ .*

*Se o grau de  $S$  é 3, então a fibra genérica  $C$  do morfismo  $\pi_l$  é simplesmente uma cônica, e assim  $\chi(C) = 2$ . Além disso, as fibras singulares  $C_i$  são pares de retas (distintas), logo  $\chi(C_i) = 3$ . Logo*

$$\chi(S) = 2\chi(C) + \sum_i (\chi(C_i) - \chi(C)) = 4 + \#\{C_i : C_i \text{ é fibra singular de } \pi_l\}.$$

*Por outro lado, a característica de Euler de  $S$  é  $\chi(S) = 9$ , ver Exemplo 2.1. Logo*

$$\#\{C_i : C_i \text{ é fibra singular de } \pi_l\} = 5.$$

*Na verdade esse fato é uma ferramenta importante para se mostrar que toda superfície cúbica não singular contém 27 retas.*

*No caso em que o grau de  $S$  é 4, então a fibra genérica  $C$  de  $\pi_l$  é uma cúbica plana não singular. Logo o gênero de  $C$  é 1, e assim  $\chi(C) = 0$ . Portanto*

$$\chi(S) = 2\chi(C) + \sum_i (\chi(C_i) - \chi(C)) = \sum_i \chi(C_i),$$

onde  $C_i$  são as fibras singulares de  $\pi_l$ . Sendo  $\chi(S) = 24$  (ver Exemplo 2.1), obtemos a

*importante relação*

$$24 = \sum_i \chi(C_i). \quad (2.1)$$

Assim tanto no caso de grau 3, como também em grau 4, a quantidade de fibras singulares do morfismo  $\pi_l$  é sempre não vazia.

## 2.2 Cálculo da característica de Euler das fibras singulares do morfismo $\pi_l$

Nesta seção iremos fazer os cálculos das característica de Euler das fibras singulares do morfismo  $\pi_l$ .

**Exemplo 2.2** *Seja  $C = Z(x_0x_1(x_0+x_1))$  uma curva do tipo IV. Então  $C = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ , onde  $l_1 = Z(x_0)$ ,  $l_2 = Z(x_1)$  e  $l_3 = Z(x_0 + x_1)$ . O único ponto singular de  $C$  é o ponto  $q = [0 : 0 : 1]$ , e  $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \{q\}$ . Temos assim que  $(l_1 - \{q\}) \cup (l_2 - \{q\}) \cup l_3 = C$ . Além disso, tal união é disjunta. Logo  $\chi(C) = \chi(l_1 - \{q\}) + \chi(l_2 - \{q\}) + \chi(l_3) = \sum_{i=1}^3 \chi(l_i) - 2\chi(\{q\})$ . Como cada reta é uma curva plana não singular de grau 1 segue, pelo Teorema 2.1, que  $\chi(l_i) = 2$ . Desde que  $\chi(\{q\}) = 1$ , concluímos que  $\chi(C) = 4$ .*

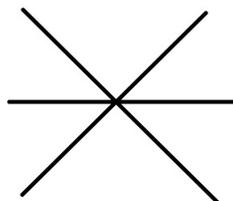


Figura 2.1: Fibra do tipo IV.

**Exemplo 2.3** *Seja  $C$  uma curva do tipo  $I_2$ . Então  $C = C_1 \cup l_1$ , onde  $C_1$  é uma cônica não singular e  $l_1$  é uma reta intersectando  $C_1$  em dois pontos distintos  $q_1, q_2$ . O complementar de  $C_1$  em  $C$  é  $l_1 - \{q_1, q_2\}$ . Logo  $C = (l_1 - \{q_1, q_2\}) \cup C_1$ . Assim  $\chi(C) = \chi(l_1 - \{q_1, q_2\}) + \chi(C_1) = \chi(l_1) + \chi(C_1) - 2$ . Como  $l_1$  e  $C_1$  são curvas planas não singulares de grau 1 e 2, respectivamente, aplicando o Teorema 2.1, obtemos que  $\chi(l_1) = \chi(C_1) = 2$ . Portanto  $\chi(C) = 2$ .*

Procedendo de modo análogo ao que fizemos nos exemplos acima vemos que se  $C$  é uma curva do tipo III, então  $\chi(C) = 3$ , e se  $C$  é uma curva do tipo  $I_3$ , então  $\chi(C) = 3$ .

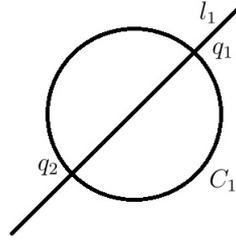


Figura 2.2: Fibra do tipo  $I_2$ .

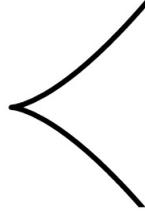


Figura 2.3: Fibra do tipo  $II$ .

**Exemplo 2.4** Seja  $C = Z(x_2^2x_0 - x_1^3) \subset \mathbb{P}^2$  uma curva plana do tipo  $II$ .

Seja  $f = x_2^2x_0 - x_1^3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Então  $C = Z(f)$ . As derivadas parciais de  $f$  são  $\partial_0 f = x_2^2$ ,  $\partial_1 f = -3x_1^2$  e  $\partial_2 f = 2x_2x_0$ . Logo  $\text{Sing}(C) = \{[1 : 0 : 0]\}$ . Fazendo  $x_0 = 1$  em  $f$ , ou seja, intersectando  $C$  com o aberto  $U_0$  de  $\mathbb{P}^2$ , obtemos a curva plana afim  $D = Z(x_2^2 - x_1^3) \subset \mathbb{A}^2$ . A aplicação

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{A}^1 &\longrightarrow D \\ t &\longmapsto (t^2, t^3), \end{aligned}$$

é um morfismo sobrejetivo. De fato,  $\theta$  define um isomorfismo de  $\mathbb{A}^1 - \{0\}$  em  $D - \{(0, 0)\}$ . Portanto  $\chi(\mathbb{A}^1) = \chi(D)$ . Notemos que  $\mathbb{P}^1 = V_0 \cup \{[0 : 1]\}$ , onde  $V_0 = \{[a : b] \in \mathbb{P}^1 : a \neq 0\}$ . Disso resulta que  $\chi(\mathbb{P}^1) = \chi(V_0) + \chi(\{[0 : 1]\})$ . Como  $V_0$  é homeomorfo a  $\mathbb{A}^1$  segue que  $\chi(\mathbb{A}^1) = \chi(\mathbb{P}^1) - \chi(\{[0 : 0 : 1]\}) = 2 - 1 = 1$ . Assim  $\chi(D) = 1$ . Desde que  $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup Z(x_0)$  segue que  $C = (C \cap U_0) \cup (C \cap Z(x_0)) = (C \cap U_0) \cup \{[0 : 0 : 1]\}$ , e além disso tal união é disjunta. Como  $D \cong (C \cap U_0)$ . Concluimos que  $\chi(C) = \chi(D) + \chi(\{[0 : 0 : 1]\}) = 2$ .

**Exemplo 2.5** Seja  $C = Z(g)$ , onde  $g = x_2x_1^2 - x_0^2(x_0 + x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ , uma curva do tipo  $I_1$ .

Para encontrar os pontos singulares de  $C$  devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \partial_0 g = -x_0(3x_0 + 2x_2) = 0, \\ \partial_1 g = 2x_2x_1 = 0, \\ \partial_2 g = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = 0. \end{cases}$$

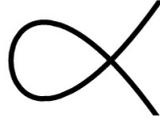


Figura 2.4: Fibra do tipo  $I_1$ .

Pela terceira equação devemos ter  $x_1 = x_0$  ou  $x_1 = -x_0$ . Suponhamos que seja  $x_1 = x_0$ . Se  $x_1 \neq 0$ , então, pela segunda equação, segue que  $x_2 = 0$ . Mas, nessas condições, a primeira equação nos mostra que  $x_0 = 0$ . O que contraria  $x_1 \neq 0$ , já que  $x_0 = x_1$ . Dessa forma devemos ter  $x_1 = 0$ . Mostrando que o ponto  $q = [0 : 0 : 1]$  é ponto singular de  $C$ . Agora suponhamos que  $x_1 = -x_0$ . Novamente segue da equação que devemos ter  $x_1 = 0$  ou  $x_2 = 0$ . Suponhamos que  $x_1 \neq 0$ . Então  $x_2 = 0$ , e pela primeira equação  $x_0 = 0$ . O que nos conduz a um absurdo. Logo devemos ter  $x_1 = 0$ . Concluimos assim que  $\text{Sing}(C) = \{q\}$ .

Vamos agora calcular o blow up de  $C$  no ponto  $q$ . Temos que o blow up de  $\mathbb{P}^2$  em  $q$  é

$$\text{Bl}_q \mathbb{P}^2 = \{([x_0 : x_1 : x_2], [b_1 : b_2]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 : b_2 x_0 = b_1 x_1\}.$$

Sendo  $\pi$  a projeção na primeira coordenada de  $\text{Bl}_q \mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{P}^2$ , segue que  $\tilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C - \{q\})}$ , onde  $\tilde{C} = \text{Bl}_q C$ . Agora  $\pi^{-1}(C) = \pi^{-1}(C - \{q\}) \cup (\{q\} \times \mathbb{P}^1)$ , logo

$$\pi^{-1}(C) = \tilde{C} \cup (\{q\} \times \mathbb{P}^1).$$

Seja  $(x, b) \in \pi^{-1}(C) \cap \mathbb{P}^2 \times U_0$ . Então  $x \in C$  e  $b_1 x_1 = b_2 x_0$ , com  $x = [x_0 : x_1 : x_2]$  e  $b_1 \neq 0$ . Logo  $x_2 x_1^2 - x_0^2(x_0 + x_2) = 0$  e  $x_1 = \frac{b_2}{b_1} x_0$ . Dessa forma obtemos a equação  $x_2 \left(\frac{b_2}{b_1} x_0\right)^2 - x_0^2(x_0 + x_2) = 0$ . Ou seja

$$x_0^2 \left( \left( \frac{b_2^2 - b_1^2}{b_1^2} \right) x_2 - x_0 \right) = 0.$$

Assim  $x_0 = 0$  ou  $\left(\frac{b_2^2 - b_1^2}{b_1^2}\right) x_2 - x_0 = 0$ . Se for  $x_0 = 0$ , então  $x_1 = 0$ , ou seja  $x = q$ . Encontramos assim  $\{q\} \times U_0$ . Caso  $x_0 \neq 0$ , então  $(b_2^2 - b_1^2)x_2 - b_1^2 x_0 = 0$ . Suponhamos que  $b_2^2 - b_1^2 \neq 0$ . Então  $x_2 = \frac{b_1^2}{b_2^2 - b_1^2} x_0$ . Logo  $x = [x_0 : \frac{b_2}{b_1} x_0 : \frac{b_1^2}{b_2^2 - b_1^2} x_0] = [b_1(b_2^2 - b_1^2) : b_2(b_2^2 - b_1^2) : b_1^3]$ , com  $[b_1 : b_2] \in U_0$ . Se tivermos  $b_2^2 = b_1^2$ , então  $b_2 = \pm b_1$  e assim  $b = [1 : 1]$  ou  $b = [1 : -1]$ . Em todo caso chegamos a conclusão que  $-b_1^2 x_0 = 0$ . Daí teríamos  $x_0 = 0$ . O que nos levaria a um absurdo. Logo  $(x, b) = ([b_1(b_2^2 - b_1^2) : b_2(b_2^2 - b_1^2) : b_1^3], [b_1 : b_2])$ , com  $b_1 \neq 0$ . Portanto

$$\pi^{-1}(C) \cap \mathbb{P}^2 \times U_0 = \{([b_1(b_2^2 - b_1^2) : b_2(b_2^2 - b_1^2) : b_1^3], [b_1 : b_2]) : [b_1 : b_2] \in U_0\} \cup \{q\} \times U_0.$$

## 2. A característica de Euler das fibras singulares

---

Fazendo cálculos semelhantes descobrimos que

$$\pi^{-1}(C) \cap \mathbb{P}^2 \times U_1 = \{([b_1(b_2^2 - b_1^2) : b_2(b_2^2 - b_1^2) : b_1^3], [b_1 : b_2]) : [b_1 : b_2] \in U_1\} \cup \{q\} \times U_1.$$

Dessa forma o blow up de  $C$  em  $q$  é dado por

$$\tilde{C} = \{([b_1(b_2^2 - b_1^2) : b_2(b_2^2 - b_1^2) : b_1^3], [b_1 : b_2]) : [b_1 : b_2] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Observemos que  $\tilde{C}$  é isomorfo a  $\mathbb{P}^1$ . Daí  $\chi(\tilde{C}) = \chi(\mathbb{P}^1) = 2$ . Observemos que  $\tilde{C} - \pi^{-1}(\{q\}) \cong C - \{q\}$  são isomorfos, e que a pré-imagem de  $\pi^{-1}(\{q\})$  em  $\tilde{C}$  é dada por  $\{q\} \times \mathbb{P}^1 \cap \tilde{C} = \{(q, [1 : 1]), (q, [1 : -1])\}$ . Logo  $\chi(\tilde{C} - \pi^{-1}(\{q\})) = \chi(C - \{q\})$ .

E assim

$$\begin{aligned} \chi(C) &= \chi(\tilde{C} - \pi^{-1}(\{q\})) + 1 \\ &= \chi(\tilde{C}) - \chi(\pi^{-1}(\{q\})) + 1 \\ &= \chi(\mathbb{P}^1) + 1 - \chi(\{(q, [1 : 1]), (q, [1 : -1])\}) \\ &= 2 + 1 - 2 = 1. \end{aligned}$$

Sendo  $e$  a característica de Euler, por tudo o que fizemos nos exemplos acima chegamos a conclusão que

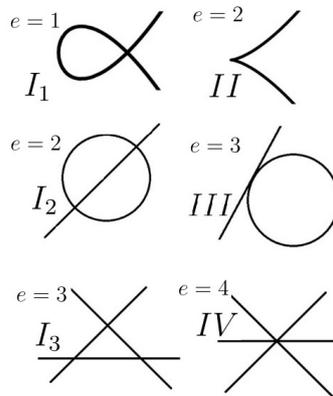


Figura 2.5: Fibras e características de Euler.

## Capítulo 3

# Contagem do número máximo de retas nas quárticas não singulares em $\mathcal{Z}^c$

Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície não singular de grau  $d \geq 4$  contendo uma reta  $l$ . Consideremos o conjunto

$$I_l = \{m \subset S : m \text{ é uma reta tal que } m \cap l \neq \emptyset \text{ e } m \neq l\}.$$

Observemos que se  $m \in I_l$  então  $H = \langle l, m \rangle$  é um dos planos de  $\Omega(l)$  (também é um plano de  $\Omega(m)$ ). Dessa forma a curva residual  $C_H$  do plano  $H = \langle l, m \rangle$  possui  $m$  como uma de suas componentes (ver Proposição 1.6).

**Definição 3.1** *Seja  $l$  uma reta contida na superfície não singular  $S$  de grau  $d \geq 4$ . Dizemos que a reta  $l$  é do primeiro tipo se existe  $H \in \Omega(l)$  tal que a curva  $C_H$  é não singular e*

$$l \cap C_H \cap \{\text{pontos de inflexão da curva } C_H\} = \emptyset.$$

*Caso contrário diremos que  $l$  é uma reta do segundo tipo.*

**Exemplo 3.1** *Consideremos a quártica de Schur  $S = Z(f) \subset \mathbb{P}^3$ , onde  $f = x_0^4 - x_0x_1^3 + x_2x_3^3 - x_2^4 \in \mathcal{A}$ . Não é difícil verificar que  $S$  é não singular. Observemos que  $l = Z(x_0, x_2)$  é uma reta contida em  $S$ , pois  $f = x_0(x_0^3 - x_1^3) + x_2(x_3^3 - x_2^3)$ . O conjunto  $\Omega(l)$  é dado por  $\Omega(l) = \{H_{[a:b]} = Z(ax_0 - bx_2) : [a : b] \in \mathbb{P}^1\}$ . Podemos escrever  $\Omega(l)$  como a união disjunta*

$$\Omega(l) = \{H_{[1:\alpha]} = Z(x_0 - \alpha x_2) : \alpha \in \mathbb{C}\} \cup \{H_\infty\}, \text{ onde } H_\infty = Z(x_2).$$

### 3. Contagem do número máximo de retas nas quárticas não singulares em $\mathcal{Z}^c$

Vamos estudar as curvas residuais dos planos de  $\Omega(l)$ . Para  $H_\infty$  temos

$$\begin{aligned} S \cap H_\infty &= Z(x_2, f) \\ &= Z(x_2, x_0(x_0^3 - x_1^3)) \\ &= Z(x_2, x_0) \cup Z(x_2, x_0^3 - x_1^3) \\ &= l \cup C_{H_\infty} \end{aligned}$$

onde  $C_{H_\infty} = Z(x_2, x_0^3 - x_1^3)$  é a curva residual no plano  $H_\infty$ . Podemos ver o plano  $H_\infty = Z(x_2)$  como o plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  nas coordenadas  $x_0, x_1$  e  $x_3$ . Assim  $C_{H_\infty}$  é simplesmente  $C_{H_\infty} = Z(x_0^3 - x_1^3)$ . Logo  $C_{H_\infty}$  é singular. Na verdade  $C_{H_\infty}$  é a união de 3 retas, com um ponto em comum, explicitamente  $C_{H_\infty} = Z(x_0 - x_1) \cup Z(x_0 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}x_1) \cup Z(x_0 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}x_1)$ . Assim  $C_{H_\infty}$  é uma curva do tipo IV. O único ponto singular de  $C_{H_\infty}$  é  $q = [0 : 0 : 1]$ . Já que  $C_{H_\infty}$  é a união de retas, segue que  $C_{H_\infty} - \{q\}$  é o conjunto de todos os pontos de inflexão de  $C_{H_\infty}$ . Além disso,  $l \cap C_{H_\infty} = \{q\}$ .

Para  $H_{[1:\alpha]} = Z(x_0 - \alpha x_2)$  temos que

$$\begin{aligned} S \cap H_{[1:\alpha]} &= Z(x_0 - \alpha x_2, f) \\ &= Z(x_0 - \alpha x_2, \alpha x_2(\alpha^3 x_2^3 - x_1^3) + x_2(x_3^3 - x_2^3)) \\ &= Z(x_0 - \alpha x_2, x_2(\alpha(\alpha^3 x_2^3 - x_1^3) + x_3^3 - x_2^3)) \\ &= l \cup Z(x_0 - \alpha x_2, \alpha(\alpha^3 x_2^3 - x_1^3) + x_3^3 - x_2^3) \\ &= l \cup C_{H_{[1:\alpha]}}, \end{aligned}$$

onde  $C_{H_{[1:\alpha]}} = Z(x_0 - \alpha x_2, -\alpha x_1^3 + (\alpha^4 - 1)x_2 + x_3^3)$ . Neste caso podemos ver o plano  $H_{[1:\alpha]}$  como o plano  $\mathbb{P}^2$  com as coordenadas  $x_1, x_2$  e  $x_3$ . Logo a curva  $C_{[1:\alpha]}$  é dada por  $C_{[1:\alpha]} = Z(-\alpha x_1^3 + (\alpha^4 - 1)x_2 + x_3^3)$ . Sendo  $f_\alpha = -\alpha x_1^3 + (\alpha^4 - 1)x_2 + x_3^3$ , segue que  $C_{[1:\alpha]} = Z(f_\alpha)$  em  $H_{[1:\alpha]}$ . Calculando as derivadas parciais de  $f_\alpha$  obtemos

$$\begin{cases} \partial_1 f_\alpha = -3\alpha x_1^2, \\ \partial_2 f_\alpha = 3(\alpha^4 - 1)x_2^2, \\ \partial_3 f_\alpha = 3x_3^2. \end{cases}$$

Logo  $C_{[1:\alpha]}$  é singular se, e somente se,  $\alpha = 0$  ou  $\alpha^4 = 1$ . Para  $\alpha = 0$  e  $\alpha^4 = 1$  temos  $f_0 = x_3^3 - x_2^3$  e  $f_\alpha = x_3^3 - \alpha x_1^3$ , respectivamente. Isso mostra que  $C_{[1:0]}$  e  $C_{[1:\alpha]}$ , onde  $\alpha$  é uma raiz quarta da unidade são cúbricas singulares. Além disso, cada uma é a união de três retas, com um ponto em comum, logo também são do tipo IV. Por tudo que fizemos até agora, chegamos a conclusão que a quantidade de fibras singulares do morfismo  $\pi_l : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  é 6 ( ver Corolário 1.3). Tais fibras são todas do tipo IV e são dadas como imagens inversas dos pontos  $\{[0 : 1], [1 : 0], [1 : 1], [1 : u], [1 : u^2], [1 : u^3]\}$ , onde  $u = e^{i\frac{\pi}{2}}$  é uma raiz primitiva quarta da unidade.

### 3. Contagem do número máximo de retas nas quárticas não singulares em $\mathbb{Z}^c$

As fibras não singulares do morfismo  $\pi_l$  são as curvas  $C_{[1:\alpha]} = Z(f_\alpha)$ , com  $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1, u, u^2, u^3\}$ . Vamos agora calcular a curva hessiana  $H_{C_{[1:\alpha]}}$  de  $C_{[1:\alpha]} = Z(f_\alpha)$ . Temos que

$$Hess(f_\alpha) = \begin{pmatrix} -6\alpha x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 6(\alpha^4 - 1)x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 6x_3 \end{pmatrix}.$$

Logo  $H_{C_{[1:\alpha]}} = Z(-6^3\alpha(\alpha^4 - 1)x_1x_2x_3) = Z(x_1x_2x_3)$ . Os pontos de inflexão de  $C_{[1:\alpha]}$  são dadas pela interseção  $H_{C_{[1:\alpha]}} \cap C_{[1:\alpha]} = Z(x_1x_2x_3, f_\alpha)$  ( ver Teorema A.1). Observemos que a reta  $l = Z(x_0, x_2)$  em  $H_{[1:\alpha]}$  é dada simplesmente por  $l = Z(x_2)$ . Logo o conjunto  $l \cap C_{[1:\alpha]} \cap \{\text{pontos de inflexão da curva } C_H\}$  é dado por

$$l \cap H_{C_{[1:\alpha]}} \cap C_{[1:\alpha]} = Z(x_2, x_1x_2x_3, f_\alpha) = Z(x_2, f_\alpha) = Z(-\alpha x_1^3 + x_3^3),$$

que é um conjunto não vazio. Portanto a reta  $l = Z(x_0, x_2)$  é do segundo tipo.

**Definição 3.2** Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície não singular de grau  $d = 4$ . Então

$$\Phi(S) = \{l \subset \mathbb{P}^3 : l \text{ é uma reta contida em } S\}.$$

A Definição 3.1 nos permite estabelecer a seguinte partição para as retas contidas em  $S$

$$\Phi(S) = \{\text{retas do primeiro tipo em } S\} \cup \{\text{retas do segundo tipo em } S\}.$$

O teorema a seguir é uma ferramenta indispensável para obter uma cota superior para a quantidade de retas numa superfície quártica não singular.

**Teorema 3.1** Seja  $l \subset S$  uma reta do primeiro tipo contida na superfície quártica não singular  $S \subset \mathbb{P}^3$ . Então  $\#I_l \leq 18$ .

**Demonstração:** Usando uma mudança de coordenadas projetivas em  $\mathbb{P}^3$ , podemos assumir que  $l = Z(x_2, x_3)$ . Desde que  $l \subset S$ , podemos assim escrever  $f$  da forma (1.1). Nesse caso temos que

$$\Omega(l) = \{H_b = Z(x_3 - bx_2) : b \in \mathbb{C}\} \cup \{H_\infty = Z(x_2)\}.$$

Consideremos  $H_b = Z(x_3 - bx_2)$ . Logo a curva residual  $C_b$  do plano  $H_b$  é dada por  $C_b = Z(f_b)$ , com  $f_b = bg_b + h$ , onde  $g_b$  é dado pela divisão de  $g$  por  $x_3 - bx_2$ , ou seja,  $g = (x_3 - bx_2)Q + g_b$  com  $g_b(x_0, x_1, x_2) = g(x_0, x_1, x_2, bx_2)$ . No plano  $H_b$  a reta

### 3. Contagem do número máximo de retas nas quárticas não singulares em $\mathcal{Z}^c$

$l = Z(x_2, x_3)$  é dada simplesmente por  $l = Z(x_2) \subset H_b$ . Logo os pontos de  $l \cap C_b$  são determinados pelos zeros do polinômio

$$q_b = f_b|_l = g_b(x_0, x_1, 0) + h(x_0, x_1, 0).$$

Observemos que  $q_b = 0$  se, e somente se,  $l \subset C_b$ . Agora segue do Teorema 1.6 que  $l \not\subset C_b$ , para todo  $b \in \mathbb{C}$ . Logo  $q_b \neq 0$ . Dessa forma temos que  $q_b$  é um polinômio homogêneo em  $\mathbb{C}[x_0, x_1]$  e  $\text{grau}(q_b) = 3$ . Olhando  $q_b$  como um polinômio na variável  $b$  verifica-se que  $\text{grau}(q_b) \leq 1$ . Seja  $H_{C_b}$  a curva hessiana de  $C_b$ ,  $H_{C_b} = Z(\tilde{h}_b)$ , onde  $\tilde{h}_b = \det(\partial_{ij}f_b)_{1 \leq i, j \leq 3}$ ,  $f_b \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Observemos que  $\tilde{h}_b$  é um polinômio homogêneo de grau 3 em  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Seja  $h_b$  a restrição de  $\tilde{h}_b$  a reta  $l$ , ou seja, a interseção de  $l$  com a curva hessiana  $H_{C_b}$  é dada pelos zeros de  $h_b$ . Sendo  $g$  um polinômio homogêneo de grau 3 em  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ , podemos escrever  $g = a_0x_3^3 + a_1x_3^2 + a_2x_3 + a_3$ , onde  $a_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  é um polinômio nulo ou homogêneo de grau  $i$ . Com essa escrita segue que  $g_b = a_0b^3x_2^3 + a_1b^2x_2^2 + a_2bx_2 + a_3$ . Logo

$$f_b = bg_b + h = a_0b^4x_2^3 + a_1b^3x_2^2 + a_2b^2x_2 + ba_3 + h.$$

Para calcularmos a curva hessiana de  $C_b$  iremos calcular as derivadas parciais de  $f_b$ . Podemos ver o plano  $H_b$  como o plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  com as coordenadas  $x_0, x_1$  e  $x_2$ . Dessa forma, calculando as derivadas parciais de 2ª ordem de  $f_b$  necessárias para determinar a curva hessiana encontramos

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{00}f_b = \partial_{00}a_2b^2x_2 + b\partial_{00}a_3 + \partial_{00}h, \\ \partial_{01}f_b = \partial_{01}a_1b^3x_2^2 + \partial_{01}a_2b^2x_2 + b\partial_{01}a_3 + \partial_{01}h, \\ \partial_{02}f_b = \partial_{02}a_1b^3x_2^2 + \partial_{02}a_2b^2x_2 + b\partial_{02}a_3 + \partial_{02}h, \\ \partial_{11}f_b = \partial_{11}a_2b^2x_2 + b\partial_{11}a_3 + \partial_{11}h, \\ \partial_{12}f_b = \partial_{12}a_1b^3x_2^2 + \partial_{12}a_2b^2x_2 + b\partial_{12}a_3 + \partial_{12}h, \\ \partial_{22}f_b = 6b^4a_0x_2 + 2a_1b^3 + 2b^3x_2\partial_2a_1 + 2b^3x_2\partial_2a_1 + b^2\partial_2a_2 + \\ \quad + b^2x_2\partial_{22}a_2 + b\partial_{22}a_3 + \partial_{22}h. \end{array} \right.$$

Dessa forma

$$h_b = \tilde{h}_b|_l = \begin{vmatrix} b\partial_{00}a'_3 + \partial_{00}h & b\partial_{01}a'_3 + \partial_{01}h & b\partial_{02}a'_3 + \partial_{02}h \\ b\partial_{01}a'_3 + \partial_{01}h & b\partial_{11}a'_3 + \partial_{11}h & b\partial_{12}a'_3 + \partial_{12}h \\ b\partial_{02}a'_3 + \partial_{02}h & b\partial_{12}a'_3 + \partial_{12}h & 2a'_1b^3 + b^2\partial_2a'_2 + b\partial_{22}a'_3 + \partial_{22}h. \end{vmatrix},$$

com  $a'_i = a_i(x_0, x_1, 0)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Observemos pelos cálculos acima que  $h_b$  é um polinômio homogêneo de grau 3 em  $\mathbb{C}[x_0, x_1]$ , se  $l \not\subset H_{C_b}$  (no caso de retas do primeiro tipo sempre existe  $b$  tal que  $l \not\subset H_{C_b}$ ). Como um polinômio na variável  $b$  segue que

### 3. Contagem do número máximo de retas nas quárticas não singulares em $\mathcal{Z}^c$

$\text{grau}(h_b) \leq 5$ . Notemos que  $q_b(p) = 0$  se, e somente se,  $p \in l \cap C_b$ , e  $h_b(p) = 0$  se, e somente se,  $p \in l \cap H_{C_b}$ . Se for  $h_b = 0$ , para todo  $b \in \mathbb{C}$ . Então  $l$  é um subconjunto de  $H_{C_b}$ , para todo  $b$ . Logo os pontos de  $l \cap C_b$  seriam pontos de inflexão, pois  $C_b$  é não singular e tais pontos pertencem a  $H_{C_b}$  (ver Teorema A.1). Mas como  $l$  é uma reta do primeiro tipo devemos ter que o conjunto

$$l \cap C_b \cap \{\text{pontos de inflexão de } C_b\} = \emptyset, \text{ para algum } b \in \mathbb{C}.$$

Assim segue que  $h_b \neq 0$  (como um polinômio em  $b$ ). Um ponto  $x = [x_0 : x_1 : x_2]$  pertence a  $l \cap C_b \cap H_{C_b}$  (ou seja,  $x$  é ponto de inflexão de  $C_b$ ) se, e somente se,  $x_2 = 0$  e  $x' = [x_0 : x_1]$  pertence a  $Z(q_b) \cap Z(h_b)$ , com  $q_b, h_b \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$  homogêneos de grau 3. Vamos procurar as soluções  $x' = [1 : x_1] \in Z(q_b, h_b)$ , ou seja, as soluções de  $q_b(1, x_1) = h_b(1, x_1) = 0$ . Podemos escrever

$$\begin{cases} q_b = \tilde{Q}_3(b)x_1^3 + \tilde{Q}_2(b)x_1^2 + \tilde{Q}_1(b)x_1 + \tilde{Q}_0(b), \\ h_b = \tilde{H}_3(b)x_1^3 + \tilde{H}_2(b)x_1^2 + \tilde{H}_1(b)x_1 + \tilde{H}_0(b), \end{cases}$$

com  $\tilde{Q}_i(b), \tilde{H}_i(b) \in \mathbb{C}[x_0]$  nulos ou de grau  $3 - i$ . Como um polinômio em  $\mathbb{C}[b]$  temos que  $\text{grau}_b(\tilde{H}_i) \leq 5$  e  $\text{grau}_b(\tilde{Q}_i) \leq 1$ . Dessa forma a resultante de  $q_b(1, x_1)$  e  $h_b(1, x_1)$  é dada por  $R_{q_b(1, x_1), h_b(1, x_1)}(x_1) = R(b)$ , onde

$$R(b) = \begin{vmatrix} \tilde{Q}_3 & \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_3 & \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q}_3 & \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_0 \\ \tilde{H}_3 & \tilde{H}_2 & \tilde{H}_1 & \tilde{H}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_3 & \tilde{H}_2 & \tilde{H}_1 & \tilde{H}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{H}_3 & \tilde{H}_2 & \tilde{H}_1 & \tilde{H}_0 \end{vmatrix}.$$

Notemos que  $R(b) = 0$  se, e somente se,  $Z(q_b(1, x_1), h_b(1, x_1)) \neq \emptyset$ , para todo  $b \in \mathbb{C}$ , se, e somente se,  $l \cap C_b \cap H_{C_b} \neq \emptyset$ . Mas desde que  $l$  é uma reta do primeiro tipo, segue que  $R(b) \in \mathbb{C}[b]$  é não nulo. Além disso, desde que  $\text{grau}_b(\tilde{H}_i) \leq 5$  e  $\text{grau}_b(\tilde{Q}_i) \leq 1$ , então  $\text{grau}_b(R(b)) \leq 18$ .

Para cada reta  $m \in I_l$ , temos que  $H = \langle l, m \rangle \in \Omega(l)$  satisfaz que  $H \cap S = l \cup C_H$ , onde  $C_H = m \cup D_H$ . A curva hessiana de  $C_H$  contém a reta  $m$  como uma de suas componentes (ver Teorema A.4). Neste caso segue que a interseção de  $l \cap m$  consiste de um ponto de inflexão.

Agora pelo que fizemos acima cada raiz de  $R(b)$  determina um plano  $H_b$  tal que  $l \cap C_b \cap H_{C_b} \neq \emptyset$ . Logo os planos  $H$  de  $\Omega(l)$  com  $H = \langle l, m \rangle$ ,  $m \in I_l$ , estão contidos nos planos  $\{H_b : b \text{ é raiz de } R(b)\}$ . Assim existem no máximo 18 planos do tipo  $H = \langle l, m \rangle$ ,

### 3. Contagem do número máximo de retas nas quárticas não singulares em $\mathcal{Z}^c$

com  $m \in I_l$ .

Com auxílio computacional chegamos a conclusão que se  $b \in \mathbb{C}$  é tal que a curva residual  $C_b$ , determinada pelo plano  $H_b$ , é a união de três retas (ou seja, é do tipo  $I_3$  ou  $IV$ ), então  $b$  é uma raiz com multiplicidade maior ou igual a 3 de  $R(b)$ .

Por tudo que fizemos até agora concluimos que  $\#I_l \leq 18$ . ■

Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície não singular de grau  $d = 4$  contendo uma reta  $l$ . Então temos as seguintes possibilidades para as fibras singulares do morfismo  $\pi_l : S \rightarrow \mathbb{P}^1$

Tipo	Característica de Euler $e$
$I_1$	$e = 1$
$I_2$	$e = 2$
$I_3$	$e = 3$
$II$	$e = 2$
$III$	$e = 3$
$IV$	$e = 4$

Tabela 3.1: Tipos e característica de Euler.

Denotemos por  $n(I_j), n(II), n(III)$  e  $n(IV)$  a cardinalidade das fibras singulares dos tipos  $I_j, II, III$  e  $IV$ , respectivamente, do morfismo  $\pi_l$ , com  $j = 1, 2, 3$ . A característica de Euler de  $S$  é 24 (ver Exemplo 2.1). Além disso, a equação (2.1) nos diz que  $24 = \sum_i \chi(C_i)$ . Juntando isso com a tabela exibida acima obtemos a importante igualdade

$$24 = n(I_1) + 2n(I_2) + 3n(I_3) + 2n(II) + 3n(III) + 4n(IV). \quad (3.1)$$

A igualdade acima nos diz que o número de fibras do morfismo  $\pi_l$  bem como a quantidade de cada tipo de fibra está conectada com a característica de Euler de  $S$ .

Assim conjunto  $I_l$  é finito. Além disso, cada  $m \in I_l$  aparece como uma componente de alguma fibra singular do morfismo  $\pi_l$ . Essas fibras podem ser apenas dos tipos  $I_2, I_3, III$  ou  $IV$ . Mas cada fibra  $C$  do tipo  $I_2$  ou  $III$  nos dá, para cada tipo, apenas uma reta  $m$  componente, com  $m \in I_l$ . De modo análogo cada fibra do tipo  $I_3$  ou  $IV$  corresponde a três retas em  $I_l$ . Dessa forma vale que

$$\#I_l = n(I_2) + n(III) + 3n(I_3) + 3n(IV). \quad (3.2)$$

**Lema 3.1** *Seja  $l \in \Phi(S)$  com  $\#I_l > 12$ . Então existem  $l_1, l_2, l_3 \in I_l$  tais que  $l, l_1, l_2, l_3$  são coplanares.*

**Demonstração:** Suponhamos por absurdo que não existem  $l_1, l_2, l_3 \in I_l$  tais que  $l, l_1, l_2, l_3$  são coplanares. Nesse caso temos que o número de fibras singulares do morfismo  $\pi_l$  dos tipos  $I_3$  ou  $IV$  é zero, ou seja,  $n(I_3) = n(IV) = 0$ . Logo pela Equação (3.2) temos que

$$\#I_l = n(I_2) + n(III) > 12.$$

Além disso, pela Equação (3.1) temos

$$24 = n(I_1) + 2n(I_2) + 3n(I_3) + 2n(II) + 3n(III) + 4n(IV).$$

Assim  $24 = n(I_1) + 2n(I_2) + 2n(II) + 3n(III)$ . Mas isso nos conduz a

$$\begin{aligned} 24 &= n(I_1) + 2n(I_2) + 2n(II) + 3n(III) \\ &\geq 2n(I_2) + 3n(III) \\ &\geq 2(n(I_2) + n(III)) \\ &> 24. \end{aligned}$$

O que é um absurdo. ■

**Lema 3.2** *Se  $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \Phi(S)$  são coplanares. Então*

$$\#\Phi(S) = \#I_{l_0} + \#I_{l_1} + \#I_{l_2} + \#I_{l_3} - 8.$$

**Demonstração:** Seja  $H = \langle l_0, l_1 \rangle$ . Como  $l_0, l_1, l_2$  e  $l_3$  são coplanares então  $l_2 \cup l_3 \subset H$ . Dessa forma  $H \cap S = l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ . Afirmamos que  $\Phi(S) = I_{l_0} \cup I_{l_1} \cup I_{l_2} \cup I_{l_3}$ . De fato, seja  $m \in \Phi(S)$ . Temos as seguintes possibilidades:  $m \subset H$  ou  $m \cap H = \{p\}$ . Caso  $m$  esteja contida em  $H$ , então  $m \subset S \cap H$ . Logo  $m \in \{l_0, l_1, l_2, l_3\}$ . Assim  $m \in I_{l_i}$ , para algum  $i = 0, 1, 2, 3$ . Caso  $m \cap H = \{p\}$ . Então, intersectando com  $S$  essa igualdade, obtemos

$$\{p\} = (m \cap l_0) \cup (m \cap l_1) \cup (m \cap l_2) \cup (m \cap l_3).$$

Logo  $p \in l_i$ , para algum  $i = 0, 1, 2, 3$ . Portanto  $m \in I_{l_i}$ , para algum  $i = 0, 1, 2, 3$ . Dessa forma concluímos que  $\Phi(S) = I_{l_0} \cup I_{l_1} \cup I_{l_2} \cup I_{l_3}$ .

Seja  $\widehat{I}_i = I_{l_i} - \{l_0, l_1, l_2, l_3\}$ , com  $i = 0, 1, 2, 3$ . Notemos que  $\#\widehat{I}_i = \#I_{l_i} - 3$ ,  $0 \leq i \leq 3$ .

Observemos que  $\widehat{I}_i \cap \widehat{I}_j = \emptyset$ , se  $i \neq j$ . De fato, suponhamos que  $l \notin \{l_0, l_1, l_2, l_3\}$  e, por exemplo,  $l \in I_{l_0} \cap I_{l_1}$ . Daí  $l \cap l_0 = \{p_0\}$  e  $l \cap l_1 = \{p_1\}$ . Se  $p_1 \neq p_2$ , então a reta  $l$  é a reta determinada por  $p_1$  e  $p_2$ . Logo  $l \subset H = \langle l_0, l_1 \rangle$ . Então  $l \subset H \cap S = l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ . O que nos conduz a um absurdo. Caso  $p_1 = p_2 = p$ , então  $l_0 \cap l_1 = \{p\}$ . Assim, como  $S$  é não singular, temos  $l \subset \mathbb{T}_p S$  e, pela Proposição 1.8,  $\mathbb{T}_p S = H = \langle l_0, l_1 \rangle$ . O que também nos leva a um absurdo.

Temos que  $\Phi(S) = \widehat{I}_{l_0} \cup \widehat{I}_{l_1} \cup \widehat{I}_{l_2} \cup \widehat{I}_{l_3} - \{l_0, l_1, l_2, l_3\}$ . Logo

$$\#\Phi(S) = \sum_{i=0}^3 \#I_{l_i} - 12 + 4 = \sum_{i=0}^3 \#I_{l_i} - 8.$$

■

A proposição a seguir será bastante importante para continuarmos o nosso estudo.

**Proposição 3.1** *Seja  $l \in \Phi(S)$  uma reta do 2º tipo. Então exatamente uma das condições ocorre:*

1. *Existem exatamente 4 fibras singulares de  $\pi_l$  que consiste de 3 retas, ou seja, 4 fibras são do tipo  $I_3$  ou  $IV$ . Nesse caso  $\#I_l = 12$ .*
2. *Existem exatamente 5 fibras singulares de  $\pi_l$  que consiste de 3 retas, ou seja, 5 fibras são do tipo  $I_3$  ou  $IV$ . Além disso,  $n(I_2) \in \{0, 1\}$ . Nesse caso  $\#I_l \in \{15, 16\}$ .*
3. *Existem exatamente 6 fibras singulares de  $\pi_l$  que consiste de 3 retas, ou seja, 6 fibras são do tipo  $I_3$  ou  $IV$ . Além disso,  $n(I_2) \in \{0, 1, 2\}$ . Nesse caso  $\#I_l \in \{18, 19, 20\}$ .*

**Demonstração:** Ver Proposição 4.1 e sua demonstração em [14].

■

**Corolário 3.1** *Seja  $l \subset S$  uma reta do segundo tipo. Então existem  $l_1, l_2, l_3 \in I_l$  tais que  $l, l_1, l_2$  e  $l_3$  são coplanares.*

**Demonstração:** Usando a Proposição 3.1 obtemos que o morfismo  $\pi_l$  possui alguma fibra do tipo  $I_3$  ou  $IV$  (na verdade possui no mínimo 4 fibras desses tipos). Seja  $l_1 \cup l_2 \cup l_3$  uma fibra do tipos  $I_3$  ou  $IV$ . Então  $l, l_1, l_2$  e  $l_3$  são coplanares.

■

**Definição 3.3** *Seja  $\mathcal{Z}$  o conjunto das superfícies quárticas não singulares  $S \subset \mathbb{P}^3$  tais que a terceira condição da Proposição 3.1 é verificada.*

Uma superfície quártica não singular  $S$  pertence a  $\mathcal{Z}$ , se existe  $l \subset S$  reta do segundo tipo tal que  $\pi_l$  possui exatamente 6 fibras singulares que consiste de 3 retas. Por exemplo a quártica de Schur (ver Exemplo 3.1) pertence a  $\mathcal{Z}$ .

No teorema principal do nosso trabalho mostraremos que toda superfície quártica não singular em  $\mathbb{P}^3$  que não pertence ao conjunto  $\mathcal{Z}$  contém no máximo 64 retas. Na verdade, para superfícies em  $\mathcal{Z}$  o resultado também é verdadeiro, mas sua verificação requer ferramentas que não dispomos. Na referência principal do nosso trabalho [14] esse resultado é demonstrado para superfícies em  $\mathcal{Z}$ .

### 3. Contagem do número máximo de retas nas quárticas não singulares em $\mathcal{Z}^c$

---

O teorema a seguir é um resultado importante na demonstração do nosso resultado. Sua demonstração encontrasse num famoso artigo do matemático irlandês George Salmon (1819-1904).

**Teorema 3.2** *Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície não singular de grau 4. Então existe  $F \in \mathcal{A}$  homogêneo de grau 20 tal que*

$$S \cap Z(F) = \{x \in S : \exists l \subset \mathbb{P}^3 \text{ reta tal que } (l, S)_x \geq 4\}.$$

**Demonstração:** Ver [15]. ■

Fixada uma superfície quártica não singular  $S$ , a superfície  $Z(F)$  garantida pelo teorema acima será chamada de superfície de Salmon.

Suponhamos que  $l$  seja uma reta contida na quártica não singular  $S$ . Então para cada ponto  $p \in l$  vale que  $(l, S)_p = \infty$ . Logo  $l \subset Z(F)$ . Ou seja, toda reta contida em  $S$  também está contida em  $Z(F)$ .

Vamos precisar também do seguinte fato:

**Teorema 3.3** *O número de retas contidas na superfície  $S \subset \mathbb{P}^3$  de grau 4 disjunta dois a dois é no máximo 16.*

**Demonstração:** Ver [12]. ■

**Corolário 3.2** *Seja  $S$  uma superfície de grau 4, então  $\#\{l \in \Phi(S) : I_l = \emptyset\} \leq 16$ .*

**Teorema 3.4** *(Teorema principal) Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície quártica não singular de grau 4. Se  $S \notin \mathcal{Z}$  então  $\#\Phi(S) \leq 64$ .*

**Demonstração:** Caso  $\Phi(S) = \emptyset$  então não há o que provar. Suponhamos que  $\Phi(S) \neq \emptyset$ . Então temos as seguintes possibilidades:

1. Existe  $l \in \Phi(S)$  do segundo tipo.
2. Toda reta  $l \in \Phi(S)$  é do primeiro tipo.

Caso 1: Nesse caso pelo Corolário 3.1 existem  $l_1, l_2, l_3 \in I_l$  tais que  $l, l_1, l_2$  e  $l_3$  são coplanares. Se, para algum  $i = 1, 2, 3$ ,  $l_i$  for do 1º tipo, então, pelo Teorema 3.1, segue que  $\#I_{l_i} \leq 18$ . Se  $l_i$  é do segundo tipo, então, pela Proposição 3.1, segue que  $\#I_{l_i} \in \{12, 15, 16\}$ . Concluimos assim que

$$\#I_l \leq 16 \text{ e } \#I_{l_i} \leq 18, i = 1, 2, 3.$$

### 3. Contagem do número máximo de retas nas quárticas não singulares em $\mathcal{Z}^c$

---

Assim, pelo Lema 3.2, segue

$$\begin{aligned}\#\Phi(S) &= \#I_l + \sum_{i=0}^3 \#I_{l_i} - 8 \\ &\leq 16 + 3 \cdot 18 - 8 = 62.\end{aligned}$$

Caso 2: Suponhamos que toda reta contida em  $S$  é do primeiro tipo. Vamos dividir esse caso em mais dois subcasos.

Caso 2.1: Existem  $l, l_1, l_2, l_3$  retas coplanares contidas na superfície  $S$ . Nesse caso, pelo Teorema 3.1, vale que  $\#I_l \leq 18$  e  $\#I_{l_i} \leq 18$ , com  $i = 1, 2, 3$ . Novamente pelo Lema 3.2 temos que

$$\begin{aligned}\#\Phi(S) &= \#I_l + \sum_{i=1}^3 \#I_{l_i} - 8 \\ &\leq 18 \cdot 4 - 8 = 64\end{aligned}$$

Caso 2.2: Suponhamos que não há três retas coplanares em  $S$ . Nesse caso vale que para toda reta  $l \in \Phi(S)$  o morfismo  $\pi_l$  não possui fibras singulares do tipo  $I_3$  ou  $IV$ . Assim as fibras singulares de  $\pi_l$  que contêm retas, são do tipo  $I_2$  ou  $III$ . Pelo Lema 3.1 segue que  $\#I_l \leq 12$ . Podemos escrever  $\Phi(S)$  como a união disjunta

$$\Phi(S) = \{l : I_l = \emptyset\} \cup \{l : I_l \neq \emptyset\}.$$

Se  $\{l : I_l \neq \emptyset\} = \emptyset$ , então  $\Phi(S) = \{l : I_l = \emptyset\}$ . Segue pelo Corolário 3.2 que o número máximo de retas disjuntas em  $S$  é 16, ou seja  $\#\{l \in \Phi(S) : I_l = \emptyset\} \leq 16$ . Portanto  $\#\Phi(S) \leq 16 < 64$ .

Suponhamos agora que  $\{l : I_l \neq \emptyset\} \neq \emptyset$ . Então existe  $m \in I_l$ , para alguma  $l \in \Phi(S)$ . Sendo  $H = \langle m, l \rangle$ , segue que  $H \cap S = \langle m, l \rangle \cap S = l \cup m \cup C_{l,m}$ , com  $C_{l,m}$  uma cônica não singular. Vamos dividir novamente esse estudo em mais dois casos:

Caso 2.2.1: Existe  $m \in I_l$ , onde  $l \in \Phi(S)$ , tal que  $C_{l,m}$  não está contida em  $Z(F)$ , onde  $C_{l,m}$  é a curva residual do plano  $\langle l, m \rangle$  e  $Z(F)$  é a superfície de Salmon (ver Teorema 3.2).

Sendo  $l, m, L_3, \dots, L_k$  retas em  $S$  então vale que

$$S \cap Z(F) = l \cup m \cup L_3 \cup \dots \cup L_k \cup D,$$

onde  $D$  tem dimensão 1, ver teorema 7.2 de [9]. Logo intersectando a igualdade acima com  $C_{l,m}$  obtemos que

$$C_{l,m} \cap Z(F) = (l \cap C_{l,m}) \cup (m \cap C_{l,m}) \cup (L_3 \cap C_{l,m}) \cup \dots \cup (L_k \cap C_{l,m}) \cup (D \cap C_{l,m}).$$

Como  $C_{l,m}$ ,  $l$  e  $m$  são coplanares, temos que  $l \cap C_{l,m}$  e  $m \cap C_{l,m}$  consiste de 1 ou 2 pontos. Além disso,  $L_j \cap C_{l,m}$  é vazio ou um conjunto unitário, para  $3 \leq j \leq k$ , e  $D \cap C_{l,m}$

é vazio ou um conjunto finito de pontos, pois  $C_{l,m}$  não está contido em  $Z(F)$ . Agora  $\text{grau}(Z(F)) = 20$  e  $\text{grau}(C_{l,m}) = 2$  e como  $C_{l,m} \cap Z(F) = C_{l,m} \cap (Z(F) \cap H)$  é dada pela interseção de curvas planas, segue pelo teorema de Bezout que  $\#(C_{l,m} \cap Z(F)) \leq 40$ . Seja  $I_{C_{l,m}} = \{L \in \Phi(S) : L \cap C_{l,m} \neq \emptyset\}$ . Pelo que fizemos acima chegamos a conclusão que  $\#(I_{C_{l,m}} - \{l, m\}) \leq 36$ .

Afirmamos que  $\Phi(S) = I_l \cup I_m \cup I_{C_{l,m}}$ . Com efeito, dado  $L \in \Phi(S)$  se  $L \subset H = \langle l, m \rangle$ , então  $L = l$  ou  $L = m$ . Caso  $L \cap H = \{q\}$ , então  $\{q\} = (L \cap l) \cup (L \cap m) \cup (L \cap C_{l,m})$ . Logo  $L \in I_l$  ou  $L \in I_m$  ou  $L \in I_{C_{l,m}}$ . Assim  $\Phi(S) \subset I_l \cup I_m \cup I_{C_{l,m}}$ . Obtemos assim que  $\Phi(S)$  pode ser escrita como a união disjunta  $\Phi(S) = I_l \cup I_m \cup (I_{C_{l,m}} - \{l, m\})$ .

$$\begin{aligned} \#\Phi(S) &= \#I_l + \#I_m + \#(I_{C_{l,m}} - \{l, m\}) \\ &\leq 12 + 12 + 36 = 60 \leq 64. \end{aligned}$$

Caso 2.2.2: Para qualquer  $m \in I_l$ , onde  $l \in \Phi(S)$ , tem-se que  $C_{l,m}$  está contida em  $Z(F)$ , onde  $Z(F)$  é a superfície de Salmon (ver Teorema 3.2).

Lembremos que  $\Phi(S) = \{l : I_l = \emptyset\} \cup \{l : I_l \neq \emptyset\}$  é uma união disjunta e também, pelo Corolário 3.2, que  $\#\{l \in \Phi(S) : I_l = \emptyset\} \leq 16$ . Seja

$$\mathcal{C} = \{\{L, M\} : L, M \in \Phi(S), L \neq M \text{ e } L \cap M \neq \emptyset\}.$$

Para cada  $\{L, M\} \in \mathcal{C}$  temos que o plano  $H = \langle L, M \rangle$  satisfaz que  $H \cap S = L \cup M \cup C_{L,M}$ , onde  $C_{L,M}$  é uma cônica não singular. Escrevamos  $\mathcal{C} = \{\{L_1, M_1\}, \dots, \{L_\mu, M_\mu\}\}$  e  $C_i$  para a cônica residual não singular do plano  $H_i = \langle L_i, M_i \rangle$ ,  $1 \leq i \leq \mu$ . Nesse caso  $C_i \subset Z(F)$ , para todo  $i = 1, \dots, \mu$ . Consideremos  $\mathcal{P} = \{(L, M) : \{L, M\} \in \mathcal{C}\}$ . Então  $\#\mathcal{P} = 2\mu$ . A projeção na primeira coordenada  $p_1 : \mathcal{P} \rightarrow \{l \in \Phi(S) : I_l \neq \emptyset\}$  é sobrejetiva. Logo  $\#\{l \in \Phi(S) : I_l \neq \emptyset\} \leq 2\mu$ . Dessa forma  $\#\Phi(S) \leq 16 + 2\mu$ .

Notemos que, se  $\Phi(S) = \{l_1, \dots, l_k\}$ , então podemos escrever

$$Z(F) \cap S = l_1 \cup \dots \cup l_k \cup C_1 \cup \dots \cup C_\mu \cup D_1 \cup \dots \cup D_s,$$

como a decomposição em componentes irredutíveis de  $Z(F) \cap S$ . Pelo teorema de Bezout em  $\mathbb{P}^3$  (ver Teorema 7.7 de [9]), obtemos que

$$\begin{aligned} 80 = 20 \cdot 4 &= m_{l_1}(Z(F), S)\text{grau}(l_1) + \dots + m_{l_k}(Z(F), S)\text{grau}(l_k) \\ &+ m_{C_1}(Z(F), S)\text{grau}(C_1) + \dots + m_{C_\mu}(Z(F), S)\text{grau}(C_\mu) \\ &+ \sum m_{D_i}(Z(F), S)\text{grau}(D_i). \end{aligned}$$

Assim  $80 = \sum_{i=1}^k m_{l_i}(Z(F), S) + 2 \sum_{i=1}^\mu m_{C_i}(Z(F), S) + r$ , onde  $r \geq 0$ . Daí obtemos que  $80 = k + 2\mu + \hat{r}$ . Por outro lado  $\#\Phi(S) \leq 16 + 2\mu$ . Se tivermos  $\mu \leq 25$ , então

### 3. Contagem do número máximo de retas nas quárticas não singulares em $\mathcal{Z}^c$

---

$\#\Phi(S) \leq 64$ . Agora caso  $\mu \geq 25$ , então  $-2\mu \leq -50$ . Logo  $80 - 2\mu \leq 30$ . Mas isso implica que  $k + r \leq 30$ . O que nos dá  $k \leq 30$ .

Em todo caso chegamos a conclusão que  $\#\Phi(S) \leq 64$ . Como queríamos mostrar. ■

# Apêndice A

## Hessiana de uma curva plana e resultados afins

Neste apêndice trabalhamos vários conceitos e resultados que serão utilizados ao longo dessa dissertação. Tentamos ser o mais didáticos possíveis. De modo que o leitor que não tiver conhecimentos destes fatos possa encontrar nesse apêndice um bom material de apoio.

### A.1 Reta tangente, multiplicidade de interseção de uma reta com uma curva e pontos de inflexão

**Definição A.1** *Seja  $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$  uma curva projetiva reduzida de grau  $d$ , com  $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Seja  $p \in C$  um ponto não singular de  $C$ . Definimos a reta tangente a  $C$  em  $p$  por*

$$\mathbb{T}_p C = Z(\partial_0 f(p)x_0 + \partial_1 f(p)x_1 + \partial_2 f(p)x_2),$$

onde estamos escrevendo  $\partial_i f$  para denotar  $\partial f / \partial x_i$ .

Como  $p \in C$  é um ponto não singular alguma das derivadas parciais é não nula, logo  $\sum \partial_i f(p)x_i$  é um polinômio de grau 1. Além disso, como os polinômios dados pelas derivadas parciais são homogêneos de mesmo grau ou nulos, tem-se que a reta  $\mathbb{T}_p C$  está bem definida, ou seja, independe da escolha do representante do ponto  $p$  em  $\mathbb{P}^2$ .

**Lema A.1** *Seja  $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$  uma curva e  $l$  é uma reta contida em  $C$ . Se  $p \in l$  é um ponto não singular de  $C$ . Então  $l = \mathbb{T}_p C$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $l = Z(L)$ , onde  $L = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  é um polinômio não nulo homogêneo de grau 1. Como  $l \subset C = Z(f)$ ,

então  $f = L.g$ , onde  $g \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Por hipótese  $p \in l$  é um ponto não singular de  $C$ , segue disso que  $p \notin Z(g)$ . Calculando as derivadas parciais de  $f$  obtemos

$$\partial_i f = a_i g + L \partial_i g, \forall i = 0, 1, 2.$$

Aplicando as derivadas calculadas acima no ponto  $p$  encontramos que  $\partial_i f(p) = a_i g(p)$ , para  $i = 0, 1, 2$ . Portanto, como  $g(p) \neq 0$ ,

$$\mathbb{T}_p C = Z(a_0 g(p)x_0 + a_1 g(p)x_1 + a_2 g(p)x_2) = l.$$

■

Seja  $l \subset \mathbb{P}^2$  uma reta. Dados dois pontos distintos  $[u]$  e  $[v]$  de  $l$ , tem-se que a reta  $l$  possui equação paramétrica dada por

$$l = \{[\alpha u + \beta v] \in \mathbb{P}^2 : [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Com essa escrita estamos considerando a reta  $l$  como sendo a projetivização  $\mathbb{P}(W)$  do subespaço  $W = [u, v]$  de  $\mathbb{C}^3$ . Assim, o ponto  $p$  pertence a  $l$  se, e somente se, existe  $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$  tal que  $p = [\alpha u + \beta v]$ .

Dessa forma se  $u = (u_0, u_1, u_2)$  e  $v = (v_0, v_1, v_2)$  temos que  $[\alpha u + \beta v] \in l \cap Z(f)$  se, e somente se,  $f(\alpha u_0 + \beta v_0, \alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2) = 0$ . Consideremos o polinômio

$$F(\alpha, \beta) = f(\alpha u_0 + \beta v_0, \alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2) \in \mathbb{C}[\alpha, \beta].$$

Vemos que  $F$  é um polinômio nulo ou homogêneo de grau  $d$ , onde o grau de  $f$  é  $d$ , e que as raízes de  $F$  nos dão os pontos de interseção de  $l$  com  $Z(f)$ . No caso em que o polinômio  $F$  possui grau  $d$  ele admite uma fatoração em fatores lineares, ver [20], da forma

$$F(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^k (b_i \alpha - a_i \beta)^{m_i}, \text{ com } m_i \geq 1 \text{ e } m_1 + \dots + m_k = d \quad (*)$$

sendo  $p_i = [a_i : b_i] \in \mathbb{P}^1$  as raízes distintas de  $F$  em  $\mathbb{P}^1$ .

**Exemplo A.1** *Seja  $C = Z(f)$ , onde  $f = x_0^3 - x_1 x_2^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ , e  $l = Z(x_0)$ . Então os pontos de interseção de  $C$  com  $l$  são obtidos calculando os zeros do polinômio  $F(x_1, x_2) = f(0, x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ . Escrevendo  $F = (1.x_1 - 0.x_2)(0.x_1 - (-1)x_2)^2$ . Os pontos  $[0 : 1], [1 : 0] \in \mathbb{P}^1$  são os zeros de  $F$  com  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 2$ , respectivamente. Encontramos assim, os pontos  $[0 : 0 : 1]$  e  $[0 : 1 : 0]$  como pontos comuns de  $C$  e  $l$ .*

**Proposição A.1** *Seja  $l = Z(L_1)$  uma reta e seja  $C = Z(f)$  uma curva de grau  $d$  em*

$\mathbb{P}^2$ . Se  $l \not\subset C$  então  $l \cap C = \{p_1, \dots, p_r\}$ ; onde  $p_i \neq p_j$  para  $i \neq j$  e existem inteiros  $m_i \geq 1$  bem determinados pela seguinte condição: se  $T$  é uma mudança de coordenadas projetivas tal que  $T \bullet L_1 = x_0$  então

$$(T \bullet f)(0, x_1, x_2) = \prod_{i=1}^r (b_i x_1 - a_i x_2)^{m_i}, \text{ com } \sum_{i=1}^r m_i = d,$$

onde  $T(p_i) = [0 : a_i : b_i]$ , para  $i = 1, \dots, r$ .

**Demonstração:** Ver [20]. ■

**Definição A.2** A multiplicidade (ou índice) de interseção da reta  $l$  com uma curva  $C = Z(f)$  no ponto  $p \in \mathbb{P}^2$  é definida por

$$(l, C)_p = \begin{cases} \infty, & \text{se } p \in l \subset C \\ 0, & \text{se } p \notin l \\ m_i, & \text{se } p = [a_i u + b_i v] \end{cases}$$

com  $l = \{[\alpha u + \beta v] \in \mathbb{P}^2 : [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\} \not\subset C$  e  $m_i$  determinado em (\*).

A proposição anterior nos mostra que a definição acima não depende da parametrização da reta  $l$  escolhida. Muitas vezes para facilitar o cálculo da multiplicidade de uma reta  $l$  com uma curva  $C$  num ponto  $p$  podemos aplicar uma mudança de coordenadas projetivas adequada para tornar a reta  $l$  na reta  $Z(x_2)$ , por exemplo. Dado  $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  um polinômio homogêneo de grau  $d$ . Escrevendo  $f$  como um polinômio na variável  $x_2$

$$f = f_0 x_2^d + f_1 x_2^{d-1} + \dots + f_d,$$

onde  $f_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$  são polinômios homogêneos e  $\text{grau}(f_i) = i$ , se  $f_i \neq 0$ . Então para calcular a interseção de  $C = Z(f)$  com  $l = Z(x_2)$  basta encontrar os zeros de  $f_d$ . Se  $f_d = 0$  então o polinômio  $f$  é um múltiplo de  $x_2$  o que implica que  $l \subset C$ . Caso  $f_d \neq 0$  temos  $f_d \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$  homogêneo de grau  $d$ , que possui  $d$  raízes, contando com a multiplicidade em  $\mathbb{P}^1$ .

**Corolário A.1** Seja  $C \subset \mathbb{P}^2$  uma curva de grau  $d \geq 1$  e  $l$  uma reta não contida em  $C$ . Então o número total de pontos de interseção de  $C$  e  $l$ , contando com multiplicidade, é  $d$ .

A multiplicidade de interseção de um ponto  $p \in C = Z(f)$  com a reta tangente  $\mathbb{T}_p C$  desempenha um papel importante na teoria a seguir.

Uma importante identidade é a seguinte:

**Proposição A.2** (*Fórmula de Euler*) *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  um polinômio homogêneo de grau  $d$ , então*

$$x_0 \partial_0 f + x_1 \partial_1 f + x_2 \partial_2 f = df.$$

**Demonstração:** Ver [5]. ■

A proposição acima nos mostra que dado um ponto não singular  $p \in C$ , então  $p \in \mathbb{T}_p C$ . Dessa forma a multiplicidade de interseção de uma curva com sua reta tangente num ponto não singular nunca é zero. Formalmente, temos o seguinte corolário:

**Corolário A.2** *Seja  $p \in C = Z(f)$  um ponto não singular. Então  $(\mathbb{T}_p C, C)_p \geq 1$ .*

**Proposição A.3** *Seja  $p \in \text{Sing}(C)$  e  $l$  uma reta passando por  $p$ , onde  $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$  é uma curva. Então  $(l, C)_p \geq 2$ .*

**Demonstração:** Seja  $l = \{[\alpha u + \beta v] \in \mathbb{P}^2 : [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\}$  uma reta passando por  $p = [u] = [u_0 : u_1 : u_2]$ . Com essa parametrização o parâmetro do ponto  $p$  é  $[1 : 0]$ . Como  $p$  é um ponto singular de  $C$ , então  $f$  tem grau maior ou igual a 2. Seja  $F(\alpha, \beta) = f(\alpha u_0 + \beta v_0, \alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2)$ . Se tivermos  $F = 0$  então  $l \subset C$ , o que nos dá  $(l, C)_p = \infty$ . Suponhamos agora que  $l$  não está contida em  $C$ . Calculando as derivadas parciais de  $F$  com respeito a  $\alpha$  e aplicando no ponto  $(1, 0)$  temos

$$\partial_\alpha F(1, 0) = \partial_0 f(p) \cdot u_0 + \partial_1 f(p) \cdot u_1 + \partial_2 f(p) \cdot u_2 = 0,$$

pois  $p$  é ponto singular de  $f$ . De modo análogo temos a derivada parcial de  $F$  com respeito a  $\beta$  em  $(1, 0)$  é zero. Portanto  $[1 : 0]$  é ponto singular de  $F$ , logo é um zero de  $F$  e podemos escrever

$$F(\alpha, \beta) = (-\beta)^{m_0} \prod_{i=1}^k (b_i \alpha - a_i \beta)^{m_i}, \text{ com } m_i \geq 1.$$

Suponhamos que  $m_0 = 1$  e que  $\prod_{i=1}^k (b_i \alpha - a_i \beta)^{m_i}$  não é divisível por  $\beta$ . Agora

$$\partial_\beta F = - \prod_{i=1}^k (b_i \alpha - a_i \beta)^{m_i} + (-\beta) \partial_\beta \prod_{i=1}^k (b_i \alpha - a_i \beta)^{m_i}.$$

Aplicando no ponto  $(1, 0)$  obtemos que  $-\prod_{i=1}^k b_i^{m_i} = 0$ . O que é um absurdo. Portanto  $F(\alpha, \beta) = (-\beta)^{m_0} \prod_{i=1}^{k-n} (b_i \alpha - a_i \beta)^{m_i}$ , com  $m_0 \geq 2$ . Mostrando que  $(l, C)_p \geq 2$ . ■

**Definição A.3** *Seja  $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$  uma curva e  $p \in C$  um ponto não singular. Diremos que o ponto  $p$  é um ponto de inflexão de  $C$ , se  $(\mathbb{T}_p C, C)_p \geq 3$ . Caso*

$(\mathbb{T}_p C, C)_p = d$ , onde  $d = \text{grau}(f)$ , diremos que  $p$  é ponto de inflexão total.

**Observação A.1** *Seja  $C = Z(f)$  uma curva não singular com  $f$  de grau 2. Então  $C$  não possui pontos de inflexão total. Com efeito dado  $p \in C$ , parametrizando  $\mathbb{T}_p C$  pelos parâmetros  $[\alpha : \beta]$ , obtemos que  $F(\alpha, \beta)$  é um polinômio nulo ou de grau 2. Caso  $F$  seja não nulo então a multiplicidade máxima de suas raízes é 2. No caso em que  $F = 0$ , resulta que  $\mathbb{T}_p C \subset C$ . Escrevendo  $\mathbb{T}_p C = Z(L)$ , onde  $L$  é um polinômio de grau 1. A condição anterior implica que  $f = L.H$ , onde  $\text{grau}(H) = 1$ . Segue assim que  $f$  é redutível e conseqüentemente  $C$  é singular. O que é um absurdo. Portanto  $C$  não possui pontos de inflexão.*

**Exemplo A.2** *Vamos calcular os pontos de inflexão de  $C_1 = Z(x_0^3 - x_1^2 x_2) \subset \mathbb{P}^2$ .*

*Seja  $f = x_0^3 - x_1^2 x_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Notemos que  $f$  é um polinômio irredutível e assim  $C_1 = Z(f)$  é uma curva irredutível. Calculando as derivadas parciais de  $f$  encontramos  $\partial_0 f = 3x_0^2$ ,  $\partial_1 f = -2x_1 x_2$ , e  $\partial_2 f = -x_1^2$ . Daí se  $p \in \mathbb{P}^2$  é tal que  $\partial_i f(p) = 0$ ,  $0 \leq i \leq 2$ . Então  $p = [0 : 0 : 1]$ . Assim  $\text{Sing}(C_1) = \{[0 : 0 : 1]\}$ . Seja  $p = [p_0 : p_1 : p_2]$  um ponto de  $C_1$  não singular, então  $p_0 \neq 0$  ou  $p_1 \neq 0$ . Se for  $p_0 \neq 0$ , podemos assumir que  $p = [1 : p_1 : p_2]$ . Como  $f(p) = 0$  segue que  $p_1^2 p_2 = 1$ . Assim  $p_2 = \frac{1}{p_1^2}$  e podemos assumir que  $p = [p_1^2 : p_1^3 : 1]$ . A reta tangente a  $C_1$  em  $p = [p_1^2 : p_1^3 : 1]$  é  $\mathbb{T}_p C_1 = Z(3p_1^4 x_0 - 2p_1^3 x_1 - p_1^6 x_2)$ . Nesse caso temos uma parametrização dada por*

$$\mathbb{T}_p C_1 = \left\{ \left[ \frac{2}{3p_1} x_1 + \frac{p_1^2}{3} x_2 : x_1 : x_2 \right] : [x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

*Assim para encontrar os pontos de interseção de  $C_1$  com  $\mathbb{T}_p C_1$  bem como a sua multiplicidade devemos calcular os zeros do polinômio  $F(x_1, x_2) = f(\frac{2}{3p_1} x_1 + \frac{p_1^2}{3} x_2, x_1, x_2)$ . Fazendo os cálculos encontramos que*

$$(1) \quad F(x_1, x_2) = \frac{2^3}{3^3 p_1^3} x_1^3 - \frac{7}{3^2} x_1^2 x_2 + \frac{2p_1}{3^2} x_1 x_2^2 + \frac{p_1^6}{3^3} x_2^3.$$

*Temos que  $F \neq 0$  e como o ponto  $p = [p_1^2 : p_1^3 : 1] \in C_1 \cap \mathbb{T}_p C_1$ , segue que o polinômio  $F$  admite uma fatoração da forma  $F(x_1, x_2) = (x_1 - p_1^3 x_2)(\beta x_1 - \alpha x_2)(\gamma x_1 - \delta x_2)$ , onde  $[\alpha : \beta], [\delta : \gamma] \in \mathbb{P}^1$ . Para que o ponto  $p$  seja um ponto de inflexão devemos ter  $F(x_1, x_2) = \lambda(x_1 - p_1^3 x_2)^3$ , com  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ou seja*

$$(2) \quad F(x_1, x_2) = \lambda(x_1^3 - 3p_1^3 x_1^2 x_2 + 3p_1^6 x_1 x_2^2 - p_1^9 x_2^3).$$

*Igualando as expressões (1) e (2) obtemos as seguintes relações para o coeficiente de  $x_1^3$  e  $x_1^2 x_2$  de  $F$  encontramos*

$$(3) \quad \lambda = \frac{2^3}{3^3 p_1^3}, \quad (4) \quad -3p_1^3 \lambda = \frac{-7}{3^2}.$$

De (4) segue que  $\lambda = \frac{7}{3^3 p_1^3}$ . Igualando esse resultado a (3) obtemos  $\frac{2^3}{3^3 p_1^3} = \frac{7}{3^3 p_1^3}$ . O que nos leva ao absurdo  $8 = 7$ . Concluimos assim que  $p = [1 : p_2 : p_3]$  não é ponto de inflexão de  $C_1$ .

Suponhamos agora que  $p_1 \neq 0$ . Podemos assumir que  $p_0 = 0$ , pois o caso  $p_0 \neq 0$  já analisamos acima. Neste caso o ponto  $p$  é  $p = [0 : 1 : 0]$ . A reta tangente a  $C_1$  em  $p$  é dada por  $\mathbb{T}_p C_1 = Z(-x_2)$ , que possui parametrização  $\mathbb{T}_p C_1 = \{[x_0 : x_1 : 0] : [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1\}$ . E assim temos que  $F(x_0, x_1) = f(x_0, x_1, 0) = x_0^3$ . Logo  $(\mathbb{T}_p C_1, C_1)_p = 3$  e assim  $p = [0 : 1 : 0]$  é o único ponto de inflexão de  $C_1$ .

**Exemplo A.3** Vamos também calcular agora os pontos de inflexão de  $C = Z(x_0(x_0^2 - x_1x_2)) \subset \mathbb{P}^2$ . Seja  $f = x_0(x_0^2 - x_1x_2)$ . Calculemos inicialmente as singularidades de  $C$ . As derivadas parciais de  $f$  são

$$\begin{aligned} (1) \quad \partial_0 f &= 3x_0^2 - x_1x_2, \\ (2) \quad \partial_1 f &= -x_0x_2, \\ (3) \quad \partial_2 f &= -x_0x_1. \end{aligned}$$

Os pontos singulares  $p = [x_0 : x_1 : x_2]$  de  $C$  satisfazem  $\partial_i f(p) = 0$ , para  $i = 0, 1, 2$ . Assim por (3) devemos ter  $x_0 = 0$  ou  $x_1 = 0$ . Caso  $x_0 = x_1 = 0$ , então  $p = [0 : 0 : 1]$ , e como tal ponto satisfazem as equações acima temos assim que  $p = [0 : 0 : 1] \in \text{Sing}(C)$ . Se  $x_0 = 0$  e  $x_1 \neq 0$ , então por (1) devemos ter  $x_2 = 0$ . Dessa forma  $p = [0 : 1 : 0] \in \text{Sing}(C)$ . Observemos que a equação (1) igual a zero,  $3x_0^2 - x_1x_2 = 0$ , não admite uma solução com  $x_0 \neq 0$  e  $x_1 = 0$ . Portanto concluímos que  $\text{Sing}(C) = \{[0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0]\}$ . Seja  $p = [p_0 : p_1 : p_2] \in C$  um ponto não singular. Mas  $f(p) = 0 \Leftrightarrow p_0 = 0$  ou  $p_0^2 - p_1p_2 = 0$ .

Se for  $p_0 = 0$ , então  $p = [0 : p_1 : p_2]$ . Como estamos tomando  $p \notin \text{Sing}(C)$  segue que  $p_1 \neq 0$  e  $p_2 \neq 0$ . Notemos também que o ponto  $p = [0 : p_1 : p_2] \in l = Z(x_0) \subset C$ . Logo pelo Lema A.1 temos que  $\mathbb{T}_p C = Z(x_0)$ . Logo como  $\mathbb{T}_p C \subset C$ , temos que  $(\mathbb{T}_p C, C)_p = \infty$ . Mostrando que todo ponto  $p = [0 : x_1 : x_2]$ , com  $x_1x_2 \neq 0$ , é ponto de inflexão de  $C$ .

Suponhamos que  $p_0 \neq 0$ , então podemos assumir que o ponto  $p$  tem coordenadas homogêneas  $p = [1 : p_1 : p_2]$ . Além disso, como  $1 = p_1p_2$ , e logo  $p_2 = \frac{1}{p_1}$ . Temos que  $\partial_0 f(p) = 2$ ,  $\partial_1 f(p) = -\frac{1}{p_1}$ ,  $\partial_2 f(p) = -p_1$ . Portanto a reta tangente a  $C$  em  $p$  tem

equação  $\mathbb{T}_p C = Z(2x_0 - \frac{1}{p_1}x_1 - p_1x_2)$ . Consideremos agora a parametrização de  $\mathbb{T}_p C$

$$\mathbb{T}_p C = \left\{ \left[ \frac{1}{2p_1}x_1 + \frac{p_1}{2}x_2 : x_1 : x_2 \right] : [x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

Novamente para encontrar as raízes bem como a multiplicidade de  $\mathbb{T}_p C$  com  $C$  devemos calcular as raízes de  $F(x_1, x_2) = f(\frac{1}{2p_1}x_1 + \frac{p_1}{2}x_2, x_1, x_2)$ . Fazendo os cálculos encontramos que

$$(4) \quad F(x_1, x_2) = \frac{x_1^3}{8p_1^3} - \frac{1}{8p_1}x_1^2x_2 - \frac{p_1}{8}x_1x_2^2 + \frac{p_1^2}{8}x_2^3.$$

Observemos que  $F \neq 0$ . Como  $p = [1 : p_1 : \frac{1}{p_1}] \in \mathbb{T}_p C \cap C$ , então  $[p_1 : \frac{1}{p_1}]$  é raiz de  $F$ . Para que o ponto  $p$  seja ponto de inflexão devemos ter  $F(x_1, x_0) = \lambda(\frac{1}{p_1}x_1 - p_1x_2)^3$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ , ou seja,

$$(5) \quad F(x_1, x_2) = \frac{\lambda}{p_1^3}x_1^3 - \frac{3\lambda}{p_1}x_1^2x_2 + 3\lambda p_1x_1x_2^2 - \lambda p_1^3x_2^3.$$

Igualando os coeficientes de  $x_1^3$  nas expressões (4) e (5) encontramos  $\lambda = \frac{1}{8}$ . Mas igualando os coeficientes de  $x_1^2x_2$  encontramos  $\lambda = \frac{1}{24}$ . O que nos conduz a um absurdo. Portanto o ponto  $p$  não é ponto de inflexão de  $C$ .

## A.2 A curva Hessiana de uma curva $C$ e Alguns resultados

Observemos que se  $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  é um polinômio homogêneo de grau  $d$  então  $\partial_{ij}f$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ , é também um polinômio homogêneo e no caso não nulo possui grau  $d - 2$ .

**Definição A.4** *Seja  $C \subset \mathbb{P}^2$  uma curva algébrica projetiva definida pelo polinômio homogêneo  $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ , de grau  $d \geq 3$ . A matriz simétrica, 3 por 3,  $Hess(f) = (\partial_{ij}f)$  é chamada matriz Hessiana de  $f$ . No caso em que  $\det(Hess(f))$  é um polinômio não nulo então a curva Hessiana de  $C$  é  $H_C = Z(H_f)$ , onde*

$$H_f = \det(Hess(f)) = \det(\partial_{ij}f)_{i,j=0,1,2}.$$

Note que se  $f$  é um polinômio de grau  $d$ , então  $H_f$  é um polinômio homogêneo e se  $H_f \neq 0$ , então  $H_f$  tem grau  $3(d - 2)$ . Em particular, se  $d = 2$  então  $H_f$  é sempre um polinômio constante. A matriz Hessiana  $Hess(f) = (\partial_{ij}f)$  de  $f$  é bastante utilizada

em análise para descobrir quando um ponto crítico de  $f$  é um ponto de máximo ou de mínimo. O fato dessa matriz ser simétrica decorre do teorema de Schwarz.

**Exemplos A.1** 1. Seja  $f = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Então

$$H_f = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 8.$$

Assim  $H_C = Z(H_f) = \emptyset$ .

2. Seja  $f = x_0x_1(x_0 + x_1) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Então

$$H_f = \det \begin{pmatrix} 2x_1 & 2(x_0 + x_1) & 0 \\ 2(x_0 + x_1) & 2x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Logo  $H_C = Z(H_f) = \mathbb{P}^2$ .

3. Seja  $f = x_0x_1x_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Então

$$H_f = \det \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 0 & x_0 \\ x_1 & x_0 & 0 \end{pmatrix} = 2x_0x_1x_2.$$

Logo  $H_C = C$ , onde  $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$ .

4. Seja  $C = Z(f)$ , onde  $f = x_0^3 - x_1^2x_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Temos que  $H_f = -24x_0x_1^2$ . Então,

$$C \cap H_C = Z(x_0^3 - x_1^2x_2, -24x_0x_1^2) = \{[0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}.$$

No exemplo A.2 mostramos que  $[0 : 0 : 1]$  é o único ponto singular de  $C$  e que  $[0 : 1 : 0]$  é seu único ponto de inflexão. O fato de  $C \cap H_C$  consistir de tais pontos não é uma coincidência. Mais adiante estudaremos um pouco mais sobre isso.

Uma propriedade interessante da curva Hessiana  $H_C$  de uma curva  $C = Z(f)$  é descrita no lema abaixo.

**Lema A.2** *Se  $T$  é uma mudança de coordenada projetivas, então  $T_\bullet H_f$  e  $H_{T_\bullet f}$  são múltiplos um do outro por uma constante não nula, ou seja,  $H_C$  é invariante por mudanças de coordenadas projetivas.*

**Demonstração:** Para encontrarmos  $H_{T_\bullet f}$  temos que calcular as derivadas parciais de  $T_\bullet f(x_0, x_1, x_2) = f(T^{-1}(x_0, x_1, x_2))$ . Escrevendo  $[T^{-1}] = (a_{ij})$ , com  $0 \leq i, j \leq 2$ , temos que

$$T_\bullet f(x_0, x_1, x_2) = f\left(\sum a_{0i}x_i, \sum a_{1i}x_i, \sum a_{2i}x_i\right) = f(p), \text{ com } p = T^{-1}(x_0, x_1, x_2).$$

Dessa forma, para todo  $0 \leq j \leq 2$ , segue que

$$\partial_j(T_\bullet f)(x_0, x_1, x_2) = \partial_0 f(p)a_{0j} + \partial_1 f(p)a_{1j} + \partial_2 f(p)a_{2j} = \sum_{i=0}^2 \partial_i f(p)a_{ij}.$$

Derivando a igualdade mais uma vez com respeito a  $x_k$  obtem-se

$$\partial_{kj}(T_\bullet f)(x_0, x_1, x_2) = a_{0j} \sum_{i=0}^2 \partial_{i0} f(p)a_{ik} + a_{1j} \sum_{i=0}^2 \partial_{i1} f(p)a_{ik} + a_{2j} \sum_{i=0}^2 \partial_{i2} f(p)a_{ik}.$$

Notemos agora que o termo calculado acima é o elemento  $b_{kj}$  da multiplicação das matrizes  $[T^{-1}]^t \text{Hess}(f(p)) [T^{-1}]$ . Mais explicitamente,

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{00} f(p) & \partial_{01} f(p) & \partial_{02} f(p) \\ \partial_{10} f(p) & \partial_{11} f(p) & \partial_{12} f(p) \\ \partial_{20} f(p) & \partial_{21} f(p) & \partial_{22} f(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \text{Hess}(T_\bullet f).$$

Logo,

$$H_{T_\bullet f}(T(p)) = \det[T^{-1}]^2 H_f(p) = \det[T^{-1}]^2 T_\bullet H_f(T(p)),$$

e portanto  $Z(H_{T_\bullet f}) = Z(T_\bullet H_f)$ . ■

Estamos com o intuito de provar que a curva hessiana  $H_C$  tem a propriedade de que a interseção desta com a curva  $C$  consiste de pontos de inflexão e dos pontos singulares da curva  $C$ . Mas antes disso precisamos de mais alguns resultados.

O lema abaixo mostra algumas outras formas alternativas de se calcular o polinômio  $H_f$ .

**Lema A.3** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ , homogêneo e  $\text{grau}(f) = d$ . Escrevendo  $f_i = \partial_i f$ ,  $f_{ij} = \partial_{ij} f$ . Então*

$$H_f = \frac{d-1}{x_0} \det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ f_{01} & f_{11} & f_{21} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} \end{pmatrix} = \frac{d-1}{x_0^2} \det \begin{pmatrix} nf & f_1 & f_2 \\ (n-1)f_1 & f_{11} & f_{21} \\ (n-1)f_2 & f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}.$$

**Demonstração:** Aplicando a fórmula de Euler para o polinômio  $f_i$  temos que

$$(d-1)f_i = \sum_{j=0}^2 f_{ji}x_j = \sum_{j=0}^2 f_{ij}x_j.$$

Agora multiplicando a primeira linha de  $Hess(f)$  por  $x_0$  obtemos

$$x_0 Hess(F) = \begin{pmatrix} x_0 f_{00} & x_0 f_{01} & x_0 f_{02} \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}.$$

Somando à primeira linha com a segunda linha vezes  $x_1$  mais a terceira linha vezes  $x_2$  obtemos:

$$x_0 H_f = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^2 f_{0i}x_i & \sum_{i=0}^2 f_{1i}x_i & \sum_{i=0}^2 f_{2i}x_i \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (d-1)f_0 & (d-1)f_1 & (d-1)f_2 \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}.$$

Mostrando a primeira igualdade. Para mostrar a segunda igualdade procedemos de modo análogo, usando as colunas em lugar das linhas. Ou seja, multiplicamos a primeira coluna por  $x_0$  e depois somamos com a multiplicação da segunda coluna vezes  $x_1$  mais a terceira coluna multiplicada por  $x_2$ . Usando novamente a fórmula de Euler obtemos o resultado desejado. ■

**Corolário A.3** *Todo ponto singular  $p$  de  $C = Z(f)$  é um ponto de  $H_C = Z(H_f)$ , ou seja,  $Sing(C) \subseteq H_C$ .*

**Demonstração:** Seja  $p = [p_0 : p_1 : p_2]$  um ponto singular de  $C$ . Caso  $p_0 \neq 0$  então usando a fórmula obtida no Lema A.3 segue que a primeira linha da matriz  $Hess(f)$  no ponto  $p$  é nula e portanto  $H_f(p) = 0$ . Caso  $p_0 = 0$ , então aplicando uma mudança de coordenadas projetivas,  $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ , de modo que  $a = T(p) = [a_0 : a_1 : a_2]$  é tal que  $a_0 \neq 0$ . Desde que mudança de coordenadas projetivas preserva pontos singulares, segue que  $a$  é ponto singular de  $T(C) = Z(T_\bullet f)$ . Assim podemos usar o mesmo raciocínio

anterior para obter que  $H_{T_\bullet f}(a) = 0$ . Mas, pelo Lema A.2, temos que

$$T(H_C) = T(Z(H_f)) = Z(T_\bullet H_f) = Z(H_{T_\bullet f}).$$

Portanto  $a \in T(H_C)$ . Logo  $H_f(p) = 0$ . Portanto  $\text{Sing}(C) \subseteq H_C$ . ■

**Lema A.4** *Seja  $p = [p_0 : p_1 : p_2] \in C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$  um ponto não singular, onde  $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Seja  $L = Z(L_p)$  a reta tangente de  $C$  em  $p$ . Então existe uma mudança de coordenadas projetivas  $m_T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  com  $m_T(p) = [1 : 0 : 0]$  e  $T_\bullet L_p = x_2$ .*

**Demonstração:** Seja  $T_1 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  um automorfismo tal que  $T_1(p_0, p_1, p_2) = (1, 0, 0)$ . Assim a mudança de coordenadas projetivas  $m_{T_1}$  satisfaz  $m_{T_1}(p) = [1 : 0 : 0]$ . Seja  $L' = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ , onde  $L' = T_{1\bullet}L_p$ . Como  $p' = [1 : 0 : 0] \in Z(L')$  concluimos que  $a_0 = 0$ . Logo  $L' = a_1x_1 + a_2x_2$ , onde  $a_1 \neq 0$  ou  $a_2 \neq 0$ . Se  $a_1 = 0$  segue o resultado desejado. Suponhamos que  $a_1 \neq 0$ . Daí os polinômios  $L', x_0$  e  $x_2$  são linearmente independentes. Dessa forma existe  $T_2 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  automorfismo tal que

$$\begin{cases} T_{2\bullet}x_0 = x_0 \\ T_{2\bullet}x_2 = x_1 \\ T_{2\bullet}L' = x_2. \end{cases}$$

Observemos que  $m_{T_2}([1 : 0 : 0]) = [1 : 0 : 0]$  se, e somente se,  $m_{T_2^{-1}}([1 : 0 : 0]) = [1 : 0 : 0]$ . Escrevendo  $[T_2^{-1}] = (a_{ij})$ , onde  $0 \leq i, j \leq 2$ . Temos que  $T_{2\bullet}x_0 = x_0$ , implica que  $\sum a_{0i}x_i = x_0$ , e assim  $a_{00} = 1, a_{10} = a_{20} = 0$ . De modo análogo de  $T_{2\bullet}x_2 = x_1$ , decorre que  $a_{21} = 1$  e  $a_{20} = a_{22} = 0$ . Agora da terceira equação do sistema acima  $T_{2\bullet}(a_1x_1 + a_2x_2) = x_2$ , resulta que

$$\begin{cases} a_1a_{10} + a_2a_{20} = 0 \\ a_1a_{11} + a_2a_{21} = 0 \\ a_1a_{12} + a_2a_{22} = 1. \end{cases}$$

Usando que  $a_{20} = 0$  e  $a_1 \neq 0$ , pelas equações acima, vemos que  $a_{10} = 0$ . Logo

$$[T_2^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ com } a_{21} \neq 0.$$

Assim  $m_{T_2}([1 : 0 : 0]) = [1 : 0 : 0]$ . Definindo  $T = T_2 \circ T_1$ . Temos que  $T$  é um automorfismo de  $\mathbb{C}^3$ . Além disso, pelo que fizemos acima, vemos que a mudança de coordenadas projetivas  $m_T$  satisfaz as propriedades desejadas.

■

**Lema A.5** *Seja  $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$ , com  $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  homogêneo de grau  $d \geq 3$ , uma curva tal que  $p = [1 : 0 : 0] \in C - \text{Sing}(C)$ . Suponhamos que  $C$  não contém retas e que a reta tangente de  $C$  em  $p$  é  $\mathbb{T}_p C = Z(x_2)$ . Então  $2 \leq k = (\mathbb{T}_p C, C)_p < \infty$ , e podemos escrever*

$$f = x_2 g(x_0, x_1, x_2) + x_1^k h(x_0, x_1), \text{ com } g(p) \neq 0 \text{ e } h(p) \neq 0.$$

**Demonstração:** Como  $p = [1 : 0 : 0] \in C = Z(f)$ , então  $f \in \mathcal{I}(p) = \langle x_1, x_2 \rangle$ . Assim dividindo  $f$  por  $x_2$  obtemos  $f = x_2 g(x_0, x_1, x_2) + \tilde{h}(x_0, x_1)$ . Notemos que  $\tilde{h}(x_0, x_1)$  é um polinômio não nulo, pois  $\mathbb{T}_p C = Z(x_2)$  não está contida em  $C$ , já que  $C$  não contém retas. Temos que  $\tilde{h} \in \langle x_1, x_2 \rangle \setminus \langle x_2 \rangle$ , e segue disso que podemos escrever  $\tilde{h} = x_1^n h(x_0, x_1)$ , com  $x_1 \nmid h(x_0, x_1)$ . Notemos que  $x_1 \nmid h \Leftrightarrow h(1, 0) \neq 0$ . Dessa forma  $f$  pode ser escrito como

$$f = x_2 g(x_0, x_1, x_2) + x_1^n h(x_0, x_1), \text{ e } h(p) \neq 0.$$

Assim para encontrar os pontos de interseção de  $C$  com  $\mathbb{T}_p C$  temos que calcular os zeros de  $F(x_0, x_1) = x_1^n h(x_0, x_1)$ , e como o ponto  $p' = [1 : 0]$  não é um zero de  $h(x_0, x_1)$ . Segue que  $n = k = (\mathbb{T}_p C, C)$ . Logo obtemos a escrita

$$f = x_2 g(x_0, x_1, x_2) + x_1^k h(x_0, x_1), \text{ } k = (\mathbb{T}_p C, C) \text{ e } h(p) \neq 0.$$

Calculando as derivadas parciais de  $f$  encontramos as equações

$$\begin{cases} \partial_0 f = x_2 \partial_0 g + x_1^k \partial_0 h, \\ \partial_1 f = x_2 \partial_1 g + k x_1^{k-1} h + x_1^k \partial_1 h, \\ \partial_2 f = g + x_2 \partial_2 g. \end{cases}$$

Temos que  $k \geq 1$  ( ver corolário A.2), e como  $\partial_1 f(p) = 0$ , pois  $\mathbb{T}_p C = Z(x_2)$ , segue que  $k \geq 2$ . Novamente como  $\mathbb{T}_p C = Z(x_2)$  segue que  $\partial_2 f(p) = g(p) \neq 0$ . Como queríamos mostrar.

■

**Proposição A.4** *Seja  $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$  uma curva de grau  $d \geq 3$ . Então  $C \subset H_C$  se, e somente se,  $C$  é a união de retas. Mais precisamente:*

1. *Se  $C$  contém uma reta  $l$ , então  $l \subset H_C$ .*
2. *Seja  $\Gamma \subset C$  uma componente irredutível. Se  $\Gamma \subset H_C$ , então  $\Gamma$  é uma reta.*

**Demonstração:**

Para mostrar a veracidade do item 1, suponhamos que a curva  $C = Z(f)$  contém uma reta  $L$ . Então aplicando uma mudança de coordenadas projetivas, podemos assumir que  $L = Z(x_0)$ . Como  $L \subset C$ , então  $f = x_0g$ . Daí,  $f_i = x_0g_i$  e  $f_{ij} = x_0g_{ij}$ , para  $i, j = 1, 2$ , onde  $f_i = \partial_i f, g_i = \partial_i g, f_{ij} = \partial_{ij} f$  e  $g_{ij} = \partial_{ij} g$ . Daí, pelo Lema A.3, segue que

$$x_0^2 H_F = (d-1) \begin{vmatrix} df & f_1 & f_2 \\ (d-1)f_1 & f_{11} & f_{21} \\ (d-1)f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = (d-1) \begin{vmatrix} dx_0g & x_0g_1 & x_0g_2 \\ (d-1)x_0g_1 & x_0g_{11} & x_0g_{21} \\ (d-1)x_0g_2 & x_0g_{12} & x_0g_{22} \end{vmatrix} = x_0^3 \Delta,$$

onde  $\Delta$  é o determinante cujas entradas são  $g, g_i, e g_{ij}$ , com  $i, j = 1, 2$ . Portanto  $L \subset H_C$ .

Para provar 2, suponhamos por absurdo que  $\Gamma$  é uma componente irredutível de  $C$  que não é uma reta com  $\Gamma \subset H_C$ . Seja  $p \in \Gamma$  um ponto não singular de  $C$ . Aplicando uma mudança de coordenadas projetivas podemos assumir que  $p = [1 : 0 : 0]$  e que a reta tangente a  $C$  nesse ponto é  $\mathbb{T}_p C = Z(x_2)$ . Dessa forma temos que  $f \in \langle x_1, x_2 \rangle$ . Se  $\mathbb{T}_p C \subset C$ , então  $f = x_2g$ , com  $g \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  homogêneo de grau maior ou igual a 2. Daí  $C = Z(x_2) \cup Z(g)$ . Intersectando ambos os lados dessa igualdade com  $\Gamma$  obtemos  $\Gamma = (\Gamma \cap Z(x_2)) \cup (\Gamma \cap Z(g))$ . Como  $\Gamma$  é irredutível segue que  $\Gamma = Z(x_2)$  ou  $\Gamma \subset Z(g)$ . Como estamos assumindo que  $\Gamma$  não é uma reta, então devemos ter  $\Gamma \subset Z(g)$ . Mas  $p = [1 : 0 : 0] \in \Gamma \cap Z(x_2)$ , o que nos dá  $p \in Z(g) \cap Z(x_2) \subset \text{Sing}(C)$ . O que é um absurdo. Agora se  $\mathbb{T}_p C$  não está contida em  $C$ , então, usando o Lema A.5, podemos escrever

$$f = x_2g(x_0, x_1, x_2) + x_1^k h(x_1, x_2), \text{ com } g(p) \neq 0 \text{ e } h(p) \neq 0.$$

Fazendo vários cálculos, com auxílio computacional, encontramos que

$$H_f = \det \text{Hess}(f) = x_2 \tilde{g}(x_0, x_1, x_2) + x_1^{k-2} \tilde{h}(x_0, x_1), \text{ com } \tilde{h}(p) \neq 0.$$

Seja  $C = \Gamma \cup C_1 \cup \dots \cup C_k$  e  $H_C = \Gamma \cup H_1 \cup \dots \cup H_l$  a escrita em componentes irredutíveis de  $C$  e  $H_C$ , respectivamente. Como  $p \in C - \text{Sing}(C)$  e  $p \in H_C - \text{Sing}(H_C)$ , e  $p \in \Gamma$ , então  $p \notin C_i$  e  $p \notin H_j$ , para todo  $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$ . Então as propriedades da multiplicidade de interseção, então vale que  $(\mathbb{T}_p C, C)_p = (\mathbb{T}_p C, \Gamma)_p$  e  $(\mathbb{T}_p C, H_C)_p = (\mathbb{T}_p C, \Gamma)_p$ . Logo  $k = (\mathbb{T}_p C, C)_p = (\mathbb{T}_p C, H_C)_p = k - 2 < k$ . O que é um absurdo. ■

**Teorema A.1** *Seja  $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$  uma curva de grau  $d \geq 3$  que não contém retas.*

Então um ponto  $p \in C$  é um ponto de inflexão, se e somente se,  $p \in H_C$ .

**Demonstração:** Seja  $p \in C = Z(f)$  um ponto não singular. Sabemos que aplicando uma mudança de coordenadas projetivas adequada (ver o Lema A.4) podemos assumir que  $p = [1 : 0 : 0]$  e que a reta tangente a  $C$  nesse ponto é  $\mathbb{T}_p C = Z(x_2)$ . Como  $C$  não contém retas segue que  $\mathbb{T}_p C$  não está contida em  $C$ , ou seja, que  $x_2 \nmid f$ . Então usando o Lema A.5 podemos escrever

$$f = x_2 g(x_0, x_1, x_2) + x_1^k h(x_1, x_2), \text{ com } g(p) \neq 0, h(p) \neq 0 \text{ e } 2 \leq k = (\mathbb{T}_p C, C) < \infty.$$

Escrevamos  $g = bx_0^{d-1} + (b_1x_1 + b_2x_2)x_0^{d-2} + \dots$ , e  $h = a_0x_0^{d-k} + a_1x_0^{d-k-1}x_1 + \dots$ . Como  $g(p) \neq 0$  e  $h(p) \neq 0$ , então vale que  $b \neq 0$  e  $a_0 \neq 0$ . Calculando as derivadas parciais  $\partial_{ij}f$  necessárias para o cálculo de  $H_f$  obtemos:

$$\begin{cases} \partial_{00}f = x_2\partial_{00}g + x_1^k\partial_{00}h, \\ \partial_{01}f = x_2\partial_{01}g + kx_1^{k-1}\partial_0h + x_1^k\partial_{01}h, \\ \partial_{02}f = \partial_0g + x_2\partial_{02}g, \\ \partial_{11}f = x_2\partial_{11}g + k(k-1)x_1^{k-2}h + 2kx_1^{k-1}\partial_1h + x_1^k\partial_{11}h, \\ \partial_{12}f = \partial_1g + x_2\partial_{12}g, \\ \partial_{22}f = 2\partial_2g + x_2\partial_{22}g. \end{cases}$$

Observemos que se  $k = 2$ , então  $\partial_{11}f(p) = 2h(1, 0) = 2a_0 \neq 0$ , e se  $k \geq 3$  tem-se  $\partial_{11}f(p) = 0$ . Logo,

$$H_f(p) = H_f(1, 0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & (d-1)b \\ 0 & \partial_{11}f(p) & a_1 \\ (d-1)b & a_1 & 2b_2 \end{pmatrix} = -(d-1)^2b^2\partial_{11}f(p).$$

Lembremos que  $b = g(1, 0, 0) \neq 0$  e que  $d \geq 3$ . Portanto,  $H_f(p) = 0$  se, e somente se,  $k \geq 3$  se, e somente se,  $p$  é ponto de inflexão de  $C$ . ■

**Corolário A.4** *Seja  $C \subset \mathbb{P}^2$  uma curva de grau  $d \geq 3$  que não contém retas. Então  $C$  possui no máximo  $3n(n-2)$  pontos de inflexão.*

# Apêndice B

## A resultante de dois polinômios

Consideremos dois polinômios  $f$  e  $g$  no anel de polinômios  $K[x]$ , onde  $K$  é um corpo, de grau  $n$  e  $m$ , respectivamente,

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g = \sum_{i=0}^m b_i x^i.$$

Uma pergunta natural nesse contexto seria: existe  $x_0 \in K$  tal que  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ?

A pergunta acima é equivalente a decidir se  $f$  e  $g$  possuem um fator comum da forma  $x - x_0$ , ou seja, se  $(x - x_0) \mid f$  e  $(x - x_0) \mid g$ . Essa não é uma pergunta simples já que para polinômios  $f$  ou  $g$  de graus maiores ou iguais a 5 não há uma fórmula que nos permita calcular explicitamente as raízes destes.

Vamos analisar inicialmente o caso em que  $n = m = 1$ , ou seja, dados os polinômios  $f = a_0 + a_1 x$  e  $g = b_0 + b_1 x$  com coeficientes em  $K$ , procuramos  $x$  satisfazendo o sistema

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x &= 0 \\ b_0 + b_1 x &= 0. \end{aligned}$$

O sistema acima tem solução se, e somente se,  $\frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1}$ , que pode ser escrito como

$$\det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{bmatrix} = a_0 b_1 - a_1 b_0.$$

Podemos ver o sistema anterior da forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma o sistema possui uma solução não trivial se o determinante da matriz dos



tem grau 2. Seguindo a definição acima devemos repetir os coeficientes do polinômio  $f$  duas vezes e do polinômio  $g$  apenas uma única vez. Dessa forma a resultante de  $f$  e  $g$  é o determinante da matriz  $3 \times 3$

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Como iremos mostrar mais adiante não é uma surpresa que a resultante de  $f$  e  $g$  seja nula, pois os polinômios  $f$  e  $g$  possuem 1 como raiz comum.

Temos um interesse especial quando  $A = K[x_1, \dots, x_k]$ , onde  $K$  é um corpo. Dado um polinômio  $f \in K[x_1, \dots, x_k]$ , podemos ver  $f$  como um polinômio em uma única variável de diversas formas, ou seja,

$$f \in (K[x_1, \dots, x_{k-1}])[x_k] = \dots = (K[x_2, \dots, x_{k-1}])[x_1].$$

Na situação acima é útil escrever  $R_{f,g}(x_i)$  para denotar a resultante de  $f$  e  $g$  como polinômios na variável  $x_i$  com coeficientes em  $K[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k]$ . Assim, neste caso, a resultante entre dois polinômios é novamente um polinômio.

**Exemplo B.2** *Sejam  $f = y - x^2, g = y^2 + x^2 - 1 \in A[y]$ , onde  $A = \mathbb{C}[x]$ . Temos que o polinômio  $f$  tem grau 1 em  $y$  e o polinômio  $g$  tem grau 2 em  $y$ . Dessa forma temos que a resultante de  $f$  e  $g$  é:*

$$R_{f,g} = R_{f,g}(y) = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & x^2 \\ 1 & 0 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = x^4 + x^2 - 1.$$

*Algo interessante a se observar nesse momento é que se tentássemos resolver o sistema*

$$\begin{aligned} y - x^2 &= 0 \\ y^2 + x^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

*podemos substituir  $y = x^2$  na segunda igualdade, obtendo assim a equação  $x^4 + x^2 - 1 = 0$ . Que é justamente a resultante de  $f$  e  $g$ . Ou seja, as raízes da resultante nos dão as abscissas  $x$  dos pontos  $(x, y)$  que são as interseções do círculo  $x^2 + y^2 = 1$  com a parábola  $y = x^2$ .*

Como dissemos inicialmente iremos mostrar que a resultante é uma ferramenta importante para verificar se dois polinômios tem alguma raiz comum. Mas antes consideremos o seguinte lema:

**Lema B.1** *Sejam  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in A[x]$  polinômios não constantes, onde  $A$  é um domínio de fatoração única. Então  $\text{mdc}(f, g) \neq 1$ , ou seja, os polinômios  $f$  e  $g$  admitem um fator comum não constante se, e somente se, existem  $p, q \in A[x]$  com  $\text{grau}(p) \leq n - 1$  e  $\text{grau}(q) \leq m - 1$  tais que*

$$qf = pg.$$

**Demonstração:** Seja  $h \in A[x]$  um fator comum não constante de  $f$  e  $g$ . Então podemos escrever  $f = ph$  e  $g = qh$ , com  $p, q \in A[x]$  e  $\text{grau}(p) \leq n - 1$  e  $\text{grau}(q) \leq m - 1$ . Logo

$$qf = qph = p(qh) = pg.$$

Reciprocamente, se  $qf = pg$  onde  $\text{grau}(p) \leq n - 1$  e  $\text{grau}(q) \leq m - 1$ . Então, usando fatoração única, temos que algum fator irredutível de  $g$  é também fator de  $f$ , pois  $\text{grau}(q) < \text{grau}(g)$ . Dessa forma  $\text{mdc}(f, g) \neq 1$ . ■

**Teorema B.1** *Sejam  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in A[x]$  polinômios, onde  $A$  é um domínio de fatoração única. Então  $R_{f,g} = 0$  se, e somente se,  $a_n = b_m = 0$  ou  $f$  e  $g$  têm um fator comum não constante em  $A[x]$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $a_n \neq 0$ . Então pelo lema anterior, se  $f$  e  $g$  possuem um fator comum não constante se, e somente se, tivermos

$$qf = pg,$$

com  $\text{grau}(p) \leq n - 1$  e  $\text{grau}(q) \leq m - 1$ . Escrevendo

$$\begin{cases} p = u_0 x^{n-1} + \dots + u_{n-1} \\ q = v_0 x^{m-1} + \dots + v_{m-1}, \end{cases}$$

a igualdade

$$(v_0 x^{m-1} + \dots + v_{m-1}) \cdot \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) = (u_0 x^{n-1} + \dots + u_{n-1}) \cdot \left( \sum_{i=0}^m b_i x^i \right),$$

nos conduz, usando igualdade de polinômios, ao sistema de equações nas variáveis  $u_i, v_j$

$$\begin{cases} a_n v_0 & = & b_m u_0 \\ a_{n-1} v_0 + a_n v_1 & = & b_{m-1} u_0 + b_m u_1 \\ & \vdots & \\ a_0 v_{m-1} & = & b_0 u_{n-1}. \end{cases}$$

Obtemos dessa forma um sistema linear nas variáveis  $v_0, \dots, v_{m-1}, u_0, \dots, u_{n-1}$ . Tal sistema admite solução não trivial se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes é nulo. Mas tal determinante coincide com  $R_{f,g}$  a menos de sinal. Portanto o sistema acima tem solução não trivial se, e somente se,  $R_{f,g} = 0$ . ■

**Corolário B.1** *Sejam  $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$ . Escrevendo  $f$  e  $g$  na variável  $x_k$*

$$\begin{cases} f = a_n x_k^n + \dots + a_1 x_k + a_0 \\ g = b_m x_k^m + \dots + b_1 x_k + b_0, \end{cases}$$

onde  $a_i, b_j \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{k-1}]$ . Então dado  $c = (c_1, \dots, c_{k-1})$ , temos

$$R_{f,g}(c) = R_{f,g}(x_k)(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_n(c) = b_m(c) = 0 \\ \text{ou} \\ f(c, x_k), g(c, x_k) \text{ admitem fator comum não constante.} \end{cases}$$

**Demonstração:** Note que  $R_{f,g}(c) = R_{f(c, x_k), g(c, x_k)}$ . Logo pelo teorema anterior segue que  $R_{f,g}(c) = R_{f,g}(c_1, \dots, c_{k-1}) = 0$  se, e somente se,  $a_n(c_1, \dots, c_{k-1}) = b_m(c_1, \dots, c_{k-1}) = 0$  ou  $f(c, x_k)$  e  $g(c, x_k)$  tem um fator comum não constante em  $\mathbb{C}[x_k]$ , isto é, existe  $c_k \in \mathbb{C}$  tal que  $f(c_1, \dots, c_k) = g(c_1, \dots, c_k) = 0$ . ■

# Apêndice C

## Blow up

Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  um conjunto algébrico. Consideremos a coleção  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  de polinômios homogêneos não nulos de mesmo grau de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ . Suponhamos que o ideal  $\langle f_1, \dots, f_k \rangle$  é radical e que  $Y = Z(f_1, \dots, f_k)$  é tal que o aberto  $U = X - Y$  de  $X$  é não vazio. A aplicação

$$\begin{aligned} \Gamma : U &\longrightarrow \mathbb{P}^{k-1} \\ p &\longmapsto [f_1(p) : \dots : f_k(p)], \end{aligned}$$

está bem definida e define um morfismo do aberto  $U = X - Y$  em  $\mathbb{P}^{k-1}$ . A imagem de  $\Gamma$ , que denotaremos por  $\Gamma_F$ , é um subconjunto de  $U \times \mathbb{P}^{k-1}$  que por sua vez é um subconjunto de  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{k-1}$ . Explicitamente

$$\Gamma_F = \{(p, [f_1(p) : \dots : f_k(p)]) \in U \times \mathbb{P}^{k-1} : p \in U = X - Y\}.$$

**Definição C.1** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  um conjunto algébrico e  $F = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  nas condições citadas acima. Definimos o blow up de  $X$  em  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  por  $Bl_F X = \overline{\Gamma_F}$ , onde esse fecho é tomado em  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{k-1}$ .*

Observemos que  $X \times \mathbb{P}^{k-1}$  é fechado em  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{k-1}$ , e assim que  $Bl_F X \subset X \times \mathbb{P}^{k-1}$ . Podemos considerar a projeção na primeira coordenada  $\pi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$  restrita a  $Bl_F X$ ,  $\pi : Bl_F X \longrightarrow X$ , com  $\pi(x, b) = x$ . Notemos que  $\pi$  restrita a  $\Gamma_F$  define uma bijeção com imagem  $X - Y$  e inversa  $\Gamma$ . Como  $\pi$  e  $\Gamma$  são morfismos então segue que  $\Gamma_F$  e  $X - Y$  são isomorfos. A imagem inversa  $\pi^{-1}(x)$  com  $x \in X - Y$  é simplesmente  $\pi^{-1}(x) = (x, [f_1(x) : \dots : f_k(x)])$ . Quando o contexto estiver claro usaremos apenas a notação  $\tilde{X}$  para denotar  $Bl_F X$ .

**Definição C.2** *Seja  $Bl_F X$  o blow up de  $X$  em  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  e  $\pi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$  a projeção na primeira coordenada. O conjunto  $\pi^{-1}(Y) = \pi^{-1}(Z(f_1, \dots, f_k))$  é*

chamado de conjunto excepcional (ou superfície excepcional) e  $\pi^{-1}(X)$  é chamado transformado total.

Em geral não é fácil calcular o fecho de um conjunto em um espaço topológico. De modo particular para calcular o fecho de  $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{k-1}$ , deveríamos encontrar um conjunto dos zeros de polinômios bihomogêneos contendo  $X$  e contido em qualquer outro fechado contendo  $X$ . Visto que essa tarefa em geral não é simples, iremos nos próximos resultados tentar encontrar algumas técnicas que nos ajudem a descobrir o blow up de um conjunto algébrico  $X$ .

**Lema C.1** *Nas notações estabelecidas acima temos que*

$$\Gamma_F = \{(x, [b_1 : \dots : b_k]) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{k-1} : x \in X - Y \text{ e } b_i f_j(x) = b_j f_i(x), \forall 1 \leq i, j \leq k\}.$$

**Demonstração:** Denotemos o conjunto da direita por  $\mathcal{Z}$ . Dado  $(x, [f_1(x) : \dots : f_k(x)]) \in \Gamma_F$ , como  $f_i(x)f_j(x) = f_j(x)f_i(x)$ , então  $(x, [f_1(x) : \dots : f_k(x)]) \in \mathcal{Z}$ . Reciprocamente, seja  $(x, [b_1 : \dots : b_k]) \in \mathcal{Z}$ . Como  $[b_1 : \dots : b_k] \in \mathbb{P}^{k-1}$ , então  $b_i \neq 0$ , para algum  $i = 1, \dots, k$ . Suponhamos sem perda de generalidade que  $b_1 \neq 0$ . Temos que  $b_1 f_i(x) = b_i f_1(x)$ ,  $\forall 1 \leq i \leq k$ . O que nos dá  $f_i(x) = \frac{b_i}{b_1} f_1(x)$ . Observemos que nesse caso  $f_1(x)$  é diferente de zero, pois  $x \in X - Y$ . Daí

$$[f_1(x) : \dots : f_k(x)] = \left[ \frac{b_1}{b_1} f_1(x) : \dots : \frac{b_k}{b_1} f_1(x) \right] = [b_1 : \dots : b_k].$$

Logo  $(x, [b_1 : \dots : b_k]) \in \Gamma_F$ . O que mostra a igualdade acima. ■

Pelo que mostramos acima temos que  $Bl_F X = \overline{\mathcal{Z}}$ .

Seja  $\Sigma = Z(\{y_i f_j - y_j f_i\}_{1 \leq i, j \leq k})$ , onde  $y_i f_j - y_j f_i \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k]$  são polinômios bihomogêneos. Segue que  $\Sigma$  é um fechado de  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{k-1}$ . Pelo que fizemos acima segue que  $\Gamma_F \subset \Sigma$ . Assim  $Bl_F X \subset \Sigma$ .

**Teorema C.1** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva. Suponhamos que  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  é tal que  $X - Y \neq \emptyset$ , onde  $Y = Z(f_1, \dots, f_k)$ . Se  $f_1, \dots, f_k$  é uma sequência regular no anel de coordenadas de  $X$ , então*

$$Bl_F X = Z(\{y_i f_j - y_j f_i\}_{1 \leq i, j \leq k}), \text{ onde } F = \{f_1, \dots, f_k\}.$$

**Demonstração:** Ver o Lema da seção 2.4 bem como a observação (iii) da seção 2.5 de [7]. ■

Mostraremos a seguir que o blow up de uma variedade projetiva é também um conjunto irredutível.

**Proposição C.1** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva, isto é, um conjunto algébrico irredutível. Suponhamos que  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  é tal que  $Y = Z(f_1, \dots, f_k) \subset X$  e  $U = X - Y$  é não vazio. Então  $Bl_F X$  é irredutível.*

**Demonstração:** Observemos que se  $X$  é irredutível em  $\mathbb{P}^n$  e  $Y$  é um subconjunto fechado de  $X$ , então  $X - Y$  é irredutível. Com efeito, seja  $X - Y = F_1 \cup F_2$ , onde  $F_1, F_2 \subset X - Y$  são fechados. Temos que  $F_i = \overline{F_i} \cap (X - Y)$ ,  $i = 1, 2$ , onde  $\overline{F_i}$  é o fecho de  $F_i$  em  $X$ . Daí  $X - Y \subset \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$ . Temos assim que  $X = \overline{F_1} \cup (\overline{F_2} \cup Y)$ . Como  $F_1$  e  $\overline{F_2} \cup Y$  são fechados de  $X$  e  $X$  é irredutível, então  $X = \overline{F_1}$  ou  $X = \overline{F_2} \cup Y$ . No primeiro caso  $F_1 = \overline{F_1} \cap (X - Y) = X \cap (X - Y) = X - Y$ . Caso seja  $X = \overline{F_2} \cup Y$ , então  $X - Y = (X - Y \cap \overline{F_2}) \cup (X - Y \cap Y) = X - Y \cap \overline{F_2} = F_2$ . Portanto  $X - Y$  é irredutível. Temos que  $U = X - Y$  e  $\Gamma_F$  são isomorfos, onde

$$\Gamma_F = \{(p, [f_1(p) : \dots : f_k(p)]) \in U \times \mathbb{P}^{k-1} : p \in U = X - Y\}.$$

Como  $U$  é irredutível segue que  $\Gamma_F$  é irredutível e portanto seu fecho  $Bl_F X = \overline{\Gamma_F}$  é também irredutível. ■

**Exemplo C.1** *Vamos calcular o blow up de  $\mathbb{P}^2$  sobre o ponto  $p = [1 : 0 : 0] \in \mathbb{P}^2$ . Nesse caso temos que  $\mathcal{I}(p) = \langle x_1, x_2 \rangle$ . Observemos que  $x_1, x_2$  é sequência regular em  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Assim  $Bl_G \mathbb{P}^2 = \{([x_0 : x_1 : x_2], [b_1 : b_2]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 : b_1 x_2 = b_2 x_1\}$ , onde  $G = \{x_1, x_2\}$ . Analisando agora a projeção  $\pi : Bl_G \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  obtemos que*

$$\pi^{-1}(x) = \begin{cases} (x, [x_1 : x_2]), & \text{se } x = [x_0 : x_1 : x_2] \neq p, \\ \{p\} \times \mathbb{P}^1, & \text{se } x = p. \end{cases}$$

**Observação C.1** *Seja  $Y = Z(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade linear, com  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  polinômios homogêneos de grau 1 linearmente independentes (dessa forma  $k \leq n+1$ ). Sob essas condições a sequência  $f_1, \dots, f_k$  é regular em  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ . Assim pelo teorema C.1 segue que*

$$Bl_F \mathbb{P}^n = Z(\{y_i f_j - y_j f_i\}_{1 \leq i, j \leq k}) = \{(x, [b_1 : \dots : b_k]) : x \in \mathbb{P}^n \text{ e } b_i f_j(x) - b_j f_i(x) = 0\},$$

onde  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ . Se trocarmos os geradores do ideal  $\mathcal{I}(Y)$  por uma outra coleção  $g_1, \dots, g_s$  de polinômios de grau 1 linearmente independentes, então os subespaços  $[f_1, \dots, f_k]$  e  $[g_1, \dots, g_s]$  do espaço vetorial dos polinômios de grau 1  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_1$  são iguais. Daí, como essas coleções são linearmente independentes, segue que  $s = k$ .

Novamente como a sequência  $g_1, \dots, g_k$  é regular em  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  temos que

$$Bl_G \mathbb{P}^n = \{(x, [a_1 : \dots : a_k]) : x \in \mathbb{P}^n \text{ e } a_i g_j(x) - a_j g_i(x) = 0\},$$

com  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ . Seja  $T : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  uma mudança de coordenadas projetivas tal que  $T_\bullet f_i = g_i, \forall i = 1, \dots, k$ . Definamos

$$\begin{aligned} \psi : Bl_G \mathbb{P}^n &\longrightarrow Bl_F \mathbb{P}^n \\ (x, b) &\longmapsto (T^{-1}(x), b). \end{aligned}$$

Observemos que  $\psi$  está bem definida, pois se  $b = [b_1 : \dots : b_k]$  então

$$b_i f_j(T^{-1}(x)) - b_j f_i(T^{-1}(x)) = b_i T_\bullet f_j(x) - b_j T_\bullet f_i(x) = b_i g_j(x) - b_j g_i(x) = 0.$$

Além disso,  $\psi$  é um morfismo com inversa  $\psi^{-1}(x, b) = (T(x), b)$ . Portanto  $Bl_F \mathbb{P}^n \cong Bl_G \mathbb{P}^n$ . Por tudo que fizemos acima concluímos que o blow up de  $\mathbb{P}^n$  em uma variedade linear  $Y$  independe da escolha mínima de geradores para o ideal  $\mathcal{I}(Y)$ . Por essa razão escreveremos simplesmente  $Bl_Y \mathbb{P}^n$ .

**Exemplo C.2** Seja  $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$ , onde  $f = x_2^2 - x_1 x_0 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Vamos calcular o blow up de  $C$  no ponto  $p = [1 : 0 : 0]$ , ou seja, na coleção  $F = \{x_1, x_2\}$ . Notemos que  $x_1, x_2$  não é sequência regular no anel de coordenadas de  $C$ . Com efeito, o anel de coordenadas de  $C$  é

$$S(C) = \frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]}{\langle x_2^2 - x_1 x_0 \rangle}.$$

Não é difícil verificar que  $x_1$  não é divisor de zero em  $S(C)$ . Mas  $x_2$  é divisor de zero em  $S(C)/\langle x_1 \rangle$ , pois

$$\frac{S(C)}{\langle x_1 \rangle} \cong \frac{S(C)}{\langle x_2^2 \rangle}.$$

Logo não podemos aplicar o teorema C.1. Temos, pelo Lema C.1, que

$$\Gamma_F = \{(x, [b_1 : b_2]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 : x = [x_0 : x_1 : x_2] \in C - \{p\} \text{ e } b_1 x_2 = b_2 x_1\}.$$

Assim devemos calcular o fecho  $\tilde{C} = \overline{\Gamma_F}$ . Usando a aplicação  $\pi$  calculada no exemplo anterior para o blow up de  $\mathbb{P}^2$  em  $p$ , podemos notar que  $\Gamma_F = \pi^{-1}(C - \{p\})$  e assim  $\tilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C - \{p\})}$ . Observemos também que  $\pi^{-1}(C) = \{([x_0 : x_1 : x_2], [b_1 : b_2]) : [x_0 : x_1 : x_2] \in C \text{ e } b_1 x_2 = b_2 x_1\}$ . Como  $C = (C - \{p\}) \cup \{p\}$  é uma união disjunta, aplicando  $\pi^{-1}$ , segue  $\pi^{-1}(C) = \pi^{-1}(C - \{p\}) \cup \pi^{-1}(p)$  é também uma união

disjunta. Tomando o fecho na igualdade anterior e usando que pre-imagem de um fechado por  $\pi$  é fechado, já que  $\pi$  é morfismo, obtemos  $\pi^{-1}(C) = \tilde{C} \cup \pi^{-1}(\{p\})$ . Como  $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{P}^1$ , então  $\pi^{-1}(C) = \tilde{C} \cup (\{p\} \times \mathbb{P}^1)$ . Para encontrar  $\tilde{C}$ , lembremos que  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 = (\mathbb{P}^2 \times U_0) \cup (\mathbb{P}^2 \times U_1)$ , onde  $U_0$  e  $U_1$  são os abertos básicos de  $\mathbb{P}^1$ . Segue disso que  $\tilde{C} = (\mathbb{P}^2 \times U_0 \cap \tilde{C}) \cup (\mathbb{P}^2 \times U_1 \cap \tilde{C})$ . Mas temos que

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(C) \cap \mathbb{P}^2 \times U_0 &= (\tilde{C} \cup \{p\} \times \mathbb{P}^1) \cap \mathbb{P}^2 \times U_0 = (\tilde{C} \cap \mathbb{P}^2 \times U_0) \cup (\{p\} \times U_0), \\ \pi^{-1}(C) \cap \mathbb{P}^2 \times U_1 &= (\tilde{C} \cup \{p\} \times \mathbb{P}^1) \cap \mathbb{P}^2 \times U_1 = (\tilde{C} \cap \mathbb{P}^2 \times U_1) \cup (\{p\} \times U_1).\end{aligned}$$

Agora se  $([x_0 : x_1 : x_2], [b_1 : b_2]) \in \pi^{-1}(C) \cap \mathbb{P}^2 \times U_0$ , então  $b_1 \neq 0$  e

$$\begin{cases} x_2^2 - x_1x_0 = 0, \\ b_1x_2 - b_2x_1 = 0. \end{cases}$$

Então  $x_2 = \frac{b_2}{b_1}x_1$ , e substituindo na primeira equação segue que  $\frac{b_2^2}{b_1^2}x_1^2 - x_1x_0 = x_1(\frac{b_2^2}{b_1^2}x_1 - x_0) = 0$ . Se  $x_1 = 0$ , temos que  $x_2 = 0$ , e assim  $x = p$ , Com  $[b_1 : b_2] \in U_0$ . Ou seja, acabamos de encontrar  $\{p\} \times U_0$ . Agora se  $x_1 \neq 0$ , então  $x_0 = \frac{b_2^2}{b_1^2}x_1$ . Logo  $[x_0 : x_1 : x_2] = [\frac{b_2^2}{b_1^2}x_1 : x_1 : \frac{b_2}{b_1}x_1] = [b_2^2 : b_1^2 : b_1b_2]$ . Então  $\tilde{C} \cap \mathbb{P}^2 \times U_0 = \{([b_2^2 : b_1^2 : b_1b_2], [b_1 : b_2]) : [b_1 : b_2] \in U_0\}$ . Procedendo de modo análogo para  $\pi^{-1}(C) \cap \mathbb{P}^2 \times U_1$  encontramos que  $\tilde{C} \cap \mathbb{P}^2 \times U_1 = \{([b_2^2 : b_1^2 : b_1b_2], [b_1 : b_2]) : [b_1 : b_2] \in U_1\}$ . Portanto  $\tilde{C} = \{([b_2^2 : b_1^2 : b_1b_2], [b_1 : b_2]) : [b_1 : b_2] \in \mathbb{P}^1\}$ .

A curva para a qual calculamos o blow up no ponto  $p$  no exemplo anterior é irreduzível. O lema a seguir nos dá uma ferramenta importante para calcularmos o blow up em uma variedade  $X$  redutível.

**Lema C.2** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva com decomposição em componentes irreduzíveis  $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$  e  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  uma coleção de polinômios homogêneos não nulos de mesmo grau de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  e  $U = X - Y$  um aberto não vazio de  $X$ , onde  $Y = Z(f_1, \dots, f_k)$ . Então  $\tilde{X} = Bl_F X = \tilde{X}_1 \cup \dots \cup \tilde{X}_k$ .*

**Demonstração:** Em nosso caso temos que  $\Gamma_F = \{(x, [f_1(x) : \dots : f_k(x)]) : x \in U\}$ . Escrevendo  $\Gamma_F^i = \{(x, [f_1(x) : \dots : f_k(x)]) : x \in U \cap X_i\}$ , segue que  $\Gamma_F = \Gamma_F^1 \cup \dots \cup \Gamma_F^k$ . Tomando o fecho na igualdade acima encontramos  $\tilde{X} = Bl_F X = \tilde{X}_1 \cup \dots \cup \tilde{X}_k$ . Como queríamos mostrar. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] ASSIS JUNIOR, Geraldo de: *Cálculo das retas numa superfície cúbica em  $\mathbb{P}^3$* , João Pessoa, UFPB, 2011.
- [2] CARMO, Manfredo Perdigão do: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 5. ed., Rio de Janeiro, SBM, 2012.
- [3] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, 1996.
- [4] EISENBUD, David, HARRIS, Joe: *Intersection Theory in Algebraic Geometry*, 2013.
- [5] FISCHER, Gerd: *Plane algebraic curves*, American Mathematical Society, 2000.
- [6] FULTON, William: *Intersection Theory*, American Mathematical Society, 1996.
- [7] FULTON, William: *Introduction to intersection theory in algebraic geometry*, Regional conference series in mathematics, ISSN 0160-7642; no. 54, 1980.
- [8] GRIFFITHS, Philip; HARRIS, Joseph: *Principles of algebraic geometry*, New York, JOHN WILEY and SONS, 1978.
- [9] HARTSHORNE, Robin: *Algebraic geometry*, New York, Springer-Verlag, 1977.
- [10] KUNZ, Ernst: *Introduction to Plane Algebraic Curves*, Birkhauser, 2005.
- [11] LISBOA, Viviane de Jesus: *O problema das 4 retas do cálculo de Schubert*, João Pessoa, UFPB, 2011.
- [12] MIYAOKA, Yoichi: *The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants*. *Mathematische Annalen*, v. 268, n. 2, p. 159-171, 1984.
- [13] NICOLAESCU, Liviu: *The Euler Characteristic*, Disponível em <<https://www3.nd.edu/~lnicolae/EulerChar.pdf>>. Acesso em: 20 de jun. 2016.

- [14] RAMS, Sławomir; SCHÜTT, Matthias: *64 lines on smooth quartic surfaces*. *Mathematische Annalen*, v. 362, n. 1-2, p. 679-698, 2015.
- [15] SALMON, George: *On the triple tangent planes to a surface of the third order*, *The Cambridge and Dublin mathematical journal*, v. 4, p. 252-260, 1849.
- [16] SEGRE, Beniamino: *The maximum number of lines lying on a quartic surface*, *The Quarterly Journal of Mathematics*, n. 1, p. 86-96, 1943.
- [17] SHAFAREVICH, Igor Rostislavovich: *Basic algebraic geometry 1*, New York, Springer-Verlag, 1977.
- [18] SILVA, Sally Andria Vieira da: *Sobre o número máximo de retas em superfícies de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^3$* , João Pessoa, UFPB, 2016.
- [19] STEIGER, Andreas: *Inflexion Points on Plane Algebraic Curves*, ETH Zürich, 2018.
- [20] VAINSENER, Israel: *Introdução às Curvas Algébricas*, Rio de Janeiro, IMPA, 2005.