Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Estudo sobre Espaços Paracompactos

Ronaldo César Duarte

João Pessoa – PB
Março de 2014

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Estudo sobre Espaços Paracompactos

por

Ronaldo César Duarte[1]

sob a orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

João Pessoa – PB
Março de 2014

[1]Esta dissertação contou com o apoio financeiro do CNPq

D812u Duarte, Ronaldo César.
Um estudo sobre espaços paracompactos / Ronaldo César Duarte.- João Pessoa, 2014.
146f.
Orientador: Daniel Marinho Pellegrino
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Espaços topológicos. 3. Paracompacidade. 4. Caracterização. 5. Seleção contínua.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Um Estudo Sobre Espaços Paracompactos

por

Ronaldo César Duarte

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada em 18 de março de 2014, por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino - UFRN

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

"...Conhecereis a verdade e a verdade vos libertará."(João. 8:32)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me inspirado nas decisões tomadas.

Agradeço aos meus pais, Josefa Tomaz de Lima Duarte e Severino do Ramo Duarte, a meus irmãos, Alexssandro Robson Duarte e Sérgio Roberto Duarte, a Micarla da Rocha oliveira, mulher de Sérgio e minha sobrinha Rebeca por me apoiarem incondicionalmente.

Agradeço a Sueli Cristina, por ser essa pessoa especial, que me mostra em cada oportunidade como a vida pode ser encarada de maneira simples e com amor.

Agradeço a "menininho"(meu gato doméstico).

Agradeço ao meu amigo Geilson Ferreira Germano por estar ao meu lado nesses dois anos, superando dificuldades, porém, mais do que isso, apreciando comigo o prazer de se estudar matemática. Agradeço também a Cícera, Dona Luiza e Germano, familiares de Geilson, por serem pessoas que dão importância as coisas certas da vida e que me receberam de braços abertos e me ajudaram, sempre que precisei.

Agradeço também aos professores de graduação Ronaldo Freire de Lima e Rubens Leão de Andrade pela excelente formação que me deram.

Agradeço ao meu orientador, Daniel Marinho Pellegrino.

Agradeço também a Cinerlene Davi de Oliveira, Natanailde de Souza Delgado, Jéssica Agna de Andrade, Neuma Maria Bezerra, Kaline Souza dos Santos, Danillo Alves da Silva, Leandro César da Silva, Ivone Lima, Tiago Diogo Ferreira e César Augusto Félix.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a construção do trabalho.

Resumo

Neste trabalho faremos uma introdução a uma classe especial de espaços topológicos, a saber, os espaços topológicos paracompactos. A princípio, veremos alguns teoremas clássicos de caracterização de espaços paracompactos. Caracterizaremos também os espaços topológicos localmente compactos e Hausdorff que são paracompactos. Por fim, mostraremos o celebrado Teorema de Seleção Convexo-Valuada, que garante que um espaço topológico X que é T_1 é paracompacto se, e somente se, para todo espaço de Banach Y, toda função semicontínua inferiormente

$$\begin{array}{rccl} \phi: & X & \longrightarrow & 2^Y \\ & x & \longmapsto & \phi(x), \end{array}$$

com $\phi(x)$ não vazio, convexo e fechado para todo $x \in X$, admite uma seleção contínua.

Palavras-chave: Paracompacidade, Caracterização, Seleção Contínua.

Abstract

In this paper we will introduce a special class of Topological Spaces, namely the paracompact topological spaces. At first, we look at some classical characteriztion theorems of paracompact spaces. We also characterize the locally compact Hausdorff spaces which are paracompact. Finally, we prove the celebrated Convex-Valued Selection Theorem, which ensures that a topological space X which is T_1 is paracompact if and only if for every Banach space Y, every lower semi-continuous function

$$\begin{array}{rccc} \phi : & X & \longrightarrow & 2^Y \\ & x & \longmapsto & \phi(x), \end{array}$$

with $\phi(x)$ non-empty, closed and convex for all $x \in X$, admits a continuous selection.

Keywords: Paracompactness, Characterization, Continuous Selection.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação, faremos uma breve introdução ao estudo de uma classe especial de espaços topológicos, a saber, os espaços topológicos paracompactos. Este conceito foi apresentado pela primeira vez em [3] no ano de 1944, como uma generalização de compacidade, sendo publicados, após isto, vários outros resultados em matemática sobre esse tema, notavelmente nas áreas de Topologia e Análise Funcional. Um espaço topológico de Hausdorff é paracompacto se possui a seguinte propriedade: Toda cobertura aberta deste espaço possui um refinamento aberto localmente finito. Apresentaremos alguns resultados em torno deste conceito.

Nosso trabalho está dividido da seguinte forma:

No *Capítulo* 1 estudamos alguns resultados topológicos, que o leitor poderá encontrar em livros básicos de Topologia. Se o leitor for familiarizado com Topologia, então poderá começar o estudo deste trabalho pelo segundo capítulo, sem grandes perdas. Para o leitor que não tem familiaridade com Topologia, recomendamos fortemente o estudo do primeiro capítulo como pré-requisito para os capítulos seguintes. Neste capítulo, apresentamos também uma introdução à Aritmética Cardinal, que nos dará condições para mostrar que a classe dos espaços localmente compactos e Hausdorff não está contida na classe dos espaços topológicos paracompactos.

No *Capítulo* 2, introduziremos o estudo dos espaços topológicos paracompactos. Neste capítulo, apresentaremos algumas caracterizações para esta propriedade topológica e exemplos de espaços topológicos paracompactos, em particular, mostraremos que todo espaço métrico é paracompacto. Veremos neste capítulo que o produto de espaços topológicos paracompactos nem sempre é paracompacto e daremos uma condição suficiente para que o produto de dois espaços topológicos paracompactos possa vir a ser paracompacto.

No *Capítulo* 3, apresentaremos uma condição necessária e suficiente para que um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff seja um espaço topológico paracompacto. Ainda neste capítulo, daremos um exemplo de um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff que não é paracompacto.

No *Capítulo* 4, estudaremos um pouco da Teoria de Seleção Contínua, introduzida na matemática por Ernest Michael na década de 50. Apresentaremos, neste capítulo, como principal resultado o Teorema de Seleção Convexo-Valuada, publicado por Ernest Michael em 1956 e que nos dá por um lado mais uma caracterização para os espaços topológicos paracompactos e, por outro lado, a existência de seleções contínuas para funções semi-contínuas inferiormente com certas propriedades, definidas em espaços paracompactos. Veremos algumas consequências deste teorema, como uma generalização do Teorema de Bartle-Graves.

Finalmente, o *Apêndice A* é dedicado a apresentar alguns resultados necessários para o que pretendemos fazer nos capítulos 2,3 e 4. Os apêndices $A.1$, $A.2$ e $A.3$ são destinados para introduzir módulos projetivos e mostrar que um módulo é projetivo se, e somente se, este módulo possui uma base projetiva. Nos apêndices $A.4$ e $A.5$, enunciamos alguns resultados básicos de Análise Funcional e conjuntos convexos, respectivamente, usados durante o texto. O Apêndice $A.6$ é destinado ao estudo de séries em espaços normados, que nos dará condições para demonstrarmos o Teorema de Seleção Convexo-Valuada.

Capítulo 1

Resultados Iniciais

1.1 Topologia Geral

Nesta seção apresentaremos uma coletânea de definições básicas de topologia que serão utilizadas durante o texto.

Definição 1.1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma topologia em X é um subconjunto τ do conjunto das partes de X, que satisfaz:*

- $\emptyset, X \in \tau$.
- *Se $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma coleção de conjuntos em τ, então $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.*
- *Se $U_1, U_2, ..., U_n$ são conjuntos em τ, então $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.*

Um conjunto X munido de uma topologia τ é chamado de espaço topológico. Indicaremos o espaço topológico formado por X e τ por (X, τ). Quando não houver dúvida, indicaremos um espaço topológico (X, τ) simplesmente por X. Se X é um conjunto não vazio, são exemplos de espaços topológicos, $(X, \{\emptyset, X\})$ e $(X, P(X))$, onde $P(X)$ é o conjunto das partes de X. Os elementos de τ são chamados de abertos. Um conjunto $A \subset X$ é uma vizinhança de $x \in X$ se existe um aberto A_x tal que, $x \in A_x \subset A$; neste caso, dizemos também que x é um ponto interior a A. Indicaremos o conjunto dos pontos interiores a A por $int(A)$. O leitor não terá dificuldade em verificar que A é aberto em um espaço topológico X se, e somente se, $A = int(A)$.

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto não vazio de X. O conjunto abaixo define uma topologia em Y:

$$R(\tau) := \{A \cap Y; A \in \tau\}.$$

Chamaremos esta topologia de topologia relativa de Y induzida pela topologia de X.

Definição 1.2. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um subconjunto B de X é dito fechado se $X - B$ é aberto.*

Definição 1.3. *Seja $(X; \tau)$ um espaço topológico e seja $A \subset X$ um subconjunto de X. Dizemos que $x \in X$ é um ponto aderente a A se todo aberto que contém x intercepta A. O conjunto dos pontos aderentes a A será chamado de fecho de A e será denotado por $\overline{A}$.*

Proposição 1.1. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $E \subset X$. Então E é fechado se, e somente se, $E = \overline{E}$.*

Demonstração: Suponha que E é fechado e considere $x \notin E$. Neste caso $X - E$ é uma vizinhança aberta de x que não intercepta E, consequentemente $x \notin \overline{E}$. Portanto $E = \overline{E}$. Suponha agora que $E = \overline{E}$. Então para cada $x \in X - E$ temos $x \notin \overline{E}$. Logo, por definição existe uma vizinhança aberta de x que não intercepta E e portanto $X - E$ é aberto. Isto completa a prova. ■

Definição 1.4. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $A \subset X$ é denso em X se, para todo aberto não vazio $C \subset X$ tem-se $A \cap C \neq \emptyset$.*

O leitor não terá dificuldade em perceber que A é denso em X se, e somente se, $X = \overline{A}$.

Definição 1.5. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto β de abertos de X é chamado de base para a topologia τ se todo conjunto aberto é a união de conjuntos em β. Neste caso, diremos que β gera a topologia τ e chamaremos os elementos de β por abertos básicos.*

Definição 1.6. *Sejam (X,τ) e (Y,δ) dois espaços topológicos. A topologia produto no produto cartesiano $X \times Y$ é a topologia que tem como base o conjunto*

$$\{U \times V \subset X \times Y; U \in \tau \text{ e } V \in \delta\}.$$

Exemplo 1.1. *Seja S o conjunto dos números reais não negativos e considere $\beta := \{[a,b); a,b \in S\}$. O conjunto abaixo é uma topologia em S:*

$$\eta := \left\{ \bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda;\ I \text{ é um conjunto e } V_\lambda \in \beta\ \forall \lambda \in I \right\}.$$

É fácil verificar que η é fechado para uniões arbitrárias e que S e $\emptyset$ são elementos de η. Sejam $V_1, ..., V_n$ elementos de η. Suponha que $V_j := \bigcup_{\lambda \in I_j} [a_\lambda, b_\lambda)$, para todo $j \in \{1,2,...,n\}$ e defina $I := \prod_{j=1}^n I_j$. Então,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{j=1}^n V_j &= \bigcap_{j=1}^n \left[\bigcup_{\lambda \in I_j} [a_\lambda, b_\lambda) \right] \\
&= \bigcup_{(\lambda_1,...,\lambda_n) \in I} \left[\bigcap_{p=1}^n [a_{\lambda_p}, b_{\lambda_p}) \right] \\
&= \bigcup_{(\lambda_1,...,\lambda_n) \in I} [max\{a_{\lambda_1},...,a_{\lambda_n}\}, min\{b_{\lambda_1},...,b_{\lambda_n}\}).
\end{aligned}$$

Portanto, η é uma topologia em S que tem como base a coleção β.

Seja X um espaço topológico. Uma cobertura de um conjunto $A \subset X$ é uma família $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de subconjuntos de X tais que $A \subset \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$. A cobertura é dita aberta (fechada) se cada U_λ é um conjunto aberto (fechado) e é finita se o conjunto $\{U_\lambda; \lambda \in I\}$ é finito. Um refinamento de $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma cobertura $\{V_\lambda\}_{\lambda \in J}$ de A tal que para cada $\lambda \in J$ existe $\lambda_0 \in I$ satisfazendo $V_\lambda \subset U_{\lambda_0}$. Um refinamento é dito aberto (fechado) se for uma cobertura aberta (fechada). Uma subcobertura de $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma cobertura $\{W_\lambda\}_{\lambda \in J}$ de A tal que $\{W_\lambda\}_{\lambda \in J} \subset \{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$. Uma subcobertura é dita finita se for uma cobertura finita.

Definição 1.7. *Seja $(X;\tau)$ um espaço topológico. Um subconjunto B de X é compacto se toda cobertura aberta de B possui uma subcobertura finita. Se X for compacto em $(X;\tau)$, então diremos que X é um espaço topológico compacto.*

Definição 1.8. *Seja (X,τ) um espaço topológico. Uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$ de subconjuntos de X é localmente finita se para cada $x \in X$, existe uma vizinhança de x que intercepta apenas uma quantidade finita de conjuntos da família, ou seja, existe uma vizinhança V_x de x tal que o conjunto $\{\lambda \in I; A_\lambda \cap V_x \neq \emptyset\}$ é finito.*

Proposição 1.2. *Seja X um espaço topológico e $\{V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ uma coleção localmente finita. Então para cada compacto $K \subset X$, o conjunto*

$$\{\lambda \in I; V_\lambda \cap K \neq \emptyset\}$$

é finito, ou seja, K intercepta apenas uma quantidade finita de conjuntos desta coleção.

Demonstração: Sejam K um compacto e $\{V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ uma coleção localmente finita em X. Para cada $x \in K$ existe uma vizinhança aberta $V(x)$ de x tal que o conjunto

$$\{\lambda \in I; V_\lambda \cap V(x) \neq \emptyset\}$$

é finito.

A coleção $\{V(x)\}_{x\in K}$ é uma cobertura aberta de K que por sua vez é compacto. Logo, existe uma subcobertura finita de $\{V(x)\}_{x\in K}$. Seja $\{V(x_1), V(x_2), ..., V(x_n)\}$ esta subcobertura finita. Então

$$\begin{aligned}
&\{\lambda \in I; K \cap V_\lambda \neq \emptyset\} \\
&\subset \left\{\lambda \in I; \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i) \cap V_\lambda \neq \emptyset\right\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda \in I; V(x_i) \cap V_\lambda \neq \emptyset\}.
\end{aligned}$$

Como vimos acima, este último conjunto é finito. Portanto K intercepta somente uma quantidade finita de elementos da coleção $\{V_\lambda\}_{\lambda\in I}$. ■

Proposição 1.3. *Sejam X um espaço topológico e $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta de X. Então existe um refinamento localmente finito $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $A_i \subset V_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Para cada $j \in \mathbb{N}$, defina

$$W_j := \bigcup_{i=1}^{j} V_i.$$

É claro que $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de X. Ponha $W_0 = \emptyset$ e defina para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$A_i := W_i - W_{i-1}.$$

Note que a família $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cobre X. De fato, se $x \in X$ então o conjunto

$$\{n \in \mathbb{N}; x \in W_n\}$$

é não vazio, pois $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cobre X. Seja n_x o menor elemento desse conjunto. É fácil ver que $x \in A_{n_x}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$A_i = W_i - W_{i-1} = \bigcup_{j=1}^{i} V_j - \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \subset V_i,$$

ou seja, $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é um refinamento de $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ com $A_i \subset V_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Resta-nos provar que $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma família localmente finita. Para isto, seja $x \in X$ e considere n_x um natural tal que $x \in W_{n_x}$. Veja que W_{n_x} é uma vizinhança aberta de x e ainda, para todo $i > n_x$, temos pela definição de A_i que W_{n_x} não intercepta A_i. Isto mostra que esta família é localmente finita. ∎

Definição 1.9. *Seja X um conjunto. Uma ordem parcial $\leq$ em X é uma relação (ver definição em [5]) tal que, para todos $x, y, z \in X$*

1. *$x \leq x$;*

2. Se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;

3. Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Se $a, b \in X$, então escreveremos $a < b$ para indicar que $a \leq b$ e $a \neq b$.

Definição 1.10. *Seja X um conjunto. Uma ordem total em X é uma ordem parcial $\leq$ em X tal que, para todos $x, y \in X$ temos $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

Definição 1.11. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma coleção $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I} \subset X$ é ordem localmente finita se existe uma ordem total $\leq$ no conjunto I tal que, para cada $\lambda \in I$ a família $\{A_\delta; \delta \leq \lambda\}$ é localmente finita.*

Definição 1.12. *Seja X um conjunto não vazio. Uma métrica em X é uma aplicação d, definida em $X \times X$ e tomando valores reais não negativos, que satisfaz:*

- *$d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;*
- *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todos $x, y, z \in X$;*
- *$d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in X$.*

Sejam $x \in X$, d uma métrica em X e denote para cada $r \in \mathbb{R}$,

$$B(x, r) = \{y \in X; d(x, y) < r\}.$$

Então, $\{B(x, r); x \in X,\ r \in \mathbb{R}\}$ gera uma topologia em X. Diremos que esta topologia foi induzida pela métrica d. Um conjunto munido de uma métrica é chamado de espaço métrico. Durante o texto, consideraremos em um espaço métrico, a topologia induzida pela métrica deste espaço.

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. A aplicação

$$\begin{array}{llll} d: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) & \longmapsto & \left((x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

define uma métrica em $\mathbb{R}^n$, que na literatura matemática é conhecida como métrica euclidiana. Esta métrica induz uma topologia em $\mathbb{R}^n$, que chamaremos ao longo do texto de topologia em $\mathbb{R}^n$ induzida pela métrica euclidiana.

Durante o texto, denotaremos também o conjunto $\{x \in X; d(x, y) \leq \epsilon\}$ simplesmente por $\overline{B}(y, \epsilon)$.

Definição 1.13. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Uma sequência em* X *é uma função* $f : \mathbb{N} \to X$. *Indicaremos uma sequência* $f : \mathbb{N} \to X$ *em* X *por* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *onde* $x_n = f(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.14. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Uma sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* X *converge para* $a \in X$ *se para toda vizinhança* U *de* a *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo* $n > n_0$ *temos* $x_n \in U$. *Neste caso, indicaremos* $x_n \to a$.

Definição 1.15. *Seja* X *um espaço com uma métrica* d. *Uma sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é de Cauchy com relação a* d *se para todo* $\epsilon > 0$ *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, se* $n, m > n_0$ *então* $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Definição 1.16. *Seja* X *um espaço com uma métrica* d. *Um subconjunto* B *de* X *é completo com relação a métrica* d *se toda sequência de Cauchy em* B *converge para um ponto de* B.

Definição 1.17. *Um conjunto* I *é dito ser dirigido se existe uma relação* $\leq$ *em* I *que satisfaz, para todos* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in I$,

1. $\lambda_1 \leq \lambda_1$;

2. *Se* $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *e* $\lambda_2 \leq \lambda_3$, *então* $\lambda_1 \leq \lambda_3$;

3. *Se* $\lambda_1, \lambda_2 \in I$ *então existe* $\lambda_4 \in I$ *tal que* $\lambda_1 \leq \lambda_4$ *e* $\lambda_2 \leq \lambda_4$.

Definição 1.18. *Seja* X *um espaço topológico. Uma rede em* X *é uma função* $P : I \to X$, *onde* I *é um conjunto dirigido. Indicaremos uma rede* $P : I \to X$ *simplesmente por* $\{x_n\}_{n\in I}$, *onde* $P(n) = x_n$ *para todo* $n \in I$.

Definição 1.19. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma rede $\{x_n\}_{n\in I}$ em X converge para $a \in X$ se para toda vizinhança U de a existir $n_0 \in I$ tal que, para todo $n_0 \leq n$ temos $x_n \in U$. Neste caso, indicaremos $x_n \to a$.*

Proposição 1.4. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $E \subset X$. Então, $x \in \overline{E}$ se, e somente se, existe uma rede em E que converge para x.*

Demonstração: Se $x \in \overline{E}$, então para cada vizinhança aberta B de x escolha $x_B \in B \cap E$. Seja $K := \{B \in \tau; B$ é vizinhança de $x\}$. Defina $\leq$ como segue. Para todos $A, B \in K$,

$$A \leq B \Leftrightarrow B \subset A.$$

O conjunto K com $\leq$ é dirigido. Logo $\{x_B\}_{B\in K}$ é uma rede e vê-se facilmente que esta rede em E converge para x. A outra implicação é imediata. ∎

Lema 1.1. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$ tal que, $\{x\} \notin \tau$. Então, existe uma rede $\{x_n\}_{n\in I}$ em X, com $x_n \to x$ e $x_n \neq x$ para todo $n \in I$.*

Demonstração: Por hipótese $X - \{x\}$ não é fechado. Logo $\overline{X - \{x\}} = X$. Pela Proposição 1.4, existe uma rede $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ em $X - \{x\}$ que converge para x. Isto completa a prova. ∎

Exemplo 1.2. *Seja $S = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ e considere a topologia em S que tem como base o conjunto*

$$\{[a, b); a, b \geq 0\}$$

Considere em $S \times S$ a topologia produto. Então, $S \times S$ satisfaz as hipóteses do Lema 1.1 para todo $x \in S \times S$.

Definição 1.20. *Sejam $(X; \tau_1)$ e (Y, τ_2) dois espaços topológicos e $x \in X$. Uma aplicação $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ é contínua em x se para todo $A \in \tau_2$, com $f(x) \in A$, existe $B \in \tau_1$ com $x \in B$ e tal que $f(B) \subset A$. Dizemos também que f é contínua se f é contínua para cada $x \in X$.*

Proposição 1.5. *Sejam X e Y dois espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, para toda rede $\{x_n\}_{n\in I}$ em X que converge para x, a rede $\{f(x_n)\}_{n\in I}$ converge para $f(x)$.*

Demonstração: Suponha que f é contínua em $x \in X$ e seja uma rede $\{x_n\}_{n\in I}$ em X que converge para x. Considere $V_{f(x)}$ uma vizinhança aberta de $f(x)$. Então $f^{-1}(V_{f(x)})$ é uma vizinhança de x e portanto existe $p \in I$ tal que, para todo $n \in I$ com $p < n$, temos $x_n \in f^{-1}(V_{f(x)})$. Consequentemente, para todo $n \in I$ com $p < n$, temos $f(x_n) \in V_{f(x)}$, ou seja, a rede $\{f(x_n)\}_{n\in I}$ converge para $f(x)$.

Provaremos agora a recíproca. Para isto suponha que f não é contínua em $x \in X$. Isto nos dá uma vizinhança aberta $V_{f(x)}$ de $f(x)$ com a seguinte propriedade: para toda vizinhança aberta V_x de x, $f(V_x)$ não está contido em $V_{f(x)}$. Assim para cada vizinhança aberta A de x escolha $x_A \in A$ tal que $f(x_A) \in f(A) - V_{f(x)}$. Seja B o conjunto das vizinhanças abertas de x e considere $\leq$ definida da seguinte forma. Para todos $A, D \in B$,

$$A \leq D \Leftrightarrow D \subset A.$$

A rede $\{x_A\}_{A\in B}$ converge para x, porém $\{f(x_A)\}_{A\in B}$ não converge para $f(x)$. Portanto f é contínua em x. ■

Definição 1.21. *Sejam $(X;\tau)$ e $(X;\delta)$ dois espaços topológicos. As topologias τ e δ são equivalentes se as seguintes funções são contínuas $i_1 : (X;\tau) \to (X;\delta)$, com $i_1(x) = x$ e $i_2 : (X;\delta) \to (X;\tau)$ com $i_2(x) = x$.*

Definição 1.22. *Um espaço topológico $(X;\tau)$ é metrizável se existe uma topologia, induzida por uma métrica, que seja equivalente a topologia τ.*

Definição 1.23. *Um espaço topológico X é dito ser de Hausdorff se para quaisquer dois pontos $x, y \in X$ existem abertos disjuntos A_x e A_y, com $x \in A_x$ e $y \in A_y$.*

É fácil ver que todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff e que $(X;\{X,\emptyset\})$ não é um espaço de Hausdorff. O leitor não terá dificuldade em verificar que se X e Y são espaços topológicos de Hausdorff então o produto $X \times Y$, como a topologia produto, é um espaço topológico de Hausdorff.

Definição 1.24. *Um espaço topológico (X, τ) é regular se para todo fechado A e para todo $x \in X - A$ exitem abertos disjuntos U e V tais que, $x \in U$ e $A \subset V$.*

Lema 1.2. *Seja X um espaço topológico. O espaço X é regular se, e somente se, para cada $x \in X$ e para cada vizinhança aberta U de x, existe um aberto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demonstração: Suponha que X é regular. Sejam $x \in X$ e U uma vizinhança aberta de x. Então $X - U$ é um fechado que não contém x. Logo, existem abertos disjuntos V e W tais que $x \in V$ e $X - U \subset W$. Note que do fato de V e W serem disjuntos obtemos $\overline{V} \cap W = \emptyset$. Assim $x \in V \subset \overline{V} \subset X - W \subset U$.

Agora suponha que para cada $x \in X$ e para cada vizinhança aberta U de x existe um aberto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Considere $x \in X$ e F um fechado em X, com $x \notin F$. Por hipótese, existe um aberto V de X tal que, $x \in V \subset \overline{V} \subset X - F$. Logo, V e $X - \overline{V}$ são abertos disjuntos com $x \in V$ e $F \subset X - \overline{V}$. Portanto X é regular. ■

Proposição 1.6. *Se X e Y são espaços topológicos regulares então o produto $X \times Y$, com a topologia produto, também é regular.*

Demonstração: Sejam $(x, y) \in X \times Y$ e U uma vizinhança aberta de (x, y). Então, podemos escrever $U = \bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda \times W_\lambda$, onde V_λ é um aberto de X e W_λ é um aberto de Y para todo $\lambda \in I$. Com isso, existe $\lambda_0 \in I$ tal que $(x, y) \in V_{\lambda_0} \times W_{\lambda_0}$. Pelo Lema 1.2, existem abetos U_x e U_y em X e Y respectivamente, tais que $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset V_{\lambda_0}$ e $y \in U_y \subset \overline{U_y} \subset W_{\lambda_0}$. Logo,

$$\begin{aligned}
(x, y) &\in U_x \times U_y \\
&\subset \overline{U_x \times U_y} \\
&= \overline{U_x} \times \overline{U_y} \\
&\subset V_{\lambda_0} \times W_{\lambda_0} \subset U.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.2 segue que $X \times Y$, com a topologia produto, é um espaço topológico regular.

■

Exemplo 1.3. *Todo espaço topológico compacto e de Hausdorff é regular. De fato, sejam X um espaço topológico compacto e de Hausdorff, $x \in X$ e $F \subset X$ um fechado que não contém x. De F ser fechado e X ser compacto, concluímos que F também é compacto. Para cada $y \in F$, tome abertos disjuntos $U(x,y)$ e $V(x,y)$ tais que $y \in U(x,y)$ e $x \in V(x,y)$. A coleção $\{U(x,y)\}_{y \in F}$ cobre F. Seja $\{U(x,y_i)\}_{i=1}^{n}$ uma subcobertura da cobertura $\{U(x,y)\}_{y \in F}$. Então,*

$$U := \bigcup_{i=1}^{n} U(x, y_i),$$

$$V := \bigcap_{i=1}^{n} V(x, y_i)$$

são abertos disjuntos e ainda, $x \in V$ e $F \subset U$. Portanto X é regular.

Definição 1.25. *Um espaço topológico (X, τ) é um espaço T_1 se para quaisquer pontos distintos x, y existe uma vizinhança de cada um dos pontos que não contém o outro.*

Lema 1.3. *Um espaço topológico X é um espaço T_1 se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é fechado em X.*

Demonstração: Se X é um espaço topológico T_1, então para cada $y \in X - \{x\}$ existe uma vizinhança aberta de y que não contém x, ou seja, $y \in \; int(X - \{x\})$. Portanto $\{x\}$ é fechado.

Provemos a recíproca. Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Note que $y \in X - \{x\}$ e este último conjunto é aberto. Portanto, $X - \{x\}$ é vizinhança aberta de y que não contém x. Analogamente existe uma vizinhança aberta de x que não contém y. Portanto X é um espaço topológico T_1. ∎

Corolário 1.1. *Se X e Y são espaços topológicos T_1, então o produto $X \times Y$, com a topologia produto, também é T_1.*

Demonstração: Basta notar que, para todo $(x, y) \in X \times Y$ o conjunto $(X \times Y) - \{(x, y)\} = [X \times (Y - \{y\})] \cup [(X - \{x\}) \times Y]$ é aberto e usar o Lema 1.3. ∎

1.2 Teorema da Categoria de Baire

Segundo Petersen (veja [16]) o Teorema da Categoria de Baire foi provado inicialmente em 1890 por Baire em [1] e também por Osgood em [15]. Nesta seção daremos uma demonstração para este Teorema. O Teorema da Categoria de Baire será útil para o que pretendemos mostrar nos capítulos seguintes.

Definição 1.26. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $A \subset X$ é raro em X se $int(\overline{A}) = \emptyset$.*

É fácil ver que o conjunto dos números naturais é raro em $\mathbb{R}$ com a topologia que provém da métrica euclidiana, e também que se M é um espaço métrico, $x \in M$ e $\{x\}$ não é aberto, então $\{x\}$ é raro. Mais geralmente, se (X, τ) é um espaço topológico T_1 e $x \in X$ é tal que $\{x\} \notin \tau$, então $\{x\}$ é raro.

Definição 1.27. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $A \subset X$ é de primeira categoria em (X, τ) se existe uma família enumerável de conjuntos raros $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que,*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Dizemos também que A é de primeira categoria se A é de primeira categoria em $(A, R(\tau))$, onde $R(\tau)$ é a topologia relativa induzida pela topologia τ.

Note que se M é um espaço métrico ou mais geralmente, se (M, τ) é um espaço topológico T_1 com $\{x\} \notin \tau$ para todo $x \in X$, então todo conjunto enumerável é de primeira categoria em (M, τ). Em particular, $\mathbb{Q}$ é de primeira categoria em $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana.

Definição 1.28. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $A \subset X$ é de segunda categoria em (X, τ) se ele não é de primeira categoria em (X, τ). Dizemos também que A é de segunda categoria se A é de segunda categoria em $(A, R(\tau))$.*

Seja $(X, P(X))$ um espaço topológico, onde $P(X)$ é o conjunto das partes de X.

Então todo subconjunto não vazio de X é de segunda categoria em X, já que todo subconjunto não vazio de X possui interior não vazio.

Provaremos agora o Teorema da Categoria de Baire.

Teorema 1.1. *Se X é um espaço com uma métrica d, e se A é um subconjunto completo de X com interior não vazio, então A é de segunda categoria em X.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que A seja de primeira categoria em X. Neste caso, existe uma sequência $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos raros em X tal que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Por hipótese, $int(A)$ é não vazio e como F_1 é raro, então $int(A) - \overline{F_1}$ é um aberto não vazio de X. Considere $1 > p_1 > 0$ e $x_1 \in A$ tais que $\overline{B}(x_1, p_1) \subset \left[int(A) - \overline{F_1}\right]$.

Note que $B(x_1, p_1) - \overline{F_2}$, é um aberto não vazio, pois F_2 é raro. Sendo assim, escolha $\frac{1}{2} > p_2 > 0$ e $x_2 \in B(x_1, p_1)$ tais que $\overline{B}(x_2, p_2) \subset \left[B(x_1, p_1) - \overline{F_2}\right]$.

Recursivamente, para a n-ésima etapa, selecione $\overline{B}(x_n, p_n)$ com $2^{-n} > p_n > 0$ e

$$\overline{B}(x_n, p_n) \subset \left[B(x_{n-1}, p_{n-1}) - \overline{F_n}\right].$$

Isto é possível pois F_n é raro para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, conseguimos uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaz

$$A \supset \overline{B}(x_1, p_1) \supset ... \supset \overline{B}(x_n, p_n) \supset ...$$

A sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em A e como por hipótese A é completo, existe $x_0 \in A$ com $x_n \to x_0$. Porém, $x_0 \in \overline{B}(x_n, p_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica em $x_0 \notin F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente $x_0 \notin A$ o que é uma contradição.

Portanto A é de segunda categoria em X. ■

Corolário 1.2. *Todo espaço métrico completo é de segunda categoria.*

Corolário 1.3. *Se X é um espaço métrico completo e $A \subset X$ é um conjunto de primeira* *categoria em X, então $X - A$ é de segunda categoria em X.*

Demonstração: Basta notar que se $X - A$ fosse de primeira categoria em X, como A por hipótese é de primeira categoria em X, então poderíamos escrever X como uma união enumerável de conjuntos raros em X. Logo, X seria de primeira categoria, o que contradiz o Teorema da Categoria de Baire. ∎

Corolário 1.4. *Seja X um espaço métrico completo tal que $\{x\}$ não é aberto para todo $x \in X$ e A um subconjunto enumerável de X. Então $X - A$ é de segunda categoria em X.*

Corolário 1.5. *O conjunto dos números irracionais é de segunda categoria em $\mathbb{R}$, com a topologia induzida pela métrica euclidiana.*

Exemplo 1.4. *O conjunto*

$$P := \{(x, y); x, y \geq 0 \text{ e } x + y = 1\}$$

é completo com a topologia induzida pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$.

Agora, note que o conjunto $H := \left\{(x, y) \in P; [(x-1)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{Q}\right\}$ é enumerável. De fato, basta provar que aplicação

$$\begin{array}{rccl} f: & H & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & (x, y) & \longmapsto & [(x-1)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

é injetiva. Se $f(x, y) = f(z, w)$, então $(x-1)^2 + y^2 = (z-1)^2 + w^2$. Mas $(x, y), (z, w) \in P$, o que implica em $2y^2 = 2w^2$ e consequentemente $y = w$, já que y e w são não negativos. De $(x, y), (z, w) \in P$ segue que $(x, y) = (z, w)$.

Portanto pelo Corolário 1.4,

$$K := \left\{(x, y) \in P; [(x-1)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} \text{ é irracional}\right\}$$

é de segunda categoria em P.

1.3 Lema de Urysohn

Nesta seção demonstraremos o Lema de Urysohn para espaços normais.

Definição 1.29. *Um espaço topológico é dito normal se para quaisquer dois conjuntos fechados disjuntos A e B existem abertos disjuntos C e D tais que $A \subset C$ e $B \subset D$.*

Provaremos no capítulo 2 que todo espaço topológico paracompacto é normal. Como consequência imediata, obteremos que todo espaço compacto e de Hausdorff é normal e também que todo espaço métrico é normal.

Lema 1.4. *Sejam (X, τ) um espaço topológico normal e dois subconjuntos fechados e disjuntos M e N de X. Então existe um conjunto aberto L tal que $M \subset L \subset \overline{L} \subset X - N$.*

Demonstração: Por hipótese, existem abertos disjuntos L e W tais que $M \subset L$ e $N \subset W$. Como L e W são abertos disjuntos segue que $\overline{L} \cap W = \emptyset$. Consequentemente $\overline{L} \subset X - N$. Logo $M \subset L \subset \overline{L} \subset X - N$. ∎

A seguir provaremos uma versão mais geral deste lema.

Lema 1.5. *Seja (X, τ) um espaço topológico normal. Sejam M e N dois subconjuntos fechados e disjuntos de X. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma família de conjuntos abertos $C_n = \left\{D_{(j,2^n)}; j \in \mathbb{N}, 1 \leq j < 2^n\right\}$ tal que*

1. $\overline{D_{(j,2^n)}} \subset D_{(j+1,2^n)}$, *para todo* $j \in \{1, 2, ..., 2^n - 2\}$
2. $M \subset D_{(1,2^n)}$ *e* $\overline{D_{(2^n-1,2^n)}} \subset X - N$

Demonstração: Provemos este Lema por indução sobre n. Pelo Lema 1.4, existe um aberto $D_{(1,2)}$ tal que

$$M \subset D_{(1,2)} \subset \overline{D_{(1,2)}} \subset X - N.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que existe uma família $C_n = \left\{A_{(j,2^n)}; j \in \mathbb{N}, 1 \leq j < 2^n\right\}$ tal que $\overline{A_{(j,2^n)}} \subset A_{(j+1,2^n)}$, para todo $j \in \{1, 2, ..., 2^n - 2\}$, $M \subset A_{(1,2^n)}$ e $\overline{A_{(2^n-1,2^n)}} \subset X - N$. Defina para cada $j \in \{1, 2, ..., 2^n - 1\}$,

$$D_{(2j,2^{n+1})} := A_{(j,2^n)}.$$

Como M e $X - D_{(2,2^{n+1})}$ são disjuntos e fechados, assim como $\overline{D_{(2^{n+1}-2,2^{n+1})}}$ e N, temos novamente pelo Lema 1.4 que existem conjuntos abertos $D_{(1,2^{n+1})}$ e $D_{(2^{n+1}-1,2^{n+1})}$ tais que

$$M \subset D_{(1,2^{n+1})} \subset \overline{D_{(1,2^{n+1})}} \subset D_{(2,2^{n+1})}; \tag{1.1}$$

$$\overline{D_{(2^{n+1}-2,2^{n+1})}} \subset D_{(2^{n+1}-1,2^{n+1})} \subset \overline{D_{(2^{n+1}-1,2^{n+1})}} \subset X - N. \tag{1.2}$$

Note que, para todo $j \in \{1, 2, ..., 2^n - 2\}$, os conjuntos $\overline{D_{(2j,2^{n+1})}}$ e $X - D_{(2j+2,2^{n+1})}$ são fechados e disjuntos, novamente pelo Lema 1.4, existe um aberto $D_{(2j+1,2^{n+1})}$ tal que,

$$\overline{D_{(2j,2^{n+1})}} \subset D_{(2j+1,2^{n+1})} \subset \overline{D_{(2j+1,2^{n+1})}} \subset D_{(2j+2,2^{n+1})}. \tag{1.3}$$

Construímos uma família de conjuntos abertos $C_{n+1} := \left\{D_{(j,2^{n+1})}; 1 \leq j < 2^n\right\}$ que por (1.1), (1.2) e (1.3) satisfazem as condições impostas em 1 e 2 no lema acima. Isto conclui a demonstração do lema. ∎

Lema 1.6. ***(Lema de Urysohn)*** *Seja X um espaço topológico normal. Sejam A e B dois subconjuntos fechados e disjuntos de X. Então existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$.*

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a família $C_n := \left\{D_{(j,2^n)}; 1 \leq j < 2^n\right\}$ que construímos no Lema 1.5. Esta família satisfaz

1. $\overline{D_{(j,2^n)}} \subset D_{(j+1,2^n)}$, para todo $j \in \{1, 2, ..., 2^n - 2\}$
2. $A \subset D_{(1,2^n)}$ e $\overline{D_{2^n-1,2^n}} \subset X - B$

A família que construímos no Lema 1.5, além das condições acima, também satisfaz $D_{(j,2^n)} = D_{(2j,2^{n+1})}$, para todo $j \in \{1, 2, ..., 2^n - 1\}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. De 1 e 2, podemos escrever

$$A \subset D_{(1,2^n)} \subset ... \subset D_{(j,2^n)} \subset \overline{D_{(j,2^n)}} \subset D_{(j+1,2^n)} ... \subset \overline{D_{(2^n-1,2^n)}} \subset X - B. \tag{1.4}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Denote A por $D_{(0,2^n)}$ e defina

$$\begin{array}{rccl} f_n: & X & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & se \quad x \in A \\ 0 & se \quad x \notin D_{(2^n-1,2^n)} \\ 1-\frac{j}{2^n} & se \quad x \in D_{(j,2^n)} - D_{(j-1,2^n)}, \ j \in \{1,...,2^n-1\} \end{cases} \end{array}$$

A cadeia (1.4) garante que f_n está bem definida. De fato, por (1.4) concluímos que a família $\left\{D_{(j,2^n)} - D_{(j-1,2^n)}; 1 \leq j < 2^n\right\} \cup \left\{A, X - D_{(2_n-1,2^n)}\right\}$ é uma família disjunta, cuja união é X. Com isso definimos uma sequência de funções definidas em X e tomando valores em $[0,1]$, a saber $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sejam $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $x \in D_{(j,2^n)} - D_{(j-1,2^n)}$ para algum $j \in \{1,2,...,2^n-1\}$. Então, $x \in D_{(2j,2^{n+1})}$ e $x \notin D_{(2j-2,2^{n+1})}$. Consequentemente

$$f_{n+1}(x) \in \left\{1 - \frac{j}{2^n}, 1 - \frac{2j-1}{2^{n+1}}\right\} \tag{1.5}$$

o que implica em $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Se $x \in A$ ou $x \notin D_{(2^n-1,2^n)}$ é fácil ver que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Logo, para todo $x \in X$ a sequência $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente e limitada por 1. Portanto, para cada $x \in X$, a sequência $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Defina

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x). \end{array}$$

Segue trivialmente da definição de f que $f(A) = \{1\}$ e $f(B) = \{0\}$. Nos resta, agora, provar a continuidade de f. Seja $n \in \mathbb{N}$. Através de (1.5), para todo $x \in X$ obtemos

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_{n+m}(x)| \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} |f_{n+j-1}(x) - f_{n+j}(x)| \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2^{n+j}} \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+j}} = \frac{1}{2^n}.$$

Note que, novamente por (1.4), a família

$$\left\{\overline{D_{(k,2^n)}} - \overline{D_{(k-1,2^n)}}; k \in \{1, 2, ...2^n - 1\}\right\} \cup \left\{A, X - \overline{D_{(2^n-1,2^n)}}\right\}$$

é uma cobertura de X. Veja que $\overline{D_{(k,2^n)}} - \overline{D_{(k-1,2^n)}} \subset D_{(k+1,2^n)} - \overline{D_{(k-1,2^n)}}$, para todo $k \in \{1, 2, ..., 2^n - 2\}$ e $\overline{D_{(2^n-1,2^n)}} - \overline{D_{(2^n-2,2^n)}} \subset X - \overline{D_{(2^n-2,2^n)}}$. Além disso, $X - \overline{D_{(2^n-1,2^n)}} \subset X - \overline{D_{(2^n-2,2^n)}}$ e $A \subset D_{(1,2^n)}$. Logo a coleção

$$\alpha_n := \left\{D_{(j+1,2^n)} - \overline{D_{(j-1,2^n)}}; j \in \{1, 2, ..., 2^n - 2\}\right\} \cup \left\{D_{(1,2^n)}, X - \overline{D_{(2^n-2,2^n)}}\right\}$$

é uma coleção de abertos, cuja união é X e ainda, dado $Z \in \alpha_n$, para todos $x, y \in Z$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{1.7}$$

Seja $x \in X$. Dado $\epsilon > 0$ tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\epsilon}{4}$. Seja $K \in \alpha_{n_0}$ tal que $x \in K$. O conjunto K é uma vizinhança aberta de x e ainda, por (1.6) e por (1.7) temos para todo $y \in K$,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f(x) - f_{n_0}(x)| \\ &\leq \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0-1}} + \frac{1}{2^{n_0}} = \frac{4}{2^{n_0}} < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto f é contínua e isto completa a prova do lema. ■

1.4 Espaços Localmente Compactos e Hausdorff

Nesta seção apresentaremos como principal resultado, uma versão do Lema de Urysohn para espaços localmente compactos e Hausdorff.

Definição 1.30. *Um espaço topológico X é dito localmente compacto se todo $x \in X$*

admite uma vizinhança compacta.

Todo espaço topológico compacto é localmente compacto. Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é localmente compacto, já que $\overline{B}(x,1)$ é compacta, para todo $x \in X$ (Veja Teorema 1.54 de [2]).

Lema 1.7. *Seja X um espaço localmente compacto e Hausdorff. Sejam $K \subset X$ um subconjunto compacto de X e D um aberto tal que $K \subset D$. Então existe um aberto E, com $\overline{E}$ compacto e $K \subset E \subset \overline{E} \subset D$.*

Demonstração: Provaremos inicialmente o caso em que $K = \{x\}$ para algum $x \in X$. Sejam N uma vizinhança compacta de x e D um aberto que contém x. Pelo Exemplo 1.3, N com a topologia induzida pela topologia de X é um espaço regular. Com isso existem abertos relativos disjuntos U e V em N tais que,

$$\{x\} \subset U \text{ e } N - D \subset V. \tag{1.8}$$

Sejam U_0 e V_0 abertos em X tais que $U = U_0 \cap N$ e $V = V_0 \cap N$. Defina

$$E = int(U).$$

O conjunto E é uma vizinhança aberta de x em X, já que N e U_0 são vizinhanças de x em X. Como $E \subset N$ e o espaço X é de Hausdorff, segue que

$$\overline{E} \subset \overline{N} = N. \tag{1.9}$$

Esta inclusão implica que $\overline{E}$ é compacto.

Note que $E \subset X - V_0$. De fato,

$$\begin{aligned} E \cap V_0 &= int(U) \cap V_0 \\ &\subset U \cap V_0 \\ &= N \cap U_0 \cap V_0 \end{aligned}$$

$$= U \cap V = \emptyset.$$

Como $X - V_0$ é fechado, temos $\overline{E} \subset X - V_0$. Logo, de (1.9) e de (1.8)

$$\begin{aligned}
\overline{E} &\subset N \cap (X - V_0) \\
&\subset N \cap (X - V) \\
&\subset N \cap [X - (N - D)] \\
&= N \cap D \\
&\subset D.
\end{aligned}$$

Com isso provamos que

$$\{x\} \subset E \subset \overline{E} \subset D,$$

com $\overline{E}$ compacto.

Para o caso geral, seja K um subconjunto compacto de X e D um aberto que contém K. Para cada $x \in K$ vimos que existe um aberto $E(x)$ que satisfaz

$$\{x\} \subset E(x) \subset \overline{E(x)} \subset D,$$

com $\overline{E(x)}$ compacto para todo $x \in X$.

A coleção $\{E(x)\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K. Logo, esta cobertura possui uma subcobertura finita $\{E(x_1), E(x_2)..., E(x_n)\}$. Cada $\overline{E(x_i)}$ é compacto, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e com isso, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{E(x_i)} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} E(x_i)}$ é compacto. Note que,

$$\begin{aligned}
K &\subset \bigcup_{i=1}^{n} E(x_i) \\
&\subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} E(x_i)} \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} \overline{E(x_i)} \subset D.
\end{aligned}$$

Portanto $E := \bigcup_{i=1}^{n} E(x_i)$ é o aberto procurado. ∎

Proposição 1.7. *(**Lema de Urysohn para Espaços Localmente Compactos e Hausdorff**) Seja X um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff. Sejam K e F dois subconjuntos disjuntos tais que K é compacto e F é fechado. Então existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(K) = \{1\}$ e $f(F) = \{0\}$.*

Demonstração: Usando o Lema 1.7 para os conjuntos K e $X - F$, existe um aberto E, com $\overline{E}$ compacto, satisfazendo

$$K \subset E \subset \overline{E} \subset X - F.$$

Aplicando novamente o Lema 1.7 para os conjuntos K e E, obtemos um aberto G satisfazendo

$$K \subset G \subset \overline{G} \subset E.$$

O conjunto $\overline{E}$ é compacto com a topologia relativa induzida pela topologia de X. O espaço topológico $\overline{E}$ é de Hausdorff, já que, por hipótese, X é Hausdorff. Logo, $\overline{E}$ com a topologia relativa é um espaço normal. É claro que K também é fechado em $\overline{E}$, pois K fechado em X (X é Hausdorff) e $K \subset \overline{E}$. Além disso, G é um aberto neste espaço, pois G é aberto em X e $G \subset \overline{E}$. Pelo Lema de Urysohn para espaço normais (Lema 1.6), existe uma função contínua $g : \overline{E} \longrightarrow [0,1]$ tal que $g(K) = \{1\}$ e $g(\overline{E} - G) = \{0\}$.

Defina a função

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} g(x) & se \quad x \in \overline{E} \\ 0 & se \quad x \in X - \overline{E}. \end{cases} \end{array}$$

Observe que $f(K) = \{1\}$ e $f(F) = \{0\}$. Mostraremos que f é contínua. Para isto, note que a restrição de f ao aberto E de X coincide com a restrição de g a este aberto, simbolicamente $f\,|_E = g\,|_E$. Logo, $f\,|_E$ é contínua. Por outro lado, f restrita ao aberto $X - \overline{G}$ é constante. Assim $f\,\big|_{X-\overline{G}}$ também é contínua. Com isso, temos dois abertos E e

$X - \overline{G}$ cuja restrição de f a cada um deles é contínua e $E \cup (X - \overline{G}) = X$. Segue que f é contínua. ■

1.5 Aritmética Cardinal

Nesta seção, faremos uma breve introdução à aritmética cardinal. Mostraremos algumas propriedades básicas dos cardinais. Admitiremos que existe uma classe de conjuntos Δ, cujos elementos chamaremos de cardinais e que satisfaz a seguinte condição: para todo conjunto A existe um único cardinal $|A|$ tal que existe uma função bijetiva definida em A e tomando valores em $|A|$, diremos que $|A|$ é o cardinal associado ao conjunto A. Para a construção desta classe, veja [5]. A grosso modo, os cardinais medem o tamanho de um conjunto. Nesta seção, admitiremos que $0 \in \mathbb{N}$. Aqui, não nos preocuparemos em qual axioma do modelo axiomático de Zermelo-Fraenkel estaremos utilizando em cada implicação lógica.

Definição 1.31. *Dois conjuntos A e B são equipolentes se existe uma função $g : A \to B$ bijetiva.*

Note que se A e B são conjuntos equipolentes, então $|A| = |B|$.

Se β e γ são dois cardinais distintos, então somente um dos dois conjuntos, digamos β, é equipolente a um subconjunto próprio do outro, no nosso caso, γ (Veja [5], Teorema 14.4). Neste caso, diremos que β é menor cardinal que γ e escreveremos $\beta < \gamma$. Dados dois cardinais α e β, escreveremos $\alpha \leq \beta$ para indicar que $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$. Se α, β e γ são cardinais então,

1. $\alpha \leq \alpha$.

2. Se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$ então $\alpha = \beta$ (Teorema de Cantor-Bernstein. Veja Teorema 14.6 de [5]).

3. Se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$ então $\alpha \leq \gamma$.

Um cardinal é finito se ele é o conjunto vazio ou se existe $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que este cardinal é equipolente a $I_k := \{n \in \mathbb{N}; n < k\}$. Se isto não ocorre, então dizemos que este cardinal é infinito. Denotaremos $|I_k|$ simplesmente por k.

Exemplo 1.5. *Sabemos que todo subconjunto dos naturais é enumerável. Logo, se α é um cardinal infinito, então $|\mathbb{N}| \leq \alpha$.*

Definição 1.32. *Sejam α e β dois cardinais. Se A e B são dois conjuntos disjuntos equipolentes a α e β, respectivamente, definimos a soma de α e β e indicamos por $\alpha + \beta$ como o único cardinal associado a $A \cup B$.*

A soma de cardinais está bem definida. De fato; sejam dois conjuntos A e C equipolentes a α e dois conjuntos B e D equipolentes β. Suponha que A e B são disjuntos e também que C e D são disjuntos. Por definição, existem funções bijetivas $f : A \to C$ e $g : B \to D$. Como A e B são disjuntos, assim como C e D, a função

$$\begin{array}{rccl} h: & A \cup B & \longrightarrow & C \cup D \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & se \quad x \in A \\ g(x) & se \quad x \in B \end{cases} \end{array}$$

é uma bijeção. Isto implica que $|A \cup B| = |C \cup D|$. Observe que dados dois cardinais α e β é sempre possível escolher conjuntos disjuntos C e D que sejam equipolentes a α e β respectivamente. Já que existem conjuntos A e B que são equipolentes a α e β respectivamente, basta tomar $C := A \times \{1\}$ e $D := B \times \{0\}$.

Proposição 1.8. *Sejam α, β, γ e χ cardinais. Então*

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;

3. *se* $\alpha \leq \beta$ *e* $\gamma \leq \chi$ *então* $\alpha + \gamma \leq \beta + \chi$.

Demonstração: As demonstrações das igualdades 1 e 2 são triviais e não faremos neste texto. Provaremos 3; para isto sejam $A_1, ..., A_4$ conjuntos dois a dois disjuntos e equipolentes a α, β, γ e χ respectivamente. Note que, por definição, existem um subconjunto C de A_2, um subconjunto D de A_4 e funções bijetivas $f : A_1 \to C$ e $g : A_3 \to D$. A função

$$\begin{array}{rccc} h: & A_1 \cup A_3 & \longrightarrow & C \cup D \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & se \quad x \in A_1 \\ g(x) & se \quad x \in A_3 \end{cases} \end{array}$$

é uma bijeção. Com isso

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= |A_1 \cup A_3| \\ &\leq |A_2 \cup A_4| \\ &= \beta + \chi. \end{aligned}$$

■

Definição 1.33. *Sejam α e β dois cardinais. Se A e B são dois conjuntos equipolentes a α e β respectivamente, definimos o produto de α e β e indicamos por $\alpha \cdot \beta$ como o único cardinal associado a $A \times B$.*

O produto de dois cardinais está bem definido. De fato; sejam α e β dois cardinais e suponha que os conjuntos A e C são equipolentes a α e os conjuntos B e D são equipolentes a β. Então, existem funções bijetivas $f : A \to C$ e $g : B \to D$. A função

$$\begin{array}{rccc} h: & A \times B & \longrightarrow & C \times D \\ & (x, y) & \longmapsto & (f(x), g(y)) \end{array}$$

é uma bijeção e daí $|C \times D| = |A \times B|$. Logo o produto de dois cardinais está bem definido.

Exemplo 1.6. *Seja $I_2 = \{0, 1\}$. Observe que a função*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} \times I_2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} 2x & se \quad y = 1 \\ 2x + 1 & se \quad y = 0 \end{cases} \end{array}$$

é bijetiva. Por definição,

$$|\mathbb{N}| \cdot |I_2| = |\mathbb{N} \times I_2| = |\mathbb{N}|.$$

Proposição 1.9. *Para todos cardinais α, β, γ e χ temos:*

1. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

2. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$;

3. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;

4. *Se $\alpha < \beta$ e $\gamma < \chi$ então $\alpha + \gamma < \beta \cdot \chi$.*

Demonstração: Sejam A, B, C e D conjuntos dois a dois disjuntos e equipolentes a α, β, γ e χ respectivamente. Provemos 1,2,3 e 4.

1. Basta notar que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} h: & A \times B & \longrightarrow & B \times A \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$$

é uma bijeção.

2. Vejamos,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= \alpha \cdot |B \times C| \\ &= |A \times (B \times C)\,| \\ &= |\,(A \times B) \times C| \\ &= |A \times B| \cdot |C| \\ &= |A \times B| \cdot \gamma \\ &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma. \end{aligned}$$

3. Basta ver que $A \times B$ e $A \times C$ são disjuntos. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot |B \cup C| \\ &= |A \times (B \cup C)| \end{aligned}$$

$$= |\,(A \times B) \cup (A \times C)\,|$$
$$= |A \times B| + |A \times C|$$
$$= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

4. Existem um subconjunto próprio J_B de B e um subconjunto próprio J_D de D e funções bijetivas $f : A \to J_B$ e $g : B \to J_D$. Sejam $x_b \in B - J_B$ e $x_d \in D - J_D$. A função

$$\begin{array}{rccl} h: & A \cup C & \longrightarrow & B \times D \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} (f(x), x_d) & se \quad x \in A \\ (x_b, g(x)) & se \quad x \in C. \end{cases} \end{array}$$

é injetiva e desse modo, $|A \cup C| \leq |B \times D|$.

Seja $f : A \cup C \to B \times D$ uma função. Mostraremos que esta função não pode ser sobrejetiva. Sejam $P_B : B \times D \to B$ tal que $P_B(x, y) = x$ e $P_D : B \times D \to D$ tal que $P_D(x, y) = y$. A função $f_A : A \to B$ tal que $f_A(x) = [P_B \circ f](x)$ não é sobrejetiva, pois se fosse existiria uma função injetiva definida em B e tomando valores em A, mas isto contradiz a hipótese. Analogamente a função $f_C : C \to D$ tal que $f_C(x) = [P_D \circ f](x)$ não é sobrejetiva. Sejam $e_B \in B - f_A(A)$ e $e_D \in D - f_C(C)$.

O par (e_B, e_D) não pertence a imagem de f. De fato; suponha que $(e_B, e_D) = f(x)$ para algum $x \in A \cup C$. Se $x \in A$ então $f_A(x) = [P_B \circ f](x) = P_B(e_B, e_D) = e_B$. Mas isto não pode ocorrer, pois $e_B \in B - f_A(A)$. Logo, $x \notin A$. Certamente deveremos ter $x \in C$. Mas com isso, $f_C(x) = [P_D \circ f](x) = P_D(e_B, e_D) = e_D$. Isto implica que $e_D \in f_C(C)$, o que é um absurdo.

Logo, f não pode ser sobrejetiva e portanto, $|A \cup C| < |B \times D|$. Portanto

$$\alpha + \gamma = |A \cup C| < |B \times D| = \beta \cdot \chi.$$

■

Definição 1.34. *Sejam α e β dois cardinais, A um conjunto equipolente a α e B um* *conjunto equipolente a β. Definimos*

$$\alpha^\beta := |A^B|$$

onde A^B é o conjunto de todas as funções definidas em B e tomando valores em A.

É fácil ver que a operação acima está bem definida.

Exemplo 1.7. *Neste exemplo verificaremos a igualdade*

$$2^{|\mathbb{N}|} = |\mathbb{R}|.$$

Mostraremos primeiro que $|\mathbb{R}| \leq 2^{|\mathbb{N}|}$. Para isso, defina a função

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & 2^{\mathbb{Q}} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccl} h_x: & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & y & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 0 & se & y < x \\ 1 & se & x \leq y. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \neq y$, os quais podemos supor sem perda de generalidade satisfazendo $x < y$. Existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$. Com isso,

$$h_x(r) = 1 \neq 0 = h_y(r).$$

Logo $h(x) \neq h(y)$, ou seja, h é injetiva. Pelo que acabamos de provar e de $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ temos

$$|\mathbb{R}| \leq |2^{\mathbb{Q}}| = 2^{|\mathbb{Q}|} = 2^{|\mathbb{N}|}. \tag{1.10}$$

Para provar que $2^{|\mathbb{N}|} \leq \mathbb{R}$ defina

$$\begin{array}{rccl} g: & 2^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \sum_{i\in\mathbb{N}} f(i) \cdot 10^{-i}. \end{array}$$

A função g está bem definida. De fato, basta notar que $0 \leq f(i) \cdot 10^{-i} \leq 10^{-i}$ e consequentemente a série que define a função acima é convergente para toda função f definida nos naturais e tomando valores em I_2.

Sejam $f, h \in 2^{\mathbb{N}}$ com $f \neq h$. Então, para algum $i \in \mathbb{N}$, temos $f(i) \neq g(i)$. Seja i_0 o menor número natural tal que $f(i_0) \neq h(i_0)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $f(i_0) = 1$ e $h(i_0) = 0$. Logo

$$\sum_{j=0}^{j=i_0} f(j) \cdot 10^{-j+i_0} - \sum_{j=0}^{j=i_0} h(j) \cdot 10^{-j+i_0} = 1.$$

Isto implica que

$$\sum_{j=0}^{j=i_0} f(j) \cdot 10^{-j+i_0} + \sum_{j=i_0+1}^{\infty} f(j) \cdot 10^{-j+i_0} \neq \sum_{j=0}^{j=i_0} h(j) \cdot 10^{-j+i_0} + \sum_{j=i_0+1}^{\infty} h(j) \cdot 10^{-j+i_0}$$

e consequentemente

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f(j) \cdot 10^{-j} \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} h(j) \cdot 10^{-j}$$

ou seja, $g(f) \neq g(h)$.

Portanto g é injetiva. Esta afirmação implica que

$$2^{|\mathbb{N}|} \leq |\mathbb{R}|. \tag{1.11}$$

Combinando as equações (1.10) e (1.11) e o Teorema de Cantor-Bernstein obtemos o resultado desejado.

Exemplo 1.8. *Se X é um conjunto então $2^{|X|} = |P(X)|$, onde $P(X)$ é o conjunto das partes de X.*

Exemplo 1.9. ***(Teorema de Cantor)*** *Se Y é um conjunto então $|Y| < |2^Y|$. De fato, o caso em que Y é vazio é trivial. Se Y é não vazio, então a aplicação*

$$\begin{aligned} g: \ Y &\longrightarrow P(Y) \\ x &\longmapsto \{x\}\,. \end{aligned}$$

é claramente injetiva. Logo, $|Y| \leq 2^{|Y|}$.

Suponha por absurdo que exista uma bijeção $f : Y \to P(Y)$. *Considere o conjunto* $S := \{x \in Y; x \notin f(x)\}$. *Deve existir* $e \in Y$ *tal que* $f(e) = S$. *Suponha primeiro que* $e \in S$. *Segue da definição de* S *que* $e \notin f(e)$*; mas isto não pode ocorrer, pois* $f(e) = S$. *Portanto, certamente teremos* $e \notin S$. *Segue que* $e \notin f(e) = S$ *e desse modo, pela definição de* S *temos* $e \in S$, *o que não pode ocorrer.*

Logo não pode ocorrer que $e \in S$ *nem que* $e \notin S$ *e isto é um absurdo. Portanto* $|Y| < |2^Y|$.

Proposição 1.10. *Sejam* α, β *e* γ *cardinais. Então*

1. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$;
2. $(\alpha \cdot \gamma)^\beta = \alpha^\beta \cdot \gamma^\beta$;
3. $\alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.

Demonstração: Sejam A um conjunto equipolente a α, B um conjunto equipolente a β e C um conjunto equipolente a γ tais que A, B e C são disjuntos dois a dois.

1. Basta notar que a função

$$\begin{array}{rccl} h: & A^B \times A^C & \longrightarrow & A^{B\cup C} \\ & (f,g) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccl} h_{(f,g)}: & B\cup C & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & se & x \in B \\ g(x) & se & x \in C \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

é uma bijeção. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta+\gamma} &= |A^{B\cup C}| \\ &= |A^B \times A^C| \\ &= |A^B| \cdot |A^C| \\ &= \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma. \end{aligned}$$

2. A função

$$\begin{array}{rccl} h: & A^B \times C^B & \longrightarrow & (A \times C)^B \\ & (f,g) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccc} h_{(f,g)}: & B & \longrightarrow & A \times C \\ & x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \right. \end{array}$$

é uma bijeção. Com isso,

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \gamma)^\beta &= |(A \times C)^B| \\ &= |A^B \times C^B| \\ &= |A^B| \cdot |C^B| \\ &= \alpha^\beta \cdot \gamma^\beta. \end{aligned}$$

3. Para esta última igualdade, perceba que a função

$$\begin{array}{rccl} h: & (A^B)^C & \longrightarrow & A^{B \times C} \\ & f & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccc} h_f: & B \times C & \longrightarrow & A \\ & (x,y) & \longmapsto & f(y)(x) \end{array} \right. \end{array}$$

é uma bijeção. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta \cdot \gamma} &= |A^{B \times C}| \\ &= |(A^B)^C| \\ &= |A^B|^{|C|} \\ &= (\alpha^\beta)^\gamma. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.11. *Se α e β são dois cardinais tais que α é finito e β infinito, então*

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Demonstração: Se α é o conjunto vazio então não há o que fazer. Suponha que existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que I_k seja equipolente a α. Considere A um conjunto disjunto de I_k e equipolente a β.

Pelo Exemplo 1.5, existe $p : \mathbb{N} \to A$ uma função injetiva. Com isso, defina

$$\begin{array}{rccl} h: & A \cup I_k & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} p(x) & se \quad x \in I_k \\ p(i_x + k) & se \quad x = p(i_x) \in p(\mathbb{N}) \\ x & se \quad x \in A - P(\mathbb{N}). \end{cases} \end{array}$$

A aplicação definida acima é uma bijeção. Com isso

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= |I_k \cup A| \\ &= |A| = \beta. \end{aligned}$$

■

Para a próxima proposição precisamos do Lema de Zorn. Não demonstraremos este lema neste texto. Para a prova deste lema veja [5].

Lema 1.8. ***(Lema de Zorn)*** *Sejam X um conjunto e $\leq$ uma ordem parcial em X. Suponha que, para todo subconjunto B de X, que seja totalmente ordenado com a ordem $\leq$, exista um $a \in X$ tal que $b \leq a$, para todo $b \in B$. Nessas condições, existe um elemento maximal em X, ou seja, existe $c \in X$ tal que se $x \in X$ com $c \leq x$ então $x = c$.*

Proposição 1.12. *Seja α um cardinal infinito. Então,*

$$\alpha + \alpha = \alpha.$$

Demonstração: Sejam A um conjunto equipolente a α e Υ o conjunto de todas as funções bijetivas f definidas em $X_f \times I_2$ e tomando valores em X_f, para algum subconjunto X_f de A.

Defina a relação em Υ como segue: se $f, g \in \Upsilon$ então,

$$f \leq g \Leftrightarrow \begin{cases} X_f \subset X_g \\ f(x,y) = g(x,y), \text{ para todo } (x,y) \in X_f \times I_2. \end{cases}$$

O leitor não terá dificuldade em verificar que a relação definida acima é uma ordem parcial em Υ. Note também que Υ é não vazio, pois pelo Exemplo 1.5 existe um subconjunto $Z \subset A$ que é equipolente ao conjunto $\mathbb{N}$. Usando o Exemplo 1.6 conseguimos uma função bijetiva $f_p : Z \times I_2 \to Z$.

Usaremos o Lema de Zorn para garantir a existência de um elemento maximal neste conjunto. Seja $F := \{f_\lambda\}_{\lambda \in I}$ um subconjunto de Υ que seja totalmente ordenado pela ordem $\leq$. Defina a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \bigcup_{\lambda \in I} X_{f_\lambda} \times I_2 & \longrightarrow & \bigcup_{\lambda \in I} X_{f_\lambda} \\ & (x,y) & \longmapsto & f_\lambda(x,y) \text{ se } x \in X_{f_\lambda}. \end{array}$$

A função acima está bem definida, pois se $(x,y) \in \bigcup_{\lambda \in I} X_{f_\lambda} \times I$, com $x \in X_{f_{\lambda_0}}$ e $x \in X_{f_{\lambda_1}}$, então acontece $f_{\lambda_1} \leq f_{\lambda_0}$ ou $f_{\lambda_0} \leq f_{\lambda_0}$. Em qualquer caso, temos $f_{\lambda_0}(x,y) = f_{\lambda_1}(x,y)$.

A função f é uma bijeção. De fato, se $(x,y),(z,w) \in \bigcup_{\lambda \in I} X_{f_\lambda} \times I_2$ com $f(x,y) = f(z,w)$, então existem $\lambda_1, \lambda_2 \in I$ tais que $x \in X_{f_{\lambda_1}}$ e $z \in X_{f_{\lambda_2}}$. Como o conjunto f é totalmente ordenado, podemos supor sem perda de generalidade que $f_{\lambda_1} \leq f_{\lambda_2}$. Consequentemente $f_{\lambda_2}(x,y) = f_{\lambda_2}(z,w)$ e isto implica que $(x,y) = (z,w)$. Mostremos que f é sobrejetiva. Seja $x \in \bigcup_{\lambda \in I} X_{f_\lambda}$. Então existe $\lambda_0 \in I$ tal que $x \in X_{f_{\lambda_0}}$. Como f_{λ_0} é sobrejetiva, existe $(z,w) \in X_{f_{\lambda_0}} \times I_2$ tal que $f(z,w) = f_{\lambda_0}(z,w) = x$.

Observe que para cada $g \in F$ temos $g \leq f$. Desse modo, o conjunto Υ satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn.

Pelo Lema de Zorn (Lema 1.8), F possui um elemento maximal. Seja $h : X \times I_2 \to X$ o elemento maximal de F. Da bijetividade de h temos

$$\begin{aligned} |X| &= |X \times I_2| \\ &= |X \times \{0\} \cup X \times \{1\}\,| \\ &= |X \times \{1\}\,| + |X \times \{2\}\,| \\ &= |X| + |X|. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Afirmamos que $|A - X|$ é um cardinal finito. Suponha que isto não ocorra, ou seja, que $|A - X|$ é infinito. Então, pelos Exemplos 1.5 e 1.6, existem um subconjunto B de $A - X$ e uma bijeção $t : B \times I_2 \to B$. Neste caso a função

$$\begin{array}{rccl} ht: & (X \cup B) \times I_2 & \longrightarrow & X \cup B \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} h(x,y) & se \quad x \in X \\ t(x,y) & se \quad x \in B \end{cases} \end{array}$$

seria uma bijeção e desse modo ht seria um elemento do conjunto F com $h < ht$. Isto contradiz a maximalidade de h. Logo, $|A - X|$ é um cardinal finito.

Note que $|\mathbb{N}| \leq |X|$, pois $|A|$ é infinito e $|A - X|$ é finito. Assim, pela Proposição 1.11 e pela Equação (1.12) temos

$$\begin{aligned} \alpha &= |A| \\ &= |X \cup (A - X)| \\ &= |X| + |A - X| \\ &= |X| \\ &= |X| + |X| \\ &= |X| + |A - X| + |X| + |A - X| \\ &= |X \cup (A - X)| + |X \cup (A - X)| \\ &= |A| + |A| \\ &= \alpha + \alpha. \end{aligned}$$

■

Corolário 1.6. *Se α e β são dois cardinais tais que α é finito não vazio e β infinito, então*

$$\alpha \cdot \beta = \beta.$$

Demonstração: Basta mostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $|I_k| \cdot \beta = \beta$. O leitor não terá dificuldade em mostrar este fato utilizando a Proposição 1.12 e o princípio de indução matemática (veja [5]). ■

Proposição 1.13. *Se α é um cardinal infinito então*

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha.$$

Demonstração: Para a demonstração desta proposição, usaremos sem provar que

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|. \tag{1.13}$$

Seja A um conjunto equipolente a α. Seja Υ o conjunto de todas as funções bijetivas f definidas em $X_f \times X_f$ e tomando valores em X_f, para algum $X_f \subset A$.

Por (1.13) e pelo Exemplo 1.5, o leitor não terá dificuldade em perceber que Υ é não vazio.

Defina a seguinte relação em Υ:

$$f \leq g \Leftrightarrow \begin{cases} X_f \subset X_g \\ f(x,y) = g(x,y) \text{ para todo } (x,y) \in X_f \times X_f. \end{cases}$$

Esta relação é uma ordem parcial em Υ. Seja $F \subset \Upsilon$ e suponha que F seja totalmente ordenado pela relação definida acima. Defina a função,

$$\begin{array}{rcll} T: & \left(\bigcup_{f\in F} X_f\right) \times \left(\bigcup_{f\in F} X_f\right) & \longrightarrow & \bigcup_{f\in F} X_f \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \text{ se } (x,y) \in X_f \times X_f. \end{array}$$

A função T está bem definida. De fato, se $(x,y) \in \left(\bigcup_{f\in F} X_f\right) \times \left(\bigcup_{f\in F} X_f\right)$ então existem

f_x e $f_y \in F$ tais que $x \in X_{f_x}$ e $y \in X_{f_y}$. Como F com $\leq$ é totalmente ordenado, acontece $f_x \leq f_y$ ou $f_y \leq f_x$. No primeiro caso, $(x, y) \in X_{f_y} \times X_{f_y}$ e no segundo caso, $(x, y) \in X_{f_x} \times X_{f_x}$. Em resumo, provamos que para todo $(x, y) \in \left(\bigcup_{f\in F} X_f\right) \times \left(\bigcup_{f\in F} X_f\right)$, existe $f \in F$ tal que $(x, y) \in X_f \times X_f$. Agora, seja $(x, y) \in \left(\bigcup_{f\in F} X_f\right) \times \left(\bigcup_{f\in F} X_f\right)$ e suponha que $(x, y) \in X_f \times X_f$ e $(x, y) \in X_g \times X_g$, para $f, g \in F$. Devemos ter necessariamente que $f \leq g$ ou $g \leq f$. Em ambos os casos teremos $f(x, y) = g(x, y)$. Isto completa a prova de que T está bem definida.

O leitor não terá dificuldade em mostrar que a função T é também bijetiva e que para todo $g \in F$ temos $g \leq T$.

Vimos acima que Υ com $\leq$, satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn. Pelo Lema de Zorn, Υ possui um elemento maximal. Seja $h : X \times X \to X$ um elemento maximal de Υ. Segue que,

$$|X| \cdot |X| = |X|. \tag{1.14}$$

Nosso objetivo agora, é provar que $|A| = |X|$. Temos $X \subset A$, logo $|X| \leq |A|$. Suponha que $|X| < |A|$. Assim deveremos ter $|A| = |A - X|$, pois $|A| = |X| + |A - X| = max\,\{|X|, |A - X|\}$. Isto nos fornece a igualdade $|A| = |A - X|$. Desta igualdade temos $|X| < |A - X|$. Por definição, existe um subconjunto próprio Y de $A - X$ tal que Y é equipolente a X. A equação (1.14) também nos garante que $|X|$ é um cardinal infinito. Agora, por (1.14)

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = |X| \cdot |X| = |X| = |Y|.$$

Analogamente, $|Y \times Y| = |Y \times X| = |Y|$. Como $X \times Y$, $Y \times X$ e $Y \times Y$ são disjuntos e equipolentes ao cardinal infinito $|Y|$, então, pela Proposição 1.12, o conjunto $D := (X \times Y) \cup (Y \times X) \cup (Y \times Y)$ é equipolente a Y. Seja $M : D \to Y$ uma função bijetiva e defina,

$$\begin{array}{rccl} T: & (X \times X) \cup D & \longrightarrow & X \cup Y \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} M(x) & se & x \in D \\ h(x) & se & x \in X \times X. \end{array} \right. \end{array}$$

O leitor não terá dificuldade em mostrar que T está bem definida e é bijetiva. Além disso, de $D \cup (X \times X) = (X \cup Y) \times (X \cup Y)$, é fácil ver que $T \in \Upsilon$ e $h < T$. Mas isto contradiz a maximalidade de h.

Portanto, deveremos ter $|A| = |X|$ e consequentemente por (1.14) temos o resultado.

■

Corolário 1.7. *Se β é um cardinal infinito então,*

$$|\mathbb{N}| \cdot \beta = \beta.$$

Demonstração: De fato, se B é um conjunto equipolente a β não é difícil verificar, usando o Exemplo 1.5, que $|B| \leq |\mathbb{N} \times B| \leq |B \times B|$. Por isso, e pela Proposição anterior temos,

$$\begin{aligned} \beta = |B| \leq |N \times B| = & \\ & = |\mathbb{N}| \cdot \beta \\ & \qquad \leq |B \times B| = |B| \cdot |B| = |B| = \beta. \end{aligned}$$

O Teorema de Cantor - Bernstein completa a prova do corolário. ■

Capítulo 2

Espaços Paracompactos: Definições e Exemplos

Neste capítulo estudaremos certos tipos de espaços topológicos, a saber, os espaços paracompactos. Na primeira seção, demonstraremos o Teorema de Stone (ver [19]), que nos dará uma grande quantidade de exemplos de espaços paracompactos. Na seção seguinte, mostraremos que nem sempre o produto de espaços paracompactos é paracompacto. Apresentaremos ainda nesta seção um teorema sobre o produto de espaços paracompactos. Na última seção, daremos uma caracterização para os espaços paracompactos, mostrando que um espaço topológico T_1 é paracompacto se, e somente se, toda cobertura aberta deste espaço possui uma partição de unidade subordinada a ela.

2.1 Espaços Topológicos Paracompactos

Definição 2.1. *Um espaço topológico X é paracompacto se é um espaço de Hausdorff e toda cobertura aberta de X admite um refinamento aberto localmente finito.*

Segue trivialmente da definição que todo espaço topológico compacto e de Hausdorff é paracompacto.

Proposição 2.1. *Seja (X, τ) um espaço topológico paracompacto. Então, para todo subconjunto fechado e não vazio $Y \subset X$, o espaço topológico $(Y, R(\tau))$ é paracompacto.*

Demonstração:

É claro que $(Y, R(\tau))$ é um espaço de Hausdorff.

Seja $\{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma cobertura aberta de Y. Então existe uma coleção de abertos $\{W_n\}_{n \in I}$ de X tal que, $V_n = Y \cap W_n$ para todo $n \in I$.

A família $\{W_n\}_{n \in I} \cup \{X - Y\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é paracompacto, existe um refinamento aberto localmente finito desta cobertura. Seja γ este refinamento e considere

$$\epsilon = \{A \cap Y; A \in \gamma\}.$$

Note que ϵ é uma cobertura aberta de Y, e cada elemento não vazio de ϵ está contido em algum conjunto de γ que, por sua vez, está contido em W_n para algum $n \in I$ (já que este conjunto não pode estar contido em $X - Y$). Logo, cada elemento de ϵ está contido em algum $V_n = W_n \cap Y$, com $n \in I$. Assim, ϵ é um refinamento aberto de $\{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$.

Para concluir a demonstração, basta mostrar que ϵ é uma cobertura localmente finita. Seja $x \in Y$. Existe um aberto V_x em X, tal que $\{B \in \gamma; B \cap V_x \neq \emptyset\}$ é finito. Logo $V_x \cap Y$ é uma vizinhança aberta de x em Y, e ainda, o conjunto $\{D \in \epsilon; D \cap V_x \cap Y \neq \emptyset\}$ é finito. Isto conclui a demonstração. ■

A seguir provaremos o Teorema de Stone, que nos dará mais exemplos de espaços topológicos paracompactos. Segundo A. Zumpano [20], este teorema foi conjecturado em 1944 por J. Dieudonné em [3]. Neste mesmo artigo, J. Dieudonné mostrou que todo espaço métrico separável é paracompacto. A. H. Stone [19] provou que esta conjectura era verdadeira em 1948. Stone, na verdade, provou que todo espaço Fully Normal (Veja definição em [19]) e T_1 era paracompacto. Para provar o Teorema de Stone, usaremos o Princípio da Boa Ordem (veja Teorema 13.2 em [5]), que nos garante que todo conjunto pode ser bem ordenado, ou seja, se X é um conjunto então é possível definir em X uma ordem total $\leq$ tal que, para todo conjunto não vazio $J \subset X$, existe $a \in J$ tal que, para todo $b \in J$ temos $a \leq b$.

A demonstração apresentada para o Teorema de Stone foi dada por Antônio Zumpano em [20].

Teorema 2.1. ***(Teorema de Stone)*** *Todo espaço métrico é paracompacto.*

Demonstração: Seja X um espaço métrico e d a métrica definida em X. É claro que todo espaço métrico é de Hausdorff.

Seja $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma cobertura aberta de X. Construiremos uma nova cobertura $\{E_{\lambda,n}\}_{\lambda \in I,\ n \in \mathbb{N}}$ de X tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a coleção $\{E_{\lambda,n}\}_{\lambda \in I}$ seja localmente finita e que $E_{\lambda,n} \subset U_\lambda$, para todos $\lambda \in I$ e $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\leq$ uma boa ordem em I e defina para todos $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in I$,

$$A_{a,n} = \left\{ x \in X; B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U_a \ e \ x \notin U_\lambda \ se \ \lambda \leq a, \lambda \neq a \right\}.$$

A família $\{A_{a,n}\}_{a \in I, n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura de X. De fato, para $x \in X$ o conjunto $D := \{\lambda \in I; x \in U_\lambda\}$ é não vazio e desse modo, existe $\lambda_0 \in D$ tal que, para todo $\lambda \in D$ tem-se $\lambda_0 \leq \lambda$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U_{\lambda_0}$. Segue que $x \in A_{\lambda_0, n}$.

Outra propriedade interessante da família $\{A_{a,n}\}_{a \in I, n \in \mathbb{N}}$ é que se tomarmos $a, b \in I$ com $a \neq b$ (podemos supor sem perda de generalidade que $a < b$) e considerarmos $x \in A_{a,n}$ e $y \in A_{b,n}$ então, por definição, teremos que $y \notin U_a$ e $B(x, \frac{1}{n}) \subset U_a$. Consequentemente $d(x, y) \geq \frac{1}{n}$.

Defina, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a \in I$,

$$E_{a,n} = \bigcup_{x \in A_{a,n}} B\left(x, \frac{1}{3n}\right).$$

A família $\{E_{a,n}\}_{a \in I, n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de X, já que $\{A_{a,n}\}_{a \in I, n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura de X. Mais ainda,

$$E_{a,n} \subset \bigcup_{x \in A_{a,n}} B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U_a,$$

ou seja, a família $\{E_{a,n}\}_{a \in I, n \in \mathbb{N}}$ é um refinamento de $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$.

Provaremos agora que para todo $n \in \mathbb{N}$, a família $\{E_{a,n}\}_{a \in I}$ é localmente finita.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in I$, com $a \neq b$ e considere $x \in E_{a,n}$ e $y \in E_{b,n}$. Então existem $z \in A_{a,n}$ e $w \in A_{b,n}$ tais que $d(x,z) < \frac{1}{3n}$ e $d(y,w) < \frac{1}{3n}$. Pelo que discutimos acima, temos também $d(z,w) \geq \frac{1}{n}$. Assim

$$d(x,y) \geq d(z,w) - d(x,z) - d(y,w) > \frac{1}{3n}.$$

Logo, dado $x \in X$, o conjunto $\left\{\lambda \in I; B(x, \frac{1}{6n}) \cap E_{\lambda,n} \neq \emptyset\right\}$ possui no máximo um elemento. Por conseguinte, a família $\{E_{a,n}\}_{a\in I}$ é localmente finita para todo $n \in \mathbb{N}$.

Construímos, portanto, uma família $\{E_{a,n}\}_{a\in I, n\in\mathbb{N}}$ que é um refinamento aberto de $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$ e que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a coleção $\{E_{a,n}\}_{a\in I}$ é localmente finita. A partir desta família, construiremos um refinamento aberto de $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$ localmente finito. Para isto, defina $V_n := \bigcup_{a\in I} E_{a,n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e note que a família $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de X. Segue, como consequência da Proposição 1.3, que existe um refinamento localmente finito $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ da cobertura $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, satisfazendo $W_n \subset V_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A cobertura $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é necessariamente aberta. Para contornar este problema, defina

$$Z_n = \bigcup_{x\in W_n} B\left(x, \frac{1}{n}\right).$$

A família $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é claramente uma cobertura aberta de X, já que $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura de X. Provaremos que esta cobertura também é localmente finita. Para isto, considere $x \in X$ e use o fato de que a cobertura $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é localmente finita para garantir a existência de $s > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\{j \in \mathbb{N}; W_j \cap B(x,s) \neq \emptyset\} \subset \{1, 2, ..., n_1\}.$$

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$n_0 > n_1 \text{ e } r := s - \frac{1}{n_0} > 0.$$

Basta mostrar que $B(x,r) \cap Z_m = \emptyset$ para todo $m > n_0$. Seja $m > n_0$ e tome $y \in Z_m$. Então, existe $z \in W_m$ tal que

$$d(y,z) < \frac{1}{m}.$$

De $m > n_0$, obtemos também que $W_m \cap B(x,s) = \emptyset$ e isto implica que $d(x,z) \geq s$. Assim

$$d(x,y) \geq d(x,z) - d(z,y) > s - \frac{1}{m} > s - \frac{1}{n_0} = r,$$

ou seja, $y \notin B(x,r)$. Isto mostra que $B(x,r) \cap Z_m = \emptyset$, para todo $m > n_0$. Consequentemente, a família $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é localmente finita.

Portanto, construímos uma cobertura aberta $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que é localmente finita, mas que não necessariamente é um refinamento para a família $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$. Por isso, defina para cada $a \in I$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$R_{a,n} := Z_n \cap E_{a,n}.$$

A família $\{R_{a,n}\}_{a\in I, n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de X. De fato, note que

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha\in I \text{ e } n\in\mathbb{N}} R_{a,n} &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\bigcup_{\alpha\in I} Z_n \cap E_{a,n} \right] \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\left(\bigcup_{\alpha\in I} E_{a,n} \right) \cap Z_n \right] \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[V_n \cap Z_n \right]. \end{aligned}$$

De $W_n \subset V_n$ e $W_n \subset Z_n$ e de $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cobrir X, concluímos que $\{R_{a,n}\}_{a\in I, n\in\mathbb{N}}$ cobre X. Note também que $R_{a,n} \subset E_{a,n} \subset U_a$, para todos $a \in I$ e $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\{R_{a,n}\}_{a\in I, n\in\mathbb{N}}$ é um refinamento aberto da cobertura aberta $\{U_a\}_{a\in I}$.

Mostremos que a família $\{R_{a,n}\}_{a\in I, n\in\mathbb{N}}$ é localmente finita. Considere $x \in X$. Vimos acima que a família $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é localmente finita. Com isso, existe uma vizinhança V_x de x e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que,

$$\{\lambda \in \mathbb{N}; V_x \cap Z_n \neq \emptyset\} \subset \{1, 2, ..., n_0\}.$$

Provamos acima que para cada $n \in \mathbb{N}$ a família $\{E_{a,n}\}_{a\in I}$ é localmente finita. Desse modo, para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n \leq n_0$ existe uma vizinhança $V_{n,x}$ de x, tal que o conjunto

$$\{\lambda \in I; V_{n,x} \cap E_{\lambda,n} \neq \emptyset\}$$

é finito. Seja

$$V = V_x \cap \bigcap_{i=1}^{n_0} V_{i,x}.$$

O conjunto V é uma vizinhança de x, e ainda, o conjunto

$$\{(\lambda, n) \in I \times \mathbb{N}; V \cap R_{\lambda,n} \neq \emptyset\} \subset \left[\bigcup_{i=1}^{n_0} \{\alpha \in I; V_{i,x} \cap E_{\alpha,i} \neq \emptyset\}\right] \times \{1, 2, ..., n_0\}$$

é finito. Logo, a família $\{R_{a,n}\}_{a\in I, n\in\mathbb{N}}$ é localmente finita.

Portanto construímos uma família, a saber $\{R_{a,n}\}_{a\in I, n\in\mathbb{N}}$, que é um refinamento aberto e localmente finito da cobertura $\{U_a\}_{a\in I}$, ou seja, X é paracompacto.

■

Proposição 2.2. *Sejam X e Y dois espaços topológicos. Suponha que existe $f : X \to Y$ tal que f é um homeomorfismo, ou seja, f é contínua, bijetiva e possui inversa contínua. Então X é paracompacto se, e somente se, Y é paracompacto.*

Demonstração: Suponha que X é paracompacto. Segue de f ser um homeomorfismo e X ser Hausdorff que Y é um espaço de Hausdorff. Para concluir que Y é paracompacto, considere $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$ uma cobertura aberta de Y. Então, como f é contínua, $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in I}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é paracompacto, existe um refinamento aberto localmente finito $\{V_\lambda\}_{\lambda\in J}$ da cobertura $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in I}$. É claro que $\{f(V_\lambda)\}_{\lambda\in J}$ é uma cobertura aberta de Y, pois f possui inversa contínua e é bijetiva. Mostraremos que esta cobertura é um refinamento localmente finito da cobertura $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$. Se $\lambda \in J$, então existe $\epsilon \in I$ tal que $V_\lambda \subset f^{-1}(U_\epsilon)$ e isto implica que $f(V_\lambda) \subset U_\epsilon$, ou seja, $\{f(V_\lambda)\}_{\lambda\in J}$ é um refinamento aberto de $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$. Para mostrar que $\{f(V_\lambda)\}_{\lambda\in J}$ é uma coleção localmente finita, considere $y \in Y$. Então, existe uma vizinhança $V_{f^{-1}(y)}$ de $f^{-1}(y)$ tal que, o conjunto $\left\{\lambda \in J; V_\lambda \cap V_{f^{-1}(y)} \neq \emptyset\right\}$ é finito. Mas, $f(V_{f^{-1}(y)}) \cap f(V_\lambda)$ é vazio se, e somente se, $V_\lambda \cap V_{f^{-1}(y)}$ é vazio. Assim, $f(V_{f^{-1}(y)})$ é uma vizinhança de y tal que o conjunto $\left\{\lambda \in J; f(V_\lambda) \cap f(V_{f^{-1}(y)}) \neq \emptyset\right\}$ é finito. Logo, $\{f(V_\lambda)\}_{\lambda\in J}$ é um refinamento aberto e localmente finito de $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$. Portanto Y é paracompacto. ■

Lembremos que se $f : X \to Y$ é uma função contínua e sobrejetiva e X é compacto então Y é compacto. Um fato interessante que podemos destacar é que se $f : X \to Y$ é apenas contínua e sobrejetiva, com X paracompacto, então não necessariamente Y é paracompacto. De fato, $\mathbb{R}$, com a topologia induzida pela métrica euclidiana é paracompacto pelo Teorema de Stone (Teorema 2.1) e a função $i : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$, com $i(x) = x$, é contínua, porém $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$ não é paracompacto, pois este espaço topológico não é de Hausdorff.

Corolário 2.1. *Todo espaço metrizável é paracompacto.*

Demonstração: Basta notar que se (X, τ) é metrizável então existe uma topologia τ_1 em X, induzida por uma métrica, que é equivalente a τ, ou seja, a aplicação identidade $i : (X, \tau_1) \to (X, \tau)$ é um homeomorfismo. Pelo Teorema de Stone (teorema 2.1), (X, τ_1) é paracompacto e pela Proposição 2.2, (X, τ) é paracompacto. ■

2.2 Produtos de Espaços Topológicos Paracompactos

Sabemos que se (A, τ) e (B, τ_2) são espaços topológicos compactos de Hausdorff, então o espaço topológico $A \times B$, munido da topologia produto, também é compacto e de Hausdorff (Teorema de Tychonoff, pag.232 de [14]). Veremos nesta seção que se trocarmos a hipótese dos espaços serem compactos e Hausdorff e exigirmos apenas que os espaços sejam paracompactos, então o produto geralmente não é paracompacto. Encerraremos a seção mostrando um teorema sobre o produto de espaços topológicos paracompactos.

Seja S o conjunto dos números reais não-negativos, $S = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ e considere a família ξ de todos os intervalos semi-abertos da forma $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ com $a, b \geq 0$. Considere τ_ξ a topologia em S que tem como base ξ (Veja Exemplo 1.1).

Proposição 2.3. *Com a notação adotada acima, (S, τ_ξ) é um espaço topológico paracompacto.*

Demonstração: É fácil ver que este espaço é de Hausdorff. Mostraremos que toda cobertura aberta de S possui um refinamento aberto localmente finito. Seja α uma cobertura aberta de S. Para cada $x \in S$, existe $A_x \in \alpha$, com $x \in A_x$. Evidentemente, existe um aberto da forma $[a_x, b_x)$ tal que, $x \in [a_x, b_x) \subset A_x$. Seja

$$\beta = \{[a_x, b_x)\}_{x \in S} .$$

Note que β é um refinamento aberto de α, formado por elementos de ξ. Encontraremos um refinamento aberto de β, que seja localmente finito. Defina

$$E = \{x \in S; \text{não existe } [a, b) \in \beta, \text{com } a < x < b\} .$$

Se x pertence a $S - E$, então existe $[a, b) \in \beta$, com $a < x < b$. Observe que $x \in (a, b) \subset (S - E)$ e isto implica que $S - E$ é aberto em $\mathbb{R}$, com a topologia induzida pela métrica euclidiana. Sendo assim, existe uma coleção enumerável de intervalos abertos (na topologia induzida pela métrica euclidiana) disjuntos dois a dois e não vazios $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ (estamos supondo que esta quantidade é infinita, o caso em que está é quantidade é finita é análogo), satisfazendo

$$S - E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n, \tag{2.1}$$

onde $I_n = (a_n, b_n)$, para alguns $a_n \in S$ e $b_n \in S \cup \{+\infty\}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então, $a_n \notin S - E$, pois caso contrário, existiria $j \in \mathbb{N} - \{n\}$ com $a_n \in I_j$ e, consequentemente, teríamos $I_n \cap I_j \neq \emptyset$, o que é um absurdo. Por outro lado, seja $x \in E$ e tome $[z, w) \in \beta$, com $x \in [z, w)$. O intervalo aberto (z, w) está contido em $S - E$. Isto implica em $x = z$. Além disso, usando o fato que (z, w) é conexo em $\mathbb{R}$, com a topologia induzida pela métrica euclidiana, os elementos da família $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são disjuntos dois a dois e a equação (2.1), garantimos a existência de $n \in N$ satisfazendo $(z, w) \subset I_n = (a_n, b_n)$. De $x = z$, $x \in E$ e da última inclusão, obtemos que $x = a_n$. Com isso, acabamos de provar que

$$E = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} .$$

Para cada $a_n \in E$, existe um aberto $[z, q_n) \in \beta$, com $a_n \in [z, q_n)$. Pela definição de E, tem-se $z = a_n$. Note $(a_n, q_n) \subset S - E$ e ainda $(a_n, q_n) \neq \emptyset$. Novamente por um argumento de conexidade, $(a_n, q_n) \subset I_n$ e isto implica que $q_n \leq b_n$. Seja

$$D_n := [a_n, q_n)$$

e defina

$$Y_n := \{(a, b) \cap [q_n, b_n); [a, b) \in \beta \ e \ [a, b) \subset [a_n, b_n)\}.$$

A coleção Y_n cobre $[q_n, b_n)$. De fato, se este conjunto é vazio não há nada para demonstrar. Caso contrário, para $x \in [q_n, b_n) \subset S - E$, existe $[c, d) \in \beta$ com $x \in (c, d)$. Mas como $(c, d) \subset (S - E)$ é conexo e intercepta (a_n, b_n) temos, novamente por um argumento de conexidade, que $(c, d) \subset (a_n, b_n)$ (consequentemente $[c, d) \subset [a_n, b_n)$). O intervalo $(c, d) \cap [q_n, b_n)$ pertence a Y_n e contém x.

O espaço $[q_n, b_n)$ é paracompacto, com a topologia relativa induzida pela topologia euclidiana de $\mathbb{R}$, pois é métrico, e ainda Y_n é uma cobertura aberta de $[q_n, b_n)$. Então, existe um refinamento aberto localmente finito ϵ_n de Y_n.

Mostraremos que todo elemento de ϵ_n é um aberto da topologia que definimos em S. Seja $A \in \epsilon_n$. Existe um aberto G de $\mathbb{R}$, com a topologia induzida pela métrica euclidiana, tal que $A = G \cap [q_n, b_n)$. Note que existe uma coleção enumerável e disjunta de intervalos abertos $\{P_j\}$ tais que, $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} P_j$. Se $P_n = (l_n, m_n)$, então podemos escrever,

$$A = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} [l_i + \frac{l_i}{j}, m_i) \right] \cap [q_n, b_n).$$

Isto implica que A é aberto na topologia que definimos em S. Note também que, pela definição de Y_n, A está contido em algum aberto de β e consequentemente A está contido em algum aberto de α.

Em resumo, para cada $n \in \mathbb{N}$, conseguimos uma coleção ϵ_n de subconjuntos de $[q_n, b_n)$, cujos elementos desta família são abertos em S e cada elemento desta família está contido em algum elemento de α. Além disso, se considerarmos $[q_n, b_n)$ com a topologia induzida pela métrica euclidiana, então a coleção ϵ_n é uma cobertura aberta localmente finita deste espaço.

Sejam

$$\eta_n = \{D_n\} \cup \epsilon_n \ e \ \omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n.$$

Como vimos acima, ω é uma família de conjuntos abertos em S e cada elemento de ω está contido em algum elemento de α. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{A\in\eta_j} A &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{A\in\epsilon_n} [A \cup D_n] \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [[q_n, b_n) \cup [a_n, q_n)] \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (I_n \cup \{a_n\}) \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} \\
&= E \cup E^c \\
&= S.
\end{aligned}$$

Assim, ω é um refinamento aberto de α. Basta mostrar que este refinamento é localmente finito. Primeiro, observe que se $A \in \eta_p$ e $B \in \eta_n$ com $n \neq p$, então

$$A \cap B \subset (I_p \cup \{a_p\}) \cap (I_n \cup \{a_n\}) = \emptyset.$$

Finalizada a observação, passaremos a demonstrar que a coleção ω é localmente finita. Seja $x \in S$ e considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in I_n \cup \{a_n\}$. Se $x \in [a_n, q_n)$ então pela observação acima

$$\{A \in \omega; A \cap [a_n, q_n) \neq \emptyset\} = \{[a_n, q_n)\}.$$

Porém, se $x \in [q_n, b_n)$, então existe um aberto B em $[q_n, b_n)$, com a topologia induzida pela métrica euclidiana, tal que o conjunto $\{A \in \epsilon_n; A \cap B \neq \emptyset\}$ é finito. Como fizemos acima, facilmente prova-se que B é um aberto na topologia de S que definimos. Assim, $B \subset [q_n, b_n) \subset (I_n \cup \{a_n\})$ é uma vizinhança de x em S, e ainda pela observação acima

$$\{A \in \omega; A \cap [q_n, b_n) \cap B \neq \emptyset\} = \{A \in \eta_n; A \cap [q_n, b_n) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Mas, veja que D_n não intercepta $[q_n, b_n) \cap B$. Logo, o conjunto

$$\{A \in \omega; A \cap [q_n, b_n) \cap B \neq \emptyset\} = \{A \in \epsilon_n; A \cap [q_n, b_n) \cap B \neq \emptyset\} \subset \{A \in \epsilon_n; A \cap B \neq \emptyset\}$$

é finito. Por conseguinte, ω é uma coleção localmente finita.

Em resumo, mostramos que ω é um refinamento aberto e localmente finito da cobertura α, tomada inicialmente. Portanto S é um espaço topológico paracompacto. ■

Agora, nosso objetivo é provar que $S \times S$, com a topologia produto, não é paracompacto. Mas para provar isto, mostraremos primeiro que todo espaço paracompacto é normal.

Proposição 2.4. *Todo espaço paracompacto é normal.*

Demonstração: Seja X um espaço topológico paracompacto. Sejam A e B dois subconjuntos disjuntos e fechados de X. Para todo $a \in A$, construiremos dois abertos disjuntos $U(a)$ e $V(a)$ tais que $a \in U(a)$ e $B \subset V(a)$.

Fixe $a \in A$ e considere $b \in B$. Como X é um espaço topológico de Hausdorff, existem abertos disjuntos $U(a,b)$ e $V(a,b)$, com $a \in U(a,b)$ e $b \in V(a,b)$. A família $\{V(a,b)\}_{b \in B} \cup \{X - B\}$ é uma cobertura aberta de X. Seja ω um refinamento aberto localmente finito dessa cobertura. Considere $\epsilon := \{D \in \omega; \text{existe } b \in B, \text{ com } D \subset V(a,b)\}$ e defina

$$V(a) := \bigcup_{D \in \epsilon} D.$$

Note que $V(a)$ é aberto e $B \subset V(a)$. Como o refinamento é localmente finito, existe uma vizinhança aberta G_a de a que intercepta apenas uma quantidade finita de elementos de ϵ. Se nenhum elemento de ϵ intercepta G_a, então defina,

$$U(a) := G_a.$$

Senão, seja $\{G_1, ..., G_n\} = \{A \in \epsilon; A \cap G_a \neq \emptyset\}$. Para cada $p \in \{1, 2, ..., n\}$, considere

$b_p \in B$ com $G_p \subset V(a, b_p)$ e defina

$$U(a) := G_a \cap \bigcap_{p=1}^{n} U(a, b_p).$$

Note que $U(a)$ é uma vizinhança aberta de a e ainda

$$\begin{aligned}
U(a) \cap V(a) &= \left[\bigcap_{p=1}^{n} U(a, b_p) \cap G_a\right] \cap \left[\bigcup_{D\in\epsilon} D\right] \\
&= \left[\bigcap_{p=1}^{n} U(a, b_p)\right] \cap \left[\bigcup_{D\in\epsilon} (D \cap G_a)\right] \\
&= \left[\bigcap_{p=1}^{n} U(a, b_p)\right] \cap \left[\bigcup_{p=1}^{n} (G_p \cap G_a)\right] \\
&\subset \left[\bigcap_{p=1}^{n} U(a, b_p)\right] \cap \left[\bigcup_{p=1}^{n} (V(a, b_p) \cap G_a)\right] \\
&= \bigcup_{p=1}^{n} \left[G_a \cap V(a, b_p) \cap \bigcap_{j=1}^{n} U(a, b_j)\right] = \emptyset.
\end{aligned}$$

Em resumo, construímos dois abertos disjuntos $U(a)$ e $V(a)$ tais que $a \in U(a)$ e $B \subset V(a)$. Observe que a, tomado inicialmente, foi qualquer em A. Desse modo, para todo $a \in A$, podemos construir abertos disjuntos $U(a)$ e $V(a)$ tais que $a \in U(a)$ e $B \subset V(a)$.

Agora, $\{U(a)\}_{a\in A} \cup \{X - A\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é paracompacto, existe um refinamento aberto localmente finito ν desta cobertura. Seja $\delta := \{R \in \nu; \text{existe } a \in A, \text{ com } R \subset U(a)\}$ e defina

$$U = \bigcup_{A\in\delta} A.$$

Observe que U é aberto e ainda $A \subset U$.

Para todo $b \in B$, encontraremos uma vizinhança aberta de b que não intercepta U. Seja $b \in B$. O refinamento ν é localmente finito, por isso, existe uma vizinhança aberta T_b de b que intercepta apenas uma quantidade finita de conjuntos deste refinamento. Se nenhum elemento de δ intercepta T_b, então defina,

$$V_b := T_b.$$

Senão, seja $\{S_1, ..., S_k\} = \{A \in \delta; T_b \cap A \neq \emptyset\}$. Para todo $n \in \{1, 2, ..., k\}$, escolha $a_n \in A$ tal que $S_n \subset U(a_n)$ e defina

$$V_b = T_b \cap \bigcap_{n=1}^{k} V(a_n).$$

Observe que V_b é uma vizinhança de b e ainda

$$\begin{aligned}
V_b \cap U &= \left[T_b \cap \bigcap_{n=1}^{k} V(a_n) \right] \cap \left[\bigcup_{A \in \delta} A \right] \\
&= \left[\bigcap_{n=1}^{k} V(a_n) \right] \cap \left[\bigcup_{A \in \delta} (A \cap T_b) \right] \\
&= \left[\bigcap_{n=1}^{k} V(a_n) \right] \cap \left[\bigcup_{i=1}^{k} (S_i \cap T_b) \right] \\
&\subset \left[\bigcap_{n=1}^{k} V(a_n) \right] \cap \left[\bigcup_{i=1}^{k} (U(a_i) \cap T_b) \right] \\
&= \bigcup_{i=1}^{k} \left[T_b \cap U(a_i) \bigcap_{n=1}^{k} V(a_n) \right] \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Defina

$$V = \bigcup_{b \in B} V_b.$$

É claro que V é aberto, $B \subset V$ e pelo que vimos acima, U e V são disjuntos.

Portanto, construímos dois abertos disjuntos U e V com $A \subset U$ e $B \subset V$. Como A e B são fechados disjuntos quaisquer de X, segue que X é normal. ∎

Combinando o Lema de Urysohn para Espaços Normais (Lema 1.6) e a Proposição 2.4, obtemos como consequência imediata o seguinte resultado.

Corolário 2.2. *Seja (X, τ) um espaço topológico paracompacto. Sejam A e B dois sub-*

conjuntos fechados e disjuntos de X então existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$.

Proposição 2.5. *Com a notação adotada no início desta seção, $S \times S$, com a topologia produto, não é normal.*

Demonstração: Defina

$$H = \left\{ (x,y) \in S \times S; x + y = 1 \text{ e } [(x-1)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} \text{ é racional } \right\},$$

$$K = \left\{ (x,y) \in S \times S; x + y = 1 \text{ e } [(x-1)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} \text{ é irracional } \right\}.$$

É claro que H e K são subconjuntos disjuntos de $S \times S$. Provaremos que eles são fechados em $S \times S$. Seja $(x,y) \in (S \times S) - H$. Se $x + y = p \neq 1$, então ou $p > 1$ ou $p < 1$. Se $p > 1$, então $[x, x+1) \times [y, y+1)$ é uma vizinhança aberta de (x,y) em $S \times S$ e ainda, para todo $(z,w) \in [x, x+1) \times [y, y+1)$ temos $z + w \geq x + y = p > 1$, ou seja,

$$(x,y) \in [x, x+1) \times [y, y+1) \subset (S \times S) - H.$$

Porém, se $p < 1$, então o conjunto $[x, x + \frac{1-p}{2}) \times [y, y + \frac{1-p}{2})$ é uma vizinhança de (x,y) e ainda, para todo $(z,w) \in [x, x + \frac{1-p}{2}) \times [y, y + \frac{1-p}{2})$ temos $z + w < x + \frac{1-p}{2} + y + \frac{1-p}{2} = 1$. Sendo assim,

$$(x,y) \in \left[x, x + \frac{1-p}{2}\right) \times \left[y, y + \frac{1-p}{2}\right) \subset (S \times S) - H.$$

Agora se $(x,y) \in S \times S - H$ com $x + y = 1$, então $[(x-1)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$ é irracional. O conjunto $[x, x+1) \times [y, y+1)$ é uma vizinhança de (x,y) e ainda, para todo $(z,w) \in [x, x+1) \times [y, y+1) - \{(x,y)\}$, temos $z + w > x + y = 1$. Isto significa que $(z,w) \in S \times S - H$. Logo,

$$(x,y) \in [x, x+1) \times [y, y+1) \subset (S \times S) - H.$$

Em qualquer caso, para todo $(x,y) \in (S \times S) - H$, existe uma vizinhança aberta de (x,y) em $S \times S$ contida em $(S \times S) - H$. Portanto $(S \times S) - H$ é aberto em $S \times S$

e consequentemente H é fechado em $S \times S$. Analogamente prova-se que K também é fechado em $S \times S$.

Considere V um aberto que contenha K. Para todo $(z, w) \in K$ fixe $d_{(z,w)} > 0$ tal que o aberto $N(z, w) := [z, z + d_{(z,w)}) \times [w, w + d_{(z,w)})$ esteja contido em V e defina para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n = \left\{(x, y) \in K; d_{(x,y)} > \frac{1}{n}\right\}.$$

Note que

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

Mas, pelo Exemplo 1.4, K é de segunda categoria em $P := \{(x, y) \in S \times S; x + y = 1\}$, onde em P estamos considerando a topologia induzida pela métrica euclidiana restrita a P. Sendo assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(\overline{K_{n_0}}) \neq \emptyset$.

Sejam $s_0 = (s, 1 - s)$ e $t_0 = (t, 1 - t)$ pontos de P, com $s < t$, tais que $L = \{ms_0 + (1 - m)t_0; m \in (0, 1)\} \subset \overline{K_{n_0}}$.

Seja R o conjunto de pontos em $S \times S$ que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$(*) \begin{cases} x + y > 1; \\ x + y < 1 + \frac{1}{n_0}; \\ x - y < 2t - 1; \\ x - y > 2s - 1. \end{cases}$$

Simbolicamente, $R = \{(x, y) \in S \times S; (x, y)$ satisfaz o sistema (*)$\}$.

Observe que $(x, y) \in L$ se, e somente se, $(x, y) \in P$ e (x, y) satisfaz as duas últimas inequações do sistema acima. Deixaremos isto como exercício para o leitor. Para provar a implicação mais difícil, ou seja, que se $(x, y) \in P$ e (x, y) satisfaz as duas últimas inequações do sistema acima então $(x, y) \in L$, mostre que $x \in (s, t)$ e use que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(m) = ms + (1 - m)t$, é contínua e o Teorema do Valor Intermediário para encontrar $m \in (0, 1)$ tal que $f(m) = x$.

Nosso objetivo agora, é mostrar que $R \subset V$. Seja $(x, y) \in R$. Note que pela equação

1 do sistema (*) podemos escrever $x + y = 1 + \frac{1}{m}$ com $m > 0$. Segue que $m > n_0$. Note que $b := (x - \frac{1}{2m}, y - \frac{1}{2m}) \in L$. De fato, basta ver que $b \in P$ e que b satisfaz as duas últimas inequações do sistema $(*)$. Como K_{n_0} é denso em L, existe $(z, w) \in K_{n_0}$ com

$$\left| x - \frac{1}{2m} - z \right| < \frac{1}{2m} \text{ e } \left| y - \frac{1}{2m} - w \right| < \frac{1}{2m}. \tag{2.2}$$

De $(z, w) \in K_{n_0} \subset P$ e $(x, y) \in R$ concluímos que $z < x$ ou $w < y$. Suponha $z < x$. Pela inequação (2.2)

$$y - w = 1 + \frac{1}{m} - x - 1 + z = z - x + \frac{1}{m} > -\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{m} = 0.$$

Analogamente, se $w < y$ então $z < x$. Segue que $z < x$ e $w < y$ e ainda, novamente pela inequação (2.2), $x - z < \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0}$ e $y - w < \frac{1}{n_0}$. Consequentemente

$$(x, y) \in \left[z, z + \frac{1}{n_0} \right) \times \left[w, w + \frac{1}{n_0} \right) \subset [z, z + d_{(z,w)}) \times [w, w + d_{(z,w)}) = N(z, w) \subset V.$$

Em resumo, mostramos que $R \subset V$.

Observe que $H \cap L \neq \emptyset$. De fato, L é conexo em R^2, com a topologia induzida pela métrica euclidiana e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f: & (R^2, ||.||) & \longrightarrow & (R, |.|) \\ & (x, y) & \longmapsto & \sqrt{(x-1)^2 + y^2}. \end{array}$$

é contínua. Logo, $f(L)$ é um ponto ou um intervalo. Use que $f(s_0) = \sqrt{2}(1 - s) \neq \sqrt{2}(1 - t) = f(t_0)$ e a continuidade de f para garantir que $f(L)$ não pode ser um ponto. Logo, deve existir $(x, y) \in L$ tal que $f(x, y)$ é racional.

Tome $x_0 = (x, y) \in H \cap L$. Pelo Lema 1.1, existe uma rede $\{x_n\}_{n \in I}$ tal que $x_n \to x_0$ na topologia produto e $x_n \neq x_0$ para todo $n \in I$.

Defina

$$R_2 := \left[x, x + min\left\{\frac{2t-1-(x-y)}{2}, \frac{1}{2n_0}\right\}\right) \times \left[y, y + min\left\{\frac{x-y-(2s-1)}{2}, \frac{1}{2n_0}\right\}\right).$$

Usando que $(x, y) \in L$, prova-se facilmente que $R_2 - \{(x, y)\} \subset R \subset V$. Consequentemente, como R_2 é aberto, existe $p \in I$ tal que, para todo $n > p$ tem-se $x_n \in R_2 \subset R$. Pela Proposição 1.4, $(x, y) \in \overline{V}$. Logo, todo aberto que contém H, em particular é uma vizinhança aberta de (x, y), e desse modo intercepta V.

Portanto $S \times S$ não é normal. ∎

Corolário 2.3. *Com a notação adotada no início desta seção, $S \times S$ não é paracompacto.*

Demonstração: Segue diretamente da proposição 2.4. ∎

Vimos acima que nem sempre o produto de espaços paracompactos é paracompacto. Porém, se colocarmos mais alguma hipótese sobre o espaço, então o produto poderá vir a ser paracompacto. A seguir, apresentaremos um teorema que comprova esta afirmação. O espaço $S \times S$, com a topologia produto, também é um exemplo de um espaço topológico que é Hausdorff, mas não é paracompacto.

Teorema 2.2. *Seja X um espaço topológico T_1 e regular. Suponha que existem duas coberturas $\{C_\lambda\}_{\lambda \in I}$ e $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de X que satisfazem:*

1. *C_λ é compacto, U_λ é aberto e $C_\lambda \subset U_\lambda$, para todo $\lambda \in I$;*

2. *$\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é ordem localmente finita.*

Então, para cada espaço topológico paracompacto Y, o produto cartesiano $X \times Y$, com a topologia produto, é um espaço topológico paracompacto.

Provaremos este teorema mais tarde. Primeiro, obteremos como preliminar alguns lemas.

Lema 2.1. *As seguintes afirmações sobre um espaço topológico X, que é regular e T_1, são equivalentes.*

1. X é paracompacto;

2. Toda cobertura aberta de X possui um refinamento localmente finito;

3. Toda cobertura aberta de X possui um refinamento fechado localmente finito.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2).

Trivial.

(2) $\Rightarrow$ (3).

Seja $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$ uma cobertura aberta de X. Para cada $x \in X$, existe $\lambda \in I$ tal que $x \in U_\lambda$. Como X é regular, existe uma vizinhança aberta E_x de x tal que $x \in E_x \subset \overline{E_x} \subset U_\lambda$. Com isso, construímos uma cobertura aberta $\{E_x\}_{x\in X}$ de X tal que a família $\left\{\overline{E_x}\right\}_{x\in X}$ é um refinamento de $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$.

Por hipótese, existe um refinamento localmente finito β de $\{E_x\}_{x\in X}$. Então, $\alpha := \left\{\overline{A}; A \in \beta\right\}$ é o refinamento fechado localmente finito de $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$ que procurávamos. Para verificar que o último refinamento é localmente finito, note que se $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$ é uma coleção localmente finita, então a coleção $\left\{\overline{U_\lambda}\right\}_{\lambda\in I}$ também é localmente finita.

(3) $\Rightarrow$ (1).

Como X é regular e T_1 então X é de Hausdorff (veja Lema 1.3). Seja α uma cobertura aberta de X. Por hipótese, existe um refinamento localmente finito β desta cobertura. Para cada $x \in X$, existe um aberto E_x que intercepta somente uma quantidade finita de elementos da coleção β. A coleção $\{E_x\}_{x\in X}$ é uma cobertura aberta de X. Logo, por hipótese, existe um refinamento fechado localmente finito γ de $\{E_x\}_{x\in X}$.

Para cada $A \in \beta$ considere $R_A = \{W \in \gamma; W \cap A = \emptyset\}$ e defina

$$A^* := X - \bigcup_{W\in R_A} W.$$

Observe que A^* é aberto, para todo $A \in \beta$. De fato, seja $x \in A^*$. Então, existe uma vizinhança aberta V_x de x que intercepta somente uma quantidade finita de elementos de γ. Sejam $W_1, W_2, ..., W_n$ os elementos de γ que interceptam V_x. Note que $W_i \in R_A$ implica em $x \notin W_i$. Seja $I := \{i \in \{1, 2, ..., n\}; W_i \in R_A\}$ e defina

$$V := V_x - \bigcup_{i \in I} W_i.$$

É claro que V é uma vizinhança aberta de x e ainda

$$V = V_x - \bigcup_{i \in I} W_i = V_x - \bigcup_{W \in R_A} W \subset A^*.$$

Vimos acima que A^* é aberto. Além disso, temos $A \subset A^*$, para todo $A \in \beta$ e consequentemente a coleção $\{A^*\}_{A \in \beta}$ cobre X. Também é fácil ver, a partir da definição de A^*, que

$$\text{se } W \in \gamma \text{ intercepta } A^* \text{ então } W \text{ intercepta } A. \tag{2.3}$$

Para cada $A \in \beta$, escolha $S_A \in \alpha$ tal que $A \subset S_A$ e defina

$$\epsilon := \{A^* \cap S_A; A \in \beta\}.$$

A coleção ϵ é uma cobertura aberta de X. De fato, basta notar que a família β cobre X e

$$\bigcup_{A \in \beta} A \subset \bigcup_{A \in \beta} A^* \cap S_A.$$

Mostraremos que ϵ é uma coleção localmente finita. Seja $x \in X$. Como γ é uma coleção localmente finita, existe uma vizinhança aberta V_x de x que intercepta somente uma quantidade finita de elementos de γ. Se $W_1, ..., W_n$ são os elementos de γ que interceptam V_x, então

$$V_x \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i. \tag{2.4}$$

Porém, cada elemento de γ intercepta somente uma quantidade finita de elementos de β, pois γ é um refinamento de $\{E_x\}_{x \in X}$. Com isso, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, existem

$n(i) \in \mathbb{N}$ e $A_{i,1}, ..., A_{i,n(i)} \in \beta$ tais que

$$\{A \in \beta; A \cap W_i \neq \emptyset\} = \left\{A_{i,1}, ..., A_{i,n(i)}\right\}.$$

Por (2.3)

$$\{A \in \beta; A^* \cap W_i \neq \emptyset\} \subset \left\{A_{i,1}, ..., A_{i,n(i)}\right\}.$$

Desta inclusão e por (2.4)

$$\begin{aligned}
\{A \in \beta; A^* \cap S_A \cap V_x \neq \emptyset\} &\subset \{A \in \beta; A^* \cap V_x \neq \emptyset\} \\
&\subset \bigcup_{j=1}^{n} \{A \in \beta; A^* \cap W_j \neq \emptyset\} \\
&\subset \bigcup_{j=1}^{n} \left\{A_{j,1}, ..., A_{j,n(j)}\right\}.
\end{aligned}$$

Logo, a família ϵ é um refinamento aberto localmente finito de α. Portanto X é um espaço topológico paracompacto. Isto completa a demonstração do lema. ∎

Lema 2.2. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma coleção ordem localmente finita de subconjuntos de X. Para cada $\lambda \in I$, seja $\{B_\delta; \delta \in J_\lambda\}$ uma coleção localmente finita de subconjuntos de A_λ e ainda, $J_\lambda \cap J_\epsilon = \emptyset$ se $\lambda \neq \epsilon$. Então a coleção $\{B_\lambda\}_{\lambda \in J}$ é ordem localmente finita, onde J é a união disjunta dos J_λ, $J := \bigcup_{\lambda \in I} J_\lambda$.*

Demonstração: Por definição, existe uma ordem total $\leq$ em I tal que, para cada $\lambda \in I$, a coleção $\{A_\epsilon; \epsilon \leq \lambda\}$ é localmente finita.

Para cada $\lambda \in I$, escolha uma ordem total $\leq_\lambda$ em J_λ e defina a relação $\prec$ em J do seguinte modo. Sejam $x, y \in J$ com $x \in J_\epsilon$ e $y \in J_\delta$. Então,

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta \neq \epsilon \quad \text{e} \quad \epsilon \leq \delta \\ \qquad\quad ou \\ \delta = \epsilon \quad \text{e} \quad x \leq_\delta y. \end{cases}$$

Deixaremos para o leitor verificar que $\prec$ é uma ordem total em J.

Seja $\epsilon \in J_\lambda$. Mostraremos que a coleção $\left\{B_\lambda \in \{B_\lambda\}_{\lambda\in J}; \lambda \prec \epsilon\right\}$ é localmente finita. Para isto, considere $x \in X$. Existe uma vizinhança $U(x)$ de x que intercepta somente uma quantidade finita de elementos do conjunto $\{A_\delta; \delta \leq \lambda\}$. Sejam $A_{\delta_1}, ..., A_{\delta_n}$ os elementos de $\{A_\delta; \delta \leq \lambda\}$ que interceptam $U(x)$. Por hipótese, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, a família $\{B_k; k \in J_{\delta_i}\}$ é localmente finita. Sendo assim, existe uma vizinhança $V_i(x)$ de x que intercepta somente uma quantidade finita de elementos da família $\{B_k; k \in J_{\delta_i}\}$. O conjunto

$$V(x) := U(x) \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_i(x)$$

é uma vizinhança de x tal que a coleção $\bigcup_{i=1}^{n} \{k \in J_{\delta_i}; V(x) \cap B_k \neq \emptyset;\}$ é finita. Agora, note que $\eta \prec \epsilon$, com $\eta \in J_p$ para algum $p \in I$, implica que $p \leq \lambda$. Logo,

$$\{\eta \in J; \eta \prec \epsilon \text{ e } B_\eta \cap V(x) \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{\rho\in I,\ \rho\leq\lambda} \{\eta \in J_\rho; B_\eta \cap V(x) \neq \emptyset\}. \tag{2.5}$$

Observe que, se $p \in I$ com $p \leq \lambda$ e $\eta \in J_p$ é tal que $B_\eta \cap V(x) \neq \emptyset$, então por hipótese temos $B_\eta \subset A_p$. Consequentemente $A_p \cap V(x) \neq \emptyset$ e isto implica que $p \in \{\delta_1, ..., \delta_n\}$. Desta observação concluímos que

$$\bigcup_{\rho\in I,\ \rho\leq\lambda} \{\eta \in J_\rho; B_\eta \cap V(x) \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{\eta \in J_{\delta_i}; B_\eta \cap V(x) \neq \emptyset\}. \tag{2.6}$$

Por (2.5) e (2.6) concluímos o que pretendíamos demonstrar. Portanto a cobertura $\{B_\lambda\}_{\lambda\in J}$ é ordem localmente finita. ■

Lema 2.3. *Um espaço topológico X regular e T_1 é paracompacto se, e somente se, toda cobertura aberta de X tem um refinamento aberto que é ordem localmente finito.*

Demonstração: Se X é paracompacto, então toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto localmente finito. Em particular, este refinamento aberto é ordem localmente finito.

Suponha que X é um espaço topológico regular e T_1, tal que toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto que é ordem localmente finito. Como X é regular e

T_1, então X é Hausdorff.

Sejam ϵ uma cobertura aberta de X e $\delta = \{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ um refinamento aberto ordem localmente finito de ϵ. Seja $\leq$ uma ordem total em I tal que, para todo $\lambda \in I$, a família $\{U_\gamma; \gamma \leq \lambda\}$ é localmente finita. Para cada $\lambda \in I$, defina

$$V_\lambda := U_\lambda - \bigcup_{\delta \leq \lambda \text{ e } \delta \neq \lambda} U_\delta.$$

Considere a família $\beta := \{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$. Sejam $x \in X$ e $U_{\lambda_0} \in \delta$ com $x \in U_{\lambda_0}$. Usando que δ é ordem localmente finita, encontramos uma vizinhança de x que intercepta somente uma quantidade finita de elementos da família $\{U_\epsilon; \epsilon \leq \lambda_0\}$. Isto implica que x pertence a somente uma quantidade finita de elementos desta coleção. Sejam $U_{\lambda_0}, U_{\lambda_1}, ..., U_{\lambda_n}$ os conjuntos desta família para os quais x faz parte. Tome ρ o menor elemento do conjunto $\{\lambda_0, \lambda_1 ..., \lambda_n\}$. Então, é claro que $x \in V_\rho$ e consequentemente β cobre X. Mais ainda, vê-se facilmente β é um refinamento de δ.

Resta-nos mostrar que β é localmente finita. Sejam $x \in X$ e $\lambda_0 \in I$ tal que $x \in U_{\lambda_0}$. Seja $W(x)$ uma vizinhança de x que intercepta somente uma quantidade finita de conjuntos da família $\{U_\lambda; \lambda \leq \lambda_0\}$. Logo, $W(x) \cap U_{\lambda_0}$ é uma vizinhança de x e ainda

$$\begin{aligned}
\{\lambda \in I; W(x) \cap U_{\lambda_0} \cap V_\lambda \neq \emptyset\} &= \{\lambda \in I; W(x) \cap U_{\lambda_0} \cap V_\lambda \neq \emptyset \text{ e } \lambda \leq \lambda_0\} \\
&\subset \{\lambda \in I; W(x) \cap U_{\lambda_0} \cap U_\lambda \neq \emptyset \text{ e } \lambda \leq \lambda_0\} \\
&\subset \{\lambda \in I; W(x) \cap U_\lambda \neq \emptyset \text{ e } \lambda \leq \lambda_0\}.
\end{aligned}$$

Pelo que vimos acima, este último conjunto é finito e desse modo o refinamento β é localmente finito. Pelo Lema 2.1, X é um espaço topológico paracompacto. ■

Enfim, temos o que precisamos para demonstrar o Teorema 2.2. A seguir enunciaremos e provaremos este teorema, que nos dá uma condição suficiente para que o produto de espaços paracompactos seja um espaço paracompacto.

Teorema 2.3. *Seja X um espaço topológico T_1 e regular. Suponha que existem duas coberturas $\{C_\lambda\}_{\lambda \in I}$ e $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de X que satisfazem:*

1. *C_λ é compacto, U_λ é aberto e $C_\lambda \subset U_\lambda$, para todo $\lambda \in I$.*

2. *$\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é ordem localmente finita.*

Então, para cada espaço topológico paracompacto Y, o produto cartesiano $X \times Y$, com a topologia produto, é um espaço topológico paracompacto.

Demonstração:

Seja α uma cobertura aberta de $X \times Y$. Encontraremos um refinamento aberto e ordem localmente finito de α. Fixe $y \in Y$ e $\lambda \in I$. Para cada $x \in C_\lambda$, o ponto $(x, y) \in K$ para algum $K \in \alpha$. Com isso, para cada $x \in C_\lambda$, existem vizinhanças abertas $V_{(x,y)}$ e $W_{(x,y)}$ de x em X e de y em Y respectivamente, tais que $(x, y) \in V_{(x,y)} \times W_{(x,y)} \subset K$, para algum $K \in \alpha$.

A coleção $\left\{V_{(x,y)} \cap U_\lambda\right\}_{x \in C_\lambda}$ é uma cobertura aberta de C_λ, que é compacto. Logo, esta cobertura possui uma subcobertura finita. Seja $\left\{V_{(x_1,y)} \cap U_\lambda, ..., V_{(x_{n(y,\lambda)},y)} \cap U_\lambda\right\}$ esta subcobertura finita, onde $n(y, \lambda) \in \mathbb{N}$. Defina

$$V(y, \lambda) := \bigcap_{i=1}^{n(y,\lambda)} W_{(x_i,y)}.$$

O conjunto $V(y, \lambda)$ é uma vizinhança aberta de y e ainda,

$$\left(V_{(x_i,y)} \cap U_\lambda\right) \times V(y, \lambda) \subset V_{(x_i,y)} \times W_{(x_i,y)} \subset K_i, \tag{2.7}$$

com $K_i \in \alpha$, para todo $i \in \{1, 2, ..., n(y, \lambda)\}$. Observe que

$$C_\lambda \subset \bigcup_{i=1}^{n(y,\lambda)} \left(V_{(x_i,y)} \cap U_\lambda\right) \subset U_\lambda. \tag{2.8}$$

Observe também que $\lambda \in I$ e $y \in Y$ foram tomados quaisquer. Logo, para todo $\lambda \in I$ e $y \in Y$ podemos encontrar uma cobertura aberta $\left\{V_{(x_i,y)} \cap U_\lambda\right\}_{i=1}^{n(y,\lambda)}$ de C_λ e definir $V(y, \lambda)$, satisfazendo (2.7) e (2.8).

Para cada $\lambda \in I$, a família $\{V(y, \lambda)\}_{y \in Y}$ é uma cobertura aberta de Y, que por sua vez é um espaço paracompacto. Sendo assim, esta cobertura possui um refinamento aberto localmente finito $\beta_\lambda = \{V_\epsilon; \epsilon \in I_\lambda\}$.

Para cada $V_\epsilon \in B_\lambda$ existe $y \in Y$ tal que $V_\epsilon \subset V(y,\lambda)$. Logo, pela Equação (2.7), existe $\{K_i\}_{i=1}^{n(y,\lambda)} \subset \alpha$ tal que, para todo $i \in \{1,2,...,n(y,\lambda)\}$

$$\left(V_{(x_i,y)} \cap U_\lambda\right) \times V_\epsilon \subset \left(V_{(x_i,y)} \cap U_\lambda\right) \times V(y,\lambda) \subset K_i. \tag{2.9}$$

Seja $\lambda \in I$. Para cada $\epsilon \in I_\lambda$, escolha $y_\epsilon \in Y$ tal que $V_\epsilon \subset V(y_\epsilon,\lambda)$ e defina

$$H_\lambda := \left\{\left(V_{(x_i,y_\epsilon)} \cap U_\lambda\right) \times V_\epsilon; \epsilon \in I_\lambda \text{ e } i \in \{1,...,n(y_\epsilon,\lambda)\}\right\}.$$

A coleção H_λ é localmente finita. De fato, se $(x,y) \in X \times Y$, então existe uma vizinhança aberta Q_y de y que intercepta somente uma quantidade finita de elementos de β_λ. Então $X \times Q_y$ é uma vizinhança de (x,y) que intercepta somente uma quantidade finita de elementos de H_λ.

A coleção $\{U_\lambda \times Y; \lambda \in I\}$ é uma cobertura aberta de $X \times Y$ que é ordem localmente finita, já que, por hipótese, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é ordem localmente finita. Além disso, H_λ é uma coleção localmente finita de subconjuntos de $U_\lambda \times Y$. Pelo Lema 2.2, a coleção $H := \bigcup_{\lambda \in I} H_\lambda$ é ordem localmente finita. Além disso, por (2.8)

$$\begin{aligned}
\bigcup_{A \in H_\lambda} A &= \bigcup_{\epsilon \in I_\lambda} \left[\bigcup_{i=1}^{n(y_\epsilon,\lambda)} \left(V(x_i,y_\epsilon) \cap U_\lambda\right) \times V_\epsilon\right] \\
&= \bigcup_{\epsilon \in I_\lambda} \left\{\left[\bigcup_{i=1}^{n(y_\epsilon,\lambda)} \left(V(x_i,y_\epsilon) \cap U_\lambda\right)\right] \times V_\epsilon\right\} \\
&\supset \bigcup_{\epsilon \in I_\lambda} \left(C_\lambda \times V_\epsilon\right) \\
&= C_\lambda \times \left(\bigcup_{\epsilon \in I_\lambda} V_\epsilon\right) \\
&= C_\lambda \times Y.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\bigcup_{A \in H} A = \bigcup_{\lambda \in I} \bigcup_{A \in H_\lambda} A \supset \bigcup_{\lambda \in I} (C_\lambda \times Y) = X \times Y,$$

ou seja, H também cobre $X \times Y$.

Por (2.9), H é um refinamento de α. Logo, H é um refinamento aberto de α que é ordem localmente finito.

O espaço Y é de Hausdorff, em particular, é T_1 e por hipótese X é T_1. Pelo Corolário 1.1, $X \times Y$ é T_1. A Proposição 2.4 garante que Y é normal. Logo Y é regular (pois também é Hausdorff) e consequentemente pela Proposição 1.6, $X \times Y$ é regular. Pelo Lema 2.3, obtemos que $X \times Y$ é um espaço topológico paracompacto. ∎

O resultado seguinte foi provado em [13] por K. Morita. Em [8], I. Katuta apresenta o resultado seguinte como um corolário do teorema que acabamos de provar.

Corolário 2.4. *Seja X um espaço topológico paracompacto que é uma união enumerável de subconjuntos fechados, localmente compactos e Y um espaço topológico paracompacto. Então o produto $X \times Y$, com a topologia produto, é um espaço topológico paracompacto.*

2.3 Partição de Unidade Subordinada

Nesta seção apresentaremos uma caracterização para os espaços topológicos T_1 que são paracompactos. Mostraremos que um espaço topológico T_1 é paracompacto se, e somente se, toda cobertura aberta desse espaço possui uma partição de unidade subordinada a ela.

Definição 2.2. *Seja X um espaço topológico. Uma família $\{t_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de funções contínuas $t_\lambda : X \longrightarrow [0,1]$ é chamada de partição de unidade se*

1. *Para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta $V(x)$ de x, tal que o conjunto $\{\lambda \in I; supp_X(t_\lambda) \cap V(x) \neq \emptyset\}$ é finito, onde $supp_X(t_\lambda) := \overline{\{x \in X; t_\lambda(x) \neq 0\}}$. O conjunto $supp_x(t_\lambda)$ será chamado de suporte da função t_λ;*

2. para todo $x \in X$,

$$\sum_{\lambda \in I} t_\lambda(x) = 1.$$

Se X é um espaço topológico, então segue trivialmente da definição que a família formada apenas pela função constante que a todo ponto de X associa 1 é uma partição de unidade.

Observe que se X é um espaço topológico e $\{t_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma partição de unidade, então a condição 1 garante que a família $\{supp_X(t_\lambda)\}_{\lambda \in I}$ é localmente finita.

Definição 2.3. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mu = \{U_\lambda; \lambda \in J\}$ uma cobertura aberta de X. Uma partição de unidade subordinada a μ é uma partição de unidade $\{t_\lambda; \lambda \in I\}$ que satisfaz a seguinte propriedade: para todo $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $supp_X(t_i) \subset U_j$.*

Seja X um espaço topológico. Segue trivialmente da definição que a partição de unidade apresentada anteriormente no texto é uma partição de unidade subordinada a cobertura $\{X\}$.

Nosso objetivo agora, é provar que um espaço topológico T_1 é paracompacto se, e somente se, toda cobertura aberta deste espaço, admite uma partição de unidade subordinada a ela. Para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.4. *Seja (X, τ) um espaço topológico paracompacto e $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma cobertura aberta de X. Então existe uma cobertura aberta $\{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de X tal que $\overline{V_\lambda} \subset U_\lambda$ para todo $\lambda \in I$.*

Demonstração:

Sejam $\alpha = \{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma cobertura aberta de X e $x \in X$. Tome $\lambda \in I$ tal que $x \in U_\lambda$. Pela Proposição 2.4 e pelo Lema 1.4 existe um aberto Y_x tal que $x \in Y_x \subset \overline{Y_x} \subset U_\lambda$. Observe que $\gamma := \{Y_x\}_{x \in X}$ é uma cobertura aberta de X que, por hipótese, é paracompacto. Seja $\beta = \{W_\lambda\}_{\lambda \in J}$ um refinamento aberto localmente finito de γ. Defina para cada $\lambda \in I$, $B_\lambda =: \left\{Z \in \beta; \overline{Z} \subset U_\lambda\right\}$ e

$$V_\lambda := \bigcup_{Z \in B_\lambda} Z.$$

A coleção $\{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$ cobre X. De fato, se $x \in X$, então existem $\lambda_0 \in J$, $\overline{x} \in X$ e $\lambda_1 \in I$ tais que $x \in W_{\lambda_0} \subset Y_{\overline{x}} \subset \overline{Y_{\overline{x}}} \subset U_{\lambda_1}$. Segue que $x \in W_{\lambda_0}$ e $\overline{W_{\lambda_0}} \subset \overline{Y_{\overline{x}}} \subset U_{\lambda_1}$ e consequentemente $x \in V_{\lambda_1}$.

Mostraremos que $\overline{V_\lambda} \subset U_\lambda$, para todo $\lambda \in I$. Seja $\lambda \in I$ e tome $x \in \overline{V_\lambda}$. Existe uma vizinhança V_x de x que intercepta somente uma quantidade finita de elementos de β. Sejam $W_{a_1}, ..., W_{a_n}$ os elementos de β que interceptam V_x. De $x \in \overline{V_\lambda}$ e V_x ser uma vizinhança de x segue que $V_\lambda \cap V_x \neq \emptyset$. Assim sendo, deve existir $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\overline{W_{a_i}} \subset U_\lambda$. Defina

$$K := \left\{ i \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq n \text{ e } \overline{W_{a_i}} \subset U_\lambda \right\}.$$

Temos $x \in \overline{\bigcup_{i \in K} W_{a_i}}$, pois, caso contrário, $V_x - \overline{\bigcup_{i \in K} W_{a_i}}$ seria uma vizinhança de x que não interceptaria nenhum $W \in \beta$ cujo fecho estivesse contido em U_λ. Consequentemente, esta vizinhança de x não interceptaria V_λ. Isto contradiz o fato de que x está no fecho de V_λ. Logo,

$$x \in \overline{\bigcup_{i \in K} W_{a_i}} = \bigcup_{i \in K} \overline{W_{a_i}} \subset U_\lambda.$$

Com isso, provamos que $\overline{V_\lambda} \subset U_\lambda$. Portanto $\{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é a cobertura aberta procurada. ■

Teorema 2.4. *Um espaço topológico T_1 é paracompacto se, e somente se, toda cobertura aberta deste espaço possui uma partição de unidade subordinada a ela.*

Demonstração:

Suponha que (X, τ) é um espaço topológico T_1 tal que toda cobertura aberta de X possui uma partição de unidade subordinada a ela e tome $x, y \in X$. Existem uma vizinhança aberta A_x de x que não contém y e também uma vizinhança aberta A_y de y que não contém x. Para cada $z \in X - \{x, y\}$ tome uma vizinhança aberta A_z de z que não contém x.

A coleção $\{A_z\}_{z \in X - \{x,y\}} \cup \{A_x, A_y\}$ é uma cobertura aberta de X. Seja $\{f_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma partição de unidade subordinada a esta cobertura. Por definição, existe $\lambda_0 \in I$ tal que $f_{\lambda_0}(x) \neq 0$. Existe também um conjunto da cobertura que contém $supp_X(f_{\lambda_0})$. Logo, f_{λ_0} se anula fora deste conjunto. Porém, o único conjunto que contém x desta cobertura é

A_x. Consequentemente

$$supp_X(f_{\lambda_0}) \subset A_x.$$

Como $y \notin A_x$ então $f_{\lambda_0}(y) = 0$. Logo, os conjuntos $f_{\lambda_0}^{-1}\left[0, \frac{f_{\lambda_0}(x)}{2}\right)$ e $f_{\lambda_0}^{-1}\left(\frac{f_{\lambda_0}(x)}{2}, 1\right]$ são vizinhanças abertas e disjuntas de y e x respectivamente. Isto mostra que X é um espaço de Hausdorff.

Seja $\alpha = \{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma cobertura aberta de X e considere $\{t_\lambda\}_{\lambda \in J}$ uma partição de unidade subordinada a α. Considere a coleção

$$\beta = \{V_\lambda; \lambda \in J\}, \text{ onde } V_\lambda := \{x \in X; t_\lambda(x) \neq 0\}.$$

Temos $\sum_{\lambda \in J} t_\lambda(x) = 1$, para todo $x \in X$. Isto implica que a coleção β cobre X. Pela continuidade de t_λ concluímos que V_λ é aberto. Segue da definição de partição de unidade que a família $\{supp_X(t_\lambda)\}_{\lambda \in J}$ é localmente finita e para todo $\lambda \in J$ existe $\epsilon \in I$ tal que $supp_X(t_\lambda) \subset U_\epsilon$. Como $V_\lambda \subset supp_X(t_\lambda)$ para todo $\lambda \in J$, segue que β é um refinamento aberto localmente finito da cobertura α. Portanto X é um espaço topológico paracompacto.

Suponha que X é um espaço topológico paracompacto. Seja $\alpha = \{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma cobertura aberta de X e considere $\beta = \{W_\lambda\}_{\lambda \in J}$ um refinamento aberto localmente finito de α. Pelo Lema 2.4, existem coberturas abertas $\{V_\lambda\}_{\lambda \in J}$ e $\{P_\lambda\}_{\lambda \in J}$ de X satisfazendo

$$\overline{P_\lambda} \subset V_\lambda \subset \overline{V_\lambda} \subset W_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in J. \tag{2.10}$$

Pelo Corolário 2.2, para cada $\lambda \in J$ existe uma função contínua $f_\lambda : X \to [0,1]$ tal que $f_\lambda(\overline{P_\lambda}) = \{1\}$ e $f_\lambda(X - V_\lambda) = \{0\}$. A última igualdade implica que $\{x \in X; f_\lambda(x) \neq 0\} \subset V_\lambda$. Consequentemente, por (2.10)

$$supp_X(f_\lambda) \subset \overline{V_\lambda} \subset W_\lambda. \tag{2.11}$$

Podemos definir

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & (0,+\infty) \\ & x & \longmapsto & \sum_{\lambda\in J} f_\lambda(x). \end{array}$$

Mostraremos que f está bem definida e é contínua. Seja $x \in X$ e considere uma vizinhança aberta V_x de x tal que o conjunto

$$\{\lambda \in I; supp_X(f_\lambda) \cap V_x \neq \emptyset\}$$

é finito. Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os elementos deste conjunto. Então, para cada $y \in V_x$

$$f(y) = \sum_{\lambda\in J} f_\lambda(y) = \sum_{k=1}^{n} f_{\lambda_k}(y).$$

Logo, f é em V_x uma soma finita de funções contínuas. Segue que f está bem definida. Além disso, esta igualdade mostra que f é contínua em x. Como $\{P_\lambda\}_{\lambda\in J}$ cobre X então $f(x) > 0$ para todo $x \in X$.

Para cada $\lambda \in J$ defina a função

$$\begin{array}{rccl} g_\lambda: & X & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \frac{f_\lambda(x)}{f(x)}. \end{array}$$

Perceba que $supp_X(g_\lambda) = supp_X(f_\lambda)$. Consequentemente a coleção $\{g_\lambda\}_{\lambda\in I}$ satisfaz a condição 1 da definição de partição de unidade. É fácil ver que $\sum_{\lambda\in J} g_\lambda(x) = 1$ para todo $x \in X$ e que cada g_λ é contínua. Logo, a coleção $\{g_\lambda\}_{\lambda\in J}$ é uma partição de unidade. Através de (2.11), concluímos que esta coleção é uma partição de unidade subordinada a cobertura β. Mas, como β é um refinamento de α, segue que esta coleção é uma partição de unidade subordinada a α.

Portanto, toda cobertura aberta de X possui uma partição de unidade subordinada a ela. ■

Ernest Michael em [10] mostrou que para que um espaço topológico T_1 seja paracompacto é suficiente apenas que exista para cada cobertura aberta α de X uma família de funções contínuas $\{t_\lambda\}_{\lambda\in I}$, onde $t_\lambda : X \to [0,1]$, que satisfaz:

1. $\sum_{\lambda\in I} t_\lambda(x) = 1$ para cada $x \in X$ (Veja apêndice A.6);

2. Para todo $\lambda \in I$ existe $A_\lambda \in \alpha$ tal que se $x \notin A_\lambda$ então $t_\lambda(x) = 0$.

Mostraremos o resultado enunciado anteriormente, mas primeiro provaremos o seguinte lema.

Lema 2.5. *Seja X um espaço topológico regular e T_1. Suponha que toda cobertura aberta de X tem um refinamento aberto $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, onde cada V_i é uma coleção localmente finita de X. Nessas condições, X é paracompacto.*

Demonstração: Seja R uma cobertura aberta de X. Por hipótese, existe um refinamento $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, onde cada V_i é uma coleção localmente finita de X. Defina para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$W_i := \bigcup_{A\in V_i} A.$$

A coleção $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de X. Pela Proposição 1.3, existe um refinamento $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que é localmente finito e ainda $A_i \subset W_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Com isso, defina

$$\Omega := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{K \cap A_i; K \in V_i\}.$$

A coleção Ω também cobre X. De fato, usando que $A_i \subset W_i$ e que $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cobre X

$$\begin{aligned}
\bigcup_{A\in\Omega} A &= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{K\in V_i} (K \cap A_i) \\
&= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left[\left(\bigcup_{K\in V_i} K\right) \cap A_i\right] \\
&= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (W_i \cap A_i) \\
&= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = X.
\end{aligned}$$

Se $x \in X$, então existe uma vizinhança S_x de x que intercepta apenas uma quantidade finita de elementos de família $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Suponha que $\{A_{i_1}, ..., A_{i_n}\}$ sejam esses elementos. Para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$ a família V_{i_j} é localmente finita. Sendo assim, existe uma vizinhança P_{i_j} de x que intercepta apenas uma quantidade finita de elementos desta família. Logo,

$$S := S_x \cap \bigcap_{j=1}^{n} P_{i_j}$$

é uma vizinhança de x que intercepta apenas uma quantidade finita de elementos do conjunto Ω. Consequentemente, a família Ω é localmente finita.

Segue, de V ser um refinamento de R, que Ω também é um refinamento de R.

Portanto, construímos um refinamento Ω de R que é localmente finito. Pelo Lema 2.1, X é um espaço topológico paracompacto. ■

Teorema 2.5. *Seja X um espaço topológico T_1. Suponha que para toda cobertura aberta α de X, exista uma família de funções contínuas $\{t_\lambda\}_{\lambda \in I}$, onde $t_\lambda : X \to [0, 1]$, que satisfaz*

1. $\sum_{\lambda \in I} t_\lambda(x) = 1$ *para cada* $x \in X$;

2. *Para todo $\lambda \in I$, existe $A_\lambda \in \alpha$ tal que se $x \notin A_\lambda$ então $t_\lambda(x) = 0$.*

Nessas condições, X é um espaço topológico paracompacto.

Demonstração: Mostraremos que X é regular. Para isto, seja $F \subset X$ um fechado e $x \in X - F$. Seja $V_x \subset X - F$ uma vizinhança aberta de x e para cada $y \in X - \{x\}$ tome uma vizinhança aberta Z_y de y que não contém x. Isto é possível porque o espaço é T_1.

A família $\gamma := \{V_x\} \cup \{Z_y\}_{y \in X - \{x\}}$ é uma cobertura aberta de X. Por hipótese, existe uma família de funções $\{t_\lambda\}_{\lambda \in I}$, onde $t_\lambda : X \to [0, 1]$, satisfazendo 1 e 2. Por 1, existe $\lambda_0 \in I$ tal que

$$t_{\lambda_0}(x) \neq 0.$$

Como V_x é o único aberto da cobertura γ que contém x, então segue por 2 que t_{λ_0} se anula fora de V_x. Logo $t_{\lambda_0}(F) = \{0\}$.

Os abertos $t_{\lambda_0}^{-1}\left(\frac{t_{\lambda_0}(x)}{2}, 1\right]$ e $t_{\lambda_0}^{-1}\left[0, \frac{t_{\lambda_0}(x)}{2}\right)$ são vizinhanças abertas e disjuntas de x e F respectivamente. Isto completa a prova de que X é regular.

Sejam R uma cobertura aberta de X e $\{t_\lambda\}_{\lambda\in I}$ uma família de funções contínuas, $t_\lambda : X \to [0,1]$, tal que

1. $\sum_{i\in I} t_\lambda(x) = 1$, para todo $x \in X$;
2. para cada $\lambda \in I$ existe $A_\lambda \in R$ tal que, se $x \notin A_\lambda$ então $t_\lambda(x) = 0$.

Defina para cada $i \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in I$

$$A_{i,\lambda} := t_\lambda^{-1}\left(\frac{1}{i}, 1\right].$$

Cada $A_{i,\lambda}$ é aberto, já que t_λ é uma função contínua. Para cada $i \in \mathbb{N}$ defina

$$V_i := \{A_{i,\lambda}\}_{\lambda\in I}$$

e

$$V := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i.$$

Seja $x \in X$. Por 1, existe $\lambda \in I$ tal que $t_\lambda(x) \neq 0$. Para $i \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{i} < t_\lambda(x)$ temos $x \in A_{i,\lambda}$. Logo V é uma cobertura aberta de X. Mais que isso, a condição 2 garante que V é um refinamento da cobertura R.

Provaremos que para cada $i \in \mathbb{N}$, a coleção V_i é localmente finita. Sejam $i \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Por 1, existe um subconjunto finito F de I tal que

$$\left|\sum_{\lambda\in F} t_\lambda(x) - 1\right| < \frac{1}{2i}.$$

Segue disto que

$$\sum_{\lambda\in F} t_\lambda(x) > 1 - \frac{1}{2i}. \tag{2.12}$$

A função $t := \sum_{\lambda\in F} t_\lambda$ é contínua, pois é soma finita de funções contínuas. A inequação (2.12) implica que o aberto $\left(1-\frac{1}{i}, 1\ \right]$ é uma vizinhança de $t(x)$. Pela continuidade de t, existe uma vizinhança W_x de x tal que

$$t(W_x) \subset \left(1-\frac{1}{i}, 1\right]. \tag{2.13}$$

Agora, se $\lambda_0 \notin F$ e $y \in W_x$, então, por (2.13)

$$t_{\lambda_0}(y) = t_{\lambda_0}(y) + t(y) - t(y) \leq \sum_{\lambda \in I} t_\lambda(y) - t(y) = 1 - t(y) < 1 - \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{i}.$$

Segue que $y \notin A_{i,\lambda_0}$. Consequentemente, $W_x \cap A_{i,\lambda_0} = \emptyset$. Logo,

$$\{\lambda \in I; A_{i,\lambda} \cap W_x \neq \emptyset\} \subset F.$$

Portanto, V_i é uma coleção localmente finita para todo $i \in \mathbb{N}$.

Em resumo, provamos que para toda cobertura aberta R de X existe um refinamento aberto $V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ de R tal que V_i é localmente finita para todo $i \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 2.5, X é um espaço topológico paracompacto.

■

Corolário 2.5. *Seja X um espaço topológico T_1. Então, X é paracompacto se, e somente se, para toda cobertura aberta α de X, existe uma família de funções contínuas $\{t_\lambda\}_{\lambda \in I}$, onde $t_\lambda : X \to [0,1]$, que satisfaz*

1. *$\sum_{\lambda \in I} t_\lambda(x) = 1$ para cada $x \in X$.*

2. *Para todo $\lambda \in I$ existe $A_\lambda \in \alpha$ tal que se $x \notin A_\lambda$ então $t_\lambda(x) = 0$.*

Demonstração: Combine os Teoremas 2.4 e 2.5. ■

Capítulo 3

Paracompacidade de Espaços Localmente Compactos e Hausdorff

Os espaços topológicos localmente compactos e de Hausdorff desempenham papel importante na matemática. Neste capítulo, estudaremos uma caracterização para os espaços topológicos localmente compactos e Hausdorff que são paracompactos. Iniciaremos o capítulo mostrando que a classe dos espaços localmente compactos e Hausdorff não está contida na classe dos espaços paracompactos. Durante o capítulo, usaremos alguns resultados algébricos que serão devidamente enunciados e provados no apêndice deste texto. Se X é um conjunto, então denotaremos, neste capítulo, o conjunto das partes de X por $P(X)$ ou 2^X.

3.1 Exemplo de um Espaço Topológico Localmente Compacto e Hausdorff que não é Paracompacto

Definiremos uma topologia em $\mathbb{R}$ que o torna um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff, porém não paracompacto. Para cada $y \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, escolha uma sequência de racionais $\{x_n^y\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para y (Na topologia de $\mathbb{R}$ induzida pela métrica euclidiana). Para cada irracional y e para $n \in \mathbb{N}$, defina

$$U_n(y) := \{x_i^y\}_{i=n}^{\infty} \cup \{y\}\,.$$

Agora, defina

$$K := \bigcup_{y \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}} \{U_n(y); n \in \mathbb{N}\} \cup \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{\{x\}\}\,.$$

Observe que a intercessão de dois elementos de K só pode ser vazia ou uma quantidade finita de racionais ou algum $U_n(y)$, ou seja, a intercessão finita de elementos de K é uma união finita de elementos de K. Use esta observação para garantir a existência de uma topologia em $\mathbb{R}$ com base K. Seja $\rho_{\mathbb{Q}}$ a topologia que tem como base o conjunto K.

Proposição 3.1. *Com a notação adotada acima,* $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$ *é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração: Basta notar que, para todo aberto A de $\mathbb{R}$, com a topologia induzida pela métrica euclidiana, e para todo $x \in A$, existe um aberto B de $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$ tal que $x \in B \subset A$. Logo, todo aberto de $\mathbb{R}$ é também um aberto de $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$. Como $\mathbb{R}$, com a topologia induzida pela métrica euclidiana, é de Hausdorff, segue que $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$ também é um espaço de Hausdorff. ■

Proposição 3.2. *Com a notação adotada acima,* $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$ *é um espaço topológico localmente compacto.*

Demonstração:

Se $x \in \mathbb{R}$ é racional então $\{x\}$ é uma vizinhança compacta de x.

Se y é irracional, então $U_1(y)$ é uma vizinhança aberta de y. Mostraremos que $U_1(y)$ é compacto em $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$. Sejam $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma cobertura aberta de $U_1(y)$ e $\lambda_0 \in I$ tal que $y \in U_{\lambda_0}$. Existe um aberto básico A tal que $y \in A \subset U_{\lambda_0}$. Mas, os únicos abertos básicos que contém y são os $U_n(y)$ com $n \in \mathbb{N}$. Com isso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_0}(y) \subset U_{\lambda_0}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n < n_0$ escolha U_{λ_n} com $x_n^y \in U_{\lambda_n}$. Então,

$$\{U_{\lambda_i}\}_{i=0}^{n_0-1}$$

é uma subcobertura finita da cobertura $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$. Consequentemente $U_1(y)$ é compacto. Portanto, $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$ é um espaço topológico localmente compacto. ■

Em breve, mostraremos que $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$ não é paracompacto. Antes de demonstrar esta afirmação, mostraremos como preliminar o Lema de Jones.

Lema 3.1. ***(Lema de Jones)*** *Seja (X, τ) um espaço topológico normal. Suponha que existam dois subconjuntos A e B de X tais que A é infinito e denso em X e todo subconjunto de B é fechado em X. Nessas condições, temos*

$$2^{|B|} \leq 2^{|A|}.$$

Demonstração: Denote o conjunto de todos os subconjuntos de A e de B respectivamente por $P(A)$ e $P(B)$. Seja $C \subset B$. Por hipótese, C e $B - C$ são fechados em X. Pelo Lema de Urysohn (Lema 1.6), existe uma função contínua $f_C : X \to [0, 1]$ tal que $f_C(C) = \{0\}$ e $f_C(B - C) = \{1\}$.

Sejam $C(X, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas definidas em X e tomando valores em $\mathbb{R}$ e $f(A, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções de A em $\mathbb{R}$. Para cada $C \subset B$, escolha uma função contínua $f_C : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz, $f_C(C) = \{0\}$ e $f_C(B - C) = \{1\}$ e defina a função

$$\begin{array}{rccl} f: & P(B) & \longrightarrow & C(X, \mathbb{R}) \\ & C & \longmapsto & f_C. \end{array}$$

A função f é injetiva. De fato, se $A, C \in P(B)$ com $A \neq C$ (podemos supor sem perda de generalidade que $A - C \neq \emptyset$), então para $x \in A - C$ temos $f_A(x) = 0$ e $f_C(x) = 1$. Logo, $f_A \neq f_C$. Isto mostra que $2^{|B|} \leq |C(X, \mathbb{R})|$. Mas, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} h: & C(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & f(A, \mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccl} H_f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array} \right. \end{array}$$

é injetiva, pois suponha que $H_f = H_g$ e tome $x \in X$. Como A é denso em X, existe uma rede $\{y_n\}_{n \in I}$ em A que converge para x. Logo $f(x_n) = g(x_n)$, para todo $n \in I$. Pela

Proposição 1.5 e do fato de $\mathbb{R}$ ser um espaço de Hausdorff temos $f(x) = g(x)$. Portanto $f = g$. Da injetividade de f, obtemos $|C(X, \mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}|^{|A|}$ e consequentemente $2^{|B|} \leq |\mathbb{R}|^{|A|}$. Pelo Exemplo 1.7 e item 3 da Proposição 1.10, temos

$$\begin{aligned} 2^{|B|} &\leq |\mathbb{R}|^{|A|} \\ &= \left(2^{|\mathbb{N}|}\right)^{|A|} \\ &= 2^{|\mathbb{N}| \cdot |A|}. \end{aligned}$$

Como A é infinito, pelo Corolário 1.7,

$$2^{|B|} \leq 2^{|\mathbb{N}| \cdot |A|} = 2^{|A|}.$$

■

De posse deste lema, demonstraremos a proposição anterior.

Proposição 3.3. *Com a notação adotada anteriormente,* $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$ *não é um espaço topológico paracompacto.*

Demonstração: Suponha que o espaço topológico $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$ é normal. Afirmamos que $\mathbb{Q}$ é denso em $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$. De fato, se V é um aberto não vazio, então existe um aberto básico K tal que $K \subset V$. Mas, todo aberto básico intercepta $\mathbb{Q}$ e desse modo, $\mathbb{Q}$ intercepta V.

Agora se $A \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ então

$$\mathbb{R} - A = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \cup \bigcup_{y \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - A} U_1(y).$$

Esta igualdade mostra que $\mathbb{R} - A$ é aberto em $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$ e consequentemente A é fechado em $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$. Logo, todo subconjunto de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é fechado em $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$.

Assim, pelo Lema de Jones temos

$$2^{|\mathbb{R} - \mathbb{Q}|} \leq 2^{|\mathbb{Q}|}.$$

Logo,

$$2^{|\mathbb{R}|} = 2^{|\mathbb{R}-\mathbb{Q}|} \leq 2^{|\mathbb{Q}|} = 2^{|\mathbb{N}|} = |\mathbb{R}|.$$

Isto é um absurdo, pois contradiz o Teorema de Cantor (exemplo 1.8). Portanto o espaço topológico $(R, \rho_{\mathbb{Q}})$ não é normal e isto implica que $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{Q}})$ não é paracompacto pela Proposição 2.4. ■

3.2 Uma Caracterização para os Espaços Topológico Localmente Compactos e Hausdorff que são Paracompactos

Começaremos a seção enunciando um resultado fundamental sobre R-módulos projetivos, que precisamos para apresentar uma caracterização para a classe dos espaços topológicos localmente compactos e Hausdorff que são paracompactos. Todos os resultados apresentados sem demonstração serão devidamente demonstrados no apêndice deste texto. Encerramos a seção mostrando que um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff X é paracompacto se, e somente se, o conjunto das funções contínuas com suporte compacto, definidas em X e tomando valores em $\mathbb{R}$ é um $C(X)$-módulo projetivo.

Recordemos das seguintes definições e resultados sobre R-módulos projetivos.

Definição 3.1. *Se R é um anel comutativo com unidade, então um R-módulo M é um grupo abeliano com uma função $h : R \times M \to M$ satisfazendo para todos $s, r \in R$ e $m, n \in M$, onde $h(s, x)$ indicaremos como sx:*

1. $r(sm) = (rs)m$;
2. $r(m + n) = rm + rn$;
3. $(r + s)m = rm + sm$;
4. $1m = m$.

Exemplo 3.1. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Sabemos que o conjunto das funções contínuas definidas em X e tomando valores em $\mathbb{R}$, com a adição e multiplicação usuais de funções, é um anel comutativo e com unidade. O conjunto de todas as funções contínuas definidas em X e tomando valores em $\mathbb{R}$ que possuem suporte compacto, com a aplicação m abaixo e com a adição natural de funções, é um $C(X)$-módulo. Durante este capítulo, indicaremos este conjunto por $J(X)$.*

$$\begin{array}{rccc} m: & C(X) \times J(X) & \longrightarrow & J(X) \\ & (f,g) & \longmapsto & f \cdot g \end{array}$$

onde $\cdot$ é o produto usual de funções. Note que a aplicação acima está bem definida, pois se $f \in C(X)$ e $g \in J(X)$ então

$$supp_X(f \cdot g) \subset supp_X(g).$$

Como $supp_X(f \cdot g)$ é fechado e $supp_X(g)$ é compacto segue que $supp_X(f \cdot g)$ também é compacto. Deixaremos para o leitor, as demonstrações das afirmações feitas neste exemplo.

Teorema 3.1. *Um R-módulo P é projetivo se, e somente se, P possui uma base projetiva, isto é, se, e somente se, existe uma família $\{v_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de elementos de P e uma família de R-homomorfismos $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in I}$, onde $\varphi_\lambda : P \to R$ para cada $\lambda \in I$, que satisfazem para todo $x \in P$:*

1. *O conjunto $\{\lambda \in I; \varphi_\lambda(x) \neq 0\}$ é finito;*

2. *$\sum_{\lambda \in I} \varphi_\lambda(x) \cdot v_\lambda = x$.*

O teorema que será apresentado a seguir nos dá uma caracterização para os espaços topológicos localmente compactos e de Hausdorff que são paracompactos. Mostraremos o teorema apresentado por Finney e Rotman em [6].

Teorema 3.2. *Seja X um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff. Então X é paracompacto se, e somente se, $J(X)$ é um $C(X)$-módulo projetivo.*

Demonstração: Seja X um espaço topológico localmente compacto e de Hausdorff. Suponha que X é paracompacto. Mostraremos que $J(X)$ possui uma base projetiva.

Seja $x \in X$. Por hipótese, existe uma vizinhança compacta E_x de x. Seja $V_x \subset E_x$ uma vizinhança aberta de x. Como X é Hausdorff então $\overline{V_x} \subset \overline{E_x} = E_x$. Isto implica que $\overline{V_x}$ é compacto. Logo, construímos uma cobertura aberta $\{V_x\}_{x \in X}$ de X cujo fecho de cada conjunto da cobertura é um conjunto compacto.

Como o espaço em questão é paracompacto, existe um refinamento aberto localmente finito $\alpha = \{W_\lambda\}_{\lambda \in J}$ da cobertura $\{V_x\}_{x \in X}$.

Para cada $\lambda \in J$, existe um $x \in X$ tal que

$$W_\lambda \subset V_x.$$

Logo,

$$\overline{W_\lambda} \subset \overline{V_x}.$$

Consequentemente, cada $\overline{W_\lambda}$ é compacto.

Considere $\{f_\lambda\}_{\lambda \in K}$ uma partição de unidade subordinada a cobertura α. Isto é possível pelo Teorema 2.4. Por definição, para cada $k \in K$ existe $j \in J$ tal que

$$supp_X(f_k) \subset W_j \subset \overline{W_j}.$$

O conjunto $\overline{W_\lambda}$ é compacto e como $supp_X(f_k)$ é fechado, então $supp_X(f_k)$ é compacto. Logo, $f_k \in J(X)$ para todo $k \in K$.

Para cada $\beta \in K$, escolha $k_\beta \in J$ tal que

$$supp_X(f_\beta) \subset W_{k_\beta}.$$

Pela Proposição 1.7, existe uma função contínua $s_\beta : X \to [0,1]$ tal que $s_\beta(supp_X(f_\beta)) = \{1\}$ e $s_\beta(X - W_{k_\beta}) = \{0\}$.

Para cada $\beta \in K$ defina

$$\begin{array}{rcccl} \phi_\beta : & J(X) & \longrightarrow & C(X) & \\ & g & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccl} gs_\beta : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) \cdot s_\beta(x). \end{array} \right. \end{array}$$

Sabemos que o produto de duas funções contínuas definidas em X e que tomam valores na reta é ainda uma função contínua (de fato, basta notar que o produto em $\mathbb{R}$ é uma função contínua e usar a Proposição 1.5). Logo, a função acima está bem definida. Mais ainda, o leitor não terá dificuldade em perceber que cada ϕ_β é um $C(X)$-homomorfismo.

Afirmamos que as famílias $\{f_k\}_{k\in K}$ e $\{\phi_k\}_{k\in K}$ formam uma base projetiva para $J(X)$. Para provar a afirmação feita, considere $g \in J(X)$. Como $supp_X(g)$ é compacto, pela Proposição 1.2, este conjunto intercepta apenas uma quantidade finita de elementos da família α. Seja

$$\left\{\beta \in K; supp_X(g) \cap W_{k_\beta} \neq \emptyset\right\} = \left\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n(g)}\right\}.$$

Tome $\lambda \in K$, com $\lambda \notin \left\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n(g)}\right\}$. Consequentemente $supp_X(g) \cap W_{k_\lambda} = \emptyset$. Segue que $g(x) = 0$ para todo $x \in W_{k_\lambda}$. Por outro lado, se $x \notin W_{k_\lambda}$ então $s_\lambda(x) = 0$. Logo, para todo $x \in X$ temos

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(g)(x) &= (g \cdot s_\lambda)(x) \\ &= g(x) \cdot s_\lambda(x) = 0. \end{aligned}$$

Desse modo

$$\{\beta \in K; \phi_\beta(g) \neq 0\} \subset \left\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n(g)}\right\}. \tag{3.1}$$

Observe que, para todo $\beta \in K$, temos $f_\beta = f_\beta \cdot s_\beta$. De fato, se $f_\beta(x) = 0$, então a igualdade segue trivialmente. Suponha que $f_\beta(x) \neq 0$. Então, $x \in supp_X(f_\beta)$ e pela definição de s_β temos $s_\beta(x) = 1$. Neste caso, também é verdade que $f_\beta = f_\beta \cdot s_\beta$.

Seja $g \in J(X)$. Pela observação acima, para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x) \cdot \sum_{\beta \in K} f_\beta(x) \\ &= \sum_{\beta \in K} g(x) \cdot f_\beta(x) \\ &= \sum_{\beta \in K} g(x) \cdot s_\beta(x) \cdot f_\beta(x) \\ &= \sum_{\beta \in K} (g \cdot s_\beta)(x) \cdot f_\beta(x) \\ &= \sum_{\beta \in K} (\phi_\beta(g) \cdot f_\beta)(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Note que em (3.2), usamos o fato de que $\{f_\beta\}_{\beta \in K}$ é uma partição de unidade. Por (3.1) e (3.2), deduzimos que as famílias $\{f_k\}_{k \in K}$ e $\{\phi_k\}_{k \in K}$ formam uma base projetiva para $J(X)$. O Teorema 3.1 garante que $J(X)$ é um $C(X)$-módulo projetivo.

Provaremos a recíproca. Para isso, suponha que X é um espaço topológico localmente compacto e de Hausdorff. Suponha também que $J(X)$ é um $C(X)$-módulo projetivo. Provaremos que, neste caso, X possui uma cobertura aberta localmente finita $\{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$ tal que $\overline{V_\lambda}$ é compacto, para todo $\lambda \in I$.

Pelo Teorema 3.1, o módulo $J(X)$ possui uma base projetiva. Sejam $\{f_\beta\}_{\beta \in J} \subset J(X)$ e $\{\phi_\beta\}_{\beta \in J}$ uma base projetiva para $J(X)$, onde $\phi_\beta : J(X) \to C(X)$ é um $C(X)$-homomorfismo.

Defina para cada $\beta \in J$,

$$V_\beta := int\left(supp_X\left(\phi_\beta(f_\beta)\right)\right).$$

Mostraremos a seguir que a coleção $\{V_\beta\}_{\beta \in J}$ é uma cobertura aberta de X. Seja $x \in X$. Existe uma vizinhança compacta Z_x de x. Usando a Proposição 1.7 para os conjuntos $\{x\}$ e $X - int(Z_x)$, garantimos a existência de uma função contínua $s : X \to [0, 1]$ tal que $s(x) = 1$ e $s(X - int(Z_x)) = \{0\}$. Como o espaço é Hausdorff temos

$$supp_X(s) \subset \overline{int(Z_x)} \subset \overline{Z_x} = Z_x.$$

Mas $supp_X(s)$ é fechado e Z_x é compacto. Isto implica que $supp_X(s)$ é compacto, ou seja, $s \in J(X)$. De cada ϕ_β ser um $C(X)$-homomorfismo, temos $\phi_\beta(s) \cdot f_\beta = \phi_\beta(f_\beta) \cdot s$, para todo $\beta \in J$. Com isso,

$$\begin{aligned} 1 &= s(x) \\ &= \sum_{\beta \in J} [\phi_\beta(s) \cdot f_\beta](x) \\ &= \sum_{\beta \in J} [\phi_\beta(f_\beta) \cdot s](x) \\ &= \sum_{\beta \in J} \phi_\beta(f_\beta)(x) \cdot s(x) \\ &= \sum_{\beta \in J} \phi_\beta(f_\beta)(x). \end{aligned}$$

Assim, existe $\beta \in J$ tal que $\phi_\beta(f_\beta)(x) \neq 0$. Como $\phi_\beta(f_\beta)$ é contínua, segue que o conjunto $\{x \in X; \phi_\beta(f_\beta)(x) \neq 0\}$ é aberto. Sendo assim,

$$\begin{aligned} x &\in \{x \in X; \phi_\beta(f_\beta)(x) \neq 0\} \\ &\subset int(supp_X(\phi_\beta(f_\beta))) \\ &= V_\beta. \end{aligned}$$

Isto completa a prova de que a família $\{V_\beta\}_{\beta \in J}$ é uma cobertura aberta de X.

Mostremos que, para cada $\beta \in J$, o conjunto $\overline{V_\beta}$ é compacto. Para isto considere $\beta \in J$. Pelo que vimos acima,

$$\begin{aligned} supp_X \phi_\beta(f_\beta) &= \overline{\{x \in X; \phi_\beta(f_\beta)(x) \neq 0\}} \\ &\subset \overline{int(supp_X(\phi_\beta(f_\beta)))} \\ &= \overline{V_\beta}. \end{aligned}$$

Porém, temos $V_\beta \subset supp_X \phi_\beta(f_\beta)$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \overline{V_\beta} &\subset \overline{supp_X \phi_\beta(f_\beta)} \\ &= supp_X \phi_\beta(f_\beta). \end{aligned}$$

Logo, $supp_X \phi_\beta(f_\beta) = \overline{V_\beta}$. Como $supp_X(f_\beta)$ é compacto, então existe um conjunto compacto U tal que $supp_X(f_\beta) \subset int(U)$. Usando a Proposição 1.7 para os conjuntos $supp_X(f_\beta)$ e $X - int(U)$, encontramos uma função contínua $g : X \to [0,1]$ tal que $g(supp_X(f_\beta)) = \{1\}$ e $g(X - int(U)) = \{0\}$. Por hipótese, X é de Hausdorff e ainda U é compacto. Segue que $\overline{U} = U$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} supp_X(g) &\subset \overline{int(U)} \\ &\subset \overline{U} \\ &= U. \end{aligned}$$

Logo, $supp_X(g)$ é compacto, ou seja, $g \in J(X)$.

Observe que $g \cdot f_\beta = f_\beta$. De fato, se $f_\beta(x) = 0$ a igualdade segue trivialmente. Porém, se $f_\beta(x) \neq 0$ então $x \in supp_X(f_\beta)$ e desse modo $g(x) = 1$, segue que a igualdade também é verdadeira neste caso.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \overline{V_\beta} &= supp_X(\phi_\beta(f_\beta)) \\ &= supp_X(\phi_\beta(g \cdot f_\beta)) \\ &= supp_X(g \cdot \phi_\beta(f_\beta)) \\ &\subset supp_X(g). \end{aligned}$$

Este último conjunto é compacto. Portanto $\overline{V_\beta}$ é compacto, como queríamos provar.

Agora, nosso objetivo é provar que a família $\{V_\beta\}_{\beta \in J}$ é localmente finita. Sejam $x \in X$, Z_x uma vizinhança compacta de x e $s : X \to [0,1]$ uma função contínua tal que $s(x) = 1$ e $s(X - int(Z_x)) = \{0\}$. Como anteriormente, é fácil provar que $s \in J(X)$. Por definição, o conjunto

$$B := \{\lambda \in J; \phi_\lambda(s) \neq 0\}$$

é finito. Seja $\Upsilon := s^{-1}\,(0,1]$. Como s é contínua e $s(x) = 1$, então o conjunto Υ é uma vizinhança aberta de x. Se $\beta \notin B$ e $y \in \Upsilon$, então

$$
\begin{aligned}
\phi_\beta(f_\beta)(y) \cdot s(y) &= \phi_\beta(f_\beta \cdot s)(y) \\
&= \phi_\beta(s)(y) \cdot f_\beta(y) = 0.
\end{aligned}
$$

Mas $s(y) \neq 0$, então $\phi_\beta(f_\beta)(y) = 0$. Logo, $\phi_\beta(f_\beta)(\Upsilon) = \{0\}$. Por conseguinte, usando que Υ é aberto, obtemos que Υ não pode interceptar o conjunto $supp_X(\phi_\beta(f_\beta)) = \overline{\{x \in X; \phi_\beta(f_\beta)(x) \neq 0\}}$. Consequentemente

$$
\beta \notin \{\lambda \in J; \Upsilon \cap V_\lambda \neq \emptyset\}.
$$

Logo

$$
\{\lambda \in J; \Upsilon \cap V_\lambda \neq \emptyset\} \subset B.
$$

Portanto, a família $\{V_\lambda\}_{\lambda \in J}$ é localmente finita.

Em resumo, construímos uma cobertura aberta $\{V_\lambda\}_{\lambda \in J}$ de X que é localmente finita e ainda $\overline{V_\lambda}$ é compacto, para todo $\lambda \in J$.

Seja $\alpha = \{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma cobertura aberta de X. Para cada $\beta \in J$, a família α também é uma cobertura de $\overline{V_\beta}$, que por sua vez é compacto, sendo assim, para cada $\beta \in J$, existe uma cobertura finita $\left\{U_{\beta_1}, U_{\beta_2}, ..., U_{\beta_{n(\beta)}}\right\} \subset \alpha$ de $\overline{V_\beta}$. Defina a família

$$
\gamma := \bigcup_{\beta \in J} \bigcup_{i=1}^{n(\beta)} \{U_{\beta_i} \cap V_\beta\}.
$$

A coleção γ cobre X. De fato,

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{A \in \gamma} A &= \bigcup_{\beta \in J} \bigcup_{i=1}^{n(\beta)} (V_\beta \cap U_{\beta_i}) \\
&= \bigcup_{\beta \in J} \left[V_\beta \cap \bigcup_{i=1}^{n(\beta)} U_{\beta_i} \right] \\
&= \bigcup_{\beta \in J} V_\beta = X.
\end{aligned}
$$

Note que o conjunto $I := \bigcup_{\lambda \in J} \bigcup_{i=1}^{n(\lambda)} \{(\lambda, \lambda_i)\}$ indexa a coleção γ.

Por fim, para cada $x \in X$ existe uma vizinhança aberta P_x tal que o conjunto

$$C_x := \{\lambda \in J; V_\lambda \cap P_x \neq \emptyset\}$$

é finito. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\{(\lambda, \lambda_i) \in I; P_x \cap V_\lambda \cap U_{\lambda_i} \neq \emptyset\} &\subset \{(\lambda, \lambda_i) \in I; P_x \cap V_\lambda \neq \emptyset\} \\ &\subset \bigcup_{\lambda \in C_x} \{(\lambda, \lambda_i); \lambda_i \in \{1, 2, ..., n(\lambda)\}\}.\end{aligned}$$

Este último conjunto é finito. Logo a família γ é localmente finita. Portanto, mostramos que toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto localmente finito, ou seja, X é um espaço topológico paracompacto. ∎

Capítulo 4

Introdução à Teoria da Seleção Contínua

Neste capítulo, apresentaremos um resultado da teoria da seleção contínua, a saber, o Teorema de Seleção Convexo-Valuada. Esta teoria foi introduzida na matemática por Ernest Michael em 1956 com a publicação de um artigo intitulado Continuous Selection I [11]. O principal resultado apresentado em [11] é o Teorema de Seleção de Valorização Convexa. A teoria de seleção contínua possui aplicações em Topologia, Análise Funcional, Teoria da Aproximação, entre outras áreas. Para uma visão mais ampla da teoria de seleção contínua, recomendamos ao leitor, que veja [4]. Neste capítulo, todos os espaços de Banach considerados serão reais. Se X é um conjunto, então denotaremos, neste capítulo, o conjunto das partes de X por $P(X)$ ou 2^X.

4.1 Seleção Contínua

Definição 4.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $\phi : X \to P(Y)$ uma função. Uma função $f : X \to Y$ é uma seleção de ϕ se para todo $x \in X$ temos*

$$f(x) \in \phi(x).$$

Se, além disso, f for contínua, dizemos que f é uma seleção contínua de ϕ.

Exemplo 4.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Então, f é uma seleção contínua para a função*

$$\begin{array}{rccl} \overline{f}: & X & \longrightarrow & P(Y) \\ & x & \longmapsto & \{f(x)\}. \end{array}$$

Exemplo 4.2. *Seja X um espaço vetorial normado e $G \subset X$ um subespaço. Se $f : G \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então pelo Teorema de Hahn-Banach (veja Teorema 3.11 em [2]) existe uma seleção contínua $\overline{f}$ para a função*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & X & \longrightarrow & P(Y) \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \{f(x)\} & se \quad x \in G \\ \mathbb{R} & se \quad x \notin G. \end{cases} \end{array}$$

4.2 Funções Semicontínuas Inferiormente

Definição 4.2. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $\phi : X \to P(Y)$ é semicontínua inferiormente se para todo aberto V de Y, o conjunto*

$$\{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

é um aberto em X.

No Exemplo 4.1, se $V \subset Y$ é um aberto, então

$$\left\{x \in X; \overline{f}(x) \cap V \neq \emptyset\right\} = f^{-1}(V).$$

Segue que $\overline{f}$ é semicontínua inferiormente.

No Exemplo 4.2, se G é fechado em X, então φ é semicontínua inferiormente . De fato, se V é um aberto de $\mathbb{R}$ então

$$\{x \in X; \varphi(x) \cap V \neq \emptyset\} = \begin{cases} f^{-1}(V) \cup (X - G) & se \quad V \neq \emptyset \\ \emptyset & se \quad V = \emptyset. \end{cases}$$

Proposição 4.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $\phi : X \to 2^Y$ uma função semicontínua inferiormente. Seja $\psi : X \to 2^Y$ uma função e suponha que $\overline{\phi(x)} = \overline{\psi(x)}$, para todo $x \in X$. Então ψ é semicontínua inferiormente.*

Demonstração: Se $V \subset Y$ é um aberto e $x \in X$ é tal que $\psi(x) \cap V \neq \emptyset$, então, por hipótese, V intercepta $\overline{\phi(x)}$. De V ser aberto, temos $\phi(x) \cap V \neq \emptyset$. Analogamente se $x \in X$ é tal que $\phi(x) \cap V \neq \emptyset$, então $\psi(x) \cap V \neq \emptyset$. Logo,

$$\{x \in X; \psi(x) \cap V \neq \emptyset\} = \{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

De ϕ ser semicontínua inferiormente, concluímos que o conjunto $\{x \in X; \psi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ é aberto. Consequentemente ψ é semicontínua inferiormente. ∎

A próxima proposição nos dá outra alternativa para a definição de função semicontínua inferiormente.

Proposição 4.2. *Sejam X e Y espaços topológicos e $\phi : X \to P(Y)$ uma função. Então ϕ é semicontínua inferiormente se, e somente se, para todos $x_0 \in X$, $y \in \phi(x_0)$ e V uma vizinhança de y, o conjunto $\{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ é uma vizinhança de x_0 em X.*

Demonstração: Sejam X e Y espaços topológicos. Suponha que $\phi : X \to P(Y)$ seja uma função semicontínua inferiormente e considere $x_0 \in X$. Sejam $y \in \phi(x_0)$ e V uma vizinhança de y.

Por definição, o conjunto

$$U_{x_0} := \{x \in X; \phi(x) \cap int(V) \neq \emptyset\}$$

é um aberto em X. Além disso, $x_0 \in U_{x_0}$ e $U_{x_0} \subset \{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$. Isto mostra que este último conjunto é uma vizinhança de x_0 em X.

Para a recíproca, seja V um aberto em Y. Se o conjunto $\{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ for vazio, não há nada para fazer. Porém, se existir $x_0 \in \{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$, então tome $y \in \phi(x_0) \cap V$. Segue que V é uma vizinhança de y e $y \in \phi(x_0)$. Por hipótese, garantimos que o conjunto $\{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ é uma vizinhança de x_0. Consequentemente $\{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ é aberto e ϕ é semicontínua inferiormente. ■

Proposição 4.3. *Sejam X e Y espaços topológicos e $\phi : X \to 2^Y$ uma função semicontínua inferiormente. Seja $U \subset Y$ um aberto. Então, a função $\psi : X \to 2^Y$ tal que, $\psi(x) = \phi(x) \cap U$ é semicontínua inferiormente.*

Demonstração: Se $V \subset Y$ é um aberto então

$$\{x \in X; \psi(x) \cap V \neq \emptyset\} = \{x \in X; \phi(x) \cap (U \cap V) \neq \emptyset\}.$$

Segue de $U \cap V$ ser aberto e ϕ ser semicontínua inferiormente que este conjunto é aberto. Portanto, ψ é semicontínua inferiormente. ■

Seja X um espaço topológico. Mostraremos a seguir, que a restrição a um subconjunto de X de uma função semicontínua inferiormente definida em X, também é uma função semicontínua inferiormente.

Proposição 4.4. *Sejam X e Y espaços topológicos e $\phi : X \to 2^Y$ uma função semicontínua inferiormente. Então, para cada $A \subset X$ não vazio, a função $\phi|_A : A \to 2^Y$ tal que $\phi|_A(x) = \phi(x)$, para todo $x \in X$, é semicontínua inferiormente. Em A, estamos considerando a topologia relativa induzida pela topologia de X.*

Demonstração: Basta notar que se U é um aberto em Y, então

$$\{x \in A; \phi|_A(x) \cap U \neq \emptyset\} = A \cap \{x \in X; \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

■

Proposição 4.5. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos e suponha que as funções $\phi : X \to 2^Y$ e $\psi : X \to 2^Z$ são semicontínuas inferiormente. Então a função $\phi \times \psi : X \to 2^{Y \times Z}$, tal* *que* $\phi \times \psi(x) = \phi(x) \times \psi(x)$, *é semicontínua inferiormente. Aqui, estamos considerando* $Y \times Z$ *com a topologia produto.*

Demonstração: Seja U um aberto de $Y \times Z$. Suponha que $\{x \in X; \phi \times \psi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ é não vazio. Neste caso, seja $x_0 \in \{x \in X; \phi \times \psi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ e $(z, w) \in \phi \times \psi(x_0) \cap U$. Existem abertos $U_0 \subset Y$ em Y e $U_1 \subset Z$ em Z tais que

$$(z, w) \in U_0 \times U_1 \subset U.$$

Note que

$$\{x \in X; \phi \times \psi(x) \cap (U_0 \times U_1) \neq \emptyset\} = \{x \in X; \phi(x) \cap U_0 \neq \emptyset\} \cap \{x \in X; \psi(x) \cap U_1 \neq \emptyset\}.$$

Desta igualdade e de ψ e ϕ serem semicontínuas inferiormente, concluímos que o conjunto $\{x \in X; \phi \times \psi(x) \cap (U_0 \times U_1) \neq \emptyset\}$ é aberto e consequentemente de

$$x_0 \in \{x \in X; \phi \times \psi(x) \cap (U_0 \times U_1) \neq \emptyset\} \subset \{x \in X; \phi \times \psi(x) \cap U \neq \emptyset\},$$

concluímos que $\{x \in X; \phi \times \psi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ é aberto. Portanto $\phi \times \psi$ é semicontínua inferiormente. ∎

O lema apresentado a seguir será útil para a próxima seção, na qual demonstraremos o Teorema de Seleção Convexo-Valuada. Se Y é um espaço topológico, então indicaremos o conjunto de todos os subconjuntos convexos e não vazios de Y por $P_c(Y)$.

Lema 4.1. *Sejam* X *um espaço topológico paracompacto,* $(Y, ||.||)$ *um espaço vetorial normado e* $\psi : X \to P_c(Y)$ *uma função semicontínua inferiormente. Se* V *é uma vizinhança convexa do vetor nulo em* Y *então existe uma função contínua* $f : X \to Y$ *tal que, para todo* $x \in X$

$$f(x) \in \psi(x) + V.$$

Demonstração: Podemos supor, sem perda de generalidade, que V é uma vizinhança aberta e convexa de 0, já que podemos tomar um aberto convexo B, com $0 \in B$ e tal que

$\psi(x) + B \subset \psi(x) + V$. Neste caso, defina para cada $y \in Y$,

$$U_y := \{x \in X; \psi(x) \cap (\{y\} + (-V)) \neq \emptyset\}.$$

O conjunto $\{y\} + (-V)$ é uma vizinhança aberta de y, para todo $y \in Y$. Por hipótese, ψ é semicontínua inferiormente e com isso, U_y é aberto para todo $y \in Y$.

Seja $x \in X$ e tome $y \in \psi(x)$. Segue facilmente da definição de U_y que $x \in U_y$. Logo, a família $U := \{U_y\}_{y \in Y}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é paracompacto, pelo Teorema 2.4, existe uma partição de unidade $\{P_\lambda\}_{\lambda \in I}$ subordinada a U. Para cada $\lambda \in I$ escolha $y(\lambda) \in Y$ tal que

$$supp_X\,(P_\lambda) \subset U_{y(\lambda)}.$$

Defina

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & \sum_{\lambda \in I} P_\lambda(x) y(\lambda). \end{array}$$

A função f está bem definida, pois o conjunto $\{\lambda \in I; P_\lambda(x) \neq 0\}$ é finito para todo $x \in X$.

Seja $x \in X$. Existe uma vizinhança aberta W de x tal que o conjunto $I_x := \{\lambda \in I; W \cap supp_X(P_\lambda) \neq \emptyset\}$ é finito. Segue que

$$f(x) = \sum_{\lambda \in I_x} P_\lambda(x) y(\lambda),$$

para todo $x \in W$. Assim $f|_W$ é uma soma finita de funções contínuas, segue que $f|_W$ é contínua. Consequentemente f é contínua em x.

Tome $x_0 \in X$. Então, como $\{P_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma partição de unidade, o conjunto

$$\{\lambda \in I; P_\lambda(x_0) \neq 0\}$$

é finito. Seja $\left\{\lambda_1, ..., \lambda_{n(x_0)}\right\}$ este conjunto. Para cada $i \in \{1, 2, ..., n(x_0)\}$ temos,

$$x_0 \in supp_X(P_{\lambda_i}) \subset U_{y(\lambda_i)}.$$

Logo, pela definição de $U_{y(\lambda_i)}$, existe $y_{x,i} \in \psi(x_0) \cap (\{y(\lambda_i)\} + (-V))$. Consequentemente, existe $v_{x,i} \in V$ tal que

$$y(\lambda_i) = y_{x,i} + v_{x,i}.$$

Desta última igualdade e da definição de f,

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \sum_{\lambda \in I} P_\lambda(x_0) y(\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^{n(x_0)} P_{\lambda_i}(x_0) y(\lambda_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n(x_0)} P_{\lambda_i}(x_0)(y_{x,i} + v_{x,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n(x_0)} P_{\lambda_i}(x_0) y_{x,i} + \sum_{i=1}^{n(x)} P_{\lambda_i}(x_0) v_{x,i}. \end{aligned}$$

Como $\psi(x_0)$ e V são convexos e $\sum_{i=1}^{n(x_0)} P_{\lambda_i}(x_0) = 1$, segue que $\sum_{i=1}^{n(x_0)} P_{\lambda_i}(x_0) y_{x,i} \in \psi(x_0)$ e $\sum_{i=1}^{n(x_0)} P_{\lambda_i}(x_0) v_{x,i} \in V$. Portanto $f(x_0) \in \psi(x_0) + V$. ■

4.3 Teorema de Seleção Convexo-Valuada

Nesta seção demonstraremos o Teorema de Seleção Convexo-Valuada. Se Y é um espaço topológico, então indicaremos o conjunto de todos os subconjuntos não vazios, fechados e convexos de Y por $P_c^F(Y)$.

Teorema 4.1. ***(Teorema de Seleção Convexo-Valuada)****. Seja X um espaço topológico T_1. Então, X é paracompacto se, e somente se, para cada espaço de Banach Y, toda função semicontínua inferiormente $\phi : X \to P_c^F(Y)$ admite uma seleção contínua.*

Demonstração: Suponha que X é paracompacto. Sejam Y um espaço de Banach e $\phi : X \to P_c^F(Y)$ uma função semicontínua inferiormente. Defina para cada $i \in \mathbb{N}$, $V_i \subset Y$ da seguinte forma:

$$V_i := B\left(0, \frac{1}{2^{i^2}}\right).$$

Perceba que $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma família de vizinhanças de $0 \in Y$ formada por conjuntos convexos e simétricos (se $x \in V_i$ então $-x \in V_i$). Além do mais, para cada $i \in \mathbb{N}$

$$V_{i+1} \subset \frac{1}{2^i} V_i.$$

Construiremos, indutivamente, uma sequência $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funções contínuas $f_k : X \to Y$ que satisfaz:

1. $f_i(x) \in \phi(x) + V_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

2. $f_i(x) \in \{f_{i-1}(x)\} + 2V_{i-1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq 2$.

Pelo Lema 4.1, existe uma função contínua $f_1 : X \to Y$ tal que, para todo $x \in X$

$$f_1(x) \in \phi(x) + V_1.$$

Suponha que tenhamos definido $f_1, ..., f_k$ satisfazendo as condições impostas. Defina

$$\begin{array}{rccl} \phi_{k+1}: & X & \longrightarrow & P_c(Y) \\ & x & \longmapsto & \phi(x) \cap (\{f_k(x)\} + V_k). \end{array}$$

Seja $x \in X$. Pela hipótese de indução, $f_k(x) \in \phi(x) + V_k$. Sejam $y_x \in \phi(x)$ e $w_x \in V_k$ tais que $f_k(x) = y_x + w_x$. Como V_k é simétrico, então $-w_x \in V_k$. Consequentemente $y_x = f_k(x) + (-w_x)$, ou seja, $y_x \in \phi(x) \cap (\{f_k(x)\} + V_k)$. Logo $\phi_{k+1}(x)$ é não vazio para todo $x \in X$. Além do mais, para cada $x \in X$ os conjuntos $\phi(x)$ e $\{f_k(x)\} + V_k$ são convexos. Isto implica que $\phi_{k+1}(x)$ é convexo.

Mostraremos que ϕ_{k+1} é semicontínua inferiormente. Para isso, seja V um aberto de Y. Pela Proposição 4.5 a função

$$\begin{array}{rccl} \psi: & X & \longrightarrow & 2^{Y\times Y} \\ & x & \longmapsto & \phi(x) \times \{f_k(x)\} \end{array}$$

é semicontínua inferiormente. Seja $K =: \{(x, y) \in Y \times Y; x - y \in V_k\}$. O conjunto K é aberto em $Y \times Y$ e ainda

$$\{x \in X; \psi(x) \cap [K \cap (V \times Y)] \neq \emptyset\} = \{x \in X; \phi_{k+1}(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Segue, de ψ ser semicontínua inferiormente, que o conjunto $\{x \in X; \phi_{k+1}(x) \cap V \neq \emptyset\}$ é aberto em X. Portanto ϕ_{k+1} é semicontínua inferiormente.

Pelo Lema 4.1, existe uma função contínua $f_{k+1} : X \to Y$ tal que, para todo $x \in X$ $f_{k+1}(x) \in \phi_{k+1}(x) + V_{k+1}$. Segue que

$$f_{k+1}(x) \in \{f_k(x)\} + V_k + V_{k+1} \subset \{f_k(x)\} + 2V_k.$$

Além disso,

$$f_{k+1}(x) \in \phi_{k+1}(x) + V_{k+1} \subset \phi(x) + V_{k+1}.$$

Em resumo, construímos uma família de funções contínuas $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfaz 1 e 2.

Por 2, para todo $x \in X$ e para todo $i \geq 3$, temos

$$||f_i(x) - f_{i-1}(x)|| \leq \frac{1}{2^i}. \tag{4.1}$$

Pela inequação (4.1), concluímos que para cada $x \in X$ a sequência $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em Y. Como Y é um espaço de Banach, então esta sequência converge em Y. Podemos definir $f : X \to Y$ tal que $f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$. Segue novamente da equação (4.1), que a sequência de funções contínuas $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, ou seja, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$ tem-se $||f_n(x) - f(x)|| < \epsilon$, para todo $x \in X$. Consequentemente f é contínua.

Considere $x \in X$. A condição 1 garante que para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $w_i \in V_i$ tal que

$$f_i(x) - w_i \in \phi(x).$$

A sequência $\{f_i(x) - w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge em Y. Mais ainda, como $\phi(x)$ é fechado e está sequência está em $\phi(x)$, então ela converge para um ponto de $\phi(x)$. De $w_i \to 0$ e $f_i(x) \to f(x)$ concluímos que

$$f(x) \in \phi(x).$$

Portanto f é uma seleção contínua para ϕ.

Provaremos agora a recíproca. Para isto suponha que X é um espaço topológico T_1. Mostraremos que para toda cobertura aberta α de X existe uma família de funções contínuas $\{t_\lambda\}_{\lambda\in I}$, $t_\lambda : X \to [0,1]$ e tal que $\sum_{i\in I} t_i(x) = 1$ para todo $x \in X$. Além disso, para cada $\lambda \in I$ provaremos que existe $U_\lambda \in \alpha$ tal que f_λ se anula fora de U_λ.

Seja Υ uma cobertura aberta de X e considere o espaço de Banach $(l_1(\Upsilon), ||.||)$ (veja definição em $A.6$). Defina

$$C := \{f \in l_1(\Upsilon); f(U) \geq 0 \text{ para todo } U \in \Upsilon \text{ e } ||f|| = 1\}.$$

Sejam $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em C que converge para $f \in l_1(\Upsilon)$ e $U \in \Upsilon$. Pelo Lema A.1

$$|f_n(U) - f(U)| \leq ||f_n - f||, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Com isso, a sequência $\{f_n(U)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(U)$ em $\mathbb{R}$. Segue que $f(U) \geq 0$, já que $f_n(U) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note também que pela continuidade da norma de $l_1(\Upsilon)$ concluímos que $||f|| = 1$. Logo $f \in C$ e isto mostra que C é fechado (Proposição 1.1).

Se $f, g \in C$ e $t \in [0,1]$ então é claro que para todo $U \in \Upsilon$,

$$tf(U) + (1-t)g(U) \geq 0.$$

Mais que isso, pela Proposição A.8

$$||tf + (1-t)g|| = \sum_{U\in\Upsilon} |tf(U) + (1-t)g(U)|$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{U\in\Upsilon}[tf(U) + (1-t)g(U)] \\
&= \sum_{U\in\Upsilon} tf(U) + \sum_{U\in\Upsilon}(1-t)g(U) \\
&= t\sum_{U\in\Upsilon} f(U) + (1-t)\sum_{U\in\Upsilon} g(U) \\
&= t + (1-t) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo, $tf + (1-t)g \in C$. Por isso, o conjunto C também é convexo.

Defina a função

$$\begin{array}{rccl}
\phi: & X & \longrightarrow & P_c^F(l_1(\Upsilon)) \\
& x & \longmapsto & C \cap \{f \in l_1(\Upsilon); f(U) = 0 \text{ para todo } U \in \Upsilon \text{ tal que } x \notin U\}.
\end{array}$$

O leitor não terá dificuldade em provar que para cada $x \in X$, o conjunto

$$\{f \in l_1(\Upsilon); f(U) = 0 \text{ para todo } U \in \Upsilon \text{ tal que } x \notin U\}$$

é fechado e convexo. Logo, $\phi(x)$ é convexo e fechado, para cada $x \in X$, já que C também é fechado e convexo. Além disso, seja $x_0 \in X$ e escolha $U_0 \in \Upsilon$, tal que $x_0 \in U_0$. A função $f : \Upsilon \to \mathbb{R}$ tal que $f(U_0) = 1$ e $f(Z) = 0$ se $Z \neq U_0$, pertence a $\phi(x_0)$. Logo, $\phi(x)$ é não vazio, para todo $x \in X$.

Mostraremos que ϕ é semicontínua inferiormente. Para isso, provaremos que para cada $f \in C$ e para cada $\epsilon > 0$ existe $\overline{f} \in C$ e um conjunto não vazio e finito $F \subset \Upsilon$ tais que

1. $f(U) > 0$, para todo $U \in F$;

2. $\overline{f}(U) = 0$, para todo $U \notin F$;

3. $||f - \overline{f}|| < \epsilon$.

Seja $f \in C$ e $\epsilon > 0$. Com isso, $||f|| = 1$, ou seja,

$$\sum_{U \in \Upsilon} f(U) = 1.$$

Por definição, existe um subconjunto não vazio e finito $F = \{U_1, ..., U_{n(\epsilon,f)}\}$ de Υ tal que, para todo $G \subset \Upsilon$ com $F \subset G$,

$$\left| \sum_{U \in G} f(U) - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Podemos supor sem perda de generalidade $f(U_i) > 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n(\epsilon, f)\}$. Em particular, desta última desigualdade obtemos

$$\delta := \sum_{i=1}^{n(\epsilon,f)} f(U_i) > 1 - \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Defina

$$\begin{array}{rccl} \overline{f}: & \Upsilon & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & U & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & se \quad U \notin F \\ 1 - \sum_{i=2}^{n(\epsilon,f)} f(U_i) & se \quad U = U_1 \\ f(U_i) & se \quad U = U_i, \text{ para algum } i \in \{2, 3, ..., n(\epsilon, f)\}. \end{array} \right. \end{array}$$

É fácil ver que $\overline{f}(U) \geq 0$ para todo $U \in \Upsilon$ e ainda $\sum_{U \in \Upsilon} |\overline{f}(U)| = 1$, ou seja, $\overline{f} \in C$. Agora, pela equação (4.2)

$$\begin{aligned} ||f - \overline{f}|| &= \sum_{U \in \Upsilon} |f(U) - \overline{f}(U)| \\ &= \sum_{U \in \Upsilon - F} |f(U)| + \sum_{i=1}^{n(\epsilon,f)} |f(U_i) - \overline{f}(U_i)| \\ &= \sum_{U \in \Upsilon - F} |f(U)| + |f(U_1) - \overline{f}(U_1)| \\ &= \sum_{U \in \Upsilon - F} |f(U)| + (1 - \sum_{U \in F} f(U)) \end{aligned}$$

$$= (1-\delta) + (1-\delta) < \epsilon.$$

Portanto, para cada $f \in C$ e $\epsilon > 0$ construímos um conjunto finito e não vazio $F \subset \Upsilon$ e uma função $\overline{f} \in C$ que satisfaz 1,2 e 3.

Seja V um aberto de $l_1(\Upsilon)$. Mostraremos que o conjunto $\{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ é aberto em X. Seja $x_0 \in \{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$. Tome $f \in \phi(x_0) \cap V$ e $\epsilon > 0$ tal que $B(f, \epsilon) \subset V$. Como $f \in \phi(x_0)$, em particular $f \in C$. Pelo que provamos acima, existe $\overline{f} \in C$ e um conjunto não vazio e finito $F = \left\{U_1, U_2, ..., U_{(n_{\epsilon,f})}\right\}$ satisfazendo $1, 2$ e 3.

Defina

$$U := \bigcap_{i=1}^{n_{(\epsilon,f)}} U_i.$$

De 1, para cada $i \in \left\{1, 2, ..., n_{(\epsilon,f)}\right\}$ temos $f(U_i) > 0$. Mas, pela definição de ϕ, $f \in \{f \in l_1(\Upsilon); f(U) = 0 \text{ para todo } U \in \Upsilon \text{ com } x_0 \notin U\}$. Isto implica que $x_0 \in U_i$ para cada $i \in \left\{1, 2, ..., n_{(\epsilon,f)}\right\}$. Logo, U é uma vizinhança aberta de x_0.

Agora, seja $y \in U$. Note que se $W \in \Upsilon$ e $y \notin W$, então $W \notin F$. Consequentemente por 2, $\overline{f}(W) = 0$. Como $\overline{f} \in C$, pela definição de ϕ temos

$$\overline{f} \in \phi(y).$$

Porém, por 3, $\overline{f} \in B(f, \epsilon) \subset V$. Logo,

$$\overline{f} \in \phi(y) \cap V,$$

ou seja, $y \in \{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$. Portanto

$$x_0 \in U \subset \{x \in X; \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Isto mostra que este último conjunto é aberto em X. Assim, ϕ é semicontínua inferiormente.

Por hipótese, existe uma seleção contínua para ϕ. Seja $g : X \to l_1(S)$ uma seleção contínua de ϕ.

Para cada $U \in \Upsilon$ defina

$$\begin{array}{rccl} g_U : & X & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & [g(x)](U). \end{array}$$

Por definição, para cada $x \in X$ temos $g(x) \in \phi(x)$. Em particular, $g(x) \in C$. Consequentemente $[g(x)](U) \geq 0$, para todo $U \in \Upsilon$ e $||g|| = 1$. Esta última igualdade implica que $[g(x)](U) \leq 1$ para todo $U \in \Upsilon$. Portanto, a aplicação g_U está bem definida para todo $U \in \Upsilon$.

Seja $U \in \Upsilon$. Mostraremos que g_U é contínua. Para isto sejam $x \in X$ e uma rede $\{x_n\}_{n \in I}$ em X que converge para x. Como g é contínua, então pela Proposição 1.5, $\{g(x_n)\}_{n \in I}$ converge para $g(x)$. Seja $\epsilon > 0$ e tome $n_0 \in I$ tais que, para todo $p > n_0$

$$||g(x_p) - g(x)|| < \epsilon.$$

Segue do Lema A.1 que, para todo $p > n_0$,

$$|[g(x_p)](U) - [g(x)](U)| < \epsilon.$$

Logo, a rede $\{g_U(x_n)\}_{n \in I}$ converge para $g_U(x)$. Novamente pela Proposição 1.5 concluímos que g_U é contínua em x. Portanto g_U é contínua, para cada $U \in \Upsilon$.

Para cada $x \in X$ temos $g(x) \in \phi(x) \subset C$. Consequentemente, para cada $x \in X$,

$$\sum_{U \in \Upsilon} g_U(x) = \sum_{U \in \Upsilon} [g(x)]\,(U) = 1.$$

Além disso, se $y \notin U$ então $g_U(y) = [g(y)]\,(U) = 0$, pois

$$g(y) \in \phi(y) \subset \{f \in l_1(\Upsilon); f(U) = 0 \text{ para todo } U \in \Upsilon \text{ tal que } y \notin U\}.$$

Segue do Teorema 2.5 que X é um espaço topológico paracompacto. ■

Em [12], E. Michael demonstrou outro teorema de seleção contínua para funções semicontínuas inferiormente com domínio paracompacto. Estes dois teoremas foram os principais resultados publicados em 1956 na teoria de seleção contínua e foram fundamentais para o desenvolvimento desta área.

4.4 Aplicações do Teorema de Seleção Convexo-Valuada

Nesta seção veremos algumas consequências do Teorema de Seleção Convexo-Valuada.

Proposição 4.6. *(Bartle-Graves) Se Y e X são espaços de Banach, e se $T : X \to Y$ é uma transformação linear sobrejetiva e contínua, então existe uma função contínua $f : Y \to X$ tal que $f(y) \in T^{-1}(\{y\})$, para todo $y \in Y$.*

Demonstração: Defina a função

$$\begin{array}{rccc} \phi: & Y & \longrightarrow & 2^X \\ & y & \longmapsto & T^{-1}(\{y\}) \end{array}$$

Pela continuidade de T, $\phi(x)$ é fechado para todo $x \in Y$ e pela linearidade de T concluímos que $\phi(x)$ é convexo para todo $x \in Y$. Além disso, pela sobrejetividade de T, temos $\phi(x)$ não vazio, para todo, $x \in Y$. Seja V um aberto. Então

$$\begin{aligned} \{y \in Y; \phi(y) \cap V \neq \emptyset\} &= \left\{y \in Y; T^{-1}(\{y\}) \cap V \neq \emptyset\right\} \\ &= T(V) \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Aplicação Aberta (Teorema A.3) $T(V)$ é aberto. Portanto ϕ é semicontínua inferiormente. Pelo Teorema de Seleção Convexo-Valuada, existe uma função contínua $f : Y \to X$ tal que $f(y) \in \phi(y) = T^{-1}(\{y\})$ para todo $y \in Y$. ■

Lema 4.2. *Sejam X um espaço topológico paracompacto, Y um espaço de Banach e $\phi : X \to P_c^F(Y)$ uma função semicontínua inferiormente. Seja $m(x) = inf_{y \in \phi(x)} ||y||$ e* *suponha que* $p : X \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua com* $p(x) \geq 0$*, para todo* $x \in X$*. Suponha também que* $p(x) > m(x)$ *sempre que* $m(x) > 0$*. Nessas condições, existe uma seleção contínua* f *para* ϕ *tal que*

$$||f(x)|| \leq p(x),$$

para todo $x \in X$*.*

Demonstração: Defina a seguinte função,

$$\begin{array}{rccl} \psi : & X & \longrightarrow & 2^Y \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \phi(x) \cap \{y \in Y; ||y|| < p(x)\} & se \quad p(x) > 0 \\ \{0\} & se \quad p(x) = 0 \end{cases} \end{array}$$

Provaremos que esta função é semicontínua inferiormente. De fato, seja U um aberto de E. Provaremos que o conjunto

$$A^* = \{x \in X; \psi(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

é aberto em X. Se A^* for vazio, não há nada para demonstrar. Caso contrário, considere $x_0 \in A^*$. Suponha que $p(x_0) > 0$. Como $x \in A^*$, existe $y \in \phi(x_0) \cap U$ e tal que $||y|| < p(x_0)$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $||y|| < \epsilon < p(x_0)$. Como p é contínua, existe uma vizinhança aberta V_{x_0} de x tal que

$$p\left(V_{x_0}\right) \subset (\epsilon, \infty)\,. \tag{4.3}$$

Seja

$$c := inf\left\{p(x); x \in V_{x_0}\right\}.$$

Segue que

$$c \geq \epsilon > ||y|| \geq 0. \tag{4.4}$$

Defina

$$\begin{array}{rccl} \psi\big|_{V_{x_0}}: & V_{x_0} & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \phi(x) \cap \{y \in E; ||y|| < c\}, \end{array}$$

onde em V_{x_0} estamos considerando a topologia relativa induzida pela topologia de X. Pela Proposição 4.4, $\phi\big|_{V_{x_0}} : V_{x_0} \to E$ com $\phi\big|_{V_{x_0}}(x) = \phi(x)$ é semicontínua inferiormente. Segue da Proposição 4.3 que $\psi\big|_{V_{x_0}}$ é semicontínua inferiormente. Por definição, o conjunto

$$B^* := \left\{x \in V_{x_0}; \psi\big|_{V_{x_0}}(x) \cap U \neq \emptyset\right\}$$

é aberto em V_{x_0}, com a topologia relativa. Como V_{x_0} é aberto em X, segue que B^* também é aberto em X. Mas, $y \in \phi(x_0) \cap U$. Consequentemente, pela equação (4.4), temos

$$y \in \psi\big|_{V_{x_0}}(x_0) \cap U.$$

Logo, $x_0 \in B^*$, ou seja, B^* é uma vizinhança aberta de x_0. Agora, pela equação (4.3)

$$\begin{aligned} B^* &= \left\{x \in V_{x_0}; \psi\big|_{V_{x_0}}(x) \cap U \neq \emptyset\right\} \\ &= \{x \in V_{x_0}; \phi(x) \cap U \cap \{y \in E; ||y|| < c\} \neq \emptyset\} \\ &\subset \{x \in V_{x_0}; \phi(x) \cap U \cap \{y \in E; ||y|| < p(x)\} \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in V_{x_0}; \psi(x) \cap U \neq \emptyset\} \\ &\subset A^*. \end{aligned}$$

Agora, se $p(x_0) = 0$, então $0 \in U$. Tome $\epsilon > 0$ tal que $B(0, \epsilon) \subset U$. Da continuidade de p, encontramos uma vizinhança aberta V_{x_0} de x_0 tal que

$$p(V_{x_0}) \subset [0, \epsilon). \tag{4.5}$$

Mostraremos que $V_{x_0} \subset A^*$. Seja $y \in V_{x_0}$. Se $p(y) = 0$, então como $0 \in U$, segue imediatamente que $y \in A^*$. Caso contrário, se $p(y) > 0$, usando que $m(y) > 0$ implica que $m(y) < p(y)$, concluímos que $m(y) < p(y)$. Segue da definição de m que existe $\overline{y} \in \phi(y)$

tal que

$$||\overline{y}|| < p(y).$$

Pela equação (4.5), também temos $||\overline{y}|| < p(y) < \epsilon$, ou seja, $\overline{y} \in U$. Logo,

$$\overline{y} \in \phi(y) \cap \{x \in E; ||x|| < p(y)\} \cap U.$$

Consequentemente $y \in A^*$. Portanto, $V_{x_0} \subset A^*$.

Em resumo, mostramos que para todo $x \in A^*$, existe uma vizinhança aberta V_x de x tal que $V_x \subset A^*$. Isto implica que A^* é aberto.

Portanto ψ é semicontínua inferiormente.

Note que $\psi(x)$ é convexo para todo $x \in X$, já que a intercessão de dois convexos é ainda um convexo e ainda $\{0\}$ é um conjunto convexo. Mais ainda, para todo $x \in X$ temos $\psi(x) \neq \emptyset$. De fato, se $p(x) = 0$ não há o que fazer, porém se $p(x) > 0$ então por hipótese, temos $m(x) < p(x)$. Assim, pela definição de m, existe $y \in \phi(x)$ tal que $||y|| < p(x)$. Isto implica que $y \in \psi(x)$. Portanto, em qualquer caso, $\psi(x) \neq \emptyset$.

Defina

$$\begin{array}{rccl} \mu: & X & \longrightarrow & P_c^F(Y) \\ & x & \longmapsto & \overline{\psi(x)} \end{array}$$

É claro que $\mu(x)$ é fechado ,para todo $x \in X$. De $\psi(x)$ ser um convexo não vazio, para todo $x \in X$, concluímos que $\mu(x)$ é um convexo não vazio. Logo, μ está bem definida.

Pela Proposição 4.1, μ é semicontínua inferiormente. Logo, pelo Teorema de Seleção Convexo-Valuada, existe uma seleção contínua $f : X \to Y$ para a função μ.

Provaremos que f é uma seleção contínua para ϕ. Seja $x \in X$. Se $p(x) = 0$ então, por hipótese, $m(x) = 0$. Como $\phi(x)$ é fechado, segue que $0 \in \phi(x)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} f(x) \in \mu(x) &= \overline{\psi(x)} \\ &= \overline{\{0\}} \\ &= \{0\} \subset \phi(x). \end{aligned}$$

Porém, se $p(x) > 0$ então,

$$\begin{aligned} f(x) \in \mu(x) &= \overline{\psi(x)} \\ &= \overline{\phi(x) \cap \{y \in E; ||y|| < p(x)\}} \\ &\subset \overline{\phi(x)} \cap \overline{\{y \in E; ||y|| < p(x)\}} \\ &= \phi(x) \cap \{y \in E; ||y|| \leq p(x)\}. \end{aligned}$$

Portanto, em qualquer caso, temos $f(x) \in \phi(x)$, ou seja, f é uma seleção para ϕ. Note também que esta inclusão implica que $||f(x)|| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Isto completa a prova do lema. ■

Este lema será útil para provar um resultado mais geral que o Teorema de Bartle-Graves, enunciado anteriormente.

Teorema 4.2. *Sejam E e F espaços de Banach e seja $f : E \to F$ uma transformação linear contínua e sobrejetiva. Então, para cada $\lambda > 1$, existe uma função contínua $t : F \to E$ tal que, para cada $x \in F$, temos*

1. $t(x) \in f^{-1}(x)$;
2. $||t(x)|| \leq \lambda \cdot inf \{||y||; y \in f^{-1}(x)\}$;
3. $t(a \cdot x) = a \cdot t(x)$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $X := \{x \in F; ||x|| = 1\}$. Considere em X a topologia relativa induzida pela topologia de F. Defina

$$\begin{array}{rccl} \phi: & X & \longrightarrow & P_c^F(E) \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(\{x\}). \end{array}$$

Pela continuidade de f, o conjunto $f^{-1}(x)$ é fechado para todo $x \in X$ e pela linearidade de f, o conjunto $f^{-1}(x)$ é convexo para todo $x \in X$. Por isso e pela sobrejetividade de f, a função ϕ está bem definida.

Pelo Teorema da Aplicação Aberta (Teorema A.3), para todo aberto A de E, $f(A)$ é aberto em F. Consequentemente, o conjunto

$$\{x \in X; \phi(x) \cap A \neq \emptyset\} = X \cap f(A).$$

é um aberto em X, para todo aberto A de E. Logo, ϕ é semicontínua inferiormente.

A função $M : F \to \mathbb{R}$ com $M(x) = inf\,\{||y||; y \in \phi(x)\}$ é contínua. De fato, sejam $x, y \in F$. Considere $\epsilon > 0$. Então, pela definição de M, existem $z_x \in f^{-1}(x)$ e $z_y \in f^{-1}(y)$ tais que,

$$||z_x|| < M(x) + \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$||z_y|| < M(y) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, de $z_x + z_y \in f^{-1}(x + y)$ temos

$$M(x + y) \leq ||z_x + z_y|| \leq ||z_x|| + ||z_y|| < M(x) + M(y) + \epsilon.$$

Portanto, para todos $x, y \in F$ temos

$$M(x + y) \leq M(x) + M(y). \tag{4.6}$$

Da equação (4.6) obtemos facilmente que

$$|M(x) - M(y)| \leq M(x - y). \tag{4.7}$$

Pela equação (4.7), para concluir que M é contínua, basta mostrar que M é contínua em 0, já que $M(0) = 0$. Para isto, seja $\{x_n\}_{n \in I}$ uma rede em F tal que $x_n \to 0$. Pela Proposição 4.6, existe uma função contínua $\overline{f} : F \to E$ tal que $\overline{f}(y) \in f^{-1}(y)$, para todo $y \in F$. Pela Proposição 1.5, a rede $\left\{\overline{f}(x_n)\right\}_{n \in I}$ converge para 0. Mas, note que

$$M(x_n) \leq ||\overline{f}(x_n)||.$$

Logo, $\{M(x_n)\}_{n\in I}$ converge para $0 = M(0)$.

Usando a Proposição 1.5, concluímos que M é contínua em 0 e pela equação (4.7) segue que M é contínua.

Defina $p : X \to \mathbb{R}$ por $p(x) = \lambda M(x)$ para todo $x \in X$. A função p é contínua e $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Mais ainda, se $M(x) > 0$ então, como $\lambda > 1$, $p(x) > M(x)$.

Note que, pelo Teorema de Stone, F é paracompacto. Como $X \subset F$ é fechado, então pela Proposição 2.1, X, com a topologia relativa, é paracompacto. Assim, pelo Lema 4.2, existe uma seleção contínua $g : X \to E$ para ϕ tal que

$$||g(x)|| \leq p(x) = \lambda M(x),$$

para todo $x \in X$.

Defina

$$\begin{array}{rccl} h: & F & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} ||x||g\left(\frac{x}{||x||}\right) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Veja que se $x \neq 0$ então

$$\begin{aligned} ||h(x)|| = ||x|| \cdot \left|\left|\frac{g(x)}{||x||}\right|\right| &\leq \lambda \cdot ||x|| \cdot inf\left\{||y||; y \in f^{-1}\left(\frac{x}{||x||}\right)\right\} \\ &= \lambda \cdot inf\left\{||y||; y \in f^{-1}(x)\right\} \\ &= \lambda \cdot M(x). \end{aligned}$$

E também, $h(0) = 0 \in f^{-1}(0)$. Consequentemente,

$$||h(x)|| \leq \lambda \cdot M(x), \text{ para todo } x \in F. \tag{4.8}$$

É fácil ver que h é contínua em todo $x \neq 0$. Para mostrar que h é contínua em 0, use a inequação (4.8), a continuidade de M em 0, que $M(0) = 0$ e a Proposição 1.5.

Para todo $a > 0$ e para todo $x \neq 0$ temos

$$h(ax) = ||ax||g\left(\frac{ax}{||ax||}\right) = a \cdot ||x|| \cdot g\left(\frac{x}{||x||}\right) = a \cdot h(x)$$

e

$$h(a \cdot 0) = h(0) = 0 = a \cdot h(0). \tag{4.9}$$

Defina

$$\begin{array}{rccl} t: & F & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{2}h(x) - \frac{1}{2}h(-x). \end{array}$$

Note que t é contínua e $t(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in F$, ou seja, t é uma seleção contínua para ϕ. Mais ainda, pela inequação (4.8), $||t(x)|| \leq \lambda \cdot inf\ \{||y||; y \in \phi(x)\}$. Pelas equações em (4.9) temos $t(ax) = at(x)$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $x \in F$. Isto completa a prova do Teorema.

■

Apêndice A

Resultados Extras

Aqui demonstraremos alguns resultados utilizados ao longo deste trabalho.

A.1 R-Módulos

Definição A.1. *Sejam* G *um conjunto não vazio e* $+$ *uma aplicação* $+ : G \times G \to G$*. O par* $(G, +)$ *é um grupo abeliano se satisfaz as seguintes condições:*

- $(a + b) + c = a + (b + c)$*, para todos* $a, b, c \in G$*;*
- *Existe* $0 \in G$ *tal que* $a + 0 = 0 + a = a$*, para todo* $a \in G$*;*
- *Para todo* $a \in G$*, existe* $b \in G$ *tal que* $a + b = b + a = 0$*;*
- $a + b = b + a$*, para todos* $a, b \in G$*.*

Definição A.2. *Um conjunto* $(R, +, \cdot)$ *munido com duas operações* $+ : R \times R \to R$ *e* $\cdot : R \times R \to R$ *é um anel se:*

- $(R, +)$ *é um grupo abeliano;*
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$*, para todos* $a, b, c \in R$*;*
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *e* $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$*, para todos* $a, b, c \in R$*.*

Dizemos que o anel R tem unidade se existe $1 \in R$ tal que, para todo $a \in R$

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Dizemos também que o anel R é comutativo se para todos $a, b \in R$,

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Quando não houver dúvida, indicaremos um anel $(R, +, \cdot)$ por R.

Definição A.3. *Seja $(R, +, \cdot)$ é um anel comutativo e com unidade. Um R-módulo M é um grupo abeliano com uma função $h : R \times M \to M$, satisfazendo para todos $s, r \in R$ e $m, n \in M$, onde $h(s, x)$ indicaremos como sx:*

1. $r(sm) = (rs)m$;
2. $r(m + n) = rm + rn$;
3. $(r + s)m = rm + sm$.
4. $1m = m$

Exemplo A.1. *Seja $(R, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. O conjunto*

$$\bigoplus_{b \in B} R_b := \left\{ f \in R^B ; \{x \in B; f(x) \neq 0\} \text{ \textit{é finito}} \right\}$$

é um R-módulo com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oslash : & \bigoplus_{b\in B} R_b \times \bigoplus_{b\in B} R_b & \longrightarrow & \bigoplus_{b\in B} R_b \\ & (\phi, \psi) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccc} \phi \oslash \psi : & B & \longrightarrow & R \\ & x & \longmapsto & \phi(x) + \psi(x) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot : & R \times \bigoplus_{b\in B} R_b & \longrightarrow & \bigoplus_{b\in B} R_b \\ & (\lambda, \psi) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccc} \lambda \odot \psi : & B & \longrightarrow & R \\ & x & \longmapsto & \lambda \cdot \psi(x). \end{array} \right. \end{array}$$

Definição A.4. *Sejam M e N dois R-módulos. Uma função $f : M \to N$ é um R-homomorfismo se para todos $x, y \in M$ e $\lambda \in R$*

$$f(x+y) = f(x) + f(y);$$

$$\lambda f(x) = f(\lambda x).$$

Diremos que f é um isomorfismo se f for um R-homomorfismo e f for bijetiva.

É fácil ver que se $f : M \to N$ e $g : N \to H$ são R-homomorfismos, então $g \circ f$ também é um R-homomorfismo e que se f é um isomorfismo então sua inversa f^{-1} também é um R-homomorfismo.

A.2 R-Módulos Livres

Definição A.5. *Um R-módulo F é dito livre se existe um conjunto B tal que F é isomorfo a $\bigoplus_{b \in B} R_b$. Neste caso, diremos que B é uma base de F.*

Exemplo A.2. *Seja B um conjunto não vazio. Então $\bigoplus_{b \in B} R_b$ é um R-módulo livre com base B.*

Seja F um R-módulo livre com base B. Defina, para cada $b \in B$, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \mu_b : & B & \longrightarrow & R \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & se \quad x = b \\ 0 & se \quad x \neq b. \end{cases} \end{array}$$

e suponha que $i : \bigoplus_{b \in B} R_b \to$ F seja um isomorfismo. Seja $y \in F$. Existem $g_y \in \bigoplus_{b \in B} R_b$ e uma família $\{a_x\}_{x \in B}$ em R tais que

$$i(g_y) = y$$

e

$$g_y = \sum_{x \in B} a_x \cdot \mu_x.$$

O leitor não terá dificuldade em perceber que $a_x = g_y(x)$ para todo $x \in B$. Assim,

$$i(g_y) = \sum_{x \in B} a_x \cdot i(\mu_x).$$

Logo, existe uma família $\{a_x\}_{x \in X} \subset R$ tal que

$$y = \sum_{x \in B} a_x \cdot i(\mu_x),$$

onde apenas uma quantidade finita de elementos da família $\{a_x\}_{x \in B}$ é não nulo. Essa família é única com essa propriedade. De fato, se $\{b_x\}_{x \in X}$ é uma família que possui apenas uma quantidade finita de elementos não nulos e ainda

$$y = \sum_{x \in B} b_x \cdot i(\mu_x),$$

então usando o fato de i ser um isomorfismo, obtemos

$$0 = \sum_{x \in B} (b_x - a_x) \cdot \mu_x.$$

Isto implica que $a_x = b_x$, para todo $x \in B$.

Proposição A.1. *Sejam F um R-módulo livre com base X, $i : \bigoplus_{b \in X} R_b \to F$ um isomorfismo e $\mu_b : X \to R$, com $\mu_b(x) = 1$ se $x = b$ e 0, caso contrário. Se M é um R-módulo e $f : X \to M$ é uma função, então existe um único R-homomorfismo $\overline{f} : F \to M$ tal que*

$$\overline{f} \circ \mu = f,$$

onde $\mu : X \to F$ com $\mu(y) = i(\mu_y)$ para todo $y \in X$.

Demonstração: Para todo $y \in F$, vimos que existe uma única família $\{a(y)_x\}_{x \in X}$ em R tal que

1. $y = \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot i(\mu_x)$;

2. o conjunto $\{x \in X; a(y)_x \neq 0\}$ é finito.

Defina $\overline{f} : F \to M$, dada por $\overline{f}(y) = \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot f(x)$. A unicidade da família $\{a(y)_x\}_{x \in X}$, satisfazendo 1 e 2 acima, garante que a aplicação $\overline{f}$ está bem definida.

Se $v, w \in F$ e $s \in R$ então veja que os conjuntos $\{a(v)_x + a(w)_x\}_{x \in X}$ e $\{s \cdot a(v)_x\}_{x \in X}$ possuem apenas uma quantidade finita de elementos não nulos e ainda $v+w = \sum_{x \in X}[a(v)_x + a(w)_x] \cdot i(\mu_x)$ e $s \cdot v = \sum_{x \in X} s \cdot a(v)_x$. A definição de $\overline{f}$ garante que $\overline{f}$ é um R-homomorfismo.

Agora, para todo $x \in X$,

$$\overline{f} \circ \mu(x) = \overline{f}(i(\mu_x)) = f(x).$$

Suponha que $g : F \to M$ seja outro R-homomorfismo tal que $g \circ \mu = f$. Seja $y \in F$. Então

$$y = \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot i(\mu_x).$$

Como esta soma é finita e g é R-linear temos

$$\begin{aligned} g(y) &= g\left(\sum_{x \in X} a(y)_x \cdot i(\mu_x)\right) \\ &= \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot g(i(\mu_x)) \\ &= \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot g \circ \mu(x) \\ &= \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot f(x) \\ &= \overline{f}(y). \end{aligned}$$

Portanto, provamos a unicidade de $\overline{f}$. ∎

Proposição A.2. *Seja M um R-módulo. Existe um R-módulo livre F e um R-homomorfismo sobrejetor $\overline{f} : F \to M$.*

Demonstração: Sejam $X = M$, F um R-módulo livre com base X, $g : X \to M$ a aplicação identidade e i: $\bigoplus_{b\in X} R_b \to F$, um isomorfismo. Pela Proposição A.1, existe um R-homomorfismo $\overline{f} : F \to M$ tal que

$$\overline{f} \circ \mu(x) = x, \tag{A.1}$$

para todo $x \in X$ e onde $\mu : X \to F$, com $\mu(x) = i(\mu_x)$, $\mu_x(x) = 1$ e $\mu_x(y) = 0$ se $x \neq y$. A igualdade (A.1) garante que $\overline{f}$ é um R-homomorfismo sobrejetor. ■

A.3 R-Módulos Projetivos

Nesta seção, provaremos que um R-módulo é projetivo se, e somente se, existe uma base projetiva para este R-módulo.

Definição A.6. *Um R-módulo P é projetivo se para quaisquer dois R-módulos M, N, um R-homomorfismo $\beta : P \to N$ e um R-homomorfismo sobrejetor $\alpha : M \to N$ existe um R-homomorfismo $\gamma : P \to M$ tal que $\beta = \alpha \circ \gamma$.*

Proposição A.3. *Todo R-módulo livre é projetivo.*

Demonstração: Sejam F um R-módulo livre com base X e $i : \bigoplus_{x\in X} R_x \to F$ um isomorfismo. Vimos anteriormente que, para cada $y \in F$ existe uma única família $\{a(y)_x\}_{x\in X}$ tal que

$$y = \sum_{x\in X} a(y)_x i(\mu_x)$$

e o conjunto de todos os elementos não nulos desta família é finito. A função $\mu_x : X \to F$, como definimos anteriormente, é tal que $\mu_x(y) = 1$ se $x = y$ e 0 caso contrário.

Sejam B e C dois R-módulos, $g : F \to C$ um R-homomorfismo e $h : B \to C$ um R-homomorfismo sobrejetor. Para cada $x \in X$, escolha um $k_x \in B$ tal que $h(k_x) = g(i(\mu_x))$ e defina

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & k_x. \end{array}$$

A aplicação acima está bem definida graças a sobrejetividade de h.

Pela Proposição A.1, existe um R-homomorfismo $\overline{f}: F \to B$ tal que,

$$\overline{f} \circ \mu = f, \tag{A.2}$$

onde $\mu : X \to F$ com $\mu(y) = i(\mu_y)$, para todo $y \in X$.

Seja $y = \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot i(\mu_x) \in F$. Então, pela equação (A.2)

$$\begin{aligned}
h \circ \overline{f}(y) &= h \circ \overline{f}\left[\sum_{x \in X} a(y)_x \cdot i(\mu_x)\right] \\
&= \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot h[\overline{f}[i(\mu_x)]] \\
&= \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot h[\overline{f}(\mu(x))] \\
&= \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot h[f(x)] \\
&= \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot h(k_x) \\
&= \sum_{x \in X} a(y)_x \cdot g(i(\mu_x)) \\
&= g\left[\sum_{x \in X} a(y)_x \cdot i(\mu_x)\right] \\
&= g(y).
\end{aligned}$$

Logo, $h \circ \overline{f} = g$ e portanto F é projetivo.

■

Proposição A.4. *Um R-módulo P é projetivo se, e somente se, para todos R-módulo M e um R-homomorfismo sobrejetor $f : M \to P$ existe um R-homomorfismo $g : P \to M$ tal que $f \circ g = i_P$, onde i_P é a identidade em P.*

Demonstração: Suponha que P é um R-módulo projetivo. Sejam M um R-módulo e $f : M \to P$ um R-homomorfismo sobrejetor. Considere a aplicação identidade i_P

em P. Como f é sobrejetiva, segue de P ser um R-módulo projetivo, que existe um R-homomorfismo $g : P \to M$ tal que

$$f \circ g = i_P.$$

Para a recíproca, seja P um R-módulo tal que, para todo R-módulo M e um homomorfismo sobrejetor $f : M \to P$ existe $g : P \to M$ tal que $f \circ g = i_p$. Sejam B e C dois R-módulos, $f : P \to C$ um R-homomorfismo e $m : B \to C$ um R-homomorfismo sobrejetor.

Pela Proposição A.2, existe um R-módulo livre F e um R-homomorfismo sobrejetor $h : F \to P$.

Por hipótese, existe um R-homomorfismo $j : P \to F$ tal que

$$h \circ j = i_p. \tag{A.3}$$

Como F é livre, em particular projetivo, existe um R-homomorfismo $g_0 : F \to B$ tal que

$$m \circ g_0 = f \circ h. \tag{A.4}$$

Defina

$$g := g_0 \circ j. \tag{A.5}$$

A função $g : P \to B$ é um R-homomorfismo, pois é composição de R-homomorfismos e ainda, pelas equações (A.3), (A.4) e (A.5)

$$\begin{aligned} m \circ g &= m \circ (g_0 \circ j) \\ &= (m \circ g_0) \circ j \\ &= (f \circ h) \circ j \\ &= f \circ (h \circ j) \end{aligned}$$

$$= f \circ i_p$$
$$= f.$$

Portanto, P é um R-módulo projetivo. ■

Teorema A.1. *Um R-módulo A é projetivo se, e somente se, este R-módulo possui uma base projetiva, ou seja, se, e somente se, existem uma família $\{a_i\}_{i\in I}$ em A e uma família de R-homomorfismos definidos em A e tomando valores em R, $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ tal que, para cada $x \in A$*

1. *$\varphi_i(x) = 0$, a menos de uma quantidade finita de índices;*

2. *$x = \sum_{i\in I} \varphi_i(x)a_i$.*

Demonstração: Suponha que A é um R-módulo projetivo. Pela Proposição A.2, existe um R-módulo livre F e um R-homomorfismo sobrejetor $\psi : F \to A$. Pela Proposição A.4, existe um R-homomorfismo $\varphi : A \to F$ com

$$\psi \circ \varphi = i_A, \tag{A.6}$$

onde i_A é a identidade em A.

Seja X uma base de F e $i : \bigoplus_{x\in X} R_x \to F$ um isomorfismo. Considere $\mu_x : X \to R$, com $\mu_x(y) = 1$ se $x = y$ e 0, caso contrário, para cada $x \in X$. Defina

$$a_x := \psi[i(\mu_x)].$$

Note que para cada $y \in Y$, $\varphi(y) \in F$ e F é livre. Logo, existe uma única família $\{a(y)_x\}_{x\in X} \subset R$ tal que

$$\varphi(y) = \sum_{x\in X} a(y)_x i(\mu_x)$$

e ainda o conjunto $\{x \in X; a(y)_x \neq 0\}$ é finito.

Defina, para cada $x \in X$

$$\begin{array}{rccc} \phi_x : & A & \longrightarrow & R \\ & y & \longmapsto & a(y)_x. \end{array}$$

Pela unicidade da família $\{a(y)_x\}_{x\in X}$ (ou seja, se existe uma família $\{b(y)_x\}_{x\in X}$, com $\varphi(y) = \sum_{x\in X} b(y)_x i(\mu_x)$ e o conjunto $\{x \in X; b(y)_x \neq 0\}$ é finito, então $b(y)_x = a(y)_x$, para todo $x \in X$) a função ϕ_x está bem definida.

Seja $x \in X$. Mostraremos que ϕ_x é um R-homomorfismo. Sejam $z, y \in F$ e $\lambda \in R$. Note que

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda z + y) &= \lambda\varphi(z) + \varphi(y) \\ &= \lambda \sum_{x\in X} a(z)_x i(\mu_x) + \sum_{x\in X} a(y)_x i(\mu_x) \\ &= \sum_{x\in X} [\lambda a(y)_x + a(z)_x] i(\mu_x). \end{aligned}$$

Observe também que a família $\{\lambda a(y)_x + a(z)_x\}_{x\in X}$ possui apenas uma quantidade finita de elementos não nulos. Logo,

$$\begin{aligned} \phi_x(\lambda z + y) = a(\lambda y + z)_x &= \lambda a(y)_x + a(z)_x \\ &= \lambda\phi_x(z) + \phi_x(y), \end{aligned}$$

ou seja, ϕ_x é um R-homomorfismo.

Seja $y \in A$. Então, o conjunto

$$\{x \in X; \phi_x(y) \neq 0\} = \{x \in X; a(y)_x \neq 0\} \tag{A.7}$$

é finito.

Pela Equação (A.6)

$$y = \psi \circ \varphi(y) = \psi\left(\sum_{x\in X} a(y)_x i(\mu_x)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x\in X} a(y)_x \psi(i(\mu_x)) \\
&= \sum_{x\in X} \phi_x(y)\psi(i(\mu_x)) \qquad \text{(A.8)} \\
&= \sum_{x\in X} \phi_x(y) a_x.
\end{aligned}
$$

Portanto, por (A.7) e (A.8), as família $\{\phi_x\}_{x\in X}$ e $\{a_x\}_{x\in X}$ formam uma base projetiva para A.

Suponha agora que A é um R-módulo e existe uma base projetiva para A. Considere uma base projetiva para A formanda pelas famílias $\{a_i\}_{i\in I} \subset A$ e $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, onde $\varphi_i : A \to R$ é um R-homomorfismo para todo $i \in I$ e ainda, essas famílias satisfazem:

1. $\varphi_i(x) = 0$, a menos de uma quantidade finita de índices;
2. $x = \sum_{i\in I} \varphi_i(x) a_i$.

Seja P um R-módulo e $\psi : P \to A$ um R-homomorfismo sobrejetor. Pela Proposição A.4, é suficiente mostrarmos que existe um R-homomorfismo $\phi : A \to P$ com $\psi \circ \phi = i_A$, onde i_A é a identidade de A.

Para cada $i \in I$, escolha $b_i \in P$ com $\psi(b_i) = a_i$ e defina

$$
\begin{array}{rccl}
\phi : & A & \longrightarrow & P \\
& x & \longmapsto & \sum_{i\in I} \varphi_i(x) b_i.
\end{array}
$$

A condição 1 garante que a soma que define ϕ é sempre finita, ou seja, ϕ está bem definida. Se $x, y \in A$ e $\lambda \in R$ então, novamente pela condição 1 e usando o fato de que cada φ_i é um R-homomorfismo, temos

$$
\begin{aligned}
\phi(\lambda x + y) &= \sum_{i\in I} \varphi_i(\lambda x + y) b_i \\
&= \sum_{i\in I} \left[\lambda \varphi_i(x) + \varphi_i(y)\right] b_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \sum_{i\in I} \varphi_i(x) b_i + \sum_{i\in I} \varphi_i(y) b_i \\
&= \lambda \phi(x) + \phi(y).
\end{aligned}
$$

Pela condição 2, temos para todo $x \in A$

$$
\begin{aligned}
\psi \circ \phi(x) &= \psi\left(\sum_{i\in I} \varphi_i(x) b_i\right) \\
&= \sum_{i\in I} \varphi_i(x) \psi(b_i) \\
&= \sum_{i\in I} \varphi_i(x) a_i \\
&= x.
\end{aligned}
$$

Portanto, pela Proposição A.4, A é um R-módulo projetivo. ■

A.4 Resultados e Definições Básicas de Análise Funcional

Nesta seção, o leitor encontrará algumas definições e resultados básicos de Análise Funcional. Não provaremos os resultados enunciados, as demonstrações dos resultados enunciados estão em [2].

Definição A.7. *Um espaço normado $(X, ||.||)$ é dito um espaço de Banach se ele for completo com relação a topologia induzida pela norma $||.||$.*

Proposição A.5. *Sejam $(X, ||.||)$ e $(Y, ||.||_0)$, espaços vetoriais normados. Uma transformação linear $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, existe $C > 0$ tal que, para todo $x \in X$*

$$||f(x)||_0 \leq C||x||.$$

Teorema A.2. (***Hahn - Banach***). *Sejam E um espaço vetorial e $p : E \to \mathbb{R}$ um função satisfazendo*

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, *para todos* $x \in E$ *e* $\lambda > 0$,

2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, *para todos* $x, y \in E$.

Seja $G \subset E$ *um subespaço e seja* $g : G \to \mathbb{R}$ *um funcional linear tal que*

$$g(x) \leq p(x),$$

para todo $x \in G$.

Então, existe $f : E \to \mathbb{R}$ *um funcional linear contínuo tal que* $f(x) = g(x)$, *para todo* $x \in G$ *e ainda*

$$f(x) \leq p(x),$$

para todo $x \in E$.

Corolário A.1. *Sejam* G *um subespaço de um espaço vetorial normado* E *e* $g : G \to \mathbb{R}$ *um funcional linear contínuo. Nessas condições existe um funcional linear contínuo* $f : E \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in G$.

Teorema A.3. *(Teorema da Aplicação Aberta) Sejam* E *e* F *espaços de Banach e* $T : E \to F$ *uma transformação linear, contínua e sobrejetiva. Então, para todo aberto* V *de* E, $T(V)$ *é um aberto de* F.

A.5 Conjuntos Convexos

Definição A.8. *Seja* E *um espaço vetorial. Um subconjunto* A *de* E *é convexo se para todos* $x, y \in A$ *e* $t \in [0, 1]$ *tem-se*

$$tx + (1 - t)y \in A.$$

Proposição A.6. *Sejam* A *e* B *conjuntos convexos. Então também são convexos* $A + B$ *e* $A \cap B$.

Proposição A.7. *Seja E um espaço vetorial. Um conjunto não vazio $A \subset E$ é convexo se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A$ sempre que $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ e $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$ satisfazem $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.*

A.6 O Espaço $l_1(S)$

Nesta seção, estaremos considerando espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais.

Definição A.9. *Seja E um espaço vetorial normado. Uma família $\{x_\lambda\}_{\lambda \in I}$ em E é somável se existir $x \in E$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto finito $F_\epsilon \subset I$ tal que, para todo conjunto finito G com $F_\epsilon \subset G \subset I$, temos*

$$\left|\left|\sum_{i \in G} x_i - x\right|\right| < \epsilon.$$

Neste caso, escreveremos $\sum_{i \in I} x_i = x$ e diremos que $\sum_{i \in I} x_i$ é uma série convergente e que converge para x. Escreveremos também $\sum_{i \in I} x_i < \infty$ para indicar que esta série é convergente.

Note que se $\sum_{i \in I} x_i = x$ e $\sum_{i \in I} x_i = y$ então $x = y$. De fato, para todo $\epsilon > 0$ existe F_ϵ e G_ϵ tais que,

$$\left|\left|x - \sum_{i \in H} x_i\right|\right| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

$$\left|\left|y - \sum_{i \in M} x_i\right|\right| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

para todos $H, M \subset I$ com $F_\epsilon \subset H$ e $G_\epsilon \subset M$. Dessas duas desigualdades, temos

$$||x - y|| \leq \left|\left|x - \sum_{i \in G_\epsilon \cup F_\epsilon} x_i\right|\right| + \left|\left|y - \sum_{i \in G_\epsilon \cup F_\epsilon} x_i\right|\right| \leq \epsilon.$$

Isto mostra que $x = y$.

Proposição A.8. *Seja E um espaço vetorial normado. Suponha que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ e $\{z_j\}_{j\in I}$ são famílias somáveis, com $\sum_{i\in I} x_i = x$, $\sum_{j\in J} x_j = y$ e $\sum_{i\in I} z_i = z$, onde I e J são disjuntos. Então,*

1. *A família $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I\cup J}$ é somável e $\sum_{k\in I\cup J} x_k = \sum_{k\in I} x_k + \sum_{k\in J} x_k = x + y$;*
2. *A família $\{x_j + z_j\}_{j\in I}$ é somável e $\sum_{k\in I}(x_k + z_k) = \sum_{k\in I} x_k + \sum_{k\in I} z_k = x + z$;*
3. *Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ a família $\{\lambda x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é somável e $\sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i = \lambda \cdot x$.*

Demonstração: Para o item 1, basta notar que para todo $G \subset I \cup J$ finito temos

$$\left\|\sum_{k\in G} x_k - x - y\right\| \leq \left\|\sum_{k\in I\cap G} x_k - x\right\| + \left\|\sum_{k\in J\cap G} x_k - y\right\|.$$

Para o item 2, note que se $G \subset I$ é um conjunto finito, então

$$\left\|\sum_{k\in G} x_k + z_k - x - z\right\| \leq \left\|\sum_{k\in G} x_k - x\right\| + \left\|\sum_{k\in G} z_k - z\right\|.$$

Para demonstrar o item 3, basta notar que para todo subconjunto G finito de I temos

$$\left\|\sum_{i\in G} \lambda x_i - \lambda x\right\| = |\lambda| \left\|\sum_{i\in G} x_i - x\right\|.$$

■

Veremos na próxima proposição, que uma família $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais não negativos é somável se, e somente se, a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, converge no sentido usual. Quando escrevermos $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x$ é para significar que a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge para x no sentido usual. Se $\{x_i\}_{i\in G}$ é uma família finita, ou seja, G é finto, então esta família é somável no sentido usual e é somável na definição que demos. Nesse caso, escreveremos $\sum_{i\in G} x_i = x$, tanto para significar que esta série é convergente no sentido usual, quanto segundo nossa definição.

Proposição A.9. *Seja* $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{N}}$ *uma família enumerável de números não negativos em* $\mathbb{R}$*. Então* $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{N}}$ *é somável e* $\sum_{\lambda\in\mathbb{N}} x_\lambda = x$*, com* $x \in \mathbb{R}$*, se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo* $n > n_0$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - x\right| < \epsilon,$$

ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x$*.*

Demonstração: Suponha que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{N}}$ seja uma família enumerável em $\mathbb{R}$ e somável, com $\sum_{\lambda\in\mathbb{N}} x_\lambda = x$. Seja $\epsilon > 0$. Por definição, existe um subconjunto finito $J_\epsilon \subset \mathbb{N}$ tal que, para todo conjunto finito G, com $J_\epsilon \subset G \subset \mathbb{N}$, temos

$$\left|\sum_{i\in G} x_i - x\right| < \epsilon.$$

Seja n_0 o maior elemento de J_ϵ. Para todo $n > n_0$, o conjunto $I_n := \{1, 2, ..., n\}$ contém J_ϵ e com isso,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - x\right| = \left|\sum_{i\in I_n} x_i - x\right| < \epsilon.$$

Para a recíproca, seja $\epsilon > 0$ e tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - x\right| < \epsilon.$$

Usando que cada número da família é positivo,

$$\sum_{i=n}^{\infty} x_i = \left|\sum_{i=n}^{\infty} x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{\infty} x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i - x\right| < \epsilon.$$

Seja $J_\epsilon := \{n \in \mathbb{N}; n \leq n_0\}$. Então, para todo subconjunto finito G dos naturais tal que $J_\epsilon \subset G$, temos

$$\left|\sum_{j\in G} x_j - x\right| = \left|\sum_{j\in G} x_j - \sum_{i=1}^{\infty} x_i\right| = \sum_{i=1}^{\infty} x_i - \sum_{j\in G} x_j \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_i - \sum_{j\in J_\epsilon} x_j = \sum_{i=n_0+1}^{\infty} x_i < \epsilon.$$

Isto mostra que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é somável e $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = x$. ■

Proposição A.10. *Seja* $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ *uma família somável de números reais não negativos, com* $\sum_{i\in I} x_i = x$. *Então, o conjunto* $\{\lambda \in I; x_\lambda \neq 0\}$ *é enumerável.*

Demonstração: Suponha que este conjunto seja não enumerável. Defina,

$$C_n := \left\{\lambda \in I; x_\lambda > \frac{1}{n}\right\}.$$

Note que $\{\lambda \in I; x_\lambda \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Logo, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que C_{n_0} é não enumerável. Seja $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{n_0}$, com $\{i_n; n \in \mathbb{N}\} \subset I$. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{i_n} = \infty.$$

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{n_0} x_{i_n} > x + \epsilon. \tag{A.9}$$

Seja $\epsilon > 0$ e $F_\epsilon \subset I$ tais que, para todo conjunto finito G, com $F_\epsilon \subset G \subset I$,

$$\left|\sum_{i\in G} x_i - x\right| < \epsilon. \tag{A.10}$$

Então, definindo $P := \{i_n\}_{n=1}^{n_0}$, encontramos um conjunto finito, a saber $P \cup F_\epsilon$, tal que

$$\left|\sum_{i\in P\cup F_\epsilon} x_i - x\right| = \sum_{i\in P\cup F_\epsilon} x_i - x > \sum_{n=1}^{n_0} x_{i_n} - x > \epsilon.$$

Note que usamos a equação (A.9), para garantir a primeira igualdade e a última desigualdade acima. Isso contradiz (A.10). ■

Seja S um conjunto e $F(S,\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções definidas em S e tomando valores em $\mathbb{R}$. Defina

$$l_1(S) := \left\{f \in F(S,\mathbb{R}); \sum_{x\in S} |f(x)| < \infty\right\}$$

Podemos definir em $l_1(S)$ as seguintes operações

$$
\begin{array}{rcl}
+: \ l_1(S) \times l_1(S) & \longrightarrow & l_1(S) \\
(f,g) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} f+g: \ S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x), \end{array} \right.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\cdot: \ \mathbb{R} \times l_1(S) & \longrightarrow & l_1(S) \\
(\lambda,g) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda g: \ S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)\cdot g(x). \end{array} \right.
\end{array}
$$

O conjunto $l_1(S)$, com as operações acima, é um espaço vetorial. Provaremos que se $f, g \in l_1(S)$, então $f+g \in l_1(S)$. Por definição, as famílias $\{|f(x)|\}_{x\in S}$ e $\{|g(y)|\}_{y\in S}$ são somáveis. Pela Proposição anterior, o conjunto $\{x \in S; |f(x)| \neq 0\} \cup \{x \in S; |g(x)| \neq 0\}$ é enumerável. Suponha que $\{x \in S; |f(x)| \neq 0\} \cup \{x \in S; |g(x)| \neq 0\} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Note que, pela Proposição A.9

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i) + g(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (|f(x_i)| + |g(x_i)|) = \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |g(x_i)| < \infty.$$

Novamente pela Proposição A.9, a família $\{|f(x_i) + g(x_i)|\}_{i\in\mathbb{N}}$ é somável e consequentemente a família $\{|f(x) + g(x)|\}_{x\in S}$ é somável. Isto implica que $f + g \in l_1(S)$. Deixaremos como exercício para o leitor, a conclusão da prova que $l_1(S)$ é um espaço vetorial.

Também podemos definir

$$
\begin{array}{rcl}
||.||: \ l_1(S) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
f & \longmapsto & ||f|| = \sum_{x\in S} |f(x)|.
\end{array}
$$

Lema A.1. *Para todo $f \in l_1(S)$ temos*

$$||f|| = sup\left\{ \sum_{x\in F} |f(x)|; F \subset S \ e \ F \ \text{é finito} \right\}.$$

Demonstração: Seja $F \subset S$ um subconjunto finito e suponha, por absurdo, que

$$\sum_{x\in F} |f(x)| > ||f||.$$

Existe um conjunto finito $G \subset S$ tal que

$$\sum_{G\cup F} |f(x)| - ||f|| = \left| \sum_{G\cup F} |f(x)| - ||f|| \right| < \frac{\sum_{x\in F} |f(x)| - ||f||}{2}.$$

Isto implica em

$$\sum_{x\in (G\cup F)-F} |f(x)| + \frac{1}{2}\left(\sum_{x\in F} |f(x)| - ||f|| \right) < 0.$$

Isto é uma contradição, pois $\sum_{x\in F} |f(x)| - ||f|| > 0$ e $\sum_{x\in G-F} |f(x)| \geq 0$.

Em resumo, mostramos que se $F \subset S$ é finito então

$$||f|| \geq \sum_{x\in F} |f(x)|. \tag{A.11}$$

Por definição, para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto finito $G_\epsilon \subset S$ tal que

$$||f|| - \sum_{x\in G_\epsilon} |f(x)| = \left| ||f|| - \sum_{x\in G_\epsilon} |f(x)| \right| \leq \epsilon. \tag{A.12}$$

As equações (A.11) e (A.12) concluem a demonstração deste lema. ∎

Proposição A.11. *$||.||$ é uma norma em $l_1(S)$.*

Demonstração: Use o lema anterior. ∎

Proposição A.12. *$(l_1(S), ||.||)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $l_1(S)$. Para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$||f_n - f_m|| \leq \epsilon, \text{ para todos } m, n > n_0.$$

Pelo Lema A.1, para cada $x \in S$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon,$$

sempre que $n, m > n_0$. Logo a sequência $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e consequentemente esta sequência converge em $\mathbb{R}$.

Defina

$$\begin{array}{rccl} f: & S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \lim_{n\to\infty} f_n(x). \end{array}$$

Seja $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$ então

$$||f_n - f_m|| \leq \epsilon. \tag{A.13}$$

Logo, se F é um subconjunto finito de S então

$$\left|\sum_{x\in F} |f_n(x) - f_m(x)|\right| \leq \epsilon, \text{ para todos } m, n > n_0.$$

Fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\left|\sum_{x\in F} |f_n(x) - f(x)|\right| \leq \epsilon, \text{ para todos } m, n > n_0.$$

Como F foi um subconjunto finito qualquer de S, pelo Lema A.1

$$||f_n - f|| \leq \epsilon, \tag{A.14}$$

para todo $n > n_0$.

Pela Equação (A.14), $f_{n_0+1} - f \in l_1(S)$. Consequentemente $f \in l_1(S)$. E Ainda, por (A.14),

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

Portanto $(l_1(S), ||.||)$ é um espaço de Banach. $\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] BAIRE, R. *Sur les fonctions de variables r´eelles*, Ann. di Mat, 1899.

[2] BOTELHO, G. ; PELLEGRINO, D. M.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[3] DIEUDONNÉ, J. *Une généralisation des espaces compacts*, J. Math. Pures Appl. 65-76, 1944.

[4] DUSAN, Repovs; PAVEL, V. Semenov. *Ernest Michael and Theory of Continuous Selections*, Topology and its Applications, 2008.

[5] FAJARDO, R.A.S. *Teoria dos Conjuntos*, USP. Notas de Aulas, 2012.

[6] FINNEY, R. L.; ROTMAN, Joseph. *Paracompactness of Locally Compact Hausdorff Spaces*. University of Minois, Urbana, 359- 362.

[7] JANICH, Klaus. *Topology*, Springer-Verlag, 1984.

[8] KATUTA, I. *A Theorem on Paracompactness of Product Spaces*. Proc. Japan Acad, 1967.

[9] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.

[10] MICHAEL, Ernest. *A Note on Paracompact Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc, 1953.

[11] MICHAEL, Ernest. *Continuous Selections I*, Ann. of Math, 1956.

[12] MICHAEL, Ernest. *Continuous Selections II*, Ann. of Math, 1956.

[13] MORITA, K. *On the product of paracompact spaces*, Proc. Japan Acad, 1963.

[14] MUNKRES, J. R. *Topology: A First Course*, New Jersey.

[15] OSGOOD, W. *Non uniform convergence and the integration of series term by term*, American Journal of Mathematics, 1897.

[16] PETERSEN, B. E. *Functional Analysis: Baire Category Theorem*, Oregon State University, 2003.

[17] ROTMAN, Joseph J. *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, 2000.

[18] SORGENFREY, R. H. *On The Topological Product Of Paracompact Spaces*, Bull. Amer. Math. Soc, 1947.

[19] STONE, A. H. *Paracompactness and Product Spaces*, Bull. Amer. Math. Soc, 1948.

[20] ZUMPANO, Antônio. *O Teorema de A. H. Stone*, Matemática Universitária, 1994.