

Universidade Federal da Paraíba  
Universidade Federal de Campina Grande  
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática  
Doutorado em Matemática

Existência de solução para  
problemas elípticos não-locais via  
teoria de bifurcação

por

Romildo Nascimento de Lima

Campina Grande - PB

Novembro/2016

# Existência de solução para problemas elípticos não-locais via teoria de bifurcação

por

**Romildo Nascimento de Lima <sup>†</sup>**

sob orientação do

**Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto**

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa  
Associado de Pós-Graduação em Matemática -  
UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do  
título de Doutor em Matemática.

**Campina Grande - PB**

**Novembro/2016**

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

L732e    Lima, Romildo Nascimento de.  
Existência de solução para problemas elípticos não-locais  
via teoria de bifurcação / Romildo Nascimento de Lima.- João  
Pessoa, 2016.  
111f.  
Orientador: Marco Aurélio Soares Souto  
Tese (Doutorado) - UFPB-UFCG  
1. Matemática. 2. Problemas logísticos não-locais.  
3. Teoria de Bifurcação. 4. Estimativas a priori. 5. Soluções  
positivas.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 29/11/2016

Edcarlos D. da Silva

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva - UFG

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta - UNESP

Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla López - USACH

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG

(Orientador)

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Novembro/2016

# Resumo

Neste trabalho, temos como objetivo provar a existência de solução positiva para alguns problemas elípticos não-locais via Teoria de Bifurcação, mais precisamente pelo Teorema Global de Bifurcação devido a Rabinowitz, onde tais problemas estão relacionados a modelagem do comportamento de espécies num determinado ambiente.

**Palavras-chave:** Problemas logísticos não-locais; Estimativas a priori; Soluções positivas.

# Abstract

In this work, we aim to prove the existence of positive solution for some nonlocal elliptic problems via bifurcation theory, more precisely by the Global Bifurcation Theorem due to Rabinowitz, where such problems are related to modeling the behavior of specie in a given environment.

**Keywords:** Nonlocal logistic equations; A priori bounds; Positive solutions.

# Agradecimentos

Ao meu bom Deus e Senhor Jesus Cristo, por ter me concedido mais uma grande vitória em minha vida. Esta vitória é mais uma demonstração de sua maravilhosa graça sobre mim.

Aos meus amigos e irmãos da Assembleia de Deus em Vila de Ponta Negra, por todo carinho, amizade e oração ao meu favor.

Aos meus amigos e professores que me acompanharam nos tempos de UFRN, entre os professores destaco Viviane Simioli e André Gustavo, por todo incentivo e confiança que tiveram em mim.

Aos professores (mestres exemplares) com quem tive aula no doutorado e funcionários (sempre presentes) da UAMAT-UFCG. Em especial, entre os professores: Diogo Diniz, Marco Antônio, Henrique, Claudianor e Marco Aurélio. Entre funcionários: Claudiana (grande amiga).

Aos meus amigos que me acompanham desde os tempos de UFRN, sempre presentes em minha jornada, em especial Joelson, Itailma (Tatá) e Rainelly (Lili).

Aos meus companheiros de doutorado Bruno Sérgio, Fábio Reis, Luciano Cipriano, Natan Lima e Alânnio Nóbrega. Em especial ao Alânnio, com o qual fiz uma excelente parceria que vai além do simples fato de estudarmos juntos nestes últimos 4 anos, é uma grande amizade. Espero que nossa amizade permaneça sempre e produza bons frutos em nossas pesquisas.

A minha família, em especial aos meus pais: Ronaldo e Celma. Por toda educação,

amor, carinho e incentivo, demonstrados em toda minha vida.

A uma pessoa muito mais que simplesmente especial, a minha namorada, amiga, companheira, conselheira, grande incentivadora e grande exemplo: Wenia Valdevino. Por toda paciência, carinho, atenção e grande amor que sempre demonstra em nosso relacionamento.

Ao meu excelente orientador, incentivador e grande exemplo de matemático a seguir: Marco Aurélio Soares Souto. Por toda confiança e paciência no decorrer da produção deste trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Muito obrigado a todos que participaram direta ou indiretamente desta conquista!!!!

*“De tudo o que se tem ouvido, o fim é:  
Teme a Deus e guarda os seus mandamen-  
tos; porque este é o dever de todo homem.  
Porque Deus há de trazer a juízo toda obra  
e até tudo o que está encoberto, quer seja  
bom, quer seja mau.”*

*Eclesiastes 12:13-14*

# Dedicatória

Aos meus pais, Ronaldinho e Celminha,  
por toda educação, incentivo e amor....

# Sumário

|                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Notação e terminologia . . . . .                                        | xi        |
| Introdução . . . . .                                                    | 1         |
| <b>1 Estudo fundamental relacionado ao problema <math>(P)</math></b>    | <b>11</b> |
| 1.1 O termo não-local . . . . .                                         | 13        |
| 1.2 O peso $P$ . . . . .                                                | 16        |
| 1.2.1 Alguns resultados de regularidade . . . . .                       | 20        |
| 1.3 Um operador solução linear . . . . .                                | 22        |
| 1.3.1 Um operador compacto não-linear . . . . .                         | 28        |
| <b>2 Demonstração do Teorema 0.2</b>                                    | <b>30</b> |
| <b>3 Estudo fundamental relacionado ao problema <math>(Q)</math></b>    | <b>40</b> |
| 3.1 O termo não-local e a formulação matricial do problema . . . . .    | 42        |
| 3.2 Alguns resultados técnicos envolvendo o sistema homogêneo . . . . . | 44        |
| 3.2.1 Observações sobre o parâmetro $t$ no problema homogêneo . . . . . | 49        |
| 3.3 Os operadores de solução . . . . .                                  | 51        |

|                                   |                                                                                                                |           |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b>                          | <b>Demonstrações dos Teoremas 0.3 e 0.4</b>                                                                    | <b>53</b> |
| 4.1                               | Demonstração do Teorema 0.3 . . . . .                                                                          | 53        |
| 4.2                               | Demonstração do Teorema 0.4 . . . . .                                                                          | 61        |
| <b>5</b>                          | <b>Uma versão do Teorema 0.3 em <math>\mathbb{R}^N</math></b>                                                  | <b>67</b> |
| 5.1                               | O termo não-local e a formulação matricial do problema . . . . .                                               | 69        |
| 5.2                               | Alguns resultados técnicos envolvendo o sistema homogêneo e o parâmetro<br>$t$ no problema homogêneo . . . . . | 71        |
| 5.3                               | Operadores de solução . . . . .                                                                                | 72        |
| 5.4                               | Demonstração do Teorema 5.1 . . . . .                                                                          | 73        |
| <br><b>Apêndices</b>              |                                                                                                                |           |
| <b>A</b>                          | <b>Uma imersão compacta envolvendo o <math>D^{1,2}(\mathbb{R}^N)</math></b>                                    | <b>82</b> |
| <b>B</b>                          | <b>Propriedades de um operador solução</b>                                                                     | <b>87</b> |
| <b>C</b>                          | <b>Uma estimativa na norma <math>L^\infty(\mathbb{R}^N)</math></b>                                             | <b>93</b> |
| <b>Referências Bibliográficas</b> |                                                                                                                | <b>97</b> |

# Notação e terminologia

- Nesta tese,  $C$  denota uma constante positiva genérica, a qual pode mudar de linha para linha.
- $\mathbb{R}^N$  denota o espaço euclidiano  $N$ –dimensional.
- $\omega_N$  é o volume da bola unitária em  $\mathbb{R}^N$ .
- $\Gamma$  é a solução fundamental da equação de Laplace em  $\mathbb{R}^N$ .
- $\chi_B$  é a função característica de  $B$ .
- $B_r(x)$  denota a bola aberta centrada em  $x$  com raio  $r > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ .
- O símbolo  $\rightarrow$  significa convergência em norma.
- O símbolo  $\rightharpoonup$  significa convergência fraca.
- Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um conjunto mensurável à Lebesgue, então  $|A|$  denota a medida de Lebesgue de  $A$ .
- A expressão  $q.s.$  é uma abreviação para quase sempre ou quase todo ponto.
- $\text{supp}(u)$  denota o suporte da função  $u$ .
- Se  $u$  é uma função mensurável, denotamos por  $u^+$  e  $u^-$  a parte positiva e negativa de  $u$  respectivamente, que são dadas por

$$u^+ = \max\{u, 0\} \quad \text{e} \quad u^- = \max\{-u, 0\}.$$

- $C(\mathbb{R}^N)$  denota o espaço das funções contínuas de  $\mathbb{R}^N$  em  $\mathbb{R}$ .
- $C^k(\mathbb{R}^N)$  denota o espaço das funções contínuas  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis.
- $L^s(\mathbb{R}^N)$ , para  $1 \leq s \leq \infty$ , denota o espaço de Lebesgue com norma usual denotada por  $|u|_s$ .
- $L_P^2(\mathbb{R}^N)$  denota a classe de funções reais  $u$  que são mensuráveis à Lebesgue tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} P(x)|u(x)|^2 dx < \infty.$$

$L_P^2(\mathbb{R}^N)$  é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u, v)_{2,P} = \int_{\mathbb{R}^N} P(x)u(x)v(x)dx, \quad \forall u, v \in L_P^2(\mathbb{R}^N).$$

A norma associada a tal produto interno será denotada por  $|\cdot|_{2,P}$ .

- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  denota o espaço de Sobolev munido com o produto interno

$$(u, v)_{1,2} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx, \quad \forall u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

A norma associada a tal produto interno será denotada por  $\|\cdot\|_{1,2}$ .

- $\sigma(A)$  denota o conjunto de autovalores reais da matriz  $A$ .
- $\sigma(S)$  denota o conjunto de autovalores reais do operador  $S$ .
- $\sigma(-\Delta)$  denota o conjunto de autovalores do operador  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ , que possui notações e propriedades bem conhecidas.
- Os termos da forma  $U = (u, v)$ , sempre que for conveniente, será escrito em forma de matriz coluna  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ . Além disso,  $-\Delta U = (-\Delta u, -\Delta v)$  ou  $-\Delta U = \begin{pmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \end{pmatrix}$ .
- $z = (x, y) > 0$  se  $x, y > 0$ . Analogamente, para os casos " $<$ ", " $\leq$ " e " $\geq$ ".

# Introdução

Neste trabalho, estudamos a existência de solução para dois problemas de equações elípticas não-locais, via **Teoria de Bifurcação**. O primeiro trata-se da classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = (\lambda f(x) - \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) |u(y)|^\gamma dy) u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \quad u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (P)$$

onde  $N \geq 3$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\gamma \in [1, 2)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua positiva e  $K : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não-negativa. As funções  $f$  e  $K$  satisfazem algumas condições que nos permitem usar a **Teoria de Bifurcação**.

A segunda classe de problemas, trata-se de uma classe de sistemas de equações, dadas por

$$\begin{cases} -\Delta u = (a - \int_{\Omega} K(x, y) f(u, v) dy) u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = (d - \int_{\Omega} \Gamma(x, y) g(u, v) dy) v + cu, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (Q)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira suave,  $N \geq 1$ , e  $K, \Gamma : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são funções não-negativas verificando algumas hipóteses e  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . As funções  $f$  e  $g$  também satisfazem algumas condições que nos permitem usar a **Teoria de Bifurcação**.

A motivação para o estudo destes problemas, surge da necessidade de modelar o comportamento de uma espécie habitando em um domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  com fronteira

suave, cuja equação logística clássica é dada por

$$\begin{cases} -\Delta u = u(\lambda - b(x)u^p), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

onde  $u(x)$  é a densidade populacional num ponto  $x \in \Omega$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  é a taxa de crescimento da espécie e  $b(x)$  descreve o efeito limitador de aglomeração da população.

Em (1), estamos assumindo que  $\Omega$  é cercado por áreas inóspitas, devido às condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Desde que (1) é um problema local, o efeito da aglomeração da população  $u$  em  $x$  só depende do valor da população no mesmo ponto  $x$ . Em [8], para obter uma situação mais realista, Chipot considerou que o efeito da aglomeração depende também do valor da população em torno de  $x$ , isto é, o efeito da aglomeração depende diretamente da integral envolvendo a função  $u$  na bola  $B_r(x)$  centrada em  $x$  de raio  $r > 0$ . Mais precisamente, em [8] foi estudado o seguinte problema não-local

$$\begin{cases} -\Delta u = \left( \lambda - \int_{\Omega \cap B_r(x)} b(y)u^p(y)dy \right) u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

onde  $b$  é uma função contínua não-negativa e não-trivial. Uma formulação mais geral para tal problema populacional é dada por

$$\begin{cases} -\Delta u = \left( \lambda - \int_{\Omega} K(x, y)u^p(y)dy \right) u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Existem muitos trabalhos, considerando diversas condições sobre  $K$ . Por exemplo, quando  $K$  tem variáveis separáveis, ou seja,

$$K(x, y) = g(x)h(y), \quad h \geq 0, \quad h \neq 0 \quad \text{e} \quad g > 0 \quad \text{em } \Omega \quad (K_{0.1})$$

Corrêa, Delgado e Suárez em [9], provam que (3) possui uma única solução positiva para  $\lambda > \lambda_1$ . Além disso, Coville em [12] e Leman, Méléard e Mirrahimi em [17], supondo  $g \equiv 1$ ,  $p > 1$  e sob condições de contorno de Neumann homogênea, provaram que a solução positiva de (3) atrai todas as soluções possíveis da equação parabólica correspondente associada à (3). Quando  $g \geq 0$ ,  $g \neq 0$  em  $\Omega_0 \subset \Omega$ , então (3) possui uma única solução positiva para  $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_0)$ , onde  $\lambda_0$  é o autovalor principal do laplaciano em  $\Omega_0$ , ver [9].

Em [1], Allegretto e Nistri provam um resultado semelhante para  $K(x, y) = K_\delta(|x - y|)$  onde  $K_\delta(|x - y|) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  e  $\int_{\mathbb{R}^N} K_\delta(|x - y|) dy = 1$  para todo  $x$  com

$$K_\delta(|x - y|) = 0 \quad \text{se} \quad |x - y| \geq \delta \quad (K_{0.2})$$

e

$$K_\delta(|x - y|) \quad \text{limitada longe de zero, sendo} \quad |x - y| < \mu < \delta. \quad (K_{0.3})$$

Observe que neste caso,  $K$  se anula longe da diagonal de  $\Omega \times \Omega$ .

No caso em que

$$K(x, y) \geq K_0 > 0 \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in \Omega \times \Omega \quad (K_{0.4})$$

em [17] é provada a existência de solução positiva de (3) se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ , ver também [12].

Chen e Shi em [7], para o caso  $p = 1$  e  $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$  sendo uma função não-negativa tal que para todo  $\phi > 0$ ,

$$\int_{\Omega} K(x, y) \phi(y) dy > 0, \quad (K_{0.5})$$

mostram a existência de  $\lambda^* > \lambda_1$  tal que (3) possui, pelo menos, uma solução positiva para  $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*]$ .

O caso  $N = 1$ , também tem sido estudado. De fato, em [17] a existência de solução positiva é provada se

$$K(x, x) \geq K_0 > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega. \quad (K_{0.6})$$

Sun, Shi e Wang em [20] provam a existência de solução positiva para  $K(x, y) = K_1(|x - y|)$  e  $\Omega = (-1, 1)$ , onde  $K_1 : [0, 2] \rightarrow (0, \infty)$  é uma aplicação contínua por partes e não-decrescente com

$$\int_0^2 K_1(y) dy > 0. \quad (K_{0.7})$$

Em [2], Alves, Delgado, Souto e Suárez provaram um resultado de existência e não-existência de solução para o problema (3). Neste trabalho, os autores introduziram uma classe  $\mathcal{K}$  formada pelas funções  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que:

(i)  $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$  e  $K(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in \Omega$ .

(ii) Se  $w$  é mensurável e  $\int_{\Omega \times \Omega} K(x, y) |w(y)|^p |w(x)|^2 dx dy = 0$ , então  $w = 0$  q.s. em  $\Omega$ .

Usando **Teoria de Bifurcação** e supondo que  $K$  pertence a classe  $\mathcal{K}$ , o seguinte resultado foi provado:

**Teorema 0.1.** *O problema (3) tem uma solução positiva se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

O **Teorema 0.1** implica que (2) tem uma solução positiva se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ , visto que a função  $K(x, y) = b(y)\chi_{B_r(x)}(y)$  pertence a  $\mathcal{K}$ , uma vez que  $b$  é positiva em  $\Omega$ . Além disso, tal teorema também melhora os resultados acima, uma vez que é permitido que  $K$  se anule em alguma parte de  $\Omega \times \Omega$  em geral, não somente em uma parte simétrica como em  $(K_{0.2})$  e  $(K_{0.3})$

Motivado por [2], surgem duas perguntas bem interessantes: 1) É possível provar a existência de solução para  $(P)$ , que trata-se da versão em  $\mathbb{R}^N$  de (3)? 2) É possível modelar o comportamento de duas espécies em um domínio limitado  $\Omega$  e fazer um estudo análogo ao feito em [2]?

Para responder a primeira pergunta, da mesma forma que em [2], temos a intenção de usar a **Teoria de Bifurcação**. No entanto, devemos ter cuidado, porque em [2],  $\Omega$  é um domínio limitado com fronteira suave, o que possibilita utilizar imersões compactas conhecidas dos espaços de Sobolev e de Schauder. Como o problema se encontra em  $\mathbb{R}^N$  é necessário provar novas estimativas, e para este fim, nossa inspiração veio de alguns artigos devido a Edelson e Rumbos [13, 14], onde a **Teoria de Bifurcação** foi utilizada para estudar a existência de uma solução para um problema do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda f(x)(u + h(u)) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \quad \text{e} \quad u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (P_1)$$

onde  $f$  e  $h$  são funções contínuas que satisfazem algumas condições técnicas. É muito importante destacarmos que, diversas estimativas feitas para responder a pergunta 1) são completamente diferentes daquelas obtidas em [13, 14], porque o presente problema  $(P)$  é não-local, enquanto o problema  $(P_1)$  é local.

Para responder ao questionamento 1), em relação a  $K$  e  $f$ , devemos ter  $K : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua que verifica as condições abaixo:

$(K_0)$  Existe  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$0 \leq K(x, y) \leq f(x)P(y)^{\gamma/2}Q(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,$$

onde  $Q : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável que verifica

$$(Q_1) \quad M = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |Q(x, \cdot)|_{\frac{2}{2-\gamma}} < +\infty.$$

$(Q_2)$  Dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $R, L > 0$  tais que

$$\int_{|y| \leq L} Q(x, y)^{2/2-\gamma} dy < \varepsilon, \quad \forall x \in B_R^c(0).$$

Aqui,  $C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) = \{g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) : g \text{ é positiva e radialmente simétrica}\}$ .

$(K_1)$  Se  $w$  é mensurável e  $\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} K(x, y)|w(y)|^\gamma |w(x)|^2 dx dy = 0$ , então  $w = 0$  q.s. em  $\mathbb{R}^N$ .

É importante destacar que  $K \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$  em virtude da propriedade  $(K_0)$ .

Relacionada à função  $f$ , assumimos que

$(f_1)$   $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua tal que  $0 < f(x) \leq P(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ .

$(f_2)$  Existe  $q > N/2$  tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f|_{L^q(B_2(x))} < +\infty.$$

Tomando  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$  e  $Q(x, y) = \chi_{B_\delta(0)}(x - y)$ , a função

$$K(x, y) = f(x)P(y)^{\gamma/2}Q(x, y)$$

verifica as condições  $(K_0)$  e  $(K_1)$ .

O nosso primeiro resultado principal, o qual responde em detalhes a pergunta 1), está enunciado abaixo:

**Teorema 0.2.** *Assumindo  $(K_0) - (K_1)$  e  $(f_1) - (f_2)$ . Então, o problema  $(P)$  tem uma solução positiva se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema linear*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x)u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (AP)$$

Em relação à segunda pergunta, propomos modelar como descrito no sistema  $(Q)$ . No entanto, o estudo sobre a existência de solução positiva para  $(Q)$  requer um estudo técnico adicional envolvendo matrizes, devido a forma matricial em que o problema se transforma. A inspiração para fazer o estudo através de matrizes vem dos artigos de Corrêa e Souto [10, 11] e Souto [19], onde, por exemplo, em [19] é feito um estudo de existência de solução via índice de ponto fixo em cones para sistemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = m_{11}(x)u + m_{12}(x)v + f(x, u, v), & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = m_{21}(x)u + m_{22}(x)v + g(x, u, v), & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (Q_1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira suave e  $M(x) = (m_{ij}(x))$ ,  $f$  e  $g$  verificam algumas condições para utilizar as técnicas empregadas necessárias. É muito importante destacarmos que as estimativas que faremos, assim como os problemas, são completamente diferentes dos estudados em [10, 11] e [19], pois o presente problema  $(Q)$  é não-local, enquanto os problemas estudados nestes artigos são locais.

Para fazermos o estudo do problema  $(Q)$ , suporemos que  $K, \Gamma \in \mathcal{K}$ , onde  $\mathcal{K}$  é o mesmo conjunto definido em [2], isto é,  $\mathcal{K}$  é formado pelas funções  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que:

(i)  $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$  e  $K(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in \Omega$ .

(ii) Se  $w$  é mensurável e  $\int_{\Omega \times \Omega} K(x, y)|w(y)|^p|w(x)|^2 dx dy = 0$ , então  $w = 0$  q.s. em  $\Omega$ .

Relacionadas as funções  $f$  e  $g$ , assumiremos que existe  $\gamma > 0$  tal que

( $g_0$ )  $f, g : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  são funções contínuas.

( $g_1$ ) Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f(t, s) \geq \epsilon|t|^\gamma$  e  $g(t, s) \geq \epsilon|s|^\gamma$ , para todo  $t, s \in [0, \infty)$ .

( $g_2$ )  $f(\xi t, \xi s) = \xi^\gamma f(t, s)$  e  $g(\xi t, \xi s) = \xi^\gamma g(t, s)$ , para todo  $t, s \in [0, \infty)$  e  $\xi > 0$ .

**Exemplo 0.1.** As funções  $f(t, s) = |t|^\gamma + |s|^{\gamma-\mu}|t|^\mu$  e  $g(t, s) = c_1|t|^\gamma + c_2|s|^\gamma$ , para  $c_1, c_2 > 0$ , assim como  $f(t, s) = \prod_{j=1}^k |t|^{\gamma_j} + |s|^{\gamma_j-\mu}|t|^\mu$  e  $g(t, s) = \prod_{j=1}^k |t|^{\gamma_j} + |s|^{\gamma_j}$ , onde  $\sum_{j=1}^k \gamma_j = \gamma > 0$  e  $\mu > 0$ , são exemplos que verificam ( $g_0$ ) – ( $g_2$ )

Antes de enunciarmos os próximos teoremas, destacamos que as constantes  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , que aparecem no sistema ( $Q$ ), formam a matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , que frequentemente aparece no estudo do sistema ( $Q$ ).

Os resultados que obtemos no estudo citado, são:

**Teorema 0.3.** Considere  $K, \Gamma \in \mathcal{K}$  e ( $g_0$ ) – ( $g_2$ ) válidos. Seja uma matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  com  $a, b, c, d > 0$  e  $\lambda > 0$  seu maior autovalor. Então, temos que o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(a - \int_{\Omega} K(x, y)f(u, v)dy\right)u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = \left(d - \int_{\Omega} \Gamma(x, y)g(u, v)dy\right)v + cu, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_2)$$

tem solução se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

No caso em que  $f = g$  e  $K = \Gamma$ , temos:

**Teorema 0.4.** Considere  $K \in \mathcal{K}$  e ( $g_0$ ) – ( $g_2$ ) válidos. Seja uma matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que: existe um maior autovalor positivo de  $A$  que é o único autovalor positivo  $\lambda$  com

um autovetor  $z > 0$  e  $\dim N(\lambda I - A) = 1$ . Então, temos que o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(a - \int_{\Omega} K(x, y)f(u, v)dy\right) u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = \left(d - \int_{\Omega} K(x, y)f(u, v)dy\right) v + cu, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_3)$$

tem solução para todo  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

Este trabalho divide-se em cinco capítulos e três apêndices que estão distribuídos como descritos a seguir.

No **Capítulo 1**, nos dedicamos a apresentar fatos e resultados fundamentais para demonstração do **Teorema 0.2**, tais como propriedades do termo não-local, um estudo da função peso  $P$  e a construção e propriedades de operadores solução que são fundamentais para cumprir nosso objetivo.

No **Capítulo 2**, demonstramos em detalhes o **Teorema 0.2**, que trata-se do primeiro teorema principal da tese. Neste capítulo, utilizamos constantemente tudo que foi provado e discutido no **Capítulo 1**.

Destacamos que os resultados dos **Capítulos 1 e 2** desta tese originaram um artigo de pesquisa, o qual foi aceito para publicação na revista Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society no ano de 2016 (ver [3]).

No **Capítulo 3**, nos dedicamos a apresentar fatos e resultados fundamentais para as demonstrações dos **Teoremas 0.3 e 0.4**, tais como propriedades dos termos não-locais e formulação matricial do problema, alguns resultados técnicos do problema homogêneo e construção de operadores solução.

No **Capítulo 4**, demonstramos em detalhes os **Teoremas 0.3 e 0.4**, que são dois teoremas principais da tese. Neste capítulo, utilizamos constantemente tudo que foi provado e discutido no **Capítulo 3**.

No **Capítulo 5**, o qual é um capítulo adicional, fazemos um estudo que visa responder

um questionamento natural após o estudo dos capítulos anteriores. O questionamento seria relacionado à possibilidade de termos um resultado análogo aos do Capítulo 4, porém trocando o domínio  $\Omega$  por  $\mathbb{R}^N$ , ou seja, um resultado que relacione os resultados encontrados nos Capítulos de 1 à 4. Destacamos que esse capítulo pode ser visto como uma leitura opcional da tese, pois os resultados contidos nele são em sua grande maioria releituras dos resultados dos capítulos anteriores.

Por fim, para deixarmos o texto mais completo, no **Apêndice A** temos a demonstração da imersão compacta de  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  em  $L_P^2(\mathbb{R}^N)$ , no **Apêndice B** temos um estudo sobre as propriedades espectrais de alguns operadores de solução que aparecem no decorrer do texto e no **Apêndice C** temos a apresentação de uma estimativa na norma de  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$  de uma solução para determinado problema elíptico. Os resultados provados nos apêndices são essenciais para as demonstrações dos teoremas centrais do texto.

# Capítulo 1

## Estudo fundamental relacionado ao problema $(P)$

Este capítulo é dedicado ao estudo de fatos fundamentais para a demonstração do **Teorema 0.2**. Tal teorema estabelece que, para  $K : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua que verifica as condições abaixo:

$(K_0)$  Existe  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$0 \leq K(x, y) \leq f(x)P(y)^{\gamma/2}Q(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,$$

onde  $Q : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável que verifica

$(Q_1)$   $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |Q(x, \cdot)|_{\frac{2}{2-\gamma}} < +\infty$ .

$(Q_2)$  Dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $R, L > 0$  tais que

$$\int_{|y| \leq L} Q(x, y)^{2/2-\gamma} dy < \varepsilon, \quad \forall x \in B_R^c(0).$$

$(K_1)$  Se  $w$  é mensurável e  $\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} K(x, y)|w(y)|^\gamma |w(x)|^2 dx dy = 0$ , então  $w = 0$  q.s. em  $\mathbb{R}^N$ .

Claramente,  $K \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$  em virtude da propriedade  $(K_0)$ .

Em relação a função  $f$ , assumindo que

( $f_1$ )  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua tal que  $0 < f(x) \leq P(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ .

( $f_2$ ) Existe  $q > N/2$  tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f|_{L^q(B_2(x))} < +\infty.$$

Então, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (\lambda f(x) - \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) |u(y)|^\gamma dy) u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \quad u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (P)$$

onde  $N \geq 3$  e  $\gamma \in [1, 2)$ , tem uma solução positiva se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x) u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (AP)$$

É muito importante destacarmos que, devido as características impostas à função peso  $P$ , temos a imersão compacta

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_P^2(\mathbb{R}^N). \quad (1.1)$$

Esta imersão é essencial em nosso estudo e está demonstrada de forma detalhada no **Apêndice A**. Além disso, como o problema ( $P$ ) situa-se em  $\mathbb{R}^N$ , faz-se necessário saber o comportamento das soluções no infinito, para tal introduzimos o espaço de Banach

$$E = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^N); \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \right\},$$

munido da norma  $|\cdot|_\infty$ . Um cálculo simples nos mostra que a imersão  $E \hookrightarrow L_P^2(\mathbb{R}^N)$  é contínua.

Podemos dividir o estudo de tais fatos em três tópicos: propriedades do termo não-local, estudo do peso  $P$  e construção de operadores solução. Claro que, no decorrer deste capítulo estaremos supondo as hipóteses dadas acima.

## 1.1 O termo não-local

No que segue, mostraremos algumas propriedades do operador  $\phi : L_P^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^N)$  dado por  $\phi(u) := \phi_u$ , onde

$$\phi_u(x) := \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) |u(y)|^\gamma dy.$$

O operador  $\phi$  está bem definido, devido as hipóteses  $(K_0)$  e  $(K_1)$ , pois

$$\begin{aligned} |\phi_u(x)| &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) |u(y)|^\gamma dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} P(x) P(y)^{\gamma/2} |Q(x, y)| |u(y)|^\gamma dy \\ &= P(x) \int_{\mathbb{R}^N} P(y)^{\gamma/2} |Q(x, y)| |u(y)|^\gamma dy \end{aligned}$$

donde, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |\phi_u(x)| &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) |u(y)|^\gamma dy \\ &\leq P(x) |u|_{2,P}^\gamma |Q(x, \cdot)|_{\frac{2}{2-\gamma}} \\ \Rightarrow |\phi_u(x)| &\leq MP(x) |u|_{2,P}^\gamma \end{aligned} \tag{1.2}$$

desta forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi_u(x)| dx \leq M |P|_1 |u|_{2,P}^\gamma \tag{1.3}$$

ficando assim estabelecida a boa definição do operador  $\phi$ .

Usando a definição de  $\phi$ , vemos que  $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  é solução fraca de  $(P)$  se, e somente se, é uma solução fraca e positiva da equação

$$-\Delta u + \phi_u(x)u = \lambda f(x)u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{EP}$$

O lema a seguir, mostra algumas importantes propriedades do operador  $\phi$ . Tais propriedades serão essenciais para referências futuras.

**Lema 1.1.** *O operador  $\phi$  satisfaz as seguintes propriedades:*

$$(\phi_1) \quad \phi_{tu} = t^\gamma \phi_u, \quad \forall (u, t) \in E \times [0, +\infty).$$

( $\phi_2$ )

$$|\phi_u(x)| \leq MP(x)|u|_{2,P}^\gamma \quad \forall (u, x) \in L_P^2(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N \quad e \quad |\phi_u(x)| \leq MP(x)|u|_\infty^\gamma \quad \forall (u, x) \in E \times \mathbb{R}^N.$$

( $\phi_3$ ) Para todo  $u \in L_P^2(\mathbb{R}^N)$ ,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\phi_u(x)}{f(x)} = 0.$$

( $\phi_4$ )

$$|\phi_u|_1 \leq M|P|_1|u|_{2,P}^\gamma \quad \forall u \in L_P^2(\mathbb{R}^N) \quad e \quad |\phi_u|_1 \leq M|P|_1|u|_\infty^\gamma \quad \forall u \in E.$$

( $\phi_5$ )  $\phi : E \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^N)$  é contínua, isto é,

$$u_n \rightarrow u \quad em \quad E \implies \phi_{u_n} \rightarrow \phi_u \quad in \quad L^1(\mathbb{R}^N).$$

( $\phi_6$ ) Seja  $(u_n) \subset L_P^2(\mathbb{R}^N)$  uma sequência e  $u \in E$  tal que  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  q.s. em  $\mathbb{R}^N$ . Então,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \phi_{u_n}(x) \geq \phi_u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

( $\phi_7$ ) Seja  $(u_n) \subset E$  uma sequência e  $u \in E$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $E$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|\phi_{u_n}(x) - \phi_u(x)| \leq \epsilon P(x), \quad \forall n \geq n_0 \quad e \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

( $\phi_8$ ) Se  $u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  é uma solução não-trivial de (EP) e  $u \geq 0$  (resp.  $u \leq 0$ ), então  $u > 0$  (resp.  $u < 0$ ).

### Demonstração.

( $\phi_1$ ): Esta propriedade é uma consequência imediata da definição de  $\phi_u$ .

( $\phi_2$ ): De (1.2), segue que

$$|\phi_u(x)| \leq MP(x)|u|_{2,P}^\gamma \quad \forall (u, x) \in L_P^2(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N.$$

Da desigualdade acima juntamente com a imersão contínua  $E \hookrightarrow L_P^2(\mathbb{R}^N)$ , concluímos que

$$|\phi_u(x)| \leq MP(x)|u|_\infty^\gamma \quad \forall u \in E \quad e \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

( $\phi_3$ ): Repetindo os mesmos argumentos explorados em ( $\phi_2$ ), temos

$$\begin{aligned}
|\phi_u(x)| &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) |u(y)|^\gamma dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} f(x) P(y)^{\gamma/2} Q(x, y) |u(y)|^\gamma dy \\
&= f(x) \int_{\mathbb{R}^N} P(y)^{\gamma/2} |Q(x, y)| |u(y)|^\gamma dy \\
&= f(x) \left[ \int_{|y| \leq L} P(y)^{\gamma/2} |Q(x, y)| |u(y)|^\gamma dy + \int_{|y| > L} P(y)^{\gamma/2} |Q(x, y)| |u(y)|^\gamma dy \right] \\
&\leq f(x) \left[ \left( \int_{|y| \leq L} Q(x, y)^{\frac{2}{2-\gamma}} dy \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} |u|_{2,P}^\gamma + M \left( \int_{|y| > L} P(y) |u(y)|^2 dy \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right]
\end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $L > 0$ . Combinando o fato que  $u \in L_P^2(\mathbb{R}^N)$  com ( $Q_2$ ), dado  $\epsilon > 0$ , existem  $R, L > 0$  tais que

$$|\phi_u(x)| \leq \epsilon f(x) \quad \text{para } |x| \geq R,$$

e assim ( $\phi_3$ ) fica estabelecida.

( $\phi_4$ ): Esta propriedade segue de ( $\phi_2$ ), pois  $P \in L^1(\mathbb{R}^N)$ .

( $\phi_5$ ): Se  $u_n \rightarrow u$  em  $E$ , então  $u_n \rightarrow u$  em  $L_P^2(\mathbb{R}^N)$ , assim

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q. s. em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad P(y)^{1/2} |u_n(y)| \leq h(y) \quad \text{para } h \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, fixando  $x \in \mathbb{R}^N$ ,

$$K(x, y) |u_n(y)|^\gamma \leq P(x) P(y)^{\gamma/2} |u_n(y)|^\gamma Q(x, y) \leq P(x) \left[ \frac{P(y) u_n(y)^2}{2/\gamma} + \frac{Q(x, y)^{2/2-\gamma}}{2/(2-\gamma)} \right]$$

assim,

$$K(x, y) |u_n(y)|^\gamma \leq P(x) \left[ \frac{h(y)^2}{2/\gamma} + \frac{Q(x, y)^{2/2-\gamma}}{2/(2-\gamma)} \right] \in L_y^1(\mathbb{R}^N)$$

desta forma, como  $K(x, y) |u_n(y)|^\gamma \rightarrow K(x, y) |u(y)|^\gamma$  para quase todo  $y \in \mathbb{R}^N$ , usando o

**Teorema da Convergência Dominada**, obtemos

$$\phi_{u_n}(x) \rightarrow \phi_u(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Sendo assim, como

$$|\phi_{u_n}(x)| \leq M |u_n|_\infty^\gamma P(x) \leq C \cdot P(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

usando, novamente, o **Teorema da Convergência Dominada**, concluímos que

$$\phi_{u_n} \longrightarrow \phi_u \quad \text{em } L^1(\mathbb{R}^N).$$

( $\phi_6$ ): Como  $K(x, y)$  é não-negativa, esta propriedade segue imediatamente do Lema de Fatou.

( $\phi_7$ ): Usando ( $f_1$ ) e as definições de  $\phi_{u_n}$  e  $\phi_u$ , obtemos

$$|\phi_{u_n}(x) - \phi_u(x)| \leq P(x) \int_{\mathbb{R}^N} P(y)^{\frac{\gamma}{2}} |Q(x, y)| \cdot ||u_n(y)|^\gamma - |u(y)|^\gamma| dy,$$

e assim,

$$|\phi_{u_n}(x) - \phi_u(x)| \leq MP(x) |P|_1^{\frac{\gamma}{2}} ||u_n|^\gamma - |u|^\gamma|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $u_n \rightarrow u$  em  $E$ , temos que

$$||u_n|^\gamma - |u|^\gamma|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Portanto, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|\phi_{u_n}(x) - \phi_u(x)| \leq \epsilon P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad n \geq n_0.$$

( $\phi_8$ ): Consequência imediata dos princípios de máximo, encontrados no capítulo 8 de [15]. ■

## 1.2 O peso $P$

O objetivo desta seção é estudar a existência e a regularidade de alguns problemas lineares, que serão utilizados na prova de alguns lemas mais adiante.

Inicialmente, se  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  e  $\varphi$  é a solução fraca do problema abaixo

$$\begin{cases} -\Delta u = P(x), & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \end{cases} \quad (LP)$$

então  $\varphi \in D_{rad}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$  e

$$-(r^{N-1}\varphi'(r))' = r^{N-1}P(r), \text{ para } r > 0 \text{ e } \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0. \quad (1.4)$$

O lema abaixo mostra o comportamento de  $\varphi$  no infinito. Um resultado semelhante foi provado em [5] porém com um argumento diferente.

**Lema 1.2.** *A função  $\varphi$  é decrescente, positiva e*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{N-2}\varphi(r) = \frac{|P|_1}{\omega_N(N-2)}.$$

**Demonstração.**

Com efeito, por (1.4),

$$-r^{N-1}\varphi'(r) = \int_0^r s^{N-1}P(s)ds, \quad \forall r > 0.$$

Como  $P$  é positivo, fica claro que  $\varphi'(r) < 0$  para  $r > 0$ , então  $\varphi$  é decrescente. Além disso,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} -r^{N-1}\varphi'(r) = \int_0^\infty s^{N-1}P(s)ds = \frac{|P|_1}{\omega_N}$$

e

$$0 < \varphi(r) = - \int_r^\infty \varphi'(s)ds \leq \frac{|P|_1}{\omega_N} \int_r^\infty s^{1-N}ds = \frac{|P|_1}{\omega_N(N-2)} r^{2-N}.$$

Desta forma

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} r^{N-2}\varphi(r) \leq \frac{|P|_1}{\omega_N(N-2)}. \quad (1.5)$$

Por outro lado, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $r_0 > 0$  tal que

$$-r^{N-1}\varphi'(r) \geq \frac{|P|_1 - \varepsilon}{\omega_N}, \quad \text{para } r > r_0.$$

Sendo assim,

$$\varphi(r) = - \int_r^\infty \varphi'(s)ds \geq \frac{|P|_1 - \varepsilon}{\omega_N} r^{2-N}, \quad \text{para } r > r_0.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, fica garantido que

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} r^{N-2}\varphi(r) \geq \frac{|P|_1}{\omega_N(N-2)}. \quad (1.6)$$

Portanto, o lema segue combinando (1.5) e (1.6). ■

Agora, pelos fatos acima, temos a afirmação abaixo:

**Afirmação 1.1.**

$$\varphi(x) = - \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)P(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.7)$$

Esta afirmação será de grande importância mais adiante, por isso se faz necessário uma demonstração para ela.

**Demonstração. (Afirmação 1.1)**

Como  $\varphi$  é solução clássica do problema  $-\Delta\varphi = P(x)$  em  $\mathbb{R}^N$ , para cada  $R > 0$  consideremos o problema abaixo, com  $B_R := B_R(0)$ ,

$$\begin{cases} -\Delta v = P(x), & \text{em } B_R \\ v(x) = \varphi(x), & \text{sobre } \partial B_R. \end{cases} \quad (1.8)$$

Este problema tem uma única solução  $v_R$ , dada por

$$v_R(x) = - \int_{B_R} G_R(x,y)P(y)dy + \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R} \int_{|y|=R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^N} d\sigma_y, \quad (1.9)$$

onde

$$G_R(x,y) = \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\bar{y}|\right), & \text{se } y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R), & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

sendo  $\bar{y} = (R^2/|y|^2)y$  se  $y \neq 0$ . Também é importante destacarmos que

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \frac{1}{N(2-N)\omega_N} |x-y|^{2-N}, \quad \text{para } x \neq y,$$

é a solução fundamental da equação de Laplace em  $\mathbb{R}^N$  para  $N > 2$ . Note que,  $G_R(x,y)$  é a função de Green associada com a bola  $B_R$ .

Pela unicidade de solução para o problema de Dirichlet (1.8), temos que  $v_R(x) = \varphi(x)$  para  $|x| \leq R$  e todo  $R > 0$ .

Fixando  $x \in \mathbb{R}^N$  e escolhendo  $R > 0$  tal que  $R > 2|x|$ , então

$$\begin{aligned} \int_{|y|=R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^N} d\sigma_y &= \frac{1}{R^N} \int_{|y|=R} \frac{\varphi(y)}{|\frac{x}{R} - \frac{y}{R}|^N} d\sigma_y \\ &= \frac{1}{R} \int_{|\omega|=1} \frac{\varphi(R\omega)}{|\frac{x}{R} - \omega|^N} d\sigma_\omega \\ &\leq \frac{2^N}{R} \int_{|\omega|=1} \varphi(R\omega) d\sigma_\omega, \end{aligned}$$

recordando que a média esférica de  $\varphi$ , denotada por  $\bar{\varphi}$ , é dada por

$$\bar{\varphi}(R) := \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{|\omega|=R} \varphi(\omega) d\sigma_\omega = \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\omega|=1} \varphi(R\omega) d\sigma_\omega$$

chegamos que,

$$\frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R} \int_{|y|=R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^N} d\sigma_y < 2^N \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right) \bar{\varphi}(R).$$

Portanto, pelo **Lema 1.2**,

$$\frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R} \int_{|y|=R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^N} d\sigma_y \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad R \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

Agora, para cada  $x \neq y$ ,  $G_R(x, y) \rightarrow \Gamma(x - y)$  quando  $R \rightarrow \infty$ . Também, para  $R$  grande e  $x \neq y$ ,

$$0 \leq -G_R(x, y) = |\Gamma(x - y)| - \left| \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x - \bar{y})\right) \right| \leq |\Gamma(x - y)|.$$

Observe que,

$$\int_{B_R} |\Gamma(x - y)| P(y) dy \leq \frac{1}{N-2} \int_0^\infty \rho P(\rho) d\rho < \infty.$$

Portanto, pelo **Teorema da Convergência Dominada**,

$$-\int_{B_R} G_R(x, y) P(y) dy \rightarrow -\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x - y) P(y) dy \quad (1.11)$$

quando  $R \rightarrow \infty$ , e assim de (1.8), usando (1.9) e (1.10), obtemos

$$\varphi(x) = -\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x - y) P(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.12)$$

■

A demonstração acima, trata-se de uma adaptação de alguns argumentos encontrados em [13, págs. 225-226].

### 1.2.1 Alguns resultados de regularidade

Seja  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua satisfazendo a condição seguinte:

$$|F(x)| \leq c_0 P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad (H)$$

para alguma constante positiva  $c_0$ .

Desde que  $w(x) \equiv 1 \in L_P^2(\mathbb{R}^N)$ , podemos garantir que o funcional  $\Psi : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\Psi(v) := \int_{\mathbb{R}^N} F(x) v dx$$

é contínuo, pois

$$\Psi(v) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x) v dx \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^N} P(x) v w dx \leq c_0 |v|_{2,P} |P|_1^{1/2} \leq C |P|_1^{1/2} \|v\|_{1,2}.$$

Usando o **Teorema da Representação de Riesz**, existe um único  $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(x) v dx, \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \|u\|_{1,2} \leq C |P|_1^{1/2}.$$

Além disso, por **Teoria de Regularidade**,  $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$  para todo  $p \geq 1$  e trata-se de uma solução forte do problema abaixo

$$-\Delta u = F(x), \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Usando a notação acima, podemos provar o seguinte resultado:

**Proposição 1.1.** *Assumindo que  $F$  satisfaz a condição (H). Então, um existe único  $u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  com*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(x) v dx, \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$|u(x)| \leq \frac{c_0 |P|_1}{\omega_N (N-2)} |x|^{2-N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Ademais,

$$\|\nabla u\|_{C(B_R)} \leq \left[ \frac{N}{R} \|u\|_{C(B_{2R})} + \frac{12R}{N-2} \|F\|_{C(B_{2R})} \right], \quad \forall R > 0.$$

### Demonstração.

No que segue, denotamos por  $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

É bem conhecido que  $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  com  $\text{supp}\rho \subset \overline{B}_1(0)$ . Usando a função  $\rho$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos

$$u_n(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)u(y)dy,$$

onde  $\rho_n(x) = Cn^N \rho(nx)$  com  $C = (\int_{\mathbb{R}^N} \rho(y) dy)^{-1}$ . Aplicando alguns resultados encontrados no capítulo 4 de [4], sabemos que  $(u_n)$  e  $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)$  convergem uniformemente em conjuntos compactos de  $\mathbb{R}^N$  para  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  respectivamente, para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Além disso, fixando

$$F_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)F(y)dy,$$

concluimos que  $u_n$  verifica a equação abaixo no sentido clássico

$$-\Delta u_n = F_n(x), \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Pelas estimativas *a priori* encontradas capítulo 8 de [15], para cada  $R > 0$  temos que

$$\|\nabla u_n\|_{C(B_R)} \leq \left[ \frac{N}{R} \|u_n\|_{C(B_{2R})} + \frac{12R}{N-2} \|F_n\|_{C(B_{2R})} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $(F_n)$  converge uniformemente para  $F$  em compactos, passando ao limite  $n \rightarrow +\infty$  na última desigualdade, deduzimos que

$$\|\nabla u\|_{C(B_R)} \leq \left[ \frac{N}{R} \|u\|_{C(B_{2R})} + \frac{12R}{N-2} \|F\|_{C(B_{2R})} \right].$$

Usando a função de Green  $G_R$  da bola  $B_R$  com  $R > |x|$ , sabemos que

$$u_n(x) = - \int_{B_R} G_R(x,y)F_n(y)dy + \frac{(R^2 - |x|^2)}{N\omega_N R} \int_{\partial B_R} \frac{u_n(\xi)}{|x - \xi|^N} d\sigma_\xi.$$

Passando ao limite  $n \rightarrow +\infty$ , segue que

$$u(x) = - \int_{B_R} G_R(x,y)F(y)dy + \frac{(R^2 - |x|^2)}{N\omega_N R} \int_{\partial B_R} \frac{u(\xi)}{|x - \xi|^N} d\sigma_\xi, \quad \text{para } R > |x|.$$

Procedendo como na **Afirmção 1.1**, obtemos

$$u(x) = - \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) F(y) dy.$$

Pela última igualdade e por (1.7), concluímos que

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\Gamma(x-y)| |F(y)| dy \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\Gamma(x-y)| P(y) dy = c_0 |\varphi(x)| \leq \frac{c_0 |P|_1}{\omega_N (N-2)} |x|^{2-N}.$$

Completando assim a demonstração. ■

### 1.3 Um operador solução linear

Nesta seção estudamos a existência e propriedades de um importante operador, que será usado para provar a existência de solução para o problema  $(P)$ .

No que segue, fixemos  $f \in C(\mathbb{R}^N)$  com  $0 < f(x) \leq P(x)$ . Então, para cada  $v \in L_P^2(\mathbb{R}^N)$ , pela imersão compacta  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_P^2(\mathbb{R}^N)$  juntamente com o **Teorema da Representação de Riesz**, temos que existe uma única solução  $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)v, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (WLP)_v$$

Desta forma, podemos definir um *operador solução*  $S : L_P^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L_P^2(\mathbb{R}^N)$  tal que  $S(v) = u$ , onde  $u$  é a única solução do problema linear com peso  $(WLP)_v$ . Usando argumentos bem conhecidos,  $S$  é um operador autoadjunto e compacto. Então, pela **Teoria Espectral**, existe uma base ortonormal completa  $\{u_n\}$  de  $L_P^2(\mathbb{R}^N)$  e uma sequência correspondente de números reais positivos  $\{\lambda_n\}$  com  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , tal que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

e

$$-\Delta u_n = \lambda_n f(x) u_n, \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Usando o **Teorema dos Multiplicadores de Lagrange**, é possível provar a seguinte caracterização para  $\lambda_1$

$$\lambda_1 = \inf_{v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x) |v(x)|^2 dx}.$$

Ainda é possível mostrar que  $\lambda_1$  é um autovalor simples e que a correspondente autofunção  $\varphi_1$  pode ser escolhida positiva em  $\mathbb{R}^N$ .

Estes fatos, com a finalidade de deixarmos a tese o mais completa possível, estão provados no **Apêndice B**.

Ademais, temos a propriedade seguinte

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{N-2} \varphi_1(x) > 0. \quad (1.13)$$

O limite acima é uma consequência do lema abaixo:

**Lema 1.3.** *Seja  $u \in E \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  uma função positiva e  $R > 0$  tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi \, dx \geq 0 \quad \forall \psi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad \text{supp } \psi \subset B_R^c(0) \quad \text{e} \quad \psi \geq 0.$$

*Então,*

$$\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{N-2} u(x) > 0.$$

**Demonstração.**

Primeiramente, como  $u$  é uma função contínua e positiva, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$u(x) \geq \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \overline{B}_R(0).$$

Definindo  $w(x) = u(x) - \frac{\varepsilon R^{N-2}}{2} |x|^{2-N}$  e

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leq R \\ w^-(x), & \text{se } |x| > R, \end{cases}$$

temos que  $\tilde{w} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\text{supp } \tilde{w} \subset B_R^c(0)$  e  $\tilde{w} \geq 0$ . Então, devemos ter

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \tilde{w} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \tilde{w} \, dx \geq 0,$$

desta forma,

$$-\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |\nabla w^-|^2 dx \geq 0.$$

Então,  $w^- = 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$ , de onde segue que

$$u(x) \geq \frac{\varepsilon R^{N-2}}{2} |x|^{2-N} \quad \text{for } |x| \geq R.$$

Completando assim a demonstração. ■

Desde que  $E \subset L_P^2(\mathbb{R}^N)$ , temos a intenção de provar que  $S : E \rightarrow E$  está bem definido e trata-se de um operador linear compacto. Para demonstrar tal fato, vamos considerar o subespaço  $E_0$  de  $E$  dado por

$$E_0 := \left\{ u \in C^1(\mathbb{R}^N); \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^N} [|x|^{N-2} u(x)] < \infty \right\},$$

munido com a seguinte norma

$$\|u\| := \sup \{ |x|^{N-2} |u(x)| : x \in \mathbb{R}^N \}.$$

**Afirmção 1.2.**  $S(E) \subset E_0$ .

Com efeito, para cada  $v \in E$  definimos  $F(x) = f(x)v(x)$ . Então, a **Proposição 1.1** garante à existência de uma única  $u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla w dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) v w dx, \quad \forall w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \quad (1.14)$$

e

$$|u(x)| \leq \frac{|P|_1}{\omega_N(N-2)} |v|_\infty |x|^{2-N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.15)$$

Portanto,  $S(v) = u \in E_0$ . Como  $v \in E$  é arbitrário, podemos garantir que  $S(E) \subset E_0$ .

A seguir, mostramos um resultado importante de convergência das sequências, que usaremos para provar que  $S : E \rightarrow E$  é compacto.

**Lema 1.4.** *Seja  $(u_n)$  sequência limitada em  $E_0$ . Se para cada compacto  $A \subset \mathbb{R}^N$  a sequência  $(\|u_n\|_{C^1(A)})$  é também limitada, então  $(u_n)$  admite uma subsequência convergente em  $E$ .*

### Demonstração.

Pela limitação de  $(u_n)$  em  $E_0$ , temos a existência de  $C, R_1 > 0$  tal que

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq C|x|^{2-N} < 1, \quad \text{para } |x| \geq R_1 \quad \text{e} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, usando a hipótese de  $(u_n)$  ser limitada em  $C^1(\overline{B}_{R_1}(0))$ , segue que

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in \overline{B}_{R_1} \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o **Teorema de Arzelá-Ascoli**, existe  $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ , tal que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$  é uma sequência de Cauchy em  $C(\overline{B}_{R_1})$  com

$$|u_n(x) - u_m(x)| < 1, \quad \text{para } |x| > R_1 \quad \text{e} \quad n, m \in \mathbb{N}_1.$$

Repetindo os argumentos acima, temos a existência de  $R_2 > R_1$ , tal que

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq C|x|^{2-N} < 1/2, \quad \text{para } |x| > R_2 \quad \text{e} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_1.$$

Uma vez que  $(u_n)$  é limitada  $C^1(\overline{B}_{R_2}(0))$ , obtemos que

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in \overline{B}_{R_2} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Aplicando novamente o **Teorema de Arzelá-Ascoli**, existe  $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$  tal que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_2}$  é uma sequência de Cauchy em  $C(\overline{B}_{R_2}(0))$  e

$$|u_n(x) - u_m(x)| < 1/2, \quad \text{para } |x| > R_2 \quad \text{e} \quad n, m \in \mathbb{N}_2.$$

Repetindo o argumento acima, vamos encontrar uma sequência crescente  $(R_k) \subset \mathbb{R}$  com  $R_k \rightarrow +\infty$  e conjuntos  $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}_1 \supseteq \mathbb{N}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathbb{N}_k \supseteq \dots$  tais que

$$|u_n(x) - u_m(x)| < 1/k, \quad \text{sempre que } |x| > R_k, \quad \text{com } n, m \in \mathbb{N}_k.$$

Portanto, existe uma subsequência de  $(u_n)$ , ainda denotada por  $(u_n)$ , tal que dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $R > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  verificando

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{para } |x| > R \quad \text{e} \quad n, m \geq n_0.$$

Por outro lado, a limitação  $(u_n)$  em  $C^1(\overline{B}_R(0))$  nos permite assumir que, alterando a subsequência se necessário, temos a desigualdade abaixo

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{para } n, m \geq n_0 \quad \text{e } x \in \overline{B}_R(0).$$

Concluimos assim que,

$$|u_n - u_m|_\infty < \varepsilon, \quad \text{para todo } n, m \geq n_0,$$

donde, segue que  $(u_n)$  é uma subsequência de Cauchy em  $E$ . Uma vez que  $E$  é um espaço de Banach,  $(u_n)$  é convergente em  $E$ , concluindo assim a demonstração. ■

Com os resultados acima, estamos em condição de demonstrar a compacidade do operador  $S$ :

**Lema 1.5.** *O operador  $S : E \rightarrow E$  é compacto.*

**Demonstração.**

Considere  $(v_n)$  uma sequência limitada em  $E$  e  $u_n = S(v_n)$ . Por (1.15), temos que  $(u_n) \subset E_0$  e

$$\|u_n\| \leq \frac{|v_n|_\infty |P|_1}{\omega_N(N-2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, considerando  $F_n(x) = f(x)v_n(x)$  e fixando  $R > 0$ , a **Proposição 1.1** nos garante que

$$\|\nabla u_n\|_{C(B_R)} \leq \left[ \frac{N}{R} \|u_n\|_{C(B_{2R})} + \frac{12R}{N-2} \|F_n\|_{C(B_{2R})} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando  $(f_2)$  e argumento bootstrap, sabemos que  $(u_n)$  é também limitada em  $C(\overline{B}_{2R}(0))$ . Como  $(F_n)$  é também limitada em  $C(\overline{B}_{2R}(0))$ , visto que  $(v_n)$  é limitada em  $E$ , o lado direito da última desigualdade é limitado. Sendo assim, podemos aplicar o **Lema 1.4** e concluirmos que  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente em  $E$ , e o lema segue. ■

A seguir, mostramos um resultado que será utilizado na prova do **Teorema 0.2**.

**Lema 1.6.** *Seja  $u \in E$  uma função positiva tal que  $u = \lambda_1 S(u)$  e  $\sigma, R > 0$  satisfazendo*

$$|x|^{N-2}u(x) \geq \sigma, \quad \text{para } |x| \geq R.$$

Seja  $v \in E$  uma solução fraca de

$$-\Delta v + b(x)v = \lambda f(x)v, \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

onde  $b$  é uma função contínua. Portanto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que: se  $|\lambda - \lambda_1| + |u - v|_\infty < \varepsilon$  e  $|b(x)| \leq \varepsilon P(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ , então a função  $v$  é positiva e  $2|x|^{N-2}v(x) \geq \sigma$  para  $|x| \geq R$ .

### Demonstração.

De fato, para  $w = u - v$  temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(x) \psi dx, \quad \forall \psi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

onde

$$F(x) = (\lambda_1 - \lambda)f(x)v + \lambda_1 f(x)w - b(x)w + b(x)u, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Usando as hipóteses, chegamos que

$$|F(x)| \leq C\varepsilon P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, escolhendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, a **Proposição 1.1** nos garante que

$$|x|^{N-2}|w(x)| \leq \frac{C\varepsilon|P|_1}{\omega_N(N-2)} < \frac{\sigma}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

e assim,

$$2|x|^{N-2}|w(x)| \leq \sigma, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Consequentemente,

$$|x|^{N-2}v(x) \geq |x|^{N-2}u(x) - |x|^{N-2}w(x) \geq \frac{\sigma}{2}, \quad \text{para } |x| \geq R,$$

donde segue que  $v$  é positiva para  $|x| \geq R$ . Agora, para  $|x| \leq R$ , decrescendo  $\varepsilon$  se necessário, a positividade de  $u$  nos garante que  $v$  é também positivo para  $|x| \leq R$ . Completando assim a demonstração. ■

### 1.3.1 Um operador compacto não-linear

Nesta subseção, vamos estudar as propriedades de outro operador compacto, que aparecerá em nosso estudo.

Para cada  $v \in E$ , usando as notações e propriedades da seção anterior, existe  $C > 0$  tal que

$$|-\phi_v(x)v(x)| \leq C|v|_\infty^{\gamma+1}P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Sendo assim, aplicando a **Proposição 1.1** com  $F(x) = -\phi_v(x)v(x)$ , existe um único  $u \in E_0 \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla w dx = \int_{\mathbb{R}^N} -\phi_v(x)vw dx, \quad \forall w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \quad (1.16)$$

ou seja,  $u \in E_0 \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  é a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = -\phi_v(x)v, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (N)_v$$

Além disso, também temos

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\Gamma(x-y)| |F(y)| dy \leq C|v|_\infty^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)P(y) dy \leq C|v|_\infty^{\gamma+1}|\varphi(x)|,$$

onde  $\varphi$  foi dada em (1.7). Uma vez que  $\varphi$  é limitada, obtemos

$$|u(x)| \leq C|v|_\infty^{\gamma+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.17)$$

Da análise feita acima, podemos definir o operador não-linear  $G : E \rightarrow E_0 \subset E$  dado por  $G(v) = u$ , onde  $u \in E_0 \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  é a única solução de  $(N)_v$ .

**Observação 1.1.** *O operador  $G$  definido acima é ímpar, ou seja,  $G(-v) = -G(v)$  para todo  $v \in E$ .*

Esta observação é uma simples aplicação da definição de  $G$  e do fato de ser  $\phi$  uma função par, fato esse que segue claramente pela própria definição de  $\phi$ .

O lema abaixo estabelece que  $G$  é um operador compacto. A demonstração desse fato segue os mesmos tipos de argumentos explorados na prova do **Lema 1.5**. Logo, omitimos a demonstração.

**Lema 1.7.** *O operador  $G : E \rightarrow E$  é compacto.*

Como último resultado do capítulo, temos:

**Observação 1.2.**  $G(v) = o(|v|_\infty)$ .

De fato, usando a definição de  $G$ , (1.17) nos garante que

$$|G(v)|_\infty \leq C|v|_\infty^{\gamma+1}, \quad \forall v \in E,$$

donde segue que,

$$\lim_{|v|_\infty \rightarrow +\infty} \frac{G(v)}{|v|_\infty} = 0, \tag{1.18}$$

ou seja,

$$G(v) = o(|v|_\infty). \tag{1.19}$$

Esta observação, parece um pouco desnecessária no momento. Porém, no capítulo seguinte, veremos que ela é fundamental para cumprir com os nossos objetivos.

Todos os fatos apresentados neste capítulo, serão de fundamental importância no próximo capítulo. Nele, demonstraremos o **Teorema 0.2**, um dos principais resultados desenvolvidos neste trabalho.

## Capítulo 2

### Demonstração do Teorema 0.2

Neste capítulo, como fica claro pelo próprio título, nos dedicamos a demonstrar o **Teorema 0.2**. A forma de demonstrá-lo será via **Teoria de Bifurcação**, como foi destacado na introdução, por isso fizemos todo o capítulo anterior dedicado à pré-requisitos. Desta maneira, usaremos livremente as notações e propriedades provadas anteriormente.

Recordemos o enunciado do teorema a ser provado:

**Assumindo  $(K_0) - (K_1)$  e  $(f_1) - (f_2)$ . Então, o problema**

$$\begin{cases} -\Delta u = (\lambda f(x) - \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) |u(y)|^\gamma dy) u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \quad u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (P)$$

**onde  $N \geq 3$  e  $\gamma \in [1, 2)$ , tem uma solução positiva se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema linear**

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x) u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (AP)$$

A observação abaixo nos dá meios de começar a demonstração:

**Observação 2.1.** *Usando a definição de  $S$  e  $G$ , definidos no **Capítulo 1**, é fácil observar que  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  é solução de  $(P)$  se, e somente se,*

$$u = F(\lambda, u) := \lambda S(u) + G(u). \quad (2.1)$$

Na sequência, aplicaremos o resultado abaixo devido a Rabinowitz [18], peça fundamental para a demonstração:

**Teorema 2.1. (*Bifurcação Global*)** *Seja  $E$  um espaço de Banach. Suponhamos que  $S$  é um operador compacto e  $\lambda^{-1} \in \sigma(S)$  tem multiplicidade algébrica ímpar. Se  $G$  é um operador compacto com*

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{G(u)}{\|u\|} = 0,$$

*então, o conjunto*

$$\Sigma = \overline{\{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E : u = \lambda S(u) + G(u), u \neq 0\}},$$

*tem uma componente conexa fechada  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\lambda$ , tal que  $(\lambda, 0) \in \mathcal{C}$  e*

*(i)  $\mathcal{C}$  é ilimitado em  $\mathbb{R} \times E$ , ou*

*(ii) existe  $\hat{\lambda} \neq \lambda$ , tal que  $(\hat{\lambda}, 0) \in \mathcal{C}$  e  $\hat{\lambda}^{-1} \in \sigma(S)$ .*

Pelos resultados anteriores, sabemos que existe uma primeira autofunção positiva  $\varphi_1$  associada à  $\lambda_1$ . Além disso,  $\lambda_1^{-1}$  é um autovalor de  $S$  com multiplicidade igual a 1. Pelo **Teorema de Bifurcação Global**, existe uma componente conexa fechada  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\lambda_1}$  de soluções para  $(P)$  que satisfaz (i) ou (ii).

Com a finalidade de alcançar nossos objetivos, o primeiro passo será demonstrar à **afirmação** abaixo:

**Afirmação 2.1.** *(ii) não pode ocorrer.*

Para mostrar esta afirmação, necessitamos de alguns lemas que se seguem:

**Lema 2.1.** *Existe  $\delta > 0$  tal que, se  $(\lambda, u) \in \mathcal{C}$  com  $|\lambda - \lambda_1| + |u|_\infty < \delta$  e  $u \neq 0$ , então  $u$  tem sinal definido, isto é,*

$$u(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{ou} \quad u(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

**Demonstração.**

Para demonstrar o lema, claramente, é suficiente provar que para quaisquer duas seqüências  $(u_n) \subset E$  e  $\lambda_n \rightarrow \lambda_1$  com

$$u_n \neq 0, \quad |u_n|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad u_n = F(\lambda_n, u_n) = \lambda_n S(u_n) + G(u_n),$$

$u_n$  tenha sinal definido para  $n$  suficientemente grande.

Considere  $w_n = u_n/|u_n|_\infty$ , logo

$$w_n = \lambda_n S(w_n) + \frac{G(u_n)}{|u_n|_\infty} = \lambda_n S(w_n) + o_n(1). \quad (2.2)$$

Pela compacidade do operador  $S$ , podemos assumir que  $(S(w_n))$  é convergente. Então,  $w_n \rightarrow w$  em  $E$  para algum  $w \in E$  com  $|w|_\infty = 1$ . Consequentemente,

$$w = \lambda_1 S(w)$$

ou equivalentemente,

$$-\Delta w = \lambda_1 f(x)w, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Portanto,  $w$  é uma autofunção associada à  $\lambda_1$ . Então,

$$w(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{ou} \quad w(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Sem perda de generalidade, assumimos que  $w(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ . Portanto, pelo

**Lema 1.3** existem  $\sigma, R > 0$  tais que

$$|x|^{N-2}w(x) \geq \sigma, \quad \text{para} \quad |x| \geq R.$$

Sabemos que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|\lambda_n - \lambda_1| + |w - w_n|_\infty < \varepsilon, \quad \text{para} \quad n \geq n_0$$

e

$$|\phi_{u_n}(x)| \leq \varepsilon P(x), \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que, por (2.2),

$$-\Delta w_n + \phi_{u_n}(x).w_n = \lambda_n f(x)w_n, \text{ em } \mathbb{R}^N$$

o **Lema 1.6**, garante que

$$w_n(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

para  $n$  suficientemente grande. Uma vez que  $u_n$  e  $w_n$  tem o mesmo sinal, temos que  $u_n$  é também positiva, que é a conclusão desejada. ■

Uma observação simples, porém muito importante:

**Observação 2.2.** *Se  $(\lambda, u) \in \Sigma$ , o par  $(\lambda, -u)$  também pertence à  $\Sigma$ .*

A verificação desta observação, é uma simples aplicação das propriedades básicas dos operadores  $S$  e  $G$ .

No lema abaixo, mostramos que  $\mathcal{C}$  pode ser decomposto em dois conjuntos importantes.

**Lema 2.2.** *Considere os conjuntos*

$$\mathcal{C}^+ = \{(\lambda, u) \in \mathcal{C} : u(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\} \cup \{(\lambda_1, 0)\}$$

e

$$\mathcal{C}^- = \{(\lambda, u) \in \mathcal{C} : u(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\} \cup \{(\lambda_1, 0)\}.$$

Então,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-. \tag{2.3}$$

Além disso, note que  $\mathcal{C}^- = \{(\lambda, u) \in \mathcal{C} : (\lambda, -u) \in \mathcal{C}^+\}$ ,  $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{(\lambda_1, 0)\}$  e  $\mathcal{C}^+$  é ilimitado se, e somente se,  $\mathcal{C}^-$  é também ilimitado.

**Demonstração.**

Primeiramente, fixemos o conjunto

$$\mathcal{C}^\pm = \{(\lambda, u) \in \mathcal{C} : u^\pm \neq 0\}.$$

Claramente, observa-se que

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}^\pm$$

daí, fica claro que para provar (2.3), é suficiente mostrar que  $\overline{\mathcal{C}^\pm} = \emptyset$ .

Suponhamos, por contradição, que  $\overline{\mathcal{C}^\pm} \neq \emptyset$ . Como  $\mathcal{C}$  é um conjunto conexo em  $\mathbb{R} \times E$  e  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  são conjuntos fechados (pela propriedade  $(\phi_8)$ ) e não-vazios com  $(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \mathcal{C}^\pm = \emptyset$ , temos que

$$(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \overline{\mathcal{C}^\pm} \neq \emptyset.$$

Portanto, temos a existência de uma solução  $(\lambda, u)$  de  $(P)$  e sequências  $(\lambda_n, u_n) \subset \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  e  $(s_n, w_n) \subset \mathcal{C}^\pm$  tais que

$$\lambda_n, s_n \rightarrow \lambda \quad \text{em } \mathbb{R}, \quad u_n \rightarrow u \quad \text{em } E \quad \text{e} \quad w_n \rightarrow u \quad \text{em } E.$$

Consequentemente,  $u \geq 0$  em  $\mathbb{R}^N$  ou  $u \leq 0$  em  $\mathbb{R}^N$ , então, pelo **Lema 2.1**,  $u \neq 0$ . Supondo que  $u \geq 0$  e  $u \neq 0$ , a propriedade  $(\phi_8)$  garante que  $u(x) > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ . Agora, por  $(\phi_3)$ , existe  $R > 0$  tal que

$$-\Delta u = (\lambda f(x) - \phi_u(x))u \geq 0, \quad \text{para } |x| \geq R,$$

no sentido fraco, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi \, dx \geq 0 \quad \forall \psi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad \text{supp } \psi \subset B_R^c(0) \quad \text{e} \quad \psi \geq 0.$$

Aplicando o **Lema 1.3**, obtemos

$$\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{N-2} u(x) > 0. \tag{2.4}$$

Desta forma, existem  $\sigma, R > 0$  tais que

$$|x|^{N-2} u(x) \geq \sigma, \quad \text{para } |x| \geq R. \tag{2.5}$$

Por outro lado, definindo  $v_n = u - w_n$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} F_n(x) \psi dx, \quad \forall \psi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

onde

$$F_n(x) = (\lambda - \lambda_n) f(x) w_n + \lambda f(x) v_n + (\phi_{w_n} - \phi_u) w_n - \phi_u v_n.$$

Observemos que, dado  $\epsilon > 0$ , as propriedades  $(\phi_2)$  e  $(\phi_7)$  garantem a existência de  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|F_n(x)| < \epsilon P(x), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Sendo assim, escolhendo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, a **Proposição 1.1** nos garante que

$$|x|^{N-2} |v_n(x)| \leq \frac{C\epsilon |P|_1}{\omega_N(N-2)} < \frac{\sigma}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

e assim,

$$2|x|^{N-2} |v_n(x)| \leq \sigma, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Consequentemente, usando a desigualdade (2.5)

$$|x|^{N-2} w_n(x) \geq |x|^{N-2} u(x) - |x|^{N-2} v_n(x) \geq \frac{\sigma}{2}, \quad \text{para} \quad |x| \geq R.$$

Concluindo assim que  $w_n$  é positiva para  $n$  suficientemente grande, obtendo assim uma contradição. Portanto,  $\overline{\mathcal{C}^\pm} = \emptyset$ , completando assim a demonstração. ■

Agora, com os dois lemas acima, estamos em condição de provar que (ii) não ocorre:

**Lema 2.3.**  $\mathcal{C}^+$  é ilimitado.

**Demonstração.**

Suponhamos, por contradição, que  $\mathcal{C}^+$  seja um conjunto limitado. Então,  $\mathcal{C}$  é também limitado. Desta forma, pelo **Teorema de Bifurcação Global**, existe  $(\hat{\lambda}, 0) \in \mathcal{C}$ , onde  $\hat{\lambda} \neq \lambda_1$  e  $\hat{\lambda}^{-1} \in \sigma(S)$ . Sendo assim, fica claro a existência de uma sequência  $(u_n)$  em  $E$  e  $\lambda_n \rightarrow \hat{\lambda}$ , tal que

$$u_n \neq 0, \quad |u_n|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad u_n = F(\lambda_n, u_n).$$

Agora, considerando  $w_n = u_n/|u_n|_\infty$ , sabemos que

$$w_n = \lambda_n S(w_n) + \frac{G(u_n)}{|u_n|_\infty} = \lambda_n S(w_n) + o_n(1). \quad (2.6)$$

Além disso, pela compacidade do operador  $S$ , podemos assumir que  $(S(w_n))$  é convergente.

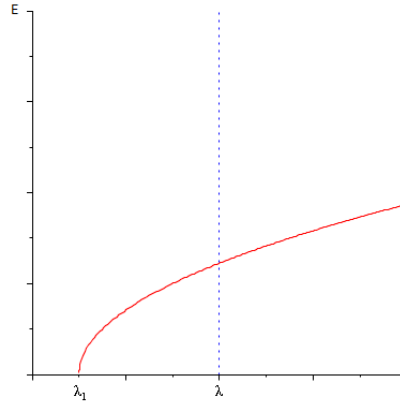
Então,  $w_n \rightarrow w$  em  $E$  para algum  $w \in E$  que é uma solução não-trivial do problema

$$-\Delta w = \hat{\lambda} f(x)w, \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

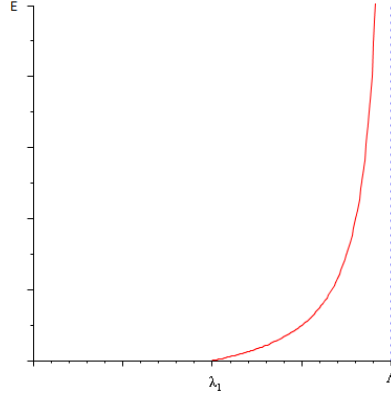
mostrando que  $w$  é uma autofunção associada à  $\hat{\lambda}$ . Desde que  $\hat{\lambda} \neq \lambda_1$ ,  $w$  deve mudar de sinal. Então, para  $n$  suficientemente grande,  $w_n$  deve mudar de sinal, implicando que  $u_n$  também muda de sinal. O que é um absurdo, visto que  $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^+$  ou  $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^-$ . ■

Do lema anterior, a componente conexa  $\mathcal{C}^+$  é ilimitada. Desta forma, temos dois possíveis comportamentos para  $\mathcal{C}^+$ :

- 1) A projeção de  $\mathcal{C}^+$  sobre o eixo dos reais é ilimitada:



- 2) A projeção de  $\mathcal{C}^+$  sobre o eixo dos reais é limitada:



**Observação 2.3.** Como a condição (ii) do **Teorema Global de Bifurcação** não ocorre, a componente  $\mathcal{C}^+$  não possui nenhum ponto da forma  $(\lambda, 0)$  para  $\lambda \neq \lambda_1$ , em virtude disto temos apenas estas duas possibilidades acima para  $\mathcal{C}^+$ .

Agora, para alcançar nossos objetivos, devemos mostrar que esta componente intersecta todo hiperplano da forma  $\{\lambda\} \times E$ , para  $\lambda > \lambda_1$ , ou seja, o comportamento 1) ocorre. Para isto, necessitamos descartar o comportamento 2). Com a **Estimativa a priori**, abaixo, o comportamento 2) é descartado.

**Lema 2.4. (*Estimativa a priori*)** Para todo  $\Lambda > 0$ , existe  $r > 0$  tal que, se  $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$  e  $\lambda \in [0, \Lambda]$ , então  $|u|_\infty \leq r$ .

**Demonstração.**

Iniciamos a demonstração com a seguinte afirmação:

**Afirmção 2.2.** Para todo  $\Lambda > 0$ , existe  $r > 0$  tal que, se  $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$  e  $\lambda \in [0, \Lambda]$ , temos que  $\|u\|_{1,2} \leq r$ . Consequentemente, pela imersão de Sobolev, existe  $r_1 > 0$  tal que  $|u|_{2^*} \leq r_1$ .

De fato, se a afirmação não for válida, existem sequências  $(u_n)$  em  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  e  $(\lambda_n) \subset [0, \Lambda]$  tais que  $\|u_n\|_{1,2} \rightarrow \infty$  e  $u_n = F(\lambda_n, u_n)$ . Considerando  $w_n = u_n / \|u_n\|_{1,2}$ , segue a identidade abaixo:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \nabla \psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{u_n}(x) w_n \psi dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x) w_n \psi dx, \quad \forall \psi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (2.7)$$

Uma vez que  $(w_n)$  é limitada em  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ , sem perda de generalidade, podemos supor a existência de  $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ , tal que  $w_n \rightharpoonup w$  em  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ . Consequentemente, a menos de subsequência, combinando a imersão compacta de Sobolev  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_P^2(\mathbb{R}^N)$  e  $(\phi_6)$ , temos que

$$w_n(x) \rightarrow w(x) \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi_{w_n}(x) \geq \phi_w(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.8)$$

Considerando  $\psi = u_n / \|u_n\|_{1,2}^{\gamma+1}$  como uma função teste em (2.7) e usando  $(\phi_1)$ , obtemos

$$\frac{1}{\|u_n\|_{1,2}^\gamma} + \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx = \frac{\lambda_n}{\|u_n\|_{1,2}^\gamma} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) w_n^2 dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx = 0.$$

Então, pelo **Lema de Fatou** juntamente com (2.8), temos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi_w(x) w^2(x) dx \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx = 0,$$

desta foma,

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} K(x, y) |w(y)|^\gamma |w(x)|^2 dy dx = 0.$$

Portanto, por  $(K_1)$ , segue que  $w \equiv 0$ , e assim,  $w_n \rightarrow 0$  em  $L_P^2(\mathbb{R}^N)$ . Agora, fixando  $\psi = w_n$  como uma função teste em (2.7), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{u_n}(x) w_n^2 dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x) w_n^2 dx,$$

donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx \leq \Lambda \int_{\mathbb{R}^N} P(x) w_n^2 dx \rightarrow 0.$$

Sendo assim,

$$\|w_n\|_{1,2}^2 \rightarrow 0$$

que é um absurdo, visto que  $\|w_n\|_{1,2} = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Provando assim a afirmação.

Com o propósito de obter a estimativa a priori, precisamos de uma boa estimativa em relação a norma  $|\cdot|_\infty$ . Com esta finalidade, utilizaremos o lema abaixo, cuja demonstração é uma modificação do **Método de Iteração de Moser**, e pode ser encontrada em detalhes no **Apêndice B**.

**Lema 2.5.** *Seja  $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável e não-negativa, verificando*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |h|_{L^q(B_2(x))} < \infty$$

*com  $q > N/2$  e  $v \in E \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  uma solução fraca do problema*

$$-\Delta v + b(x)v = H(x, v), \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (2.9)$$

*onde  $b : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não-negativa e  $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua verificando,*

$$|H(x, s)| \leq h(x)|s|, \quad \forall (x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

*Então, existe uma constante  $C := C(q, h) > 0$  tal que*

$$|v|_\infty \leq C|v|_{2^*}.$$

Para concluir a prova do **Lema 2.4**, é suficiente aplicarmos o **Lema 2.5** com

$$b(x) = \phi_{u_n}(x), \quad H(x, s) = \lambda_n f(x)s \quad \text{e} \quad h(x) = \Lambda f(x).$$

■

### Conclusão da prova do Teorema 0.2

A partir do **Lema 2.4**, para todo  $\lambda > \lambda_1$ , temos que  $(\{\lambda\} \times E) \cap \mathcal{C}^+ \neq \emptyset$ , ou seja,  $\mathcal{C}^+$  cruza o hiperplano  $\{\lambda\} \times E$ . De fato, caso contrário, existe  $\Lambda > \lambda_1$  tal que  $\mathcal{C}^+$  não cruza o hiperplano  $\{\Lambda\} \times E$ . Desta forma, pelo **Lema 2.4**, existe  $R > 0$  tal que para  $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$  com  $\lambda \in [0, \Lambda]$ , temos  $|u|_\infty \leq R$ . Portanto,  $\mathcal{C}^+$  seria limitada, o que, claramente, contraria o **Lema 2.3**.

Para finalizar a prova do **Teorema 0.2**, devemos mostrar que não existe solução para  $(P)$  quando  $\lambda \leq \lambda_1$ . De fato, argumentando por contradição, se  $(\lambda, u)$  é uma solução de  $(P)$ , tomando  $\psi = \varphi_1$  como uma função teste em  $(P)$ , concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \phi_u u \varphi_1 dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(x) u \varphi_1 dx$$

donde segue que

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} f(x) u \varphi_1 < \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(x) u \varphi_1,$$

ou equivalentemente,  $\lambda_1 < \lambda$ . Concluindo assim a demonstração do teorema.

## Capítulo 3

# Estudo fundamental relacionado ao problema $(Q)$

Este capítulo é dedicado ao estudo de fatos fundamentais para a construção das demonstrações dos **Teoremas 0.3** e **0.4**. O **Teorema 0.3** estabelece que, para  $K, \Gamma \in \mathcal{K}$ , onde  $\mathcal{K}$  é formado pelas funções  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que:

- (i)  $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$  e  $K(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in \Omega$ .
- (ii) Se  $w$  é mensurável e  $\int_{\Omega \times \Omega} K(x, y) |w(y)|^p |w(x)|^2 dx dy = 0$ , então  $w = 0$  q.s. em  $\Omega$ .

Relacionadas às funções  $f$  e  $g$ , assumiremos que existe  $\gamma > 0$  tal que:

- ( $g_0$ )  $f, g : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  são funções contínuas.
- ( $g_1$ ) Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f(t, s) \geq \epsilon |t|^\gamma$  e  $g(t, s) \geq \epsilon |s|^\gamma$ , para todo  $t, s \in [0, \infty)$ .
- ( $g_2$ )  $f(\xi t, \xi s) = \xi^\gamma f(t, s)$  e  $g(\xi t, \xi s) = \xi^\gamma g(t, s)$ , para todo  $t, s \in [0, \infty)$  e  $\xi > 0$ .

Então, considerando uma matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  com  $a, b, c, d > 0$  e  $\lambda > 0$  seu maior autovalor. Temos que, o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(a - \int_{\Omega} K(x, y) f(u, v) dy\right) u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = \left(d - \int_{\Omega} \Gamma(x, y) g(u, v) dy\right) v + cu, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_2)$$

tem solução se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

No caso em que  $f = g$  e  $K = \Gamma$ , o **Teorema 0.4** estabelece que: Se  $K \in \mathcal{K}$  e  $(g_0) - (g_2)$  válidos. Uma matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  que possui um maior autovalor positivo de  $A$  que é o único autovalor positivo  $\lambda$  com um autovetor  $z > 0$  e  $\dim N(\lambda I - A) = 1$ . Então, temos que o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(a - \int_{\Omega} K(x, y) f(u, v) dy\right) u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = \left(d - \int_{\Omega} K(x, y) f(u, v) dy\right) v + cu, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (P_3)$$

tem solução para todo  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

**Exemplo 3.1.** As funções  $f(t, s) = |t|^\gamma + |s|^{\gamma-\mu}|t|^\mu$  e  $g(t, s) = c_1|t|^\gamma + c_2|s|^\gamma$ , para  $c_1, c_2 > 0$ , assim como  $f(t, s) = \prod_{j=1}^k |t|^{\gamma_j} + |s|^{\gamma_j-\mu}|t|^\mu$  e  $g(t, s) = \prod_{j=1}^k |t|^{\gamma_j} + |s|^{\gamma_j}$ , onde  $\sum_{j=1}^k \gamma_j = \gamma > 0$  e  $\mu > 0$ , são exemplos que verificam  $(g_0) - (g_2)$

A partir deste capítulo, estaremos considerando os espaços de Banach  $E$  e  $E_1$ . Estaremos definindo  $E := C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$  com norma dada por

$$\|U\| = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C(\overline{\Omega})}$$

onde  $U \in E$ , que vai sempre ser denotado por  $U = (u, v)$  ou na forma de matriz coluna  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , para  $u, v \in C(\overline{\Omega})$ . De maneira análoga,  $E_1 := C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$  com norma dada por

$$\|U\|_1 = \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C^1(\overline{\Omega})}$$

onde  $U \in E_1$ , que vai sempre ser denotado por  $U = (u, v)$  ou na forma de matriz coluna  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , para  $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ .

É importante destacarmos que as soluções que estaremos encontrando estão nos espaços definidos acima. Por isso, a necessidade de introduzirmos tais espaços de Banach.

Podemos dividir o estudo deste capítulo em três tópicos: propriedades do termo não-local e formulação matricial do problema, alguns resultados técnicos do problema homogêneo e construção de operadores solução. Claro que, no decorrer deste capítulo, estaremos supondo as hipóteses dadas acima.

### 3.1 O termo não-local e a formulação matricial do problema

Inicialmente, definamos os operadores  $\phi, \psi : L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$  dados por  $\phi(u, v) = \phi_{(u,v)}$  e  $\psi(u, v) = \psi_{(u,v)}$ , onde

$$\phi_{(u,v)}(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(|u(y)|, |v(y)|) dy$$

e

$$\psi_{(u,v)}(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x, y) g(|u(y)|, |v(y)|) dy.$$

Estes operadores estão bem definidos, em virtude de  $K, \Gamma \in \mathcal{K}$  e  $(g_0) - (g_2)$  serem satisfeitas. De fato,

$$\begin{aligned} |\phi_{(u,v)}(x)| &= \int_{\Omega} K(x, y) f(|u(y)|, |v(y)|) dy \\ &\leq |K|_{\infty} \int_{\Omega} f(|u(y)|, |v(y)|) dy \end{aligned}$$

por outro lado, sem perda de generalidade,  $|u|_{\infty} \geq |v|_{\infty}$  e, conseqüentemente, por  $(g_0)$  e  $(g_2)$  temos

$$\frac{1}{|u|_{\infty}^{\gamma}} f(|u(y)|, |v(y)|) = f\left(\frac{|u(y)|}{|u|_{\infty}}, \frac{|v(y)|}{|u|_{\infty}}\right) \leq c$$

assim,

$$|\phi_{(u,v)}(x)| \leq c|u|_{\infty}^{\gamma}|K|_{\infty}|\Omega| < \infty, \quad \forall x \in \Omega$$

ficando assim mostrada a boa definição de  $\phi$  e, analogamente, de  $\psi$ .

É muito importante destacarmos as propriedades abaixo relacionadas as aplicações  $\phi$  e  $\psi$ :

$$(\phi_1) \quad t^{\gamma} \phi_{(u,v)} = \phi_{(tu,tv)} \text{ e } t^{\gamma} \psi_{(u,v)} = \psi_{(tu,tv)}, \text{ para todo } u, v \in L^{\infty}(\Omega) \text{ e } t > 0.$$

$$(\phi_2) \quad |\phi_{(u,v)}|_{\infty} \leq |K|_{\infty}|\Omega| \cdot |f(|u|, |v|)|_{\infty} \text{ e } |\psi_{(u,v)}|_{\infty} \leq |K|_{\infty}|\Omega| \cdot |g(|u|, |v|)|_{\infty}, \text{ para todo } u, v \in L^{\infty}(\Omega).$$

Com as notações acima, podemos fixar:

$$\Phi_U(x) := \begin{pmatrix} u\phi_{(u,v)}(x) \\ v\psi_{(u,v)}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{onde } U = (u, v) \in L^{\infty}(\Omega) \times L^{\infty}(\Omega).$$

Usando as notações estabelecidas e fixadas acima, o problema  $(P_2)$  pode ser escrito de forma matricial:

$$\begin{cases} -\Delta U + \Phi_U(x) = AU, & \text{em } \Omega \\ U > 0, & \text{em } \Omega \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (P_4)$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_{(u,v)}u = au + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v + \psi_{(u,v)}u = cu + dv, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_5)$$

Recordamos que  $U = (u, v)$  satisfaz o problema acima no sentido fraco, se  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \phi_{(u,v)}(x)u\varphi dx = \int_{\Omega} (au + bv)\varphi dx \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \eta dx + \int_{\Omega} \psi_{(u,v)}(x)v\eta dx = \int_{\Omega} (cu + dv)\eta dx \quad (3.2)$$

para todo  $\eta, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ .

No caso em que  $f = g$  e  $K = \Gamma$ , temos que  $\phi_{(u,v)} = \psi_{(u,v)}$  e, conseqüentemente,  $\Phi_U(x) = \phi(x)U$ , onde  $\phi(x) = \phi_{(u,v)}(x)$ . Desta forma, o problema  $(P_3)$  pode ser escrito da forma

$$\begin{cases} -\Delta U + \phi(x)U = AU, & \text{em } \Omega \\ U > 0, & \text{em } \Omega \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_6)$$

## 3.2 Alguns resultados técnicos envolvendo o sistema homogêneo

Devido às características dos nossos problemas, é necessário fazer um estudo técnico envolvendo as matrizes que aparecem no nosso estudo. Esta seção é desenvolvida para apresentar este estudo, que é essencial em todo o texto.

Iniciamos com o lema:

**Lema 3.1.** *Suponhamos que exista uma solução não-trivial  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  para o sistema homogêneo*

$$\begin{cases} -\Delta U = AU, & \text{em } \Omega \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (Q_1)$$

Então,  $A$  tem um autovalor real que também é um autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

Além disso:

- i) se  $\lambda_j \in \sigma(-\Delta) \cap \sigma(A)$ , para  $\phi_j$  uma autofunção de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$  associada ao autovalor  $\lambda_j$ , temos que se  $z = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} u\phi_j dx \\ \int_{\Omega} v\phi_j dx \end{pmatrix} \neq 0$ ,  $z$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_j$ .
- ii) se  $\sigma(-\Delta) \cap \sigma(A) = \{\lambda_j\}$  e  $\dim N(A - \lambda_j I) = 1$ , então toda solução de  $(Q_1)$  é da forma  $U = \phi_j z$ , onde  $z$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_j$ . Ademais, o subespaço  $N_A = \{U \in E; U \text{ é uma solução do problema } (Q_1)\}$  tem a mesma dimensão do autoespaço associado à  $\lambda_j$  como autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .
- iii) se  $\sigma(-\Delta) \cap \sigma(A) = \{\lambda_j, \lambda_m\}$ ,  $m \neq j$ , então toda solução de  $(Q_1)$  é da forma  $U = \phi_j z + \phi_m w$ , onde  $z$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_j$  e  $w$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_m$ . Neste caso,  $\dim N_A$  é a soma da dimensão do autoespaço associada à  $\lambda_j$  como autovalor de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$  e a dimensão do autoespaço associada à  $\lambda_m$  como autovalor de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

### Demonstração.

Sabemos que  $\int_{\Omega} u\phi_k dx \neq 0$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Multiplicando as equações em  $(Q_1)$  por  $\phi_k$  e integrando sobre  $\Omega$ , obtemos:

$$\lambda_k \int_{\Omega} u\phi_k dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_k dx = a \int_{\Omega} u\phi_k dx + b \int_{\Omega} v\phi_k dx$$

e

$$\lambda_k \int_{\Omega} v\phi_k dx = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi_k dx = c \int_{\Omega} u\phi_k dx + d \int_{\Omega} v\phi_k dx,$$

em formato matricial,

$$Az = \lambda_k z, \text{ onde } z = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} u\phi_k dx \\ \int_{\Omega} v\phi_k dx \end{pmatrix}.$$

Ou seja,  $\lambda_k$  é autovalor de  $A$  com autovetor (não nulo)  $z = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} u\phi_k dx \\ \int_{\Omega} v\phi_k dx \end{pmatrix}$ .

Pela análise das identidades acima, observamos que  $\int_{\Omega} v\phi_k dx \neq 0$ , pois do contrário devemos ter  $\lambda_k = a$  e  $c = 0$ . Implicando em duas situações:  $v \neq 0$ , e portanto  $v$  é autofunção de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$  associada ao autovalor  $\lambda_m$ , onde  $d = \lambda_m$  e  $b = 0$ . Neste caso,  $A = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$  que trata-se de um caso que não temos interesse, em virtude do sistema se tornar desacoplado. A outra situação é  $v = 0$ , que também não temos interesse, pois deixaríamos de ter um sistema e passaríamos a ter uma equação. Desta forma, sendo  $\int_{\Omega} u\phi_k dx \neq 0$ , teremos  $\int_{\Omega} v\phi_k dx \neq 0$  e, conseqüentemente,  $\lambda_k$  autovalor de  $A$ . Provando assim a primeira parte do Lema.

A demonstração de (i) é uma simples aplicação do argumento anterior.

Se  $\sigma(-\Delta) \cap \sigma(A) = \{\lambda_j\}$ , então para toda solução de  $(Q_1)$ , pelo argumento anterior, verifica

$$\int_{\Omega} u\phi_k dx = 0, \text{ para todo } k \neq j$$

e, conseqüentemente,  $u = \alpha\phi_j$  e  $v = \beta\phi_j$ , ou seja,  $U = \phi_j z$ , onde  $z = (\alpha, \beta)$ . Como,

$$-\Delta U = -\Delta \begin{pmatrix} \alpha\phi_j \\ \beta\phi_j \end{pmatrix} = \lambda_j \phi_j \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_j \phi_j z$$

e

$$AU = A \begin{pmatrix} \alpha\phi_j \\ \beta\phi_j \end{pmatrix} = \phi_j A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

fica claro que  $z$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_j$ . Ademais, é claro que  $U$  é solução de  $(Q_1)$  se, e somente se, puder ser escrito da forma  $U = \phi_j z$ , onde  $z$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_j$ . E, sendo  $\dim N(A - \lambda_j I) = 1$ ,  $N_A = \{U \in E; U \text{ é uma solução do problema } (Q_1)\}$  tem a mesma dimensão do autoespaço associado à  $\lambda_j$  como autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ . Provando assim (ii).

Agora, para o caso  $\sigma(-\Delta) \cap \sigma(A) = \{\lambda_j, \lambda_m\}$ ,  $m \neq j$ , para toda solução de  $(Q_1)$  temos que

$$\int_{\Omega} u\phi_k dx = 0, \text{ para todo } k \neq j, m.$$

E, conseqüentemente,  $u = \alpha_1\phi_j + \beta_1\phi_m$  e  $v = \alpha_2\phi_j + \beta_2\phi_m$ , onde

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ é autovetor de } A \text{ associado ao autovalor } \lambda_j$$

e

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \text{ é autovetor de } A \text{ associado ao autovalor } \lambda_m.$$

De fato, tomando  $z = (\alpha_1, \alpha_2)$  e  $w = (\beta_1, \beta_2)$ , temos

$$-\Delta U = -\Delta \begin{pmatrix} \alpha_1\phi_j + \beta_1\phi_m \\ \alpha_2\phi_j + \beta_2\phi_m \end{pmatrix} = -\Delta \begin{pmatrix} \alpha_1\phi_j \\ \alpha_2\phi_j \end{pmatrix} - \Delta \begin{pmatrix} \beta_1\phi_m \\ \beta_2\phi_m \end{pmatrix} = \lambda_j\phi_j z + \lambda_m\phi_m w$$

e

$$AU = A \begin{pmatrix} \alpha_1\phi_j + \beta_1\phi_m \\ \alpha_2\phi_j + \beta_2\phi_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1\phi_j \\ \alpha_2\phi_j \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \beta_1\phi_m \\ \beta_2\phi_m \end{pmatrix} = \phi_j Az + \phi_m Aw$$

fica, desta forma, claro que  $z$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_j$  e  $w$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_m$ . Ademais, é claro que  $U$  é solução de  $(Q_1)$  se, e somente se, puder ser escrito da forma é da forma  $U = \phi_j z + \phi_m w$ , onde  $z$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_j$  e  $w$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_m$ . Neste caso,  $\dim N_A$  é a soma da dimensão do autoespaço associada à  $\lambda_j$  como autovalor de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$  e a dimensão do autoespaço associada à  $\lambda_m$  como autovalor de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ . ■

Um segundo lema, para o caso de solução não-nula e não-negativa

**Lema 3.2.** *Supondo que existe uma solução não-trivial e não-negativa  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  do sistema homogêneo*

$$\begin{cases} -\Delta U = AU, & \text{em } \Omega \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (Q_1)$$

*Então,  $A$  tem  $\lambda_1$  como um de seus autovalores, que tem um autovetor associado com coordenadas positivas.*

**Demonstração.**

Suponhamos que  $(Q_1)$  admite uma solução não-trivial e não-negativa, no sentido  $U \geq 0$  se  $u \geq 0$  e  $v \geq 0$ . Pela demonstração do lema anterior, temos que  $u = \alpha_1 \phi_j + \beta_1 \phi_m$  e  $v = \alpha_2 \phi_j + \beta_2 \phi_m$ . Afirmamos que,  $j = 1$  ou  $m = 1$ . De fato, caso contrário, como  $\int_{\Omega} u \phi_1 dx > 0$  e da ortogonalidade das autofunções associadas com autovalores distintos  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ , segue que

$$0 < \int_{\Omega} u \phi_1 dx = \alpha_1 \int_{\Omega} \phi_j \phi_1 dx + \beta_1 \int_{\Omega} \phi_m \phi_1 dx = 0$$

que é um absurdo. Portanto,  $A$  tem  $\lambda_1$  como um de seus autovalores.

Suponhamos que  $j = 1$ . Daí,  $u = \alpha_1 \phi_1 + \beta_1 \phi_m$  e  $v = \alpha_2 \phi_1 + \beta_2 \phi_m$ , assim

$$0 < \int_{\Omega} u \phi_1 dx = \alpha_1 \int_{\Omega} \phi_1^2 dx$$

desta forma,  $\alpha_1 > 0$ . Analogamente,  $\alpha_2 > 0$ . E, conseqüentemente, existe um autovetor de  $A$  associado com  $\lambda_1$ , tendo ambas as coordenadas positivas. ■

**Corolário 3.1.** *Se  $\sigma(A) = \{\mu, \lambda\}$ ,  $\mu < \lambda$ ,  $\lambda > 0$  e  $z > 0$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ , então, se  $(Q_1)$  tem  $U$  como solução não-trivial e não-negativa, temos que  $\lambda = \lambda_1$  e  $U = \phi_1 w$ , onde  $w$  é um múltiplo de  $z$ . Além disso, temos que  $U > 0$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta} < 0$  sobre  $\partial\Omega$ .*

### Demonstração.

Pelo lema anterior fica claro que  $A$  tem  $\lambda_1$  como um de seus autovalores, o qual tem um autovetor associado com coordenadas positivas. Desta forma, pela **Álgebra Linear**,  $\lambda = \lambda_1$  e, conseqüentemente,  $\sigma(-\Delta) \cap \sigma(A) = \{\lambda_1\}$  e  $\dim N(A - \lambda_1 I) = 1$ , então  $U = \phi_1 w$ , onde  $w$  é um múltiplo de  $z$ .

Além disso, como  $U \geq 0$  e  $\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} < 0$  sobre  $\partial\Omega$ , temos garantido, pela representação de  $U$ , que  $U > 0$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta} < 0$  sobre  $\partial\Omega$ . ■

### 3.2.1 Observações sobre o parâmetro $t$ no problema homogêneo

Um fato extremamente importante para demonstrar os **Teoremas 0.3** e **0.4**, é a utilização de um parâmetro  $t$  no problema homogêneo. Nesta subseção, trataremos de alguns fatos relacionados a utilização deste parâmetro e discutimos a necessidade de algumas hipóteses colocadas nos enunciados dos teoremas.

Aqui, assumimos que a matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tem um autovalor positivo  $\lambda$  associado a um autovetor positivo  $z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . Estamos interessados em dar hipóteses sobre  $t > 0$  com a finalidade que o sistema

$$\begin{cases} -\Delta U &= tAU, & \text{em } \Omega \\ U &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

tenha um espaço de soluções unidimensional com uma solução  $U > 0$  em  $\Omega$ .

Assumindo a existência de um autovalor positivo  $\lambda$ , considere  $t = t_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}$ . E assim, temos que  $t_1 Az = t_1 \lambda z = \lambda_1 z$ . Desta forma, claramente,  $U = \begin{pmatrix} \alpha \phi_1 \\ \beta \phi_1 \end{pmatrix}$  é positiva e satisfaz  $-\Delta U = t_1 AU$ . Portanto, o espaço de soluções do problema para  $t = t_1$ ,  $N_1 := N_{(t_1 A)}$  tem dimensão positiva.

Com a finalidade de ter um espaço de soluções unidimensional, consideramos a situação:

- se  $\sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$ , com  $\lambda_1 \mu \neq \lambda_j \lambda$ , para todo  $j > 1$ . Neste caso,  $\sigma(t_1 A) = \{t_1 \mu, \lambda_1\}$ .

Como  $t_1 \mu \neq \lambda_j$ , para todo  $j > 1$ , segue que  $\dim N_1 = 1$ .

É fácil ver que, se  $\lambda > \mu$ , a condição acima sempre é satisfeita:  $t_1 \mu < t_1 \lambda = \lambda_1 < \lambda_j$ , para todo  $j > 1$ .

A situação aqui descrita é utilizada nos **Teoremas 0.3** e **0.4**. É muito importante destacarmos que a necessidade de tais fatos, vem da forma como nos propomos a demonstrar

os teoremas principais, que será via **Teoria de Bifurcação**, mais precisamente, através do **Teorema de Bifurcação Global** de Rabinowitz.

Por outro lado, desde que temos interesse em utilizar o **Teorema de Bifurcação Global**, observamos que se  $A$  tem dois autovalores positivos  $\lambda$  e  $\mu$ , onde cada um deles está associado à autovetores positivos  $z$  e  $w$ , respectivamente, então  $\dim N_{(tA)} = 1$ , para  $t = t_1$  e  $t = s_1$ , onde  $t_1 = \lambda_1/\lambda$  e  $s_1 = \lambda_1/\mu$ . Além disso,  $0 < z\phi_1 \in N_{(t_1A)}$  e  $0 < w\phi_1 \in N_{(s_1A)}$ . Sendo assim, uma bifurcação pode partir de  $t = t_1$  e finalizar em  $t = s_1$ . Devemos evitar esta situação.

Portanto, a hipótese sobre  $A$ , para ser feito o estudo via **Teoria de Bifurcação**, é que esta matriz possua ao menos um autovalor positivo  $\lambda$  com  $\dim N(A - \lambda I) = 1$ , e que  $\lambda$  esteja associado com um autovetor positivo  $z$ . Além disso, se  $A$  tem um outro autovalor positivo  $\mu$ , este autovalor esteja associado com um autovetor  $w = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$  tal que  $\alpha_2\beta_2 < 0$ .

Tomando  $A$  com as hipóteses discutidas acima, veremos no **Lema 4.2**, que uma bifurcação de soluções positivas do problema parte de  $t = t_1$ .

Para finalizar esta subseção, destacamos uma observação simples, porém importante. Esta observação está associada à classe de matrizes  $A$  que estamos considerando no **Teorema 0.3**.

**Observação 3.1.** *Recordando a Álgebra Linear das matrizes  $2 \times 2$*

Para uma matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  com  $a, b, c, d > 0$ , é possível provar que  $\sigma(A) = \{\mu, \lambda\}$  e  $\lambda > \mu$  com  $\lambda > 0$ . É bem conhecido que, existe um autovetor  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$  com  $\alpha, \beta > 0$  e todo autovetor  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$  de  $A$  associado ao autovalor  $\mu$  com  $\alpha_1 \cdot \beta_1 < 0$ .

### 3.3 Os operadores de solução

Temos a intenção de provar a existência de solução positiva para os problemas  $(P_2)$  e  $(P_3)$  usando um resultado de bifurcação clássica devido a Rabinowitz, ver [18]. Com esta finalidade, recordamos que existe  $c_\infty = c_\infty(\Omega) > 0$  tal que: para cada  $h \in L^\infty(\Omega)$ , existe uma única função  $\omega \in C^1(\overline{\Omega})$  satisfazendo:

$$\begin{cases} -\Delta\omega = h(x), & \text{em } \Omega \\ \omega = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\|\omega\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq c_\infty |h|_\infty.$$

Usamos esta propriedade livremente na construção de propriedades elementares dos operadores que construímos abaixo.

Consideremos o operador solução  $S : E \rightarrow E_1$ , dado por

$$S(u, v) = (u_1, v_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u_1 = au + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v_1 = cu + dv, & \text{em } \Omega \\ u_1 = v_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

ou, equivalentemente, na forma matricial

$$S(U) = U_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta U_1 = AU, & \text{em } \Omega \\ U_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  e  $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ . Claramente, devido ao já bem conhecido caso unidimensional do problema,  $S$  está bem definido, é linear e verifica

$$\|S(U)\|_1 \leq C\|U\|, \text{ para todo } U \in E \text{ e algum } C > 0.$$

Além disso, usando as imersões de Schauder,  $S : E \rightarrow E$  trata-se de um operador compacto.

Por outro lado, definimos o operador não-linear  $G : E \rightarrow E_1$  dado por

$$G(u, v) = (u_1, v_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u_1 + \phi_{(u,v)}(x)u = 0, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v_1 + \psi_{(u,v)}(x)v = 0, & \text{em } \Omega \\ u_1 = v_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

ou, equivalentemente, na forma matricial

$$G(U) = U_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta U_1 + \Phi_U(x) = 0, & \text{em } \Omega \\ U_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde  $\Phi_U(x) = \begin{pmatrix} u\phi_{(u,v)}(x) \\ v\psi_{(u,v)}(x) \end{pmatrix}$  e  $U = (u, v)$ . Temos, claramente, que  $G$  está bem definido, é contínua e verifica

$$\|G(U)\|_1 \leq C(|\phi_{(u,v)}|_\infty + |\psi_{(u,v)}|_\infty)\|U\|, \text{ para todo } U \in E.$$

Usando novamente as imersões de Schauder, temos que  $G : E \rightarrow E$  é compacto. Além disso, de  $(g_0) - (g_2)$  e  $(\phi_2)$ , é possível verificar que  $G$  é um operador ímpar, ou seja,  $G(-u) = -G(u)$  para todo  $u \in E$  e verifica

$$G(U) = o(\|U\|).$$

## Capítulo 4

# Demonstrações dos Teoremas 0.3 e 0.4

Neste capítulo, como fica claro pelo próprio título, nos dedicamos a demonstrar os **Teoremas 0.3** e **0.4**. A forma de demonstrá-los será via **Teoria de Bifurcação**, como foi destacado na introdução, por isso fizemos todo o capítulo anterior dedicado à pré-requisitos. Desta maneira, usaremos livremente as notações e propriedades provadas anteriormente.

### 4.1 Demonstração do Teorema 0.3

Recordemos o enunciado deste teorema:

**Considere  $K, \Gamma \in \mathcal{K}$  e  $(g_0) - (g_2)$  válidos. Seja uma matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  com**

$a, b, c, d > 0$  e  $\lambda > 0$  seu maior autovalor. Então, temos que o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = (a - \int_{\Omega} K(x, y) f(u, v) dy) u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = (d - \int_{\Omega} \Gamma(x, y) g(u, v) dy) v + cu, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_2)$$

tem solução se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

Com o intuito de provar o **Teorema 0.3** via **Teoria de Bifurcação**, como já foi destacado no capítulo anterior, é necessário introduzir um parâmetro  $t \in \mathbb{R}$  no problema  $(P_2)$  e provarmos o lema abaixo:

**Lema 4.1.** *Supondo que  $K, \Gamma \in \mathcal{K}$  e  $(g_0) - (g_2)$  válidos. Seja  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  uma matriz com  $a, b, c, d > 0$  e  $\lambda > 0$  seu maior autovalor. Para  $t \in \mathbb{R}$ , temos que o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta U + \Phi_U(x) = tAU, & \text{em } \Omega \\ U > 0, & \text{em } \Omega \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (P_4)$$

tem solução se, e somente se,  $t > t_1$ , onde  $t_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}$  e  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

Para provar o lema acima, é necessário notar que: usando as definições de  $S$  e  $G$ , definidos no **Capítulo 3**, é fácil checar que  $(t, U) \in \mathbb{R} \times E$  soluciona  $(P_4)$  se, e somente se,

$$U = F(t, U) := tS(U) + G(U).$$

No que segue, aplicaremos novamente o **Teorema de Bifurcação Global** devido a Rabinowitz, para provar o **Lema 4.1**. Enunciamos aqui novamente, com o objetivo de facilitar a leitura da tese.

**Teorema 4.1. (*Bifurcação Global*)** *Seja  $E$  um espaço de Banach. Suponha que  $S$  é um operador linear compacto e  $t^{-1} \in \sigma(S)$  tem multiplicidade algébrica ímpar. Se  $G$  é um operador compacto e*

$$\lim_{\|U\| \rightarrow 0} \frac{G(U)}{\|U\|} = 0,$$

*então, o conjunto*

$$\Sigma = \overline{\{(t, U) \in \mathbb{R} \times E : U = tS(U) + G(U), U \neq 0\}}$$

*tem uma componente conexa fechada  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_t$  tal que  $(t, 0) \in \mathcal{C}$  e*

*(i)  $\mathcal{C}$  é ilimitado em  $\mathbb{R} \times E$ , ou*

*(ii) existe  $\hat{t} \neq t$ , tal que  $(\hat{t}, 0) \in \mathcal{C}$  e  $\hat{t}^{-1} \in \sigma(S)$ .*

Pelo estudo feito na **Subseção 3.2.1**, uma autofunção  $U_1$  associada ao autovalor  $t_1 = \lambda_1/\lambda$  do problema linear pode ser escolhida positiva. Além disso,  $t_1^{-1}$  é um autovalor de multiplicidade 1 para  $S$ . Pelo **Teorema de Bifurcação Global**, existe uma componente conexa fechada  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{t_1}$  de soluções para  $(P_4)$ , que satisfazem (i) ou (ii).

Com a finalidade de alcançar nossos objetivos, o primeiro passo será demonstrar à **Afirmção** abaixo:

**Afirmção 4.1.** *(ii) não pode ocorrer.*

Para mostrar esta afirmação, necessitamos do lema que se segue:

**Lema 4.2.** *Existe  $\delta > 0$  tal que, se  $(t, U) \in \mathcal{C}$  com  $|t - t_1| + \|U\| < \delta$  e  $U \neq 0$ , então  $U$  tem sinal definido, que é,*

$$U(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{ou} \quad U(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

**Demonstração.**

Assim como na demonstração do **Lema 2.1**, é suficiente provar que qualquer duas sequências  $(U_n) \subset E$  e  $t_n \rightarrow t_1$  com

$$U_n \neq 0, \quad \|U_n\| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad U_n = F(t_n, U_n) = t_n S(U_n) + G(U_n),$$

$U_n$  tem sinal definido para  $n$  suficientemente grande.

Definindo  $W_n = U_n/\|U_n\|$ , temos que

$$W_n = t_n S(W_n) + \frac{G(U_n)}{\|U_n\|} = t_n S(W_n) + o_n(1).$$

Pela compacidade do operador  $S$ , podemos assumir que  $(S(W_n))$  é convergente. Então,  $W_n \rightarrow W$  em  $E$  para algum  $W \in E$  com  $\|W\| = 1$ . Consequentemente,

$$\begin{cases} -\Delta W &= t_1 A W, & \text{em } \Omega \\ W &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma vez que  $W \neq 0$ , temos, pelos **Lemas 3.1** e **3.2**, que

$$W(x) > 0 \text{ ou } W(x) < 0, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Portanto, sem perda de generalidade,  $W > 0$  em  $\Omega$ , e consequentemente  $W_n > 0$  em  $\Omega$  para  $n$  suficientemente grande. Como  $U_n$  e  $W_n$  tem o mesmo sinal, temos que  $U_n$  é também positiva, completando assim a demonstração. ■

Uma observação simples, porém muito importante:

**Observação 4.1.** Se  $(t, U) \in \Sigma$ , o par  $(t, -U) \in \Sigma$ .

A verificação desta observação, é uma simples aplicação das definições e propriedades dos operadores  $S$  e  $G$ , definidos no **Capítulo 3**.

Pelos argumentos de **Princípios de Máximo** usados por Alves, Delgado, Souto e Suárez em [2] e positividade de  $a, b, c$  e  $d$ , podemos decompor  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ , onde

$$\mathcal{C}^+ = \{(t, U) \in \mathcal{C}; U > 0\} \cup \{(t_1, 0)\}$$

e

$$\mathcal{C}^- = \{(t, U) \in \mathcal{C}; U < 0\} \cup \{(t_1, 0)\}.$$

Observemos também que,  $\mathcal{C}^- = \{(t, U) \in \mathcal{C}; (t, -U) \in \mathcal{C}^+\}$ ,  $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{(t_1, 0)\}$  e  $\mathcal{C}^+$  é ilimitado se, e somente se,  $\mathcal{C}^-$  é ilimitado.

Agora, com o lema e as propriedades destacadas acima, estamos em condição de provar que (ii) não ocorre:

**Lema 4.3.**  $\mathcal{C}^+$  é ilimitado.

**Demonstração.**

Suponhamos por contradição que  $\mathcal{C}^+$  é limitado. Então,  $\mathcal{C}$  é também limitado. Pelo **Teorema de Bifurcação Global**, existe  $(\hat{t}, 0) \in \mathcal{C}$ , onde  $\hat{t} \neq t_1$  e  $\hat{t}^{-1} \in \sigma(S)$ .

Portanto, sem perda de generalidade, existe  $(t_n, U_n) \in \mathcal{C}^+$  com  $t_n \rightarrow \hat{t}$  tal que

$$U_n \neq 0, \quad \|U_n\| \rightarrow 0 \text{ e } U_n = F(t_n, U_n).$$

Definindo  $W_n = U_n/\|U_n\|$ , análogo ao que foi feito no lema anterior, existe  $W \in E$  com  $W_n \rightarrow W$  em  $E$ , onde  $W \neq 0$ ,  $W \geq 0$  e satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta W &= (\hat{t}A)W, & \text{em } \Omega \\ W &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo **Corolário 3.1**,  $\hat{t}\lambda = \lambda_1$  e, conseqüentemente,  $\hat{t} = t_1$ , o que não é possível. Completando assim a demonstração do lema. ■

Pelo lema anterior, a componente conexa  $\mathcal{C}^+$  é ilimitada. Daí, usando o mesmo argumento da demonstração do **Teorema 0.2** (ver páginas 36 e 37), temos como objetivo mostra que esta componente intersecta todo hiperplano da forma  $\{t\} \times E$ , para  $t > t_1$ . Para ver isto, necessitamos da seguinte estimativa a priori.

**Lema 4.4. (*Estimativa a priori*)** Para todo  $\Lambda > 0$ , existe  $R > 0$  tal que, se  $(t, U) \in \mathcal{C}^+$  e  $t \in [0, \Lambda]$ , então  $\|U\| \leq R$ .

**Demonstração.**

Definamos por  $\|\cdot\|_H$ , a norma em  $H = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , dada por

$$\|U\|_H = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

onde  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  com  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .

Inicialmente, mostraremos uma estimativa a priori sobre o espaço  $H$ , através da **Afirmção** enunciada abaixo:

**Afirmção 4.2.** *Dado  $\Lambda > 0$ , existe  $R > 0$  tal que: se  $(t, U) \in \mathcal{C}^+$  e  $t \leq \Lambda$ , então  $\|U\|_H \leq R$ .*

De fato, se a afirmação não é válida, existe  $(U_n) \subset H$  e  $(t_n) \subset [0, \Lambda]$  tal que,

$$\|U_n\|_H \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad U_n = F(t_n, U_n).$$

Considere  $W_n = U_n/\|U_n\|_H$ , onde  $W_n = (\bar{u}_n, \bar{v}_n)$  para  $\bar{u}_n = u_n/\|U_n\|_H$  e  $\bar{v}_n = v_n/\|U_n\|_H$ . Desta forma,

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u}_n \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \phi_{(u_n, v_n)}(x) \bar{u}_n \varphi dx = t_n \int_{\Omega} (a \bar{u}_n + b \bar{v}_n) \varphi dx$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{v}_n \nabla \eta dx + \int_{\Omega} \psi_{(u_n, v_n)}(x) \bar{v}_n \eta dx = t_n \int_{\Omega} (c \bar{u}_n + d \bar{v}_n) \eta dx$$

para todo  $\varphi, \eta \in H_0^1(\Omega)$ . Uma vez que  $(W_n)$  é limitado em  $H$ , sem perda de generalidade, podemos supor a existência de  $W \in H$ ,  $W = (u, v)$ , satisfazendo

$$\bar{u}_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega), \bar{u}_n \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \bar{u}_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.s. em } \Omega \quad (4.1)$$

como também,

$$\bar{v}_n \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega), \bar{v}_n \rightarrow v \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \bar{v}_n(x) \rightarrow v(x) \text{ q.s. em } \Omega. \quad (4.2)$$

Para  $\varphi = \frac{\bar{u}_n}{\|U\|_H^\gamma}$  e  $\eta = \frac{\bar{v}_n}{\|U\|_H^\gamma}$  como funções de teste, e recordando que  $t^\gamma \phi_{(u_n, v_n)} = \phi_{(tu_n, tv_n)}$  e  $t^\gamma \psi_{(u_n, v_n)} = \psi_{(tu_n, tv_n)}$ , para todo  $t > 0$ , obtemos

$$\frac{1}{\|U_n\|_H^\gamma} \|\bar{u}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \phi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{u}_n^2 dx = t_n \int_{\Omega} (a \bar{u}_n + b \bar{v}_n) \frac{\bar{u}_n}{\|U_n\|_H^\gamma} dx \quad (4.3)$$

e

$$\frac{1}{\|U_n\|_H^\gamma} \|\bar{v}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \psi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{v}_n^2 dx = t_n \int_{\Omega} (c \bar{u}_n + d \bar{v}_n) \frac{\bar{v}_n}{\|U_n\|_H^\gamma} dx. \quad (4.4)$$

Portanto, usando a **Desigualdade de Hölder** e (4.1) – (4.2) em (4.3) – (4.4),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{u}_n^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{v}_n^2 dx = 0. \quad (4.5)$$

Pelo **Lema de Fatou**, chegamos que

$$\int_{\Omega} \phi_{(u,v)} u^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{u}_n^2 dx = 0 \quad (4.6)$$

assim como,

$$\int_{\Omega} \psi_{(u,v)} v^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{v}_n^2 dx = 0. \quad (4.7)$$

Desta forma,

$$\int_{\Omega \times \Omega} K(x, y) f(|u(y)|, |v(y)|) |u(x)|^2 dx dy = \int_{\Omega \times \Omega} \Gamma(x, y) g(|u(y)|, |v(y)|) |v(x)|^2 dx dy = 0. \quad (4.8)$$

Logo, pela hipótese  $(g_1)$ ,

$$0 \leq \epsilon \int_{\Omega \times \Omega} K(x, y) |u(y)|^\gamma |u(x)|^2 dx dy \leq \int_{\Omega \times \Omega} K(x, y) f(|u(y)|, |v(y)|) |u(x)|^2 dx dy = 0 \quad (4.9)$$

e também,

$$0 \leq \epsilon \int_{\Omega \times \Omega} \Gamma(x, y) |v(y)|^\gamma |v(x)|^2 dx dy \leq \int_{\Omega \times \Omega} \Gamma(x, y) g(|u(y)|, |v(y)|) |v(x)|^2 dx dy = 0. \quad (4.10)$$

Como consequência,

$$\int_{\Omega \times \Omega} K(x, y) |u(y)|^\gamma |u(x)|^2 dx dy = \int_{\Omega \times \Omega} \Gamma(x, y) |v(y)|^\gamma |v(x)|^2 dx dy = 0. \quad (4.11)$$

Desde que, por hipótese,  $K, \Gamma \in \mathcal{K}$ , temos que  $u = v = 0$ . Portanto,  $(\bar{u}_n)$  e  $(\bar{v}_n)$  convergem para 0 em  $L^2(\Omega)$ . Considerando  $\varphi = \bar{u}_n$  e  $\eta = \bar{v}_n$  como funções de teste, obtemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_n|^2 dx + \int_{\Omega} \phi_{(u_n, v_n)} \bar{u}_n^2 dx = t_n \int_{\Omega} (a \bar{u}_n + b \bar{v}_n) \bar{u}_n dx \quad (4.12)$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{v}_n|^2 dx + \int_{\Omega} \psi_{(u_n, v_n)} \bar{v}_n^2 dx = t_n \int_{\Omega} (c \bar{u}_n + d \bar{v}_n) \bar{v}_n dx. \quad (4.13)$$

Como  $(t_n)$  é limitada por  $\Lambda$ , temos

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_n|^2 dx \leq \Lambda \left[ a \int_{\Omega} |\bar{u}_n|^2 dx + b \int_{\Omega} |\bar{u}_n \bar{v}_n| dx \right] \quad (4.14)$$

assim como,

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{v}_n|^2 dx \leq \Lambda \left[ c \int_{\Omega} |\bar{u}_n \bar{v}_n| dx + d \int_{\Omega} |\bar{v}_n|^2 dx \right]. \quad (4.15)$$

Consequentemente,  $\|W_n\|_H \rightarrow 0$ . Isto contradiz o fato que  $\|W_n\|_H = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e à **Afirmção** fica provada.

Desde que  $(U_n)$  é limitada em  $H$ , argumentos de iteração implicam que  $(U_n)$  é limitada em  $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ , completando assim a demonstração do lema. ■

### Conclusão da demonstração do Lema 4.1 e demonstração do Teorema 0.3

Pelo **Lema 4.4**, para todo  $t > t_1$ , temos que  $(\{t\} \times E) \cap \mathcal{C}^+ \neq \emptyset$ , isto é,  $\mathcal{C}^+$  cruza o hiperplano  $\{t\} \times E$ . De fato, caso contrário, existe  $\Lambda > t_1$  tal que  $\mathcal{C}^+$  não cruza o hiperplano  $\{\Lambda\} \times E$ , assim, pelo **Lema 4.4**, existe  $R > 0$  tal que  $(t, U) \in \mathcal{C}^+$ ,  $t \in [0, \Lambda]$  e  $\|U\| \leq R$ . Portanto,  $\mathcal{C}^+$  seria limitada, o que claramente contradiz o **Lema 4.3**.

Para finalizar a prova do **Lema 4.1**, devemos mostrar que não existe solução para  $(P_4)$  quando  $t \leq t_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}$ . De fato, argumentando por contradição, se  $(t, U)$  é uma solução de  $(P_4)$ , com  $t \leq t_1$  e  $U = (u, v) > 0$ , temos que

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_{(u,v)} u = t[au + \frac{b}{\sigma}(\sigma v)], & \text{em } \Omega \\ -\Delta(\sigma v) + \psi_{(u,v)}(\sigma v) = t[(c\sigma)u + d(\sigma v)], & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

para todo  $\sigma > 0$ . Em particular, se  $\sigma^2 = \frac{b}{c}$ , podemos fixar  $w = \sigma v$  e observamos que  $\hat{b} := \frac{b}{\sigma} = c\sigma$ . Sendo assim,  $\hat{U} = (u, w) \in E$  é uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_{(u,v)} u = t[au + \hat{b}w], & \text{em } \Omega \\ -\Delta w + \psi_{(u,v)} w = t[\hat{b}u + dw], & \text{em } \Omega \\ u, w > 0, & \text{em } \Omega \\ u = w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Desde que  $A_0 = \begin{pmatrix} a & \hat{b} \\ \hat{b} & d \end{pmatrix}$  é uma matriz simétrica, sabemos que

$$\mu|z|^2 \leq \langle A_0 z, z \rangle \leq \lambda|z|^2, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}^2, \quad (4.16)$$

onde  $\mu$  e  $\lambda$  são autovalores da matriz  $A$  onde  $\mu < \lambda$  e  $\lambda > 0$ .

Por outro lado, observamos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\langle tA_0 \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \right\rangle dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \phi_{(u,v)}(x)u^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \psi_{(u,v)}(x)w^2 dx \\ &> \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla w|^2) dx \end{aligned}$$

e, consequentemente, por (4.16)

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla w|^2) dx < t\lambda \int_{\Omega} (|u|^2 + |w|^2) dx. \quad (4.17)$$

Por outro lado, pela **Desigualdade de Poincaré**

$$\lambda_1 \int_{\Omega} (|u|^2 + |w|^2) dx < t\lambda \int_{\Omega} (|u|^2 + |w|^2) dx. \quad (4.18)$$

Portanto,  $t > \frac{\lambda_1}{\lambda}$  que é uma contradição. Concluindo assim a demonstração do lema.

Em relação ao **Teorema 0.3**, pelo **Lema 4.1**, é claro que  $(P_1)$  tem solução se, e somente se,  $t_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} < 1$ . Portanto,  $(P_1)$  tem solução se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ . Provando assim o teorema.

## 4.2 Demonstração do Teorema 0.4

Recordemos o enunciado deste teorema:

**Considere  $K \in \mathcal{K}$  e  $(g_0) - (g_2)$  válidos. Seja uma matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que: existe um maior autovalor positivo de  $A$  que é o único autovalor positivo  $\lambda$  com um autovetor  $z > 0$  e  $\dim N(\lambda I - A) = 1$ . Então, temos que o sistema**

$$\begin{cases} -\Delta u = (a - \int_{\Omega} K(x, y) f(u, v) dy) u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = (d - \int_{\Omega} K(x, y) f(u, v) dy) v + cu, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_3)$$

tem solução para todo  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

Assim como para demonstrar o **Teorema 0.3**, para demonstrar o **Teorema 0.4** via **Teoria de Bifurcação**, é necessário introduzir um parâmetro  $t \in \mathbb{R}$  no problema  $(P_3)$  e provar um lema auxiliar, que enunciamos abaixo:

**Lema 4.5.** *Suponha que  $K \in \mathcal{K}$  e  $(g_0) - (g_2)$  válidos. Seja  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  uma matriz tal que: existe um maior autovalor positivo de  $A$  que é o único autovalor positivo  $\lambda$  com um autovetor  $z > 0$  e  $\dim N(\lambda I - A) = 1$ . Para  $t \in \mathbb{R}$ , temos que o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta U + \phi(x)U = tAU, & \text{in } \Omega \\ U > 0, & \text{in } \Omega \\ U = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (P_5)$$

*tem solução para todo  $t > t_1$ , onde  $t_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}$  e  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .*

Para provar o lema acima, é necessário notar que: usando as definições de  $S$  e  $G$ , definidos no **Capítulo 3**, é fácil checar que  $(t, U) \in \mathbb{R} \times E$  é solução de  $(P_5)$  se, e somente se,

$$U = F(t, U) := tS(U) + G(U).$$

No que segue, aplicaremos novamente o resultado devido à Rabinowitz em [18], para provar o **Lema 4.5**.

Mais uma vez, pelo estudo feito na **Subseção 3.2.1**, uma autofunção  $U_1$  associada ao autovalor  $t_1 = \lambda_1/\lambda$  de um problema linear pode ser escolhida positiva. Além disso,  $t_1^{-1}$  é um autovalor de multiplicidade 1 para  $S$ . Pelo **Teorema de Bifurcação Global** (**Teorema 4.1**), existe uma componente conexa fechada  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{t_1}$  de soluções de  $(P_5)$ , que verifica (i) ou (ii), do **Teorema 4.1**.

Com a finalidade de alcançar nossos objetivos, o primeiro passo será demonstrar à **Afirmção** abaixo:

**Afirmção 4.3.** (ii) não pode ocorrer.

Para mostrar esta afirmação, necessitamos do lema que se seguem:

**Lema 4.6.** *Existe  $\delta > 0$  tal que, se  $(t, U) \in \mathcal{C}$  com  $|t - t_1| + \|U\| < \delta$  e  $U \neq 0$ , então  $U$  tem sinal definido, que é,*

$$U(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{ou} \quad U(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

que em verdade, é o mesmo **Lema 4.2**, porém agora relacionado ao problema  $(P_5)$ . A demonstração é absolutamente análoga com modificações triviais.

Um fato trivial no caso da seção anterior, é a decomposição de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ , devido a simples utilização dos **Princípios de Máximo**. Aqui, para garantir tal decomposição, uma atenção especial é necessária

Com a finalidade de alcançar esta decomposição, é necessário introduzir um operador auxiliar, cujas propriedades são semelhantes às do operador de Laplace.

### Operador auxiliar

Fixando  $\psi \in L^\infty(\bar{\Omega})$ , o operador solução  $S_L : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  tal que  $S_L(v) = u$ , onde  $u$  é a única solução fraca para o problema linear

$$\begin{cases} L(u) = v, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.19)$$

onde  $L(u) = -\Delta u + \psi(x)u$ . Usando os argumentos e resultados detalhados no artigo de Hess e Kato [16], este operador solução é compacto e autoadjunto, então, pela **Teoria Espectral**, existe uma base ortonormal completa  $\{\phi_n\}$  de  $L^2(\Omega)$  e uma correspondente sequência de números reais positivos  $\{\lambda_n\}$  com  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  tal que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

e

$$\begin{cases} L(\phi_n) = \lambda_n \phi_n, & \text{em } \Omega \\ \phi_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, usando **Multiplicadores de Lagrange**, é possível provar a seguinte caracterização para  $\lambda_1$

$$\lambda_1 = \inf_{v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} [|\nabla v|^2 + \psi(x)v^2] dx}{\int_{\Omega} v^2 dx}. \quad (4.20)$$

Ainda é possível demonstrar que  $\lambda_1$  é um autovalor simples e que uma correspondente autofunção  $\phi_1$  pode ser escolhida positiva em  $\Omega$ .

Note que, o **Lema 3.1** é válido, substituindo  $-\Delta U$  por  $LU$  e  $\sigma(-\Delta)$  por  $\sigma(L)$ , onde  $LU = (L(u), L(v))$ .

Com as notações e propriedades introduzida acima, temos a seguinte versão do **Lema de Hopf** em formato matricial:

**Lema 4.7.** *Se o problema*

$$\begin{cases} LU = AU, & \text{em } \Omega \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

*tem solução  $U$  com  $U \geq 0$  e  $U \neq 0$ , então  $\sigma(L) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$ . Ademais,  $U > 0$  em  $\Omega$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta} < 0$  sobre  $\partial\Omega$ .*

**Demonstração.**

Usando os mesmos argumentos do **Lema 3.1**, concluímos que  $\sigma(L) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$ . Além disso, como existe um maior autovalor positivo de  $A$  que é o único autovalor positivo  $\lambda$  associado a um autovetor  $z > 0$  e  $\dim N(\lambda I - A) = 1$ , temos por argumento análogo ao do **Corolário 3.1** que  $\lambda = \lambda_1$  and  $U = \phi_1 w$ , onde  $w$  é múltiplo de  $z$ . Além disso, temos que  $U > 0$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta} < 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Completando assim a demonstração. ■

Podemos agora provar o lema:

**Lema 4.8.** *Considere os conjuntos*

$$\mathcal{C}^+ = \{(t, U) \in \mathcal{C} : U(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega\} \cup \{(t_1, 0)\}$$

e

$$\mathcal{C}^- = \{(t, U) \in \mathcal{C} : U(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega\} \cup \{(t_1, 0)\}.$$

Então,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-. \quad (4.21)$$

Além disso, observamos que  $\mathcal{C}^- = \{(t, U) \in \mathcal{C} : (t, -U) \in \mathcal{C}^+\}$ ,  $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{(t_1, 0)\}$  e  $\mathcal{C}^+$  é ilimitado se, e somente se,  $\mathcal{C}^-$  é também ilimitado.

### Demonstração.

Claramente, a prova fica completa, mostrando que  $\mathcal{C}^+$  é fechado e aberto. Para  $(t, U) \in \overline{\mathcal{C}^+}$ , temos  $U \neq 0$  e  $U \geq 0$ , onde  $U = (u, v)$ . Como,

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_{(u,v)}u = au + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v + \phi_{(u,v)}v = cu + dv, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.22)$$

obtemos,

$$\begin{cases} LU = tAU, & \text{em } \Omega \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.23)$$

para  $L(w) := -\Delta w + \phi(x)w$ , onde  $\phi(x) = \phi_{(u,v)}(x)$ . Portanto, pelo **Lema 4.7**, obtemos  $U > 0$  em  $\Omega$  e, consequentemente,  $\mathcal{C}^+$  é fechado. Agora, para  $(t, U) \in \mathcal{C}^+$ , temos pelo **Lema 4.7**, que  $U > 0$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta} < 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Desta forma,  $(t, U) \in \text{int}\mathcal{C}^+$ . Concluindo assim a prova do lema. ■

Seguindo os mesmos passos da seção anterior, devemos provar:

**Lema 4.9.**  $\mathcal{C}^+$  é ilimitado.

Porém, a demonstração é absolutamente análoga, com algumas modificações triviais, à demonstração do **Lema 4.3**, por isso não vamos apresentar tal demonstração. O mesmo pode ser dito da estimativa a priori:

**Lema 4.10. (Estimativa a priori)** Para todo  $\Lambda > 0$ , existe  $R > 0$  tal que, se  $(t, U) \in \mathcal{C}^+$  e  $t \in [0, \Lambda]$ , então  $\|U\| \leq R$ .

### Conclusão da demonstração do Lema 4.5 e demonstração do Teorema 0.4

Pelo **Lema 4.10**, par todo  $t > t_1$ , temos que  $(\{t\} \times E) \cap \mathcal{C}^+ \neq \emptyset$ , isto é,  $\mathcal{C}^+$  cruza o hiperplano  $\{t\} \times E$ . De fato, caso contrário, existe  $\Lambda > t_1$  tal que  $\mathcal{C}^+$  não cruza o hiperplano  $\{\Lambda\} \times E$ , desta forma, pelo **Lema 4.10**, existe  $R > 0$  tal que  $(t, U) \in \mathcal{C}^+$ ,  $t \in [0, \Lambda]$  e  $\|U\| \leq R$ . Portanto,  $\mathcal{C}^+$  seria limitada, o que claramente contradiz o **Lema 4.9**.

Em relação ao **Teorema 0.4**, pelo **Lema 4.5**, é claro que  $(P_3)$  tem solução se  $t_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} < 1$ . Sendo assim,  $(P_3)$  tem solução se  $\lambda > \lambda_1$ . Concluindo a demonstração do teorema.

# Capítulo 5

## Uma versão do Teorema 0.3 em $\mathbb{R}^N$

Neste capítulo, como foi destacado na introdução, estaremos interessados em responder um possível questionamento relacionado a existência e não-existência de solução para alguma versão do sistema  $(Q)$  em  $\mathbb{R}^N$ .

Aqui, faremos, precisamente, uma versão do **Teorema 0.3** em  $\mathbb{R}^N$ , utilizando vários argumentos e hipóteses utilizadas nos **Capítulos 1 à 4**. Estaremos provando um resultados de existência e não-existência de solução para o sistema de equações elípticas

$$\begin{cases} -\Delta u = \left( af(x) - \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y)h(u, v)dy \right) u + bf(x)v, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v = \left( df(x) - \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, y)g(u, v)dy \right) v + cf(x)u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u = \lim_{|x| \rightarrow \infty} v = 0, \quad u, v > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (R)$$

onde  $N \geq 3$ ,  $\gamma \in [1, 2)$  e  $K, \Gamma, f, g$  e  $h$  verificam determinadas hipóteses.

Antes de enunciarmos o teorema que provaremos, destaquemos as hipóteses a serem consideradas:  $K, \Gamma : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua que verifica as condições abaixo

$(K_0)$  Existe  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$0 \leq K(x, y) \leq f(x)P(y)^{\gamma/2}Q(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,$$

onde  $Q : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável que verifica

$$(Q_1) \quad M = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |Q(x, \cdot)|_{\frac{2}{2-\gamma}} < +\infty.$$

(Q<sub>2</sub>) Dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $R, L > 0$  tais que

$$\int_{|y| \leq L} Q(x, y)^{2/2-\gamma} dy < \varepsilon, \quad \forall x \in B_R^c(0).$$

(K<sub>1</sub>) Se  $w$  é mensurável e  $\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} K(x, y) |w(y)|^\gamma |w(x)|^2 dx dy = 0$ , então  $w = 0$  q.s. em  $\mathbb{R}^N$ .

Relacionada a função  $f$ , assumimos que

(f<sub>1</sub>)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua tal que  $0 < f(x) \leq P(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ .

(f<sub>2</sub>) Existe  $q > N/2$  tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f|_{L^q(B_2(x))} < +\infty.$$

Em relação as funções  $h$  e  $g$ , temos

(g<sub>1</sub>)  $h, g : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  são funções contínuas.

(g<sub>2</sub>)  $h(\xi t, \xi s) = \xi^\gamma h(t, s)$  e  $g(\xi t, \xi s) = \xi^\gamma g(t, s)$ , para todo  $t, s \in [0, \infty)$  e  $\xi > 0$ .

(g<sub>3</sub>)  $|h(t, s)|, |g(t, s)| \leq |t|^\gamma + |s|^\gamma$  e, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $h(t, s) \geq \epsilon |t|^\gamma$  e  $g(t, s) \geq \epsilon |s|^\gamma$ , para todo  $t, s \in [0, \infty)$ ,

**Teorema 5.1.** *Assumindo  $(K_0) - (K_1)$ ,  $(f_1) - (f_2)$  e  $(g_1) - (g_3)$ . Seja uma matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  com  $a, b, c, d > 0$  e  $\lambda > 0$  seu maior autovalor. Então, temos que o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta u = (af(x) - \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y)h(u, v)dy)u + bf(x)v, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v = (df(x) - \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, y)g(u, v)dy)v + cf(x)u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u = \lim_{|x| \rightarrow \infty} v = 0, \quad u, v > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (R)$$

*tem solução se, e somente se,  $\lambda > \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x)u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (AP)$$

Com o objetivo de provar tal teorema, baseado no estudo dos capítulos anteriores, fixaremos, abaixo, algumas notações envolvendo os espaços de Banach envolvidos.

- $\mathcal{D} = D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ .
- $\mathcal{P} = L_P^2(\mathbb{R}^N) \times L_P^2(\mathbb{R}^N)$ .
- $\mathcal{L} = L^\infty(\mathbb{R}^N) \times L^\infty(\mathbb{R}^N)$ .
- $\mathcal{E} = E \times E$ , onde  $E = \{u \in C(\mathbb{R}^N); \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0\}$ .
- $\mathcal{E}_0 = E_0 \times E_0$ , onde  $E_0 = \{u \in C^1(\mathbb{R}^N); \sup_{x \in \mathbb{R}^N} [|x|^{N-2}u(x)] < \infty\}$ .

As normas envolvidas em cada espaço acima são as usuais, sendo as normas de  $E$  e  $E_0$  as mesmas consideradas no **Capítulo 1**. E, destacamos que  $U \in \mathcal{D}$  sempre será denotado por  $U = (u, v)$  ou na forma de matriz coluna  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , para  $u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ , com norma dada por  $\|U\|_{\mathcal{D}} = \|u\|_{1,2} + \|v\|_{1,2}$ . Analogamente, temos esta mesma observação para os espaços  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}_0$ .

Observemos que, como a imersão  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_P^2(\mathbb{R}^N)$  é compacta, temos que a imersão  $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{P}$  também é compacta.

## 5.1 O termo não-local e a formulação matricial do problema

Inicialmente, definamos os operadores  $\phi, \psi : L_P^2(\mathbb{R}^N) \times L_P^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^N)$  dados por  $\phi(u, v) = \phi_{(u,v)}$  e  $\psi(u, v) = \psi_{(u,v)}$ , onde

$$\phi_{(u,v)}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) h(|u(y)|, |v(y)|) dy$$

e

$$\psi_{(u,v)}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, y) g(|u(y)|, |v(y)|) dy.$$

Estes operadores estão bem definidos, em virtude de  $(K_0) - (K_1)$  e  $(g_1) - (g_3)$  serem satisfeitas.

Usando as definições de  $\phi$  e  $\psi$ , vemos que  $U = (u, v) \in \mathcal{D}$  é solução de  $(R)$  se, e somente se, é uma solução positiva do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_{(u,v)}(x)u = af(x)u + bf(x)v, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + \psi_{(u,v)}(x)v = cf(x)u + df(x)v, & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (EP)$$

ou, equivalentemente, em forma matricial

$$-\Delta U + \Phi_U(x) = f(x)AU, \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (EP2)$$

onde, estamos fixando:

$$\Phi_U(x) := \begin{pmatrix} u\phi_{(u,v)}(x) \\ v\psi_{(u,v)}(x) \end{pmatrix}.$$

O lema a seguir, mostra algumas importantes propriedades dos operadores  $\phi$  e  $\psi$ , tais propriedades serão essenciais para referências futuras. A demonstração é absolutamente análoga a prova do **Lema 1.1**, por isto não demonstraremos.

**Lema 5.1.** *O operador  $\phi$  satisfaz as seguintes propriedades:*

$$(\phi_1) \quad \phi_{(tu,tv)} = t^\gamma \phi_{(u,v)}, \quad \forall (u, t) \in E \times [0, +\infty);$$

$$(\phi_2)$$

$$|\phi_{(u,v)}(x)| \leq MP(x)\|U\|_{\mathcal{P}} \quad \forall (U, x) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}^N \quad e \quad |\phi_u(x)| \leq MP(x)\|U\|_{\infty}^\gamma \quad \forall (U, x) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^N;$$

$$(\phi_3) \quad \text{Para todo } U = (u, v) \in \mathcal{P},$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\phi_{(u,v)}(x)}{f(x)} = 0.$$

$$(\phi_4)$$

$$|\phi_{(u,v)}|_1 \leq M|P|_1\|U\|_{\mathcal{P}}^\gamma \quad \forall U \in \mathcal{P} \quad e \quad |\phi_{(u,v)}|_1 \leq M|P|_1\|U\|_{\infty}^\gamma \quad \forall U \in \mathcal{E}.$$

$$(\phi_5) \quad \phi : \mathcal{E} \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^N) \text{ é contínua, isto é,}$$

$$U_n \rightarrow U \quad \text{em } \mathcal{E} \implies \phi_{(u_n, v_n)} \rightarrow \phi_{(u, v)} \quad \text{em } L^1(\mathbb{R}^N).$$

( $\phi_6$ ) Seja  $(U_n) \subset \mathcal{P}$  uma sequência e  $U \in \mathcal{E}$  tal que  $U_n(x) \rightarrow U(x)$  q.s. em  $\mathbb{R}^N$ . Então,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \phi_{(u_n, v_n)}(x) \geq \phi_{(u, v)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

( $\phi_7$ ) Seja  $(U_n) \subset \mathcal{E}$  uma sequência e  $U \in \mathcal{E}$  tal que  $U_n \rightarrow U$  em  $\mathcal{E}$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|\phi_{(u_n, v_n)}(x) - \phi_{(u, v)}(x)| \leq \epsilon P(x), \quad \forall n \geq n_0 \quad e \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Apesar de termos usado apenas  $\phi$  no lema acima, as propriedades dadas por tal lema também são válidas para  $\psi$ .

## 5.2 Alguns resultados técnicos envolvendo o sistema homogêneo e o parâmetro $t$ no problema homogêneo

Os resultados técnicos de que precisamos para os sistemas homogêneos são simples modificações dos resultados provados na **Seção 3.2**. Aqui enunciamos, não provamos devido a sua analogia aos resultados da **Seção 3.2**, para deixamos claro como estamos utilizando estes resultados.

**Teorema 5.2.** *Suponhamos que exista uma solução  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  não nula para o sistema homogêneo*

$$\begin{cases} -\Delta U = f(x)AU, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0 \end{cases} \quad (R_1)$$

*Então  $A$  possui um autovalor real que também é um autovalor de  $(AP)$ . Mais ainda:*

*i) se  $\lambda_j \in \sigma(AP) \cap \sigma(A)$ , sendo  $\phi_j$  autofunção de  $(AP)$  associado ao autovalor  $\lambda_j$ , temos que  $z = \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)u\phi_j dx \\ \int_{\mathbb{R}^N} f(x)v\phi_j dx \end{pmatrix}$  é autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_j$ .*

- ii) se  $\sigma(AP) \cap \sigma(A) = \{\lambda_j\}$  e a  $\dim N(A - \lambda_j I) = 1$ , então toda solução de  $(R_1)$  é da forma  $U = \phi_j z$ , onde  $z$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_j$ . Ademais, o subespaço  $N_A = \{U \in \mathcal{E}; U \text{ é solução do sistema } (R_1)\}$  tem a mesma dimensão do autoespaço associado a  $\lambda_j$  como autovalor de  $(AP)$ .
- iii) se  $\sigma(AP) \cap \sigma(A) = \{\lambda_j, \lambda_m\}$ ,  $m \neq j$ , então toda solução de  $(R_1)$  é da forma  $U = \phi_j z + \phi_m w$ , onde  $z$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_j$  e  $w$  é um autovetor de  $A$  associado à  $\lambda_m$ . Neste caso,  $\dim N_A$  é a soma da dimensão do autoespaço associado à  $\lambda_j$  como autovetor de  $(AP)$  e dimensão do autoespaço associado à  $\lambda_m$  como autovetor de  $(AP)$ .

Um segundo lema, cuja demonstração é análoga a prova do **Lema 3.2**, para o caso de solução não-nula e não-negativa

**Lema 5.2.** *Supondo que existe uma solução não-trivial e não-negativa  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  do sistema homogêneo*

$$\begin{cases} -\Delta U = f(x)AU, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0 \end{cases} \quad (R_1)$$

*Então,  $A$  tem  $\lambda_1$  como um de seus autovalores, que tem um autovetor associado com coordenadas positivas.*

Assim como fizemos para demonstrar os **Teoremas 0.3** e **0.4**, é necessário a utilização de um parâmetro  $t$  no problema homogêneo. Os comentários a serem feitos para utilização deste parâmetro, são exatamente os mesmos da **Subseção 3.2.1**, com modificações triviais.

### 5.3 Operadores de solução

Fixando  $f \in C(\mathbb{R}^N)$  com  $0 < f(x) \leq P(x)$ . Então, para cada  $V \in \mathcal{P}$ , a imersão compacta  $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{P}$  juntamente com o **Teorema da Representação de Riesz**, temos

que existe uma única solução  $U \in \mathcal{D}$  do problema

$$\begin{cases} -\Delta U = f(x)AV, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} U(x) = 0. \end{cases} \quad (WLP)_V$$

Desta forma, podemos definir um *operador solução*  $S : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  tal que  $S(V) = U$ , onde  $U$  é a única solução do problema linear com peso  $(WLP)_V$ . Usando argumentos bem discutidos em capítulos anteriores,  $S$  é um operador autoadjunto e compacto.

Desde que  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ , temos que  $S : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  está bem definido e trata-se de um operador linear compacto. A demonstração deste fato é absolutamente análoga ao que foi feito na **Seção 1.3**, que tratava do caso de uma só equação.

Para cada  $V \in \mathcal{E}$ , é possível provar, através de argumentos análogos aos da **Subseção 1.3.1** e das propriedades demonstradas no **Lema 1.4**, que existe único  $U \in \mathcal{E}$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta U + \Phi_U(x) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = 0. \end{cases}$$

Daí, fica bem definido o operador  $G : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , o qual é compacto. Além disso, temos que

$$\|G(U)\|_{\mathcal{E}} \leq C\|U\|_{\mathcal{E}}^{\gamma+1}, \quad \forall U \in \mathcal{E}$$

donde,  $G(U) = o(\|U\|_{\mathcal{E}})$ .

## 5.4 Demonstração do Teorema 5.1

Com o objetivo de provarmos o **Teorema 5.1**, demonstraremos o lema abaixo. Com a demonstração deste lema, o teorema segue facilmente.

**Lema 5.3.** *Assumindo  $(K_0) - (K_1)$ ,  $(f_1) - (f_2)$  e  $(g_1) - (g_3)$ . Seja  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  uma*

matriz com  $a, b, c, d > 0$  e  $\lambda > 0$  seu maior autovalor. Para  $t \in \mathbb{R}$ , temos que o sistema

$$\begin{cases} -\Delta U + \Phi_U(x) = tf(x)AU, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ U > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = 0. \end{cases} \quad (R_2)$$

tem solução se, e somente se,  $t > t_1$ , onde  $t_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}$  e  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema (AP).

Para provar o lema acima, é necessário notar que: usando as definições de  $S$  e  $G$ , apresentadas neste capítulo, é fácil checar que  $(t, U) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}$  soluciona  $(P_4)$  se, e somente se,

$$U = F(t, U) := tS(U) + G(U).$$

Pelo estudo feito na **Subseção 3.2.1**, uma autofunção  $U_1$  associada ao autovalor  $t_1 = \lambda_1/\lambda$  do problema linear pode ser escolhida positiva. Além disso,  $t_1^{-1}$  é um autovalor de multiplicidade 1 para  $S$ . Pelo **Teorema de Bifurcação Global** (ver Teorema 4.1), existe uma componente conexa fechada  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{t_1}$  de soluções para  $(R_2)$ , que satisfazem (i) ou (ii).

É muito importante, mais uma vez, destacarmos que o teorema que nos propomos a demonstrar é uma conexão entre os teoremas apresentados nos capítulos anteriores. Sendo assim, as demonstrações que fazemos neste capítulo, são entrelaçamentos das demonstrações feitas nos capítulos anteriores.

Com a finalidade de alcançar nossos objetivos, o primeiro passo será demonstrar à **Afirmção** abaixo:

**Afirmção 5.1.** (ii) não pode ocorrer.

Para mostrar esta afirmação, necessitamos dos lemas que se seguem:

**Lema 5.4.** Existe  $\delta > 0$  tal que, se  $(t, U) \in \mathcal{C}$  com  $|t - t_1| + \|U\|_{\mathcal{E}} < \delta$  e  $U \neq 0$ , então  $U$  tem sinal definido, que é,

$$U(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{ou} \quad U(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

### Demonstração.

Assim como na demonstração do **Lema 2.1**, é suficiente provar que quaisquer duas seqüências  $(U_n) \subset \mathcal{E}$  e  $t_n \rightarrow t_1$  com

$$U_n \neq 0, \quad \|U_n\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad U_n = F(t_n, U_n) = t_n S(U_n) + G(U_n),$$

$U_n$  tem sinal definido para  $n$  suficientemente grande.

Definindo  $W_n = U_n / \|U_n\|_{\mathcal{E}}$ , onde  $U_n = (u_n, v_n)$  e  $W_n = (w_n^1, w_n^2)$ , temos que

$$W_n = t_n S(W_n) + \frac{G(U_n)}{\|U_n\|_{\mathcal{E}}} = t_n S(W_n) + o_n(1).$$

Pela compacidade do operador  $S$ , podemos assumir que  $(S(W_n))$  é convergente. Então,  $W_n \rightarrow W$  em  $\mathcal{E}$  para algum  $W \in \mathcal{E}$  com  $\|W\|_{\mathcal{E}} = 1$ . Consequentemente,

$$\begin{cases} -\Delta U = t_1 f(x)AU, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0 \end{cases}$$

Uma vez que  $W \neq 0$ , temos, pelos **Lemas 3.1** e **3.2**, que

$$W(x) > 0 \text{ ou } W(x) < 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo, sem perda de generalidade,  $W = (w^1, w^2) > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ .

**Afirmção 5.2.**  $W_n > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ , para  $n$  suficientemente grande.

De fato, pelo **Lema 1.3**, temos que existem  $\sigma, R > 0$  tais que

$$|x|^{N-2}w^1(x), |x|^{N-2}w^2(x) > \sigma, \text{ para } |x| \geq R. \quad (5.1)$$

Sabemos também que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|t_n - t_1| + |w^1 - w_n^1| < \varepsilon, \text{ para } n \geq n_0 \quad (5.2)$$

e

$$|\phi_{(u_n, v_n)}|, |\psi_{(u_n, v_n)}| < \varepsilon P(x), \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^N. \quad (5.3)$$

Por outro lado, definindo  $\bar{w}_n^1 = w^1 - w_n^1$  e  $\bar{w}_n^2 = w^2 - w_n^2$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{w}_n^1 \nabla \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} F_n^1(x) \psi dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{w}_n^2 \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} F_n^2(x) \varphi dx, \quad \forall \varphi, \psi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

onde

$$F_n^1(x) = t_1 f(x) [a(w^1 - w_n^1) + b(w^2 - w_n^2)] + (t_1 - t_n) f(x) [a w_n^1 + b w_n^2] + \phi_{(u_n, v_n)}(x) w_n^1$$

e

$$F_n^2(x) = t_1 f(x) [c(w^1 - w_n^1) + d(w^2 - w_n^2)] + (t_1 - t_n) f(x) [c w_n^1 + d w_n^2] + \psi_{(u_n, v_n)}(x) w_n^1.$$

Observamos também que, dado  $\varepsilon > 0$ , as propriedades  $(\phi_2)$  e  $(\phi_7)$  deste capítulo, temos a existência de  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|F_n^1(x)|, |F_n^2(x)| < C\varepsilon P(x), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Sendo assim, escolhendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, a **Proposição 1.1** nos garante, para  $n$  suficientemente grande, que

$$|x|^{N-2} |\bar{w}_n^1(x)|, |x|^{N-2} |\bar{w}_n^2(x)| \leq \frac{C\varepsilon |P|_1}{\omega_N(N-2)} < \frac{\sigma}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

e assim,

$$2|x|^{N-2} |\bar{w}_n^1(x)|, 2|x|^{N-2} |\bar{w}_n^2(x)| \leq \sigma, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Consequentemente, usando a desigualdade (5.1)

$$|x|^{N-2} w_n^1(x) \geq |x|^{N-2} w^1(x) - |x|^{N-2} \bar{w}_n^1(x) \geq \frac{\sigma}{2}, \quad \text{para } |x| \geq R$$

e

$$|x|^{N-2} w_n^2(x) \geq |x|^{N-2} w^2(x) - |x|^{N-2} \bar{w}_n^2(x) \geq \frac{\sigma}{2}, \quad \text{para } |x| \geq R.$$

Portanto,  $W_n > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ , para  $n$  suficientemente grande.

Uma vez que  $U_n$  e  $W_n$  tem o mesmo sinal, temos que  $U_n$  é também positiva para  $n$  suficientemente grande. ■

Uma observação simples, a mesma que aparece nos capítulos anteriores, porém importante:

**Observação 5.1.** Se  $(t, U) \in \Sigma$ , o par  $(t, -U) \in \Sigma$ .

Um fato extremamente importante no estudo que temos feito nesta tese, é a decomposição da componente  $\mathcal{C}$  em dois conjuntos específicos. Para o problema proposto neste capítulo a decomposição encontra-se no lema abaixo. Não faremos a demonstração, pois ela é absolutamente análoga a prova do **Lema 2.2**, devido as propriedades que obtivemos para os termos não-locais deste capítulo no **Lema 5.1**.

**Lema 5.5.** *Considere os conjuntos*

$$\mathcal{C}^+ = \{(t, U) \in \mathcal{C} : U(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\} \cup \{(t_1, 0)\}$$

e

$$\mathcal{C}^- = \{(t, U) \in \mathcal{C} : U(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\} \cup \{(t_1, 0)\}.$$

Então,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-.$$

Além disso, note que  $\mathcal{C}^- = \{(t, U) \in \mathcal{C} : (t, -U) \in \mathcal{C}^+\}$ ,  $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{(t_1, 0)\}$  e  $\mathcal{C}^+$  é ilimitado se, e somente se,  $\mathcal{C}^-$  é também ilimitado.

Com os lemas acima, é possível provar de (ii) não ocorre. Ou seja, temos

**Lema 5.6.**  $\mathcal{C}^+$  é ilimitado.

A demonstração é análoga a prova do **Lema 4.3**.

Do lema anterior, a componente conexa  $\mathcal{C}^+$  é ilimitada. Agora, temos como objetivo mostra que esta componente intersecta todo hiperplano da forma  $\{t\} \times \mathcal{E}$ , para  $t > t_1$ . Para ver isto, necessitamos da seguinte estimativa a priori.

**Lema 5.7. (*Estimativa a priori*)** Para todo  $\Lambda > 0$ , existe  $R > 0$  tal que, se  $(t, U) \in \mathcal{C}^+$  e  $t \in [0, \Lambda]$ , então  $\|U\|_{\mathcal{E}} \leq R$ .

**Demonstração.**

Iniciamos a demonstração com a seguinte afirmação:

**Afirmção 5.3.** Para todo  $\Lambda > 0$ , existe  $R > 0$  tal que, se  $(t, U) \in \mathcal{C}^+$  e  $t \in [0, \Lambda]$ , temos que  $\|U\|_{\mathcal{D}} \leq R$ . Consequentemente, pela imersão de Sobolev, existe  $R_1 > 0$  tal que  $|u|_{2^*} + |v|_{2^*} \leq R_1$ , onde  $U = (u, v)$ .

De fato, se a afirmação não é válida, existe  $(U_n) \subset \mathcal{D}$  e  $(t_n) \subset [0, \Lambda]$  tal que,

$$\|U_n\|_{\mathcal{D}} \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad U_n = F(t_n, U_n).$$

Considere  $W_n = U_n / \|U_n\|_{\mathcal{D}}$ , onde  $W_n = (\bar{u}_n, \bar{v}_n)$  para  $\bar{u}_n = u_n / \|U_n\|_{\mathcal{D}}$  e  $\bar{v}_n = v_n / \|U_n\|_{\mathcal{D}}$ .

Desta forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u}_n \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{(u_n, v_n)}(x) \bar{u}_n \varphi dx = t_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x) (a \bar{u}_n + b \bar{v}_n) \varphi dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{v}_n \nabla \eta dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{(u_n, v_n)}(x) \bar{v}_n \eta dx = t_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x) (c \bar{u}_n + d \bar{v}_n) \eta dx$$

para todo  $\varphi, \eta \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ . Uma vez que  $(W_n)$  é limitada em  $\mathcal{D}$ , sem perda de generalidade, podemos supor a existência de  $W = (u, v) \in \mathcal{D}$ , tal que  $\bar{u}_n \rightharpoonup u$  e  $\bar{v}_n \rightharpoonup v$  em  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ . Consequentemente, a menos de subsequência, combinamos a imersão compacta de Sobolev  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_P^2(\mathbb{R}^N)$  e  $(\phi_6)$ , temos

$$\bar{u}_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{e} \quad \bar{v}_n(x) \rightarrow v(x) \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^N \quad (5.4)$$

como também,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \phi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)}(x) \geq \phi_{(u, v)}(x) \quad \text{e} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)}(x) \geq \psi_{(u, v)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (5.5)$$

Para  $\varphi = \frac{\bar{u}_n}{\|U\|_{\mathcal{D}}^\gamma}$  e  $\eta = \frac{\bar{v}_n}{\|U\|_{\mathcal{D}}^\gamma}$  como funções de teste, e recordando que  $t^\gamma \phi_{(u_n, v_n)} = \phi_{(tu_n, tv_n)}$  e  $t^\gamma \psi_{(u_n, v_n)} = \psi_{(tu_n, tv_n)}$ , para todo  $t > 0$ , obtemos

$$\frac{1}{\|U_n\|_{\mathcal{D}}^\gamma} \|\bar{u}_n\|_{1,2}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{u}_n^2 dx = t_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x) (a \bar{u}_n + b \bar{v}_n) \frac{\bar{u}_n}{\|U_n\|_{\mathcal{D}}^\gamma} dx \quad (5.6)$$

e

$$\frac{1}{\|U_n\|_{\mathcal{D}}^\gamma} \|\bar{v}_n\|_{1,2}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{v}_n^2 dx = t_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x) (c \bar{u}_n + d \bar{v}_n) \frac{\bar{v}_n}{\|U_n\|_{\mathcal{D}}^\gamma} dx. \quad (5.7)$$

Portanto, usando a **Desigualdade de Hölder** e (5.4) – (5.5) em (5.6) – (5.7),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{u}_n^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{v}_n^2 dx = 0. \quad (5.8)$$

Pelo **Lema de Fatou**, chegamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi_{(u,v)} u^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{u}_n^2 dx = 0 \quad (5.9)$$

assim como,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_{(u,v)} v^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)} \bar{v}_n^2 dx = 0. \quad (5.10)$$

Desta forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} K(x, y) h(|u(y)|, |v(y)|) |u(x)|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \Gamma(x, y) g(|u(y)|, |v(y)|) |v(x)|^2 dx dy = 0. \quad (5.11)$$

Logo, pela hipótese  $(g_3)$ ,

$$0 \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} K(x, y) |u(y)|^\gamma |u(x)|^2 dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} K(x, y) h(|u(y)|, |v(y)|) |u(x)|^2 dx dy = 0 \quad (5.12)$$

e também,

$$0 \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \Gamma(x, y) |v(y)|^\gamma |v(x)|^2 dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \Gamma(x, y) g(|u(y)|, |v(y)|) |v(x)|^2 dx dy = 0. \quad (5.13)$$

Como consequência,

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} K(x, y) |u(y)|^\gamma |u(x)|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \Gamma(x, y) |v(y)|^\gamma |v(x)|^2 dx dy = 0. \quad (5.14)$$

Desde que,  $K$  e  $\Gamma$  verificam  $(K_1)$ , temos  $u = v = 0$ . Portanto,  $(\bar{u}_n)$  e  $(\bar{v}_n)$  convergem para 0 em  $L_f^2(\mathbb{R}^N)$ . Considerando  $\varphi = \bar{u}_n$  e  $\eta = \bar{v}_n$  como funções de teste, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{(u_n, v_n)} \bar{u}_n^2 dx = t_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x) (a \bar{u}_n + b \bar{v}_n) \bar{u}_n dx \quad (5.15)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{v}_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{(u_n, v_n)} \bar{v}_n^2 dx = t_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x) (c \bar{u}_n + d \bar{v}_n) \bar{v}_n dx. \quad (5.16)$$

Como  $(t_n)$  é limitada por  $\Lambda$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}_n|^2 dx \leq \Lambda \left[ a \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |\bar{u}_n|^2 dx + b \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |\bar{u}_n \bar{v}_n| dx \right] \quad (5.17)$$

assim como,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{v}_n|^2 dx \leq \Lambda \left[ c \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |\bar{u}_n \bar{v}_n| dx + d \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |\bar{v}_n|^2 dx \right]. \quad (5.18)$$

Consequentemente,  $\|W_n\|_{\mathcal{D}} \rightarrow 0$ . Isto contradiz o fato que  $\|W_n\|_{\mathcal{D}} = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e à **Afirmação** fica provada.

Para concluir a estimativa a priori, utilizamos, assim como fizemos no **Lema 2.4**, o **Lema C.1** do **Apêndice C**. ■

Por fim, podemos observar que a conclusão da demonstração do **Lema 5.3** assim como a demonstração do **Teorema 5.1**, são absolutamente análogas as conclusão e demonstração do **Lema 4.1** e **Teorema 0.3**.

## Apêndices

# Apêndice A

## Uma imersão compacta envolvendo o $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

Neste apêndice, temos como principal objetivo provar que  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  está imerso compactamente em  $L_P^2(\mathbb{R}^N)$ , quando  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ . Esta imersão é peça fundamental para demonstração do **Teorema 0.3**, pois através dela foi possível utilizar à **Teoria Espectral**. Apresentamos aqui esta demonstração para deixar o trabalho mais completo. Os resultados deste apêndice foram encontrados em [13].

Antes de iniciarmos os resultados, é importante destacarmos que se  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ , então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{2-N} P(x) dx < +\infty. \quad (\text{A.1})$$

Para cumprir o nosso objetivo, iniciamos a demonstração do lema abaixo, uma **Desigualdade de Poincaré**:

**Lema A.1. (*Desigualdade de Poincaré*)** *Seja  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  e satisfazendo (A.1). Sendo  $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  tal que  $u(x) \rightarrow 0$ , quando  $|x| \rightarrow \infty$  e  $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . Para  $N \geq 3$ , existe  $C > 0$ , dependente de  $P$  e  $N$ , tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} P(x) |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (\text{A.2})$$

**Demonstração.**

Escrevendo  $(r, \omega)$  para coordenadas polares em  $\mathbb{R}^N$ , temos que

$$\begin{aligned} u(r, \omega) &= - \int_r^\infty \frac{\partial u}{\partial r}(t, \omega) dt \\ &= - \int_r^\infty t^{\frac{1-N}{2}} t^{\frac{N-1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \omega) dt. \end{aligned}$$

Pelas **Desigualdades de Cauchy-Schwartz** e de **Hölder**, temos

$$\begin{aligned} |u(r, \omega)|^2 &= \left( \int_r^\infty t^{\frac{1-N}{2}} t^{\frac{N-1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \omega) dt \right)^2 \\ &\leq \frac{r^{2-N}}{N-2} \int_r^\infty t^{N-1} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, \omega) \right|^2 dt \\ &\leq \frac{r^{2-N}}{N-2} \int_r^\infty t^{N-1} |\nabla u(t, \omega)|^2 dt. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$|u(r, \omega)|^2 \leq \frac{r^{2-N}}{N-2} \int_0^\infty t^{N-1} |\nabla u(t, \omega)|^2 dt. \quad (\text{A.3})$$

Multiplicando por  $P(x) = q(|x|)$  em ambos os lados da desigualdade e integrando sobre a esfera  $\mathbb{S}^{N-1}$ , obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} q(r) |u(r, \omega)|^2 d\sigma_\omega \leq \frac{r^{2-N}}{N-2} q(r) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx$$

ou

$$r^{N-1} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} q(r) |u(r, \omega)|^2 d\sigma_\omega \leq \frac{rq(r)}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (\text{A.4})$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} P(x) |u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{N-2} \int_0^\infty rq(r) dr \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

e o resultado segue colocando

$$C = C(N, P) := \frac{1}{N-2} \int_0^\infty rq(r) dr = \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{2-N} P(x) dx.$$

■

**Observação A.1.** De (A.3) no argumento anterior, obtemos

$$|u(r, \omega)| \leq \frac{r^{\frac{2-N}{2}}}{\sqrt{N-2}} \left( \int_0^\infty t^{N-1} |\nabla u(t, \omega)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Integrando sobre a esfera unitária em  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} |u(r, \omega)| d\sigma_\omega \leq \frac{r^{\frac{2-N}{2}}}{\sqrt{N-2}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left( \int_0^\infty t^{N-1} |\nabla u(t, \omega)|^2 dt \right)^{1/2} d\sigma_\omega.$$

Aplicando a **Desigualdade de Cauchy-Schwartz**, temos

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} |u(r, \omega)| d\sigma_\omega \leq \frac{r^{\frac{2-N}{2}}}{\sqrt{N-2}} \sqrt{N\omega_N} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

ou, dividindo por  $N\omega_N$ ,

$$\frac{1}{N\omega_N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |u(r, \omega)| d\sigma_\omega \leq \frac{r^{\frac{2-N}{2}}}{\sqrt{N(N-2)\omega_N}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Portanto, denotando por  $\bar{u}$  a média esférica de  $u$ , então se  $u$  é uma função de classe  $C^1$  que se anula no infinito e  $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ , temos que

$$|\bar{u}(x)| \leq \frac{|x|^{\frac{2-N}{2}}}{\sqrt{N(N-2)\omega_N}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \quad (\text{A.5})$$

E, ainda temos o lema:

**Lema A.2.** Seja  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  e satisfazendo (A.1), onde  $N \geq 3$ . Sendo  $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  tal que  $u(x) \rightarrow 0$ , quando  $|x| \rightarrow \infty$  e  $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . Existe uma função positiva  $\sigma$  definida sobre  $\mathbb{R}^+$ , satisfazendo  $\sigma(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , tal que para todo  $R > 0$

$$\int_{|x| \geq R} P(x) |u(x)|^2 dx \leq \sigma(R) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (\text{A.6})$$

**Demonstração.**

Seja  $\sigma(t) = \frac{1}{N-2} \int_t^\infty r q(r) dr$  para  $t \geq 0$ . Claramente,  $\sigma$  é uma função positiva, definida sobre  $\mathbb{R}^+$  e satisfazendo  $\sigma(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Por (A.4),

$$r^{N-1} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} q(r) |u(r, \omega)|^2 d\sigma_\omega \leq \frac{r q(r)}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Sendo assim,

$$\int_t^\infty \int_{\mathbb{S}^{N-1}} r^{N-1} q(r) |u(r, \omega)|^2 d\sigma_\omega dr \leq \sigma(t) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Portanto,

$$\int_{|x| \geq t} P(x)|u(x)|^2 dx \leq \sigma(t) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

e o resultado fica estabelecido. ■

Tendo em mãos os lema acima, podemos finalmente provar a imersão compacta. Enunciada através do proposição abaixo:

**Proposição A.1.** *Seja  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  e satisfazendo (A.1), onde  $N \geq 3$ . Então,  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  está imerso compactamente em  $L_P^2(\mathbb{R}^N)$ .*

**Demonstração.**

Seja  $(u_n)$  uma sequência limitada em  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ . Pelo **Lema A.2**, se  $P \in C_{rad}^+(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  e verifica (A.1), para todo  $\delta > 0$  existe  $R = R(\delta) > 0$  tal que

$$\int_{|x| \geq R} P(x)|u_n(x)|^2 dx \leq \delta$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Desta forma, existe uma sequência crescente  $(R_k)$  com  $R_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ , tal que

$$\int_{|x| \geq R_k} P(x)|u_n(x)|^2 dx \leq \frac{1}{k}$$

para todo  $n, k \in \mathbb{N}$ .

Note que,  $(u_n)$  tem uma subsequência  $(u_n^{(1)})$ , tal que  $(u_n^{(1)}|_{B_{R_1}})$  é de Cauchy em  $L^2(B_{R_1})$ . Analogamente,  $(u_n^{(1)})$  tem uma subsequência  $(u_n^{(2)})$ , tal que  $(u_n^{(2)}|_{B_{R_2}})$  é de Cauchy em  $L^2(B_{R_2})$ . Continuando desta forma, obtemos  $(u_n^{(k+1)})$  subsequência de  $(u_n^{(k)})$ , tal que  $(u_n^{(k+1)}|_{B_{R_{k+1}}})$  é de Cauchy em  $L^2(B_{R_{k+1}})$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Tomando  $v_k = u_k^{(k)}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ , temos que  $(v_k)$  é subsequência da sequência original  $(u_n)$ .

**Afirmção A.1.**  $(v_k)$  é de Cauchy em  $L_P^2(\mathbb{R}^N)$ .

De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{4}$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} P(x)|v_m - v_k|^2 dx &= \int_{B_{R_{k_0}}} P(x)|v_m - v_k|^2 dx + \int_{B_{R_{k_0}}^c} P(x)|v_m - v_k|^2 dx \\ &\leq \int_{B_{R_{k_0}}} P(x)|v_m - v_k|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

para todo  $m, k \geq k_0$ . Desde que, a sequência  $(u_n^{(k)}|_{B_{R_{k_0}}})$  é Cauchy em  $L^2(B_{R_{k_0}})$  para todo  $k \geq k_0$ , podemos encontrar  $\bar{k} \geq k_0$  tal que, se  $m, k \geq \bar{k}$ , então

$$\int_{\mathbb{R}^N} P(x)|v_m - v_k|^2 dx \leq \varepsilon.$$

Portanto, a afirmação fica provada.

O resultado segue pela completude do espaço  $L_P^2(\mathbb{R}^N)$ . ■

# Apêndice B

## Propriedades de um operador solução

Neste apêndice, temos como principal objetivo apresentar o operador solução introduzido na **Seção 1.3**, além de provar em detalhes as suas principais propriedades.

Considere uma função  $P \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . Agora, fixemos uma função  $f$ , definida em  $\mathbb{R}^N$ , tal que  $0 < f(x) \leq P(x)$  q.s.  $x \in \mathbb{R}^N$ . Para cada  $v \in L_f^2(\mathbb{R}^N)$ , temos que o funcional

$$\begin{aligned} \Psi : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto \Psi(w) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) w v dx \end{aligned}$$

está bem definido, pois, utilizando a imersão  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_P^2(\mathbb{R}^N)$  e a **Desigualdade de Hölder**, temos

$$\begin{aligned} |\Psi(w)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} f^{1/2}(x) |w| f^{1/2}(x) |v| dx \\ &\leq |w|_{2,f} |v|_{2,f} \\ &\leq C \|w\|_{1,2} < \infty. \end{aligned}$$

Desta forma, fica estabelecida a boa definição da  $\Psi$ . Além disso, fica claro que  $\Psi$  é linear e contínua. Portanto,  $\Psi \in (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))'$  e pelo **Teorema da Representação de Riesz**,

existe único  $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla w dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) v w dx$$

para todo  $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ .

Sendo assim, fica estabelecido que: para cada  $v \in L_f^2(\mathbb{R}^N)$  existe uma única solução  $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)v, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (WLP)_v$$

Então, podemos definir o *operador solução*  $S : L_f^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  tal que  $S(v) = u$ , onde  $u$  é a única solução do problema linear com peso  $(WLP)_v$ . Utilizando argumentos bem conhecidos juntamente com a imersão compacta  $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_P^2(\mathbb{R}^N)$ , temos que  $S : L_f^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L_f^2(\mathbb{R}^N)$  trata-se de um operador linear, autoadjunto, positivo e compacto.

Portanto, pela **Teoria Espectral**, existe uma base ortonormal completa  $\{u_n\}$  de  $L_f^2(\mathbb{R}^N)$  e uma sequência correspondente de números reais positivos  $(\lambda_n)$  com  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  tal que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

e

$$-\Delta u_n = \lambda_n f(x) u_n, \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

**Caracterização variacional do primeiro autovalor:** Consideremos os funcionais

$$\begin{aligned} J : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto F(u) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^2 dx \end{aligned}$$

e a variedade

$$\mathcal{M} = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N); F(u) = 1\}.$$

Pelo **Teorema dos Multiplicadores de Lagrange**, existem  $\lambda, J_\infty \in \mathbb{R}$  e  $u_0 \in \mathcal{M}$  tais que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0),$$

onde  $J(u_0) = J_\infty = \inf_{\mathcal{M}} J(u)$ . Desta forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(x) u_0 v dx, \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (\text{B.1})$$

Portanto,  $u_0$  é uma autofunção associada a  $\lambda$ , autovalor do operador  $(-\Delta, D^{1,2}(\mathbb{R}^N))$ .

Considerando  $v = u_0$  em (B.1), obtemos

$$\|u_0\|_{1,2}^2 = \lambda |u_0|_{2,f}^2.$$

Logo,

$$J_\infty = J(u_0) = \|u_0\|_{1,2}^2 = \lambda |u_0|_{2,f}^2 = \lambda,$$

donde concluimos que

$$\lambda_1 \leq J_\infty.$$

Consideremos agora  $\phi_1$  a autofunção associada a  $\lambda_1$ , primeiro autovalor do operador  $(-\Delta, D^{1,2}(\mathbb{R}^N))$ . Assim,  $\|\phi_1\|_{2,f} = 1$  e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \phi_1 \nabla v dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \phi_1 v dx, \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (\text{B.2})$$

Tomando  $v = \phi_1$ , encontramos

$$J_\infty \leq J(\phi_1) = \|\phi_1\|_{1,2}^2 = \lambda_1 \|\phi_1\|_{2,f}^2 = \lambda_1$$

de onde segue que

$$\lambda_1 = J_\infty = \min_{\mathcal{M}} J(u).$$

Portanto, temos a caracterização variacional para  $\lambda_1$ :

$$\lambda_1 = \inf_{v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x) |v|^2 dx}. \quad (\text{B.3})$$

Toda autofunção associada a  $\lambda_1$  tem sinal definido, isto é, sempre é positiva ou negativa:

De fato, se  $\varphi$  é uma autofunção associada a  $\lambda_1$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \varphi \nabla v dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \varphi v dx, \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Se  $\varphi^\pm \neq 0$ , considere  $v = \varphi^+$  para obter

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \varphi \nabla \varphi^+ dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \varphi \varphi^+ dx$$

ou ainda

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi^+|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x) |\varphi^+|^2 dx}.$$

Considerando

$$w = \frac{\varphi^+}{|\varphi^+|_{2,f}}$$

temos

$$w \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = \lambda_1.$$

Logo,  $w$  é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda_1 f(x) w, & \mathbb{R}^N \\ w \geq 0, w \neq 0, & \mathbb{R}^N \end{cases}$$

de onde segue dos princípios de máximo, encontrados no capítulo 8 de [15], que

$$w > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

ou seja,

$$\varphi > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Portanto,

$$\varphi^+ \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

O mesmo raciocínio se aplica quando  $\varphi^- \neq 0$ , mostrando que

$$\varphi^- \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi < 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Isto é um absurdo e, portanto,  $\varphi$  tem sinal definido.

**O autovalor  $\lambda_1$  é simples, ou seja, o autoespaço associado a  $\lambda_1$ , denotado por  $V_{\lambda_1}$ , tem dimensão 1:**

Sejam  $\varphi, \psi \in V_{\lambda_1} \setminus \{0\}$ . Mostraremos que  $\varphi$  e  $\psi$  são linearmente dependentes (LD).

No que segue, considere os seguintes conjuntos:

$$A := \{t \in \mathbb{R}; \varphi(x) + t\psi(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\}$$

e

$$B := \{t \in \mathbb{R}; \varphi(x) + t\psi(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\}.$$

Observe que,  $A$  e  $B$  são subconjuntos fechados de  $\mathbb{R}$  com

$$A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \mathbb{R} = A \cup B.$$

De fato,  $A \neq \emptyset$ , pois fixando  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\varphi(x_0) + t_0\psi(x_0) > 0.$$

Desde que a função,

$$w(x) = \varphi(x) + t_0\psi(x) \in V_{\lambda_1}$$

e

$$w(x_0) > 0,$$

devemos ter,

$$w(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

De maneira análoga, devemos ter  $B \neq \emptyset$ .

Sendo  $\mathbb{R}$  conexo, devemos ter  $A \cap B \neq \emptyset$ . Assim, existe  $t_* \in \mathbb{R}$  tal que

$$\varphi(x) + t_*\psi(x) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

mostrando que  $\varphi$  e  $\psi$  são LD.

**O autovalor  $\lambda_1$  é o "único" autovalor de  $(-\Delta, D^{1,2}(\mathbb{R}^N))$  que tem autofunção com sinal definido:**

De fato, seja  $\phi_1$  uma autofunção associada a  $\lambda_1$  com  $\phi_1 > 0$  em  $\mathbb{R}^N$  e seja  $\phi_n \in V_{\lambda_n}$  com  $n \geq 2$ . Sabemos da construção dos autovalores de  $(-\Delta, D^{1,2}(\mathbb{R}^N))$  que

$$(\phi_1, \phi_n)_{L_f^2(\mathbb{R}^N)} = 0 \quad ((\phi_1, \phi_n)_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = 0)$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \phi_1 \phi_n dx = 0.$$

Se  $\phi_n \geq 0$  e  $\phi_n \neq 0$  ( $\phi_n \leq 0$  e  $\phi_n \neq 0$ ), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \phi_1 \phi_n dx > 0$$

o que é uma contradição. Portanto,

- Se  $\psi \in V_{\lambda_n}$  com  $n \geq 2$ , temos  $\psi^\pm \neq 0$ .
- Se  $\psi \in V_{\lambda_n}$  e  $\psi \geq 0$  ( $\psi \leq 0$ ), então  $\lambda_n = \lambda_1$ .

# Apêndice C

## Uma estimativa na norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$

Neste Apêndice, apresentamos um resultado baseado em [6]. Este resultado foi essencial para demonstração da estimativa a priori, crucial para conclusão da prova do **Teorema 0.3**. Este resultado estabelece uma importante estimativa envolvendo a norma  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$  de uma solução de um problema elíptico. Aqui, apresentamos a prova para deixar o trabalho mais completo.

**Lema C.1.** *Seja  $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável e não-negativa, verificando*

$$[h] := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |h|_{L^q(B_2(x))} < \infty$$

*com  $q > N/2$  e  $v \in E \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  uma solução fraca do problema*

$$-\Delta v + b(x)v = H(x, v) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{C.1}$$

*onde  $b : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não-negativa e  $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua verificando*

$$|H(x, s)| \leq h(x)|s|, \quad \forall (x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

*Então, existe uma constante  $C := C(q, [h]) > 0$  tal que*

$$|v|_\infty \leq C|v|_{2^*}.$$

**Demonstração.**

Seja  $\eta \in C^1(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ , tal que

$$\eta \equiv 1 \quad \text{em} \quad B_{r_1}(x_0), \quad \eta \equiv 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_{r_2}(x_0) \quad \text{e} \quad |\nabla \eta| \leq \frac{2}{r_2 - r_1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

com  $1 \leq r_1 < r_2 \leq 2$ .

Definamos  $\psi(x) = \eta(x)^2 v(x) \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\}$ , onde  $\beta > 1$  e  $L > 0$ . É fácil ver que,

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= 2\eta v(\nabla \eta) \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\} \\ &\quad + \eta^2(\nabla v) \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\} \\ &\quad + (\beta - 1)\eta^2 v|v|^{\beta-2}(\nabla |v|)\chi_{|v|^{\beta-1} < L} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla v \nabla \psi &= |\nabla v|^2 \eta^2 \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\} \\ &\quad + 2\eta v(\nabla \eta \nabla v) \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\} \\ &\quad + (\beta - 1)\eta^2 v|v|^{\beta-2}(\nabla v \nabla |v|)\chi_{|v|^{\beta-1} < L}. \end{aligned}$$

Observe que  $\nabla |v| = \frac{v}{|v|} \nabla v$ , assim

$$(\beta - 1)\eta^2 v|v|^{\beta-2}(\nabla v \nabla |v|)\chi_{|v|^{\beta-1} < L} \geq 0.$$

Desta forma, usando  $\psi$  como função teste em (C.1),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \eta^2 \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\} dx &+ 2 \int_{\mathbb{R}^N} \eta v(\nabla \eta \nabla v) \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |v|^2 \eta^2 \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\} dx. \end{aligned}$$

Uma vez que,

$$\frac{1}{2} |\nabla v|^2 \eta^2 \leq |\nabla v|^2 \eta^2 + 2\eta v(\nabla \eta \nabla v) + 2|v|^2 |\nabla \eta|^2$$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \eta^2 \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |v|^2 \eta^2 \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\} dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 |\nabla \eta|^2 \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\} dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $L \rightarrow \infty$ , chegamos que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \eta^2 |v|^{\beta-1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |v|^{\beta+1} \eta^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\beta+1} |\nabla \eta|^2 dx.$$

Substituindo  $w = |v|^{\frac{\beta+1}{2}}$ , obtemos

$$\frac{2}{(\beta+1)^2} \int_{\mathbb{R}^N} \eta^2 |\nabla w|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x) w^2 \eta^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} w^2 |\nabla \eta|^2 dx$$

e observando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(w\eta)|^2 dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} \eta^2 |\nabla w|^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} w^2 |\nabla \eta|^2 dx,$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(w\eta)|^2 dx \leq (\beta+1)^2 \int_{\mathbb{R}^N} h(x) w^2 \eta^2 dx + 2[(\beta+1)^2 + 1] \int_{\mathbb{R}^N} w^2 |\nabla \eta|^2 dx.$$

Por desigualdade de Sobolev,

$$\begin{aligned} S \left( \int_{\mathbb{R}^N} (w\eta)^{2^*} dx \right)^{\frac{N-2}{N}} &\leq (\beta+1)^2 \|h\|_{L^q(B_{r_2}(x_0))} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |w\eta|^{2q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\quad + 2[(\beta+1)^2 + 1] \int_{\mathbb{R}^N} w^2 |\nabla \eta|^2 dx. \end{aligned}$$

onde  $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$ . Observando que  $r_2 - r_1 \leq 1$ , temos

$$\begin{aligned} S \left( \int_{B_{r_1}(x_0)} |w|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} &\leq C(\beta+1) \left( \int_{B_{r_2}(x_0)} |w|^{2q_1} dx \right)^{\frac{1}{2q_1}} \\ &\quad + C \frac{(\beta+1)}{(r_2 - r_1)} \left( \int_{B_{r_2}(x_0)} |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \frac{(\beta+1)(r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)} \left( \int_{B_{r_2}(x_0)} |w|^{2q_1} dx \right)^{\frac{1}{2q_1}} \\ &\quad + C \frac{(\beta+1)}{(r_2 - r_1)} \left( \int_{B_{r_2}(x_0)} |w|^{2q_1} dx \right)^{\frac{1}{2q_1}} \\ &\leq C \frac{(\beta+1)}{(r_2 - r_1)} \left( \int_{B_{r_2}(x_0)} |w|^{2q_1} dx \right)^{\frac{1}{2q_1}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left( \int_{B_{r_1}(x_0)} |v|^{2^* \frac{\beta+1}{2}} dx \right)^{\frac{2}{2^*(\beta+1)}} \leq \left( C \frac{\beta+1}{r_2 - r_1} \right)^{\frac{2}{\beta+1}} \left( \int_{B_{r_2}(x_0)} |v|^{q_1(\beta+1)} dx \right)^{\frac{1}{q_1(\beta+1)}}. \quad (\text{C.2})$$

Definamos  $\sigma = \frac{N}{q_1(N-2)} > 1$ . Fazendo  $\frac{\beta+1}{2} = \sigma$ , temos que  $q_1(\beta+1) = 2^*$  e

$$\left( \int_{B_{r_1}(x_0)} |v|^{2^*\sigma} dx \right)^{\frac{1}{2^*\sigma}} \leq \left( \frac{2C\sigma}{r_2 - r_1} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \left( \int_{B_{r_2}(x_0)} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}}.$$

Fazendo iteração em (C.2), tomamos  $s_m = 1 + 2^{-m}$ ,  $r_1 = s_m$ ,  $r_2 = s_{m-1}$  e sendo  $\frac{\beta+1}{2} = \sigma^m$ , temos

$$\left( \int_{B_{s_m}(x_0)} |v|^{2^*\sigma^m} dx \right)^{\frac{1}{2^*\sigma^m}} \leq (2C)^{\frac{1}{\sigma^m}} (2\sigma)^{\frac{m}{\sigma^m}} \left( \int_{B_{s_{m-1}}(x_0)} |v|^{2^*\sigma^{m-1}} dx \right)^{\frac{1}{2^*\sigma^{m-1}}},$$

e, por indução,

$$\left( \int_{B_{s_m}(x_0)} |v|^{2^*\sigma^m} dx \right)^{\frac{1}{2^*\sigma^m}} \leq (2C)^{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma^j}} (2\sigma)^{\sum_{j=1}^m \frac{j}{\sigma^j}} \left( \int_{B_{s_0}(x_0)} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}}$$

para cada  $m > 1$ . Desde que,  $s_0 = 2$  e  $s_m \rightarrow 1$ , quando  $m \rightarrow \infty$ , segue que existe uma constante  $M > 0$  tal que para toda bola  $B_2(x_0)$ , obtemos

$$\sup_{B_1(x_0)} |v(x)| \leq M \left( \int_{B_2(x_0)} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}}$$

o que conclui a demonstra o. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] W. Allegretto and P. Nistri, *On a class of nonlocal problems with applications to mathematical biology. Differential equations with applications to biology*, (Halifax, NS, 1997), 1-14, Fields Inst. Commun., **21**, Am. Math. Soc., Providence, RI (1999).
- [2] C. O. Alves, M. Delgado, M. A. S. Souto and A. Suárez, *Existence of positive solution of a nonlocal logistic population model*, Z. Angew. Math. Phys. **66** (2015), 943-953.
- [3] C. O. Alves, R. N. de Lima and M. A. S. Souto, *Existence of solution for a non-local problem in  $\mathbb{R}^N$  via bifurcation theory*, to appear Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.
- [4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer 2010.
- [5] H. Brezis and S. Kamin, *Sublinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^N$* , Manuscripta Math. **74** (1992), 87-106.
- [6] J. Chabrowski and A. Szulkin, *On the Schrödinger equation involving a critical Sobolev exponent and magnetic field*, Top. Meth. Nonlinear Anal. **25** (2005), 3-21.
- [7] S. Chen and J. Shi, *Stability and Hopf bifurcation in a diffusive logistic population model with nonlocal delay effect*, J. Differential Equations, **253**, (2012)3440-3470.
- [8] M. Chipot, *Remarks on Some Class of Nonlocal Elliptic Problems*, Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues, World Scientific, (2006) 79-102.

- [9] F. J. S. A. Corrêa, M. Delgado and A. Suárez, *Some nonlinear heterogeneous problems with nonlocal reaction term*, Advances in Differential Equations, **16**, (2011) 623-641.
- [10] F. J. S. A. Corrêa and M. A. S. Souto, *On maximum principles for cooperative elliptic systems via fixed point index*, Nonlinear Anal., **26**, (1997) 997-1006.
- [11] F. J. S. A. Corrêa and M. A. S. Souto, *Sign-definite results for solutions of a system under Neumann-Dirichlet boundary conditions*, 42º Seminário Brasileiro de Análise, (1995) 321-332.
- [12] J. Coville, *Convergence to equilibrium for positive solutions of some mutation-selection model*, arXiv:1308.647 (2013).
- [13] A. L. Edelson and A. J. Rumbos, *Linear and semilinear eigenvalue problems in  $\mathbb{R}^N$* , Comm. in Part. Diff. Equations, **18**(1-2), 215-240 (1993).
- [14] A. L. Edelson and A. J. Rumbos, *Bifurcation properties of semilinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^N$* , Diff. and Integral Equations, **6**(2), (1994) 399-410.
- [15] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [16] P. Hess and T. Kato, *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function*, Comm. in Part. Diff. Equations, **5**(10), 999-1030 (1980).
- [17] H. Leman, S. Méléard and S. Mirrahimi, *Influence of a spatial structure on the long time behavior of a competitive Lotka-Volterra type system*, arXiv:1401.1182 (2014).
- [18] P. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **7**, 487-513 (1971)
- [19] M. A. S. Souto, *A priori estimates and existence of positive solutions of nonlinear cooperative elliptic systems*, Diff. and Integral Equations, **8**(5), (1995) 1245-1258.
- [20] L. Sun, J. Shi and Y. Wang, *Existence and uniqueness of steady state solutions of a nonlocal diffusive logistic equation*, Z. Angew. Math. Phys., **64**, (2013) 1267-1278.

- [21] M. Willem, *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, (1996).