Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre divisores livres homogêneos

Mauri Pereira da Silva

João Pessoa – PB
Julho de 2015

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre divisores livres homogêneos

por

Mauri Pereira da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

João Pessoa – PB
Julho de 2015

S586a Silva, Mauri Pereira da.
Sobre divisores livres homogêneos / Mauri Pereira da Silva.- João Pessoa, 2015.
55f.
Orientador: Cleto Brasileiro Miranda Neto
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Derivações logarítmicas. 3. Módulo de Saito. 4. Divisores livres. 5. Ideal perfeito - codimensão dois.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Sobre divisores livres homogêneos

por

Mauri Pereira da Silva [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 16 de julho de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos – UFS
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista do Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é a apresentação de conceitos, exemplos e caracterizações – tanto clássicas quanto recentes – a respeito da importante e influente teoria dos chamados *divisores livres* no caso homogêneo padrão. Para esta finalidade, iniciamos com um estudo básico sobre derivações e focalizamos no módulo denominado *idealizador tangencial* de um dado polinômio homogêneo, o que geometricamente corresponde ao módulo dos campos vetoriais logarítmicos ao longo da hipersuperfície projetiva dada (o divisor é dito *livre* quando tal módulo é livre sobre o anel graduado de polinômios). Também discutiremos, em particular, resultados sobre divisores livres no plano projetivo.

Palavras-chave: Derivações logarítmicas, módulo de Saito, divisores livres, ideal perfeito de codimensão dois.

Abstract

The main goal of this dissertation is the presentation of concepts, examples and characterizations – both classical and recent – concerning the important and influential theory of the so-called *free divisors* in the standard homogeneous case. To this end, we begin with a basic study on derivations and we focus on the module dubbed *tangential idealizer* of a given homogeneous polynomial, which geometrically corresponds to the module of logarithmic vector fields along the given projective hypersurface (the divisor is said to be *free* if such module is free over the graded polynomial ring). We will also discuss, in particular, results about free divisors in the projective plane.

Keywords: Logarithmic derivations, Saito's module, free divisors, codimension two perfect ideal.

Sumário

Introdução

Neste trabalho assumiremos, desde já, que qualquer anel será sempre comutativo e possui identidade, e que todos os módulos serão finitamente gerados.

O estudo dos chamados *divisores livres* iniciou-se no começo da década de 80, através do matemático japonês Kyoji Saito, que introduziu e explorou o conceito em [23], originalmente no contexto complexo analítico. Neste mesmo artigo, Saito forneceu uma importante caracterização para divisores livres, que passou a ser reconhecida como *Critério de Saito*. A partir dai, vários outros matemáticos se dedicaram ao estudo do tema e suas aplicações nos mais diversos ramos da Matemática, tais como Geometria Algébrica, Teoria de Singularidades, Teoria de Álgebras de Lie, Combinatória Algébrica e, mais recentemente, Álgebra Comutativa.

Dentre os vários autores que se debruçaram sobre a teoria, destaca-se também Hiroaki Terao, ex-aluno de Saito. Fora da escola matemática japonesa, A. Simis [24] traduziu a Teoria de Saito para um contexto puramente algébrico. Uma questão difícil e interessante, e que requer muito ainda a ser feito, diz respeito à existência e posterior construção explícita de famílias bem estruturadas de divisores livres, principalmente os irredutíveis. Em $\mathbb{P}^2$, Simis [25] construiu uma família de divisores livres irredutíveis homogêneos de grau 6, e a batizou *família de Cayley*. Em seguida, Simis e Tohaneanu [26] mostraram em particular que, em $\mathbb{P}^2$ (sobre um corpo algebricamente fechado), não existem divisores livres irredutíveis de graus 2 e 3, sendo portanto as formas lineares os únicos tais divisores (vide Proposição 4.3). Além disso, Tohaneanu [27] caracterizou divisores livres em $\mathbb{P}^2$ em termos da existência de uma sizigia regular (vide definição na página 31) do ideal jacobiano. Miranda-Neto [16] usou divisores livres para explicitar uma família de módulos de tipo linear (módulos cujas álgebras simétrica e de Rees são isomorfas), e mais recentemente em [18], forneceu duas novas caracterizações para divisores livres, uma em termos do número mínimo de geradores de um módulo de derivações bastante peculiar (vide Teorema 5.2), e outra em termos da Teoria dos *módulos de Ulrich* (vide Teorema 5.3).

Antes de iniciarmos a descrição do conteúdo desta dissertação capítulo a capítulo, vamos recordar algumas noções preliminares importantes. Se k é um anel e A é uma

k-álgebra, define-se uma k-*derivação* de A como sendo uma aplicação $\delta : A \to A$ tal que $\delta(a+b) = \delta(a)+\delta(b)$, $\delta(ab) = a\delta(b)+b\delta(a)$ e $\delta(\lambda) = 0$, para todos $a, b \in A$ e $\lambda \in k$. O conjunto de todas as k-derivações de A, denotado por $\mathrm{Der}_k(A)$, tem uma estrutura natural de A-módulo (e também de Álgebra de Lie, que não abordaremos aqui). No caso fundamental em que $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ é um anel de polinômios sobre k, o módulo $\mathrm{Der}_k(A)$ é A-livre, a base mais simples sendo $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$, onde $\frac{\partial}{\partial x_i} : A \to A$ é a i-ésima derivação parcial usual, ou seja, dada formalmente por $\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ para cada $f \in A$. Define-se o *módulo de Saito* de $f \in A$ como sendo o A-submódulo de $\mathrm{Der}_k(A)$ dado por

$$\mathcal{T}_k(f) = \{\delta \in \mathrm{Der}_k(A) \ ; \ \delta(f) \in (f)\},$$

ou seja, trata-se do *idealizador tangencial* do ideal principal (f), de acordo com a terminologia introduzida por Miranda-Neto [17] (onde a teoria de tais módulos é apresentada em maior generalidade). Geometricamente, este módulo coleta os campos vetoriais globais que são tangentes ao longo da parte não-singular da hipersuperfície algébrica definida por f (para uma demonstração, válida não somente para hipersuperfícies, vide por exemplo [16, Proposition 1.1]). Também, costuma-se dizer que cada elemento deste módulo é um *campo vetorial logarítmico* da hipersuperfície dada. Finalmente, a definição central explorada neste trabalho: diz-se que f é um *divisor livre* quando o módulo $\mathcal{T}_k(f)$ é A-livre, necessariamente de posto igual a n (o número de indeterminadas do anel de polinômios A).

Nosso principal objetivo é introduzir, exemplificar e caracterizar divisores livres homogêneos de várias formas diferentes. Para tanto, a dissertação foi dividida em cinco capítulos, que passamos a descrever sucintamente.

O **Capítulo 1** é dedicado a alguns fatos e definições preliminares, tipicamente estudados em um curso avançado de Álgebra Comutativa. Dentre tais fatos e definições estão as noções de profundidade, dimensão homológica, o Teorema de Auslander-Buchsbaum e o Teorema de Hilbert-Burch; este último descreve a estrutura de ideais perfeitos de altura 2. Tais ferramentas algébricas serão bastante importantes para os capítulos subsequentes. Alguns resultados auxiliares mais básicos se encontram no Apêndice desta dissertação.

No **Capítulo 2**, começamos fazendo uma revisão sobre derivações e suas propriedades básicas. Em seguida, falamos brevemente sobre o módulo das diferenciais de Kähler (que é o antecessor do módulo de derivações). Por fim, definimos o chamado *idealizador tangencial* (Definição 2.3) e observamos algumas de suas propriedades básicas. Salientamos a importância do Lema 2.5, tanto do ponto de vista algébrico quanto geométrico.

No **Capítulo 3** consideramos idealizadores tangenciais de ideais principais, os quais chamamos *módulos de Saito*. Demonstramos uma série de resultados específicos sobre tal módulo, principalmente certas sequências exatas, resultado estrutural em termos de decomposição em soma direta de um módulo de sizigias conveniente com um módulo livre de posto 1, conjunto explícito de geradores e a propriedade de reflexividade. Em seguida, definimos os chamados *divisores livres* e apresentamos algumas caracterizações clássicas, dentre elas o conhecido Critério de Saito (Teorema 3.8) e o notável Teorema 3.10, segundo o qual um polinômio homogêneo suficientemente "não-degenerado" é um divisor livre se se somente se o seu ideal jacobiano é um ideal perfeito de codimensão 2 (isto é, admite um matriz de resolução de Hilbert-Burch).

O **Capítulo 4** é destinado a uma investigação de divisores livres particularmente no plano projetivo $\mathbb{P}^2$. Será dada uma caracterização para divisores livres em $\mathbb{P}^2$ em termos do Teorema 4.2, segundo o qual um polinomio homogêneo, com ideal jacobiano admitindo uma sizigia regular, é necessariamente um divisor livre. Em seguida nos concentramos em divisores livres *irredutíveis* em $\mathbb{P}^2$. Algumas famílias de exemplos explícitos são apresentadas, em especial as chamadas *sexticas de Cayley* estudadas originalmente em [25].

Finalmente, o **Capítulo 5** é dedicado a duas novas caracterizações para divisores livre, obtidas originalmente em [18]. A primeira (Teorema 5.2) é estabelecida em termos do número mínimo de geradores de um módulo de derivações conveniente, e o segundo (Teorema 5.4) caracteriza especialmente divisores livres *lineares* (no sentido de Buchweitz e Mond [9]) e faz uso da bela teoria dos módulos (ideais) de Ulrich.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos ferramentas algébricas que serão usadas no decorrer dos próximos capítulos. Alguns resultados auxiliares mais básicos encontram-se no apêndice.

1.1 Sequências regulares e profundidade

Sejam A um anel e M A-módulo. Então $x \in A$ é dito um elemento M-regular ou regular em M se $x \notin Z(M)$.

Definição 1.1. Uma sequência de elementos de A $\underline{x} = x_1, \cdots, x_n$ é dita uma *M-sequência regular* ou uma *sequência regular* em M se

(i) $M \neq \underline{x}M$

(ii) $x_i \notin Z\left(\dfrac{M}{(x_1, \cdots, x_{i-1})M}\right), \forall \in \{1, \cdots, n\}$.

Quando uma sequência satisfaz apenas a condição **(ii)**, dizemos que a mesma é uma M-sequência fraca. Uma situação interessante é quando $(A, \mathfrak{m})$ é local e $M \neq 0$. Se $\underline{x} \subset \mathfrak{m}$ então a condição **(i)** é sempre satisfeita pelo Lema de Nakayama. Se $x_1, \cdots, x_n$ é uma M-sequência, então os ideais (x_1), (x_1, x_2), $\cdots$,$(x_1, \cdots, x_n)$ formam uma cadeia ascendente própria. De fato, suponha que existe $i \in \{1, \cdots, n\}$, tal que $(x_1, \cdots, x_i) = (x_1, \cdots, x_{i+1})$. Então $x_{i+1} \in Z\left(\frac{M}{(x_1, \cdots, x_i)M}\right)$, absurdo.

Exemplo 1.1. Seja k anel e seja $A = k[x, y, z]$. Temos que $x, y(1-x), z(1-x)$ é uma M-sequência. Mas $y(1-x), z(1-x), x$ não é M-sequência, pois $\overline{z(1-x)} \cdot \overline{y} = \overline{z} \cdot \overline{y(1-x)} = \overline{0}$ em $\frac{A}{(y(1-x))}$.

Agora, tome A anel e M um A-módulo finitamente gerado. Para qualquer M-sequência $x_1, \cdots, x_n$ contida em $\mathfrak{R}_A$ (radical de Jacobson de A), temos que qualquer permutação dos x_i's também é uma M-sequência. Além disso, temos uma recíproca parcial desse fato. Para mais detalhes e uma demonstração, vide [13]. Seja $I \subset A$ um ideal. Dizemos que uma M-sequência $\underline{x} = x_1, \cdots, x_n \subset I$ é *maximal* em I se não existe $x_{n+1} \in I \setminus \{\underline{x}\}$ tal que $x_1, \cdots, x_{n+1}$ seja uma M-sequência em I. Temos que $\underline{x}$ é M-sequência maximal em I se, e somente se, $I \subset Z\left(\frac{M}{\underline{x}M}\right)$. Com efeito, suponha que $\underline{x}$ é maximal. Suponha que $x_{n+1} \in I$, tal que $x_{n+1} \notin Z\left(\frac{M}{\underline{x}M}\right)$. Então $x_1, \cdots, x_{n+1}$ é M-sequência em I, contradição. Por outro lado, suponha que $I \subset Z\left(\frac{M}{\underline{x}M}\right)$. Assim, dado $x_{n+1} \in I$, temos que $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$ não é M-sequência em I. Logo, $\underline{x}$ é M-sequência maximal em I. Uma consequência deste fato é a seguinte: se A é um anel Noetheriano, toda M-sequência $\underline{x}$ em I pode ser estendida a uma M-sequência maximal em I, pois I é finitamente gerado. Provaremos mais adiante que, se $IM \notin M$, então duas quaisquer M-sequências maximais em I possuem o mesmo comprimento[1].

Ademais, $I \subset Z(M) \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}(\frac{A}{I}, M) \neq 0$. Com efeito, $I \subset Z(M) = \bigcup P$, com $P \in \mathrm{Ass}(M)$. Pelo Lema da Esquiva, segue que $I \subset P$, para algum $P \in \mathrm{Ass}(M)$. Temos $P = 0 : m$, para algum $m \in M \backslash \{0\}$. Defina o monomorfismo $\varphi : \frac{A}{P} \longrightarrow M$, dado por $\varphi(\overline{a}) = am$. Como $I \subset P$, temos o epimorfismo $\pi : \frac{A}{I} \longrightarrow \frac{A}{P}$. Logo, $\varphi \circ \pi \in \mathrm{Hom}(\frac{A}{I}, M) \backslash \{0\}$. Portanto, $\mathrm{Hom}(\frac{A}{I}, M) \neq 0$. Reciprocamente, suponha $\mathrm{Hom}(\frac{A}{I}, M) \neq 0$. Sabe-se que $\mathrm{Hom}(\frac{A}{I}, M) \cong (0 :_M I)$. Logo, existe $m \in (0 :_M I) \backslash \{0\}$, tal que $I \in 0 : m$. Assim, $I \subset Z(M)$. Em particular,

$$x_1, \cdots, x_n \text{ é } M\text{-sequência maximal em } I \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}\left(\frac{A}{I}, \frac{M}{\underline{x}M}\right) \neq 0.$$

Na proposição a seguir continuaremos com a notação anterior.

Proposição 1.1. Sejam M e N A-módulos e $I = 0 :_A N$.

(a) Se I contém um elemento regular em M, então $\mathrm{Hom}(N, M) = 0$.

(b) Se M e N são finitamente gerados e $\mathrm{Hom}(N, M) = 0$, então I contém um elemento regular em M.

Para uma demonstração, vide [8].

Lema 1.2. Sejam A anel, M e N A-módulos e $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n$ M-sequência fraca com elementos em $\mathrm{Ann}(N) = 0 :_A N$. Então

$$\mathrm{Hom}\left(N, \frac{M}{\underline{x}M}\right) \cong \mathrm{Ext}_A^n(N, M).$$

[1]O comprimento de uma M-sequência é definido naturalmente como sendo o número de elementos da sequência.

Demonstração: O processo se dará por indução sobre n. Para $n = 0$, segue que $\operatorname{Ext}^0_A(N, M) \cong \operatorname{Hom}(N, M)$. Para $n \geq 1$, tome $\underline{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$ M-sequência fraca. Suponha que $\operatorname{Hom}\left(N, \frac{M}{\underline{x}'M}\right) \cong \operatorname{Ext}^{n-1}_A(N, M)$. Como $x_n \notin Z\left(\frac{M}{\underline{x}'M}\right)$ e $x_n \in 0 :_A N$, segue que $\operatorname{Hom}\left(N, \frac{M}{\underline{x}'M}\right) = 0$. Logo, $\operatorname{Ext}^{n-1}_A(N, M) = 0$. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x_1} M \longrightarrow \frac{M}{x_1 M} \longrightarrow 0.$$

Assim, temos a sequência exata

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{Ext}^{n-1}_A(N, M) &\longrightarrow \operatorname{Ext}^{n-1}_A(N, \frac{M}{x_1 M}) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}^n_A(N, M) \xrightarrow{\operatorname{Ext}^n_A(N, x_1)} \operatorname{Ext}^n_A(N, M). \end{aligned}$$

Como $x_1 \in \operatorname{Ann}(N)$, temos que $\operatorname{Ext}^n_A(N, x_1) \equiv 0$. Assim, $\operatorname{Ext}^n_A(N, M) \cong \operatorname{Ext}^{n-1}_A(N, \frac{M}{x_1 M})$. Sendo $x_2, \cdots, x_n$ uma $\frac{M}{x_1 M}$-sequência fraca, temos da hipótese de indução que $\operatorname{Ext}^{n-1}_A(N, \frac{M}{x_1 M}) \cong \operatorname{Hom}\left(N, \frac{M}{\underline{x}M}\right)$. Portanto, $\operatorname{Hom}\left(N, \frac{M}{\underline{x}M}\right) \cong \operatorname{Ext}^n_A(N, M)$. $\square$

Considere A anel, $I \subset A$ ideal, M A-módulo finitamente gerado, com $IM \neq M$ e $\underline{x} = x_1, \cdots, x_n$ M-sequência maximal a elementos em I. Note que I contém elementos $\frac{M}{(x_1, \cdots, x_{i-1})M}$-regulares, para todo $i = 1, \cdots, n$. Daí, $\operatorname{Ext}^{i-1}_A(\frac{A}{I}, M) \cong \operatorname{Hom}\left(\frac{A}{I}, \frac{M}{(x_1, \cdots, x_{i-1})M}\right) = 0$, para $i = 1, \cdots, n$. Dessa forma, $\operatorname{Ext}^j_A(\frac{A}{I}, M) = 0$, para $j \leq n-1$ e $\operatorname{Ext}^n_A(\frac{A}{I}, M) \cong \operatorname{Hom}\left(\frac{A}{I}, \frac{M}{\underline{x}M}\right) \neq 0$.

Fazendo isto, provamos o importante:

Teorema 1.3 (Rees)**.** *Considere A anel, $I \subset A$ ideal, M A-módulo finitamente gerado, com $IM \neq M$. Então todas as M-sequências maximais a elementos em I tem o mesmo comprimento, digamos n, e o mesmo é dado por*

$$n = \inf\left\{i \; ; \; \operatorname{Ext}^i_A\left(\frac{A}{I}, M\right) \neq 0\right\}.$$

De posse deste teorema, podemos fazer a seguinte

Definição 1.2. Considere A anel, $I \subset A$ ideal e M A-módulo finitamente gerado, com $IM \neq M$. Então o comprimento de qualquer M-sequência maximal com elementos em I é chamado de *profundidade* de I em M, denotado por $\operatorname{prof}(I, M)$.

Quando $(A, \mathfrak{m})$ for anel local, denotaremos $\operatorname{prof}(\mathfrak{m}, M)$ por $\operatorname{prof}(M)$. Em particular, o número $\operatorname{prof}(\mathfrak{m}, A)$ será denotado simplesmente por $\operatorname{prof}(A)$. Além disso, se $I \subset A$ é ideal tal que $IM = M$, então define-se $\operatorname{prof}(I, M) = \infty$. Observe que isto faz sentido, pois

$$\text{prof}(I, M) = \infty \Longleftrightarrow \text{Ext}_A^i\left(\frac{A}{I}, M\right) = 0, \forall i$$

Para A anel, $I \subset A$ ideal e M A-módulo finitamente gerado, com $IM \neq M$, temos de imediato que $I \subset Z(M) \Longleftrightarrow \text{prof}(I, M) = 0$. Ademais, dado $x \in I$ elemento regular em M, tem-se $\text{prof}(I, \frac{M}{xM}) = \text{prof}(I, M) - 1$. De fato, tome $x, x_2, \cdots, x_n$ M-sequência maximal em I. Logo, $\text{prof}(I, M) = n$. Sendo $\overline{m} = \overline{0} \Leftrightarrow m \in xM$, temos que $\text{prof}(I, \frac{M}{xM}) = n - 1 = \text{prof}(I, M) - 1$.

Proposição 1.4. Sejam A anel, $I \subset A$ ideal e U, N e M A-módulos finitamente gerados, tais que $0 \longrightarrow U \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta. Então

(a) $\text{prof}(I, M) \geq \min\{\text{prof}(I, U) - 1, \text{prof}(I, N)\}$

(b) $\text{prof}(I, U) \geq \min\{\text{prof}(I, M) + 1, \text{prof}(I, N)\}$

(c) $\text{prof}(I, N) \geq \min\{\text{prof}(I, U), \text{prof}(I, M)\}$.

Demonstração: Sendo $0 \longrightarrow U \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ sequência exata, temos que a sequência induzida

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \text{Ext}_A^i\left(\frac{A}{I}, U\right) &\longrightarrow \text{Ext}_A^i\left(\frac{A}{I}, N\right) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_A^i\left(\frac{A}{I}, M\right) \longrightarrow \text{Ext}_A^{i+1}\left(\frac{A}{I}, U\right) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

também é exata. Seja $t = \min\{\text{prof}(I, U) - 1, \text{prof}(I, N)\}$. Logo, $\text{Ext}_A^i\left(\frac{A}{I}, N\right) = 0$ e $\text{Ext}_A^{i+1}\left(\frac{A}{I}, U\right) = 0$, para todo $i \leq t$. Assim, $\text{Ext}_A^i\left(\frac{A}{I}, M\right)$, para $i \leq t$, e portanto, $\text{prof}(I, M) \geq t$. Os itens **(b)** e **(c)** seguem de forma análoga.

$\square$

Corolário 1.5. Se $\text{prof}(I, N) > \text{prof}(I, M)$, então $\text{prof}(I, U) = \text{prof}(I, M) + 1$.

Para uma demonstração, vide [1, Proposição II.6 (bis)]. Agora, considere A anel e M A-módulo finitamente gerado.

Definição 1.3. Dizemos que M é um A-módulo *projetivo* se M é somando direto de um módulo livre, isto é, se existe um A-módulo livre F, tal que $F = M \oplus N$, para algum A-módulo N.

Chamamos de uma resolução projetiva de um módulo M um complexo[2]

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

tal que

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata. Caso M admita uma resolução projetiva finita, define-se a dimensão projetiva de M por

$$\text{proj. dim}_A(M) = \inf \left\{ \begin{array}{c} n \geq 0 \ ; \ \exists \ P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0 \\ \text{resolução projetiva de } M \end{array} \right\}$$

Caso contrário, define-se $\text{proj. dim}_A(M) = \infty$.

Em um contexto geral, todo módulo livre é claramente um módulo projetivo. Mas a recíproca não é verdadeira em geral. Vejamos:

Exemplo 1.2. Tome o anel $F = \mathbb{Z}_6$. Trivialmente, F é um F-módulo livre. Todavia, temos $F = \mathbb{Z}_6 = (\overline{2}) \oplus (\overline{3})$. Dessa forma, $(\overline{2})$ e $(\overline{3})$ são F-módulos projetivos. Contudo, $(\overline{2})$ e $(\overline{3})$ não são F-módulos livres. Com efeito, suponha que $(\overline{2})$ seja um F-módulo livre. Então $(\overline{2})$ tem cardinalidade[3] igual a 6^n, para algum $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo. De forma análoga, mostra-se que $(\overline{3})$ também não é F-livre.

Entretanto, no caso em que $(A, \mathfrak{m})$ é local, temos que, dado M A-módulo finitamente gerado, vale:

Teorema 1.6. *M é projetivo se, e somente se, M é livre.*

Demonstração: Suponha M projetivo. Logo, $F = M \oplus N$, para F A-módulo livre e N A-módulo. Então

$$\overline{F} = \frac{F}{\mathfrak{m}F} = \frac{M + \mathfrak{m}F}{\mathfrak{m}F} \oplus \frac{N + \mathfrak{m}F}{\mathfrak{m}F}. \tag{1.1}$$

Temos que $\overline{F}$ é um $\frac{A}{\mathfrak{m}}$-espaço vetorial. Dessa forma, tome $y_1, \cdots, y_r \in M$ e $y_{r+1}, \cdots, y_n \in N$, tais que $\{y_1 + \mathfrak{m}F, \cdots, y_n + \mathfrak{m}F\}$ seja base de $\overline{F}$. Usando o Lema de Nakayama, mostra-se que $\{y_1, \cdots, y_n\}$ é base para F. Para mais detalhes, vide [11, Teorema 7.7]. $\square$

[2] Um complexo $\mathbf{M}_\bullet$ de A-módulos é da forma

$$\mathbf{M}_\bullet : \ \cdots \longrightarrow M_{j+1} \xrightarrow{d_{j+1}} M_j \xrightarrow{d_j} M_{j-1} \longrightarrow \cdots$$

tal que $d_j \circ d_{j+1} = 0$, $\forall j$.

[3] A cardinalidade de um conjunto é o seu número de elementos.

Definição 1.4. Sejam A anel e M A-módulo finitamente gerado. Uma resolução projetiva de M

$$\mathbf{F}_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\delta} M \longrightarrow 0$$

é dita uma *resolução livre* (sobre A) de M se cada módulo F_i é A-livre.

Quando $(A, \mathfrak{m}, \mathbf{k})$ é um anel local, diz-se que a resolução $\mathbf{F}_\bullet$ é uma *resolução livre minimal* se $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$, $\forall\ i$. Note que, sendo $\mathbf{F}_\bullet$ uma resolução livre minimal de M, segue que $\varphi_i \otimes \mathfrak{m} = 0$, $i \geq 1$. Claramente, aqui tem-se $\operatorname{proj.dim}(M) = \operatorname{dh}(M)$, a dimensão homológica de M. Dado M um A-módulo finitamente gerado, defina $\beta_0 = \mu(M)$.

Agora, defina o epimorfismo $\varphi_0 : A^{\beta_0} \longrightarrow M$, dado por $\varphi_0(e_i) = m_i$, para $i = 1, \cdots, \beta_0$, onde $\{m_1, \cdots, m_{\beta_0}\}$ é um conjunto minimal de geradores de M. Tome $M_1 = \ker(\varphi_0)$ e $\beta_1 = \mu(M_1)$. Iterando o processo, encontramos A-módulos $M_i = \ker(\varphi_{i-1})$ e números naturais $\beta_i = \mu(M_i)$, com $i \geq 1$. Construimos assim uma resolução livre minimal de M,

$$\cdots \longrightarrow A^{\beta_n} \longrightarrow A^{\beta_{n-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{\beta_1} \longrightarrow A^{\beta_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Os módulos M_i's são chamados *módulos de sizigias* de M, denotados por $\operatorname{Syz}_i(M)$, e os números β_i's são os *números de Betti* de M, que podem ser denotados por $\beta_i(M)$.

Proposição 1.7. Sejam $(A, \mathfrak{m}, \mathbf{k})$ anel local e M A-módulo finitamente gerado. Então

$$\beta_i(M) = \dim \operatorname{Tor}_i^A(M, \mathbf{k}), \quad i \geq 0$$

e

$$\operatorname{proj.dim}(M) = \sup\{\ i \geq 0\ ;\ \operatorname{Tor}_i^A(M, \mathbf{k}) \neq 0\}$$

Demonstração: Considere a resolução livre minimal

$$\mathbf{F}_\bullet :\ 0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Logo, $\varphi_i \otimes \mathfrak{m} = 0$, $i \geq 1$. Dessa forma, para $i \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\beta_i(M) &= \operatorname{posto}(F_i) = \dim_A (F_i \otimes \mathbf{k}) \\
&= \dim_A \left(\frac{\ker(\varphi_i \otimes \mathfrak{m})}{\operatorname{Im}(\varphi_{i+1} \otimes \mathfrak{m})} \right) = \dim_A H_i(\mathbf{F}_\bullet \otimes \mathbf{k}) \\
&= \dim_A \operatorname{Tor}_i^A(M, \mathbf{k}).
\end{aligned}$$

Agora, suponha que $\operatorname{proj.dim}(M) = n$. Dada qualquer resolução projetiva $\mathbf{P}_\bullet$ de M com comprimento n, temos que $\operatorname{Tor}_i^A(M, \mathbf{k}) = H_i(\mathbf{F}_\bullet \otimes \mathbf{k}) = 0$, para $i > n$. Por outro lado, tome a resolução livre minimal de M

$$\mathbf{F}_\bullet :\ 0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Então $\varphi_i \otimes \mathfrak{m} = 0$, para $i = 1, \cdots, n$. Daí, $\operatorname{Tor}_i^A(M, \mathbf{k}) = \dfrac{\ker(\varphi_i \otimes \mathfrak{m})}{\operatorname{Im}(\varphi_{i+1} \otimes \mathfrak{m})} = F_i \otimes \mathbf{k}$. Desde que $F_n \neq 0$, temos $F_n \otimes \mathbf{k} \neq 0$, e assim, $\operatorname{Tor}_n^A(M, \mathbf{k}) \neq 0$. Portanto, $\operatorname{proj.dim}(M) = \sup\{\ i \geq 0\ ;\ \operatorname{Tor}_i^A(M, \mathbf{k}) \neq 0\}$.

□

Como consequência imediata da proposição anterior, temos que

$$\operatorname{proj.dim}(M) = \sup\{\ i \geq 0\ ;\ \beta_i(M) \neq 0\}.$$

Lema 1.8. Sejam $(A, \mathfrak{m}, \mathbf{k})$ anel local e M A-módulo finitamente gerado. Se $x \in \mathfrak{m}$ é A-regular e M-regular, então

$$\operatorname{proj.dim}_A(M) = \operatorname{proj.dim}_{\frac{A}{(x)}} \left(\frac{M}{xM} \right).$$

Demonstração: Seja $\mathbf{F}_\bullet$ uma resolução livre minimal de M. Assim, $\mathbf{F}_\bullet \otimes \frac{A}{(x)}$ é resolução livre minimal de $\frac{M}{xM}$. Sendo $A^{\beta_i} \otimes_A \frac{A}{(x)} \cong \left(\frac{A}{(x)}\right)^{\beta_i}$, segue $\beta_i(M) = \beta_i\left(\frac{M}{xM}\right)$, para todo $i \geq 0$. Logo, $\operatorname{proj.dim}_A(M) = \operatorname{proj.dim}_{\frac{A}{(x)}}\left(\frac{M}{xM}\right)$.

□

Teorema 1.9 (Auslander-Buchsbaum)**.** *Sejam $(A, \mathfrak{m}, \mathbf{k})$ anel local e M A-módulo finitamente gerado, com $M \neq 0$. Se $\operatorname{dh}(M) < \infty$, então*

$$\operatorname{dh}(M) + \operatorname{prof}(M) = \operatorname{prof}(A).$$

Demonstração: Suponha $\operatorname{prof}(A) = 0$, isto é, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(A)$. Desde que $\operatorname{dh}(M) = n < \infty$, M possui uma resolução livre minimal

$$\mathbf{F}_\bullet :\ 0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Se $n = 0$, então M é livre, e por conseguinte, $\operatorname{prof}(M) = \operatorname{prof}(A) = 0$. Se $n > 0$, então $F_n \subset \mathfrak{m}F_{n-1}$. Como $\mathfrak{m} \subset \operatorname{Ass}(A)$, segue $\mathfrak{m} \subset 0 :_A x$, para algum $x \in A \backslash \{0\}$. Logo, $xF_n \subset x\mathfrak{m}F_{n-1} = (0)$. Sendo F_n livre, temos que $x = 0$, o que é um absurdo.

Agora, suponha $\mathrm{prof}(A) > 0$. Se $\mathrm{prof}(M) = 0$, então tome a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Syz}_1(M) \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Logo, $0 = \mathrm{prof}(M) \geq \min\{\mathrm{prof}(F_0), \mathrm{prof}(\mathrm{Syz}_1(M)) - 1\}$, e assim, $\mathrm{dh}(\mathrm{Syz}_1(M)) = 1$. Ademais, $\mathrm{dh}(\mathrm{Syz}_1(M)) = \mathrm{dh}(M) - 1$. Suponha que a fórmula vale para $\mathrm{Syz}_1(M)$, ou seja, $\mathrm{dh}(\mathrm{Syz}_1(M)) + \mathrm{prof}(\mathrm{Syz}_1(M)) = \mathrm{prof}(A)$. Então $\mathrm{prof}(A) = \mathrm{dh}(M) - 1 + 1 = \mathrm{dh}(M)$, isto é, a fórmula vale para M. Por fim, se $\mathrm{prof}(M) > 0$, então $\mathfrak{m} \not\subseteq Z(A)$ e $\mathfrak{m} \not\subseteq Z(M)$. Assim, existe $x \in \mathfrak{m}$, tal que $x \in Z(A) \cap Z(M)$. Dessa maneira, temos que $\mathrm{dh}_A(M) = \mathrm{dh}_{\frac{A}{(x)}}\left(\frac{M}{xM}\right)$, $\mathrm{prof}_{\frac{A}{(x)}}\left(\frac{M}{(x)M}\right) = \mathrm{prof}_A(M) - 1$ e $\mathrm{prof}_{\frac{A}{(x)}}\left(\frac{A}{(x)}\right) = \mathrm{prof}_A(A) - 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{dh}_A(M) + \mathrm{prof}_A(M) &= \mathrm{dh}_{\frac{A}{(x)}}\left(\frac{M}{xM}\right) + \mathrm{prof}_{\frac{A}{(x)}}\left(\frac{M}{xM}\right) + 1 \\ &= \mathrm{prof}_{\frac{A}{(x)}}\left(\frac{A}{(x)}\right) + 1 \\ &= \mathrm{prof}_A(A). \end{aligned}$$

□

Considere A um anel não nulo. Define-se a *dimensão* (de Krull) de A, denotada por $\dim(A)$, como sendo

$$\dim(A) = \sup \left\{ \begin{array}{ccc} n \in \mathbb{N} & / & \exists \text{ cadeia } P_0 \underset{\neq}{\subsetneq} P_1 \underset{\neq}{\subsetneq} \cdots \underset{\neq}{\subsetneq} P_n \\ & & \text{com } P_i \in \mathrm{Spec}(A), \ \forall i \end{array} \right\}.$$

Para um A-módulo M, pode-se definir *dimensão* de M, denotada por $\dim(M)$, como sendo a dimensão de Krull do anel quociente $\frac{A}{0:M}$, isto é,

$$\dim(M) := \dim\left(\frac{A}{0:M}\right).$$

Admitamos agora, $(A, \mathfrak{m})$ local. Um A-módulo M é chamado *Cohen-Macaulay* se $\mathrm{prof}(M) = \dim(M)$. Diz-se que M é *Cohen-Macaulay maximal* quando $\mathrm{prof}(M) = \dim(A)$. O anel A é dito *Cohen-Macaulay* se for Cohen-Macaulay como A-módulo. Por fim, considere A um anel Cohen-Macaulay. Um ideal $I \subset A$ é dito *perfeito* se $\mathrm{dh}_A(A/I)$ for igual a $\mathrm{alt}(I)$ (altura de I), e portanto, da fórmula de Auslander-Buchsbaum segue que I é perfeito se e somente se $\mathrm{dh}(I) < \infty$ e o anel quociente $\frac{A}{I}$ é Cohen-Macaulay.

1.2 Teorema de Hilbert-Burch

Sejam A anel e $\mathcal{M}$ uma matriz $m \times n$ com entradas em A, com $m < n$. Para cada $t = 1, \cdots, m$, denotamos por $I_t(\mathcal{M})$ o ideal gerado pelos *menores* $t \times t$ de $\mathcal{M}$ [4]. Por convenção, $I_t(\mathcal{M}) = A$, para $t \leq 0$ e $I_t(\mathcal{M}) = 0$, para $t > m$. Dado $\varphi : F_2 \longrightarrow F_1$ um homomorfismo de A-módulos livres de posto finito, temos que φ pode ser interpretado como uma matriz $\mathcal{M}$ relativamente a bases fixadas de F_1 e F_2. Denotamos $I_t(\mathcal{M})$ por $I_t(\varphi)$.

Teorema 1.10 (Teorema de Hilbert-Burch)**.** *Sejam A anel local e $I \subset A$ ideal. Se existe um complexo exato de A-módulos*

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

com $F_0 \cong A^n$, então $F_1 \cong A^{n-1}$ e existe $a \in A$ não-divisor-de-zero tal que $I = aI_{n-1}(\varphi)$.

Para uma demonstração, vide [10].

Na situação do teorema, a matriz φ é chamada *matriz de Hilbert-Burch* do ideal I. O caso de interesse é quando $\operatorname{alt}(I) \geq 2$, pois I deverá satisfazer $I = I_{n-1}(\varphi)$. Com efeito, suponha que $\operatorname{alt}(I) \geq 2$ e $I = aI_{n-1}(\varphi)$, com a um não-invertível. Então $2 \leq \operatorname{alt}(I) = \operatorname{alt}(aI_{n-1}(\varphi)) \leq \operatorname{alt}(a) \leq 1$, o que é um absurdo.

1.3 Graduação de Anéis e Módulos

Definição 1.5. Seja A anel não nulo. Então A é dito *graduado* (a rigor, $\mathbb{N}$-graduado) se existe uma família $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subgrupos aditivos de A satisfazendo

(i) $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$

(ii) $A_i A_j \subset A_{i+j}$, para todos $i, j \in \mathbb{N}$.

Temos que A_0 é um subanel de A e cada A_n é um A_0-submódulo. Dizemos que A_n é a componente homogênea de A de grau n e cada elemento de A_n é dito um elemento homogêneo de grau n. Além disso, um ideal $I \subset A$ é dito homogêneo (ou graduado) se I é gerado por elementos homogêneos.

Definição 1.6. Sejam $A = \oplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado e M um A-módulo não nulo. Então M é dito *graduado* se existe uma família $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subgrupos aditivos de M, satisfazendo

(i) $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$

[4] Chamamos assim os determinantes das $\binom{n}{t}$ submatrizes.

(ii) $A_i M_j \subset M_{i+j}$, para todos $i, j \in \mathbb{N}$.

Cada elemento de M_n é dito um elemento homogêneo de M de grau n. Note é M_n é A_0-módulo, para $n \geq 0$. Um A-submódulo $N \subset M$ é dito homogêneo (ou graduado) se $N = \bigoplus_{n \geq 0} N_n$, onde $N_n = N \cap M_n$.

1.4 Multiplicidade

Referências gerais para esta parte são [8] e [14].

Seja A um anel graduado. Então um A-módulo M é dito *simples* se os seus únicos submódulos são 0 e M. Dado um A-módulo M, tem-se que qualquer cadeia de submódulos

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M \tag{1.2}$$

tal que M_i/M_{i-1} é A-módulo simples, para todo $i = 1, \cdots, r$, tem comprimento único. O comprimento de uma cadeia como (1.2) é chamado *comprimento* de M, e o denotamos por $l(M)$.

Agora, tome A um anel graduado tal que A_0 é Artiniano e A é uma A_0-álgebra finitamente gerada por elementos de grau 1, e seja M um A-módulo graduado finitamente gerado com dimensão de Krull d. Considere a seguinte função

$$\begin{array}{rccc} H(M,-): & \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Z}_+ \\ & n & \longmapsto & H(M,n) = l(M_n). \end{array} \tag{1.3}$$

A função (1.3) é a *função de Hilbert* de M. Mostra-se que, para $n \gg 0$, $H(M,n)$ é um polinômio de grau $d-1$ com coeficientes racionais. O polinômio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $H(M,n) = p(n)$ é chamado *polinômio de Hilbert* de M e pode ser escrito na forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \binom{x+i}{i}.$$

Definição 1.7. A *multiplicidade* de M é o número

$$e(M) = \begin{cases} e_0 & , \text{ se } \dim(M) > 0 \\ l(M) & , \text{ se } \dim(M) = 0. \end{cases}$$

Em particular, pode-se também considerar $e(A)$, a multiplicidade de A.

No lema abaixo (cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [28]), a função $\mu(-)$ denota número mínimo de geradores.

Lema 1.11. Seja A anel graduado, finitamente gerado como k-álgebra por elementos de grau 1, onde $A_0 = k$ é um corpo infinito. Suponha que A é Cohen-Macaulay e $\dim(A) > 0$. Seja M um A-módulo graduado finitamente gerado Cohen-Macaulay, com posto r (ou seja, se T é o anel total de frações de A, então $M \otimes_A T \cong T^r$ como T-módulos). Então $\mu(M) \leq e(M) = e(A) \cdot r$.

Definição 1.8. Se, nas condições do lema (em particular, note que M é Cohen-Macaulay maximal), valer a igualdade $\mu(M) = e(M)$, então diz-se que M é um *módulo de Ulrich*.

Tal definição faz referência ao influente artigo [28] de B. Ulrich. Muitos autores têm trabalhado em torno deste conceito, estabelecendo conexões importantes com diversos problemas em Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica.

Capítulo 2

Idealizadores Tangenciais

Este capítulo é dedicado ao estudo de propriedades básicas de derivações e diferenciais de Kähler, com ênfase em módulos especiais chamados *idealizadores tangenciais*, formados pelas derivações logarítmicas associadas a ideais fixados.

2.1 Derivações

Definição 2.1. Seja A um anel e seja M um A-módulo. Uma aplicação $\delta : A \to M$ é dita uma *derivação* de A com valores em M se satisfaz as condições:

(i) $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$

(ii) $\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a)$

para todos $a, b \in A$.

A condição do item **(ii)** é conhecida como *regra de Leibniz.* Ademais, o conjunto de todas as derivações de A em M, denotado por $\mathrm{Der}(A, M)$, é um A-módulo, com as operações:

$$(\delta_1 + \delta_2)(a) = \delta_1(a) + \delta_2(a) \qquad \text{e} \qquad (a\delta_1)(b) = a\delta_1(b),$$

para todos $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Der}(A, M)$ e $a, b \in A$. Quando $M = A$, escrevemos simplesmente $\mathrm{Der}(A)$. Note que, para todo anel A é possível definir a derivação $d : A \to A$ dada por $d(a) = 0$, para todo $a \in A$. Dizemos que d é a derivação nula ou trivial. Se A é uma k-álgebra, com k anel, podemos considerar o submódulo $\mathrm{Der}_k(A, M) = \{\delta \in \mathrm{Der}(A, M)\ ;\ \delta(x) = 0, \forall x \in k\}$. Cada elemento de $\mathrm{Der}_k(A, M)$ é chamado de k-derivação. Observe que, se $k = \mathbb{Z}$, então $\mathrm{Der}(A, M) = \mathrm{Der}_{\mathbb{Z}}(A, M)$. De fato, dado $\delta \in \mathrm{Der}(A, M)$, temos que $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 1 \cdot \delta(1) + 1 \cdot \delta(1)$, ou seja, $\delta(1) = 0$, e consequentemente, $\delta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{Z}}(A, M)$.

Sejam k anel, $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ e M um A-módulo. Fixando arbitrariamente elementos $m_1, \ldots, m_n \in M$, temos que a aplicação $\delta : A \to M$ dada por $\delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} m_i$ é uma derivação de A em M. Quando $M = A$ e $m_i = x_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, dizemos que δ é a *derivação de Euler*, geralmente denotada por ε. Além disso, $\frac{\partial}{\partial x_i} : A \to A$ dada por $\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ é k-derivação de f, para cada i.

Exemplo 2.1. Seja k um corpo de característica zero. Se $f \in A$ é homogêneo de grau $d > 0$, tem-se que $\varepsilon(f) = df$, ou seja,

$$f = \frac{x_1}{d} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{x_n}{d} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}. \tag{2.1}$$

Basta notar que, sendo f homogêneo de grau d, temos $f = \sum_{\text{finita}} \lambda_{k_1,\ldots,k_r} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$, tal que $k_1, \cdots, k_r \in \mathbb{N}$ e $k_1 + \cdots + k_r = d$, e portanto $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \ldots, x_n)$, para qualquer $\lambda \in k \setminus \{0\}$. Agora, derivamos ambos os membros dessa igualdade formalmente com respeito a λ e depois tomamos $\lambda = 1$. A igualdade 2.1 é conhecida como a *Identidade de Euler*.

Proposição 2.1. Seja k anel e seja $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ anel de polinômios. Então $\mathrm{Der}_k(A)$ é um A-módulo livre de posto n e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ é uma base para $\mathrm{Der}_k(A)$.

Demonstração: Dado $\delta \in \mathrm{Der}_k(A)$. Defina $\bar{\delta} : A \to A$, dado por $\bar{\delta}(f) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Claramente, $\bar{\delta} \in \mathrm{Der}_k(A)$. Além disso, $\bar{\delta}(x_j) = \delta(x_j)$, para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$. Logo, $\delta = \bar{\delta}$. Agora, tome $b_1, \cdots, b_n \in A$, tais que $\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$. Assim, $0 = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = b_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Daí, segue o resultado.

□

Como consequência do resultado acima, temos que

$$\mathrm{Der}_k(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} A \frac{\partial}{\partial x_i} \cong A^n.$$

Agora, tomemos A e B k-álgebras, com k anel, $\varphi : A \to B$ homomorfismo de k-álgebras e M um B-módulo. Se $\delta \in \mathrm{Der}_k(B, M)$, então $\delta \circ \varphi \in \mathrm{Der}_k(A, M)$. De forma análoga, para N A-módulo, $\sigma \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ e $\delta \in \mathrm{Der}_k(A, M)$, temos que $\sigma \circ \delta \in \mathrm{Der}_k(A, N)$.

Proposição 2.2. Sejam k anel, A k-álgebra e $S \subset A$ conjunto multiplicativo, com $0 \notin S$. Então, dados B um $S^{-1}A$-módulo e $\delta \in \mathrm{Der}_k(A, B)$, existe um único $\delta' \in \mathrm{Der}_k(S^{-1}A, B)$ que estende δ. Além disso,

$$\delta'\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\delta(x) - x\delta(y)}{y^2},$$

para quaisquer $x \in A$ e $y \in S$.

Demonstração: De antemão, suponha que exista $\delta' \in \mathrm{Der}_k(S^{-1}A, B)$ que estende δ. Assim, para $x \in A$ e $y \in S$ segue

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \delta'\left(\frac{x}{1}\right) = \delta'\left(\frac{y}{1} \cdot \frac{x}{y}\right) \\
&= y\delta'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\delta'\left(\frac{y}{1}\right) \\
&= y\delta'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\delta\left(y\right),
\end{aligned}$$

isto é, $\delta'\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\delta(x) - x\delta(y)}{y^2}$. Logo, já temos a unicidade. Para a existência, defina a aplicação $\delta' : S^{-1}A \longrightarrow B$ dada por $\delta'\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\delta(x)-x\delta(y)}{y^2}$, para $\frac{x}{y} \in S^{-1}A$. Tome $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2} \in S^{-1}A$, tais que $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$. Assim, existe $s \in S$, tal que $s(x_1y_2 - x_2y_1) = 0$, isto é, $sx_1y_2 - sx_2y_1 = 0$. Note que,

$$\begin{aligned}
0 = \delta(sx_1y_2 - sx_2y_1) &= \delta(sx_1y_2) - \delta(sx_2y_1) \\
&= [\delta(sx_1y_2) - \delta(sx_2y_1)] \cdot (sy_1y_2) \\
&= s^2 \cdot \left[y_2^2(y_1\delta(x_1) - x_1\delta(y_1)) - y_1^2(y_2\delta(x_2) - x_2\delta(y_2))\right].
\end{aligned}$$

Como $s^2 \in S$, segue

$$\delta'\left(\frac{x_1}{y_1}\right) = \frac{y_1\delta(x_1) - x_1\delta(y_1)}{y_1^2} = \frac{y_2\delta(x_2) - x_2\delta(y_2)}{y_2^2} = \delta'\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Além disso, temos que $\delta'\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}\right) = \delta'\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \delta'\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$, $\delta'\left(\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2}\right) = \frac{x_2}{y_2}\delta'\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{x_1}{y_1}\delta'\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$ e $\delta'\left(\frac{\alpha}{1}\right) = 0$, para todos $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2} \in S^{-1}A$ e $\alpha \in k$. Dessa maneira, $\delta' \in \mathrm{Der}_k(S^{-1}A, B)$.

□

Como consequência imediata da Proposição acima, temos o

Corolário 2.3. Sejam k anel, A k-álgebra que é um domínio de integridade e L um corpo contendo A. Dado $\delta \in \mathrm{Der}_k(A, L)$, existe um único $\delta' \in \mathrm{Der}_k(\mathrm{Fr}(A), L)$ que estende δ. Além disso,

$$\delta'\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\delta(x) - x\delta(y)}{y^2},$$

para quaisquer $x, y \in A$ com $y \neq 0$.

Sejam k anel, $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ e $I = (f_1, \cdots, f_m) \subset A$ ideal. Definimos a *matriz Jacobiana* de I como sendo a matriz $m \times n$ $\Theta = \Theta(I) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$. É comum usar o mesmo símbolo da matriz Jacobiana para o homomorfismo associado de A-módulos livres $A^n \longrightarrow A^m$.

Exemplo 2.2. Tome $I = (xy, yz) \subset \mathbb{R}[x, y, z]$. Então

$$\Theta = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{bmatrix}$$

2.1.1 Módulo das Diferenciais de Kähler

Seja k anel e seja A uma k-álgebra. Tome $B = A \otimes_k A$. Temos que B é uma k-álgebra com o produto $\cdot : B \times B \longrightarrow B$, dado por $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$, para $a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2 \in B$. Considere o homomorfismo de k-álgebras

$$\begin{array}{rccc} \mu : & B & \longrightarrow & A \\ & a \otimes b & \longmapsto & \mu(a \otimes b) = ab. \end{array} \tag{2.2}$$

Denote $\mathbb{D} = \ker(\mu)$. Note que, $\langle 1 \otimes a - a \otimes 1 \mid a \in A \rangle \subset \mathbb{D}$. Por outro lado, dado $a \otimes b \in \mathbb{D}$, temos $ab = \mu(a \otimes b) = 0$. Assim, $ab \otimes 1 = 0$, e portanto, $a \otimes b = a \otimes b - ab \otimes 1 = (-a \otimes 1) \cdot (b \otimes 1 - 1 \otimes b)$. Dessa forma, $\mathbb{D} = \langle 1 \otimes a - a \otimes 1 \mid a \in A \rangle$, o chamado *ideal diagonal* da k-álgebra A.

Definição 2.2. O *módulo das diferenciais de Kähler* de A sobre k, que será denotado por $\Omega_k(A)$ ou $\Omega_{A|k}$, é o módulo conormal de $\mathbb{D}$, isto é,

$$\Omega_k(A) = \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}^2}.$$

Da definição segue que $\Omega_k(A)$ é um módulo sobre $\frac{A \otimes A}{\mathbb{D}}$. Mas, sendo μ sobrejetor, segue que $\frac{A \otimes A}{\mathbb{D}} \cong A$ e portanto $\Omega_k(A)$ é também um A-módulo. De maneira imediata, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \Omega_k(A) \longrightarrow \frac{A \otimes A}{\mathbb{D}^2} \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Defina a aplicação $d : A \longrightarrow \Omega_k(A)$ dada por $d(a) = \overline{a \otimes 1 - 1 \otimes a}$. Temos $d \in \mathrm{Der}_k(A, \Omega_k(A))$. Dizemos que dx é a diferencial de $x \in A$. Quando $A = k[x_1, \cdots, x_n]$, temos que $\Omega_k(A)$ é um A-módulo livre, onde $\{dx_1, \cdots, dx_n\}$ é uma base para $\Omega_k(A)$. Adicionalmente, para um A-módulo M arbitrário e $\delta \in \mathrm{Der}_k(A, M)$, existe um único $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\Omega_k(A), M)$ tal que $\delta = \varphi \circ d$. Devido a esta propriedade universal, a aplicação d é chamada *derivação universal* da k-álgebra A.

Assim, obtemos o isomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{Hom}_A(\Omega_k(A), M) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_k(A, M) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = f \circ d. \end{array} \tag{2.3}$$

Em particular, para $M = A$ obtemos:

$$\mathrm{Der}_k(A) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_k(A), A).$$

Sejam k anel, A k-álgebra, $I \subset A$ ideal e $B = \frac{A}{I}$. Tome o homomorfismo de A-módulos $\varphi : I \longrightarrow \Omega_k(A) \otimes_A B$ dada por $\varphi(x) = dx \otimes \overline{1}$. Note que, dado ab um gerador de I^2, onde $a, b \in I$, temos $\varphi(ab) = d(ab)\otimes\overline{1} = ad(b)\otimes\overline{1}+bd(a)\otimes\overline{1} = d(b)\otimes\overline{a}+d(a)\otimes\overline{b} = 0$, ou seja, $\varphi(I^2) = 0$. Dessa forma, fica bem definido o homomorfismo de B-módulos $\overline{\varphi} : \frac{I}{I^2} \longrightarrow \Omega_k(A) \otimes_A B$ onde $\overline{\varphi}(x + I^2) = \varphi(x)$.

Proposição 2.4. Temos a sequência exata de B-módulos

$$\frac{I}{I^2} \overset{\varphi}{\longrightarrow} \Omega_k(A) \otimes_A B \longrightarrow \Omega_k(B) \longrightarrow 0.$$

Para uma demonstração, vide [10] ou [19].

2.2 Idealizador Tangencial

Definição 2.3. Sejam k corpo, $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ e $I \subset A$ ideal. Então, o conjunto

$$\mathcal{T}_k(I) = \{\delta \in \mathrm{Der}_k(A) \ ; \ \delta(I) \subset I\}$$

é chamado *idealizador tangencial* de I.

De imediato, vemos que $\mathcal{T}_k(I)$ é um A-submódulo de $\mathrm{Der}_k(A)$, pois $(a\delta_1 + \delta_2)(I) \subset I$, para todos $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{T}_k(I)$ e $a \in A$. Vários detalhes sobre a teoria geral de tais módulos podem ser encontrados em [17].

Observação 2.1. Uma justificativa para a escolha da terminologia *tangencial* é a seguinte interpretação geométrica do módulo $\mathcal{T}_k(I)$: se k é um corpo algebricamente fechado e $I \subset A = k[x_1, \ldots, x_n]$ é um ideal radical definindo uma variedade algébrica projetiva $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$, então cada elemento do módulo $\mathcal{T}_k(I)$ (muitas vezes chamado uma *derivação logarítmica* de I) pode ser realizado como um campo vetorial global – isto é, definido em todo o ambiente $\mathbb{P}^{n-1}$ – que é tangente ao longo de $X \setminus \mathrm{Sing}(X)$ (uma demonstração desse fato simples pode ser vista por exemplo em [16, Proposition 1.1]). Como seguirá do Lema demonstrado abaixo, ocorre que todo campo vetorial definido exatamente em X pode ser "levantado" a um campo vetorial global que é logarítmico para X.

Exemplo 2.3. Sejam $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ (k corpo) e $I = (xy, yz) \subset A$. Considere $\delta \in \mathcal{T}_k(I) \subset \mathrm{Der}_k(A) = A\frac{\partial}{\partial x} + A\frac{\partial}{\partial y} + A\frac{\partial}{\partial z}$. Então, $\delta = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$. Note que,

$\delta(xy) = ay + bx \in I$ e $\delta(yz) = bz + cy \in I$. Logo, é imediato ver que $a, c \in (x, z)$ e $b \in (y)$. Como claramente $(x, z)\frac{\partial}{\partial x} + (y)\frac{\partial}{\partial y} + (x, z)\frac{\partial}{\partial z} \subset \mathcal{T}_k(I)$, obtemos

$$\mathcal{T}_k(I) = (x, z)\frac{\partial}{\partial x} \oplus (y)\frac{\partial}{\partial y} \oplus (x, z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Em particular, segue imediatamente que $\mu(\mathcal{T}_k(I)) = 5$.

Lema 2.5. Tem-se um isomorfismo

$$\frac{\mathcal{T}_k(I)}{I\mathrm{Der}_k(A)} \cong \mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I}\right).$$

Demonstração: Defina $\psi : \mathcal{T}_k(I) \longrightarrow \mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I}\right)$ dada por $\psi(\delta) = \delta + I$, onde $(\delta + I)(\overline{a}) = \delta(a)+I$, para todo $a \in A$. Primeiramente, tome $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{T}_k(I)$, tais que $\delta_1 = \delta_2$. Então $\delta_1(a) = \delta_2(a)$, para todo $a \in A$, e assim, $\delta_1(a) + I = \delta_2(a) + I$, para todo $a \in A$. Logo, $\psi(\delta_1) = \psi(\delta_2)$, isto é, ψ está bem definida. Agora, considere $\lambda \in A$ e $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{T}_k(I)$. Como $(\delta_1 + \lambda\delta_2)(a) + I = (\delta_1(a) + \lambda\delta_2(a)) + I = (\delta_1(a) + I) + \lambda(\delta_2(a) + I)$, $a \in A$ arbitrário, temos $\psi(\delta_1 + \lambda\delta_2) = \psi(\delta_1) + \lambda\psi(\delta_2)$, e consequentemente, ψ é homomorfismo. Dado $\delta = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \ker(\psi)$, temos que $\psi(\delta) = 0$. Então, dado $a \in A$, segue $\delta + I = I$, ou seja, $\delta(a) \in I$. Em particular, $g_j = \delta(x_j) \in I$, para todo $j \in 1, \cdots, n$. Logo, $\delta \in I\mathrm{Der}_k(A)$. Por outro lado, tome $\delta \in I\mathrm{Der}_k(A)$. Então $\delta \in \sum_i x_i\delta_i$, para $x_i \in I$ e $\delta_i \in \mathrm{Der}_k(A)$. Para $f \in A$, temos $\delta(f) = \sum_i x_i\delta_i(f) \in I$, e portanto, $\delta \in \ker(\psi)$. Com isso mostramos que $\ker(\psi) = I\mathrm{Der}_k(A)$. Pela Proposição 2.4, temos a sequência exata

$$\left(\frac{A}{I}\right)^m \xrightarrow{\vartheta} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{A}{I}\right) dx_i \longrightarrow \Omega_k\left(\frac{A}{I}\right) \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

onde ϑ denota a transposta da matriz jacobiana do conjunto de geradores $f_1, \cdots, f_m$ de I, com entradas vistas em A/I. Dualizando (2.4) e lembrando que o A-dual do módulo de diferenciais é o módulo de derivações, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I}\right) \longrightarrow \mathrm{Der}_k\left(A, \frac{A}{I}\right) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\left(\vartheta, \frac{A}{I}\right)} \mathrm{Hom}\left(\left(\frac{A}{I}\right)^m, \frac{A}{I}\right).$$

Logo, $\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I}\right) = \ker\left(\mathrm{Hom}\left(\vartheta, \frac{A}{I}\right)\right)$. Dessa maneira, dado $\overline{\delta} = \sum_{i=1}^{n}(g_i + I)\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathrm{Der}_k(\frac{A}{I}) \subset \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A}{I}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$, temos $\overline{\delta}(f_j) = \sum_{i=1}^{n}(g_i + I)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \in I$, para todo $j = 1, \cdots, m$. Tome $\delta = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{T}_k(I)$. Assim, $\psi(\delta) = \overline{\delta}$, e portanto, ψ é sobrejetora.

$\square$

Como consequência imediata do Lema 2.5, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} I \frac{\partial}{\partial x_i} \longrightarrow \mathcal{T}_k(I) \longrightarrow \mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I}\right) \longrightarrow 0. \tag{2.5}$$

Dado um ideal polinomial $I \subset A$ ideal, podemos escrever

$$\mathcal{T}_k(I) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathrm{Der}_k(A) \ ; \ \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in I, \ \forall f \in I \right\}.$$

Ademais, definimos

$$\mathcal{T}_k(\mathbf{f})^0 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathrm{Der}_k(A) \ ; \ \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \ \forall j = 1, \cdots, m \right\},$$

onde $\mathbf{f} = \{f_1, \cdots, f_m\}$ é um conjunto de geradores de I. Temos que $\mathcal{T}_k(\mathbf{f})^0$ é um A-submódulo de $\mathcal{T}_k(I)$. Agora, considere Θ a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$. Assim, temos o A-homomorfismo associado $\Theta : \mathrm{Der}_k(A) \longrightarrow A^m$. Tomemos $\overline{\Theta} := \pi \circ \Theta : \mathrm{Der}_k(A) \longrightarrow \left(\frac{A}{I}\right)^m$, onde π é o epimorfismo $A^m \twoheadrightarrow \left(\frac{A}{I}\right)^m$. Segue que $\mathcal{T}_k(\mathbf{f})^0 = \ker(\Theta)$ e $\mathcal{T}_k(I) = \ker(\overline{\Theta})$.

Observação 2.2. Seja $I \subset A$ um ideal monomial e suponha que o corpo k tem característica zero. Brumatti e Simis [6] mostraram que

$$\mathcal{T}_k(I) = \bigoplus_{i=1}^{n} (I : (I : x_i)) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e assim, pelo Lema 2.5, segue que

$$\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I}\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{I : (I : x_i)}{I}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{A}{I}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Uma outra observação interessante diz respeito à relação entre os módulos $\mathcal{T}_k(I)$ e $\mathcal{T}_k(\sqrt{I})$ (para um ideal I geral, não necessariamente monomial). Um resultado bem-conhecido devido a Kaplansky, em característica zero, garante que

$$\mathcal{T}_k(I) \ \subset \ \mathcal{T}_k(\sqrt{I}),$$

mas em geral não vale igualdade. Para exemplos, contra-exemplos e vários outros resultados de comparação entre idealizadores tangenciais, vide [17].

Capítulo 3

Módulo de Saito e divisores livres

Seja k um corpo e seja $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Para $f \in A \backslash \{0\}$, definamos o *ideal gradiente* de f como sendo $I_f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ e o *ideal Jacobiano* de f como sendo $J_f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, f\right) = (I_f, f)$. Caso $f \in I_f$, então f é dito *euleriano*. Note que, quando $f \in A$ é um polinômio homogêneo de grau $d > 0$, temos que f é euleriano. Com efeito, pela Identidade de Euler, temos

$$f = \frac{x_1}{d} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{x_n}{d} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} \in I_f.$$

Definição 3.1. Se $I = (f) \subset A$ é um ideal principal, então $\mathcal{T}_k(I)$ é chamado o *módulo de Saito* de f, denotado por $\mathcal{T}_k(f)$.

Neste caso, como $\mathbf{f} = \{f\}$, $\mathcal{T}_k(\mathbf{f})^0$ será denotado por $\mathcal{T}_k(f)^0$.

Proposição 3.1. Seja $f = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in I_f$ um polinômio eureliano, com $h_i \in A$. Temos as sequências exatas

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_k(f)^0 \longrightarrow \mathcal{T}_k(f) \longrightarrow (f) \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

e

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{T}_k(f)^0 + (f)\mathrm{Der}_k(A)}{(f)\mathrm{Der}_k(A)} \longrightarrow \mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f)}\right) \longrightarrow (f) \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

Demonstração: Defina $\varphi : \mathcal{T}_k(f) \longrightarrow (f)$ dada por $\varphi(\delta) = \delta(f)$. Dados $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{T}_k(f)$ e $a \in A$, temos $\varphi(\delta_1 + a\delta_2) = (\delta_1 + a\delta_2)(f) = \delta_1(f) + a\delta_2(f) = \varphi(\delta_1) + a\varphi(\delta_2)$, isto é, φ é linear. Agora, tome $g = af \in (f)$. Sendo $f = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, segue que $af = \sum_{i=1}^n ah_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Assim, tome $\delta = \sum_{i=1}^n ah_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{T}_k(f)$. Então $\varphi(\delta) = \sum_{i=1}^n ah_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = af = g$, ou seja, φ é sobrejetiva. Por fim, seja $\delta \in \ker(\varphi)$. Temos $\varphi(\delta) = \delta(f) = 0$. Como $\mathcal{T}_k(f) \subset \mathrm{Der}_k(A) = \bigoplus_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A$, segue que existem $a_1, \cdots, a_n \in A$, tais que $0 = \delta(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Daí, $\delta = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{T}_k(f)^0$. Por outro lado, tome $\delta =$

$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{T}_k(f)^0$, com $a_1, \cdots, a_n \in A$. Então $\varphi(\delta) = \delta(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. Assim, $\delta \in \ker(\varphi)$. Para a segunda sequência, basta quocientar $\mathcal{T}_k(f)^0 + (f)\mathrm{Der}_k(A)$ e $\mathcal{T}_k(f)$ pelo A-submódulo $(f)\mathrm{Der}_k(A)$ e aplicar o Lema 2.5.

□

Para $f = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in I_f$ polinômio eureliano, tome $\varepsilon_f = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{T}_k(f)$. Agora, defina o homomorfismo $\gamma : (f) \longrightarrow \mathcal{T}_k(f)$ dado por $\gamma(af) = a\varepsilon_f$, para $a \in A$. Pela Proposição 3.1, temos a sequência exata $0 \longrightarrow \mathcal{T}_k(f)^0 \longrightarrow \mathcal{T}_k(f) \xrightarrow{\varphi} (f) \longrightarrow 0$. Note que, dado $a \in A$, temos $(\varphi \circ \gamma)(af) = \varphi(a\varepsilon_f) = a\varepsilon_f(f) = af$, isto é, $\varphi \circ \gamma = Id$[1]. Tome $\delta \in \mathcal{T}_k(f)$. Então $\varphi(\delta) \in (f)$, e ainda, $\varphi(\delta - (\gamma \circ \varphi)(\delta)) = \varphi(\delta) - (\varphi \circ \gamma \circ \varphi)(\delta) = \varphi(\delta) - \varphi(\delta) = 0$, isto é, $\delta - (\gamma \circ \varphi)(\delta) \in \ker(\varphi)$. Dessa forma, pela exatidão da sequência, existe $\delta' \in \mathcal{T}_k(f)^0$, tal que $\delta' = \delta - (\gamma \circ \varphi)(\delta)$, ou seja, $\delta = \delta' + (\gamma \circ \varphi)(\delta) \in \mathcal{T}_k(f)^0 + \mathrm{Im}(\gamma)$. Logo, $\mathcal{T}_k(f) \subset \mathcal{T}_k(f)^0 + \mathrm{Im}(\gamma)$. Como, trivialmente, $\mathcal{T}_k(f)^0 + \mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathcal{T}_k(f)$, segue que $\mathcal{T}_k(f) = \mathcal{T}_k(f)^0 + \mathrm{Im}(\gamma)$. Agora, dado $\delta \in \mathcal{T}_k(f)^0 \cap \mathrm{Im}(\gamma)$, existe $h \in (f)$, tal que $\delta = \gamma(h)$. Assim, $\varphi(\delta) = 0$ pela exatidão da sequência e $\varphi(\delta) = \varphi(\gamma(h)) = Id(h) = h$. Então $h = 0$ e daí $\delta = \gamma(0) = 0$. Logo $\mathcal{T}_k(f)^0 \cap \mathrm{Im}(\gamma) = \{0\}$. Portanto, $\mathcal{T}_k(f) = \mathcal{T}_k(f)^0 \oplus \mathrm{Im}(\gamma) = \mathcal{T}_k(f)^0 \oplus A\varepsilon_f$. Provado isto, e observando a identificação natural

$$\mathcal{T}_k(f)^0 \;=\; \mathrm{Syz}_1(J_f),$$

obtemos o seguinte resultado estrutural para o módulo de Saito:

Teorema 3.2. *Sejam k corpo, $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ e $f = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in I_f$ polinômio eureliano, onde $h_i \in A$. Tome $\varepsilon_f = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{T}_k(f)$. Então*

$$\mathcal{T}_k(f) \;=\; \mathrm{Syz}_1(J_f) \;\oplus\; A\varepsilon_f$$

Note que este resultado implica na seguinte expressão para o número mínimo de geradores:

$$\mu(\mathcal{T}_k(f)) \;=\; \beta_1 \;+\; 1,$$

onde $\beta_1 = \mu(\mathrm{Syz}_1(J_f))$ é o primeiro número de Betti de J_f. Além disso, $\mathrm{posto}(\mathcal{T}_k(f)) = n$ (número de indeterminadas do anel A), pois $\mathrm{posto}(\mathcal{T}_k(f)) = \mathrm{posto}(\mathrm{Syz}_1(J_f)) + 1 = (\mathrm{posto}(A^n) - 1) + 1 = n$.

Note, também, a seguinte consequência homológica:

Proposição 3.3. Para cada $i \geq 1$, temos um isomorfismo de A-módulos

$$\mathrm{Ext}^i_A(\mathcal{T}_k(f), A) \;\cong\; \mathrm{Ext}^{i+2}_A\left(\frac{A}{J_f}, A\right).$$

[1]Quando existe um tal homomorfismo γ, satisfazendo $\varphi \circ \gamma = Id$, dizemos que a sequência é *cindida* e que γ é uma *cisão* para a sequência.

Demonstração: Como evidentemente $A\varepsilon_f$ é A-livre, o Teorema acima implica em

$$\mathrm{Ext}^i_A(\mathcal{T}_k(f), A) \;=\; \mathrm{Ext}^i_A(\mathrm{Syz}_1(J_f), A),$$

mas por outro lado

$$\mathrm{Ext}^i_A(\mathrm{Syz}_1(J_f), A) \;\cong\; \mathrm{Ext}^{i+1}_A(J_f, A) \;\cong\; \mathrm{Ext}^{i+2}_A(A/J_f, A),$$

o que prova o isomorfismo afirmado.

$\square$

Como consequência imediata é interessante observar que, no caso $\mathrm{alt}(J_f) \geq 4$, tem-se $\mathrm{Ext}^i_A(\mathcal{T}_k(f), A) = 0$ sempre que $i \leq \mathrm{alt}(J_f) - 3$.

Finalmente, quanto à profundidade do módulo de Saito, derivamos a seguinte fórmula explícita:

Corolário 3.4. Seja $f \in A$ polinômio homogêneo de grau $d > 0$, com ideal gradiente próprio, não nulo e não principal. Então

$$\mathrm{prof}\,(\mathcal{T}_k(f)) = \mathrm{prof}\left(\frac{A}{J_f}\right) + 2.$$

Em particular $\mathrm{prof}(\mathcal{T}_k(f)) \geq 2$, valendo igualdade se e somente se $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Ass}_A(A/J_f)$.

Demonstração: Tome as sequências exatas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Syz}_1(J_f) \longrightarrow A^n \longrightarrow J_f \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow J_f \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{J_f} \longrightarrow 0.$$

Assim, temos que $\mathrm{dh}(J_f) = \mathrm{dh}(\mathrm{Syz}_1(J_f)) + 1$ e $\mathrm{dh}\left(\frac{A}{J_f}\right) = \mathrm{dh}(J_f) + 1$. Então, usando o Teorema 3.2, $\mathrm{dh}\left(\frac{A}{J_f}\right) = \mathrm{dh}(\mathcal{T}_k(f)) + 2$. Pelo Teorema 1.9, segue que $\mathrm{dh}(\mathcal{T}_k(f)) + \mathrm{prof}(\mathcal{T}_k(f)) = \mathrm{prof}(A) = n$ e $\mathrm{dh}\left(\frac{A}{J_f}\right) + \mathrm{prof}\left(\frac{A}{J_f}\right) = \mathrm{prof}(A) = n$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{prof}(\mathcal{T}_k(f)) &= n - \mathrm{dh}(\mathcal{T}_k(f)) \\
&= n - \mathrm{dh}\left(\frac{A}{J_f}\right) + 2 \\
&= n - n + \mathrm{prof}\left(\frac{A}{J_f}\right) + 2 \\
&= \mathrm{prof}\left(\frac{A}{J_f}\right) + 2.
\end{aligned}$$

□

A seguir, obtemos geradores explícitos para o módulo de Saito, construídos a partir de uma apresentação livre conveniente do ideal jacobiano.

Proposição 3.5. Considere a apresentação livre $A^r \xrightarrow{\Phi} A^{n+1} \longrightarrow J_f \longrightarrow 0$ tomada com relação ao conjunto ordenado de geradores $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, f\}$ de J_f, com seus devidos sinais. Escreva $\Phi = (Q_{ij})$, $1 \leq i \leq n+1$ e $1 \leq j \leq r$. Então

$$\mathcal{T}_k(f) = \sum_{j=1}^{r} A\delta_j$$

com $\delta_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $j = 1, \cdots, r$.

Demonstração: Seja $\delta \in \mathcal{T}_k(f) \subset \mathrm{Der}_k(A)$. Existem $p_1, \cdots, p_n \in A$, tais que $\delta = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Uma vez que $\delta(f) = bf$, para algum $b \in A$, temos que $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - bf = 0$, isto é,

$$v := (p_1, \cdots, p_n, -b) \in \mathrm{Syz}_1(J_f) = \sum_{j=1}^{r} Av_j,$$

onde $v_j = (Q_{1j}, \cdots, Q_{nj}, Q_{(n+1)j})$ corresponde ao j-ésimo vetor coluna de Φ. Logo, existem $g_1, \cdots, g_r \in A$, tais que $v = \sum_{j=1}^{r} g_j v_j$, e consequentemente, $\delta = \sum_{j=1}^{r} g_j \delta_j \in \sum_{j=1}^{r} A\delta_j$. Por outro lado, como as colunas de Φ são sizigias de J_f, para cada $j = 1, \cdots, r$, temos que $\delta_j(f) = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} = -Q_{(n+1)j} f \in (f)$, e portanto, $\sum_{j=1}^{r} A\delta_j \subset \mathcal{T}_k(f)$, como queríamos.

□

Observação 3.1. Se f é homogêneo (standard), então o seu módulo de Saito possui geradores homogêneos, ou seja, os geradores $\delta_1, \ldots, \delta_r$ de $\mathcal{T}_k(f)$ fornecidos pelo resultado acima podem ser tomados como derivações homogêneas. Em outras palavras, $\mathcal{T}_k(f)$ é um módulo graduado. Primeiro, podemos graduar $\mathrm{Der}_k(A) = \bigoplus_{j=1}^{n} A \frac{\partial}{\partial x_j}$ da seguinte forma:

$$\mathrm{Der}_k(A) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Der}_k(A)_d, \qquad \mathrm{Der}_k(A)_d = \bigoplus_{j=1}^{n} A_{d+1} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

de modo que $\mathcal{T}_k(f)$ herda uma estrutura de A-submódulo graduado de $\mathrm{Der}_k(A)$:

$$\mathcal{T}_k(f) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{T}_k(f)_d,$$

onde

$$\mathcal{T}_k(f)_d = \mathcal{T}_k(f) \cap \mathrm{Der}_k(A)_d = \mathcal{T}_k(f) \cap \left(\bigoplus_{j=1}^{n} A_{d+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Proposição 3.6. Dado $f \in A$, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_k(f) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(A) \longrightarrow \frac{J_f}{(f)} \longrightarrow 0. \tag{3.3}$$

Demonstração: Tome o epimorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{Der}_k(A) & \longrightarrow & I_f \\ & \sum_{i=1}^n h_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \longmapsto & \sum_{i=1}^n h_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}. \end{array} \tag{3.4}$$

Considere $\overline{\varphi} := \pi \circ \varphi$, onde $\pi : I_f \twoheadrightarrow \frac{(I_f, f)}{(f)} = \frac{J_f}{(f)}$. Agora, basta mostrar que $\ker(\overline{\varphi}) = \mathcal{T}_k(f)$. Com efeito, dado $\delta = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{T}_k(f)$, segue que $\overline{\varphi}(\delta) = \overline{\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}} = \overline{0}$, pois $\delta(f) \in (f)$. Logo, $\mathcal{T}_k(f) \subset \ker(\overline{\varphi})$. Por outro lado, para $\delta = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \ker(\overline{\varphi})$, segue que $\overline{0} = \overline{\varphi}(\delta) = \overline{\varphi}(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}) = \overline{\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}} = \overline{\delta(f)}$, isto é, $\delta(f) \in (f)$. Assim, $\delta \in \mathcal{T}_k(f)$. Portanto, $\ker(\overline{\varphi}) = \mathcal{T}_k(f)$.

$\square$

Proposição 3.7. $\mathcal{T}_k(f)$ é um A-módulo reflexivo.

Demonstração: Pelo Teorema 3.2, obtemos que $\mathcal{T}_k(f)$ é reflexivo se e somente se o módulo $Z = \mathrm{Syz}_1(J_f)$ também for reflexivo. Mas claramente temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow A^n \longrightarrow A \longrightarrow A/J_f \longrightarrow 0,$$

ou seja, $Z = \mathrm{Syz}_2(A/J_f)$, de modo que Z é um módulo de sizigias de ordem 2 sobre um domínio normal (mais que isso: A é regular) e portanto Z é reflexivo.

$\square$

Definição 3.2. Um polinômio $f \in A = k[x_1, \ldots, x_n]$ é dito um *divisor livre* se $\mathcal{T}_k(f)$ é um A-módulo livre (necessariamente de posto n).

Saito, em seu famoso artigo [23], deu um critério efetivo para divisores livres num contexto analítico, cujo enunciado algébrico é o seguinte:

Teorema 3.8 (Critério de Saito)**.** *Se $f \in A = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ é um polinômio reduzido e homogêneo, e se*

$$\tau_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

são n derivações em $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}(f)$ satisfazendo a propriedade de que o determinante da matriz $\mathcal{S} = (g_{ij})$ é da forma λf, para algum $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então f é um divisor livre, e $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ é uma base para $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}(f)$. E reciprocamente: se f é um divisor livre e $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ é uma base para $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}(f)$, então $\det(\mathcal{S}) = \lambda f$, para algum $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

A matriz $\mathcal{S}$ é chamada *matriz de Saito* de f.

Exemplo 3.1. Tome $f = xyz \in A = \mathbb{C}[x,y,z]$. Defina as derivações $\tau_1 = x\frac{\partial}{\partial x}$, $\tau_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$ e $\tau_3 = z\frac{\partial}{\partial z}$. Note que $\tau_j(f) = f$ para $j = 1,2,3$, e assim $\tau_j \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}(f)$. Nesta situação, obtemos

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

de modo que $\det(\mathcal{S}) = 1 \cdot f$, e assim pelo teorema de Saito obtemos que f é um divisor livre e $\mathcal{S}$ é uma matriz de Saito. Além disso, obtemos:

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C}}(f) \;=\; A\tau_1 \oplus A\tau_2 \oplus A\tau_3 \;\cong\; A^3.$$

O corolário abaixo é a versão algébrica para o fato particular, também observado por Saito num contexto local analítico, de que todo germe (em torno da origem de $\mathbb{C}^2$) de curva plana complexa é um divisor livre.

Corolário 3.9. Qualquer polinômio em $A = k[x,y]$ (k corpo) é um divisor livre.

Demonstração: Já que $\mathcal{T}_k(f)$ tem dimensão homológica finita (pois A é regular), podemos fazer uso da igualdade de Auslander-Buchsbaum (Teorema 1.9) e obter

$$\mathrm{dh}(\mathcal{T}_k(f)) \;+\; \mathrm{prof}(\mathcal{T}_k(f)) \;=\; 2.$$

Mas a Proposição 3.7 nos diz que $\mathrm{prof}(\mathcal{T}_k(f)) \geq 2$, de maneira que necessariamente $\mathrm{dh}(\mathcal{T}_k(f)) = 0$, isto é, $\mathcal{T}_k(f)$ é livre.

□

Antes de provarmos o próximo resultado, observamos o seguinte fato bem-conhecido da álgebra comutativa: se $I \subset A$ é um ideal homogêneo de altura ≥ 2, então $\mathrm{dh}(I) = 1$ (ou seja, I admite uma resolução livre de Hilbert-Burch) se, e somente se, I é perfeito de altura exatamente 2. De fato, suponha que I é perfeito de codimensão 2. Então $\frac{A}{I}$ é Cohen-Macaulay, isto é, $\dim\left(\frac{A}{I}\right) = \mathrm{prof}\left(\frac{A}{I}\right)$. Segundo o Teorema de Auslander-Buchsbaum (Teorema 1.9), $\mathrm{dh}\left(\frac{A}{I}\right) + \mathrm{prof}\left(\frac{A}{I}\right) = \mathrm{prof}(A) = n$, ou seja, $\mathrm{dh}\left(\frac{A}{I}\right) = n - \mathrm{prof}\left(\frac{A}{I}\right) = n - (n-2) = 2$. Assim, pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r] & A^n \arrow[r] \arrow[dr] & A \arrow[r] & \frac{A}{I} \arrow[r] & 0 \\ & & & I \arrow[r] & 0 & \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

obtemos que $\mathrm{dh}(I) = 1$. Reciprocamente, suponha que $\mathrm{dh}(I) = 1$. Daí, $2 = \mathrm{dh}\left(\frac{A}{I}\right) = \mathrm{prof}(A) - \mathrm{prof}\left(\frac{A}{I}\right) = n - \mathrm{prof}\left(\frac{A}{I}\right)$, e assim, $n - 2 = \mathrm{prof}\left(\frac{A}{I}\right) \leq \dim(\frac{A}{I}) = n - \mathrm{alt}(I) \leq n - 2$, e portanto $\mathrm{alt}(I) = 2$ e $\mathrm{prof}\left(\frac{A}{I}\right) = \dim(\frac{A}{I})$, como queríamos.

Mostraremos agora uma importante caracterização para divisores livres.

Teorema 3.10. *Seja $f \in A$ polinômio homogêneo, reduzido, de grau ≥ 2. Então f é um divisor livre se e somente se J_f é perfeito de codimensão* 2 (*isto é,* $\mathrm{dh}(J_f) = 1$).

Demonstração: Com tais hipóteses em f, é claro que J_f tem altura ≥ 2. Assim, pela discussão imediatamente acima, queremos provar que f é divisor livre se e só se $\mathrm{dh}(J_f) = 1$. Pelo Teorema 3.2, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Syz}_1(J_f) \longrightarrow \mathcal{T}_k(f) \longrightarrow A\varepsilon_f \longrightarrow 0.$$

Suponha f um divisor livre. Então $\mathcal{T}_k(f)$ é livre e assim, pelo Teorema 3.2, $\mathrm{Syz}_1(J_f)$ é um A-módulo projetivo (logo livre, pois estamos no contexto graduado). Portanto, a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Syz}_1(J_f) \longrightarrow A^n \longrightarrow J_f \longrightarrow 0 \tag{3.6}$$

é uma resolução livre, o que significa $\mathrm{dh}(J_f) = 1$.

Reciprocamente, suponha que $\mathrm{dh}(J_f) = 1$. Então, da sequência (3.6), segue que $\mathrm{Syz}_1(J_f)$ é livre. Assim, novamente, pelo Teorema 3.2, temos que $\mathcal{T}_k(f)$ é livre. Portanto, f é divisor livre.

□

Exemplo 3.2. Seja $f = xyz(x + y) \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Então f é um divisor livre, uma vez que J_f é perfeito de altura 2, isto é, $\mathrm{dh}(J_f) = 1$. De fato, a matriz

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & xy + y^2 \\ -3z & -xz - 2yz \end{pmatrix}.$$

é uma matriz de Hilbert-Burch de J_f.

Uma questão pertinente é se o produto de divisores livres é um divisor livre. No exemplo abaixo, primeiramente dado em [20], vemos que isto não é verdade em geral.

Exemplo 3.3. Os polinômios $f = xyz$ e $g = x + y + z$ são divisores livres em $A = \mathbb{C}[x, y, z]$, porém o produto $h = fg = x^2yz + xy^2z + xyz^2$ não é divisor livre, uma vez que $\mathrm{dh}(J_h) = 2$.

Observação 3.2. Seja $f \in A$ um divisor livre homogêneo, reduzido, de grau ≥ 2. Em [18], vários resultados foram obtidos a respeito do módulo $\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f)}\right)$. Apenas para mencionar um dos mais importantes, tem-se que $\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f)}\right)$ possui uma resolução A-livre graduada minimal do tipo:

$$0 \longrightarrow A^n(-(d-1)) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} A(-(d_i-1)) \oplus A \longrightarrow \mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f)}\right) \longrightarrow 0.$$

Como consequência, $\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f)}\right)$ tem a seguinte função Hilbert:

$$H\left(\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f)}\right), \rho\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-d_i+\rho}{n-1} + \binom{n-1+\rho}{n-1} - n\cdot\binom{n-d+\rho}{n-1}.$$

Capítulo 4

Divisores livres em $\mathbb{P}^2$

Seja $A = \mathbb{C}[x, y, z]$ com a graduação padrão e seja $I \subset A$ um ideal. Assuma que, I tem codimensão 2 e que I é gerado minimamente por três polinômios homogêneos de mesmo grau, digamos $I = (f_1, f_2, f_3)$. Dizemos que $(a, b, c) \in A^3$ é uma *sizigia regular* de I se $\{a, b, c\}$ é uma sequência regular e

$$af_1 + bf_2 + cf_3 = 0.$$

Dizemos que I é *localmente uma interseção completa* se o ideal $I_P \subset A_P$ pode ser gerado por dois elementos, para todo ideal primo minimal P de I.

Lema 4.1. Seja $I = (f_1, f_2, f_3)$ localmente uma interseção completa, com $\mathrm{alt}(I) = 2$ e $f_1, f_2, f_3 \in A$ homogêneos de mesmo grau. Então, I é um ideal perfeito se, e somente se, I possui uma sizigia regular.

Demonstração: Suponha que I possui uma sizigia regular, digamos $(a, b, c) \in A^3$. Logo, $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$, isto é, $af_1 = -bf_2 - cf_3 \in (b, c)$. Sendo A graduado, temos b, c, a sequência regular. Assim, $a \notin (b, c)$ e então $f_1 \in (b, c)$. Dessa forma, $f_1 = bd + ce$, para alguns $d, e \in A$. Então, $0 = abd + ace + bf_2 + cf_3 = b(ad + f_2) + c(ae + f_3)$, ou seja, $-b(ad + f_2) = c(ae + f_3)$. Como $b \notin (c)$ e $c \notin (b)$, segue que $ad + f_2 = cg$ e $ae + f_3 = -bg$, para algum $g \in A$. Isto é, $-f_2 = ad - cg$ e $f_3 = -ae - bg$. Então f_1, f_2 e f_3 são os menores 2×2 da matriz

$$\begin{bmatrix} a & g \\ b & -e \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema de Hilbert-Burch, segue que I é perfeito de codimensão 2.

Agora, suponha que I é perfeito de codimensão 2, isto é, $\frac{A}{I}$ possui uma resolução livre minimal

$$0 \longrightarrow A^2 \xrightarrow{\varphi} A^3 \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{I} \longrightarrow 0,$$

onde $\varphi = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$. Tome $f_1 = b_1c_2 - b_2c_1$, $f_2 = a_1c_2 - a_2c_1$ e $f_3 = a_1b_2 - a_2b_1$, os menores 2×2 de φ que geram I minimamente. Se $\{a_1, b_1, c_1\}$ é sequência regular, então $(a_1, -b_1, c_1)$ é uma sizigia regular de I, pois $a_1f_1+(-b_1)f_2+c_1f_3 = 0$. De forma análoga, se $\{a_2, b_2, c_2\}$ é sequência regular, então $(a_2, -b_2, c_2)$ é uma sizigia regular de I. Dessa maneira, suponha que $\{a_1, b_1, c_1\}$ e $\{a_2, b_2, c_2\}$ não são sequências regulares e suponha que $\mathrm{grau}(a_1) = \mathrm{grau}(b_1) = \mathrm{grau}(c_1) = d_1$ e $\mathrm{grau}(a_2) = \mathrm{grau}(b_2) = \mathrm{grau}(c_2) = d_2$, com $d_2 \geq d_1$.

Fato 1: $Z = V(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) = \emptyset$.
Com efeito, suponha que existe $p \in Z$. Então $a_1(p) = a_2(p) = b_1(p) = b_2(p) = c_1(p) = c_2(p) = 0$. Assim, $f_1(p) = f_2(p) = f_3(p) = 0$, isto é, $p \in V(I)$. Seja P o ideal do ponto p. Desde que I é localmente uma interseção completa, localizando em P, temos que

$$0 \longrightarrow A_P^2 \longrightarrow A_P^3 \longrightarrow I_P \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow A_P \longrightarrow A_P^2 \longrightarrow I_P \longrightarrow 0$$

são duas resoluções livres de I_P. A primeira resolução não é minimal. Então, após algumas operações-coluna, obtemos que a matriz φ tem uma entrada que é um elemento invertível em A_P. Então alguma combinação polinomial de a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 não se anula em p, o que é uma contradição. Portanto, $Z = \emptyset$.

Para cada $f \in A_{d_2-d_1}$, defina o ideal

$$I(f) = (a_2 - fa_1, fb_1 - b_2, c_2 - fc_1)\,.$$

Fato 2: $V(I(f)) \subset V(I)$, para todo $f \in A_{d_2-d_1}$.
Seja $f \in A_{d_2-d_1}$. Se $V(I(f)) = \emptyset$, então $V(I(f)) \subset V(I)$. Se $V(I(f)) \neq \emptyset$, então existe $p_f \in V(I(f))$. Daí, $(a_2 - fa_1)(p_f) = 0$, $(fb_1 - b_2)(p_f) = 0$ e $(c_2 - fc_1)(p_f) = 0$. Dessa

forma,

$$\begin{aligned} f_1(p_f) &= (b_1c_2 - b_2c_1 + fb_1c_1 - fb_1c_1)(p_f) \\ &= [b_1(c_2 - fc_1) + c_1(fb_1 - b_2)]\,(p_f) \\ &= b_1(p_f)(c_2 - fc_1)(p_f) + c_1(p_f)(fb_1 - b_2)(p_f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $f_2(p_f) = f_3(p_f) = 0$ e assim obtemos o fato afirmado.

Fato 3: Se $p \in V(I(f)) \cap V(I(g))$, para $f, g \in A_{d_2-d_1}$, então $f(p) = g(p)$.
Pelo Fato 1, sabemos que $Z = \emptyset$, ou seja, p não anula algum polinômio do conjunto $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que $a_1(p) \neq 0$. Desde que $p \in V(I(f)) \cap V(I(g))$, temos

$$f(p)a_1(p) = a_2(p) = g(p)a_1(p),$$

ou seja,

$$f(p) = \frac{a_2(p)}{a_1(p)} = g(p).$$

Como queríamos mostrar.

Agora, suponha que, para todo $f \in A_{d_2-d_1}$, temos $V(I(f)) \neq \emptyset$. Então, dado $f \in A_{d_2-d_1}$ existe $p_f \in V(I(f))$. Podemos supor que f não se anula em todo ponto de $V(I)$. Considere a sequência de polinômios distintos

$$f,\ 2f,\ 3f, \ldots, kf, \ldots.$$

Usando a contrapositiva do Fato 3, temos que, se $i \neq j$, então $V(I(if)) \cup V(I(jf)) = \emptyset$. Ademais, pelo Fato 2, temos que $V(I(if)) \subset V(I)$, para todo $i \geq 1$. Então $V(I)$ tem cardinalidade infinita. Mas isto é um absurdo pois $\mathrm{alt}(I) = 2$, ou seja, A/I é o anel de coordenadas homogêneas de um conjunto finito de pontos em $\mathbb{P}^2$. Portanto, existe $f \in A_{d_2-d_1}$, tal que $V(I(f)) = \emptyset$. Logo, pela Proposição A.3, obtemos que $\{a_2 - fa_1, fb_1 - b_2, c_2 - fc_1\}$ forma uma sequência regular. Além disso,

$$\begin{aligned} & (a_2 - fa_1)f_1 + (fb_1 - b_2)f_2 + (c_2 - fc_1)f_3 \\ = \;& (a_2 - fa_1)(b_1c_2 - b_2c_1) + (fb_1 - b_2)(a_1c_2 - a_2c_1) + (c_2 - fc_1)(a_1b_2 - a_2b_1) \\ = \;& a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_1b_1c_2f + a_1b_2c_1f - a_1b_2c_2 + a_2b_2c_1 + a_1b_1c_2f - \\ & -a_2b_1c_1f + a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 - a_1b_2c_1f + a_2b_1c_1f \\ = \;& 0. \end{aligned}$$

Dessa maneira, $(a_2 - fa_1, fb_1 - b_2, c_2 - fc_1)$ é sizigia regular de I.

$\square$

Observação 4.1. Na realidade, como observado em [27, pg. 5], se o ideal (de altura dois) $I = (f_1, f_2, f_3) \subset A = \mathbb{C}[x, y, z]$ admite uma sizigia regular então automaticamente I já é localmente uma interseção completa. Assim, o Lema acima pode ser enunciado através da equivalência das duas seguintes afirmações:

- I possui uma sizigia regular;
- I é perfeito e localmente uma interseção completa.

Em particular, se o ideal I tem sizigia regular então I é perfeito. Esse fato fornece imediatamente (em conjunto com o Teorema 3.10) o seguinte critério para divisores livres no plano projetivo, provado em [27]:

Teorema 4.2. *Seja $f \in A = \mathbb{C}[x, y, z]$ um polinômio homogêneo, reduzido, de grau ≥ 2. Se J_f possui alguma sizigia regular então f é um divisor livre.*

Exemplo 4.1. Já provamos anteriormente que o monômio $f = xyz \in A = \mathbb{C}[x, y, z]$ é um divisor livre, usando o critério de Saito. Agora queremos usar o critério das sizigias regulares apresentado acima. Temos $J_f = (yz, xz, xy)$, e

$$x \cdot yz + y \cdot xz + (-2z) \cdot xy = 0.$$

Sendo $\{x, y, -2z\}$ uma sequência regular, o Teorema 4.2 fornece que f é um divisor livre.

Exemplo 4.2. Considere a cúbica homogênea $f = y(x^2 + yz) \in A = \mathbb{C}[x, y, z]$. Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2.$$

Como $\left\{-\frac{x}{2}, y, -2z\right\}$ é uma sequência regular e

$$\left(-\frac{x}{2}\right) \cdot (2xy) + y \cdot (x^2 + 2yz) + (-2z) \cdot y^2 = 0,$$

segue do Teorema 4.2 que f é divisor livre.

4.1 Sobre divisores livres irredutíveis em $\mathbb{P}^2$

Sejam k corpo algebricamente fechado e $A = k[x, y, z]$.

Proposição 4.3. Seja $f \in A$ homogêneo e irredutível, com grau$(f) \leq 3$. Então, f é divisor livre se, e somente se, grau$(f) = 1$.

Demonstração: Se grau$(f) = 1$, então $f = ax+by+cz$, $a \neq 0$. Como $a = \partial f/\partial x \in J_f$, segue que $J_f = A$ e trivialmente f é divisor livre.

Se grau$(f) = 2$, então pela Proposição A.4 temos que $V(f)$ é o conjunto vazio ou o círculo unitário, isto é, $f = x^2 + y^2 + z^2$ ou $f = x^2 + y^2 - z^2$. Observe que $f = x^2 + y^2 + z^2$ é irredutível. De fato, suponha que f seja redutível. Então $f = (a_1x + b_1y + c_1z)(a_2x + b_2y + c_2z)$, para certos $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Logo,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (a_1x + b_1y + c_1z)(a_2x + b_2y + c_2z) \\ &= a_1a_2x^2 + a_1b_2xy + a_1c_1xz + a_2b_2xy + b_1b_2y^2 + c_1b_2yz + a_1c_2xz \\ &\quad +b_1c_2yz + c_1c_2z^2. \end{aligned}$$

Por um lado, $a_1a_2 = 1$ e $b_1b_2 = 1$, e assim, $a_1 \neq 0 \neq b_2$. Por outro lado, $a_1b_2 = 0$, o que é uma contradição. Analogamente, mostra-se que $f = x^2 + y^2 - z^2$ é irredutível. Utilizando o programa *Macaulay* [4], obtemos que $\mathrm{dh}(J_{f_1}) = \mathrm{dh}(J_{f_2}) = 2$, onde $f_1 = x^2 + y^2 + z^2$ e $f_2 = x^2 + y^2 - z^2$, e portanto, f_1 e f_2 não são divisores livres.

Se grau$(f) = 3$, então da Proposição A.5 segue que $V(f)$ é uma curva não singular, uma curva com singularidade nodal ou uma cúspide, isto é, $f \in \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1 = x^3+y^3+z^3+\lambda xyz$, $f_2 = y^2z-x^3-x^2z$ e $f_3 = zy^2-x^3$, respectivamente. Para o caso da curva ser não singular, temos que $\mathrm{alt}(J_{f_1}) = \mathrm{alt}(3x^2+\lambda yz, 3y^2+\lambda xz, 3z^2+\lambda xy) = 3$, e assim, f_1 não é divisor livre. E para o caso de a curva ter uma singularidade nodal ou cuspidal, observe que $xz\mathfrak{m} \subset J_{f_2}$ e $xy\mathfrak{m} \subset J_{f_3}$, mas $xz \notin J_{f_2}$ e $xy \notin J_{f_3}$. Assim, os conjuntos dos elementos $\frac{A}{J_{f_2}}$-regulares em $\mathfrak{m}$ e $\frac{A}{J_{f_3}}$-regulares em $\mathfrak{m}$ são vazios. Logo, $\mathrm{prof}\left(\frac{A}{J_{f_2}}\right) = \mathrm{prof}\left(\frac{A}{J_{f_2}}\right) = 0$, mas $\dim\left(\frac{A}{J_{f_2}}\right) \neq 0$ e $\dim\left(\frac{A}{J_{f_3}}\right) \neq 0$, pois $xz + J_{f_2} \neq J_{f_2}$ e $xy + J_{f_3} \neq J_{f_3}$. Portanto, J_{f_2} e J_{f_3} não são Cohen-Macaulay, isto é, f não é divisor livre.

□

Suponha agora que o polinômio irredutível f tem grau 4. Neste caso, segundo Simis e Tohaneanu em [26, pg. 12], f não deveria, "moralmente", ser um divisor livre. No mesmo artigo, os autores construíram uma família de divisores livres irredutíveis em $\mathbb{P}^2$ com grau $d \geq 5$,

$$y^{d-1}z + a_1x^d + a_2x^2y^{d-2} + a_3xy^{d-1} + a_4y^d \in A$$

com $a_1, a_2 \neq 0$. Depois, em 2014, Nanduri [21] generalizou a família acima. Nanduri provou que, para $d \geq 5$,

$$F = x^{d-\alpha}F_1(x,y) + y^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + \alpha + 1}F_2(x,y) + x^\beta y^{d-\beta-1}z$$

é um divisor livre irredutível, onde

- $\alpha, \beta \geq 0$ e $0 \leq \alpha + \beta \leq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor - 3$
- $F_1(x,y)$ é homogêneo de grau α e $x \nmid F_1, y \nmid F_1$
- $F_2(x,y)$ é homogêneo de grau $d - \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - \alpha - 1$ e $x \nmid F_2, y \nmid F_2$.

Uma matriz de Saito de F é

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} x & x^{\beta+1}y^{\gamma+2}\dfrac{\partial F_1}{\partial y} & H_1 + x^\beta y^{\gamma+1}z\dfrac{\partial F_1}{\partial y}E \\ y & -x^\beta y^{\gamma+2}\left(x\dfrac{\partial F_1}{\partial x} + (d-\alpha)F_1\right) & H_3 - x^{\beta-1}y^{\gamma+1}z\left(x\dfrac{\partial F_1}{\partial x} + (d-\alpha)F_1\right) \\ z & G_3 - x^\beta y^{\gamma+1}zW & H_5 + H_6 z - x^{\beta-1}y^\gamma z^2 EW \end{pmatrix}.$$

Na sequência, consideremos o seguinte critério de irredutibilidade:

Lema 4.4. Seja $p(y,z) = z^3 + f_1(y)f_2(y)z^2 + cf_1(y)^2z + df_1(y)^3 \in k[y,z]$, com $f_1(y), f_2(y) \in k[y]$, $\mathrm{grau}(f_1(y)) = \mathrm{grau}(f_2(y)) = 2$ e $c, d \in k\backslash\{0\}$. Então $p(y,z)$ é irredutível em $k[y,z]$.

Demonstração: Suponha que $p(y,z)$ é redutível. Então

$$p(y,z) = (z + g(y))(z^2 + h_1(y)z + h_2(y)) \tag{4.1}$$

onde $g(y), h_1(y), h_2(y) \in k[y]$. Logo,

$$p(y,z) = z^3 + (h_1(y) + g(y))z^2 + (h_2(y) + h_1(y)g(y))z + h_2(y)g(y). \tag{4.2}$$

Aparentemente, não existe uma contradição em relação aos graus. Note que existem $h_1'(y), h_2'(y) \in k[y]$, tais que $h_1(y) = g(y)h_1'(y)$ e $h_2(y) = g(y)h_2'(y)$. Substituindo em (4.2), segue que

$$p(y,z) = z^3 + g(y)(h_1'(y) + 1)z^2 + g(y)(h_2'(y) + h_1'(y)g(y))z + h_2'(y)g(y)^2. \tag{4.3}$$

Temos $f_1(y) = g(y)g'(y)$, para $g'(y) \in k[y]$. Comparando as equações, encontramos

$$g(y)^2h_2'(y) = g(y)h_2(y) = df_1(y)^3 = dg(y)^3g'(y)^3,$$

ou seja, $h_2'(y) = dg(y)g'(y)^3$. Por um lado,

$$\begin{aligned} cg(y)^2 g'(y) &= cf_1(y)^2 \\ &= g(y)(g(y)h_1'(y) + h_2'(y)) \\ &= g(y)(g(y)h_1'(y) + dg(y)g'^3) \\ &= g(y)^2(h_1'(y) + dg'(y)^3), \end{aligned}$$

e daí $(cg'(y) - dg'(y)^2)g'(y) = h_1'(y)$, ou seja, $g'(y)$ divide $h_1'(y)$. Por outro lado,

$$f_2(y)g(y)g'(y) = f_1(y)f_2(y) = g(y)(1 + h_1'(y)).$$

Então, $f_2(y)g'(y) = (1 + h_1'(y))$, isto é, $g'(y)$ divide $1 + h_1'(y)$. Contradição.

$\square$

Faremos agora uma explanação sobre uma família de divisores livres irredutíveis de grau 6, originalmente encontrada em [25]. Para tanto, seja $B = k[u, v, x, y, z]$ e considere a equação cúbica

$$h(T) \ = \ T^3 \ - \ pT \ + \ q \ \in \ B[T],$$

onde $p = x^2 + vy^2 + uxz$ e $q = u(x^2 + vy^2)z$. Temos que $h(T)$ é um polinômio quase-homogêneo de grau 6, onde estamos tomando os graus:

$$\begin{array}{ll} \text{grau}(u) = 1, & \text{grau}(x) = 2 \\ \text{grau}(v) = 2, & \text{grau}(y) = 1 \\ \text{grau}(T) = 2, & \text{grau}(z) = 1. \end{array}$$

Então, o discriminante[1] de $h(T)$ é o polinômio quase-homogêneo de grau 12

$$F(u, v, x, y, z) = 4(x^2 + vy^2 + uxz)^3 - 27u^2(x^2 + vy^2)^2 z^2.$$

Para cada $(a, b) \in \mathbb{A}^2$, com $ab \neq 0$, a fibra $f_{a,b} = F(a, b, x, y, z) \in k[x, y, z]$ é chamada *sextica de Cayley* e o conjunto

$$\Gamma = \left\{ f_{a,b} \in k[x, y, z] \ ; (a, b) \in \mathbb{A}^2, ab \neq 0 \right\}$$

é chamado *família de Cayley*, onde aqui redefinimos a graduação das variáveis para $\text{grau}(x) = \text{grau}(y) = \text{grau}(z) = 1$.

[1]Dada uma cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, o seu discriminante é dado por $\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$.

Teorema 4.5. *Seja $f \in \Gamma$ uma sextica de Cayley. Então f é um divisor livre irredutível de grau 6.*

Demonstração: É suficiente mostrar a irredutibilidade de f na parte afim $x = 1$. Note que

$$\begin{aligned}
f_{a,b}(1,y,z) &= 4(1+by^2+az)^3 - 27a^2(1+by^2)^2z^2 \\
&= 4+12b^2y^4-15a^2z^2+12by^2+12az+24aby^2z+4b^3y^6-42a^2by^2z^2 \\
&\quad +12ab^2y^4z+4a^3z^3-27a^2b^2y^4z^2 \\
&= 4a^3z^3-(15a^2+42a^2by^2+27a^2b^2y^4)z^2+(12a+24aby^2+12ab^2y^4)z \\
&\quad +(4+12b^2y^4+12by^2+4b^3y^6) \\
&= z^3-\frac{3}{4}(9by^2+5)\left(\frac{b}{a}y^2+\frac{1}{a}\right)z^2+3\left(\frac{b}{a}y^2+\frac{1}{a}\right)^2 z+\left(\frac{b}{a}y^2+\frac{1}{a}\right)^3.
\end{aligned}$$

De acordo com o Lema 4.4, $f_{a,b}(1,y,z)$ é irredutível, tomando $f_1(y) = \dfrac{b}{a}y^2 + \dfrac{1}{a}$ e $f_2(y) = -\frac{3}{4}(9by^2+5)$. Além disso, usando o programa *Macaulay*, temos que $J_{f_{a,b}}$ é ideal perfeito de codimensão 2, com matriz de Hilbert-Burch

$$\begin{pmatrix}
-\dfrac{8b}{5a}y^2 - xz + \dfrac{a}{5}z^2 & -x^2y - by^3 + axyz - \dfrac{a^2}{2} \\
\dfrac{8b}{5a}xy - \dfrac{b}{5}yz & x^3 + bxy^2 - \dfrac{a}{2}x^2z + \dfrac{ab}{2}y^2z \\
x^2 + by^2 + 3axz - a^2z^2 & h(a)yz^2
\end{pmatrix}$$

onde $h(a) \in \mathbb{C}[a]$. Portanto, a sextica de Cayley f é um divisor livre irredutível de grau 6.

□

Capítulo 5

Novas caracterizações para divisores livres

Neste capítulo, sejam k um corpo de característica zero e $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ com a graduação padrão. Antes de apresentarmos dois novos critérios para divisores livres, ambos obtidos originalmente em [18], provaremos o seguinte fato auxiliar (obtido no mesmo artigo), que também desperta interesse próprio:

Lema 5.1. Seja $I \subsetneqq A$ um ideal radical e homogêneo. Para cada $q \geq 2$, temos que

(a) $\mathcal{T}_k\left(I^q\right) = \mathcal{T}_k\left(I\right)$

(b) $\mu\left(\mathrm{Der}_k\left(\dfrac{A}{I^q}\right)\right) = \mu\left(\mathcal{T}_k\left(I\right)\right)$

Demonstração: **(a)** Dados $\delta \in \mathcal{T}_k\left(I\right)$ e $f_1, f_2, \cdots, f_q \in I$, podemos escrever

$$\delta\left(\prod_{i=1}^{q} f_i\right) = \sum_{j=1}^{q}\left(\prod_{i \neq j} f_i\right)\delta(f_j) \in I^q$$

isto é, $\mathcal{T}_k\left(I\right) \subset \mathcal{T}_k\left(I^q\right)$. Agora, segundo Kaplansky [12, página 12], tem-se $\mathcal{T}_k\left(L\right) \subset \mathcal{T}_k\left(\sqrt{L}\right)$, para todo ideal $L \subset A$. Assim, fazendo $L = I^q$ e como I é radical, segue que $\mathcal{T}_k\left(I^q\right) \subset \mathcal{T}_k\left(I\right)$.

(b) Note que,

$$I^q\mathrm{Der}_k(A) \subseteq I^2\mathrm{Der}_k(A) \subseteq I\mathcal{T}_k(I) \subseteq \mathfrak{m}\mathcal{T}k(I),$$

onde $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n) \subset A$. Logo, temos o epimorfismo

$$\pi_q : \frac{\mathcal{T}_k(I)}{I^q\mathrm{Der}_k(A)} \longrightarrow \frac{\mathcal{T}_k(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{T}_k(I)} \cong \mathcal{T}_k(I) \otimes_A k.$$

Dessa forma, usando o item (a) e o Lema 2.5, obtemos o epimorfismo

$$\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I^q}\right) \cong \frac{\mathcal{T}_k(I^q)}{I^q\mathrm{Der}_k(A)} \twoheadrightarrow \mathcal{T}_k(I) \otimes k$$

e portanto,

$$\mu\left(\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I^q}\right)\right) \geq \mu\left(\mathcal{T}_k(I) \otimes k\right) = \mu\left(\mathcal{T}_k(I)\right). \tag{5.1}$$

Por outro lado, novamente pelo item (a) e pelo Lema 2.5, temos o epimorfismo

$$\mathcal{T}_k(I) = \mathcal{T}_k(I^q) \longrightarrow \frac{\mathcal{T}_k(I^q)}{I^q\mathrm{Der}_k(A)} \cong \mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I^q}\right).$$

Logo,

$$\mu\left(\mathcal{T}_k(I)\right) \geq \mu\left(\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I^q}\right)\right). \tag{5.2}$$

De (5.1) e (5.2), chegamos à igualdade desejada.

□

Até o final do capítulo, $f \in A$ denota um polinômio homogêneo, reduzido, de grau ≥ 2.

Teorema 5.2. *f é divisor livre se, e somente se,*

$$\mu\left(\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f^2)}\right)\right) = n.$$

Demonstração: Suponha que f é divisor livre. Assim, $\mathcal{T}_k(f)$ é A-livre, ou seja, $\mathcal{T}_k(f) \cong A^n$. Pelo Lema 5.1, temos que

$$\mu\left(\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f^2)}\right)\right) = \mu\left(\mathcal{T}_k(f)\right) = n.$$

Reciprocamente, suponha que $\mu\left(\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f^2)}\right)\right) = n$. Novamente, pelo Lema 5.1, segue que $\mu\left(\mathcal{T}_k(f)\right) = \mu\left(\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f^2)}\right)\right) = n$. Como $\mathcal{T}_k(f)$ tem posto n, temos que $\mathcal{T}_k(f)$ é A-livre, e assim f é divisor livre.

□

Daqui em diante, assumiremos que $\mu(J_f) = n$, o que certamente é a situação de real interesse uma vez que esta condição simplesmente significa que as derivadas parciais de f são k-linearmente independentes. Em um contexto quase-homogêneo mais geral isto não seria tão natural, mas lembramos que estamos adotando em A a graduação *standard*.

Proposição 5.3. Se $f \in A$ é divisor livre, então

$$\mathrm{grau}(f) \ \geq \ n.$$

Demonstração: Este fato possui uma justificativa simples através do teorema de Hilbert-Burch, mas vamos apresentar uma outra demonstração, que nada tem a ver com a estrutura determinantal de J_f.

Do Lema 2.5 e do Lema 3.6, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}_k(f) \otimes_A \frac{A}{(f)} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \left(\frac{A}{(f)}\right)^n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dfrac{f\mathrm{Der}_k(A)}{f\mathcal{T}_k(f)} \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{\mathcal{T}_k(f)}{f\mathcal{T}_k(f)} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Der}_k\left(\dfrac{A}{(f)}\right) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dfrac{\mathrm{Der}_k(A)}{\mathcal{T}_k(f)} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \dfrac{J_f}{(f)} \arrow[dr] & 0 & \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Isto é,

$$\frac{f\mathrm{Der}_k(A)}{f\mathcal{T}_k(f)} \cong \frac{\mathrm{Der}_k(A)}{\mathcal{T}_k(f)} \cong \frac{J_f}{(f)}.$$

Assim, $\frac{J_f}{(f)}$ é isomorfo ao primeiro módulo de sizigias de $\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f)}\right)$. Dessa forma, $\frac{J_f}{(f)}$ é um A-módulo Cohen-Macaulay maximal, pois $\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f)}\right)$ é Cohen-Macaulay maximal (já que sua dimensão homológica sobre A é igual a 1, de onde concluímos que sua profundidade é $n-1$). Logo, pelo Lema 1.11 e pela identidade de Euler, temos que

$$n = \mu(J_f) = \mu\left(\frac{J_f}{(f)}\right) \leq e\left(\frac{A}{(f)}\right) \text{ posto}\left(\frac{J_f}{(f)}\right) = \mathrm{grau}(f) \cdot 1.$$

□

Definição 5.1. De acordo com Buchweitz and Mond [9], diz-se que o polinômio $f \in A$ é um *divisor livre linear* se f é um divisor livre e as entradas de qualquer matriz de Hilbert-Burch minimal de J_f são todas lineares (ou seja, J_f é um ideal linearmente apresentado), ou ainda, todas as sizigias minimais de J_f são lineares.

Segue facilmente que qualquer divisor livre linear possui grau exatamente n (ou seja, satisfaz a igualdade na Proposição acima), e reciprocamente, um divisor livre homogêneo de grau n é necessariamente linear no sentido de Buchweitz e Mond.

A seguir, apresentamos uma caracterização de divisores livres lineares usando a teoria dos módulos (ideais) de Ulrich (vide Definição 1.8).

Teorema 5.4. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *f é um divisor livre linear;*

(b) *$J_f/(f) \subset A/(f)$ é um ideal de Ulrich.*

Demonstração: Suponha que f é divisor livre linear. Então $\mathrm{grau}(f) = n$. Pela demonstração da Proposição 5.3 e pelo Lema 1.11, temos que

$$n = \mu(J_f) = \mu\left(\frac{J_f}{(f)}\right) \leq e\left(\frac{J_f}{(f)}\right) = \mathrm{grau}(f) \cdot 1 = n$$

isto é, $\mu\left(\frac{J_f}{(f)}\right) = e\left(\frac{J_f}{(f)}\right)$ e portanto, $\frac{J_f}{(f)}$ é um ideal de Ulrich.

Reciprocamente, suponha que $\frac{J_f}{(f)}$ é ideal de Ulrich. Então $\mu\left(\frac{J_f}{(f)}\right) = e\left(\frac{J_f}{(f)}\right)$. Novamente, pela demonstração da Proposição 5.3, segue que $\mu(J_f) = \mu\left(\frac{J_f}{(f)}\right) = \mathrm{grau}(f)$ e assim $\mathrm{grau}(f) = n$. Resta-nos provar que f é divisor livre. Como $\frac{J_f}{(f)}$ é Cohen-Macaulay maximal, temos $\mathrm{prof}\left(\frac{J_f}{(f)}\right) = n-1$, ou seja, $\mathrm{dh}\left(\frac{J_f}{(f)}\right) = 1$, e consequentemente $\mathrm{dh}(J_f) = 1$. Pelo Teorema 3.10, obtemos que f é divisor livre.

□

Exemplo 5.1. Considere a quártica irredutível

$$f \ = \ y^2z^2 - 4xz^3 - 4y^3w + 18xyzw - 27x^2w^2 \ \in \ A = \mathbb{C}[x, y, z, w].$$

Então $\mu(J_f) = 4$ e, portanto, f é um divisor livre linear e $J_f/(f)$ é um ideal de Ulrich.

Apêndice A

Alguns resultados auxiliares

Proposição A.1 (Lema de Nakayama)**.** Sejam A anel, M um A-módulo finitamente gerado e $I \subset \mathfrak{R}_A$ um ideal. Se $IM = M$, então $M = 0$.

Para uma demonstração, vide [10].

Proposição A.2 (Lema da esquiva)**.** Sejam A anel, $I, P_1, \cdots, P_n \subset A$ ideais, $P_i \in \operatorname{Spec}(A)$, $i = 1, \cdots, n$. Se $I \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, então $I \subset P_j$, para algum $j \in 1, \cdots, n$.

Para uma demonstração, vide [3].

Proposição A.3. Um conjunto de três polinômios $\{a, b, c\}$ em $A = k[x, y, z]$ forma uma sequência regular se, e somente se, $V(a, b, c) = \emptyset$ (como um subconjunto de $\mathbb{P}^2$), isto é, $\operatorname{alt}(a, b, c) = 3$.

Para uma demonstração, vide [10, corolário 17.7].

Proposição A.4. Qualquer curva de grau 2 no plano projetivo complexo pode ser transformada em uma das seguintes curvas:

(a) $V(x^2)$, uma reta dupla;

(b) $V(x^2 + y^2)$, dois pontos;

(c) $V(x^2 - y^2)$, duas retas;

(d) $V(x^2 + y^2 + z^2)$, o conjunto vazio;

(e) $V(x^2 + y^2 - z^2)$, o círculo unitário.

Para uma demonstração, vide [5, Teorema 5.1].

Proposição A.5. Qualquer curva de grau 3 no plano projetivo complexo pode ser transformada em uma das seguintes curvas:

(a) $V(x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz)$ com $\lambda \in \mathbb{C}$, uma curva não singular;

(b) $V(y^2 z - x^3 - x^2 z)$, uma curva nodal;

(c) $V(zy^2 - x^3)$, uma curva cuspidal.

Para uma demonstração, vide [2, Proposição B.5 e Lema B.8].

Referências Bibliográficas

[1] J. F. Andrade e A. Simis, *Tópicos de Álgebra Comutativa*, IMPA, Minas Gerais, 1981.

[2] G. de Assis Junior, *Cálculo de retas numa superfície cúbica* $\mathbb{P}^3$, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, UFPB, 2011.

[3] M.F. Atiyah e L.G. MacDonalds, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1969.

[4] D. Bayer and M. Stillman, *Macaulay*: a computer algebra system for algebraic geometry, Macaulay version 3.0 1994 (Macaulay for Windows by Bernd Johannes Wuebben, 1996).

[5] R. Bix, *Conics and cubics: A concrete introduction to algebraic curves.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] P. Brumatti e A. Simis, *The module of derivations of a Stanley-Reisner ring*, Proc. Amer. Math. Soc., 123 (1995), 1309-1318.

[7] W. Bruns e U. Vetter, *Determinantal rings*, Lecture Notes in Math., vol. 1327, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[8] W. Bruns e J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press, 1993.

[9] R.-O. Buchweitz e D. Mond, *Linear free divisors and quiver representations*, Cambridge University Press, 2006.

[10] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York 1995.

[11] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W. H. Freeman and Company, New York, 1910.

[12] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, Paris, 1957.

[13] I. Kaplansky, *Comutative Rings*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1974.

[14] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[15] H. Matsumura, *Commutative algebra*, volume 56 of Mathematics Lecture Note Series. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., second edition, 1980.

[16] C. B. Miranda-Neto, *Vector fields and a family of linear type modules related to free divisors*, J. Pure Appl. Algebra, 2011.

[17] C. B. Miranda-Neto, *Tangential idealizers and differential ideals*, Collect. Math., 2015.

[18] C. B. Miranda-Neto, *Graded derivation modules and algebraic free divisors*, J. Pure Appl. Algebra, 2015.

[19] C. B. Miranda-Neto, *Derivações e a Conjectura de Zariski–Lipman*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, UFPE, 2002.

[20] C. B. Miranda-Neto, *Teoria dos Módulos Idealizadores Diferenciais*, Tese de Doutorado, Departamento de Matemática, UFPE, 2006.

[21] R. Nanduri, *A family of irreducible free divisors in* $\mathbb{P}^2$, arXiv:1305.7464v2, 2014.

[22] J. Rotman, *An introduction to homological Algebra*, Springer, 1979.

[23] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (1980), 265-291.

[24] A. Simis, *Differential idealizers and algebraic free divisors*, in Commutative Algebra: Geometric, Homological, Combinatorial and Computational Aspects, Eds: A. Corso, P. Gimenez, M. V. Pinto and S. Zarzuela, pp. 211-226, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 244, Chapman & Hall/CRC 2005.

[25] A. Simis, *The depth of the Jacobian ring of a homogeneous polynomial in three variables*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2005), 1591-1598.

[26] A. Simis e S. O. Tohaneanu, *Homology of homogeneous divisors*, arXiv: 1207.5862v1, to appear in Israel J. Math. (2012).

[27] S. O. Tohaneanu, *On freeness of divisors on* $\mathbb{P}^2$, arXiv: 1203.2046, to appear in Comm. Alg. (2012).

[28] B. Ulrich, *Gorenstein rings and modules with high numbers of generators*, Math. Z. 188 (1984) 23-32.