Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Decaimento exponencial para a equação da onda semilinear com dissipação localmente distribuída

Jakcney Luan Azevedo de Sousa

João Pessoa – PB
Julho de 2014

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Decaimento exponencial para a equação da onda semilinear com dissipação localmente distribuída

por

Jakcney Luan Azevedo de Sousa

sob a orientação do professor

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna

João Pessoa – PB
Julho de 2014

S725d Sousa, Jakcney Luan Azevedo de.
Decaimento exponencial para a equação da onda semilinear com dissipação localmente distribuída / Jakcney Luan Azevedo de Sousa.- João Pessoa, 2014.
71f. : il.
Orientador: Fágner Dias Araruna
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Equação da onda. 3. Existência. 4. Unicidade. 5. Comportamento assintótico.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Decaimento exponencial para a equação da onda semilinear com dissipação localmente distribuída

por

Jakcney Luan Azevedo de Sousa [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 18 de julho de 2014.

Banca Examinadora:

Fágner Dias Araruna

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Alberto Carlos Mercado Saucedo – UTFSM
(Examinador Externo)

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da Capes durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais e irmãos

Agradecimentos

Aos meus pais por todo afeto e carinho que me fazem seguir firme em qualquer etapa da minha vida.

A minha avó que é tão especial e me inspira crescimento.

Aos meus irmãos que estão sempre ao lado em todos os momentos.

Aos meus amigos que sempre me salvam nos momentos de desespero no estudo, deixando minha vida mais agradável e me distraindo.

Aos amigos que fiz durante o curso de mestrado, Hudson, Jarbas, Cleiton, Renato, Lucas e Wendel, que sempre compartilhamos conhecimento e, acima de tudo, amizade para com outro. Em especial, quero agradecer a minha "irmãnzinha" Pammella Queiroz que, sempre que precisei, esteve de bom grado ao meu lado para me ajudar.

Aos professores do curso de pós-graduação de matemática da UFPB, em especial aos professores Antônio Andrade e Aurélio Menegon, que me apoiaram em assuntos matemáticos e deram direções para seguir estudando.

Ao Professor Dr. Fágner Dias Araruna pela orientação na dissertação e por me fazer criar a maturidade necessária para a conclusão do trabalho.

Ao Professor Dr. Flank David Bezerra pelo apoio na elaboração da dissertação, com dicas úteis e sempre muito bem vindas.

Ao Professor Dr. Alberto Mercado pelas sugestões no trabalho que o enriqueceu muito.

Resumo

Consideramos a equação da onda semilinear $u_{tt} - \Delta u + f(u) + a(x)u_t = 0$ em um domínio limitado $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, com fronteira suficientemente regular Σ, sujeita à condição de contorno $u = 0$. Investigamos a existência, unicidade e comportamento assintótico, quando $t \longrightarrow \infty$, da solução, considerando $a \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ e f sob algumas condições adequadas.

Palavras-chave: Equação da onda, existência, comportamento assintótico.

Abstract

We consider the semilinear wave equation $u_{tt} - \Delta u + f(u) + a(x)u_t = 0$ in a bounded domain $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, with sufficiently regular boundary Σ, subject the boundary condition $u = 0$. We investigate the existence, uniqueness and asymptotic behavior, when $t \longrightarrow \infty$, of solution, considering $a \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ and f under some adequate conditions.

Keywords: Wave equation, existence, asymptotic behavior.

Sumário

Introdução **1**

1 Espaços funcionais e alguns resultados utilizados **5**

1.1 Espaços funcionais 5

1.2 Alguns resultados utilizados 10

2 Existência e unicidade de solução **14**

2.1 Teoria de semigrupos de operadores lineares 14

2.2 Existência e unicidade de solução fraca 20

3 Decaimento exponencial: O caso globalmente Lipschitz **24**

3.1 O decaimento exponencial 25

4 Decaimento exponencial: O caso superlinear **40**

4.1 O decaimento exponencial 40

Referências Bibliográficas **60**

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- Q denota o cilindro $\Omega \times (0,T)$;
- Σ denota a fronteira lateral do cilindro $\Omega \times (0,T)$, $\Sigma \times (0,T)$;
- $\cdot$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^n$;
- $||u||_{L^p(\Omega)}$ denota a norma de u em $L^p(\Omega)$;
- $\longrightarrow$ denota a convergência forte em um espaço;
- $\rightharpoonup$ denota a convergência fraca em um espaço;
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ denota a convergência fraca estrela em um espaço;
- $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua;
- $\overset{c}{\rightharpoonup}$ denota a imersão compacta;
- q.s abrevia a frase: quase sempre;
- $\nu(x)$ denota o vetor normal exterior a x;
- $div\ q =$ divergente de $q = \sum \frac{\partial q_x}{\partial x_k}$;
- $\frac{\partial *}{\partial \nu}$ denota a derivada normal de $*$;
- $L^\infty_+(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega) : f(x) \geq 0, \forall x \in \Omega\}$;
- $(*)|_0^T = *(T) - *(0)$.

Introdução

O objetivo deste trabalho é, tendo como base o artigo do autor E. Zuazua [15], estudar a existência e unicidade de solução fraca, bem como o comportamento da energia associada a solução fraca da seguinte equação da onda semilinear com dissipação localmente distribuída

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(u) + a(x)u_t = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times (0, \infty), \\ u(0) = u^0, \ u_t(0) = u^1 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um subconjunto limitado, aberto e conexo em $\mathbb{R}^n \quad (n \geq 1)$, cuja fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ é de classe C^2, a função não linear f é tal que $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaz

$$f(s)s \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e a condição de crescimento

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

para algum $C > 0$ e $p > 1$ com $(n-2)p \leq n$, a função $a = a(x) \in L^\infty(\Omega)$ é tal que

$$a \geq a_0 > 0 \quad \text{q.s em} \quad \omega,$$

para algum subconjunto aberto, não vazio ω de Ω.

Veremos que, sob essas condições, o problema (1) está bem posto no espaço $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, isto é, para qualquer dado inicial $\{u^0, u^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe uma única solução fraca de (1) na classe

$$u \in C\left([0, \infty); H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, \infty); L^2(\Omega)\right).$$

Consideremos a energia

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \int_\Omega F(u(x,t))dx,\ t \geq 0, \tag{2}$$

onde $F(s) = \int_0^s f(z)dz$. Veremos que, para cada solução de (1) a seguinte identidade ocorre

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega a(x)|u_t|^2 dxdt, \quad \forall t_2 > t_1 \geq 0. \tag{3}$$

Donde a energia é uma função não crescente na variável temporal t.

Daremos condições suficientes à função f e sobre o subconjunto ω de modo a assegurar o decaimento exponencial e uniforme da energia, isto é, assegurar a existência das constantes $C > 1$ e $\gamma > 0$ tais que

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}E(0),\ \forall t \geq 0.$$

O caso linear ($f(s) = \alpha s$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $\alpha \geq 0$) já é bem conhecido. Por um lado, resultados devido a C. Dafermos [4] e A. Haraux [5], baseados no princípio de invariância de LaSalle, mostram que a energia de qualquer solução vai para zero quando t vai ao infinito. Por outro lado, resultados devido a C. Bardos, G. Lebeau e J. Rauch [2], mostram que, quando Ω e a são de classe C^∞, o decaimento exponencial da energia ocorre se, e somente se, uma especial condição geométrica é satisfeita.

É importante também mencionarmos os resultados devido a J.L. Lions [6], cáp.VII, que mostram como as técnicas de multiplicadores podem ser usadas de modo a obter estimativas a priori lidando com resultados de controlabilidade exata para a equação da onda linear na ausência de dissipação, com controles sobre uma vizinhança da fronteira. Essas estimativas, combinadas com um resultado devido a A.Haraux [5] permitem-nos provar o decaimento exponencial para (1) quando $f = 0$ e ω é uma vizinhança da fronteira, assumindo apenas uma regularidade C^2 para a fronteira de Ω.

Quanto ao problema semilinear (1), o decaimento exponencial havia sido provado apenas quando $\omega = \Omega$, isto é, quando a dissipação ocorria em todo Ω. Este é um resultado clássico que pode ser provado, por exemplo, construindo a perturbação da energia

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx,$$

para o qual, as desigualdades diferenciais nos levam, facilmente, ao decaimento exponencial quando $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

A meta deste trabalho é lidar com o problema semilinear no caso em que a dissipação não é localizada em todo o Ω de modo a estender os resultados acima mencionados.

Não é possível adaptarmos o problema (1) ao método acima, baseado na construção de funcionais de energia perturbada adequada. Contudo, inspirados no trabalho de J. Rauch e M. Taylor [12] procuraremos estimativas de energia do tipo

$$E(T) \leq C \int_0^T \int_\Omega a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt, \tag{4}$$

a qual combinada com (3) e propriedades de semigrupo, nos permitirão concluir o decaimento exponencial uniforme.

Distinguiremos duas situações diferentes: A primeira remete ao caso onde f é **globalmente Lipschitz**. Trataremos este caso como uma perturbação do problema linear

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta\varphi = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,\infty), \\ \varphi(0) = \varphi^0, \ \varphi_t(0) = \varphi^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Contudo, de modo a obtermos as estimativas de energia desejadas, necessitaremos absorver os termos menores. Para tanto, consideraremos as seguintes proposições:

Proposição 0.1. Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira Γ de classe C^2. Sejam também $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ω vizinhança de $\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : (x - x_0) \cdot \nu(x) > 0\}$ em Ω e $T > diam(\Omega)$ qualquer. Então existe umas constante $C > 0$ tal que a solução de (5) satisfaz

$$||\varphi^0||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||\varphi^1||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \left\{ \int_0^T \int_\omega |\varphi_t(x,t)|^2 dxdt + ||\varphi||^2_{L^2(Q)} \right\},$$

para todo $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Prova: Ver Lions [6]. $\blacksquare$

Proposição 0.2. (Continuação única) Sejam $b \in L^\infty(Q)$, $w \in H^1(Q)$ e $T > diam(\Omega)$ tais que w satisfaz

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + b(x,t)w = 0 & \text{em} \quad Q, \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ w = 0 & \text{q.s. em} \quad \omega \times (0,T). \end{cases}$$

Então $w \equiv 0$ em Q.

Prova: Ver A. Ruiz [13]. $\blacksquare$

Todavia, de modo a lidar com o termo não linear necessitaremos da existência dos seguintes limites

$$\lim_{s\to-\infty} f'(s) = f'(-\infty) \text{ e } \lim_{s\to\infty} f'(s) = f'(\infty).$$

Consequentemente, generalizaremos os resultados que são bem conhecidos no contexto linear.

A segunda situação concerne ao caso em que f é **superlinear**, ou seja,

$$\exists \delta > 0 : f(s)s \geq (2+\delta)F(s), \ \forall \ s \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Não poderemos tratar essa situação como uma perturbação do caso linear. Focaremos então, nossa atenção no caso particular onde ω é uma vizinhança da fronteira Γ. Podemos adaptar a técnica dos multiplicadores desenvolvida em J.L.Lions [6] de modo a obter estimativas de energia apropriadas do tipo (4). Usaremos o seguinte resultado de continuação única de modo a absorver os termos menores

Proposição 0.3. (Continuação única) Suponha que $u \in L^2(Q)$ e seja uma solução fraca de $\Box u + v(x,t)u = 0$ em Q (onde $\Box$ é o operador D'Alembertiano), tal que $T > diam(\Omega)$ e $v \in L^\infty(0,T; L^n(\Omega))$ com Ω aberto de $\mathbb{R}^n$. Então se $u = 0$ em algum conjunto $\omega \times (0,T)$, temos $u \equiv 0$.

Prova: Ver A. Ruiz [13]. ■

Novamente um argumento de compacidade-unicidade será necessário de modo a absorver os termos menores. neste caso, (6) será suficiente para estabelecer o decaimento exponencial e uniforme.

O trabalho é organizado como segue: No *Capítulo* 1 definiremos os espaços funcionais e apresentaremos alguns resultados úteis para a continuidade do trabalho. No *Capítulo* 2 faremos um resumo da teoria de semigrupo de operadores lineares e usaremos tal teoria para mostrar que o problema (1) é bem posto no espaço $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Nos *Capítulos* 3 e 4 estudaremos o decaimento exponencial da solução do problema (1) nos casos em que a função não linear f é globalmente Lipschitz e superlinear, respectivamente.

Capítulo 1

Espaços funcionais e alguns resultados utilizados

Neste capítulo fixaremos algumas notações e daremos definições e resultados essenciais à continuidade do trabalho.

1.1 Espaços funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f, e denota-se por supp(f), o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$. Assim, supp$(f)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u.

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas, e com suporte compacto, em Ω.

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por

Exemplo 1.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < 1\}$ compactamente contido em Ω. Consideremos $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}}, & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1 \end{array} \right. ,$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana de x. Temos que $f \in C^{\infty}(\Omega)$ e $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$ é compacto, isto é $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Definição 1.1. Diz-se que uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^{\infty}(\Omega)$ converge para φ em $C_0^{\infty}(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

(ii) $D^{\alpha}\varphi_n \to D^{\alpha}\varphi$ uniformemente em K, para todo multi-índice α.

Observação 1.1. É possível dotar $C_0^{\infty}(\Omega)$ com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.1.

O espaço $C_0^{\infty}(\Omega)$, munido da convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de Espaço das Funções Testes sobre Ω.

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$, em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi\rangle$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria.

Exemplo 1.2. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_{\Omega} u(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

é uma distribuição sobre Ω univocamente determinada por u (ver Medeiros-Miranda [8]). Por esta razão, identifica-se u à distribuição T_u por ela definida e, desta forma, $L^1_{loc}(\Omega)$ será identificado a uma parte (própria) de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.3. Consideremos $0 \in \Omega$ e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\langle \delta_0, \varphi\rangle = \varphi(0).$$

Em [8], vê-se que δ_0 é uma distribuição sobre Ω. Além disso, mostra-se que δ_0 não é definido por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definição 1.2. Diz-se que uma sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.3. Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.2. Decorre da Definição 1.3 que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens.

Observação 1.3. $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, onde $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, vê-se facilmente que $D^\alpha T$ é linear. Agora, para a continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim, $|\langle D^\alpha T, \varphi_n\rangle - \langle D^\alpha T, \varphi\rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi\rangle| \to 0$, quando $n \to \infty$.

Observação 1.4. Vê-se em Medeiros-Rivera [9] que a aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m, sobre Ω, das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial, qualquer que seja $1 \leq p < \infty$.

Munido das normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} ess\, |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

os espaços de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach (vide Medeiros-Rivera [9]).

Observação 1.5. Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, o qual munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x)\, D^\alpha v(x)\, dx$$

é um espaço de Hilbert.

Consideremos no nosso trabalho o subespaço de $H^1(0,L)$ definido por

$$V = \left\{ u \in H^1(0,L) ; \quad u(0) = 0 \right\}.$$

Em Medeiros-Miranda [8] demonstra-se que a norma do gradiente e a norma do $H^1(0,L)$ são equivalentes em V. Assim, consideraremos V munido do produto interno e norma dados respectivamente por

$$((u,v)) = (u_x, v_x), \qquad \|u\|^2 = |u_x|^2,$$

onde $(\cdot,\cdot)$ e $|\cdot|$ denotam, respectivamente, o produto interno e a norma em $L^2(0,L)$.

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $]0,T[$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $]0,T[$, com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $]0,T[$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $]0,T[$, com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in]0,T[} ess \, \|u(t)\|_X .$$

Observação 1.6. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Consideremos o espaço $L^p(0,T;X)$, $1 < p < \infty$, com X sendo Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0,T;X)]' \approx L^q(0,T;X'),$$

onde $(1/p) + (1/q) = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$\left[L^1(0,T;X)\right]' \approx L^\infty(0,T;X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadamente em Lions [7].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $]0,T[$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.4. Dada $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $]0,T[$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Exemplo 1.4. Dadas $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0,T) \to X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

integral de Bochner em X, é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0,T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$.

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0,T;X) = \left\{ u \in L^p(0,T;X);\ u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ j = 1,...,m \right\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \left\| u^{(j)} \right\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach (vide Adams [1]).

Observação 1.7. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H^m(0,T;X)$, o qual, munido do produto interno

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} \left(u^{(j)}, v^{(j)} \right)_{L^2(0,T;X)},$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0,T;X)$ o fecho, em $H^m(0,T;X)$, de $\mathcal{D}(0,T;X)$ e por $H^{-m}(0,T;X)$ o dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$.

1.2 Alguns resultados utilizados

Lema 1.1 (Imersão de Sobolev)**.** Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right]$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Prova: Ver Brezis [3] .

Lema 1.2 (Rellich-Kondrachov)**.** Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right[$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(iii) Se $2m > n$ então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/2) \leq k + 1$.

Prova: Ver Brezis [3].

Teorema 1.3 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *O conjunto* $\mathcal{B}_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ *é compacto pela topologia fraca* $*\ \sigma(E', E)$, *onde* E *é um espaço de Banach.*

Prova: Ver Brezis [3]

Lema 1.4 (Du Bois Raymond)**.** Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Prova: Ver Medeiros-Rivera [8].

Lema 1.5 (Desigualdade de Poincaré)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $u \in H^1_0(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Observação 1.8. Para o caso unidimensional, ou seja, $\Omega = (a, b)$, a constante da desigualdade (1.1) é $C = b - a$.

Prova: Ver Brezis [3] .

Lema 1.6 (Desigualdade de Young)**.** Sejam a, b constantes positivas, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova: Ver Brezis [3] .

Lema 1.7 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Ver Brezis [3].

Teorema 1.8 (Teorema do Traço)**.** *A aplicação linear*

$$u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, ..., \gamma_{m-1} u) = \left(u|_\Gamma, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma, ..., \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_A^{m-1}}\right|_\Gamma \right)$$

de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ *em* $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$*, prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de* $W^{m,p}(\Omega)$ *em* $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Prova: Ver Lions [7] . ■

Observação 1.9. Note que para o caso unidimensional, isto é, $\Omega = (\alpha, \beta)$, se $u \in H^m(\alpha, \beta)$, então pelo Lema 1.2, $u \in C^{m-1}([\alpha, \beta])$. Logo faz sentido definir a função u e suas derivadas suas derivadas na fronteira, que no caso será $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$.

Proposição 1.9. Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ bem regular. Então a aplicação

$$v \mapsto \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

define em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ uma norma equivalente à norma em $H^2(\Omega)$.

Prova: Ver Medeiros-Miranda [8] . ■

Definição 1.5. Uma forma bilinear $b : H \times H \to \mathbb{R}$ é dita

(i) *Contínua* se existe uma constante C tal que

$$|b(u,v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H;$$

(ii) *Coerciva* se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$b(v,v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Teorema 1.10 (Lax-Milgram)**.** *Seja H um espaço de Banach e $a\,(u,\ v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a\,(u,\ v) = \langle \varphi,\ v \rangle\,,\ \forall\ v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2} a\,(u,\ u) - \langle \varphi,\ u \rangle = \underset{v \in H}{Min} \left\{ \frac{1}{2} a\,(v,\ v) - \langle \varphi,\ v \rangle \right\}.$$

Prova: Ver Brezis [3] . ■

Teorema 1.11. *Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $\mu \in L^p(0,T,X)$, $\mu' \in L^p(0,T;Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $\mu \in C^0([0,T]\,;Y)$.*

Prova: Ver Brezis [3]. ■

Teorema 1.12 (Compacidade Aubin-Lions)**.** *Suponha $X \subset B \subset Y$ com imersão compacta $X \to B$ onde X, Y e B são espaços de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$. Seja F limitado em $L^p(0,T,X) \cap W^{s,r}(0,T,Y)$, onde $s > 0$ se $r \geq p$ e onde $s > \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ se $r \leq p$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0,T,B)$ (e em $C(0,T,B)$ se $p = \infty$).*

Prova: Ver Simon [14]. ■

Teorema 1.13. *Sejam E um espaço de Banach, E' seu dual e (f_n) uma sucessão de E'. Se $f_n \to f$ fraco $-*$ em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\| \leq C$ e $\|f\| \leq \underline{\lim}\, \|f_n\|$.*

Prova: Ver Brezis [3]. ■

Teorema 1.14 (Banach-Steinhaus)**.** *Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja (T_n) uma sucessão de operadores lineares contínuos de E em F tais que para cada $x \in E$, $T_n x$ converge quando $n \to \infty$ a um limite que denotamos por T_x. Então tem-se:*

(i) $\sup\limits_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$,

(ii) $T \in \mathcal{L}(E, F)$,

(iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \underline{\lim} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Prova: Ver Brezis [3]. ■

Teorema 1.15 (Gauss-Green). *Se* $u \in C^1(\overline{\Omega})$, *então* $\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u\nu^i d\Gamma$, *com* $i = 1, 2, ..., n$.

Prova: Ver Brezis [3]. ■

Teorema 1.16 (Fórmulas de Green). (i) *Se* $\gamma \in H^2(\Omega)$, *então* $\int_\Omega \nabla\gamma \cdot \nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta\gamma dx + \int_\Gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} u ds, \forall u \in H^1(\Omega)$.

(ii) *Se* $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, *então* $\int\limits_\Omega u\Delta\gamma - \gamma\Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} ds.$

Prova: Ver Brezis [3]. ■

Lema 1.17. (Lema de Lions) Seja Q um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções de $L^q(Q)$, $0 < q < \infty$, com $f \in L^q(Q)$ tal que:

1) (f_n) é limitada em $L^q(Q)$;

2) $f_n \longrightarrow f$ q.s. em Q

Então, $f_n \rightharpoonup f$ em $L^q(Q)$.

Prova: Ver Lions [7]. ■

Proposição 1.18. (Regularidade de Problemas Elípticos) Seja Ω aberto limitado de classe C^2 com fronteira Γ. Considere $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ verificando

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dt + \int_\Omega u\varphi dt = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $||u||_{H^2(\Omega)} \leq C||f||_{L^2(\Omega)}$, onde $C > 0$ é uma constante que só depende de Ω.

Prova: Ver Brezis [3]. ■

Teorema 1.19. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *é possível encontrar um número* $\varepsilon = \varepsilon(n)$, *tal que* $\varepsilon < 1$ *é tal que*

$$H^{1-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

desde que $1 \leq q < \frac{2n}{n-2}$, $n > 2$.

Prova: Ver Simon [14]. ■

Capítulo 2

Existência e unicidade de solução

Neste capítulo estudaremos a existência e unicidade de solução fraca para um sistema associado à equação da onda semilinear com dissipação localizada. Para tanto, iniciaremos com uma breve introdução da teoria de semigrupos de operadores lineares.

2.1 Teoria de semigrupos de operadores lineares

O objetivo desta seção é resumir a Teoria de Semigrupo e apresentar algumas definições relevantes para este trabalho.

Definição 2.1. Seja X um espaço de Banach e $L(X)$ o espaços dos operadores lineares e limitados de X. Uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se

(i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $L(X)$;

(ii) $S(t+s) = S(t)\,S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Definição 2.2. Dizemos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é de classe C^0, ou fortemente contínuo, se

$$\lim_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)\,x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Definição 2.3. Dizemos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é contínuo se

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - I\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Teorema 2.1. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0, então existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que*

$$\| S(t) \| \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0$$

Prova: Ver Pazy [11]. ■

Corolário 2.2. Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0. Então, para cada $x \in X$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} f_x : \mathbb{R}^+ & \rightarrow & X \\ t & \rightarrow & f_x(t) = S(t)x \end{array}$$

é contínua. Equivalentemente, para cada $x \in X$,

$$\lim_{t \to s} S(t)\, x = S(s)\, x, \; \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Prova: Ver Pazy [11] . ■

Definição 2.4. Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{A}$ um operador em X. Denominaremos o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$, o conjunto

$$\rho(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \;\; w \mapsto (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} w \in \mathcal{L}(X) \right\},$$

onde

$$\mathcal{L}(X) = \{L : X \to X; \quad \text{é linear e contínuo}\}.$$

Definição 2.5. Denominaremos de espectro de $\mathcal{A}$ o conjunto

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}).$$

Definição 2.6. Um semigrupo $S(t)$ em X, onde $0 \leq t < \infty$, é dito Semigrupo de Contrações, se

$$\| \, S(t) \, \| \leq 1 \;\; \text{para todo } t \geq 0.$$

Definição 2.7. O operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow X$ definido por

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \;\; \text{existe} \right\}$$

e

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \; \forall x \in D(\mathcal{A})$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Observação 2.1. Note que $\mathcal{A}$ é um operador linear e $D(\mathcal{A})$ é um subespaço de X.

Teorema 2.3. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Então,* *(i) Para todo $x \in X$,*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)xdx = S(t)x;$$

(ii) Para todo $x \in X$, $\int_0^t S(s)xdx \in D(\mathcal{A})$ e

$$\mathcal{A}\left(\int_0^t S(s)xdx\right) = S(t)x - x;$$

(iii) Para todo $x \in D(\mathcal{A})$, $S(t)x \in D(\mathcal{A})$ e

$$\frac{d}{dt}S(t)x = \mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}(x);$$

(iv) Para todo $x \in D(\mathcal{A})$,

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)\mathcal{A}(x)d\tau = \int_s^t \mathcal{A}S(\tau)(x)d\tau$$

Prova: Ver Pazy [11]. ■

Proposição 2.4. Um operador fechado com domínio denso é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0.

Prova: Ver Pazy [11] . ■

Teorema 2.5. *Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, então $\mathcal{A}$ é um operador linear fechado e $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.*

Prova: Ver Pazy [11]. ■

Teorema 2.6. *Sejam $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupos de classe C_0 com geradores infinitesimais $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Então $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ se, e somente se, $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Prova: Ver Pazy [11] . ■

Definição 2.8. Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Colocando $\mathcal{A}_0 = I$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ e supondo que $\mathcal{A}_{k-1}$ esteja definido, vamos definir $\mathcal{A}_k$ por

$$D(\mathcal{A}_k) = \{x \in D(\mathcal{A}_{k-1}) : \mathcal{A}_{k-1}x \in D(\mathcal{A})\},$$

$$\mathcal{A}_k x = \mathcal{A}(\mathcal{A}_{k-1}x), \forall x \in D(\mathcal{A}_k).$$

Proposição 2.7. Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal. Se $D(\mathcal{A}_k)$ é o domínio do operador $\mathcal{A}_k$, então $\bigcap_k D(\mathcal{A}_k)$ é denso em X.

Prova: Ver Pazy [11]. ■

Definição 2.9. Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$, definimos

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach, $J(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$.

Definição 2.10. Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \longrightarrow X^*$ tal que $j(x) \in J(x)$, $\forall x \in X$, além disso

$$\|j(x)\| = \|x\|.$$

Definição 2.11. Dizemos que o operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade, j

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}x, j(x) \rangle \leq 0, \ \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Se, além disso, existir $\lambda > 0$, tal que $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = X$, então dizemos que $\mathcal{A}$ é m-dissipativo.

Observação 2.2. Se X é um espaço de Hilbert, então dizemos que $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \text{J} X$ é dissipativo se

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}x, x \rangle \leq 0, \ \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Definição 2.12. Dizemos que o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ é maximal se $Im(I + \mathcal{A}) = X$, isto é, para toda $f \in X$, existe $u \in D(\mathcal{A})$ tal que $(I + \mathcal{A})(u) = f$.

Teorema 2.8 (Hille-Yosida)**.** *Um operador linear $\mathcal{A}$, sobre um espaço de Banach X, é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações se, e somente se,*

(i) $\mathcal{A}$ é fechado e $\overline{D(\mathcal{A})} = x$;

(ii) O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$, temos

$$\| (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Prova: Ver Pazy [11]. ■

Teorema 2.9. *[Lumer-Phillips] Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{A}$ um operador linear com domínio denso em X.*

(i) *$\mathcal{A}$ é dissipativo e existe um número real $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$. Então, $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre X.*

(ii) *Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre X. Então, $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$ e $\mathcal{A}$ dissipativo.*

Prova: Ver Pazy [11]. ■

Corolário 2.10. Seja $\mathcal{A}$ um operador linear fechado, densamente definido tal que $D(\mathcal{A})$ e $Im(\mathcal{A})$ estão ambos num espaço de Banach X. Se $\mathcal{A}$ e seu operador dual $\mathcal{A}^*$ são ambos dissipativos, então $\mathcal{A}$ gera um semigrupo de contrações de classe C_0.

Prova: Ver Pazy [11]. ■

Teorema 2.11. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear dissipativo em X. Se $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ então, $\mathcal{A}$ é fechado.*

Prova: Ver Pazy [11]. ■

Teorema 2.12. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear dissipativo, tal que $Im(I - \mathcal{A}) = X$. Então, se X é reflexivo, temos que $\overline{D(\mathcal{A})} = X$*

Prova: Ver Pazy [11] . ■

Consideremos o seguinte problema semilinear de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} - \mathcal{A}u(t) = f(t, u(t)), \quad t > t_0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, de classe C_0, com domínio X, Banach, e $f : [t_0, T] \times X \to X$ é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz em u.

Definição 2.13. Uma função $u : [0; +\infty)\text{J}X$ é uma solução clássica de (2.1) em $[0; +\infty)$ se u satisfaz (2.1) em $[0; +\infty)$ e se $u \in C(\mathbb{R}; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$. A função $u \in C([0; T]; X)$, dada por

$$u(t) = S(t - t_0)u_0 + \int_{t_o}^{t} S(t - s)f(s, u(s))ds$$

é chamada de *mild solution* ou solução generalizada de (2.1) em $[0; T]$.

Note que se $f \equiv 0$, então $u(t) = S(t)u_0$, onde $u_0 \in X$ é a *mild solution* de

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t), \quad t > 0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

Teorema 2.13. *Seja $f : [t_0, T] \times X \to X$ contínua em $t \in [t_0, T]$ e uniformemente Lipschitz em X. Se $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0, em X, então para todo $u_0 \in X$ o problema de valor inicial (2.1) possui uma única solução $u \in C([t_0, T]; X)$. Além disso, a função $u_0 \mapsto u$ é Lipschitz contínua de X em $C([t_0, T]; X)$.*

Prova: Ver Pazy [11] . ∎

Corolário 2.14. Se $\mathcal{A}$ e f satisfazem as condições do Teorema 2.13, então para toda $g \in C([t_0, T]; X)$ a equação integral

$$u(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s) f(s, u(s))\, ds,$$

possui uma única solução $u \in C([t_0, T]; X)$.

Prova: Ver Pazy [11]. ∎

A condição uniformemente Lipschitz sobre a função f no Teorema 2.13 assegura a existência de uma *mild solution* global (ou seja, definida em todo $[t_0, T]$) de (2.1). Se assumirmos que f satisfaz apenas uma condição Lipchitz local em u, uniformemente em t em intervalos limitados, ou seja, para cada $t' \geq 0$ e $c \geq 0$ constante existe uma constante $L(c, t')$ tal que

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L(c, t')\|u - v\|$$

para todo $u, v \in X$ com $\|u\| \leq c$, $\|v\| \leq c$, então temos a seguinte versão local do Teorema 2.13.

Teorema 2.15. *Seja $f : [t_0, \infty) \times X \to X$ contínua em t para $t \geq 0$, localmente Lipschitz em u e uniformemente contínua em t em intervalos limitados. Se $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$, $t \geq 0$ de classe C_0, em X, então para todo $u_0 \in X$ existe $t_{\max} \leq \infty$ tal que o problema de valor inicial (2.1) possui uma única solução $u \in [0, t_{\max})$. Além disso, se $t_{\max} < \infty$ então*

$$\lim_{t \to t_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

Prova: Ver Pazy [11] . ∎

2.2 Existência e unicidade de solução fraca

Seja Ω um conjunto limitado, aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, com fronteira Γ suficientemente regular. Para $T > 0$, consideremos o cilindro Q com fronteira lateral Σ. Estamos interessados em provar a existência e unicidade de solução fraca para a equação da onda semilinear com dissipação localmente distribuída

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(u) + a(x)u_t = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,\infty), \\ u(0) = u^0, \ u_t(0) = u^1 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R})$ é tal que

$$f(s)s \geq 0, \ \forall s \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

e satisfaz a condição de crescimento

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

para algum $C > 0$ e $p > 1$ com $(n-2)p \leq n$, e a função $a = a(x) \in L^\infty(\Omega)$ satisfaz

$$a \geq a_0 > 0 \ \text{ q.s. em } \ \omega, \tag{2.5}$$

para algum subconjunto aberto $\omega \subset \Omega$ e para algum $a_0 > 0$.

Estudaremos a existência e unicidade da solução de (2.2) usando o método de semigrupos de operadores lineares. Para isto, reescrevemos o sistema na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U), \\ U(0) = U^0, \end{cases} \tag{2.6}$$

em que

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \text{com} \ \ v = u_t, \ U_0 = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & -a(x) \end{bmatrix} \ \text{ e } \ F(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(u) \end{bmatrix}.$$

Consideremos o espaço de Banach $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e o operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$,

$$A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \Delta u - a(x)v \end{bmatrix}$$

com $D(A) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

Afirmação 2.1. *A é um operador dissipativo e maximal.*

Prova: Primeiro, mostremos que A é um operador dissipativo, ou seja, $\langle AU, U\rangle_X \leq 0$, para todo $U \in D(A)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle AU, U\rangle_X &= \left\langle \begin{bmatrix} v \\ \Delta u - a(x)v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_X \\
&= \langle v, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle \Delta u - a(x)v, v\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \langle v, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle \Delta u, v\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle a(x)v, v\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Mas, pela fórmula de Green,

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \Delta u.vdx &= -\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}.vd\Gamma \\
&= -\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
\langle AU, U\rangle_X &= -\langle a(x)v, v\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= -\int_\Omega a(x)|v|^2 dx.
\end{aligned}$$

desde que $a(x) > 0$, temos $\langle AU, U\rangle_X \leq 0$ e, portanto A é um operador dissipativo.

Agora mostremos que A é maximal. Com efeito, dado $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \in X$, devemos mostrar que existe uma única $U \in D(A)$ tal que $U - AU = G$, ou seja

$$\begin{cases} u - v = g_1 \\ v - \Delta u + a(x)v = g_2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Segue de (2.7) que

$$-\Delta u + (a+1)u = (a+1)g_1 + g_2 \tag{2.8}$$

Como $g_1 \in H_0^1\Omega) \subset L^2(\Omega)$ temos $ag_1 \in L^2(\Omega)$ e $(a+1)g_1 + g_2 \in L^2(\Omega)$. Logo, pelo Teorema 1.18, existe $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ solução de (2.8). Temos ainda que $v = u - g_1$, o que implica $v \in H_0^1(\Omega)$, e A ser maximal. ■

Sendo A dissipativo e maximal, o Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.9) garante que este é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre X. Em virtude do Teorema 2.15, para garantirmos a existência e unicidade de solução para o problema (2.6), é suficiente provarmos que a função $F : [0,T] \times X \longrightarrow X$ é contínua em $t \in [0,T]$ e localmente Lipschitz em X. De fato, como $f \in C^1(\mathbb{R})$, temos claramente que a função F é contínua na variável t, para todo $t \in [0,T]$. Mostremos, agora, que F é localmente Lipschitz em X, isto é, dados $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \in B_X(0;r)$ devemos ter

$$\|F(U) - F(\bar{U})\|_X \leq C(r)\|U - \bar{U}\|_X,$$

onde $B_X(0;r)$ denota a bola de centro 0 e raio $r > 0$ no espaço X. Com efeito, usando a condição de crescimento da função f dada em (2.4) obtemos que

$$\begin{aligned}
\|F(U) - F(\bar{U})\|_X^2 &= \| - f(u) + f(\bar{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \int_\Omega |f(\bar{u}) - f(u)|^2 dx \\
&\leq C \int_\Omega \left[(1 + |\bar{u}|^{p-1} + |u|^{p-1})|\bar{u} - u|\right]^2 \\
&\leq C \left\{ \int_\Omega |\bar{u} - u|^2 dx + \int_\Omega |\bar{u}|^{2(p-1)}.|\bar{u} - u|^2 dx \right. + \\
&+ \left. \int_\Omega |u|^{2(p-1)}.|\bar{u} - u|^2 dx \right\}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder para os conjugados $\frac{p}{p-1}$ e $\frac{1}{p}$ vem que

$$\begin{aligned}
\|F(U) - F(\bar{U})\|_X^2 \leq\ & C \left\{ \int_\Omega |\bar{u} - u|^2 dx + \left[\int_\Omega \left(|\bar{u}|^{2(p-1)}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right]^{\frac{p-1}{p}} . \left[\int_\Omega |\bar{u} - u|^{2p} dx\right]^{\frac{1}{p}} \right. + \\
& + \left. \left[\int_\Omega \left(|u|^{2(p-1)}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right]^{\frac{p-1}{p}} . \left[\int_\Omega |\bar{u} - u|^{2p} dx\right]^{\frac{1}{p}} \right\}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\|F(U) - F(\bar{U})\|_X^2 &\leq C \left\{ \int_\Omega |\bar{u} - u|^2 dx + \|\bar{u} - u\|_{L^{2p}(\Omega)}^2 . \left(\|\bar{u}\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2(p-1)} + \|u\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2(p-1)} \right) \right\} \\
&\leq C(r) \left\{ \|\bar{u} - u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{u} - u\|_{L^{2p}(\Omega)}^2 \right\} \\
&\leq C(r) \|\bar{u} - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&\leq C(r) \|U - \bar{U}\|_X^2
\end{aligned}$$

visto que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q=\left(\frac{2n}{n-2}\right)}(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega).$$

Logo, F é localmente Lipschitz em X. Dessa forma, o Teorema 2.15 garante a existência de uma única solução do problema (2.6) na classe

$$U \in C\left([0, t_{max}]; X\right),$$

ou seja,

$$u \in C\left([0, t_{max}]; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, t_{max}]; L^2(\Omega)\right).$$

Queremos, no entanto, mostrar que esta é, na verdade, uma solução global, ou seja $t_{max} = \infty$. Para isto, observemos, ainda pelo Teorema 2.15, que é suficiente mostrar uma limitação para a norma $\|u(t)\|_X$, quando $t \longrightarrow t_{max}$. De fato, multiplicando a equação $(2.2)_1$ por u_t, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega F(u)dx\right\} = -\int_\Omega a(x)|u_t|^2 dx \leq 0, \;\; \forall\, t \in [0, t_{max}].$$

onde denotamos aqui

$$F(s) = \int_0^s f(z)dz.$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a t, $t \in [0, t_{max}]$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F(u(t))dxds \;&\leq\; \frac{1}{2}\|u^1\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u^0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F(u^0)dx \\ &\leq\; C, \end{aligned}$$

com $C > 0$ independente de t. Consequentemente $\|u(t)\|_X \leq C$, para todo $t \in [0, t_{max}]$, o que nos garante

$$u \in C\left([0, \infty); H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, \infty); L^2(\Omega)\right).$$

Capítulo 3

Decaimento exponencial: O caso globalmente Lipschitz

O objetivo deste capítulo é mostrar que a energia associada à solução do problema semilinear (2.2), dada por (2), tem um decaimento exponencial, à medida que o tempo t tende ao infinito. Isto é, queremos encontrar constantes $C > 1$ e $\gamma > 0$ tais que

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}E(0), \ \forall t \geq 0, \tag{3.1}$$

quando a não linearidade f satisfaz

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \ f' \in L^\infty(\Omega), \ f(s)s \geq 0, \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Além disso, como mencionamos na introdução, necessitamos considerar a existência dos seguintes limites:

$$\lim_{s\to-\infty} f'(s) = f'(-\infty) \text{ e } \lim_{s\to\infty} f'(s) = f'(\infty). \tag{3.3}$$

Em relação à função a, vamos supor $a \in L^\infty(\Omega)$ satisfazendo (2.5) em que o aberto $\omega \subset \Omega$ é construído da seguinte forma: Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n - \Omega$ fixo e arbitrário, e $\nu = \nu(x)$ o vetor normal unitário a $x \in \Gamma$. Definamos

$$m(x) = x - x_0, \ \forall \ x \in \Omega, \quad \|m\|_\infty = max\{m(x) : x \in \bar{\Omega}\}$$

e

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}, \quad \Gamma_1 = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escrevamos

$$\beta_\varepsilon = \bigcup_{x \in \Gamma_0} B(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \quad e \quad \omega_\varepsilon = \beta_\varepsilon \cap \Omega,$$

onde $B(x; \varepsilon)$ denota a bola de centro x e raio ε em $\mathbb{R}^n$. Para $\varepsilon > 0$ fixo e suficientemente pequeno, tomemos

$$\omega = \omega_\varepsilon \tag{3.4}$$

como sendo o aberto de Ω (vizinhança do subconjunto da fronteira de Ω) onde a dissipação ocorre (ver figura 3.1).

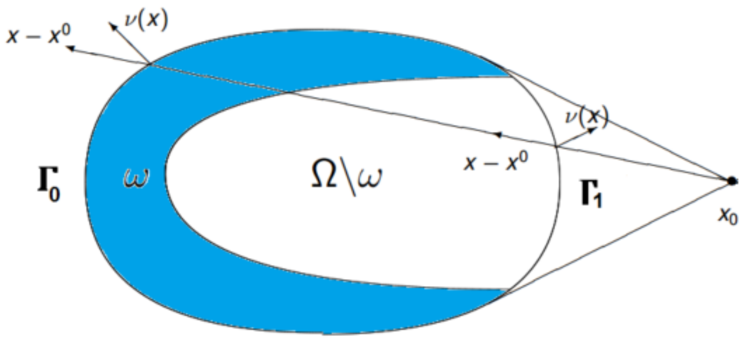

Figura 3.1: Domínio de dissipação ω

3.1 O decaimento exponencial

Estamos interessados em provar o decaimento exponencial da solução associada ao problema (2.2). Para isto, é suficiente provarmos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Seja f uma função tal que (3.2) e (3.3) ocorrem. Assumamos que $a \in L^\infty_+(\Omega)$ verifica (2.5) com $\omega \subset \Omega$ dado em (3.4). Então, existem constantes $C > 1, \gamma > 0$ tais que a estimativa (3.1) ocorre para qualquer solução de (2.2) com dados inicias $\{u^0, u^1\} \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$.*

Prova: Notemos, inicialmente, que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_\Omega a(x)|u_t|^2 dx, \ \forall\, t \geq 0, \tag{3.5}$$

o que nos diz que a energia do sistema (2.2) é não crescente. Integrando (3.5) de

t_1 a t_2 $\quad (0 \leq t_1 < t_2)$, temos

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x)|u_t|^2 dxdt. \tag{3.6}$$

Notemos, agora, que para provarmos o teorema 3.1 é suficiente provarmos que a seguinte estimativa ocorre:

$$E(T) \leq C_0 \int_0^T \int_{\Omega} a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt. \tag{3.7}$$

De fato, por (3.6) e (3.7) temos

$$E(T) - E(0) = -\int_0^T \int_{\Omega} a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt \leq \frac{E(T)}{C_0},$$

implicando em

$$E(T)\left(1 + \frac{1}{C_0}\right) \leq E(0),$$

e,

$$E(T) \leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right) E(0). \tag{3.8}$$

Agora, provemos, por indução sobre k, que vale

$$E(kT) \leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^k E(0).$$

Com efeito, de modo análogo à obtenção de (3.8), conseguimos que

$$\begin{aligned} E(2T) &\leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right) E(T) \\ &\leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^2 E(0). \end{aligned}$$

Suponhamos válida a desigualdade

$$E(kT) \leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^k E(0).$$

Então para $k+1$ temos

$$E((k+1)T) \leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right) E(kT) \leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^{k+1} E(0).$$

Logo,

$$E(kT) \leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^k E(0), \ \forall \ k \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Sabemos também que dado $t > 0$, o algoritmo de Euclides garante que existe $\delta \in [0, T)$ tal que

$$t = kT + \delta.$$

Daí,

$$kT \leq kT + \delta = t.$$

Como a energia é não crescente, segue de (3.9) que

$$E(t) \leq E(kT) \leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^k E(0)$$

Agora, desde que $k = \frac{t}{T} - \frac{\delta}{T}$, obtemos

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^{\frac{t}{T}-\frac{\delta}{T}} E(0) \\ &\leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^{\frac{t}{T}-1} E(0) \\ &= \left(\frac{C_0+1}{C_0}\right) . \left(\frac{C_0+1}{C_0}\right)^{-\frac{t}{T}} E(0) \\ &= \left(1+\frac{1}{C_0}\right) .e^{-[\frac{1}{T}\log(1+\frac{1}{C_0})]t} E(0), \end{aligned}$$

o que implica (3.1) com $C = 1 + \frac{1}{C_0}$ e $\gamma = \frac{1}{T}\log(1+\frac{1}{C_0})$, como queríamos.

Nosso objetivo, agora, resume-se a provar a estimativa (3.7). Para isto escrevamos a solução $u = u(x,t)$ de (2.2) como

$$u = \varphi + \psi$$

onde $\varphi = \varphi(x,t)$ resolve (5) com dados iniciais

$$\varphi^0 = u^0, \quad \varphi^1 = u^1$$

e $\psi = \psi(x,t)$ satisfaz

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \Delta\psi = -f(u) - a(x)u_t & \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \psi = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,\infty) \\ \psi(0) = \psi_t(0) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Como a energia é não crescente temos

$$E(T) \leq E(0) = \frac{1}{2}\left[||u^0||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||u^1||^2_{L^2(\Omega)}\right] + \int_\Omega F(u^0(x))dx.$$

Agora, desde que $|F(s)| \leq C|s|^2$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[||u^0||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||u^1||^2_{L^2(\Omega)}\right] + \int_\Omega F(u^0(x))dx &\leq \frac{1}{2}\left[||u^0||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||u^1||^2_{L^2(\Omega)}\right] + C||u^0||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\left[||u^0||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||u^1||^2_{L^2(\Omega)}\right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$E(T) \leq C\left[||u^0||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||u^1||^2_{L^2(\Omega)}\right] = C\left[||\varphi^0||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||\varphi^1||^2_{L^2(\Omega)}\right]. \tag{3.11}$$

Combinando (3.11) com a proposição 0.1 e usando o fato de $u = \varphi + \psi$ obtemos

$$\begin{aligned} E(T) &\leq C\left\{||\varphi^0||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||\varphi^1||^2_{L^2(\Omega)}\right\} \\ &\leq C\left\{\int_0^T \int_\omega |\varphi_t|^2 dxdt + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega\times(0,T))}\right\} \\ &\leq C\left\{\int_0^T \int_\Omega a(x)|\varphi_t|^2 dxdt + ||\varphi||^2_{L^2(Q)}\right\} \\ &= C\left\{\int_0^T \int_\Omega a(x)|u_t - \psi_t|^2 dxdt + ||u_t - \psi_t||^2_{L^2(Q)}\right\} \\ &\leq C\Bigg\{\int_0^T \int_\Omega a(x)|u_t|^2 dxdt + \int_0^T \int_\Omega a(x)|\psi_t|^2 dxdt \\ &+ ||u||^2_{L^2(Q)} + ||\psi||^2_{L^2(Q)}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Tomando o *supremo essencial* na segunda parcela da última desigualdade, temos

$$\int_0^T \int_\Omega a(x)|\psi_t|^2 dxdt \leq ||a||_\infty \int_0^T \int_\Omega |\psi_t|^2 dxdt = C||\psi_t||^2_{L^2(Q)}.$$

Substituindo esse fato na estimativa anterior, obtemos

$$E(T) \leq C\left\{\int_0^T \int_\Omega a(x)|u_t|^2 dxdt + ||u||^2_{L^2(Q)} + ||\psi||^2_{H^1(Q)}\right\}. \tag{3.12}$$

As estimativas de energia para o problema (3.10) nos rendem

$$||\psi||^2_{H^1(Q)} \leq C||f(u) + a(x)u_t||^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Daí e pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} ||\psi||^2_{H^1(Q)} &\leq C\left\{||f(u)||^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + ||a(x)u_t||^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right\} \\ &= C\left\{\left[\int_0^T \left(\int_\Omega |f(u)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dt\right]^2 + \left[\int_0^T \left(\int_\Omega a^2(x)|u_t|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dt\right]^2\right\} \\ &\leq C\left\{\int_0^T \int_\Omega |f(u)|^2 dxdt + \int_0^T \int_\Omega a(x)a(x)|u_t|^2 dxdt\right\}. \end{aligned}$$

Sabendo que, $|f(s)| \leq C|s|$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $a \in L^\infty(\Omega)$, obtemos na desigualdade anterior que

$$||\psi||^2_{H^1(Q)} \leq C\left\{\int_0^T \int_\Omega a(x)|u_t|^2 dxdt + ||u||^2_{L^2(Q)}\right\}, \tag{3.13}$$

onde a constante $C > 0$ depende de $||f'||_{L^\infty(\mathbb{R})}$ de maneira limitada.

Combinando (3.12) e (3.13) segue que

$$E(T) \leq C\left\{\int_0^T \int_\Omega a(x)|u_t|^2 dxdt + ||u||^2_{L^2(Q)}\right\}. \tag{3.14}$$

Para finalizarmos a prova de (3.7) e, consequentemente, a prova do teorema 3.1, provemos que vale a seguinte estimativa:

$$||u||^2_{L^2(Q)} \leq C\int_0^T \int_\Omega a(x)|u_t|^2 dxdt \tag{3.15}$$

De fato, Se tal estimativa não é satisfeita, então existe uma sequência de soluções $\{u_n\}$ de (2.2) verificando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||u_n||^2_{L^2(Q)}}{\int_0^T \int_\Omega a(x)|(u_n)_t|^2 dxdt} = \infty. \tag{3.16}$$

Definamos

$$\lambda_n = ||u_n||_{L^2(Q)} \tag{3.17}$$

e

$$v_n(x,t) = \frac{u_n(x,t)}{\lambda_n} \tag{3.18}$$

Notemos que, se multiplicarmos $\frac{1}{\lambda_n^2}$ em (2.2) associado à sequência $\{u_n\}$, obtemos que v_n satisfaz

$$\begin{cases} (v_n)_{tt} - \Delta v_n + f_n(v_n) + a(x)(v_n)_t = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ v_n = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,\infty) \end{cases} \tag{3.19}$$

onde

$$f_n(s) = \frac{1}{\lambda_n} f(\lambda_n s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

É claro que $\{f_n\}$ ainda é globalmente lipschitz para cada n e

$$||v_n||_{L^2(Q)} = 1. \tag{3.21}$$

Temos ainda, por (3.16), que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||v_n||^2_{L^2(Q)}}{\int_0^T \int_\Omega a(x)|(v_n)_t|^2 dxdt} = \infty.$$

Logo, por (3.21) e a igualdade acima, vem que

$$\int_0^T \int_\Omega a(x)|(v_n)_t|^2 dxdt \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty. \tag{3.22}$$

Observemos que, por (3.20),

$$f_n'(s) = \frac{1}{\lambda_n} f'(\lambda_n s)\lambda_n = f'(\lambda_n s).$$

Assim, tomando o *supremo essencial* na igualdade acima, vem que

$$||f_n'||_{L^\infty(\mathbb{R})} = ||f'||_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade (3.14) por λ_n^2 e denotando $E_n(T) = \frac{E(T)}{\lambda_n^2}$ teremos

$$\begin{aligned} E_n(T) &\leq C(||f_n'||_\infty)\left\{\int_0^T \int_\Omega a(x)|(v_n)_t|^2 dxdt + ||v_n||^2_{L^2(Q)}\right\} \\ &= C(||f'||_\infty)\left\{\int_0^T \int_\Omega a(x)|(v_n)_t|^2 dxdt + ||v_n||^2_{L^2(Q)}\right\}, \end{aligned}$$

o que nos diz que a estimativa (3.14) é uniforme em n. Temos ainda por (3.21), (3.22) e a desigualdade acima que $E_n(T) \leq K$, com $K > 0$. Isto nos permite provar o seguinte fato:

$$\{v_n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.23}$$

Com efeito, de maneira análoga ao feito no sistema (2.2) segue que

$$||(v_n)_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq E_n(t).$$

Assim, se $t > T$ e usando o fato de que a energia é não crescente, obtemos que

$$||(v_n)_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq E_n(t) \leq E_n(T) \leq K$$

Se, no entanto, $0 < t < T$, temos devido à (3.6) que

$$E_n(0) = E_n(T) + \int_0^T \int_\Omega a(x)|(v_n)_t|^2 dxdt \leq M, \text{ com } M > 0,$$

e, daí,

$$||(v_n)_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq E_n(t) \leq E_n(0) \leq M,$$

o que implica em (3.23). Consequentemente

$$\{v_n\} \text{ é limitado em } H^1(Q).$$

Assim, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki (Teorema 1.3), existe uma subsequência de $\{v_n\}$, a qual ainda denotaremos por $\{v_n\}$, tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } H^1(Q). \tag{3.24}$$

Temos ainda que $H^1(Q) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(Q)$, logo existe uma subsequência de $\{v_n\}$, que ainda denotaremos por $\{v_n\}$, tal que,

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{em} \quad L^2(Q). \tag{3.25}$$

A convergência em (3.25) juntamente com (3.21) nos fornece

$$||v||_{L^2(Q)} = 1. \tag{3.26}$$

Notemos por (3.22), que $a^{\frac{1}{2}}(x)(v_n)_t \longrightarrow 0$ em $L^2(Q)$. Por outro lado, temos por (3.24) que $(v_n)_t \rightharpoonup v_t$ em $L^2(Q)$, o que nos diz, pela definição de convergência fraca, que

$$\int_0^T \int_\Omega (v_n)_t \theta dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega v_t \theta dx dt, \quad \forall\, \theta \in L^2(Q).$$

Em particular, para $\theta = a^{\frac{1}{2}}(x)\gamma, \quad \forall\, \gamma \in L^2(Q)$, temos,

$$\int_0^T \int_\Omega a^{\frac{1}{2}}(x)(v_n)_t \gamma dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega a^{\frac{1}{2}}(x) v_t \gamma dx dt,$$

o que implica

$$a^{\frac{1}{2}}(x)(v_n)_t \rightharpoonup a^{\frac{1}{2}}(x) v_t \text{ em } L^2(Q).$$

Segue então pela unicidade do limite fraco que

$$a^{\frac{1}{2}}(x) v_t = 0 \text{ em } L^2(Q).$$

Multiplicando esta última igualdade por $a^{\frac{1}{2}}(x)$, obtemos

$$a(x) v_t = 0 \text{ em } L^2(Q)$$

e, consequentemente,

$$v_t = 0 \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad \omega \times (0, T). \tag{3.27}$$

Notemos agora que, chamando $h(z) = \dfrac{f(z)}{z}$, temos

$$f_n(s) = \frac{f_n(s)}{s}.s = h_n(s).s = \frac{f(\lambda_n s)}{\lambda_n s}.s = h_n(\lambda_n s).s, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notemos também que, pelo Teorema do Valor Médio, existe $r \in (0, z)$ tal que

$$|h(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq |f'(r)| \leq M, \quad \text{com } M > 0,$$

o que nos diz que $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ (h está limitada pela constante de Lipschitz de f'). Assim

$$f_n(v_n) = h_n(v_n) v_n,$$

com $\{h_n(v_n)\}$ uniformemente limitada em $L^\infty(Q)$, visto que (mais uma vez usando o teorema do valor médio)

$$|h_n(v_n)| = \frac{|f_n(v_n)|}{|v_n|} \leq M. \tag{3.28}$$

Portanto, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki (Teorema 1.3), temos que existe uma subsequência de $\{h_n(v_n)\}$, que ainda denotaremos por $\{h_n(v_n)\}$, tal que

$$h_n(v_n) \overset{*}{\rightharpoonup} p \text{ em } L^\infty(Q), \tag{3.29}$$

para algum $p \in L^\infty_+(Q)$, visto que, pela condição (2.3), $h \geq 0$.

Queremos, agora, passar ao limite em (3.19). Para isto, multipliquemos $(3.19)_1$ por $w\theta$ $(w \in H_0^1(\Omega), \theta \in \mathcal{D}(0,T))$ e integremos em Q. Assim,

$$\begin{aligned} &-\int_0^T ((v_n)_t, w)\theta' dt + \int_0^T (\nabla v_n, \nabla w)\theta dt + \int_0^T (h_n(v_n)v_n, w)\theta dt \\ &+ \int_0^T (a(x)(v_n)_t, w)\theta dt = 0, \end{aligned} \tag{3.30}$$

visto que $f_n(v_n) = h_n(v_n)v_n$.
Das convergências (3.22), (3.24) e (3.29), segue de (3.30) que

$$-\int_0^T (v_t, w)\theta' dt + \int_0^T (\nabla v, \nabla w)\theta dt + \int_0^T (pv, w)\theta dt = 0,$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e todo $w \in H_0^1(\Omega)$, mostrando assim que

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v + pv = 0 & \text{em} \quad Q, \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.31}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(Q)$.

Voltemos nossa atenção agora para mostrar que $v \equiv 0$, o que irá contradizer (3.26). Para isto, usaremos um resultado de continuação única no intuito de obter que $v = v(x)$. Isto irá nos permitir provar o resultado desejado. Notemos, em princípio, que $p = p(x,t)$ pode depender de t, o que nos impossibilita obter diretamente de (3.27) e (3.31) que $v \equiv 0$. Para transpor essa dificuldade, observemos que a sequência $\{\lambda_n\}$ definida em (3.17) pode ser limitada ou não. Se limitada, segue do Teorema de Bolzano-Weirstrass que existe uma subsequência de $\{\lambda_n\}$, denotada ainda por $\{\lambda_n\}$, tal que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda \in [0, \infty).$$

Se, no entanto, $\{\lambda_n\}$ é não limitada, deve existir uma subsequência de $\{\lambda_n\}$ tal que

$$\lambda_n \longrightarrow \infty.$$

Estudaremos, então, os três possíveis casos:

Caso (a)- Suponhamos que $\lambda_n \longrightarrow \lambda \in (0, \infty)$.

Assim, por (3.25), $\lambda_n v_n \longrightarrow \lambda v$ q.s em Q. Notemos que

$$\begin{aligned} ||f(\lambda_n v_n) - f(\lambda v)||^2_{L^2(Q)} &= \int_Q |f(\lambda_n v_n) - f(\lambda v)|^2 dxdt \\ &\leq C \int_Q |\lambda_n v_n - \lambda v|^2 dxdt \\ &= C \int_Q |\lambda_n v_n - \lambda_n v + \lambda_n v - \lambda v|^2 dxdt \\ &\leq C \int_Q |v_n - v|^2 dxdt + |\lambda_n - \lambda|^2 \int_Q |v|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(\lambda_n v_n) \longrightarrow f(\lambda v) \quad \text{em} \quad L^2(Q).$$

Agora,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(\lambda_n v_n)}{\lambda_n} - \frac{f(\lambda v)}{\lambda} \right\|_{L^2(Q)} &= \left\| \frac{f(\lambda_n v_n)}{\lambda_n} - \frac{f(\lambda v)}{\lambda_n} + \frac{f(\lambda v)}{\lambda_n} - \frac{f(\lambda v)}{\lambda} \right\|_{L^2(Q)} \\ &\leq C \left\| f(\lambda_n v_n) - f(\lambda v) \right\|_{L^2(Q)} + C \left| \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda} \right|, \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{f(\lambda_n v_n)}{\lambda_n} \longrightarrow \frac{f(\lambda v)}{\lambda} \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad Q. \tag{3.32}$$

Por outro lado, por (3.25) e (3.29) temos

$$\frac{1}{\lambda_n} f(\lambda_n v_n) = h_n(v_n) v_n \rightharpoonup pv,$$

o que juntamente com (3.32) nos dá

$$pv = \frac{1}{\lambda} f(\lambda v). \tag{3.33}$$

Agora, como $v_{ttt} - \Delta v_t + f'(\lambda v) v_t \in \mathcal{D}'(Q)$, segue que, para todo $\theta \in \mathcal{D}(Q)$, vale

$$\langle v_{ttt} - \Delta v_t + f'(\lambda v) v_t, \theta \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\langle v_{tt} - \Delta v + \frac{1}{\lambda} f(\lambda v), \theta' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0$$

e, daí,

$$v_{ttt} - \Delta v_t + f'(\lambda v) v_t = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Fazendo $w = v_t$ obtemos que

$$w_{tt} - \Delta w + f'(\lambda v)w = 0 \quad \text{em} \quad Q \tag{3.34}$$

com

$$w = 0 \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad \omega \times (0, T). \tag{3.35}$$

Essa última devido a (3.27). Notemos ainda que $f'(\lambda v) \in L^\infty(Q)$, visto que f é globalmente Lipschitz.

Caso (b)- Suponhamos agora que $\lambda_n \longrightarrow 0$.

Temos que, para todo $(x,t) \in Q$, vale

$$\begin{aligned} h_n(v_n(x,t)) &= \frac{f_n(v_n(x,t))}{v_n(x,t)} \\ &= \frac{f(\lambda_n v_n(x,t)) - f(0)}{\lambda_n v_n(x,t) - 0}. \end{aligned}$$

Notemos que, fazer $n \longrightarrow \infty$, é equivalente a fazer $\lambda_n v_n(x,t) \longrightarrow 0$. Assim,

$$h_n(v_n(x,t)) \longrightarrow f'(0) \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad Q.$$

Já vimos também em (3.28) que $\{h_n(v_n)\}$ é limitada em $L^2(Q)$. Logo, pelo Lema de Lions (Lema 1.17), segue que

$$h_n(v_n) \rightharpoonup f'(0) \text{ em } L^2(Q).$$

esta última convergência e (3.29) nos fornece

$$p(x,t) = f'(0) \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad Q. \tag{3.36}$$

De modo análogo ao feito no **Caso (a)**, conseguimos que

$$w_{tt} - \Delta w + f'(0)w = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q), \tag{3.37}$$

em que (3.35) também ocorre. Temos ainda que $f'(0) = p(x,t) \in L^\infty(Q)$.

Caso (c)- Suponhamos que a subsequência $\{\lambda_n\}$ é tal que $\lambda_n \longrightarrow \infty$. Neste caso, tomemos a derivada de (3.19) com respeito a t. Deduzimos, então, que $w_n = (v_n)_t$ satisfaz

$$(w_n)_{tt} - \Delta w_n + f'(\lambda_n v_n)w_n + a(x)(w_n)_t = 0 \quad \text{em} \quad Q. \tag{3.38}$$

Por (3.24) sabemos que

$$w_n \rightharpoonup w = v_t \quad \text{em} \quad L^2(Q). \tag{3.39}$$

A convergência (3.39) unida ao fato de que $\{f'(\lambda_n v_n)\}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(Q)$ (f é globalmente Lipschitz), mostram que

$$||f'(\lambda_n v_n)w_n||_{L^2(Q)} \leq ||f'(\lambda_n v_n)||_\infty ||w_n||_{L^2(Q)} \leq K.$$

Daí, mais uma vez pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki (Teorema 1.3) e o fato de que $L^2(Q)$ é reflexivo, temos a existência de uma subsequência tal que

$$f'(\lambda_n v_n)w_n \rightharpoonup z(x,t) \quad \text{em} \quad L^2(Q). \tag{3.40}$$

Portanto, passando (3.38) ao limite, quando $n \longrightarrow \infty$, e observando as convergências (3.22), (3.39) e (3.40), temos que

$$w_{tt} - \Delta w + z(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad Q. \tag{3.41}$$

Identifiquemos, agora, o limite $z(x,t)$. Para isto, dividamos o cilindro Q em dois subconjuntos $Q = Q_1 \cup Q_2$ com

$$Q_1 = \{(x,t) \in Q : v(x,t) \neq 0\} \quad \text{e} \quad Q_2 = \{(x,t) \in Q : v(x,t) = 0\}.$$

Escrevamos ainda $Q_1 = Q_1^+ \cup Q_1^-$, em que

$$Q_1^- = \{(x,t) \in Q_1 : v(x,t) < 0\} \quad \text{e} \quad Q_1^+ = \{(x,t) \in Q_1 : v(x,t) > 0\}.$$

Notemos que, por (3.3) e (3.25),

$$\begin{aligned} f'(\lambda_n v_n) = f'(\lambda_n v_n)\chi_{Q_1} &= f'(\lambda_n v_n)\chi_{Q_1^-} + f'(\lambda_n v_n)\chi_{Q_1^+} \\ &\longrightarrow f'(-\infty)\chi_{Q_1^-} + f'(+\infty)\chi_{Q_1^+} = q(x,t) \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad Q_1, \end{aligned}$$

em que, χ_A denota a função característica de A. Notemos também que o fato de $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e Q_1 ser limitado nos dão que

$$|f'(\lambda_n v_n)\chi_{Q_1}| \leq K,$$

o que nos diz que

$$|q(x,t)| \leq K.$$

Assim,

$$|f'(\lambda_n v_n) - q(x,t)|^2 \leq 2(K^2 + K^2) = 4K^2$$

e

$$|f'(\lambda_n v_n) - q(x,t)|^2 \longrightarrow 0 \text{ em } Q_1.$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, vem que

$$\int_{Q_1} |f'(\lambda_n v_n) - q(x,t)|^2 dxdt \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad Q_1$$

ou ainda,

$$f'(\lambda_n v_n) \longrightarrow q(x,t) \quad \text{em} \quad L^2(Q_1). \tag{3.42}$$

De (3.39) e (3.42) segue que

$$f'(\lambda_n v_n) w_n(x,t) \longrightarrow q(x,t) w(x,t) \quad \text{em} \quad L^2(Q_1).$$

Isto, unido à (3.40) resulta que

$$z(x,t) = q(x,t) w(x,t) \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad Q_1. \tag{3.43}$$

Por outro lado, temos por $(3.31)_1$, que

$$p(x,t) v = -(v_{tt} - \Delta v) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Sabendo também que $v \in L^2(Q)$ e $p \in L^\infty(Q)$, segue que $v_{tt} - \Delta v \in L^2(Q)$. Afirmemos que

$$v_{tt} - \Delta v = 0 \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad Q_2. \tag{3.44}$$

De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(Q_2)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{Q_2} (v_{tt} - \Delta v)\varphi dxdt &= \langle v_{tt} - \Delta v, \varphi \rangle \\ &= \langle v, \varphi_{tt} - \Delta \varphi \rangle \\ &= \int_{Q_2} v(\varphi_{tt} - \Delta\varphi) dxdt = 0, \end{aligned}$$

pois $v \in Q_2$. Logo (3.44) segue do Lema de Du Bois Raymond (Lema 1.4).

Em (3.41), lembrando que $w = v_t$, obtemos que

$$z(x,t) = -\frac{d}{dt}(v_{tt} - \Delta v) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Mostremos que

$$z(x,t) = 0 \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad Q_2. \tag{3.45}$$

Com efeito, dado $\varphi \in \mathcal{D}(Q_2)$, segue por (3.44) que

$$\begin{aligned}
\langle z, \varphi \rangle &= \int_{Q_2} z\varphi dxdt, \\
&= \int_{Q_2} -\frac{d}{dt}(v_{tt} - \Delta v)\varphi dxdt \\
&= \int_{Q_2} (v_{tt} - \Delta v)\varphi_t dxdt \\
&= \langle v_{tt} - \Delta v, \varphi_t \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos.

Combinando (3.41), (3.43) e (3.45) concluímos que

$$w_{tt} - \Delta w + \bar{q}(x,t)w = 0 \quad \text{em} \quad Q,$$

onde $\bar{q}(x,t) \in L^\infty(Q)$ é tal que

$$\bar{q}(x,t) = \begin{cases} q(x,t) & \text{em} \quad Q_1, \\ 0 & \text{em} \quad Q_2. \end{cases}$$

Temos também que (3.35) ocorre.

Recapitulando, vimos que, em cada um dos três casos, (a), (b) e (c), a função $w \in L^2(Q)$ satisfaz

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + b(x,t)w = 0 & \text{em} \quad Q, \\ w = 0 & \text{em} \quad \omega \times (0,T), \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.46}$$

para algum potencial $b \in L^\infty(Q)$.

Afim de aplicarmos a proposição 0.2 precisamos garantir que $w \in H^1(Q)$. Isto pode ser feito provando (pelo argumento de perturbação que usamos anteriormente) uma estimativa do tipo (3.14) para o sistema (3.46).

Aplicando, então, a proposição 0.2 nós deduzimos que $w \equiv 0$ e, portanto, $v = v(x)$. Logo $v_{tt} = 0$. Tomando, finalmente, esse fato em $(3.31)_1$ obtemos que

$$-\Delta v + pv = 0.$$

Multiplicando a igualdade acima por v e integrando em Ω, temos

$$\int_\Omega -\Delta v.v dx + \int_\Omega p|v|^2 dx = 0$$

e, pelo teorema de Green,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega p|v|^2 dx = 0.$$

Assim, desde que $p(x,t) \geq 0$, chegamos que $v \equiv 0$. O que contraria (3.26) e, consequentemente, finaliza a demonstração do Teorema 3.1. $\blacksquare$

Capítulo 4

Decaimento exponencial: O caso superlinear

O objetivo deste capítulo é provar o decaimento exponencial da energia associada à solução de (2.2) no caso em que a não linearidade $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaz (2.4) e

$$\exists \delta > 0 : f(s)s \geq (2+\delta)F(s), \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Diferente do capítulo anterior, não podemos tratar esse caso como uma perturbação do problema linear quando $f \equiv 0$. Estudaremos então, o caso onde a dissipação é efetiva numa vizinhança de um subconjunto da fronteira de Ω do tipo Γ_0, definido no capítulo 3.

Para provarmos as estimativas de energia nos basearemos na técnica dos multiplicadores desenvolvidas em [[6], pág 409-419].

4.1 O decaimento exponencial

Para garantirmos o decaimento exponencial da energia associada à solução de (2.2), é suficiente provarmos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^2. Suponhamos $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo (2.4) e (4.1). Suponhamos também que $a \in L^\infty_+(\Omega)$ satisfaz (2.5), onde ω é dada em (3.4). Então existem constantes $C > 1$, $\gamma > 0$ tais que a estimativa (3.1) ocorre para a energia associada a cada solução de (2.2).*

Prova: Assim como na demonstração do Teorema 3.1, é suficiente provarmos uma estimativa do tipo (3.7). Para isto, procederemos em 3 etapas. Porém, antes de começarmos, de fato, a provar tal estimativa, é conveniente que façamos algumas abreviações em nossas notações. Denotaremos então

1) $\int = \int_\Omega dx$
2) $\int\int = \int_0^T \int_\Omega dxdt$
3) $\int\int_\Sigma = \int_0^T \int_\Gamma d\Gamma dt$
4) $\int\int_{\Sigma_0} = \int_0^T \int_{\Gamma_0} d\Gamma dt$

Procederemos agora de modo a mostrar a estimativa de energia (3.7):

Etapa 1- Aqui, usaremos a técnica de multiplicadores feita em [6] com o intuito de obter estimativas de energia para solução de (2.2). Para isto, multipliquemos a equação $(2.2)_1$ por $q(x)\cdot\nabla u(x,t)$, onde $q \in (W^{1,\infty}(\Omega))^n$ é um campo de vetores, e integremos de 0 a T. Obtemos assim

$$\int\int (u_{tt} - \Delta u)(q\cdot\nabla u) = -\int\int f(u)(q\cdot\nabla u) - \int\int a(x)u_t(q\cdot\nabla u). \tag{4.2}$$

Por [[6], Lema 3.7, Cap. I], temos

$$\begin{aligned}\int\int (u_{tt} - \Delta u)(q\cdot\nabla u) &= -\frac{1}{2}\int\int_\Sigma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + (u_t, q\cdot\nabla u)|_0^T \\ &+ \frac{1}{2}\int\int (div\ q)(|u_t|^2 - |\nabla u|^2) + \int\int\sum_{j,k}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

Combinando a igualdade acima com (4.2) obtemos

$$\begin{aligned}-\int\int f(u)(q\cdot\nabla u) - \int\int a(x)u_t(q\cdot\nabla u) &= -\frac{1}{2}\int\int_\Sigma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + (u_t, q\cdot\nabla u)|_0^T \\ &+ \frac{1}{2}\int\int (div\ q)(|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \\ &+ \int\int\sum_{j,k}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Notemos que

$$\int\int f(u)(q\cdot\nabla u) = -\int\int (div\ q)F(u). \tag{4.4}$$

Com efeito, desde que

$$F(s) = \int_0^s f(z)dz$$

tem-se que

$$\nabla F(u) = F'(u)\nabla u = f(u)\nabla u,$$

com isso

$$\int\int f(u)(q\cdot\nabla u)=\int\int q\cdot\nabla F(u). \tag{4.5}$$

Temos ainda pelo Lema de Gauss que

$$\int\int q\cdot\nabla F(u)=-\int\int(div\ q)F(u)+\int\int_{\Sigma}(q\cdot\nu)F(u).$$

Substituindo (4.5) na igualdade acima vem que

$$\int\int f(u)(q\cdot\nabla u)=-\int\int(div\ q)F(u)+\int\int_{\Sigma}(q\cdot\nu)F(u). \tag{4.6}$$

Mas $u=0$ sobre $\Gamma\times(0,\infty)$, assim

$$F(u(x,t))=\int_0^{u(x,t)}f(z)dz=\int_0^0 f(z)dz=0,\quad\forall\ (x,t)\in\Gamma\times(0,\infty). \tag{4.7}$$

Combinando (4.6) com (4.7) obtemos (4.4), como queríamos.

Substituindo (4.4) em (4.3) chegamos que

$$\begin{aligned}\left(\int u_t(q\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T+\frac{1}{2}\int\int(div\ q)(|u_t|^2-|\nabla u|^2)+\int\int\sum_{j,k}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}\\ -\int\int(div\ q)F(u)+\int\int a(x)u_t(q\cdot\nabla u)=\frac{1}{2}\int\int_{\Sigma}(q\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Apliquemos a identidade (4.8) com $q(x)=x-x_0=m(x)$, para algum x_0 fixo de $\mathbb{R}^n$. Assim, sabendo que (neste caso) $div\ q=n$, temos

$$\begin{aligned}\left(\int u_t m\cdot\nabla u\right)\Big|_0^T+\frac{n}{2}\int\int(|u_t|^2-|\nabla u|^2)+\int\int\sum_{j,k}\frac{\partial(x_k-x_0)}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}\\ -n\int\int F(u)+\int\int a(x)u_t(m\cdot\nabla u)=\frac{1}{2}\int\int_{\Sigma}(m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2,\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\left(\int u_t(m\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T+\frac{n}{2}\int\int(|u_t|^2-|\nabla u|^2)+\int\int|\nabla u|^2-n\int\int F(u)\\ +\int\int a(x)u_t(m\cdot\nabla u)=\frac{1}{2}\int\int_{\Sigma}(m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Agora, como

$$\int_0^T\int_\Gamma (m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt = \int_0^T\int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt + \int_0^T\int_{\Gamma_0} (m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt,$$

segue que

$$\int\int_\Sigma (m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 = \int_0^T\int_\Gamma (m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt \leq \int_0^T\int_{\Gamma_0} (m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt.$$

Substituindo essa desigualdade em (4.9) obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int u_t.m.\nabla u\right)\Big|_0^T + \frac{n}{2}\int\int [|u_t|^2 - |\nabla u|^2] + \int\int |\nabla u|^2 - n\int\int F(u)\\ + \int\int a(x)u_t(m.\nabla u) \leq \frac{1}{2}\int\int_{\Sigma(x_0)}(m.\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Multipliquemos $(2.2)_1$ por $\xi(x)u$, com $\xi \in W^{1,\infty}(\Omega)$, e integremos em Q para obtermos

$$\begin{aligned}\int\int \xi(x)uu_{tt} - \int\int \xi(x)u\Delta u + \int\int \xi(x)uf(u)\\ + \int\int \xi(x)ua(x)u_t = 0.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Vamos analisar cada integral em (4.11). Segue do Teorema de Green (Teorema 1.16) que

$$\int\int \nabla u\cdot\nabla(\xi u) = -\int\int \Delta u\xi u + \int\int_\Sigma \xi u\frac{\partial u}{\partial\nu} = -\int\int \Delta u\xi u. \tag{4.12}$$

Agora, notemos que

$$\int\int \xi[(u_t u)_t - u_t u_t] = \int\int \xi u_{tt}u. \tag{4.13}$$

E, por fim

$$\int\int \frac{a\xi}{2}(u^2)_t = \int\int a\xi uu_t. \tag{4.14}$$

Combinando, (4.12), (4.13) e (4.14) em (4.11), obtemos

$$\int\int\left(\xi u_t u + \frac{a\xi}{2}u^2\right)_t = \int\int \xi(|u_t|^2 - |\nabla u|^2) - \int\int u\nabla u\cdot\nabla\xi - \int\int \xi uf(u),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\left(\int \xi u\left(u_t+\frac{au}{2}\right)\right)\Big|_0^T &= \int\int \xi(|u_t|^2-|\nabla u|^2)-\int\int u\nabla u\cdot\nabla\xi\\ &- \int\int \xi u f(u). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Multiplicando (4.15) por $\alpha\in\mathbb{R}$ e fazendo $\xi=1$, segue que

$$\left(\int \alpha u\left(u_t+\frac{au}{2}\right)\right)\Big|_0^T-\alpha\int\int(|u_t|^2-|\nabla u|^2)+\alpha\int\int uf(u)=0. \tag{4.16}$$

Agora, combinando (4.16) com (4.10) deduzimos que

$$\begin{aligned}&\left(\int u_t m\cdot\nabla u\right)\Big|_0^T+\frac{n}{2}\int\int(|u_t|^2-|\nabla u|^2)+\int\int|\nabla u|^2-n\int\int F(u)\\ &+\int\int a(x)u_t(m\cdot\nabla u)+\left(\int \alpha u\left(u_t+\frac{au}{2}\right)\right)\Big|_0^T-\alpha\int\int(|u_t|^2-|\nabla u|^2)\\ &+\alpha\int\int f(u)u\le\frac{1}{2}\int\int_{\Sigma(x_0)}(m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2.\end{aligned}$$

E, consequentemente

$$\begin{aligned}\left(\int u_t m\cdot\nabla u-\alpha u\left(u_t+\frac{au}{2}\right)\right)\Big|_0^T &+ \left(\frac{n}{2}-\alpha\right)\int\int|u_t|^2+\left(1+\alpha-\frac{n}{2}\right)\int\int|\nabla u|^2\\ &+ \alpha\int\int f(u)u-n\int\int F(u)+\int\int a(x)u_t(m\cdot\nabla u)\\ &\le \frac{1}{2}\int\int_{\Sigma(x_0)}(m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Afirmação - Existe $\alpha\in\left(\frac{n-2}{2},\frac{n}{2}\right)$, $n\ge 2$, para o qual vale

$$f(s)s\ge\left(\frac{n+\gamma}{\alpha}\right)F(s),\quad \forall\ s\in\mathbb{R}\text{ e algum }\gamma>0.$$

Se $n=1$ temos $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ satisfazendo a mesma condição acima.

De fato, por (4.1) temos que

$$\exists\delta>0: f(s)s\ge(2+\delta)F(s),\forall s\in\mathbb{R}. \tag{4.18}$$

Sejam $n>1$ e $\gamma>0$ tais que $\gamma<\frac{n\delta}{2}$, então existe $\lambda\in(0,1)$ tal que

$$\gamma<\gamma+\lambda(\delta+2)<\frac{n\delta}{2}.$$

Daí,

$$\gamma + \lambda(\delta + 2) < n\left(\frac{\delta + 2}{2} - 1\right).$$

Logo,

$$\gamma + \lambda(\delta + 2) < \frac{n}{2}(\delta + 2) - n$$

ou ainda

$$\gamma + n < \left(\frac{n}{2} - \lambda\right)(\delta + 2).$$

Portanto

$$\frac{\gamma + n}{\frac{n}{2} - \lambda} < \delta + 2.$$

Tomando $\alpha = \left(\frac{n}{2} - \lambda\right)$, segue que $\alpha \in \left(\frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}\right)$. Substituindo $\alpha = \left(\frac{n}{2} - \lambda\right)$ em (4.18) concluímos a afirmação. se $n = 1$ procedemos de modo análogo. Com isso, as constantes $(\frac{n}{2} - \alpha)$ e $(1 + \alpha - \frac{n}{2})$ são positivas. Agora, seja

$$C = min\left\{\left(1 + \alpha - \frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{2} - \alpha\right), \gamma\right\} > 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
C\int_0^T E(t)dt &\leq \left(1 + \alpha - \frac{n}{2}\right)\int\int |\nabla u|^2 + \left(\frac{n}{2} - \alpha\right)\int\int |u_t|^2 + \gamma\int\int F(u) \\
&= \left(1 + \alpha - \frac{n}{2}\right)\int\int |\nabla u|^2 + \left(\frac{n}{2} - \alpha\right)\int\int |u_t|^2 \\
&+ \alpha\left(\frac{n + \gamma}{\alpha}\right)\int\int F(u) - n\int\int F(u) \\
&\leq \left(1 + \alpha - \frac{n}{2}\right)\int\int |\nabla u|^2 + \left(\frac{n}{2} - \alpha\right)\int\int |u_t|^2 \\
&+ \alpha\int\int f(u)u - n\int\int F(u).
\end{aligned}$$

Aplicando (4.17) na desigualdade acima obtemos

$$
\begin{aligned}
C\int_0^T E(t)dt &\leq \frac{1}{2}\int\int_{\Sigma(x_0)}(m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 - \left(\int\left[u_t m\cdot\nabla u - \alpha u\left(u_t + \frac{au}{2}\right)\right]\right)\Big|_0^T \\
&- \int\int a(x)u_t m\cdot\nabla u \\
&\leq \left|\frac{1}{2}\int\int_{\Sigma(x_0)}(m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 - \left(\int\left[u_t m\cdot\nabla u - \alpha u\left(u_t + \frac{au}{2}\right)\right]\right)\Big|_0^T\right| \\
&+ \left|\int\int a(x)u_t m\cdot\nabla u\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int\int_{\Sigma(x_0)}(m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \left|\left(\int\left[u_t m\cdot\nabla u - \alpha u\left(u_t + \frac{au}{2}\right)\right]\right)\Big|_0^T\right| \\
&+ \left|\int\int a(x)u_t m\cdot\nabla u\right|,
\end{aligned}
$$

o que implica na seguinte estimativa:

$$
\int_0^T E(t)dt \leq C\left\{\int\int_{\Sigma(x_0)}(m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + X + \left|\int\int a(x)u_t m\cdot\nabla u\right|\right\}, \tag{4.19}
$$

com

$$
X = \left|\left(\int\left[u_t m\cdot\nabla u - \alpha u\left(u_t + \frac{au}{2}\right)\right]\right)\Big|_0^T\right|. \tag{4.20}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\left|\int\int a u_t m\cdot\nabla u\right| &\leq \int\int |a(x)u_t m\cdot\nabla u| \\
&\leq \int\int a|u_t|m|\nabla u| \\
&= \int\int \frac{a|u_t|}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}m|\nabla u| \\
&\leq \frac{1}{2}\int\int\frac{a^2|u_t|^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\int\int \varepsilon m^2|\nabla u|^2 \\
&\leq \frac{||a||_\infty}{2\varepsilon}\int\int a|u_t|^2 + \frac{\varepsilon}{2}||m||_\infty^2\int\int|\nabla u|^2, \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

para algum $\varepsilon > 0$. Substituindo (4.21) em (4.19) e tomando ε suficientemente pequeno, obtemos

$$
\int_0^T E(t)dt \leq C\left\{\int\int_{\Sigma(x_0)}(m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \int\int a|u_t|^2 + X\right\}. \tag{4.22}
$$

Etapa 2- Nessa segunda etapa queremos encontrar uma estimativa para a quantidade

$$\int\int_{\Sigma(x_0)} (m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2$$

em termos de

$$\int\int a|u_t|^2.$$

Para isto, além de usarmos a técnica de multiplicadores utilizada na etapa 1, necessitamos também da existência do aberto $\widehat{\omega}$, vizinhança de $\overline{\Gamma_0}$, tal que

$$\overline{\widehat{\omega}} \cap \Omega \subset \omega$$

Cuja construção pode ser encontrada em [[6], Lema 2.3, cap VII]. Necessitamos ainda da construção do campo vetorial $h \in (W^{1,\infty}(\Omega))^n$ tal que

$$\begin{cases} h=\nu & \text{sobre} \quad \Gamma_0 \\ h\cdot\nu \geq 0 \quad \text{q.s} & \text{em} \quad \Gamma \end{cases} \tag{4.23}$$

e

$$h = 0 \quad \text{em} \quad \Omega - \widehat{\omega}. \tag{4.24}$$

A construção do campo vetorial h pode ser vista em [[6], Observação 3.2, Cap. I].

Fazendo $q = h$ na identidade (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int\int_{\Sigma}(h\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 &= \left(\int u_t h\cdot\nabla u\right)\Big|_0^T + \frac{1}{2}\int\int (div\ h)(|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \\ &+ \int\int\sum_{j,k}\frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \int\int(div\ h)F(u) \\ &+ \int\int a(x)u_t h\cdot\nabla u. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Façamos algumas observações com respeito às parcelas da identidade (4.25). Notemos, inicialmente, que

$$
\begin{aligned}
\int\int\sum_{j,k}\frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j} &\leq \int\int_{\widehat{\omega}}\sum_{j,k}\left|\frac{\partial h_k}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \\
&\leq C\int\int_{\widehat{\omega}}\sum_{j,k}\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \\
&\leq C\int\int_{\widehat{\omega}}\sum_{j,k}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right\} \\
&\leq C\int\int_{\widehat{\omega}}|\nabla u|^2. \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
\int\int a u_t h\cdot\nabla u &\leq ||a||_\infty\int\int_{\widehat{\omega}}|u_t h\cdot\nabla u| \\
&\leq C\left\{\int\int_{\widehat{\omega}}|u_t|^2+\int\int_{\widehat{\omega}}|\nabla u|^2\right\}. \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Combinando (4.25)-(4.27) e lembrando que $h\in(W^{1,\infty}(\Omega))^n$, obtemos que

$$
\int\int_{\Sigma}(h\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\leq 2\left(\int u_t h\cdot\nabla u\right)\Big|_0^T+C\int\int_{\widehat{\omega}}\left(|u_t|^2+|\nabla u|^2+F(u)\right). \qquad (4.28)
$$

Notemos que

$$
\int\int_{\Sigma}(h\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2=\int\int_{\Gamma_1}(h\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\int\int_{\Gamma_0}(h\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2,
$$

o que implica, por (4.23), que

$$
\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\leq\int\int_{\Sigma}(h\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2.
$$

Assim obtemos (pela desigualdade acima e por (4.28)) que existe $C>0$ tal que

$$
\int\int_{\Sigma(x_0)}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\leq C\int\int_{\widehat{\omega}}\left(|u_t|^2+|\nabla u|^2+F(u)\right)+2\left(\int u_t h\cdot\nabla u\right)\Big|_0^T \qquad (4.29)
$$

Por [[6], Lema 2.4 Cap VII] podemos construir a função $\eta\in W^{1,\infty}(\Omega)$, satisfazendo:

$$
0\leq\eta\leq 1\quad \text{q.s}\quad \text{em}\quad \Omega;\quad \eta=1\quad \text{q.s}\quad \text{em}\quad \widehat{\omega}; \qquad (4.30)
$$

$$
\eta=0\quad \text{q.s}\quad \text{em}\quad \Omega-\omega; \qquad (4.31)
$$

e

$$\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta} \in L^\infty(\omega). \tag{4.32}$$

Fazendo em (4.15) $\xi = \eta$, temos

$$\left(\int \eta u \left(u_t + \frac{au}{2}\right)\right)\Big|_0^T = \int\int \eta(|u_t|^2 - |\nabla u|^2) - \int\int u\nabla u \cdot \nabla\eta - \int\int \eta u f(u)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int\int \eta(|\nabla u|^2 + f(u)u) + \int\int u\nabla u\cdot\nabla\eta &= \int\int \eta|u_t|^2 - \left(\int \eta u \left(u_t + \frac{au}{2}\right)\right)\Big|_0^T \\ &\leq \int\int \eta|u_t|^2 + \left|\left(\int \eta u \left(u_t + \frac{au}{2}\right)\right)\Big|_0^T\right|. \end{aligned}$$

Por (4.30) e (4.31), segue da desigualdade acima que

$$\int\int \eta(|\nabla u|^2 + f(u)u) + \int\int u\nabla u\cdot\nabla\eta \leq C\left\{\int\int_\omega |u_t|^2 + Y\right\}, \tag{4.33}$$

onde

$$Y = \left|\left(\int \eta u \left(u_t + \frac{au}{2}\right)\right)\Big|_0^T\right|. \tag{4.34}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left|\int\int u\nabla u\cdot\nabla\eta\right| &\leq \int\int |u||\nabla u||\nabla\eta| \\ &= \int\int (\sqrt{\varepsilon\eta}|\nabla u|)\left(\frac{|u||\nabla\eta|}{\sqrt{\varepsilon\eta}}\right) \\ &\leq \int\int \frac{\varepsilon\eta|\nabla u|^2}{2} + \int\int \frac{|u|^2|\nabla\eta|^2}{2\varepsilon\eta} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\int\int \eta|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int\int \frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}|u|^2, \end{aligned} \tag{4.35}$$

com $\varepsilon > 0$. combinando (4.33) com (4.35), obtemos para ε suficientemente pequeno que

$$\int\int \eta(|\nabla u|^2 + f(u)u) \leq C\left\{\int\int |u|^2 + \int\int_\omega |u_t|^2 + Y\right\}. \tag{4.36}$$

Sabendo que $\eta = 1$ q.s em $\widehat{\omega} \subset \Omega$, deduzimos por (4.1)

$$C \int\int \eta(|\nabla u|^2 + f(u)u) \geq \int\int \eta(|\nabla u|^2 + F(u)) \geq \int\int_{\widehat{\omega}} (|\nabla u|^2 + F(u)), \quad (4.37)$$

com $C = max\{1, (2+\delta)^{-1}\}$. Por (4.36) e (4.37) segue que

$$\int\int_{\widehat{\omega}} (|\nabla u|^2 + F(u)) \leq C\left\{\int\int_{\omega} |u_t|^2 + \int\int |u|^2 + Y\right\}. \quad (4.38)$$

Substituindo (4.38) em (4.29) temos

$$\begin{aligned} \int\int_{\Sigma(x_0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 &\leq C\left\{\int\int_{\omega} |u_t|^2 + \int\int |u|^2 + \left(\int u_t h \cdot \nabla u\right)\Big|_0^T + Y\right\} \\ &\leq C\left\{\int\int a|u_t|^2 + \int\int |u|^2 + \left|\left(\int u_t h \cdot \nabla u\right)\Big|_0^T\right| + Y\right\}. \quad (4.39) \end{aligned}$$

Sabendo que a energia é não crescente, obtemos por combinação de (4.22) e (4.39) que

$$\begin{aligned} T.E(T) &\leq \int_0^T E(t)dt \\ &\leq C\left\{\int\int a|u_t|^2 + \int\int |u|^2 + X + Y + \left|\left(\int u_t h \cdot \nabla u\right)\Big|_0^T\right|\right\}. \quad (4.40) \end{aligned}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned} X + Y + \left|\left(\int u_t h \cdot \nabla u\right)\Big|_0^T\right| &= \left|\left(\int \left[u_t m \cdot \nabla u - \alpha u \left(u_t + \frac{au}{2}\right)\right]\right)\Big|_0^T\right| \\ &+ \left|\left(\int \eta u \left(u_t + \frac{au}{2}\right)\right)\Big|_0^T\right| + \left|\left(\int u_t h \cdot \nabla u\right)\Big|_0^T\right| \\ &= \left|\int \left[u_t(T) m \cdot \nabla u(T) - \alpha u(T)\left(u_t(T) + \frac{au(T)}{2}\right)\right]\right| \\ &+ \left|\int \eta u(T)\left(u_t(T) + \frac{au(T)}{2}\right)\right| + \left|\int u_t(T) h \cdot \nabla u(T)\right| \\ &+ \left|\int \left[u^1 m \cdot \nabla u^0 - \alpha u^0 \left(u^1 + \frac{au^0}{2}\right)\right]\right| \\ &+ \left|\int \eta u^0 \left(u^1 + \frac{au^0}{2}\right)\right| + \left|\int u^1 h \cdot \nabla u^0\right| \end{aligned}$$

Limitaremos os 3 últimos termos da desigualdade anterior. Temos então:

$$\begin{aligned}
\left|\int\left[u^1 m\cdot\nabla u^0-\alpha u^0\left(u^1+\frac{au^0}{2}\right)\right]\right| &\leq \left|\int u^1 m\cdot\nabla u^0\right|+\left|\alpha u^0\left(u^1+\frac{au^0}{2}\right)\right| \\
&\leq \int |u^1||m||\nabla u^0|+\alpha\int|u^1||u^0|+\alpha\int\frac{a}{2}|u^0|^2 \\
&\leq \frac{||m||_\infty}{2}\int\left[|u^1|^2+|\nabla u^0|^2\right]+\frac{\alpha}{2}\int\left[|u^1|^2+|u^0|^2\right] \\
&+ \frac{\alpha||a||_\infty}{2}\int|u^0|^2 \\
&\leq \frac{||m||_\infty}{2}\left\{\int|u^1|^2+\int|\nabla u^0|^2\right\} \\
&+ \frac{\alpha}{2}\left\{\int|u^1|^2+\beta\int|\nabla u^0|^2\right\} \\
&+ \frac{\beta\alpha||a||_\infty}{2}\int|\nabla u^0|^2,
\end{aligned}$$

onde $\beta>0$ é a constante de Poincaré ($|u^0|\leq\beta|\nabla u^0|$). Assim temos

$$\left|\int\left[u^1 m\cdot\nabla u^0-\alpha u^0\left(u^1+\frac{au^0}{2}\right)\right]\right|\leq C\left\{\int|u^1|^2+\int|\nabla u^0|^2\right\}. \tag{4.41}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\left|\int\eta u^0\left(u^1+\frac{au^0}{2}\right)\right| &\leq ||\eta||_\infty\int|u^0||u^1|+\frac{||\eta||_\infty||a||_\infty}{2}\int|u^0|^2 \\
&\leq ||\eta||_\infty\left\{\int|u^0|^2+\int|u^1|^2\right\}+\frac{||\eta||_\infty||a||_\infty}{2}\int|u^0|^2 \\
&\leq C\left\{\int|u^1|^2+\int|\nabla u^0|^2\right\}, \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

Por fim

$$\begin{aligned}
\left|\int u^1 h\cdot\nabla u^0\right| &\leq \int|u^1||h||\nabla u^0| \\
&\leq \frac{||h||_\infty}{2}\left\{\int|u^1|^2+\int|\nabla u^0|^2\right\}. \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

De (4.41), (4.42) e (4.43) obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int\left[u^1 m\cdot\nabla u^0-\alpha u^0\left(u^1+\frac{au^0}{2}\right)\right]\right| &+ \left|\int\eta u^0\left(u^1+\frac{au^0}{2}\right)\right| \\
&+ \left|\int u^1 h\cdot\nabla u^0\right| \\
&\leq C\left\{\int|u^1|^2+\int|\nabla u^0|^2\right\}=CE(0).
\end{aligned}$$

De modo análogo, mostramos que

$$\left|\int \left[u_t(T)m\cdot\nabla u(T) - \alpha u(T)\left(u_t(T)+\frac{au(T)}{2}\right)\right]\right| + \left|\int \eta u(T)\left(u_t(T)+\frac{au(T)}{2}\right)\right| + \\ + \left|\int u_t(T)h\cdot\nabla u(T)\right| = CE(T).$$

E, com isso, concluímos que

$$X + Y + \left|\left(\int u_t h\cdot\nabla u\right)\Big|_0^T\right| \leq C\left(E(0)+E(T)\right). \tag{4.44}$$

Por outro lado, segue de (3.6) que

$$E(0) - E(T) = \int\int a|u_t|^2,$$

ou seja,

$$E(0) + E(T) = 2E(T) + \int\int\ |u_t|^2.$$

Com essa informação obtemos de (4.44) que

$$X + Y + \left|\left(\int u_t h\cdot\nabla u\right)\Big|_0^T\right| \leq C\left\{2E(t) + \int\int a|u_t|^2\right\}. \tag{4.45}$$

Combinando (4.40) com (4.45), deduzimos que

$$TE(T) \leq C\left\{\int\int a|u_t|^2 + \int\int |u|^2 + E(T)\right\}.$$

Assim, para T suficientemente grande, obtemos

$$E(T) \leq C\left\{\int\int a|u_t|^2 + \int\int |u|^2\right\} \tag{4.46}$$

Etapa 3- Nessa etapa, assim como na prova do Teorema 3.1, estaremos interessados em provar a seguinte estimativa

$$\int\int |u|^2 \leq C\int\int a|u_t|^2. \tag{4.47}$$

Para isto, usaremos novamente o argumento de contradição. Suponhamos que (4.47) não é válida para nenhum $C>0$, existe assim uma sequência $\{u_n\}$ de soluções de (2.2) verificando (3.16). Definamos $\{\lambda_n\}$ e $\{v_n\}$ como em (3.17) e (3.18), respectivamente. As funções $\{v_n\}$ satisfazem (3.19) com a não linearidade f_n tomada em (3.20). Por outro lado, a sequência $\{v_n\}$ também satisfaz (3.21) e (3.22). Notemos que a constante $C > 0$ na estimativa (4.46) depende sobre a não linearidade de f apenas em termos da constante δ da hipótese (4.1). Mas esta constante é uniforme com respeito a família de não linearidades em (3.20) e, portanto, a constante $C > 0$ em (4.46) é uniforme sobre $\{f_n\}$. Assim, por (3.21) e (3.22) nós deduzimos, de modo análogo ao feito no Teorema 3.1, que $\{v_n\}$ é limitada em $H^1(Q)$. Portanto, extraímos uma subsequência de $\{v_n\}$ verificando (3.24) e (3.25). O limite $v \in H^1(Q)$ satisfaz (3.26) e (3.27). Analogamente ao que fizemos no Teorema 3.1, usaremos um argumento de continuação única que nos levará a provar que $v \equiv 0$, o que contradiz (3.26).

A questão agora é um pouco mais simples do que no Teorema 3.1, pois neste caso, como veremos agora, a sequência $\{\lambda_n\}$ está limitada em $\mathbb{R}$. De fato, suponhamos que $\{\lambda_n\}$ é ilimitada em $\mathbb{R}$. Deve, então, existir uma subsequência de $\{\lambda_n\}$, a qual ainda denotaremos por $\{\lambda_n\}$, tal que

$$\lambda_n \longrightarrow \infty. \tag{4.48}$$

Sendo

$$F_n(z) = \int_0^z f_n(s)ds = \frac{1}{\lambda_n^2} F(\lambda_n z), \tag{4.49}$$

temos, por (4.46), que

$$\{F_n(v_n)\} \text{ está uniformemente limitado em } L^1(Q). \tag{4.50}$$

Por outro lado, por (4.1) segue que

$$F'(s)s \geq (2+\delta)F(s), \tag{4.51}$$

o que implica que

$$F(s) \geq c|s|^{2+\delta}, \ \forall \ |s| \geq 1. \tag{4.52}$$

onde $c = \{F(1), F(-1)\}$.

Agora, de (4.50) temos

$$\int\int_{\{|v_n| \geq \lambda_n^{-1}\}} F_n(v_n) + \int\int_{\{|v_n| \leq \lambda_n^{-1}\}} F_n(v_n) \leq C.$$

Assim, por (4.49) e (4.52) obtemos que

$$
\begin{aligned}
C &\geq \int\int_{\{|v_n\lambda_n|\geq 1\}} \frac{F(\lambda_n v_n)}{\lambda_n^2} + \int\int_{\{|\lambda_n v_n|\leq 1\}} \frac{F(\lambda_n v_n)}{\lambda_n^2} \\
&\geq \int\int_{\{|v_n\lambda_n|\geq 1\}} \frac{C|\lambda_n v_n|^{2+\delta}}{\lambda_n^2} + \int\int_{\{|\lambda_n v_n|\leq 1\}} \frac{F(\lambda_n v_n)}{\lambda_n^2} \\
&\geq C|\lambda_n|^{\delta} \int\int_{\{|v_n\lambda_n|\geq 1\}} |v_n|^{2+\delta} + \frac{1}{\lambda_n^2}\int\int_{\{|\lambda_n v_n|\leq 1\}} F(\lambda_n v_n).
\end{aligned}
$$

Com isso conseguimos que

$$
|\lambda_n|^{\delta} \int\int_{\{|v_n\lambda_n|\geq 1\}} |v_n|^{2+\delta} + \frac{1}{\lambda_n^2}\int\int_{\{|\lambda_n v_n|\leq 1\}} F(\lambda_n v_n) \leq C.
$$

Mas a segunda parcela do lado esquerdo da desigualdade acima é positiva, assim

$$
\int\int_{\{|v_n\lambda_n|\geq 1\}} |v_n|^{2+\delta} \leq \frac{C}{|\lambda_n|^{\delta}}.
$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ temos por (4.48) que

$$
\int\int |v_n|^{2+\delta} \longrightarrow 0
$$

É claro, ainda, que

$$
\int\int_{\{|\lambda_n v_n|\leq 1\}} |v_n|^{2+\delta} \longrightarrow \int\int |v|^{2+\delta},
$$

o que implica, pela unicidade do limite, que

$$
\int\int |v|^{2+\delta} = 0.
$$

Sabendo também que $L^{2+\delta}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, segue que

$$
||v||_{L^2(Q)} = 0,
$$

contrariando (3.26). Portanto a sequência real $\{\lambda_n\}$ não pode ser ilimitada.

Sendo, então, $\{\lambda_n\}$ limitada em $\mathbb{R}$, consideraremos apenas os casos (a) e (b) tomados na parte final da demonstração do Teorema 3.1.

No caso (a), onde temos que $\lambda_n \longrightarrow \lambda \in (0,\infty)$, procederemos como segue.

Como $\{v_n\}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, segue que $\{v_n\}$ é relativamente compacto em $L^\infty(0,T;H^{1-\varepsilon}(\Omega))$, para cada $\varepsilon > 0$. Sendo $1 \leq q < \frac{2n}{n-2}$,

$n > 2$ e sabendo que $p > 1$, temos que

$$1 \leq q < \frac{2n}{p(n-2)} < \frac{2n}{n-2}.$$

Assim, pelo Teorema 1.19 obtemos

$$H^{1-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \ \forall\, r \in \left[1, \frac{2n}{p(n-2)}\right).$$

Com essa escolha de r acima, temos ainda que

$$p \leq rp < \frac{2n}{n-2}.$$

Logo,

$$H^{1-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^{rp}(\Omega). \tag{4.53}$$

Feitas essas imersões, nosso objetivo agora é provar que

$$f_n(v_n) \longrightarrow \frac{1}{\lambda} f(\lambda v) \text{ em } L^\infty(0,T;L^r(\Omega)), \tag{4.54}$$

para todo $r \in \left[1, \frac{2n}{p(n-2)}\right]$ (se $n = 1, 2$ a convergência ocorre em $L^\infty(0,T;L^r(\Omega))$ para todo $r \geq 1$). De fato,

$$\begin{aligned}
\left\| f_n(v_n) - \frac{f(\lambda v)}{\lambda} \right\|_{L^r(\Omega)}^r &= \left\| \frac{f(\lambda_n v_n)}{\lambda_n} - \frac{f(\lambda v)}{\lambda} \right\|_{L^r(\Omega)}^r \\
&= \left\| \frac{f(\lambda_n v_n)}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n} f(\lambda v) + \frac{1}{\lambda_n} f(\lambda v) - \frac{f(\lambda v)}{\lambda} \right\|_{L^r(\Omega)}^r \\
&\leq \frac{C}{\lambda_n^r} \| f(\lambda_n v_n) - f(\lambda v) \|_{L^r(\Omega)}^r + C \left| \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda} \right| \| f(\lambda v) \|_{L^r(\Omega)}^r.
\end{aligned}$$

Sabemos que a segunda parcela do lado direito da desigualdade acima converge para zero quando n tende ao infinito. Assim, para provarmos (4.54), basta garantirmos que a primeira parcela também converge para zero, se n tende ao infinito. Com efeito, usando a condição de crescimento da f dada em (2.4), obtemos que

$$|f(\lambda_n v_n) - f(\lambda v)| = C(1 + |\lambda_n v_n|^{p-1} + |\lambda v|^{p-1}) |\lambda_n v_n - \lambda v|.$$

Daí

$$\begin{aligned}
|f(\lambda_n v_n) - f(\lambda v)|^r &= C^r(1+|\lambda_n v_n|^{p-1}+|\lambda v|^{p-1})^r|\lambda_n v_n - \lambda v|^r \\
&\leq C(r)(|\lambda_n v_n - \lambda v|^r + |\lambda_n v_n|^{r(p-1)}|\lambda_n v_n - \lambda v|^r \\
&+ |\lambda v|^{r(p-1)}|\lambda_n v_n - \lambda v|^r).
\end{aligned}$$

Integrando em Ω, conseguimos que

$$\begin{aligned}
\|f(\lambda_n v_n) - f(\lambda v)\|^r_{L^r(\Omega)} &\leq C(r)\left\{\int_\Omega |\lambda_n v_n - \lambda v|^r dx + \int_\Omega |\lambda_n v_n|^{r(p-1)}|\lambda_n v_n - \lambda v|^r dx \right. \\
&+ \left. \int_\Omega |\lambda v|^{r(p-1)}|\lambda_n v_n - \lambda v|^r dx\right\} \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder para os conjugados $\frac{p}{p-1}$ e $\frac{1}{p}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\lambda_n v_n|^{r(p-1)}|\lambda_n v_n - \lambda v|^r dx &\leq \left(\int_\Omega \left[|\lambda_n v_n|^{r(p-1)}\right]^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\lambda_n v_n - \lambda v|^{rp} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega |\lambda_n v_n|^{rp} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\lambda_n v_n - \lambda v|^{rp} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\lambda_n v_n\|^{r(p-1)}_{L^{rp}(\Omega)} \|\lambda_n v_n - \lambda v\|^r_{L^{rp}(\Omega)},
\end{aligned}$$

mas, pela imersão (4.53)

$$\|\lambda_n v_n - \lambda v\|^r_{L^{rp}(\Omega)} \leq \lambda_n^r \|v_n - v\|^r_{L^{rp}(\Omega)} + |\lambda_n - \lambda|^r \|v\|^r_{L^{rp}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

De modo análogo mostramos que as outras duas parcelas de (4.55) também convergem para zero se n vai ao infinito. Deste modo, $\|f(\lambda_n v_n) - f(\lambda v)\|^r_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ e, consequentemente,

$$f_n(v_n) \longrightarrow \frac{1}{\lambda} f(\lambda v) \text{ em } L^\infty(0,T;L^r(\Omega)).$$

Passando então ao limite em (3.19), obtemos que

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v + \frac{1}{\lambda} f(\lambda v) = 0 & \text{em} \quad Q, \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \end{cases}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Assim como fizemos no caso (a) do capítulo anterior, conseguimos que $w = v_t$

satisfaz

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + f'(\lambda v)w = 0 & \text{em} & Q, \\ w = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ w = 0 & \text{q.s em} & \omega \times (0, T). \end{cases}$$

Notemos agora que $f'(\lambda v) \in L^\infty(0, T; L^n(\Omega))$. De fato, por (2.4), sabemos que se $x \neq y$, então

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1}).$$

Tomando o limite quando $x \longrightarrow y$ obtemos

$$|f'(y)| \leq C(1 + |y|^{p-1})$$

ou ainda

$$|f'(y)|^n \leq C(1 + |y|^{n(p-1)}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|f'(\lambda v)\|^n_{L^n(\Omega)} &= \int_\Omega |f'(\lambda v)|^n dx \\ &\leq C \int_\Omega \left[1 + |\lambda v|^{n(p-1)}\right] dx \\ &\leq C + C(n, \lambda) \int_\Omega |v|^{n(p-1)} dx. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Notemos que, de $(n-2)p \leq n$, segue

$$p \leq \frac{n}{n-2} \Rightarrow p - 1 \leq \frac{2}{n-2} \Rightarrow n(p-1) \leq \frac{2n}{n-2}$$

portanto, pelo Teorema 1.19

$$H^{1-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^{n(p-1)}(\Omega)$$

e, em (4.56), obtemos que

$$f'(\lambda v) \in L^\infty(0, T; L^n(\Omega)).$$

No caso (b), lembremos que

$$f_n(v_n) = \frac{f(\lambda_n v_n)}{\lambda_n} = \left(\frac{f(\lambda_n v_n)}{\lambda_n v_n}\right) v_n,$$

daí $f_n(v_n) \longrightarrow f'(0)v$. Passando ao limite em (3.19), obtemos

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v + f'(0)v = 0 & \text{em} \quad Q, \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \end{cases}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.
Derivando o sistema acima em relação a t e fazendo $w = v_t$, temos que w satisfaz

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + f'(0)w = 0 & \text{em} \quad Q, \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ w = 0 & \text{q.s em} \quad \omega \times (0,T). \end{cases}$$

Vejamos que $f'(0) \in L^\infty(0,T;L^n(\Omega))$. de fato, dado $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ temos, pela condição de crescimento da f, que

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |0|^{p-1}).$$

Logo,

$$|f'(0)|^n \leq C^n.$$

Portanto,

$$||f'(0)||^n_{L^n(\Omega)} = \int_\Omega |f'(0)|^n dx \leq C.$$

Em ambos os casos vimos que v satisfaz um sistema do tipo

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v + pv = 0 & \text{em} \quad Q, \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{4.57}$$

com $p(x,t) \in L^\infty_+(0,T;L^r(\Omega))$ e $w \in L^2(Q)$ resolve um sistema do tipo

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + b(x,t)w = 0 & \text{em} \quad Q, \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ w = 0 & \text{em} \quad \omega \times (0,T), \end{cases} \tag{4.58}$$

com $b \in L^\infty(0,T;L^n(\Omega))$. Aplicando, então, a Proposição 0.3 em (4.58) deduzimos que $w \equiv 0$ e, portanto $v = v(x)$. Tomando esse fato em $(4.57)_1$ obtemos que

$$-\Delta v + pv = 0.$$

Multiplicando a igualdade acima por v e integrando em Ω, temos

$$\int_{\Omega} -\Delta v.v dx + \int_{\Omega} p|v|^2 dx = 0$$

e, pelo teorema de Green,

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} p|v|^2 dx = 0.$$

Assim, desde que $p(x,t) \geq 0$, chegamos que $v \equiv 0$. O que contraria (3.26) e, consequentemente, finaliza a demonstração do Teorema 4.1. $\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] R.A. Adams, *Sobolev Space*, Academic press, London, 1975.

[2] C. Bardos, g. Lebeau & j. Rauch, *Contrôle et stabilisation dans les problèmes hyperboliques*, Appendix II in J.L. Lions [[6]].

[3] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle, Thèorie et Applications*, Dumos, Paris, 1983.

[4] C.M. Dafermos, *Assymptotic behaviour of solutions of evolution equaton, in "Nonlinear Evolution Equations "*, M.G Grondall Ed., Academic Press, New York, 1978, 103 - 123.

[5] A. Haraux, *Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations*, J. Differential Equations 59, 1985.

[6] J.L Lions, *Contrôlabilitè exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribuès. Tome 1. "Contrôlabilitè exacte"*, RMA 8, Masson, 1968.

[7] J.L Lions & E. Magenes, *Problèmes aux Limites nom Homogens et Applications*, Dumos, Gauthier-Villars, vol. 1, 1968.

[8] L.A. Medeiros & M.M. Miranda, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações diferenciais parciais, Textos de Métodos matemáticos*, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de janeiro, 1989.

[9] L.A. Medeiros & P.H. Rivera, Espaços de Sobolev e às Equações diferenciais parciais, Textos de Métodos matemáticos, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de janeiro, 1977.

[10] L.A. Medeiros & M.M. Miranda, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações diferenciais parciais*, Rio de janeiro, 2011.

[11] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operatorsand Applications to Partial Diferential Equations*, Springer-Velorg, New York, 1983.

[12] J. Rauch & m. Taylor, *Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains*, Indiana Univ. Math. J.24, 1974, 79-86.

[13] A. Ruiz, *Unique continuation for weak solutions of the ware equation plus a potential*, preprint.

[14] J. Simon, *Compact setsin the space $L^p(0,T;B)$*, Ann. Pura Appl. (4) CXLXI, 1987, 65-96.

[15] E. Zuazua, *Exponetial decay for thes emilinear wave equation will locally distributed damping*, Commun. Partial Diff. Equations, 15(2), 1990, 205-235.

[16] E. Zuazua, *Exponetial decay for thes emilinear wave equation with localized damping in unbounded domains*, J. Math pures et appl., 70, 1991, 513-529.