

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Teoremas de semiespaço para superfícies mínimas

Sylvia Ferreira da Silva

JOÃO PESSOA – PB  
MARÇO DE 2017

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Teoremas de semiespaço para superfícies mínimas

por

Sylvia Ferreira da Silva

sob a orientação da

Prof. Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley

sob a coorientação do

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera

João Pessoa – PB  
Março de 2017

S586t Silva, Sylvia Ferreira da.  
Teoremas de semiespaço para superfícies mínimas/ Sylvia  
Ferreira da Silva . - João Pessoa, 2017.  
41 f.: il.-

Orientadora: Gabriela Albuquerque Wanderley.  
Coorientador: Pedro Antonio Hinojosa Vera.  
Dissertação(Mestrado)-UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Superfícies mínimas. 3. Semiespaço.  
4. Curvatura média. 5. Fecho convexo. I. Título.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

# Teoremas de semiespaço para superfícies mínimas

por

Sylvia Ferreira da Silva <sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

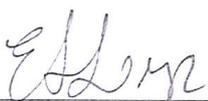
Área de Concentração: Geometria

Aprovada em 20 de Março de 2017.

Banca Examinadora:

  
Prof. Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley – UFPB  
(Orientador)

  
Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira – UFC  
(Examinador Externo)

  
Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior – UFPB  
(Examinador Interno)

<sup>1</sup>O autor foi bolsista do(a) CNPQ durante a elaboração desta dissertação.

*Aos meus pais, que dedicaram suas vidas e seu suor para que eu tivesse as oportunidades que a eles nunca foram dadas;  
A Paulo- meu coração- e a Tia Joseane .*

*O espírito sem limites é a  
maior virtude do homem.  
(J.K.Rowling)*

# Agradecimentos

Durante o processo de elaboração de uma dissertação precisamos além dos conhecimentos que serão desenvolvidos, do apoio de pessoas e instituições que são essências para que o processo se concretize como se espera. A estas deixo meus agradecimentos.

Primeiro a Deus, por todo amor e ensinamento que tem a mim dedicado, e que se fez presente através das pessoas incríveis que pôs em meu caminho.

Aos meus pais, exemplos maiores de dedicação e amor que eu pude ter na minha vida. Dedicaram tudo que tinham e têm para que eu pudesse ter as oportunidades acadêmicas e profissionais que eles não tiveram a chance de ter.

A minha tia Joseane, por sempre ter me estendido a mão e por sempre ter torcido por mim em tudo que faço.

Ao meu amor Paulo, por nunca me deixar desistir de nada, sempre cuidar de mim e dar todo apoio em minhas decisões.

Aos meus queridos orientadora e coorientador : Professora Doutora Gabriela Albuquerque Wanderley e Professor Doutor Pedro Antonio Hinojosa Vera por toda paciência e acolhimento durante o processo e que além de tudo, tornaram-se um grande exemplo profissional para mim.

Aos meus queridos amigos de graduação, mestrado e da vida : Breno Souza, Douglas Queiroz, Djair Paulino, Emmely Trindade, Rúbia Araújo, Juliana Freire, Ana Nery, Yasmim Menezes e Nivaldo Gomes. Pela amizade, apoio e torcida de sempre.

Aos meus queridos professores da graduação e da educação básica em especial : Professor Doutor Thiago Dias de Oliveira, Professor Esrilton Santos e Professor Mestre Eraldo Batista.

À presença na banca dos professores : Dr. Jorge Herbert Soares de Lira e Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior. Agradeço à disposição em fazer parte da banca e às importantes correções e sugestões feitas. Foi uma honra tê-los participantes deste processo.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho detalhamos os resultados apresentados por William H. Meeks e David A. Hoffman em “*The strong half-space theorem for minimal surfaces*”, . Os primeiros resultados são teoremas de semiespaço para superfícies mínimas no  $\mathbb{R}^3$ , os quais tem sido generalizados para outros ambientes como foi feito por Daniel, B./ Hauswirth, L., e Daniel, B./ Meeks, W. H. III. O terceiro e último resultado, caracteriza fechos convexos no espaço euclidiano n-dimensional.

**Palavras-chave:** Superfícies mínimas, semiespaço, curvatura média, fecho convexo.

# Abstract

In this work we detail the results submitted by Hoffman and Meeks in “*The strong half-space theorem for minimal surfaces*”. The first results are half-space theorems for minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  which have been generalized for other ambients, as have been done by Daniel, B./ Hauswirth, L., e Daniel, B./ Meeks, W. H. III. The third and last one result, characterize convex hull in  $n$ - dimensional Euclidean spaces.

**Keywords:** Minimal surfaces, halfspace, mean curvature, convex hull.

# Lista de Figuras

2.1	Superfície Mínima de Sherk. . . . .	14
2.2	Catenóide. . . . .	15
2.3	Helicóide. . . . .	16
3.1	Construção de Jorge e Xavier . . . . .	18
3.2	Construção de Rosenberg e Toubiana . . . . .	19
3.3	Teorema de Semiespaço . . . . .	21

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Generalidades</b>	<b>1</b>
1.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	1
1.2 Variedades Riemannianas . . . . .	2
1.3 Topologia . . . . .	5
<b>2 Imersões Mínimas</b>	<b>7</b>
2.1 Fórmula da Primeira Variação (Área) . . . . .	7
2.2 Imersões mínimas no espaço euclidiano . . . . .	10
2.3 Superfícies Mínimas . . . . .	12
2.4 Exemplos de Superfícies Mínimas . . . . .	14
<b>3 Teoremas de Semiespaço</b>	<b>17</b>
3.1 Exemplos Motivacionais . . . . .	17
3.1.1 Exemplo de Jorge e Xavier . . . . .	17
3.1.2 Exemplo de Rosenberg e Toubiana . . . . .	19
3.2 Teorema Principal 1 - Teorema de Semiespaço para Superfícies Mínimas	20
3.3 Teorema Principal 2 - Versão Forte do Teorema de semiespaço para superfícies mínimas . . . . .	23
3.4 Teorema Principal 3 - Caracterização do Fecho Convexo . . . . .	25
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>28</b>

# Introdução

O teorema de semiespaço de Hoffman e Meeks [6], afirma que se uma superfície mínima propriamente imersa  $S \in \mathbb{R}^3$  se encontra de um dos lados de algum plano  $P$ , então  $S$  deve ser um plano paralelo a  $P$ . Uma consequência deste resultado é o chamado “*The strong halfspace theorem for minimal surfaces*” (ou Teorema forte de semiespaço), que afirma que duas superfícies mínimas, propriamente imersas em  $\mathbb{R}^3$  e que não se intersectam, devem ser planos paralelos. Tais teoremas têm sido generalizados para espaços de variedades simples, conexas e com dimensão 3. Como por exemplo, planos verticais mínimos  $Nil_3$ ,  $Sol_3$  (ver em [2] e [3]) e gráficos com curvatura média  $0 < H < \frac{1}{2}$  em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (ver [10]).

Os principais pontos de partida para os teoremas de semiespaço de *Hoffman e Meeks* foram as construções feitas por *Jorge e Xavier* em [7] e por Rosenberg e Toubiana em [13]. A primeira consta de exemplos de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ , completas e contidas entre dois planos paralelos. Já a segunda refere-se à construção de regiões anulares completas, minimamente imersas que são próprias em uma faixa aberta. Destas construções e de outros resultados foi levantada a seguinte questão : *Poderia existir uma superfície mínima propriamente imersa em  $\mathbb{R}^3$ , contida entre dois planos paralelos?*

Os teoremas de semiespaço que veremos a seguir, respondem a esta pergunta, sendo um deles considerado uma versão do *Princípio do Máximo no infinito para superfícies mínimas*.

No *Capítulo 1*, serão apresentados alguns conceitos que servirão de base para os capítulos posteriores.

O *Capítulo 2*, dedicamos ao estudo das Imersões Mínimas, iniciando com a Equação de Lagrange para Superfícies mínimas e generalizando o conceito para subvariedades mínimas através da Primeira Variação de Área.

No *Capítulo 3*, o objetivo é apresentarmos uma prova detalhada dos teoremas encontrados em [6]. Os dois primeiros teoremas são os teoremas de semiespaço comentados anteriormente e o terceiro, trata-se de uma caracterização do fecho compacto de hiper-superfícies mínimas no  $\mathbb{R}^n$ .

# Capítulo 1

## Generalidades

### Introdução

Dedicaremos este primeiro capítulo a uma exposição de questões preliminares consideradas relevantes para o desenvolvimento do trabalho. Lembrando que, muitas definições e resultados serão apenas apresentados sem demonstrações ou maiores explicações, para obter um estudo mais detalhados, indicamos as referências [1], [4] e [8].

### 1.1 Variedades Diferenciáveis

**Definição 1.1.** Uma *variedade diferenciável* é um par  $(M, \mathcal{A})$ , onde  $M$  é um conjunto não vazio e  $\mathcal{A}$  é uma família de aplicações biunívocas  $\varphi_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_i$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  tais que :

- (1)  $\bigcup_i \varphi_i(U_i) = M$
- (2) Para todo par  $i, j$  com  $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\varphi_i^{-1}(W)$  e  $\varphi_j^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$  são diferenciáveis.
- (3) Esta família é maximal em relação às condições (1) e (2).

**Definição 1.2.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é chamada uma curva diferenciável em  $M$ . Suponhamos que

$\alpha(0) = p \in M$ , e seja  $\mathcal{D}$  o conjunto das funções de  $M$  diferenciáveis em  $p$ . O *vetor tangente* á curva  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por :

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in \mathcal{D}$$

Um vetor tangente em  $p$  é o vetor tangente em  $t = 0$  de alguma curva  $\alpha$  como

definida acima, tal que  $\alpha(0) = p$ . O conjunto dos vetores tangentes á  $M$  em  $p$  será representado por  $T_pM$ .

**Definição 1.3.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e seja  $\varphi : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $p \in M$  e cada  $v \in T_pM$ , escolha uma curva diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ . Faça  $\beta = \varphi \circ \alpha$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$  dada por  $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$  é uma aplicação linear que não depende da escolha de  $\alpha$  e é chamada *diferencial de  $\varphi$  em  $p$* .

Consideraremos alguns tipos especiais de aplicações diferenciáveis entre variedades que são as **imersões e mergulhos**.

**Definição 1.4.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : M \rightarrow N$  é uma *imersão* se  $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se, além disto,  $\varphi$  é um homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , dizemos que  $\varphi$  é um *mergulho*. Se  $M \subset N$  e  $i : M \rightarrow N$  é um mergulho, dizemos que  $M$  é uma subvariedade de  $N$ .

Lembrando que, uma aplicação  $\varphi$  entre duas variedades diferenciáveis  $M^m$  e  $N^n$  é um difeomorfismo se  $\varphi$  é diferenciável, bijetiva e possui inversa  $\varphi^{-1}$  diferenciável.

Assim como em Geometria Diferencial, o conceito de orientabilidade é uma noção global e que pode ser estendido às variedades diferenciáveis da seguinte forma:

**Definição 1.5.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Diz-se que  $M$  é *orientável* se  $M$  admite uma estrutura diferenciável  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  tal que :

(i) Para todo par  $i, j$  com  $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = W \neq \emptyset$ , a diferencial da mudança de coordenadas  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i^{-1}(W) \rightarrow \varphi_j^{-1}(W)$  tem determinante positivo.

Caso contrário, dizemos que  $M$  é não orientável.

**Definição 1.6.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um **campo de vetores** em  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p$  de  $M$ , associa um vetor  $X(p)$  do espaço tangente  $T_pM$ . É, portanto, uma aplicação da variedade no conjunto conhecido por *Fibrado Tangente* de  $M$ , denotado por  $TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$ .

Em geral consideremos campos de vetores suaves  $\mathcal{X}(M)$ .

## 1.2 Variedades Riemannianas

Veremos agora alguns conceitos da Geometria Riemanniana que serão fundamentais nas construções feitas no próximo capítulo.

**Definição 1.7.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em  $M$  é uma correspondência  $g : M \rightarrow g_{ij}$ , onde  $g_{ij} : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ , que a cada ponto  $p$  associa uma forma bilinear, simétrica, positiva definida  $g_{ij}$  em  $T_pM$ .

Um resultado da Geometria Riemanniana nos garante que, toda variedade diferenciável  $M$  (Hausdorff e com base enumerável), possui uma métrica Riemanniana.

**Definição 1.8.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é chamado uma *isometria* se:

$$(1) \quad \langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle$$

para todo  $p \in M$  e  $u, v \in T_pM$

Vamos considerar a partir de agora,  $\mathcal{X}_M$  como sendo o espaço dos campos de vetores  $C^\infty$  em  $M$ .

**Definição 1.9.** Uma **conexão afim** em  $M$  é uma regra que associa a cada  $X \in \mathcal{X}_M$ , uma aplicação linear  $\nabla_X : \mathcal{X}_M \rightarrow \mathcal{X}_M$  tal que para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{X}_M$  e  $f, g \in C^\infty$ , temos:

- (1)  $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$  (Linearidade Modular)
- (2)  $\nabla_X(fY) = (X(f))Y + f\nabla_XY$  (Leibniz)
- (3)  $\nabla_X(Z + Y) = \nabla_XZ + \nabla_XY$  (Linearidade Real)

**Teorema 1.1.** Dada uma variedade Riemanniana  $M$  existe uma única conexão afim  $\nabla$ , chamada conexão riemanniana em  $M$  satisfazendo as seguintes condições:

- a)  $\nabla$  é simétrica. ( Isto é,  $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$  )
- b)  $\nabla$  é compatível com a métrica riemanniana. (Isto é,  $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle + \langle Y, \nabla_XZ \rangle$  )

Note que sendo  $X, Y \in \mathcal{X}_M$  e  $p \in M$ . Então o valor do campo vetorial  $\nabla_XY$  em  $p$  depende apenas do vetor  $X_p$  em  $T_pM$  e do valor de  $Y$  ao longo de qualquer curva diferenciável  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X_p$ .

Para nossos propósitos, devemos sempre entender por **subvariedade** de  $M$ , uma imersão  $\psi : N \rightarrow M$  onde  $N$  é uma variedade diferenciável. Será sempre assumido que  $N$  carrega a métrica Riemanniana induzida de  $M$ . Pelo teorema da função implícita sabemos que em cada ponto  $p \in N$  existe uma vizinhança  $U$  tal que  $\psi|_U$  é um mergulho topológico. Portanto, quando trabalhamos em questões locais frequentemente assumimos que nossa subvariedade é mergulhada e suprimimos a imersão  $\psi$ .

Agora, seja  $\overline{M}$  uma  $\overline{m}$ -variedade Riemanniana e  $M \subset \overline{M}$  uma subvariedade topologicamente mergulhada de dimensão  $m$ . Denotemos a métrica de  $\overline{M}$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e a conexão riemanniana associada por  $\overline{\nabla}$ . Para qualquer  $p \in M \subset \overline{M}$  temos a decomposição ortogonal :

$$(2) \quad T_p(\overline{M}) = T_p(M) \oplus N_p(M)$$

do espaço tangente á  $\overline{M}$  em  $p$ , nos espaços tangente e normal de  $M$  em  $p$ , respectivamente. Com respeito a esta decomposição, qualquer vetor  $X \in T_p(\overline{M})$  pode ser escrito como

$$X = X^T + X^N$$

onde  $X^T$  e  $X^N$  são as componentes tangente e normal de  $X$ , respectivamente. Desta forma sejam  $X, Y \in \mathcal{X}_p$ , onde  $p \in M$ . Então,

$$(3) \quad \overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T + (\overline{\nabla}_X Y)^N$$

Temos a única conexão riemanniana  $\nabla$  dado  $p \in M$  por:

$$(4) \quad \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T$$

E, de maneira similar, denotamos o campo de vetores normais locais em  $p$  por

$$(5) \quad B_{X,Y} = (\overline{\nabla}_X Y)^N = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

Como a derivada covariante  $(\overline{\nabla}_X Y)^N$  depende apenas de  $X_p$  e não da escolha de  $X$  em  $\mathcal{X}_p$ , percebemos que  $(\overline{\nabla}_X Y)^N = (\overline{\nabla}_Y X + [X, Y])^N = (\overline{\nabla}_Y X)^N$  (onde o colchete, refere-se á conexão  $\overline{\nabla}$ ) e, daí:

$$B_{X,Y} = B_{Y,X}$$

Assim,  $B_{X,Y}$  em  $p$  depende apenas dos vetores  $X_p$  e  $Y_p$  e não da escolha dos campos locais  $X$  e  $Y$ . Isto nos diz que  $B$  representa uma seção  $C^\infty$  do fibrado  $T^*(M) \otimes T^*(M) \otimes N^*(M)$  chamado de **segunda forma fundamental** da subvariedade  $M$ . Em cada ponto  $p$ ,  $B_p$  representa uma aplicação simétrica bilinear de  $T_p M \otimes T_p M$  em  $N_p M$ . Vamos então definir um dos invariantes mais simples e mais importantes da geometria da variedade, o campo curvatura média.

**Definição 1.10.** O campo  $H$ , é um campo suave de vetores normais em  $M$  chamado **campo vetorial de curvatura média**.

$$(6) \quad H_p = \text{trac}(B_p) = \sum_k B(E_k, E_k)$$

onde  $E_k$  é um campo de vetores ortonormal em  $p$ .

Note que esta definição pode ser imediatamente carregada a uma subvariedade qualquer  $\psi : M \rightarrow \overline{M}$  usando o fato de que  $\psi$  é um mergulho local.

Observe que o campo  $H$  é um invariante da geometria local do par  $(M, \overline{M})$ , isto é, da maneira com a qual a subvariedade  $M$  está localmente situada em  $\overline{M}$ . Se  $F : M \rightarrow \overline{M}$

é uma isometria tal que  $F(M) = M$ , então  $F_*H = H$ .

### 1.3 Topologia

Ao longo do texto iremos nos deparar com algumas situações em que são necessários alguns conhecimentos de fatos da topologia, desta maneira faz-se necessário ao menos comentá-los, indicando para um estudo mais profundos a referência [9].

**Definição 1.11.** Uma topologia em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos abertos de  $X$ , chamados *conjuntos abertos*, satisfazendo às seguintes propriedades:

- a)  $X$  e  $\emptyset$  pertencem a  $\tau$ ;
- b) Qualquer intersecção finita de elementos de  $\tau$  pertence a  $\tau$ ;
- c)  $X$  e  $\emptyset$  pertencem a  $\tau$ .

Neste caso, dizemos que  $(X, \tau)$  é um **espaço topológico**.

**Proposição 1.12.** Em um espaço topológico valem as seguintes propriedades:

- 1) Qualquer intersecção de conjuntos fechados é um conjunto fechado;
- 2) Qualquer união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado;
- 3)  $X$  e  $\emptyset$  são fechados.

Consideraremos nesta seção sempre  $X, Y$  espaços topológicos.

**Definição 1.13.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  se diz fechada quando, para todo subconjunto fechado  $F \subset X$ , sua imagem  $f(F)$  é fechada em  $Y$ .

**Definição 1.14.** Uma aplicação entre espaços topológicos,  $f : X \rightarrow Y$ , se diz própria quando é contínua, fechada e, além disso, a imagem inversa  $f^{-1}(y)$  de cada ponto  $y \in Y$  é um subconjunto compacto de  $X$ .

**Proposição 1.15.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  própria. Se  $K \subset Y$  é compacto então  $f^{-1}(K)$  também é compacto.

**Definição 1.16.** Dois caminhos  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  são ditos caminhos homotópicos se possuem as mesmas extremidades, isto é,  $\alpha(0) = \beta(0) = \alpha(1) = \beta(1) = x_1$ , e se existe uma aplicação contínua  $H : I \times I \rightarrow X$  tal que, quais quer que sejam  $s, t \in I$ , temos:

$$H(s, 0) = \alpha(s); \quad H(s, 1) = \beta(s),$$

$$H(0, t) = x_0; \quad H(1, t) = x_1$$

A aplicação contínua  $H$  é dita uma homotopia de caminhos entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

## 1. Generalidades

---

Se  $\alpha$  e  $\beta$  são caminhos fechados, estes são homotópicos quando existe uma aplicação contínua  $H : I \times I \rightarrow X$  tal que, se  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \in X$ , tem-se

$$H(s, 0) = \alpha(s); \quad H(s, 1) = \beta(s); \quad H(0, t) = H(1, t) = x_0$$

**Definição 1.17.** Definimos o caminho inverso de  $\alpha : I \rightarrow X$  como o caminhon  $\alpha^{-1} : I \rightarrow X$ , dado por  $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ .

**Definição 1.18.** Sejam  $\alpha, \beta$  caminhos em  $X$  de  $x_0$  para  $x_1$  e de  $x_1$  para  $x_2$  respectivamente. Definimos o produto  $\alpha * \beta$  de  $\alpha$  e  $\beta$  como sendo o caminho que percorre  $\alpha$  e depois  $\beta$ . Tal caminho é dado pela aplicação :

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

O produto definido acima é um caminho que vai de  $x_0$  à  $x_2$  e este produto induz uma operação nas classes de homotopia dos caminhos  $\alpha$  e  $\beta$ , definida por :

$$\alpha * \beta = \rho$$

onde  $\alpha = [\alpha]$  e  $\beta = [\beta]$  e  $\rho = [\alpha * \beta]$ .

**Definição 1.19.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $x_0$  um ponto de  $X$ . O conjunto das classes de homotopia de caminhos para caminhos fechados com base<sup>1</sup> em  $x_0$ , com a operação  $*$ , é chamado o **grupo fundamental** de  $X$  relativo ao ponto base  $x_0$  e denotado por  $\pi(X, x_0)$ .

---

<sup>1</sup>É o ponto fixado em  $X$  no qual os caminhos começam e terminam.

# Capítulo 2

## Imersões Mínimas

### Introdução

#### 2.1 Fórmula da Primeira Variação (Área)

Nesta seção veremos o conceito de Imersão Mínima e nas seções subsequentes, estudaremos o caso particular das Superfícies Mínimas. Começaremos com o conceito generalizado que utiliza da Fórmula da Primeira variação e depois voltaremos para a Equação de Lagrange para as Superfícies Mínimas, que historicamente deu início a este estudo.

Através da Primeira Fórmula da Variação concluiremos que uma Imersão Mínima pode ser definida através de seu **vetor curvatura média**  $\vec{H}$ . Para maiores detalhes indicamos [8].

**Definição 2.1.** Seja  $f : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão, onde  $M$  é uma variedade compacta, orientada e com  $\partial M$  podendo ser vazio). Por **variação suave de  $f$** , entendemos uma aplicação  $C^\infty F : I \times M \rightarrow \bar{M}$ , onde  $I = (-1, 1)$ , tal que:

- a) Cada aplicação  $f_t = F(t, \cdot) : M \rightarrow \bar{M}$  é uma imersão;
- b)  $f_0 = f$ ; e
- c)  $f_t|_{\partial M} = f|_{\partial M}$  par todo  $t \in I$ .

Seja  $\frac{\partial}{\partial t}$  o campo vetorial canônico ao longo do fator  $I$  em  $I \times M$  e seja  $E = F_* \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0}$  uma seção de  $T(M) \oplus N(M)$ . Finalmente, seja  $A(t)$  o volume de  $M$  no instante  $t$ , isto é, seja  $dV_t$  o elemento de volume na métrica induzida por  $f_t$  e faça:

$$A(t) = \int_M dV_t,$$

então:

**Teorema 2.1. Fórmula da primeira variação da área :**

$$(7) \quad \left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=0} = - \int_M \langle \vec{H}, E \rangle dV_0$$

*Demonstração.* Primeiramente note que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int_M dV_t = \int_M \frac{d}{dt} dV_t$$

Para demonstrarmos o teorema, precisamos mostrar que:

$$\left. \frac{d}{dt} dV_t \right|_{t=0} = - \langle \vec{H}, E \rangle dV_0 + d\Omega$$

onde  $\Omega$  é uma  $m - 1$  forma em  $M$  tal que  $\Omega|_{\partial M} = 0$ . De fato, seja  $\omega$  uma 1-forma em  $M$  dada por

$$\omega(X) = \langle E, X \rangle$$

para o campo vetorial  $X$  tangente em  $M$ . Então

$$\Omega \stackrel{def}{=} * \omega$$

já que  $E|_{\partial M} = 0$ ,  $\Omega|_{\partial M} = 0$ .

Seja  $p \in M$  e escolha  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \mathcal{X}_p$  tal que :

- 1)  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  são pontualmente ortonormais na métrica induzida por  $f_0$ .
- 2)  $(\nabla_{\varepsilon_i} \varepsilon_j)_p = (\bar{\nabla}_{(f_0 * \varepsilon_i)}(f_0 * \varepsilon_j))^T(f(p)) = 0 \forall i, j$ .

Sejam  $\omega_1, \dots, \omega_m$  as 1-formas duais locais a  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ . Então a métrica induzida por  $f_*$  pode ser escrita como :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(t) \omega_i \otimes \omega_j$$

onde

$$g_{ij}(t) = \langle f_t * \varepsilon_i, f_t * \varepsilon_j \rangle$$

Portanto,

$$dV_t = \sqrt{g(t)} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_m = \sqrt{g(t)} dV_0$$

onde  $g(t) = \det[g_{ij}(t)]$ . Em  $p$ ,

$$\left. \frac{d}{dt} dV_t \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \sqrt{g(t)} \right|_{t=0} dV_0 = \frac{1}{2} g'(0) dV_0$$

. Agora, usaremos de um lema da álgebra linear para derivar  $\det(g)$ .

**Lema 2.2.** Seja  $A(t) = [a_{ij}(t)]$ ,  $t \in I$ , uma família suave de matrizes  $m \times m$  tais que  $A(0) = Id$ . Então

$$(8) \quad \left. \frac{d}{dt} \det(A(t)) \right|_{t=0} = \text{tr}(A'(0))$$

Então, em  $p$  temos :

$$\left. \frac{d}{dt} dV_t \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left. \frac{dg_{kk}}{dt} \right|_{t=0} dV_0$$

Vamos agora estender  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  sobre  $I \times (\text{vizinhança de } p) \subset I \times M$  da maneira usual e note que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t}, \varepsilon_k \right] = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_k - \varepsilon_k \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

para  $k = 1, \dots, m$ . Sejam,  $\tilde{E}, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_m$  as imagens destes campos ao longo de  $F$ . Então  $g_{kk}(t) = \langle f_t^* \varepsilon_k, f_t^* \varepsilon_k \rangle = \langle \tilde{\varepsilon}_k, \tilde{\varepsilon}_k \rangle$  em  $F(t, p)$  e

$$\frac{dg_{kk}}{dt} = \tilde{E} \langle \tilde{\varepsilon}_k, \tilde{\varepsilon}_k \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_{\tilde{E}} \tilde{\varepsilon}_k, \tilde{\varepsilon}_k \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_{\tilde{\varepsilon}_k} \tilde{E}, \tilde{\varepsilon}_k \rangle = 2[\tilde{\varepsilon} \langle \tilde{E}, \tilde{\varepsilon}_k \rangle] - \langle E, \bar{\nabla}_{\tilde{\varepsilon}_k} \tilde{\varepsilon}_k \rangle$$

Portanto, em  $p$  temos :

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{2} \left. \frac{dg_{kk}}{dt} \right|_{t=0} = -\langle E, \vec{H} \rangle + \sum_{k=1}^m \tilde{\varepsilon}_k \langle E, \tilde{\varepsilon}_k \rangle$$

Resta mostrarmos que o somatório na direita é igual a  $(d^*w)_p(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ . No entanto, por definição

$$w = \sum_k \langle E, \varepsilon_k \rangle w_k$$

e ,

$${}^*w = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \langle E, \varepsilon_k \rangle w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge \hat{w}_k \wedge \dots \wedge w_m$$

Lembre que , para qualquer  $m - 1$ - forma  $\Omega$  em  $M$ , temos a fórmula:

$$d\Omega(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \varepsilon_k \Omega(\varepsilon_1, \dots, \hat{\varepsilon}_k, \dots, \varepsilon_m) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Omega([\varepsilon_i, \varepsilon_j], \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_j, \dots, \varepsilon_m)$$

Fazendo  $0 = {}^* \omega$  e usando o fato de  $[\varepsilon_i, \varepsilon_j]_p = (\nabla_{\varepsilon_i} \varepsilon_j)_p - (\nabla_{\varepsilon_j} \varepsilon_i)_p = 0$ , podemos então, com um cálculo simples completar a demonstração.  $\square$

Pelo que já descrevemos sobre o vetor curvatura média, temos que  $H$  é o gradiente

do funcional área. Sendo assim, uma imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é um ponto crítico deste funcional área, se  $H \equiv 0$ . Pelo teorema anterior, isto ocorre se, e somente se, para todas as variações suaves  $f_t$  de  $f$ ,  $A(t) = \text{área de } (f_t)$  tem a propriedade de  $A'(0) = 0$ .

Daí dizemos que, qualquer imersão que satisfaça que  $H \equiv 0$  é uma **imersão mínima** ou uma **subvariedade mínima**.

## 2.2 Imersões mínimas no espaço euclidiano

Agora iremos analisar o comportamento de subvariedades mínimas imersas no espaço euclidiano. Para tal, faremos uso de uma ferramenta bastante útil no estudo das variedades Riemannianas, o chamado *Operador de Laplace-Beltrami*.

**Definição 2.2.** Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana conexa. Definimos por Operador de Laplace-Beltrami em  $M$  uma aplicação  $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  definida em qualquer uma das seguintes formas equivalentes. Seja  $p \in M$  e  $f \in C^\infty(M)$ , então:

a) Se  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathcal{X}_M$  são campos de vetores pontualmente ortonormais, então :

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \{ \varepsilon_k \varepsilon_k f - (\nabla_{\varepsilon_k} \varepsilon_k) f \}$$

numa vizinhança de  $p$ .

b) Se  $(x_1, \dots, x_m)$  são coordenadas locais em  $p$  então na vizinhança coordenada:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j})$$

onde a métrica  $ds^2 = \sum g_{ij} dx^i \oplus dx^j$ , a matriz  $((g^{ij})) = ((g_{kl}))^{-1}$  e  $g = \det((g_{ij}))$ .

c)  $\Delta f = -^* d^* df$

Este operador é um invariante da geometria riemanniana de  $M$  e generaliza o operador laplaciano usual no espaço euclidiano.

Uma função  $f \in C^\infty(M)$  tal que  $\Delta f = 0$  é chamada **função harmônica**. Um importante teorema demonstrado por Hopf, diz que qualquer função harmônica satisfaz o **princípio do máximo estrito**. A saber : *Se  $f$  assume um máximo local em  $p \in M \setminus \partial M$ , então  $f = cte$ .*

**Proposição 2.3.** Seja  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma imersão isométrica e seja  $H$  o vetor curvatura média de  $\psi$ . Então :

$$(9) \quad \Delta \psi = H$$

onde  $\Delta\psi = (\Delta\psi_1, \dots, \Delta\psi_n)$ .

*Demonstração.* Seja  $p \in M$  e escolhamos  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \mathcal{X}_p$  como em a). Para cada inteiro  $k$ ,  $\varepsilon_k\psi = \varepsilon_k$  e  $\varepsilon_k\varepsilon_k\psi = \bar{\nabla}_{\varepsilon_k}\varepsilon_k$  onde  $\bar{\nabla}$  denota a conexão euclidiana. Portanto

$$\Delta\psi = \sum_k \{\varepsilon_k\varepsilon_k\psi - (\nabla_{\varepsilon_k}\varepsilon_k)\psi\} = \sum_k \{\bar{\nabla}_{\varepsilon_k}\varepsilon_k - \nabla_{\varepsilon_k}\varepsilon_k\} = \sum_k (\bar{\nabla}_{\varepsilon_k}\varepsilon_k)^N = H$$

□

**Corolário 2.3.** Seja  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma imersão isométrica. Então,  $\psi$  é uma imersão mínima se, e somente se,  $\psi$  é harmônica.

Desta forma, conseguimos achar uma outra caracterização para a equação das superfícies mínimas na métrica induzida pela métrica euclidiana, que é dada por  $\Delta\psi \equiv 0$ . Note que a medida que alteramos a imersão, alteram-se a métrica induzida e o operador  $\Delta$ .

Um resultado que será muito importante no desenvolvimento dos teoremas principais deste trabalho é a versão do Princípio do Máximo para Superfícies Mínimas. Que se relaciona com o Princípio do Máximo mostrad por Hopf, através do *Corolário 2.3*, que nos garante que uma imersão é Mínicas se, e somente se, for uma função harmônica.

**Teorema 2.4. Princípio do Máximo para Superfícies Mínimas** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  hiperfícies mínimas em  $\mathbb{R}^n$ . Se existe  $p \in M_1 \cap M_2$  ponto interior de ambas superfícies, de modo que na vizinhança de  $p$ ,  $u_1$  e  $u_2$  sejam gráficos de funções em  $M_1$  e  $M_2$  respectivamente, com  $u_1 \leq u_2$ , então  $M_1 = M_2$ .*

Ainda a respeito do Corolário 2.3, podemos verificar alguns resultados sobre o **fecho convexo** de um conjunto. Primeiramente, vejamos o seguinte:

1) Para cada par de vetores  $v, w \in \mathbb{R}^n$  definimos um semi-espaco  $H_{v,w} = \{v + x \in \mathbb{R}^n; \langle x, w \rangle \geq 0\}$ .

2) Para cada conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ , o fecho convexo de  $X$  é o conjunto

$$C(X) = \cap \{H_{v,w} \subset \mathbb{R}^n \mid X \subset H_{v,w}\};$$

Este é o menor conjunto convexo e fechado que contém  $X$ .

Vamos assumir agora que  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma imersão isométrica mínima e para cada  $v, w \in \mathbb{R}^n$  considere a função  $f_{v,w} : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por :

$$f_{v,w}(x) = \langle \psi(x) - v, w \rangle$$

Pelo *Corolário 2.4*, esta função é harmônica em  $M$  e, pelo princípio do máximo estrito de Hopf, temos que  $f = cte$ .

**Corolário 2.5.** Seja  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma imersão mínima, onde  $M$  é uma variedade compacta. Fazendo  $M^0 = M \setminus \partial M$  temos,

$$\psi(M) \subset C[\psi(\partial M)]$$

e se  $\psi(M)$  se encontra em um subespaço afim não próprio, então

$$\psi(M^0) \subset C[\psi(\partial M)]^0$$

Em particular se  $M$  é compacta sem bordo, nenhuma imersão mínima de  $M$  em  $\mathbb{R}^n$  existe.

## 2.3 Superfícies Mínimas

Os estudos a cerca de Superfícies Mínimas iniciaram-se com Lagrange através da **Equação de Lagrange das Superfícies Mínimas**, no caso particular de funções dadas como gráfico de uma função diferenciável de classe  $C^2$ . A questão era de encontrar uma superfície que possuísse a menor área dentre todas as superfícies que assumem determinados valores no bordo de um conjunto aberto  $U$  do plano (com fecho compacto e bordo diferenciável).

Sabemos que superfícies dadas pelo gráfico de funções diferenciáveis possuem a forma  $z = f(x, y)$ , portanto, seu elemento de área é dado por :

$$(1) \quad dM = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}} dx \wedge dy$$

Se  $z = f(x, y)$  como uma solução para este problema, vamos considerar uma família de funções a 1-parâmetro  $z_t(x, y) = f(x, y) + t\eta(x, y)$ , de modo que  $\eta$  seja uma função que se anula na fronteira de  $U$ , e vamos definir:

$$(2) \quad A(t) = \int_{\bar{U}} [1 + (z_t)_x^2 + (z_t)_y^2]^{\frac{1}{2}} dx dy$$

Desenvolvendo (2) obtemos :

$$A(t) = \int_{\bar{U}} [(1 + f_x^2 + f_y^2) + 2t(f_x\eta_x + f_y\eta_y) + t^2(\eta_x^2 + \eta_y^2)]^{\frac{1}{2}} dx dy$$

Fazendo  $p = f_x$ ,  $q = f_y$  e  $w = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$  e derivando com respeito a  $t$  a

equação anterior temos:

$$A'(0) = \int_{\bar{U}} 2\left(\frac{p}{w}\eta_x + \frac{q}{w}\eta_y\right) dM$$

Agora, basta integrar por partes a equação acima e notarmos que  $\eta|_{\partial\bar{U}} = 0$ , daí :

$$(3) \quad A'(0) = -2 \int_{\bar{U}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{w} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{w} \right] \eta \, dM$$

Como  $z = f(x, y) = z_0(x, y)$  representa a solução para o problema, então  $A(0)$  é um ponto crítico da função  $A(t)$  e, portanto,  $A'(0) = 0$ . Isto ocorre para qualquer função  $\eta$  escolhida de modo que a única restrição seja  $\eta$  se anular na fronteira de  $U$ . Desta forma, como  $\eta$  é uma função não nula :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{w} \right) = 0$$

Calculando as derivadas indicadas acima, obtemos:

$$(4) \quad f_{xx}(1 + f_y)^2 - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0$$

Esta equação é a conhecida como **Equação das Superfícies Mínimas** e, é a equação que nos dá as soluções para o problema estudado por Lagrange que mencionamos anteriormente.

Note que, o processo feito para encontrar a Equação de Lagrange para Superfícies Mínimas é o mesmo processo da fórmula da Variação da área feito na seção anterior. Porém, aqui estamos lidando aqui especificamente com gráficos de funções de duas variáveis de classe  $C^2$  onde o cálculo torna-se natural e simples.

Uma outra observação de Lagrange foi que, funções lineares são soluções de (4) e ele também conjecturou a existência de soluções contendo qualquer curva dada como um gráfico ao longo da fronteira de  $U$ .

Posteriormente, as superfícies mínimas foram relacionadas com um elemento intrínseco da geometria diferencial, Meusnier mostrou que (4) acontecia se, e somente se, a curvatura média destas superfícies era nula. Como vimos, a curvatura média é definida pelo traço da matriz da segunda forma fundamental, neste caso, temos uma variedade de dimensão dois e, portanto:  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ . Em Geometria Diferencial é possível verificarmos que  $H$  pode ser escrito como :

$$H = \frac{1}{2} \frac{f_{xx}(1 + f_y)^2 - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2)}{(1 + f_x^2 + f_y^2)}$$

E portanto,  $H \equiv 0$  se, e somente  $f_{xx}(1 + f_y)^2 - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0$ .

## 2.4 Exemplos de Superfícies Mínimas

**Exemplo 2.1.** A Superfície Mínima de Scherk (1835)



Figura 2.1: Superfície Mínima de Scherk.

Em 1835 Scherk descobriu um exemplo de superfície mínima, resolvendo a equação (4) para funções do tipo  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ . Neste caso, a equação (4) se reduz a

$$\{1 + [h'(y)]^2\}g''(x) + \{1 + [g'(x)]^2\}h''(y) = 0,$$

que é equivalente a

$$(5) \quad \frac{-g''(x)}{1 + [g'(x)]^2} = \frac{h''(y)}{1 + [h'(y)]^2}$$

Como  $x$  e  $y$  são variáveis independentes, cada lado desta equação é constante. Seja  $a$  é este valor constante, fazamos

$$\begin{aligned} -\frac{g''(x)}{1 + [g'(x)]^2} &= a \\ \Rightarrow -g''(x) &= a + a[g'(x)]^2 \end{aligned}$$

Fazendo  $g'(x) = w$  e  $g''(x) = \frac{dw}{dx}$ , e substituindo na equação acima temos:

$$-\frac{dw}{dx} = a + aw^2$$

$$\Rightarrow -\frac{dw}{dx} \frac{1}{(1+w^2)} = a$$

Integrando o resultado a cima, obtemos:

$$g(x) = \frac{1}{a} \log|\cos(ax)|,$$

e de maneira análoga temos que :

$$h(x) = -\frac{1}{a} \log|\cos(ay)|$$

e então  $f(x, y) = \frac{1}{a} \log \left| \frac{\cos(ax)}{\cos(ay)} \right|$ . O gráfico de  $f$  é conhecido como Superfície Mínima de Scherk.

### Exemplo 2.2. O Catenóide - 1744

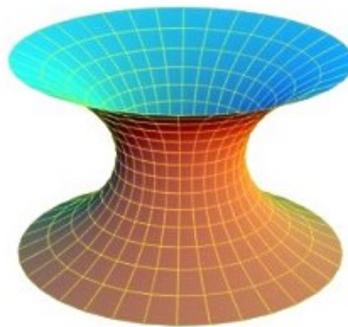


Figura 2.2: Catenóide.

O catenóide é uma superfície de revolução em  $\mathbb{R}^3$  obtido pela rotação da curva :  $\alpha(x) = (x, a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , em torno do eixo  $x$ .

Tal superfície é mínima e completa. Sua curvatura Gaussiana é  $K = -\frac{1}{a^2} \cosh^2\left(\frac{x}{a} + b\right)$  e sua curvatura total,  $\int_M K dM$  é  $-4\pi$ . O teorema abaixo é uma caracterização de superfícies mínimas de revolução no  $\mathbb{R}^3$  através do catenóide.

**Teorema 2.6.** (Ver referência [1])

Qualquer superfície mínima de revolução em  $\mathbb{R}^3$  é, a menos de movimento rígido, parte de um catenóide ou de um plano.

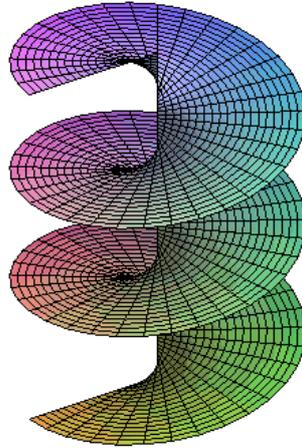
**Exemplo 2.3. O Helicóide - 1776**

Figura 2.3: Helicóide.

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AHelicoide.png>

O helicóide pode ser descrito pela aplicação  $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(u, v) = (u \cos(av), u \sin(av), bv)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes não nulas. Geometricamente, considere a hélice dada por  $(\cos u, \sin u, au)$ . Por cada ponto da hélice, trace uma reta paralela ao plano  $xy$  e que intersecta o eixo  $Oz$ . A superfície gerada por essas retas forma o *helicóide*. O helicóide é uma superfície mínima **completa**. Sua curvatura Gaussiana  $K$  é dada por

$$K = -\frac{-b^2}{(b^2 + a^2u^2)^2}$$

e sua curvatura total não é finita.

O helicóide é também um exemplo de **superfície mínima regrada**, isto é, uma superfície geometricamente descrita por uma linha reta deslizando suavemente ao longo de uma curva.

**Teorema 2.7.** (Ver referência [1])

*Qualquer superfície mínima regrada do  $\mathbb{R}^3$  é, a menos de um movimento rígido, parte de um helicóide ou de um plano.*

# Capítulo 3

## Teoremas de Semiespaço

### Introdução

Neste capítulo abordaremos os teoremas apresentados no artigo *The strong half-space theorem for minimal surfaces* de Hoffman e Meeks- [6], que tratam de resultados de semiespaço para superfícies mínimas no  $\mathbb{R}^3$  e dá uma caracterização para o fecho convexo de uma hipersuperfície mínima  $M$  em  $\mathbb{R}^n$ , sob as mesmas condições dos teoremas de semiespaço. Como já mencionado na introdução deste trabalho, estes teoremas foram motivados, além da influência de outros resultados, pelos exemplos encontrados nos trabalhos de Jorge/Xavier [7] e Rosenberg/Toubiana [13]. Faremos uma breve apresentação destes exemplos antes de chegar aos teoremas principais.

### 3.1 Exemplos Motivacionais

#### 3.1.1 Exemplo de Jorge e Xavier

Em 1980, Jorge e Xavier desenvolveram um método que nos possibilita construir exemplos de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ , completas e entre dois planos paralelos. Esta construção se deu através da demonstração de um teorema de existência, consequência da pergunta de *E. Calabi* a cerca da existência de tais superfícies mínimas. O teorema é o seguinte :

**Teorema 3.1.** *Existem superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ , completas, não flat, que estão totalmente contidas numa faixa.*

Para a demonstração usam-se os resultados seguintes.

**Lema 3.2. (Representação de Weirstrass de superfície mínimas)** Sejam  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  funções holomorfas e :

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg$$

Se  $f$  nunca se anula então a função  $x(x_1, x_2, x_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $x_k = \operatorname{Re} \int \phi_k$  define uma superfície mínima regular em  $\mathbb{R}^3$  cujo elemento de comprimento de arco é dado por  $ds = \lambda|dz|$  onde  $\lambda = \frac{|f|}{2}(1 + g^2)$ .

**Lema 3.3.** Seja  $\{D_n\}$  a sequência de discos fechados centrados na origem,  $D_n \subset D_{n+1}$ ,  $\bigcup D_n = D$ . Seja  $K_n \subset D_n$  um conjunto compacto tal que  $K_n \cap D_{n-1} = \emptyset$  e  $D/K_n$  é um conjunto conexo. Seja  $f$  um afunção holomorfa definida numa vizinhança da união de  $K_n$ . Então é possível aproximarmos  $f$  uniformemente a esta união por funções holomorfas definidas em  $D$ .

A ideia foi tomar regiões compactas, formadas apartir da retirada de pedaços de *annulis*<sup>1</sup> disjuntos e montar uma sequência destas regiões disjuntas cujos pedaços retirados estão em "lados opostos", como podemos ver na *Figura 3.1*.

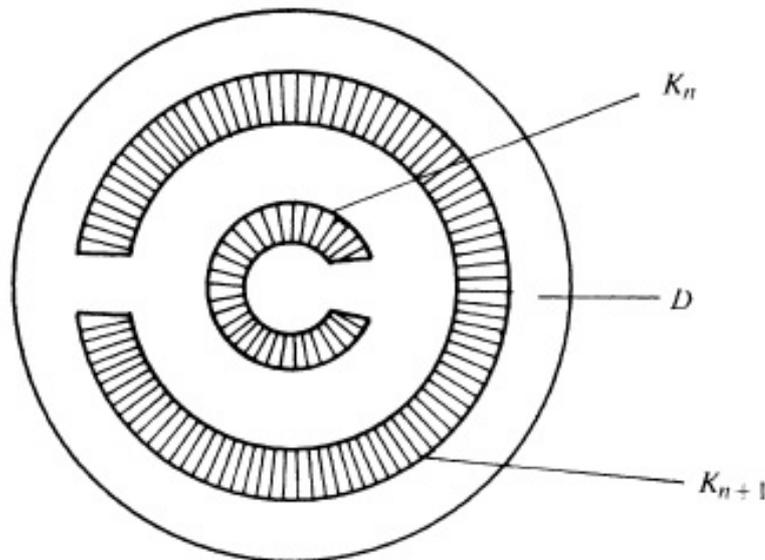


Figura 3.1: Construção de Jorge e Xavier  
Fonte: Artigo [1]

Após a construção desta sequência, consideramos os conjuntos  $E = \bigcup_n K_n$  (onde  $n$  é par) e  $O = \bigcup_n K_n$  (onde  $n$  é ímpar), e observa-se que: *Qualquer caminho divergente em  $D$  de comprimento euclidiano finito, cruza todos, a menos de um número finito, os  $K_n$  em  $E$  ou todos, a menos de um número finito, os  $K_n$  em  $O$ .* Com o auxílio dos lemas 3.1.1 e 3.1.2, encontra-se um a superfície mínima  $M$  e daí concluímos que  $M$  é completa .

<sup>1</sup> Annuli = Região anelar.

### 3.1.2 Exemplo de Rosenberg e Toubiana

Em 1990, Rosenberg e Toubiana, tomando como referência a construção de Jorge e Xavier, encontraram um exemplo de annuli mínimo imerso em  $\mathbb{R}^3$ , completo e próprio numa faixa aberta.

Em sua construção, eles modelaram uma superfície  $M$  em um annuli  $A = A(c_1, c_2)$  onde  $c_1 < |z| < c_2$ . Para isto, procuraram um par de aplicações holomorfas  $(f, g)$  em  $A$  não nulas e utilizando a representação de Weirstrass de  $M$ , encontraram que  $g$  é, na verdade, a representação de Gauss de  $M$  composta com a projeção estereográfica do pólo norte. Restando então, encontrar  $f$  holomorfa a  $g$  satisfazendo determinadas condições e não nula para que se construa  $M$  como desejado.

Na construção de  $g$ , é utilizado o método de Jorge e Xavier comentado anteriormente, porém, usando a parte deletada dos anulis que convergem para ambas as fronteiras dos círculos de  $A$  (ver figura 3.2). A construção é finalizada com a utilização do *Lema 3.1.2* e alguns resultados mais técnicos que podem ser vistos mais cuidadosamente em [13].

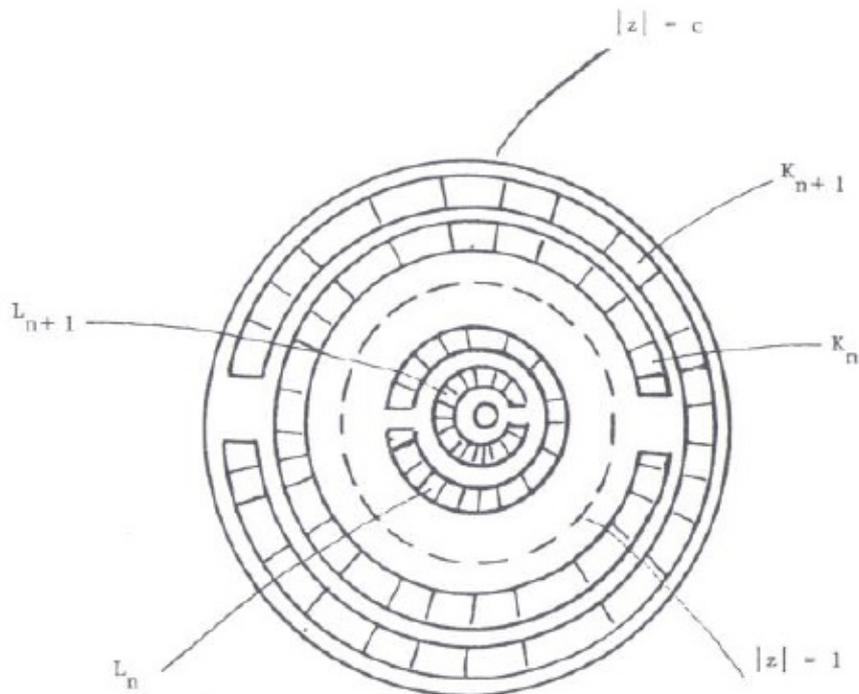


Figura 3.2: Construção de Rosenberg e Toubiana  
Fonte: Artigo [2]

## 3.2 Teorema Principal 1 - Teorema de Semiespaço para Superfícies Mínicas

Este primeiro teorema também é conhecido como uma versão do Princípio do Máximo para superfícies mínimas no infinito. Ele foi uma das ferramentas utilizadas na demonstração de uma versão mais forte do **Princípio do Máximo no Infinito** para variedades tridimensionais flat, além de ser muito utilizado em uma grande variedade de problemas geométricos relacionados às propriedades de superfícies mínimas propriamente mergulhadas.

**Teorema 3.4.** *Uma superfície mínima  $M$  em  $\mathbb{R}^3$  conexa, própria, não-planar e possivelmente ramificada, não está contida em um semiespaço.*

*Demonstração.* Suponhamos que o teorema é falso. Isto é, seja  $M$  uma superfície mínima, nas condições do teorema, e tal que esteja totalmente contida em um semiespaço.

Sem perda de generalidade, vamos considerar que  $M$  está contida no semiespaço  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ , mas que  $M$  não está contida em nenhum semiespaço que seja um subconjunto próprio de  $H$  (isto é, a fronteira do semiespaço  $H$  é o único plano abaixo de  $M$ , o que implica dizer que  $M$  tangencia a fronteira de  $H$  no infinito).

Pelo Princípio do Máximo, como  $M$  não é plana por hipótese,  $M \cap P = \emptyset$ , onde  $P = \partial H = \{z = 0\}$ . Mas, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, conseguimos uma translação para baixo de  $M$ , digamos  $M_\varepsilon$ , tal que  $M_\varepsilon \cap P \neq \emptyset$ .

Considere  $C = C_1$  o semicatenóide  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2(z) | z < 0\}$ . Escolhendo  $\varepsilon > 0$  pequeno o suficiente, podemos assegurar que  $M_\varepsilon \cap C_1 = \emptyset$  e, sendo  $D_1$  o disco unitário em  $P$ ,  $M_\varepsilon \cap D_1 = \emptyset$ .

Mais especificamente, seja  $d > 0$  a distância de  $M$  ao disco  $D_R \subset P$ , de raio  $R = \cosh(1) > 1$ . Do lado de fora do cilindro sobre  $D_R$ ,  $C_1$  está abaixo do plano  $z = -1$ . Escolheremos então  $\varepsilon < \frac{1}{2} \min(1, d)$  e pequeno o suficiente para que  $M_\varepsilon \cap P \neq \emptyset$ .

Seja  $C_t$  a *contração homotética* de  $C_1$  por  $t$ , para  $0 < t < 1$  como na *Figura*. Observe que  $C_t$  converge suavemente e distante de  $\vec{0}$  para  $P - \vec{0}$ . Do que foi visto anteriormente, podemos concluir que:

- 1)  $C_t \cap M_\varepsilon$  encontra-se fora do cilindro sobre  $D_1$  para todo  $t$ ;
- 2)  $M_\varepsilon \cap C_t \neq \emptyset$  para  $t$  suficientemente pequeno; e
- 3)  $M_\varepsilon \cap C_t = \emptyset$  para  $t$  próximo de 1.

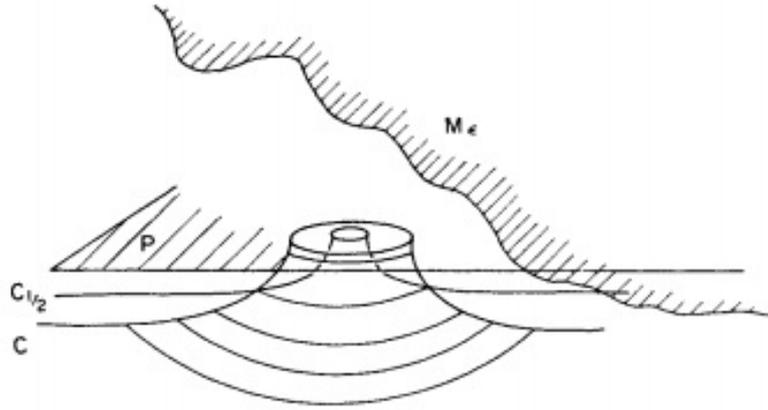


Figura 3.3: Teorema de Semiespaço  
Fonte: Artigo[6]

Agora seja  $S = \{t \in (0, 1) : C_t \cap M_\varepsilon \neq \emptyset\}$  e  $T = \text{lub}^1 S$ . Claramente  $T < 1$ .

**Afirmção:**  $T \in S$ , isto é  $C_T \cap M_\varepsilon \neq \emptyset$ .

Se  $T$  é um ponto isolado de  $S$ , temos o que queríamos. Do contrário, podemos encontrar uma sequência crescente  $t_n \rightarrow T$  em  $S$ , com  $t_0 \geq \frac{T}{2}$ , tal que existe um ponto  $p_n \in C_1$  onde  $t_n p_n \in C_{t_n} \cap M_\varepsilon$ . Se  $p_n = (x_n, y_n, z_n)$ , devemos ter que  $t_n z_n \geq -\varepsilon$ , o que implica que  $z_n \geq \frac{-\varepsilon}{t_n} \geq \frac{-\varepsilon}{T}$ . Isto é,  $\{p_n\}$  se encontra em um subconjunto limitado  $\{(x_1, x_2, x_3) \in C_1 \mid x_3 \geq -\frac{\varepsilon}{T}\}$  e portanto deve possuir uma subsequência convergente.

Seja  $\{p_j\}$  esta subsequência. Como o catenóide é completo, temos que  $p_j \rightarrow p_0 \in C_1$ , então  $t_j p_j \in C_{t_j} \cap M_\varepsilon$ . Por continuidade,  $T p_0 \in C_T \cap M_\varepsilon$ . Assim,  $T \in S$ .

Como a fronteira de  $C_T$  se encontra dentro do disco  $D_1 \subset P$ , e  $D_1 \cap M_\varepsilon = \emptyset$ , então  $T p_0$  tem que ser um ponto interior de  $C_T$ . Mais ainda, dos fatos :

- 1)  $T < 1$ , e;
- 2)  $\forall t > T \Rightarrow C_t \cap M_\varepsilon = \emptyset$ ,

temos que  $C_T$  encontra  $M_\varepsilon$  em  $T p_0$ , mas está localmente situado de um lado de  $M_\varepsilon$  perto de  $T p_0$ . Pelo princípio do Máximo para mínimas,  $C_T$  coincide com  $M_\varepsilon$  próximo de  $T p_0$ , e portanto,  $M_\varepsilon$  tem que ser um catenóide. O catenóide no entanto, não pode estar inteiramente contido em um semiespaço. O que nos dá a contradição desejada.  $\square$

Uma observação importante é que este teorema falha sem a hipótese de  $M$  ser própria, como é o caso dos exemplos de Jorge e Xavier, e Rosenberg e Toubiana vistos na seção anterior.

Se voltarmos á demonstração deste teorema, para que sua generalização ao  $\mathbb{R}^k$  valesse, teríamos que encontrar uma hipersuperfície mínima  $C_n$ , não compacta, propriamente

<sup>1</sup>lub=lower upper bounded. Isto significa: Menor cota superior

### 3. Teoremas de Semiespaço

---

imersa, com fronteira compacta, a qual uma das funções coordenadas fosse **própria** e negativa. Assim, a falha da generalização deste teorema nos mostra que um tal conjunto não pode existir em  $\mathbb{R}^n$  para  $n > 3$ . No caso de  $n = 3$ , podemos pegar para ser  $C_3$ , a parte inferior do catenóide.

Uma outra observação que provém disto é que, um fim de uma superfície mínima **propriamente imersa** em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 3$  não pode ter uma função coordenada própria negativa.

Podemos encontrar ainda, um contra-exemplo em  $\mathbb{R}^n$  que é o catenóide  $n - 1$ -dimensional, uma superfície mínima, completa e própria, mas que está contido entre dois planos paralelos.

### 3.3 Teorema Principal 2 - Versão Forte do Teorema de semiespaço para superfícies mínimas

Enunciaremos agora, dois resultados, encontrados em [11] e [12], que serão fundamentais na demonstração do Teorema do Semiespaço-(versão forte).

**Teorema 3.5.** *Seja  $N$  uma variedade Riemanniana orientável, completa e com fronteira não-vazia. Então se  $\partial N$  possui curvatura média não-negativa com relação ao vetor normal que aponta "para fora" e a curvatura escalar de  $N$  for não-negativa, uma das seguintes coisas ocorre :*

- 1)  $N$  possui uma esfera mínima estável ou  $N$  possui uma superfície mínima estável que é um plano, ou um cilindro ou um toro flat; ou
- 2) A fronteira de  $N$  é conexa.

**Corolário 3.6.** Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  superfícies mínimas, completas, próprias e imersas no espaço tridimensional euclidano  $\mathbb{R}^3$ , então uma das seguintes acontece:

- 1) Ou  $\Sigma_1$  ou  $\Sigma_2$  é um plano;
- 2) Existe um plano  $P \in \mathbb{R}^3$  disjunto de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  tal que  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  estão em componentes distintas de  $\mathbb{R}^3 - P$ .
- 3)  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  se intersectam não trivialmente.

**Teorema 3.7. Teorema do semiespaço para superfícies mínimas- versão forte:** *Duas superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ , próprias, possivelmente ramificadas e conexas devem se intersectar, a menos que sejam planos paralelos.*

*Demonstração.* Suponhamos que as superfícies  $M_1$  e  $M_2$ , com as condições<sup>1</sup> do enunciado, não se intersectam. Do *Corolário 3.5.1*, temos que ou uma delas é um plano, deixando a outra em um semiespaço, ou existe um plano entre elas, colocando cada uma delas num semiespaço distinto. Do *Teorema 3.4*, vemos que isto só é possível se ambas forem planos e, como não se intersectam, estes planos devem ser paralelos.  $\square$

Vamos seguir agora com a prova do *Corolário 3.5.1*:

*Demonstração. Corolário 3.5.1*

Suponhamos que nem 1) nem 3) ocorrem. Seja  $N$  o fecho geodésico da componente de  $\mathbb{R}^3 - (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$  a qual a fronteira possui uma parte de  $\Sigma_1$  e uma parte de  $\Sigma_2$ . Então  $N$  satisfaz as hipóteses do teorema acima, a menos do fato de fronteira de  $N$  possuir alguma curva que se autointersecte de  $\Sigma_1$  ou  $\Sigma_2$ . No entanto como os ângulos internos destas curvas que se autointersectam são menores ou iguais a  $180^\circ$ , o argumento usado

---

<sup>1</sup>A hipótese de completude vem do fato de serem  $M_1$  e  $M_2$  imersões próprias em  $\mathbb{R}^3$ .

em [8] vale para  $N$ . Portanto, como  $\partial N$  é desconexa, já que é a união disjunta de conjuntos, em particular,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  que não se intersectam, podemos usar o *Teorema 3.3* e concluir que  $N$  possui uma mínima estável e que esta deve ser um plano, pois a única mínima estável em  $\mathbb{R}^3$  é o plano.

Os outros casos seguem facilmente deste.

□

Vejamos agora um corolário do *Teorema 3.6*.

**Corolário 3.8.** Suponha que  $N$  é uma 3-variedade completa, flat e  $i : M \subset N$  é uma superfície mínima, mergulhada que não é flat. Então a aplicação induzida  $i_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$  nos grupos fundamentais é sobrejetiva. Mais ainda, se  $M$  e  $N$  são ambas orientáveis, então  $M$  desconecta  $N$ .

*Demonstração.* Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow N$  o espaço de recobrimento universal de  $N$ . A aplicação no grupo fundamental  $i_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$  é sobrejetiva se, e somente,  $F^{-1}(M)$  é composta de uma única componente. Mas, como cada componente de  $F^{-1}(M)$  está mergulhada em uma mínima não flat, do *Teorema 3.6*, temos que  $F^{-1}(M)$  deve ser conexa, o que implica que  $i_*$  é sobrejetiva.

Suponhamos agora que  $N$  e  $M$  são orientáveis. Então se  $N$  e  $M$  não se desconectam, deve existir uma curva  $\gamma$  simples e fechada que intersecta  $M$  transversalmente em único ponto. Uma vez que  $i_*$  é sobrejetiva, existe uma coleção de curvas  $\Gamma$  em  $M$  que são homólogas à  $\gamma$ .

Como  $M$  e  $N$  são orientáveis, o fibrado normal de  $M$  é trivial. Desta forma, podemos “levantar” esta coleção  $\Gamma$  na direção do vetor normal que aponta *para fora* de  $M$ , gerando assim, uma outra coleção  $\hat{\Gamma}$  que não intersecta  $M$  mas permanece homóloga à  $\gamma$ .

Como  $M$  possui interseção não trivial com  $\gamma$ , da teoria elementar da intersecção  $M$  deveria intersectar  $\hat{\Gamma}$ .

□

### 3.4 Teorema Principal 3 - Caracterização do Fecho Convexo

Apesar de termos que os Teoremas 3.4 e 3.7 não possuem versões análogas para dimensões maiores, o próximo teorema nos mostra que o fecho convexo de uma superfície mínima própria do  $\mathbb{R}^3$  possui propriedades muito especiais e que possuem generalização natural par hiperfícies em  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3.9.** *Suponha que  $M$  é uma subvariedade mínima de  $\mathbb{R}^n$ , própria, possivelmente ramificada, conexa e cuja fronteira  $\partial M$ , que pode ser vazia, é um conjunto compacto. Seja  $H(M)$  o fecho convexo de  $M$ . Então exatamente uma das seguintes afirmações ocorre:*

- (1)  $H(M) = \mathbb{R}^n$ ;
- (2)  $H(M)$  é um semiespaço;
- (3)  $H(M)$  é uma faixa fechada entre dois hiperplanos paralelos;
- (4)  $H(M)$  é um hiperplano;
- (5)  $H(M)$  é um conjunto compacto convexo. Isto ocorre precisamente quando  $M$  é compacto.

Além disto, quando  $n = 3$ ,  $\partial M$  possui intersecção não vazia com cada componente de  $H(M)$ .

*Demonstração.* Como a demonstração deste teorema é uma generalização direta do caso onde  $n = 3$  ( que é mais fácil de visualizar), apresentaremos a demonstração apenas para este caso.

Vamos inicialmente supor que os casos (1), (4) e (5) do teorema não ocorrem. Sendo assim, para provarmos que (2) ou (3) devem ocorrer, então temos que provar que *se existem dois semiespaços  $H_1$  e  $H_2$  distintos e os menores que contenham  $M$ , então  $P_1 = \partial H_1$  e  $P_2 = \partial H_2$  são planos paralelos* (isto é, considerando que  $H(M)$  não seja um semiespaço). A demonstração consiste de supormos que  $P_1$  e  $P_2$  não são paralelos e obtermos um absurdo.

Supondo então que  $P_1$  e  $P_2$  não são planos paralelos, temos que o interior de  $M$  não pode ter um ponto em comum com  $P_1 \cup P_2$ , pois pelo Princípio do Máximo, caso tivesse,  $M$  teria que coincidir com um dos planos, mas supomos que (4) não ocorre.

Seja  $C = H_1 \cap H_2$ . Após uma rotação, caso necessário, vamos assumir que :

- 1)  $C$  está no semiespaço  $z \geq 0$ ;
- 2) A fronteira de  $C$  é um gráfico sobre o plano  $xy$  e;
- 3)  $P_1 \cap P_2$  está no eixo  $x$ .

### 3. Teoremas de Semiespaço

---

Fazendo uma translação paralela ao eixo  $x$ , caso necessário, podemos supor que a fronteira  $\partial M$  está completamente contida no semiespaço  $x \leq -1$ . (Esta translação deixa  $C$  invariante). Em particular,  $0 \notin M$  e já que  $M$  é fechada, existe um  $s > 0$  cuja bola  $B_s = \{(x, y, z) : (x - s)^2 + y^2 + z^2 \leq s\}$  é tal que  $M \cap B_s = \emptyset$ . Seja agora,

$$\Gamma_s = \partial B_s \cap \partial C = \partial B_s \cap (P_1 \cup P_2)$$

Já que  $\Gamma_s$  tem projeção 1-1 sobre uma curva plana convexa, então deve ser a fronteira de uma superfície mínima compacta  $\Delta_s$  (Problema de Plateu), que é um gráfico sobre um conjunto convexo no plano  $(x, y)$ . Da propriedade de fecho convexo (ver apêndice) como  $\Delta_s \subset B_s$ , então  $\Delta_s$  está a uma distância positiva de  $M$ .

Para  $t \in [1, \infty)$  consideremos as seguintes superfícies :

$$A_t = \{tp : p \in \Delta_s\}$$

Note que :

- 1) Cada  $A_t$  é um gráfico não negativo dentro de  $C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$ ;
- 2) Cada  $A_t$  é compacto ;
- 3) À medida que  $t \rightarrow \infty$ ,  $A_t$  converge para  $\{(x, y, z) \in C : x = 0\}$  e;
- 4) Cada ponto em  $C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\} - B_s$  está em algum  $A_t$ .

Como  $A = A_1$  é disjunto de  $M$ , segue do Princípio do Máximo para mínimas que nenhum  $A_t$  pode ter nenhum ponto em comum com  $M$ , pois caso houvesse algum  $p_{t_0} \in M \cap A_{t_0}$  (isto é, no seu interior uma vez que a fronteira de  $M$  está a uma distância positiva de qualquer  $A_t$ ), pelo Princípio do Máximo,  $M$  e  $A_t$  coincidiriam. Mas isto não é possível pois todos os  $A_t$  possuem pontos em comum e em particular, possuem pontos em comum com  $A_1$  que é disjunto de  $M$  por construção.

Logo, como  $(B_s \cup \bigcup_{t=1}^{\infty} A_t) \supset C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ ,  $M \subset H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0\}$ . Com um argumento similar, nós conseguimos um inteiro positivo  $k$ , grande o suficiente, tal que, como  $M$  é limitada,  $M \subset H_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq -k\}$ . Repetindo o mesmo argumento inicial para  $H_1$  e  $H_3$  no lugar de  $H_1$  e  $H_2$  nós conseguimos mostrar que  $M$  é limitada na direção  $z$  e está contida em um semiespaço  $H_5 = \{(x, y, z) : z \leq N\}$ , com  $N$  um inteiro positivo grande o suficiente.

Desta forma, temos que  $M \subset H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap H_5$  que é um conjunto compacto e convexo. Assim, teríamos que  $H(M)$  é um conjunto convexo compacto. O que é uma contradição, já que supomos que (5) não ocorre.

Logo concluímos que  $P_1$  e  $P_2$  são planos paralelos, o que implica que (3) ocorre. Fica provada então a parte principal do teorema.

Observe que, se supormos que (1), (2), (3) e (4) não ocorrem, como  $H(M)$  não é um

semiespaço, (5) acontece pelo que foi provado anteriormente.

Se (2),(3),(4) e (5) não ocorrem, então note que, se  $H(M)$  não fosse o  $\mathbb{R}^3$ , existiria um ponto  $p \in \mathbb{R}^3$  que não estaria no fecho convexo. Mas se este ponto, digamos  $p$ , não estiver no fecho convexo, então nenhum segmento  $p_0p_1$ , onde  $p_0$  e  $p_1$  pertencem a  $H(M)$ , que contenha  $p$ , poderia estar contido em  $H(M)$ . Em particular, existiria um plano  $P$  contendo  $p$  que não está contido em  $H(M)$ , logo  $H(M)$  seria um semiespaço, mas isto é não ocorre por hipótese. Logo, (1) deve ocorrer.

Agora, não valendo (1), (2), (3) e (5), se  $H(M)$  não for um plano, então como também não é o  $\mathbb{R}^3$  nem é um conjunto compacto convexo, deve ser ou um semiespaço ou uma faixa fechada entre dois planos pelo que já foi provado. Isto é, (2) ou (3) ocorrem. O que é absurdo, uma vez que supomos que (2) e (3) também não acontecem. Logo, deve ser um plano.

Por fim, para mostrarmos que quando  $n = 3$ ,  $\partial M$  intersecta cada componente da fronteira de  $H(M)$ , repetimos a demonstração do teorema 3.1. Iremos supor que  $\partial M$  possui intersecção vazia com alguma das componentes do bordo de  $H(M)$ . Assim  $H(M) \subset H_1$ , onde  $H_1$  representa a união das demais componentes. Reproduzimos a demonstração do *Teorema 3.4* substituindo  $\partial M$  por  $M$  e  $H$  por  $H_1$ . Concluiremos que  $H_1$  é um catenóide cujo fecho convexo é o  $\mathbb{R}^3$ .

□

**Nota:** Todos os casos citados no teoremas ocorrem no  $\mathbb{R}^3$ . Para os casos (1) e (2), os exemplos são o catenóide  $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$  e o semicatenóide com  $z \geq 0$ , respectivamente. Para (3) podemos tomar qualquer um dos exemplos do Teorema Principal em [5] e considerar a porção destas superfícies em uma faixa  $|z| \leq 1$ . Para (4), temos um plano e para (5) temos o caso de qualquer exemplo compacto.

# Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, J. L. M; Colares, A. G.; *Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* . Monografias de Matemática, N°40. IMPA
- [2] Daniel, B.; Hauswirth, L.; *Half-space theorem, embedded minimal annuli and minimal graphs in the Heisenberg Group*. Proceedings of London Mathematical Society, v.98, n.2, p.445-470,2009.
- [3] Daniel, B.; Meeks, W. H. III; Rosenberg H.; *Halfspace theorems for minimal surfaces in  $Nil_3$  and  $Sol_3$*  . Journal of Differential Geometry, v.88, n.1.,p.41-59, 2011.
- [4] Do Carmo, M.; *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, 4° edição, IMPA.
- [5] Hoffman, D.; Meeks, W. H. III; *Embedded minimal surfaces of finite topology*. Ann. Math. **131**, 1-34 (1990).
- [6] Hoffman, D.; Meeks, W. H. III; *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*. Invent. Math. **101**, 373-377(1990).
- [7] Jorge, L.; Xavier, F.; *A complete minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  between two parallel planes*. Ann. Math. **112**, 203-206(1980)
- [8] Lawson, H. B.; *Lectures on minimal submanifolds* ; Volume 1 , Mathematics lecture series ; 9 (1980)
- [9] Lima, E. L.; *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro. (1993)
- [10] Mazet,L.; Wanderley, G. A.; *A half-space theorem for graphs of constant mean curvature  $0 < H < \frac{1}{2}$*  . Illinois J. of Math. no 1, 43-53 (2015).
- [11] Meeks, W. H. III.; *The existence of embedded minimal surfaces and the problem of uniqueness, to appear in Math. Zeit.* **179**, 151-168 (1982)
- [12] Meeks, W. H. III.; Simon, L.; Yau, S. T.; *The existence of embedded minimal surfaces, exotic spheres and positive Ricci curvature*. Ann. Math. **116**, 221-259(1982)

- [13] Rosenberg, H.; Toubiana, E.; A cylindrical type complete minimal surface in a slab of  $\mathbb{R}^3$ . Bull. Sci. Math. III, 241-245(1987)