Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um sistema hiperbólico e o custo de controlabilidade para o sistema de Stokes via método da transmutação

José Ribeiro de Sousa Neto

João Pessoa – PB
Abril de 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um sistema hiperbólico e o custo de controlabilidade para o sistema de Stokes via método da transmutação

por

José Ribeiro de Sousa Neto

sob a orientação do

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna

João Pessoa – PB
Abril de 2017

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

S725s Sousa Neto, José Ribeiro.
Um sistema hiperbólico e o custo de controlabilidade para o sistema de Stokes via método da transmutação / José Ribeiro de Sousa Neto. - João Pessoa, 2017.
69 f.:il.-

Orientador: Fágner Dias Araruna.
Dissertação(Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Sistema de Stokes. 3. Controlabilidade nula. 4. Custo de controlabilidade. 5. Sistema hiperbólico. I. Título.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Um sistema hiperbólico e o custo de controlabilidade para o sistema de Stokes via método da transmutação

por

José Ribeiro de Sousa Neto [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 24 de Abril de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna
(Orientador)

Prof. Dr. Roberto de Almeida Capistrano Filho
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra
(Examinador Interno)

[1]O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Dedico este trabalho ao meu falecido pai.

Agradecimentos

A Deus acima de tudo, pois Ele supriu todas as minhas necessidades durante esse ano e me fez alcançar mais esta vitoria.

Ao meu falecido pai, por todo o esforço que ele teve para minha formação e das mihas irmãs. À minha mãe e irmãs, por estarem incondicionalmente ao meu lado.

Ao meu Orientador, Professor Fágner Dias Araruna, por todos os concelhos, incentivo e pela imensa amizade dedicada durante todo período em que me orientou.

Aos professores Flank David Morais e Roberto de Almeida Capistrano Filho, por participarem da banca examinadora.

Aos professores da pós-graduação, que contribuiram de forma essencial para a minha formação.

Aos professores Felipe Wallison Chaves Silva e Eder Mateus, pelas valiosas dicas e disposição em ajudar, por ter feito a leitura do trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB por ter me concedido esta oportunidade. Agradeço também aos funcionários da Secretaria da PG-Mat.

Aos colegas do Laboratório Milênio, Thiago, Lucas, Thyago Lunes, Mariana, Raiza, Carlinha, Raoní, Nildo, Victor, Leon, Suelena, Aline, Angélica, Cássio, Richardson, João Henrique, Douglas, Marcelo, Julian por todo o incentivo e pelos momentos compartilhados. Desejo sucesso a todos!

Ao pessoal do mestrado, Djair, Esaú, Dayane, Fábio pelo companherismo e momentos que estudamos juntos. Sucesso a vocês também!

A todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuiram para a realização deste trabalho e que lamentavelmente não me recordo neste momento.

Por fim, ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho nos dedicamos a estudar o custo de controlabilidade para o sistema de Stokes. Usando o método da transmutação, mostraremos que o custo de dirigir o sistema de Stokes ao equilíbrio no tempo T é de ordem $e^{C/T}$, quando $T \to 0^+$, isto é, da mesma ordem de controlabilidade da equação do calor. Para tornar isso possível, provaremos um resultado de controlabilidade exata para o sistema hiperbólico com termo de resistência, o que será feito com base em hipóteses sobre a região de controle.

Palavras-chave: sistema de Stokes; controlabilidade nula; custo de cotrolabilidade; sistema hiperbólico.

Abstract

In this work, we studied the controllability cost for the Stokes system. Using the transmutation method, we show that the cost of driving the Stokes system to equilibrium at time T, is of order $e^{C/T}$ as $T \to 0^+$, which is of the same order of controllability of heat equation. For this, we have proved a exact controllability for the hyperbolic system with resistence term, by considering a geometric hypothesis on the control region.

Keywords: Stokes system; null controllability; cost of cotrollability; hyperbolic system.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- X' denota o dual topológico de um espaço de Banach X;
- Denotamos o produto interno euclidiano de dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^N$ por $x \cdot y$;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando não especificado, designa diferentes pares de dualidade;
- $\rightarrow$ denota convergência forte em um espaço normado;
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em um espaço normado;
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ denota convergência fraca estrela em um espaço normado;
- C, quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária
- $\hookrightarrow$ designa a imersão contínua.

Introdução

A teoria de controle é uma das áreas de maior interdisciplinaridade no campo de investigação científica. O que pode ser comprovado com os avanços na revolução industral. Além disso, a teoria de controle tem sido um campo em que muitas ideias e métodos matemáticos se relacionam para produzir novos conhecimentos. Tornando-se um rico ramo interdisciplinar da matemática, com aplicações em áreas como engenharia, biologia, economia e medicina. A palavra controle tem um duplo sentido. Primeiramennte, controlar um sistema pode ser entendido simplesmente testando ou certificando que seu comportamento é satisfatório. Em um sentido mais profundo, o controle é também agir com a finalidade de garantir que o sistema se comporte como desejado.

Como muitas outras áreas da ciência, a teoria de controle já existia muito antes de começarmos a indagar sobre ela. De fato, no mundo das espécies vivas, organismos são dotados de sofisticados mecanismos que regulam as diversas tarefas existentes. Isto é feito para garantir que as espécies se mantenham vivas, permitindo-lhes crescer e reproduzir. Assim, embora a formulação matemática de problemas de controle seja intrinsecamente complexa, as ideias chave da teoria de controle podem ser encontradas na natureza, na evolução e no comportamento dos seres vivos.

Hoje em dia, graças aos trabalhos de matemáticos como R. Bellman, H. Fatorini, R. Kalman, J-L Lions, L. S. Potryagim, D. Russel e muitos outros tal teoria tem tido grandes avanços.

Geralmente um sistema de controle pode ser escrito sob a seguinte forma abstrata

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = H(y,u), \ t > 0, \ y \in Y \text{ e } u \in \ U; \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde y é o estado (a parte desconhecida do sistema que estamos dispostos a controlar), y_0 é o estado inicial, u é o controle (a variável que pode ser livremente escolhida para atuar no sistema) e Y e U são o espaço de estados e o conjunto de controles admissíveis, respectivamente.

Dado um sistema do tipo (1), nosso objetivo é encontrar um controle de modo que o estado associado comporta se de forma adequado num dado tempo final. Este é o chamado problema de controle.

Vamos nos restringir ao problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay + Bu, \ t \in [0, T]; \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

em que $T > 0, H$ e U são espaços de Hilbert, $A : D(A) \subset H \to H$ é o operador que determina a equação que deve ser satisfeita pela variável estado y, e $B \in \mathcal{L}(U, D(A)')$ é o operador que descreve como o controle u atua sobre o sistema. A seguir, definiremos alguns tipos de controlabilidade para este sistema

Definição 0.1. 1. O sistema (2) é exatamente controlável no tempo T se para qualquer $y_0, y_T \in H$, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que a solução y de (2) satisfaz

$$y(T) = y_T.$$

2. O sistema (2) é nulo controlável no tempo T se para qualquer $y_0 \in H$, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que a solução y de (2) satisfaz

$$y(T) = 0.$$

3. O sistema (2) é aproximadamente controlável no tempo T se para qualquer $y_0, y_T \in H$ e dado $\epsilon > 0$, existe $u \in L^2(0, T, U)$ tal que a solução y de (2) satisfaz

$$\|y(T) - y_T\|_H < \epsilon.$$

Como observado por D. Russell em [21] e formalizado por J. L. Lions no famoso H.U.M (Método da unicidade Hilbertiana) em [11], as propriedades de controlabilidade para o sistema (2) são equivalentes a desigualdades de observabilidade para o sistema adjunto relativo a (2).

Temos por objetivo discutir e detalhar as ideias e resultados estabelecidos em Chaves-Silva [5]. Para tal, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ um conjunto aberto, limitado e conexo, cuja fronteira $\partial\Omega$ é suficientemente regular. Seja $T > 0$ e ω um subconjunto não vazio de Ω, que iremos nos referir como um domínio de controle. Usaremos a notação $Q = \Omega \times (0, T)$ e $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$ e denotaremos por $\nu = \nu(x)$ o vetor normal (exterior) a Ω no ponto $x \in \partial\Omega$.

Dado $u_0 \in L^2(\Omega)$, é conhecido (ver, por exemplo, Fernández-Cara e Zuazua [7]) que existe $f \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que a solução associada v para a equação do calor

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = f1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ v(0) = v_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

satisfaz

$$v(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{4}$$

Em outras palavras, a equação do calor possui a característica de ser nulo controlável para qualquer domínio de controle e qualquer dado inicial $v_0 \in L^2(\Omega)$. Além disso, tem-se a estimativa

$$\|f1_\omega\|_{L^2(Q)} \leq C_h \|v_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{5}$$

onde constante C_h, chamada custo de controlabilidade, é da forma $e^{C(\Omega,\omega)(1+\frac{1}{t})}$, quando $T \to 0^+$. Como apontado em Evedoza e Zuazua [6], a principal razão para a forma da constante C_h em (5) é devido ao fato que a solução fundamental da equação do calor em $\mathbb{R}^N$ ser dada por

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{\frac{-|x|}{4t}}. \tag{6}$$

Observando que, assim como na equação do calor, se considerarmos o sistema de Stokes

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla p = g1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{em} \quad Q, \\ y = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

também é bem conhecido, ver, por exemplo, Fernández-Cara [8]) que dado $y_0 \in L^2(\Omega)$ com $\operatorname{div} y_0 = 0$, existe $g \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução associada y de (7) satisfaz (4). No entanto, ao contrário da equação do calor, para o Sistema de Stokes, os resultados da literatura ver, por exemplo, Fernández-Cara [8]) nos fornecem a seguinte estimativa

$$\|g1_\omega\|_{L^2(Q)} \leq C_S \|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{8}$$

para uma constante C_s, o custo de controlabilidade para o sistema de Stokes é da forma $e^{C(\Omega,\omega)(1+\frac{1}{T^4})}$, quando $T \to 0^+$.

Como a solução fundamental da equação do calor e o sistema de Stokes tem, para N=2,3, o mesmo comportamento no tempo (ver Solonnikov[23]) surge o seguinte questionamento:

O custo de controlabilidade para a equação do calor e para o sistema de Stokes tem a mesma ordem quando $T \to 0^+$?

Ao analisarmos essa questão, a primeira ideia é analisar as diferentes maneiras de provarmos (5) e (8). De fato, conhecemos duas maneiras distintas de provarmos (5): A primeira é baseada em decomposições espectrais, a chamada estratégia de Lebeau-Robbiano ver, por exemplo, [10]), a segunda é baseada no uso de desigualdades de Carlerman, ver, por exemplo, Fernández-Cara e Zuazua [7]). Para o sistema de Stokes, como é necessário lidar com pressão, a estratégia de Lebeau-Robbiano é uma teoria muito complexa de se provar. Consequentemente, o método mais conhecido para provar (8) é baseado em desigualdades de Carlemam veja, por exemplo, Fernández-Cara [8].

A principal diferença quando provamos (5) e (8) por meio de desigualdades de Carleman são os pesos usados. De fato, para a equação do calor os pesos utilizados são da forma

$$\rho(t) = \frac{e^{C/t(T-t)}}{t(T-t)}, \tag{9}$$

enquanto que para o sistema de Stokes tomam a forma

$$\rho(t) = \frac{e^{C/t^4(T-t)^4}}{t^4(T-t)^4}. \tag{10}$$

Se conseguirmos usar pesos como em (9) para o sistema de Stokes, então as duas equações têm o mesmo custo de controlabilidade e mesma ordem. No entanto, uma análise cuidadosa de ambas as provas indica que a exigência de ter pesos como em (9) para o sistema de Stokes, tem uma obstrução devido ao termo de pressão

Temos como objetivo mostrar que, pelo menos com uma boa geometria do domínio de controle, a equação do calor e o sistema de Stokes tem custos de controlabilidade de mesma ordem quando o tempo tende a zero. Nossa estratégia é baseada na utilização do Método de Controle de Transmutação (CTM), que é basicamente um atalho para o famoso método da análise harmônica que consiste em consruir explicitamente controles em qualquer tempo T para o sistema (7) em termos de controles para o sistema hiperbólico, mostrando-se que a controlabilidade de um implica na controlabilidade do outro. Para isso, estudaremos a controlabilidade nula para o seguinte sistema hiperbólico com termo de pressão:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \nabla p = h 1_\omega & \text{em} \quad Q; \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em} \quad Q; \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma; \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{11}$$

A ideia é a seguinte: Se conseguirmos mostrar que o sistema (11) é nulo controlável, então o CTM pode ser aplicado para garantir a controlabilidade nula para o sistema (7). Além disso, se o custo de controlabilidade de (11) é conhecido, então o custo de controlabilidade de (7) pode ser obtido explicitamente, ver, por exemplo, Miller [18].

Vale a pena mencionar que sistemas como em (11) são modelos simples de dinâmica de elasticidade para materiais incompressíveis. Eles também aparecem em problemas elasto-térmico acoplados, onde um dos parâmetros de acoplamento (relacionados com as propriedades de compressibilidade) tende ao infinito, como exposto em Lions [12]. Também, o sistema (7) descreve o movimento de um fluido homogêneo, sujeito a um campo de forças externos, e é deduzido a partir da segunda Lei de Newton, do Princípio de Conservação da Massa e do Momento Linear, como pode ser visto em Melo e Neto [17].

Com relação a controlabilidade de (11), podemos citar Rocha Santos [20] e G.O. Antunes e F.D. Araruna [2] ,em que, o autor mostra a controlabilidade exata para (11) quando o controle age sobre parte da fronteira e a segunda referência nos fornece um resultado de controle simultâneo na fronteira para um sistema de duas equações.. No entanto, não se conhece nenhum resultado quando o controle atua internamente, isto é, atuando em parte do domínio.

Organizamos nosso trabalho da seguinte maneira: no Capítulo 1 fazemos uma pequena revisão dos espaços utilizados, definindo precisamente em que espaços iremos trabalhar. Também detalhamos todos os resultados que iremos utilizar nesta dissertação. Fazemos um breve comentário sobre operador de Stokes e finalizamos o capítulo expondo uma rápida dedução do modelo hiperbólico estudado.

No Capítulo 2 fazemos uma extensa discussão sobre as propriedades de controlabilidade para o sistema hiperbólico (11). Mostramos que tal sistema é nulamente controlável, por meio da dualidade entre controlabilidade e observabilidade, que é precisamente o Método da Unicidade Hilbertiana(HUM). Tais resultados são encontrados em Chaves-Silva [5].

Finalizamos o trabalho com o Capítulo 3 no qual mostramos que, a partir da controlabilidade do sistema (11) e utilizando o método da transmutação, o sistema de Stokes possui custo de controlabilidade da mesma ordem que a equação calor. Novamente, encontramos tais resultados em Chaves-Silva [5].

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo faremos a apresentação de alguns resultados e definições que servirão de suporte para os vários resultados que iremos expor neste trabalho. Apresentaremos também uma dedução do modelo hiperbólico que trataremos nos capítulos seguintes.

1.1 Espaços funcionais

Nesta parte apresentamos algumas definições acerca dos espaços que iremos tratar nos capítulos seguintes.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas e com suporte compacto em Ω.

Definição 1.1. Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em C_0^∞ quando forem satisfeitas as seguintes condições:
(i) Existe um compacto K de Ω tal que $supp(\varphi) \subset K$ e $supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$;
(ii)$D^\alpha\varphi_n \to D^\alpha\varphi$ uniformemente em K, para todo multi-índice α, onde D^α representa o operador derivada de ordem $|\alpha|$.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definido, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e chamado de espaço das funções testes sobre Ω.

Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:
(i)$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
(ii)T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.
É comum denotarmos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi\rangle$. O conjunto de

todas as distribuições sobre Ω, com as operações usuais, é um espaço vetorial, o qual representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 1.2. Dizemos que uma sequência $(T_n)_{n\in\,\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, para todo $\varphi \in\ \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.3. Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$(no sentido das distribuições) de ordem $\mid \alpha \mid$ de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \forall \varphi \in\ \mathcal{D}(\Omega).$$

Definição 1.4. Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, representamos o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, isto é, o espaço vetorial das (classes) de funções $u \in\ L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in \in L^p$, para todo multi-índice α, com $\mid \alpha \mid \leq m$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup\operatorname{ess}|D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

é um espaço de Banach (ver [4]).

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^p(0,T;X), 1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$, com valores em X, que são mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $(0,T)$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representamos o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup\operatorname{ess}\|u(t)\|_X.$$

Observação 1.1. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt,$$

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições vetoriais sobre $(0,T)$, com valores em X e denotamos por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, consideramos o espaço

$$W^{m,p}(0,T;X) = \{u \in \ L^p(0,T;X),\ u^{(j)} \in \ L^p(0,T;X), j = 1, \ldots, m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais, equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}(t)\|_{L^p(0,T;X)} \right), 1 \leq p < \infty; \\ \displaystyle\sup_{t\in(0,T)} \text{ ess } \left(\sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}(t)\|_X \right), p = \infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

$W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach (ver [1]).

O espaço

$$W_0^{m,p}(0,T;X) = \{u \in \ W^{m,p}(0,T;X); u(0) = u(T) = 0\},$$

representa o fecho de $\mathcal{D}(0,T;X)$ com a norma de $W^{m,p}(0,T;X)$.

Observação 1.2. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H^m(0,T;X)$, que munido do produto interno

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}$$

é um espaço de Hilbert Denotamos por $H_0^m(0,T;X)$ o fecho, em $H^m(0,T;X)$, de $\mathcal{D}(0,T;X)$ e por $H^{-m}(0,T;X)$ o dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$.

Definimos

$$(H_0^1(\Omega))^N = H_0^1(\Omega) \times \ldots \times H_0^1(\Omega), \text{ N-vezes},$$

com o produto escalar

$$((u,v)) = \sum_{j=1}^{n} (u_i, v_i)_{H_0^1(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Resulta que $(H_0^1(\Omega))^N$ é um espaço de Hilbert. Pela desigualdade de Poincaré, temos que

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\nabla v_i|^2_{L^2(\Omega)}, \forall v = (v_1, \ldots, v_n) \text{ em } (H_0^1(\Omega))^N, \tag{1.3}$$

define uma norma equivalente a norma induzida pelo produto interno definido em (1.2). Observe ainda que

Representamos por $(L^2(\Omega))^N$ o produto cartesiano com N fatores iguais a $L^2(\Omega)$. Definimos em $(L^2(\Omega))^N$ o produto escalar

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} u_i v_i dx,$$

cuja norma induzida é

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} v_i^2 dx.$$

A seguir, iremos introduzir os espaços usuais da teoria de fluidos incompressíveis. Precisamente, consideremos

$$\mathcal{V} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^N : \text{div } u = 0\}.$$

Agora, tomando o fecho, relativo a norma de $(H_0^1(\Omega))^N$, o espaço $\overline{\mathcal{V}}^{(H_0^1(\Omega))^N}$ é caracterizado por

$$V = \{v \in \ (H_0^1(\Omega))^N; \text{div } v = 0 \text{ em } \Omega\}.$$

Temos também que o espaço $\overline{\mathcal{V}}^{(L^2(\Omega))^N}$ pode ser caracterizado por

$$H =: \{u \in (L^2(\Omega))^N; \text{div } u = 0 \text{ sobre } \Omega, u \cdot \nu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Muniremos os espaços V e H com a norma induzida de $(H_0^1(\Omega))^N$ e $(L^2(\Omega))^N$, respectivamente. Para maiores detalhes sobre tais espaços veja, por exemplo, [16].

1.2 Principais resultados utilizados

Lema 1.1. (Imersão de Sobolev). Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ suficientemente regular.

1. Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, \frac{np}{n-mp}]$;

2. Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, +\infty)$;

3. Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Ver ([4], p. 278) $\square$

Lema 1.2. Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.

1. Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, \frac{2n}{n-em}]$;

2. Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, \infty)$;

3. Se $pm > n$ então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não-negativo tal que $k < m - (\frac{n}{p}) \leq k + 1$.

Demonstração. Ver ([4],p. 285). □

Teorema 1.1. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki). Seja E um espaço de Banach O conjunto $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1$ é compacta com respeito a topologia fraca-$*, \sigma(E', E)$.*

Demonstração. Ver ([4], p. 66). □

Lema 1.3. (Gronwall). Seja $m \in L^1(0, T; R), m \geq 0$ q.s. em $(0, T)$, $a > 0$ real constante e $g \in L^\infty(0, T), g \geq 0$ em $(0, T)$, tal que

$$\frac{1}{2} g(t)^2 \leq 2a^2 + 2 \int_0^t m(s)g(s)ds, \ \forall \ t \in (0, T).$$

Então

$$g(t) \leq 2(a + \int_0^t m(s)ds) \text{ em } [0, T].$$

Demonstração. Ver ([15], p. 19). □

Lema 1.4. (Lax-Milgram). Sejam H um espaço de Hilbert e $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \ \forall v \in H.$$

Demonstração. Ver ([4], p. 140). □

Teorema 1.2. *Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e que $\mu \in L^p(0, T; X), \mu' \in L^p(0, T; Y), 1 \leq p \leq \infty$, então $\mu \in C^o([0, T]; Y)$.*

Demonstração. Ver ([4], p. 298). □

Teorema 1.3. *(Banach-Steinhaus). Sejam E e F dois espaços de Banach Seja (T_n) uma sucessão de operadores lineares contínuos de E em F tais que para cada $x \in E, T_n x$ converge quando $n \to \infty$ a um limite que denotaremos por T_x. Então tem-se:*
(i) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$;
(ii) $T \in \mathcal{L}(E, F)$;
(iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \underline{\lim} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Demonstração. Ver ([4], pág 32). □

Teorema 1.4. *(Gauss-Green). Se* $u \in C^1(\overline{\Omega})$, *então* $\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u\nu^i d\Gamma$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Demonstração. Ver ([4], p. 316). □

Teorema 1.5. *(Fórmulas de Green).*
(i) Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, *então*

$$\int_\Omega \nabla\gamma \cdot \nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta\gamma dx + \int_\Gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} u ds, \ \forall u \in H^1(\Omega).$$

(ii) Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, *então*

$$\int_\Omega u\Delta\gamma - \gamma\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} ds.$$

Demonstração. Ver ([4], p. 316). □

Teorema 1.6. *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $\varphi \in (L^p)'$. *Então existe um único* $u \in L^q$, *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *tal que*

$$\langle\varphi, f\rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso se verifica

$$\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}.$$

Demonstração. Ver ([4], p. 140). □

Teorema 1.7. *Assuma que* w *é tal que*

$$w \in L^2(0, T; V), \ w' \in L^2(0, T; H),$$

e,

$$w'' + Aw \in L^2(0, T; H).$$

Então w *é contínua em* V, w' *é contínua em* H *e,*

$$(w'' + Aw, w') = \frac{d}{dt}\{|w'|^2 + a(w, w)\}.$$

Demonstração. Ver ([24], pp. 79-79) □

Teorema 1.8. *Sejam* H *um espaço de Banach reflexivo,* K *um subconjunto convexo fechado de* H *e* $\phi : K \to \mathbb{R}$ *uma função com as seguintes propriedades:*

1. ϕ *é convexa;*

2. *ϕ é semi-contínua inferiormente;*

3. *Se K é limitado, então ϕ é coercivo, ou seja,*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \phi(x) = \infty.$$

Então ϕ atinge um mínimo em K, ou seja, existe $x_0 \in K$ tal que

$$\phi(x_0) = \min_{x\in K} \phi(x).$$

Demonstração. Ver ([4], p. 46). □

Lema 1.5. (De Rham). Seja $L \in (H^{-1}(\Omega))^N$ tal que $L(v) = 0$ para todo $v \in V$. Então existe $p \in L^2_0(\Omega)$ tal que

$$L(v) = \int_\Omega p div\ v\ dx.$$

Demonstração. Ver ([13], p. 14). □

Teorema 1.9. *(Aubin-Lions). Sejam A, B e X espaços de Banach tais que $A \hookrightarrow X \hookrightarrow B$. Suponha que*

1. *A e B são reflexivos;*

2. *a imersão $A \hookrightarrow X$ é compacta;*

3. *a imersão $X \hookrightarrow B$ é contínua.*

Então, para quaisquer $1 < a, b < \infty$, a imersão

$$W := \{v; v \in L^a(0,T;A), v' \in L^b(0,T;B)\} \hookrightarrow L^a(0,T;X)$$

é compacta.

Demonstração. Ver ([13], p. 57). □

Teorema 1.10. *Para cada $v \in L^2(\Omega)^N$ temos a seguinte decomposição ortogonal*

$$v = \nabla q + curl\phi,$$

onde $q \in H^1(\Omega)$ é a única solução de

$$(\nabla q, \nabla\mu) = (v, \nabla\mu),\ \forall\mu \in H^1(\Omega),$$

e ϕ é a única solução de

$$(curl\phi, curl\chi) = (v - \nabla q, curl\chi),\ \forall \chi \in \ \Phi.$$

Demonstração. Ver ([9], p. 41) □

Teorema 1.11. *(Teorema de Unicidade de Holmgren). Seja P um operador diferencial com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$. Seja u solução de $Pu = 0$ em Q_1, onde Q_1 é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Suponha $u = 0$ em Q_2, onde Q^2 é um subconjunto aberto e não vazio de Q_1. Então $u = 0$ em Q_3, onde Q_3 é um subconjunto aberto de Q_1 que contém Q_2 e tal que qualquer hiperplano característico do operador P que intersecta Q_3 também intersecta Q_2.*

Demonstração. Ver ([14], p. 62). □

Teorema 1.12. *Existe uma função $p \in \ H^{-1}(0,T;L_0^2(\Omega))$ tal que o sistema hiperbólico (11) é satisfeito em $\mathcal{D}'(Q)$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\nabla p\|_{H^{-1}(0,T;L_0^2(\Omega))} \leq C(|u^1|_H^2 + \|u^0\|_V^2 + \|h1_\omega\|_{L^2(0,t;H)}^2).$$

Demonstração. Ver ([3], p. 277). □

1.3 Operador de Stokes

Definição 1.5. O operador de Stokes pode ser visto como $A : (H^2(\Omega))^N \cap V \to H$ dado por

$$Au = P(\Delta u),$$

onde $P : (L^2(\Omega))^N \to H$ é a projeção ortogonal em H e $\Delta : (H^2(\Omega))^N \cap (H_0^1(\Omega))^N \to (L^2(\Omega))^N$ é o operador de Laplace com condição de Dirichlet na fronteira.

Observação 1.3. A projeção definida acima é chamada de projeção de Laray

Observação 1.4. Notemos que, na definição do operador A acima, fazemos uso do fato de podermos decompor $L^2(\Omega)^N$ como

$$(L^2(\Omega))^N = H \oplus H^\perp, \tag{1.4}$$

onde H foi definido acima e

$$H^\perp = \{u \in \ (L^2(\Omega))^N; \exists p \in \ H^1(\Omega), u = \nabla p\}.$$

Além disso, pelo Teorema 1.10, temos que

$$u = Pu + \nabla p.$$

A decomposição (1.4) é dita Decomposição de Leray. Mais detalhes sobre essa decomposição pode ser encontrado em ([9], pág 41) e ([3], pág 251).

Vejamos que A é isomorfismo , para isso é suficiente mostrarmos que a equação

$$-\Delta u + \nabla p = f,$$

tem solução única. De fato, observemos que tal equação é equivalente a

$$-\Delta u = \widetilde{f}, \ onde \ \widetilde{f} = f - \nabla p.$$

Fazendo a dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V',V}$ da última equação com $u \in V$, obtemos

$$\langle -\Delta u, u \rangle = \langle f, u \rangle.$$

Pelo Teorema de Green, temos

$$\langle -\Delta u, u \rangle = \langle \nabla u, \nabla u \rangle = \|u\|_V^2.$$

Defina a forma bilinear $a : V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$a(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle.$$

A forma bilinear a é claramente simétrica. Além disso, a é contínua e coerciva pois,

$$\begin{aligned} |a(u,v)|^2 = |\langle \nabla u, \nabla v \rangle|^2 &\leq |\nabla u|^2 |\nabla v|^2 \\ &\leq C\|u\|_V^2 \|v\|_V^2. \end{aligned}$$

e,

$$|a(u, u)| = \langle u, u \rangle = |u|_V^2.$$

Como a é simétrica, contínua e coerciva dado $f \in V'$, existe uma única $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in V.$$

Agora, como $a(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle -\Delta u, v \rangle$, concluimos que

$$\langle -\Delta u, v \rangle = \langle f, v \rangle.$$

Portanto, a equação tem solução única.

1.4 Dedução do modelo hiperbólico com termo de resistência

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um sólido constituído de um material elástico. Representamos por $u(x,t)$ as pequenas deformações ou deslocamentos de Ω no tempo t.

Denotamos por σ e ε os tensores de tensões e de deformações ou deslocamentos, respectivamente, de Ω.

Seja $f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))$ a densidade de forças volumétricas atuando em Ω. Tem-se ainda que a variação da tensão σ gera uma força dada por $\frac{\partial \sigma_{ij}(x,t)}{\partial x_j}$. Portanto, pela segunda lei de Newton, temos que

$$f_i(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}\Big] - \frac{\partial \sigma_{ij}(x,t)}{\partial x_j}, i = 1,2,3. \tag{1.5}$$

Como existe uma força agindo sobre Ω, a terceira lei de Newton garante a existência de uma força de reação do material em cada ponto x de Ω. Denotamos tal força por $p(x,t)$.

Como é feito em elasticidade linear, supõe-se que a tensão seja do tipo

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \epsilon_{ij}, \tag{1.6}$$

onde $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)$ é o tensor de deformações e p é o termo de resistência.

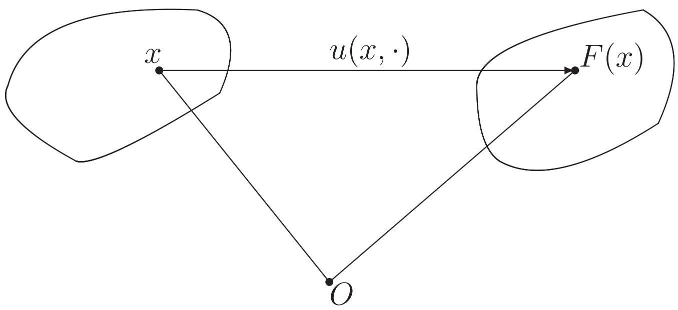
Substituindo (1.6) em (1.5) temos que

$$f_i(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}\Big] - \frac{\partial}{\partial x_j}(-p\delta_{ij} + \epsilon_{ij}) \tag{1.7}$$

A deformação $u(x,\cdot)$ pode ser representada por

$$u(x,\cdot) = F(x) - x, \tag{1.8}$$

onde $F(x)$ é a posição do ponto x no corpo deformado ou deslocado, ver figura 1 abaixo.



Suponhamos que Ω seja incompressível, isto é, Ω deforma-se mas seu volume permanece invariante. Matematicamente, esta hipótese significa que $|det\nabla F(x)| = 1$.

Aplicando a hipótese de incompressibilidade em (1.8) obtemos

$$|det(I + \nabla u)| = 1, \tag{1.9}$$

onde I é a matriz identidade.

Demonstra-se que, para pequenas deformações,

$$|det(I + \nabla u)| = 1 + div\ u. \tag{1.10}$$

Comparando (1.9) e (1.10) concluímos que

$$\text{div}\ \ u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{1.11}$$

Agora, usando as igualdades (1.7) e (1.11) concluímos que

$$f_i = \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big] + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \Delta u_i,\ i = 1, 2, 3.$$

Escrevendo na forma vetorial, obtemos que

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \nabla p = f & \text{em} \quad Q; \\ \text{div}\ \ u = 0 & \text{em} \quad Q. \end{cases} \tag{1.12}$$

Capítulo 2

Sistema hiperbólico com termo de pressão

Neste capítulo desenvolvemos a prova para um resultado de controlabilidade nula para o sistema hiperbólico

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \nabla p = h1_{\omega} & \text{em} \quad Q, \\ \text{div} \;\; u = 0 & \text{em} \quad Q, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ u(0) = u_0, \;\; u_t(0) = u_1 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Para o decorrer do trabalho assumimos que Ω é estrelado com relação a origem, isto é, existe $\gamma > 0$ tal que

$$x \cdot \nu(x) \geq \gamma > 0 \text{ em } \partial\Omega, \;\text{ para todo } x \in \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Dado um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ dividimos a fronteira $\partial\Omega$ em duas partes

$$\partial\Omega_0 = \{x \in \;\Omega : m(x) \cdot \nu(x) > 0\} \text{ e } \partial\Omega_* = \partial \setminus \partial\Omega_0,$$

onde $m(x) = x - x_0$. Também definimos

$$R(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} |m(x)|.$$

Nossa região de controle ω será um subconjunto não vazio de Ω satisfazendo a seguinte propriedade

$$\text{existe } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N, \mathcal{O} \text{ é uma vizinhança de } \partial\Omega \text{ e } \omega = \Omega \cap \mathcal{O}. \tag{2.3}$$

Dado $u^0 \in V$ e $u^1 \in H$, queremos encontrar h tal que a solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \nabla p = h 1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ \text{div } u = 0 & \text{em} \quad Q, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

satisfaz

$$u(T) = u_t(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Modelos como (2.4) são simples modelos de dinâmica elástica para materiais incompressíveis. Eles também aparecem em problemas termo-elásticos acoplados onde um dos parâmetros de acoplamento (relacionados as propriedades de compressibilidade) tende ao infinito.

2.1 Existência e unicidade para o sistema hiperbólico

No que diz respeito a existência e unicidade para (2.4) temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Seja* $(u^0, u^1, h) \in V \times H \times L^1(0, T; H)$. *Então existe uma única solução fraca de* (2.4) *tal que*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T; V), \\ u_t \in L^\infty(0, T; H), \\ u_{tt} + \Delta u = h - \nabla p, \ \text{em } \mathcal{D}'(0, T; \mathcal{D}'(\Omega)^3), \\ u(0) = u_0, \ u_t(0) = u_1 \ \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Além disso, a solução u satisfaz

$$\frac{1}{2}|u_t(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 = \frac{1}{2}|u^1|^2 + \frac{1}{2}\|u^0\|^2 + \int_0^t (h(s), u_t(s))_H ds, \ \forall \ t \in [0, T],$$

e a aplicação linear

$$\begin{array}{ccc} V \times H \times L^1(0, T; H) & \longrightarrow & C([0, T], V) \cap C^1([0, T], H) \\ (u^0, u^1, f) & \longmapsto & u \end{array}$$

é contínua.

Antes de iniciarmos a prova do Teorema 2.1, provaremos o seguinte lema.

Lema 2.1. Dados u_0, u_1, f nas condições do Teorema 2.1, existe uma única u satisfazendo

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;V), \\ u_t \in L^\infty(0,T;H), \\ (u_{tt}(t),v) + ((u((t),v)) = (f(t),v), \forall v \in \ V \text{ em } \mathcal{D}'(0,T), \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Demonstração. Usaremos o método de Faedo-Galerkin. Seja $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma base hilbertiana de V. Consideremos $V_m = [w_1, ..., w_m]$ o subespaço de V gerado pelos m primeiros vetores de $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$. O problema aproximado com relação a (2.6) consiste em determinar $u_m(t) \in \ V_m$ satisfazendo

$$\begin{cases} (u_{mtt}(t),v) + ((u_m(t),v)) = (f(t),v), \ \forall \ v \in \ V_m, \\ u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \ \text{ em } V, \\ u_{mt}(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 \ \text{ em } H. \end{cases} \tag{2.7}$$

Pelo Teorema de Caratheodory, (2.7) possui solução sobre um intervalo $[0,t_m]$ com $t_m < T$. Tal solução poderá ser estendida a todo o intervalo $[0,T]$ como consequência das estimativas que serão obtidas a seguir.

Estimativas. Fazendo $v = u_{mt}(t)$ em $(2.7)_1$ tem-se que

$$(u_{mtt}(t), u_{mt}(t)) + ((u_m(t), u_{mt}(t))) = (f(t), u_{mt}(t)).$$

Que pode ser escrita como

$$\frac{1d}{2dt}|u_{mt}(t)|^2 + \frac{1d}{2dt}\|u_m(t)\|^2 = (f(t), u_{mt}(t)) \tag{2.8}$$

Integrando (2.8) de 0 a $t \le t_m$ resulta que

$$\frac{1}{2}|u_{mt}(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 = \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2 + \int_0^t (f(s), u_{mt}(s))ds. \tag{2.9}$$

Usando a desigualdade de Young em (2.9) temos que

$$\frac{1}{2}|u_{mt}(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 \le \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2 + \int_0^T |f(s)|^2 ds + \int_0^t |u_{mt}(s)|^2 ds. \tag{2.10}$$

Agora, usando o fato de f estar em $L^1(0,T;H)$ e, levando em consideração, $(2.7)_2$ e $(2.7)_3$, obtemos a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2 + \int_0^T |f(s)|ds \le C. \tag{2.11}$$

Por (2.11) concluímos que,

$$\frac{1}{2}|u_{mt}(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 \leq C + \int_0^t |u_m|^2(s)ds. \tag{2.12}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall a (2.12), obtemos que

$$\frac{1}{2}|u_{mt}(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 \leq C, \tag{2.13}$$

onde C é uma constante que independe de t e m. Assim, podemos prolongar a solução aproximada $u_m(t)$ a todo o intervalo $[0,T]$, que é uma das consequências do teorema de Caratheodory. Para mais detalhes sobre as consequências do teorema de Caratheodory veja [19]. Dessa forma, temos por (2.13) que

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V), \tag{2.14}$$

e

$$(u_{mt}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.15}$$

Por (2.14), (2.15) e o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki segue que existe uma subsequência de (u_m), ainda denotada por (u_m), tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em } L^\infty(0,T;V) \tag{2.16}$$

e

$$u_{mt} \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.17}$$

Passagem ao limite. Consideramos a equação

$$u_{mtt} - \Delta u_m = f. \tag{2.18}$$

Multiplicando (2.18) por $v \in V_m$ temos que

$$(u_{mtt}(t), v) + ((u_m(t), v)) = (f(t), v) \tag{2.19}$$

Multiplicando (2.19) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$-\int_0^T (u_{mt}(t), v)\theta^t(t)dt + \int_0^T ((u_m(t), v))\theta(t) = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt, \forall v \in \ V_m. \tag{2.20}$$

Passando o limite em (2.20) concluímos que

$$-\int_0^T (u_t(t), v)\theta_t(t)dt + \int_0^T ((u(t), v))\theta(t) = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt,\ \forall v \in V, \tag{2.21}$$

ou ainda

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((u(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt,\ \forall v \in V.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(u_t(t), v) + ((u(t), v)) = (f(t), v),\ \forall v \in\ V, \text{em } \mathcal{D}'(0, T).$$

Condições iniciais.

Inicialmente iremos localizar a segunda derivada de u. Com efeito, observemos que o operador $-\triangle$ definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), ((\cdot, \cdot))\}$ satisfaz a condição

$$(-\triangle u, v) = ((u, v)), \forall u \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

uma vez que Ω é um aberto limitado com fronteira bem regular. Mais ainda, o operador $-\triangle$ admite uma única extensão contínua, em verdade, uma isometria de $H_0^1(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)$. Dessa forma, $-\triangle : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é uma bijeção isométrica, ou seja,

$$\|\triangle u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Mais além, tal extensão verifica a identidade

$$\langle -\triangle u, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = ((u, v)), \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.22}$$

Sabendo que

$$-\int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt,$$

podemos concluir, usando (2.22), que

$$-\int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)dt = \int_0^T \langle \triangle u(t), v\rangle\theta(t)dt + \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt,$$

ou ainda

$$\Big(-\int_0^T u'(t)\theta'(t)dt, v\Big) = \Big\langle \int_0^T \triangle u(t)\theta(t)dt, v\Big\rangle + \Big(\int_0^T f(t)\theta(t)dt, v\Big),$$

para todo $v \in V$ e para todo $\theta \in \mathcal{V}$. Identificando o H com seu dual, via teorema de

Riez, da última identidade decorre que

$$\Big\langle -\int_0^T (u'(t)\theta'(t)dt, v\Big\rangle = \Big\langle \int_0^T \triangle u(t)\theta(t)dt, v\Big\rangle + \Big\langle \int_0^T f(t)\theta(t)dt, v\Big\rangle., \tag{2.23}$$

Definindo

$$g(t) = \triangle u(t) + f(t),$$

segue de (2.23) que

$$-\int_0^T u'(t)\theta'(t)dt = \int_0^T g(t)\theta(t)dt \text{ em } V'.$$

Além disso, como $f \in L^1(0,T;V')$, segue de (2.22) que

$$\int_0^T \|\triangle u(t)\|_{V'}dt = \int_0^T \|u(t)\|_V dt < +\infty,$$

o que implica $g \in L^1(0,T;V')$. Definamos

$$v(t) = u'(t) - \int_0^T g(s)ds \in V'.$$

Como $v \in L^1(0,T;V')$ temos que v' define uma distribuição vetorial e, além disso,

$$\Big\langle v', \theta\Big\rangle = -\Big\langle v, \theta'\Big\rangle = -\Big\langle u', \theta'\Big\rangle + \Big\langle \int_0^t g(s)ds, \theta'\Big\rangle.$$

Mas,

$$\Big\langle \int_0^T g(s)ds, \theta'\Big\rangle = \int_0^T \int_0^t g(s)ds\theta'(t)dt,$$

considerando $h(t) = \int_0^t g(s)ds$, obtemos que

$$\Big\langle \int_0^T g(s)ds, \theta'\Big\rangle = h(t)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T g(t)\theta(t)dt = -\int_0^T g(t)\theta(t)dt,$$

o que implica

$$\Big\langle v', \theta\Big\rangle = -\Big\langle u', \theta'\Big\rangle - \int_0^T g(t)\theta(t)dt. \tag{2.24}$$

De (2.23) e (2.24) concluímos que

$$\Big\langle v', \theta\Big\rangle = 0, \forall \theta \in \mathcal{V}$$

e, consequentemente, $v' = 0$. Logo, $v(t) = \xi_x =$ constante com respeito a t. Assim,

$$u'(t) = \xi_x + \int_0^T g(s)ds \Rightarrow u''(t) = g(t),$$

o que nos leva a

$$u'' \in L^1(0,T;V').$$

Segue, deste último fato e das hipóteses sobre u e u', que

$$u \in C([0,T];H) \text{ e } u' \in C([0,T];V').$$

Dessa forma, faz sentido falarmos em $u(t)$ e $u'(t)$ qualquer que seja $t \in [0,T]$.

Provaremos que:

1. $u(0) = u_0$. Com efeito, sabemos que

$$u_{\nu t} \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0,T;H).$$

Sejam $\theta \in C^1([0,T])$ e $v \in \ H$. Então identificando H com seu dual, segue da convergência acima que,

$$\int_0^T (u_{\nu t}(t), v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u_t(t), v)\theta(t)dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_\nu(t), v)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), v)\theta(t)dt,$$

ou ainda, por integração por partes,

$$(u_\nu(t), v)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u_\nu(t), v)\theta_t(t)dt \to (u(t), v)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u(t), v)\theta_t(t)dt.$$

Tomando θ de modo que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$, e, observando que

$$\int_0^T (u_\nu(t), v)\theta_t(t)dt \to \int_0^T (u(t), v)\theta_t(t)dt.$$

Concluímos que

$$(u_\nu(0), v) \to (u(0), v), \ \forall v \in \ H.$$

Logo,

$$u_\nu(0) = u_{0\nu} \rightharpoonup u(0) \quad \text{em} \quad H.$$

Por outro lado, $u_{0\nu} \to u_0$ forte em V e $V \hookrightarrow H$. Pela unicidade do limite fraco em $L^2(\Omega)$ concluímos que $u(0) = u_0$.

2. $u_t(0) = u_1$. Com efeito, seja $\theta \in \ C^1([0,T])^N$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Retornando ao problema aproximado, podemos escrever

$$\int_0^T (u_{\nu tt}(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_\nu, w_j))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), w_j)\theta(t)dt.$$

Integrando por partes, encontramos que

$$(u_{\nu t}(t), w_j)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u_{\nu t}(t), w_j)\theta_t(t)dt + \int_0^T ((u_\nu(t), w_j))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), w_j)\theta(t)dt,$$

ou ainda, usando as características de θ,

$$-(u_{\nu t}(0), w_j) - \int_0^T (u_{\nu t}(t), w_j)\theta_t(t)dt + \int_0^T ((u_\nu(t), w_j))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), w_j)\theta(t)dt.$$

Passando o limite na identidade acima, obtemos

$$-(u_1, w_j) - \int_0^T (u_t(t), w_j)\theta_t(t)dt + \int_0^T ((u(t), w_j))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), w_j)\theta(t)dt.$$

Integrando a equação acima por partes, obtemos

$$-(u_1, w_j) - (u_t(t), w_j)\theta|_0^T + \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t, w_j)\theta dt + \int_0^T ((u, w_j))\theta dt = \int_0^T (f, w_j)\theta dt. \tag{2.25}$$

Usando que u é solução fraca para problema e, por $(2.7)_3$ e (2.25), concluímos que,

$$(u_1, w_j) = (u_t(0), w_j), \forall j \in \mathbb{N}.$$

Mas, observando que $\overline{[w_j]}^V_{j\in\mathbb{N}} = V, \quad \overline{V}^H = H$ e $V \hookrightarrow H$, obtemos que

$$(u_1, v) = (u'(0), v), \ \forall v \in \ H,$$

mostrando o que queríamos.

Unicidade. Para provar a unicidade, consideremos u e $\widehat{u}$ duas soluções nas condições do Lema 2.1. Assim, considerando $w = u - \widehat{u}$, temos que w satisfaz

$$
\begin{cases}
w \in L^{\infty}(0,T;V); \\
w_t \in L^{\infty}(0,T;H); \\
(w_{tt}, v) + ((w,v)) = 0, \forall v \in \ V, \text{em } \mathcal{D}'(0,T); \\
w(0) = 0, w_t(0) = 0 \text{ em } \Omega.
\end{cases}
\tag{2.26}
$$

Segue por (2.26) que

$$w_{tt} - \Delta w = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;\mathcal{D}'(\Omega)^3).$$

Agora, como $w \in L^{\infty}(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;V), w_t \in L^{\infty}(0,T;H) \hookrightarrow L^2(0,T;H)$, então

$$w_{tt} - \Delta w = 0 \in L^2(0,T;H).$$

Assim, pelo Teorema 1.7, obtêm-se

$$(w_{tt} - \Delta w, w_t(t)) = \frac{1d}{2dt}(|w_t(t)|^2 + \|w(t)\|^2) + \frac{1}{2}(w_t(t), w_t(t)).$$

Observando que o lado esquerdo da última igualdade é zero, obtemos que

$$\frac{1d}{2dt}(|w_t(t)|^2 + \|w(t)\|^2) = -\frac{1}{2}(w_t(t), w_t(t)). \tag{2.27}$$

Integrando (2.27) de 0 a $t < T$, concluímos que

$$\frac{1}{2}(|w_t(t)|^2 + \|w(t)\|^2) = -\frac{1}{2}\int_0^t (w_t(s), w_t(s))ds.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}|w_t(t)|^2 + \frac{1}{2}\|w(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^t |w_t(s)|^2 ds.$$

Pelo Lema de Gronwall, resulta que

$$|w_t(t)|^2 + \|w(t)\|^2 = 0,$$

de onde concluímos que $w = 0$, provando assim a unicidade.

□

Agora faremos a prova do Teorema 2.1

Demonstração do Teorema 2.1. Observemos que, para provarmos tal teorema, é suficiente provar que u satisfaz (2.6), se e somente se, u satisfaz (2.5). Provemos essa equivalência. De fato, consideremos o funcional linear $L : V \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(v) = (u_{tt}(t) - \Delta u(t) - f(t), v),$$

onde u é a solução dada pelo Lema 2.1. Observemos também que, uma vez que $u \in L^\infty(0,T;V)$, $f \in L^2(0,T;H)$ então $\Delta u \in L^\infty(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$, já que $V \hookrightarrow (H_0^1(\Omega))^3$. Assim, $L \in \ L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$. De $(2.6)_3$, segue que

$$L(t)(v) = 0, \forall v \in V, \text{no sentido de } \mathcal{D}'(0,T).$$

Segue do Lema 1.5, que

$$L(t)v = \int_\Omega p.div\ v\ dx, \forall v \in V.$$

Em particular, para todo $\varphi \in \ \nu$, tem-se que

$$\langle u_{tt} - \Delta u - f, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^3,(\mathcal{D}(\Omega))^3)} = \langle -\nabla p, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^3,(\mathcal{D}(\Omega))^3)}.$$

Provando que,

$$u_{tt} - \Delta u = f - \nabla p \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;(\mathcal{D}(\Omega))^3).$$

Reciprocamente, u satisfaz (2.5), então multiplicando $(2.7)_3$ por $\varphi \in \ \nu$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\frac{d}{dt}(u_t(t), \varphi) + ((u(t), \varphi)) = (f(t), \varphi) - \langle \nabla p, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^3,(\mathcal{D}(\Omega))^3}.$$

Notemos que,

$$\langle \nabla p, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial p}{\partial x_i}, \varphi_i \rangle = \langle -p, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\langle p, div\ \varphi \rangle,$$

e, como $\varphi \in \nu$, temos que $\langle \nabla p, \varphi \rangle = 0$. Sabendo que ν é denso em V, então temos

$$\frac{d}{dt}(u_t(t), v) + ((u(t), v)) = (f(t), v), \forall v \in \ V, \text{em } \mathcal{D}'(0,T).$$

Isto conclui a demonstração do teorema. □

2.2 Controlabilidade nula para o sistema hiperbólico

Nesta seção estaremos interessados em provar que o sistema (2.1) é nulo controlável. De fato, mostraremos que a controlabilidade de (2.1) é equivalente a observabilidade para o sistema adjunto

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi + \nabla p = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \text{div } \phi = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \phi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \phi(0) = \phi_0, \phi_t(0) = \phi_1 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.28}$$

onde $\phi_0 \in H$ e $\phi_1 \in V'$.

Em outras palavras, provar a controlabilidade para (2.1) é suficiente provar a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$|\phi_0|^2 + \|\phi_1\|_{V'}^2 \leq C \int\int_{\omega\times(0,T)} |\phi|^2 dxdt, \tag{2.29}$$

para toda solução de (2.28). Para provarmos tal resultado, é conveniente escrever o sistema (11) de maneira abstrata. Para isso, utilizamos o operador de Stokes A definido em (1.5).

Assim, o sistema (11) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_{tt} + Au = h1_\omega, \\ u(0) = u^0, u_t(0) = u^1, \end{cases} \tag{2.30}$$

pois, para $w \in V$, temos que se

$$\langle u_{tt}, w\rangle_{V',V} + \langle Au, w\rangle_{V',V} - \langle h, w\rangle_{V',V} = 0,$$

então, usando que $\langle Au, w\rangle_{V',V} = \langle \nabla u, \nabla w\rangle_{V',V}$, que, por sua vez, é igual a $-\langle \Delta u, w\rangle_{V',V}$. Assim,

$$\langle u_{tt}, w\rangle_{V',V} - \langle \Delta u, w\rangle_{V',V} - \langle h, w\rangle_{V',V} = 0,$$

ou seja,

$$\langle u_{tt} - \Delta u - h, w\rangle_{V',V} = 0, \forall w \in V.$$

Segue do Lema 1.5 que existe $p \in L_0^2(\Omega)$ tal que

$$u_{tt} - \Delta u - h = \nabla p.$$

Dessa forma, a prova da controlabilidade para o sistema (11) é equivalente a observabilidade para o sistema adjunto

$$\begin{cases} \phi_{tt} = A\phi, \\ \phi(0) = \phi^0, \phi_t(0) = \phi^1. \end{cases} \tag{2.31}$$

Como o operador de Stokes A é um isomorfismo de V em V', dados $(\phi^0, \phi^1) \in H \times V'$, definimos a solução de (2.31) como

$$\phi = \psi_t,$$

onde ψ é a única solução de

$$\begin{cases} \psi_{tt} = A\psi, \\ \psi(0) = A^{-1}\phi^1, \psi_t(0) = \phi^0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Como no caso da equação da onda, para mostrarmos uma desigualdade de observabilidade com observação interna, para o sistema (2.28), primeiro mostraremos uma desigualdade de observabilidade na fronteira para tal sistema. Antes de fazermos o resultado principal apresentaremos um lema auxiliar.

Lema 2.2. Seja $(q_k)_{1\leq k\leq N}$ um campo vetorial em $C^1(\Omega)^N$, então para cada solução ϕ (2.28), a seguinte identidade é válida

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int\int_\Sigma q_k(x).\nu_k(x)(\frac{\partial\phi}{\partial\nu})^2 d\Sigma = (\phi_t(t), q(x).\nabla\phi(t)) + \int\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi^i}{\partial x_k}\frac{\partial\phi^i}{\partial x_j}dxdt+ \\ +\frac{1}{2}\int\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}(|\phi_t|^2 - |\nabla\phi^2)dxdt + \int\int_Q \frac{\partial p}{\partial x_i}.q_k.\frac{\partial\phi^i}{\partial x_k}dxdt \\ +\int\int_Q h^i.q_k.\frac{\partial\phi^i}{\partial x_k}dxdt. \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração para este resultado segue os mesmos passos que a demonstração no caso da equação da onda, tais detalhes podem ser vistos em Medeiros [15]. □

A seguir demonstraremos o teorema que nos fornece a observabilidade interna.

Teorema 2.2. *Consideremos $T > 2R(x^0)$ então, para cada solução do sistema* (2.30) *com dado inicial $(\phi^0, \phi^1) \in V \times H$, a seguinte estimativa vale*

$$|\phi^1|_H^2 + \|\phi^0\|_V^2 \leq \frac{R(x^0)}{(T - 2R(x^0))}\int\int_{\Sigma^0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma. \tag{2.33}$$

Demonstração. Segue do Lema (2.2) que

$$\frac{1}{2}\int\int_{\Sigma} m\cdot\nu\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right) d\Sigma = X+\frac{1}{2}\int_Q\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt+\int_Q\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}dxdt. \tag{2.34}$$

Tomando $q_k = x_k - x_k^0 = m_k(x), 1 \leq k \leq n$, obtemos que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial x_k} = n \text{ e } \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} = |\nabla\phi|^2,$$

o qual substituindo em (2.34) obtemos

$$\frac{1}{2}\int\int_{\Sigma} q_k\cdot\nu_k(\frac{\partial\phi}{\partial\nu})^2 d\Sigma = X+\frac{n}{2}\int_Q(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt+\int_Q|\nabla\phi|^2dxdt.$$

Em $\Sigma(x^0)$ temos $0 \leq \sum_{k=1}^{n} m_k\nu_k \leq (\sum_{k=1}^{n} m_k^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}\nu_k^2)^{\frac{1}{2}} = \|m(x)\|_{\mathbb{R}^n} = R(x^0)$. Portanto,

$$\int_{\Sigma}\sum_{k=1}^{n} m_k\nu_k(\frac{\partial\phi}{\partial\nu})^2 d\Gamma dt \leq \int_{\Sigma(x^0)}\sum_{k=1}^{n} m_k\nu_k(\frac{\partial\phi}{\partial\nu})^2 d\Gamma dt \leq R(x^0)\int_{\Sigma(x^0)}(\frac{\partial\phi}{\partial\nu})^2 d\Gamma dt.$$

Logo,

$$X+\frac{n}{2}\int_Q(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt+\int_Q|\nabla\phi|^2dxdt \leq R(x^0)\int_{\Sigma(x^0)}(\frac{\partial\phi}{\partial\nu})^2 d\Gamma dt. \tag{2.35}$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
X+\frac{n}{2}\int_Q(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt+\int_Q|\nabla\phi|^2dxdt &= X+\frac{n}{2}\int_Q(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt \\
-\frac{1}{2}\int_Q(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt &+ \frac{1}{2}\int_Q(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt+\int_Q|\nabla\phi|^2dxdt \\
&= X+\frac{n-1}{2}\int_Q(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt+\frac{1}{2}\int_Q(|\phi_t|^2+|\nabla\phi|^2)dxdt \\
&= X+\frac{n-1}{2}\int_Q(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega(|\phi_t|^2+\|\phi\|^2)dxdt \\
&= X+\frac{n-1}{2}\int_Q(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt++\int_0^T E(t)dt \\
&= X+\frac{n-1}{2}\int_Q(|\phi_t|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt+TE(0),
\end{aligned}$$

onde $E(t) = \dfrac{1}{2}(|\phi_t|^2 + \|\phi\|^2)$. Considerando

$$Y = \int_Q (|\phi_t|^2 - |\nabla\phi|^2)dxdt,$$

e, além disso, observando que a energia é conservativa, isto é, $E(0) = E(t)$, para todo $t \in [0, T]$, concluímos por (2.35) que

$$X + \frac{n-1}{2}Y + TE(0) \leq R(x^0)\int_{\Sigma(x^0)} (\frac{\partial\phi}{\partial\nu})^2 d\Gamma dt. \tag{2.36}$$

Agora, observemos que, ao multiplicarmos a equação $\phi_{tt} - \Delta u + \nabla p = 0$ por ϕ, obtemos que

$$\phi_{tt}\cdot\phi - \Delta\phi\cdot\phi + \nabla p\cdot\phi = 0.$$

Daí, integrando, obtemos

$$\int_Q \phi_{tt}\cdot\phi dxdt - \int_Q \Delta\phi\cdot\phi dxdt + \int_Q \nabla p\cdot\phi dxdt = 0. \tag{2.37}$$

Agora vamos fazer a análise das integrais em (2.37):

- Para a primeira integral temos,

$$\begin{aligned}\int_Q \phi_{tt}\cdot\phi dxdt &= \int_\Omega\int_0^T \phi_{tt}\cdot\phi dxdt \\ &= \int_\Omega [\phi_t\cdot\phi dx\Big|_0^T - \int_0^T \phi_t\cdot\phi_t dt]dx \\ &= -\int_\Omega\int_0^T \phi_t^2 dtdx + \int_\Omega (\phi_t\cdot\phi)\Big|_0^T dx\end{aligned}$$

- Para a segunda integral,

$$\begin{aligned}-\int_Q \Delta\phi\cdot\phi &= \int_Q |\nabla\phi|^2 - \int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\cdot\phi \\ &= \int_Q |\nabla\phi|^2,\end{aligned}$$

  pois $\phi = 0$ em Γ.

- Para a última integral,

$$\begin{aligned}
\int_Q \nabla p \cdot \phi dxdt &= \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \phi^i dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^n p \cdot \frac{\partial \phi^i}{\partial x_i} dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega p \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial x_i} \right) dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega p \cdot div\phi = 0.
\end{aligned}$$

Notemos que, usando as igualdades obtidas acima,

$$\begin{aligned}
X + \frac{n-1}{2} Y &= \left(\phi_t, \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \Big|_0^T + \frac{n-1}{2} \int_Q (|\phi_t|^2 - |\nabla \phi|^2) dxdt \\
&= \int_\Omega \phi_t \cdot \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} |_0^T + \frac{n-1}{2} \int_\Omega \phi_t \cdot \phi \Big|_0^T \\
&= \int_\Omega \phi_t \left[\sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \right] dx \Big|_0^T
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Analisemos a integral do lado direito de (2.38). Notemos que,

$$\int_\Omega \left(\phi_t \cdot (m \cdot \nabla \phi + \frac{n-1}{2} \phi) \right) dx \leq \frac{\mu}{2} \int_\Omega \phi_t^2 dx + \frac{1}{2\mu} \int_\Omega \left(m \cdot \nabla \phi + \frac{n-1}{2} \phi \right)^2 dx. \tag{2.39}$$

onde $\mu > 0$ é um número a ser escolhido posteriormente. Observemos que,

$$\int_\Omega \left(m \cdot \nabla \phi + \frac{n-1}{2} \phi \right)^2 dx = \int_\Omega (m \cdot \nabla \phi)^2 dx + \int_\Omega \frac{(n-1)^2}{4} \phi^2 dx + (n-1) \int_\Omega (m \cdot \nabla \phi) \cdot \phi dx. \tag{2.40}$$

Perceba que,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (m \cdot \nabla \phi) \cdot \phi &= \int_\Omega \sum_{k=1}^n m_k \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \cdot \phi \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{k=1}^n m_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} (\phi)^2 dx \\
&= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} (m_k \cdot \phi^2) dx - \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_k}{\partial x_k} \phi^2 dx
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma} \nu_k m_k \phi^2 d\Gamma - \frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial m_k}{\partial x_k}\phi^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial m_k}{\partial x_k}\cdot \phi^2 dx,
\end{aligned}
$$

onde fizemos uso do Lema de Gauss 1.4 e do fato de $\phi = 0$ em Γ. Substituindo (2.41) em (2.40) obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left(m\cdot\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right)^2 dx &= \int_{\Omega}(m\cdot\nabla\phi)^2 + \int_{\Omega}\left(\frac{(n-1)^2}{4} - \frac{n(n-1)}{2}\right)\phi^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega}(m\cdot\nabla\phi)^2 dx,
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

pois $\dfrac{(n-1)^2}{4} - \dfrac{n(n-1)}{2} \leq 0$, para $n \geq 1$. Sendo

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}(m\cdot\nabla\phi)^2 dx &= \int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega}\left((\sum_{k=1}^{n} m_k^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{\partial\phi^2}{\partial x_k})^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx \\
&\leq \|m(x)\|^2_{L^2(0,T)}\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2 dx \\
&= R(x^0)\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Segue por (2.42) que

$$
\int_{\Omega}\left(m\cdot\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right)^2 dx \leq R(x^0)\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2 dx. \tag{2.43}
$$

Substituindo (2.42) em (2.39), tomando $\mu = R(x^0)$, obtemos a desigualdade

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}\phi_t\left(m\cdot\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right) dx &\leq \frac{R(x^0)}{2}\int_{\Omega}\phi_t^2 + \frac{R(x^0)^2}{2R(x^0)}\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2 dx \\
&\leq R(x^0)E(0),
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

o qual, substituindo em (2.38) e usando (2.44), nos fornece

$$
|X + \frac{n-1}{2}Y| \leq 2R(x^0)E(0) = T(x^0)E(0).
$$

Segue que,

$$
-T(x^0)E(0) \leq X + \frac{n-1}{2}Y \leq T(x^0)E(0).
$$

Daí,

$$-T(x^0)E(0) + TE(0) \leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}^2 \right) d\Gamma dt,$$

que é exatamente o que queríamos $\square$

Agora, provaremos um resultado muito interessante, que nos diz que a prova de (2.29) pode ser obtida se conseguirmos provar um tipo especial de desigualdade de observabilidade para o sistema (2.28)

Teorema 2.3. *Assuma que existe uma constante* $C > 0$ *tal que, para cada* $(\phi^0, \phi^1) \in V \times H$ *a solução de* (2.30) *satisfaz*

$$\|\phi_0\|^2 + |\phi_1|^2 \leq \int\int_{\omega \times (0,T)} |\phi_t|^2 dxdt, \tag{2.45}$$

então a desigualdade (2.29) *vale para toda solução de* (2.30) *com dado inicial* $(\phi^0, \phi^1) \in H \times V'$.

Demonstração. Dado $(\phi^0, \phi^1) \in V \times H$, consideramos (2.32), ou seja,

$$\begin{cases} \psi_{tt} = A\psi, \\ \psi(0) = A^{-1}\phi^1, \ \psi_t(0) = \phi^0. \end{cases} \tag{2.46}$$

Agora, se (2.45) é verdade, usando uma desigualdade de energia para (2.32), obtemos que

$$|\psi_t(t)|_H + \|\psi(t)\|_V^2 \leq |\psi_t(0)|_H^2 + \|\psi(0)\|_V^2,$$

o que implica que

$$\|A^{-1}\phi^1\|_V^2 + |\phi^0|_H^2 \leq C \int\int_{\omega \times (0,T)} |\psi_t|^2 dxdt = \ C \int\int_{\omega \times (0,T)} |\phi|^2 dxdt.$$

Para concluir devemos mostrar que $\|A^{-1}\phi^1\|_V^2 = \|\phi^1\|_{V'}^2$. Definamos em V' um produto interno. Sabemos que operador de Stokes A é um isomorfismo, para mais detalhes veja (1.4), entre V e V'. Seja $G = A^{-1}$. Então, para todo par $u, v \in \ V$ definimos

$$(u, v)_{V'} = \langle u, Gv \rangle_{V',V} = ((Gu, Gv))_{V,V},$$

que é um produto interno em V' que induz a seguinte norma

$$\|v\|_{V'} = ((Gv, Gv)).$$

Daí,

$$\|\phi^1\|_{V'}^2 = ((G\phi^1, G\phi^1)) = ((\xi, \xi)) = \|A^{-1}\phi^1\|_V^2,$$

que conclui a demonstração. $\square$

2.2.1 Uma primeira desigualdade de observabilidade

A seguir, nosso objetivo será mostrar que a desigualdade (2.29) é válida. Para isso, inicialmente demonstraremos uma variação da desigualdade (2.29). Temos o seguinte resultado.

Teorema 2.4. *Suponhamos que* ω *satisfaz* (2.3) *e seja* $T > 2R(x^0)$. *Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que, para cada* $(\phi^0, \phi^1) \in V \times H$, *a solução fraca de* (2.31) *satisfaz*

$$|\phi^1|^2 + \|\phi^0\|^2 \leq C \int\int_{\omega\times(0,T)} (|\phi_t|^2 + |\phi|^2)dxdt. \tag{2.47}$$

Antes de provarmos este teorema, demonstraremos um lema auxiliar.

Lema 2.3. Seja $m \in \ C^1(\overline{\Omega})^N$. Então para toda solução de (2.30), vale a seguinte identidade,

$$\Big\langle \nabla p, m\cdot\nabla\phi \Big\rangle_{L^2(Q)^N} = \Big\langle \nabla p, \phi\cdot\nabla m \Big\rangle_{L^2(Q)^N} - \Big\langle \nabla p, \phi div\ m \Big\rangle_{L^2(Q)^N}.$$

Demonstração. Consideremos

$$X = -\int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_i} m_k \cdot \frac{\partial \phi^i}{\partial x_k} dxdt.$$

Integrando por partes com respeito a x_k e usando o fato que $\phi = 0$ sobre Σ, obtemos

$$\begin{aligned} X &= \int\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\cdot m_k\right)\cdot \phi^i dxdt \\ &= \int\int_Q \frac{\partial^2 p_k}{\partial x_i \partial x_k} m_k \phi^i dxdt + \int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_i}\frac{\partial m_k}{\partial x_k}\phi^i dxdt. \end{aligned}$$

Integrando a primeira integral do lado direito, da igualdade acima, por partes com respeito a x_i, temos

$$\begin{aligned} \int\int_Q \frac{\partial^2 p_k}{\partial x_i \partial x_k} m_k \phi^i dxdt &= \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_k} m_k \phi^i\right)\Big|_\Sigma - \int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}(m_k\phi^i)dxdt \\ &= -\int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_k}\frac{\partial m_k}{\partial x_i}\phi^i dxdt - \int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_k} m_k \frac{\partial \phi^i}{\partial x_i} dxdt. \end{aligned}$$

Mas usando que $div\ \phi = 0$ sobre Q, concluímos que

$$\int\int_Q \frac{\partial^2 p_k}{\partial x_i \partial x_k} m_k \phi^i dxdt = -\int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_k}\frac{\partial m_k}{\partial x_i}\phi^i dxdt$$

Daí, obtemos que

$$X = -\int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_k}\frac{\partial m_k}{\partial x_i}\phi^i dxdt + \int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_i}\frac{\partial m_k}{\partial x_k}\phi^i dxdt$$

que é exatamente o que queríamos $\square$

A seguir faremos a demonstração do teorema.

Demonstração do Teorema 2.4. Usaremos a notação

$$E(t) = \frac{1}{2}(|\phi_t(t)|^2 + \|\phi(t)\|^2),\ \forall t \in\ [0, T].$$

Consideremos inicialmente o caso em que ϕ é regular, por exemplo, podemos tomar $\phi^0 \in\ V \cap H^4(\Omega)^N$ e $\phi^1 \in V \cap H^2(\Omega)^N$.

Usando a mudança de variáveis $T\tau = (T - 2\epsilon)t + T\epsilon$, observando a variação de t em $[0, T]$, temos que $\epsilon \le \tau \le T - \epsilon$, podemos escrever a desigualdade (2.33) como

$$E(0) \le \int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma.$$

Em seguida, consideramos o campo $h \in C^2(\overline{\Omega})^n$ tal que $h = \nu$ em $\partial\Omega$ e $h = 0$ em $\Omega\backslash\omega$. Seja $\eta \in C^2([0, T])$ tal que $\eta(0) = \eta(T) = 0$ e $\eta(t) = 1$ em $(\epsilon, T - \epsilon)$. Definamos $\theta(x, t) = \eta(t)h(x)$ que pertence a $W^{2,\infty}(Q)$ tal que,

$$\begin{cases} \theta(x,t) = \nu(x), \forall (x,t) \in\ \partial\Omega \times (\epsilon, T-\epsilon), \\ \theta(x,t)\cdot\nu(x) \ge 0, \forall (x,t) \in\ \partial\Omega \times (0,T), \\ \theta(x,0) = \theta(x,T) = 0, \forall \in\ \Omega, \\ \theta(x,t) = 0, \text{em } (\Omega\backslash\omega)\times(0,T). \end{cases} \tag{2.48}$$

Então, considerando o multiplicador $\theta\cdot\nabla\phi$, do Lema 2.2, observamos a seguinte identidade para toda solução fraca de (2.28):

$$\frac{1}{2}\int\int_\Sigma \theta_k(x,t)\nu_k(x)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma = (\phi_t(x,.), \theta(x,.)\cdot\nabla\phi(x,.))\Big|_0^T + \int\int_Q \frac{\partial\theta_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\phi^i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial phi^i}{\partial x_j}dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int\int_Q \frac{\partial\theta_k}{\partial x_k}(|\phi_t|^2 - |\nabla\phi|^2)dxdt + \int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_i}\cdot\theta_k\cdot\frac{\partial\phi^i}{\partial x_k}dxdt.$$

Pela definição de θ temos

$$\frac{1}{2}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \le \frac{1}{2}\int\int_\Sigma \theta_k(x,t)\nu_k(x,t)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma,$$

uma vez que $\theta(x,t) = \nu(x)$ em $\partial\Omega \times (\epsilon, T-\epsilon)$. Além disso,

$$(\phi_t(x,.), \theta(x,.) \cdot \nabla\phi(x,.))\Big|_0^T = 0.$$

Como $\theta \in C^1(\overline{\Omega} \times (0,T))$ temos

$$\Big|\int\int_Q \frac{\partial\theta_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial\phi^i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial\phi^i}{\partial x_j} dxdt\Big| \leq C \int\int_{\omega\times(0,T)} |\nabla\phi|^2 dxdt.$$

Para o termo de pressão, usamos o Lema 2.3, para ver que

$$\int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \cdot \theta_k \cdot \frac{\partial\phi^i}{\partial x_k} dxdt = \langle \nabla p, -\phi \cdot \nabla\theta + \phi \cdot (div\ \theta) \rangle_{H^{-1}(Q)^N, H_0^1(Q)^N}.$$

Consequentemente,

$$\Big|\int\int_Q \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \cdot \theta_k \cdot \frac{\partial\phi^i}{\partial x_k} dxdt\Big| \leq \delta\|\nabla p\|_{H^{-1}}^2 + C_\delta \int\int_{\omega\times(0,T)} (|\phi|^2 + |\phi_t|^2 + |\nabla\phi|^2) dxdt.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\int\int_\Sigma \theta_k(x,t)\nu_k(x) \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \leq \delta\|\nabla p\|_{H^{-1}}^2 + C\int\int_{\omega\times(0,T)} (|\phi|^2 + |\phi_t|^2 + |\nabla\phi|^2) dxdt.$$

Usando o fato que,

$$\|\nabla p\|_{H^{-1}}^2 \leq CE(0),$$

concluímos, escolhendo δ suficientemente pequeno, que

$$E(0) \leq C' \int_\epsilon^{T-\epsilon} \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial\phi}{\partial\nu})^2 d\Sigma \leq C \int\int_{\omega\times(0,T)} (|\phi|^2 + |\phi_t|^2 + |\nabla\phi|^2) dxdt$$

Finalmente, por mudanças de variáveis, temos

$$E(0) \leq C \int_\epsilon^{T-\epsilon} \int_\omega (|\phi|^2 + |\phi_t|^2 + |\nabla\phi|^2) dxdt. \tag{2.49}$$

Agora, consideremos ω_0 vizinhança de $\partial\Omega$ tal que $\Omega \cap \omega_0 \subset \omega$. Como a desigualdade (2.37) é verdadeira para cada vizinhança de $\partial\Omega$, em particular vale para ω_0, temos

$$E(0) \leq C \int_\epsilon^{T-\epsilon} \int_{\omega_0} (|\phi|^2 + |\phi_t|^2 + |\nabla\phi|^2) dxdt.$$

Agora, consideremos $\rho \in W^{1,\infty}(\Omega)^N, \rho \geq 0$, tal que

$$\rho = 1 \text{ em } \omega_0 \text{ e } \rho = 0 \text{ em } \ \Omega \backslash \omega.$$

Em seguida, definamos $h(x,t) \in Q$ por $h(x,t) = \eta(t)\rho^2(x)$, onde η foi definida anteriormente. Temos que

$$\begin{cases} h(x,t) = 1, \forall (x,t) \in \ \omega_0 \times (\epsilon, T-\epsilon), \\ h(x,t) = 0, \forall (x,t) \in \ (\Omega\backslash\omega) \times (0,T), \\ h(x,0) = h(x,T) = 0, \forall x \in \ \Omega, \\ \dfrac{|\nabla h|}{h} \in L^\infty(Q). \end{cases} \tag{2.50}$$

Multiplicando ambos os lados de (2.28) por $h \cdot \phi$ e integrando por partes em Q, obtemos

$$\int\int_Q h\phi \cdot \phi_{tt} dxdt - \int\int_Q h \cdot \phi \cdot \Delta\phi dxdt + \int\int_Q h \cdot \nabla p \cdot \phi dxdt = 0.$$

Analisemos as integrais acima. Temos, para a primeira integral, por integração por partes e usando que $\phi = 0$ em Σ, que

$$\int\int_Q \phi_{tt} \cdot h \cdot \phi dxdt = -\int\int_Q h \cdot |\phi_t|^2 dxdt - \int\int_Q h_t \cdot \phi \cdot \phi_t dxdt.$$

Para o segundo termo, usando novamente integração por partes e que $\phi = 0$ sobre Σ, obtemos que

$$\begin{aligned} -\int\int_Q h \cdot \Delta\phi \cdot \phi dxdt &= \int\int_Q \nabla\phi \cdot \nabla(h.\phi) dxdt \\ &= \int\int_Q h \cdot |\nabla\phi|^2 dxdt + \int\int_Q \phi \cdot (\nabla\phi.\nabla h) dxdt. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int\int_Q h \cdot |\nabla\phi|^2 dxdt = &\int\int_Q h \cdot |\phi_t|^2 dxdt + \int\int_Q h_t \cdot \phi \cdot \phi_t dxdt - \int\int_Q \phi \cdot (\nabla\phi.\nabla h) dxdt \\ &- \int\int_Q h \cdot \nabla p \cdot \phi dxdt. \end{aligned}$$

Agora, fazendo uso da desigualdade de Young para o termo $\int\int_Q \phi \cdot (\nabla\phi.\nabla h) dxdt$, concluímos que

$$\Big| \int\int_Q \phi \cdot (\nabla\phi.\nabla h) dxdt \Big| \leq \frac{1}{2}\int\int_Q h \cdot |\nabla\phi|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int\int_Q \frac{|\nabla h|^2}{h} \cdot |\phi|^2 dxdt.$$

Também para o termo $\int\int_Q h_t \cdot \phi \cdot \phi_t dxdt$,utilizamos novamente a desigualdade de Young para obtermos que

$$\int\int_Q h_t \cdot \phi \cdot \phi_t dxdt \leq C \int\int_Q (|\phi_t|^2 + |\phi|^2) dxdt.$$

Assim,

$$\int\int_Q h \cdot |\nabla\phi|^2 dxdt \leq C \int\int_Q (|\phi_t|^2 + |\phi|^2) dxdt + 2|\int\int_Q h \cdot \nabla p \cdot \phi dxdt|.$$

Em seguida, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Young, observamos que

$$\int\int_Q h \cdot \nabla p \cdot \phi dxdt \leq \delta \|p\|^2_{H^{-1}(0,T);L^2(\Omega)^N)} + C_\delta \|h\phi\|^2_{H^1_0(0,T;L^2(\Omega)^N)},$$

para $\delta > 0$. Portanto,

$$\int_\epsilon^{T-\epsilon} \int_{\omega_0} |\nabla\phi|^2 dxdt \leq C \int\int_{\omega\times(0,T)} (|\phi_t|^2 + |\phi|^2) dxdt + \delta \|p\|^2_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)^N)}.$$

De onde concluímos que

$$E(0) \leq C \int\int_{\omega\times(0,T)} (|\phi_t|^2 + |\phi|^2) dxdt + \delta \|p\|^2_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)^N)}.$$

Finalmente, usando que $\|\nabla p\|_{H^{-1}(Q)^N} \leq CE(0)$, obtemos para δ pequeno

$$E(0) \leq C \int\int_{\omega\times(0,T)} (|\phi_t|^2 + |\phi|^2) dxdt,$$

que é exatamente o que queríamos. □

2.2.2 Desigualdade de observabilidade interna

Agora provaremos o resultado que caracteriza a observabilidade para o sistema hiperbólico.

Teorema 2.5. *Assuma que ω satisfaz* (2.3) *e seja $T > 2R(x^0)$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $(\phi^0, \phi^1) \in V \times H$, a solução fraca de* (2.31) *satisfaz* (2.29).

Demonstração. Suponhamos que (2.29) não é verdade. Então dado um número natural n, existe um dado inicial $(\widetilde{\phi}^0_n, \widetilde{\phi}^1_n)$ tal que $\widetilde{\phi}_n$, a solução correspondente a este dado, satisfaz

$$\|\widetilde{\phi}_n^0\|_V^2 + |\widetilde{\phi}_n^1|_H^2 \geq n\|\widetilde{\phi}_{nt}\|_{L^2(\omega\times(0,T))}^2. \tag{2.51}$$

Consideremos,

$$K = \left(\|\widetilde{\phi}_n^0\|_V^2 + |\widetilde{\phi}_n^1|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\phi_n^0 = \frac{\widetilde{\phi}_n^0}{k}, \phi_n^1 = \frac{\widetilde{\phi}_n^1}{K}, \phi_n = \frac{\widetilde{\phi}_n}{K}.$$

Concluímos por (2.51) que

$$\|\phi_{nt}\|_{L^2(\omega\times(0,T))}^2 \leq \frac{1}{n}, \tag{2.52}$$

e, além disso,

$$\|\phi_n^0\|_V^2 + |\phi_n^1|_H^2 = 1 \tag{2.53}$$

Segue, por (2.52) e (2.53),que

$$\lim_{n\to\infty} \int\int_{\omega\times(0,T)} |\phi_{nt}|^2 dxdt = 0, \tag{2.54}$$

e, existem subsequências, denotadas da mesma forma, tal que

$$\phi_n^0 \rightharpoonup \phi^0 \text{ em } V \text{ e } \phi_n^1 \rightharpoonup \phi^1 \text{ em } H. \tag{2.55}$$

Como ϕ_n é solução de (2.28) associada ao dado (ϕ_n^0, ϕ_n^1), temos que

$$\phi_n \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V)$$

e

$$\phi_{nt} \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;H).$$

Então existe uma subsequência de ϕ_n tal que

$$\begin{cases} \phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi & \text{em} \quad L^\infty(0,T;H) \\ \phi_{nt} \overset{*}{\rightharpoonup} \phi_t & \text{em} \quad L^\infty(0,T;H) \end{cases} \tag{2.56}$$

Notamos que, pelas convergências em (2.56), podemos concluir que ϕ é solução fraca de (2.28) correspondente ao dado (ϕ^0, ϕ^1).

Em seguida, como $V \hookrightarrow H$ compactamente, a estimativa (2.56) e o teorema de Aubin-Lions 1.9, nos dizem que

$$\phi_n \to \phi \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H). \tag{2.57}$$

Assim, segue por (2.54) e (2.56) que

$$\phi_t \equiv 0 \quad \text{em} \quad \omega \times (0,T). \tag{2.58}$$

e ϕ é independente de t em ω.

Consideremos o sitema

$$\begin{cases} \xi_{tt} = A\xi, \quad \text{em} \quad Q; \\ \xi(0) = \phi^1 \in \ H, \xi_t(0) = A\phi^0 \in \ V'. \end{cases} \tag{2.59}$$

Tomando $\psi(x,t) = \phi^0(x) + \int_0^t \xi(x,s)ds$, não é difícil ver que ψ resolve (2.31) com dado (ϕ^0, ϕ^1). De fato, temos que

$$\begin{aligned} \psi_{tt}(x,t) - A\psi &= \xi_t(x,t) - A(\phi^0(x) + \int_0^t \xi(x,s)ds) \\ &= \xi_t(x,t) - A(\phi^0(x)) - \int_0^t A(\xi)ds \\ &= \xi_t(x,t) - A(\phi^0(x)) - \int_0^t \xi_{tt}(x,s)ds \\ &= \xi_t(x,t) - A(\phi^0(x)) - (\xi_t(x,t) - \xi_t(x,o)) \\ &= \xi_t(x,t) - A(\phi^0(x)) - \xi_t(x,t) + A(\phi^0(x)) \quad = 0. \end{aligned}$$

Claramente, $\psi(x,0) = \phi^0$ e $\psi_t(x,0) = \phi^1$. Portanto, da unicidade de solução de (2.31) temos $\psi \equiv \phi$ e por (2.58) temos que $\xi = 0$ em $\omega \times (0,T)$.

Mostremos que $\xi \equiv 0$. De fato, aplicando o operador *curl* em (2.59), temos que $v = curl\ \xi$ satisfaz

$$\begin{cases} v_{tt} - Av = 0 \qquad\qquad \text{em} \quad Q; \\ v \equiv 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{2.60}$$

Então pelo teorema de unicidade de Holmgreen 1.11 deduzimos que $v \equiv 0$. Portanto, existe um funcional $\phi = \phi(x,t)$ tal que

$$\xi = \nabla\phi \quad \text{em} \quad Q. \tag{2.61}$$

Em $(2.59)_2$ temos

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{em} \quad Q.$$

Como $\xi = 0$ em $\omega \times (0,T)$, temos também que

$$\phi = f(t) \quad \text{em} \quad \omega \times (0,T)$$

e, da continuação única para o operador de Laplace (para mais detalhes sobre continuação única ver [22]), deduzimos que

$$\phi = f(t) \quad \text{em} \quad Q$$

que implica que

$$\xi = \nabla\phi = 0 \quad \text{em} \quad Q. \tag{2.62}$$

Como consequência de (2.62) obtemos

$$\phi^1 = \phi^0 = 0. \tag{2.63}$$

De (2.53), (2.57) e (2.63), obtemos uma contradição e a prova esta terminada. □

2.2.3 Controlabilidade nula para o sistema hiperbólico

A seguir iremos obter a controlabilidade para o sistema hiperbólico (2.1) onde utilizamos o método da unicidade Hilbertiana para tal. A partir de agora, retornamos ao sistema hiperbólico (2.1).

Teorema 2.6. *Assuma que* ω *satisfaz* (2.3) *e seja* $T > 2R(x^0)$. *Dados* $(u^0, u^1) \in V \times H$, *existe um controle* $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ *tal que a solução associada* u *do sistema* (2.1) *satisfaz*

$$u(T) = u_t(T) = 0.$$

Nosso objetivo é estudar o problema de controlabilidade nula quando a ação ocorre no interior do domínio.

Demonstração. Seja ω um subconjunto aberto de Ω e 1_ω sua função característica. Consideremos o problema

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + \nabla p = h1_\omega & \text{em} \quad Q; \\ div\ y = 0 & \text{em} \quad Q; \\ y = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma; \\ y(0) = y^0, y_t(0) = y^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.64}$$

A ação ocorre no cilindro $\omega \times (0,T)$ contido em $Q := \Omega \times (0,T)$

1- Formulação do problema:

Dado $T > 0$ suficientemente grande, achar um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que para todo par de dados iniciais $y^0, y^1 \in \mathcal{H}$, existe um controle $h \in \ \mathcal{H}$ tal que a solução de

(2.64) satisfaz

$$y(x,T,h) = y_t(x,T,h) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.65}$$

2- Descrição do HUM

1^o **passo**: Dado $(\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, consideremos o problema

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi + \nabla p = 0 & \text{em} \quad Q; \\ div\phi = 0 & \text{em} \quad Q; \\ \phi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \phi(0) = \phi^0, \phi_t(0) = \phi^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.66}$$

Sabemos que tal problema tem solução fraca, $\phi = \phi(x,t)$.

2^o **passo:** Consideremos o problema

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \Delta\psi + \nabla p = \phi 1_\omega & \text{em} \quad Q; \\ div\ \psi = 0 & \text{em} \quad Q; \\ \psi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \psi(T) = \psi_t(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.67}$$

□

Para a solução ψ de (2.67), definimos a aplicação

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi_t(0), -\psi(0)\} \tag{2.68}$$

3^o **passo:** Multiplicando ambos os lados de $(2.66)_1$ pela solução ψ de (2.67) e integramos em Q, temos

$$\int_0^T \int_\omega \phi_{tt} \cdot \psi dxdt - \int_0^T \int_\omega \Delta\phi \cdot \psi dxdt = 0. \tag{2.69}$$

Observando que, como $(\phi_t, \psi)_t = (\phi_{tt}, \psi) + (\phi_t, \psi_t)$, obtemos

$$(\phi_t(T), \psi(T)) - (\phi_t(0), \psi_t(0)) = \int_0^T (\phi_{tt}, \psi)dt + \int_0^T (\phi_t, \psi_t)dt$$

Usando que $\psi(T) = 0$ pois ψ é solução de (2.67), segue que

$$-(\phi^1, \psi(0)) - \int_0^T (\phi_t, \psi_t)dt = \int_0^T (\phi_{tt}, \psi).dt \tag{2.70}$$

Agora, observando que, como $(\phi, \psi_t)_t = (\phi_t, \psi_t) + (\phi, \psi_{tt})$, integrando concluímos que

$$(\phi(T), \psi_t(T)) - (\phi(0), \psi_t(0)) = \int_0^T (\phi_t, \psi_t)dt + \int_0^T (\phi, \psi_{tt})dt.$$

Uma vez que $\psi_t(T) = 0$, segue da última igualdade que

$$-(\phi(0), \psi_t(0)) - \int_0^T (\phi, \psi_t)dt = \int_0^T (\phi_t, \psi_t)dt. \tag{2.71}$$

Substituindo (2.71) em (2.70), temos

$$-(\phi^1, \psi(0)) + (\phi(0), \psi_t(0)) + \int_0^T (\phi, \psi_{tt}) = \int_0^T (\phi_{tt}, \psi_t). \tag{2.72}$$

Por outra parte, como $\psi = 0$ e $\phi = 0$ sobre Σ, obtemos pela fórmula de Green, que

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi \cdot \psi dxdt = \int_0^T \int_\Omega \phi \cdot \Delta\psi dxdt, \tag{2.73}$$

Substituindo (2.73),(2.72) em (2.69), temos

$$-(\phi^1, \psi(0)) + (\phi^0, \psi_t(0)) + \int_0^T (\phi, \psi_{tt})dt - \int_0^T \int_\Omega \phi \cdot \Delta\psi dxdt = 0, \tag{2.74}$$

ou seja,

$$(\phi^1, \psi(0)) + (\phi^0, \psi_t(0)) + \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt = 0 \tag{2.75}$$

pois $\psi_{tt} - \Delta\psi + \nabla p = \phi 1_\omega$ em Q. (2.68) e (2.75) resulta que

$$\begin{aligned}(\Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\}) =& \langle\{\psi_t(0), -\psi(0)\}, \{\phi^0, \phi^1\}\rangle \\ =& \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.76}$$

Definimos em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ a seminorma

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{\mathcal{F}}^2 = \int_0^T \int_\Omega \phi^2 dxdt \tag{2.77}$$

Pelo teorema de Unicidade de Holmgreen, ver Lions [14], existe $T_0 = T_0(\omega) > 0$, tal que para todo $T > T_0$ a única solução de (2.28) tal que $\phi = 0$ em $\Omega \times (0, T)$ é $\phi \equiv 0$. Logo, para $T > T_0$ a forma (2.76) é uma norma em $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Representemos por F o espaço de Hilbert dado pelo completamento de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ com respeito a norma definida em (2.76).

A norma (2.76) induz em $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ o produto interno

$$(\{\phi^0, \phi^1\}, \{r^0, r^1\})_F = \int_0^T \int_\omega \phi.r \; dxdt,$$

onde r é a solução de (2.28) correspondente ao dado $\{r^0, r^1\} \in \; \mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Consideremos a forma bilinear

$$\Big\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{r^0, r^1\} \Big\rangle = \int_0^T \int_\omega \phi.rdxdt,$$

definida em $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, a qual é contínua e coerciva em $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Então, essa extensão por continuidade ao complemento de F também é contínua e coerciva em F. Dessa forma segue do Lema Lax-Milgram 1.4 que dado $\{y^0, y^1\} \in \; F'$ existe um único $\{\phi^0, \phi^1\} \in \; F$ tal que

$$\Big\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{r^0, r^1\} \Big\rangle = \Big\langle \{-y^0, y^1\}, \{r^0, r^1\} \Big\rangle_{F' \times F}, \; \forall \{r^0, r^1\} \in \; F. \tag{2.78}$$

Assim, para $\{y^0, y^1\} \in \; F'$, existe $\{\phi^0, \phi^1\} \in \; F$ tal que

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{-y^0, y^1\} \text{ em } F'. \tag{2.79}$$

Por (2.79) e (2.68) concluímos que $\psi(0) = y^0$ e $\psi_t(0) = y^1$, onde ψ é solução de (2.67).

Assim, considerando h como sendo a restrição de ϕ a $\omega \times (0, T)$, segue, pela unicidade de solução, que y satisfaz (2.65).

Faremos agora a caracterização concreta de F. Na verdade mostraremos que $F = H \times V'$. De fato,

1. $H \times V' \subset F$

   Com efeito, considerando $\phi^0 \in H$ e $\phi^1 \in V'$, temos pelo Teorema (2.1) que 2.67 tem única solução e, além disso, vale a desigualdade

   $$\int_0^T \phi^2 dxdt \leq (|\phi^0|_H^2 + \|\phi^1\|_{V'}^2) = C\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H \times V'}^2 \tag{2.80}$$

   Como F é o complementar de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ com respeito a norma definida em (2.77) segue que $\{\phi^0, \phi^1\} \in \; F$.

2. $F \subset H \times V'$

   De fato, consideremos $\{\phi^0, \phi^1\} \in \; F$. Para $T > T(x^0)$, existe $C > 0$ tal que a desigualdade inversa é verdadeira

$$C\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H\times V'} \leq \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt.$$

Assim, pela definição de F, temos que $\{\phi^0, \phi^1\} \in H \times V'$.

Pelas inclusões provadas acima concluímos a equivalência das normas $\|\cdot\|_F$ e $\|\cdot\|_{H\times V'}$, e, identificamos F e seu dual com $H \times V$ e $H \times V'$, respectivamente.

Assim, dados $\{y^0, y^1\} \in V \times H$ existe um único par de dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in H \times V'$ que associa a solução fraca ϕ de (2.66). Temos ainda que, sendo o controle h a restrição de ϕ a $\omega \times (0, T)$ a regularidade da solução fraca nos permite dizer que $h \in L^2(\omega, (0, T))^N$. $\square$

Problema de Minimização

Mostramos, anteriormente, que para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in V \times H$, existe um controle $h \in L^2(\omega \times (0, T))$, tal que a solução de

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + \nabla p = h1_\omega & \text{em} \quad Q; \\ div\ y = 0 & \text{em} \quad Q; \\ y = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma; \\ y(0) = y^0, y_t(0) = y^1 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.81}$$

cumpre a condição

$$y(T) = y_t(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.82}$$

Agora, mostraremos que o problema de controlabilidade nula interna se reduz a um problema de minimização. Temos o seguinte resultado inicial.

Lema 2.4. Seja ϕ solução do sistema (2.81) com dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in H \times V'$. Então para dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in V \times H$, a solução y do sistema (2.81) satisfaz (2.82) se, e somente se, existe $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que

$$\int_0^T \int_\omega \phi \cdot h dxdt = \langle \phi^1, y^0 \rangle_{H_0^1, H^{-1}} - (\phi^0, y^1).$$

Demonstração. Suponhamos que $\{y^0, y^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega)^n \times \mathcal{D}(\Omega)^n$ e $h \in \mathcal{D}(\omega \times (0, T))^n$. Multiplicando $(2.81)_1$ por ϕ e integrando em Q temos

$$\int_\Omega \int_0^T \phi \cdot (y_{tt} - \Delta y + \nabla p) dtdx = \int_\Omega \int_0^T h \cdot \phi dxdt.$$

Integrando por partes, usando que $\int_Q \phi.\nabla p dxdt = 0$, obtemos

$$\int_\Omega \int_0^T \phi(y_{tt} - \Delta y)dtdx = \int_\omega (\phi y_t - \phi_t y)dx\Big|_0^T + \int_Q y(\phi_{tt} - \Delta\phi)dxdt$$
$$= \int_\Omega (\phi(T)\cdot y_t(T) - \phi_t(T)\cdot y(T))\, dx - \int_\Omega (\phi(0)\cdot y^1 - \phi_t\cdot(0)y^0)dx.$$

Logo, para algum $\{y^0, y^1\} \in\ V \times H$ e $\{\phi^0, \phi^1\} \in\ H \times V'$,

$$\int_0^T \int_\omega \phi\cdot hdxdt = -\langle \phi_t(t), y(T)\rangle + \int_\Omega \phi(T)\cdot y_t(T)dx + \langle \phi^1, y^0\rangle - \int_\Omega \phi^0\cdot y^1 dx. \quad (2.83)$$

Segue de (2.83) que y satisfaz (2.82) se, e somente se,

$$\int_0^T \int_\Omega \phi\cdot hdxdt = \langle \phi^1, y^0\rangle_{H^{-1},H_0^1} - \int_\Omega \phi^0\cdot y^1 dx,$$

concluindo a demonstração. □

Considerando a dualidade entre $H \times V'$ e $H \times V$ definida por

$$\Big\langle \{y^0, y^1\}, \{\phi^1, \phi^0\}\Big\rangle = (y^0, \phi^1) - \Big\langle y^1, \phi^0\Big\rangle_{V',V},$$

o lema anterior pode ser reformulado da seguinte maneira:

Lema 2.4*: Seja ϕ a solução de (2.81) com dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in H \times V'$. Então para dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in V \times H$, a solução do sistema (2.81) satisfaz (2.82) se, e somente se, existe $h \in\ L^2(\omega \times (0,T))^N$ tal que

$$\int_\omega \int_0^T \phi.hdxdt + \Big\langle \{y^0, y^1\}, \{\phi^1, \phi^0\}\Big\rangle = 0. \quad (2.84)$$

Observe que, de acordo com (2.84), a propriedade de controlabilidade pode ser transferida a encontrar pontos críticos do funcional $\mathcal{J} : H \times V' \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{J}(\{\phi^0, \phi^1\}) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dxdt + \langle \{y^0, y^1\}, \{\phi^1, \phi^0\}\rangle,$$

onde ϕ é solução de (2.81) com dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in\ H \times V'$. Desse modo, consideramos o seguinte resultado:

Teorema 2.7. *Seja $T > T(x^0)$. Então o funcional $\mathcal{J}$ possui um único mínimo $\{\phi^0, \phi^1\} \in H \times V'$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.8, é suficiente provarmos que o funcional $\mathcal{J}$ é semi-contínuo inferiormente, estritamente convexo e coercivo. De fato:

(i) $\mathcal{J}$ é semicontínua inferiormente.

Com efeito, da desigualdade direta obtemos

$$\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\} \leq \frac{1}{2}C\|\{\phi^0,\phi^1\}\|^2_{H\times V_t} + \langle\{y^0,y^1\},\{\phi^1,\phi^0\}\rangle,$$

e, portanto,

$$\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\} \leq \frac{C}{2}\|\{\phi^0,\phi^1\}\|^2_{H\times V} + \|\{\phi^0,\phi^1\}\|_{H\times V_t}\|\{y^0,y^1\}\|_{V\times H}. \tag{2.85}$$

Segue por (2.85) que $\mathcal{J}$ é contínuo.

(ii) $\mathcal{J}$ é estritamente convexo;

De fato, devemos mostrar que,

$$\mathcal{J}(\lambda\{\phi^0,\phi^1\} + (1-\lambda)\{\psi,\psi\}) \leq \lambda\mathcal{J}\{\phi^0,\phi^1\} + (1-\lambda)\mathcal{J}\{\psi,\psi\}.$$

Observe que,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\lambda\{\phi^0,\phi^1\} + (1-\lambda)\{\psi,\psi\}) = &\int_0^T\int_\omega \langle\lambda\phi + (1-\lambda)\psi, \lambda\phi + (1-\lambda)\psi\rangle\\ &+ \langle\{y^0,y^1\}, \lambda\{\phi^0,\phi^1\} + (1-\lambda)\{\psi^0,\psi^1\}\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\omega \phi^2 dxdt + \lambda(1-\lambda)\int_0^T\int_\omega \phi\cdot\psi dxdt +\\ &+ (1-\lambda)^2\int_0^T\int_\omega \psi^2 + \lambda\langle\{y^0,y^1\},\{\phi^0,\phi^1\}\rangle\\ &+ (1-\lambda)\langle\{y^0,y^1\},\{\psi^0,\psi^1\}\rangle,\end{aligned}$$

denotemos $\lambda\langle\{y^0,y^1\},\{\phi^0,\phi^1\}\rangle + (1-\lambda)\langle\{y^0,y^1\},\{\psi^0,\psi^1\}\rangle = B$. Daí

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\lambda\{\phi^0,\phi^1\} + (1-\lambda)\{\psi,\psi\}) &\leq \frac{(\lambda-\lambda^2)}{2}\int_0^T\int_\Omega (\phi^2+\psi^2)dxdt + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\omega \phi^2 dxdt +\\ &+ \frac{(1-\lambda)^2}{2}\int_0^T\int_\omega \psi^2 dxdt + B;\\ &= \frac{\lambda}{2}\int_0^T\int_\omega \phi^2 dxdt + \frac{1-\lambda}{2}\int_0^T \psi^2 dxdt + B\\ &= \lambda\mathcal{J}(\phi) + (1-\lambda)\mathcal{J}(\psi).\end{aligned}$$

(iii)$\mathcal{J}$ é coercivo.

De fato, como

$$\mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} \geq \frac{1}{2}\left(\int_0^T |\phi|^2 dxdt - \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H\times V_t}\|\{y^0, y^1\}\|_{V\times H}\right).$$

Pela desigualdade inversa (2.29) obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} &\geq \frac{C}{2}\|\{\phi^0, \phi^1\}\|^2_{H\times V_t} - \frac{1}{2}\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H\times V_t}\|\{y^0, y^1\}\|_{V\times H}) \\ &= (\frac{1}{2}\|\{\phi^0, \phi^1)\|_{H\times V_t})C(\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H\times V_t} - \|\{y^0, y^1\}\|_{H\times V}),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{\|\{\phi^0,\phi^1\}\|\to\infty} \mathcal{J}\{\phi^0, \phi^1\} = +\infty.$$

Portanto $\mathcal{J}$ é coerciva. Dessa forma, $\mathcal{J}$ tem um único mínimo $\{\overline{\phi^0}, \overline{\phi^1}\} \in H \times V'$. $\square$

Mostraremos, a seguir, que o mínimo do funcional encontrado no teorema anterior nos fornece o controle de norma mínima desejada.

Teorema 2.8. *Seja* $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} \in H \times V'$ *o mínimo do funcional* $\mathcal{J}$*. Se* $\overline{\phi}$ *corresponde a solução do sistema* (2.81) *com dados iniciais* $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\}$*, então* $h = \phi|_\omega$ *é um controle tal que para dados iniciais* $\{y^0, y^1\} \in V \times H$ *a solução* y *do sistema* (2.81) *satisfaz a condição* (2.82).

Demonstração. Se $\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} \in H \times V'$ é um mínimo do funcional $\mathcal{J}$, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{J}(\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\} + h\{\phi^0, \phi^1\}) - \mathcal{J}(\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\})}{h} = 0.$$

Logo,

$$\int_0^T \int_\omega \overline{\phi} \cdot \phi dxdt + \int_\Omega y^1 \cdot \phi^0 dx - \langle \phi^1, y^0 \rangle_{V_t, V} = 0,$$

para algum $\{\phi^0, \phi^1\} \in H \times V'$, onde ϕ é solução de (2.81). Assim, pelo (2.4) temos que $h = \phi|_\omega$ é um controle tal que para dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in V \times H$, a solução y do sistema (2.81) satisfaz a condição (2.82). $\square$

A seguinte proposição mostra que o controle h obtido pela minimização do funcional $\mathcal{J}$ é de norma mínima.

Teorema 2.9. *Seja* $h = \overline{\phi}|_\omega$ *o controle tal que* $\overline{\phi}$ *é solução é solução de* (2.81)*, cujos dados iniciais correspondem aos mínimo do funcional* $\mathcal{J}$*. Se* $g \in L^2(\omega \times (0, T))^N$ *é outro controle tal que para dados iniciais* $\{y^0, y^1\} \in V \times H$*, a solução do sistema* (2.81) *satisfaz a condição* (2.82). *Então*

$$\|h\|_{L^2(\Sigma)^N} \leq \|g\|_{L^2(\Sigma)^N}. \tag{2.86}$$

Demonstração. Seja $\{\overline{\phi^0}, \overline{\phi^1}\}$ o mínimo do funcional $\mathcal{J}$. Considerando $\{\overline{\phi^0}, \overline{\phi^1}\} \in \mathcal{V}\times\mathcal{V}$, temos

$$\|h\|_{L^2(\omega\times(0,T))} = \int_0^T \int_\Omega |\overline{\phi}|^2 dxdt = \langle \overline{\phi^1}, y^0\rangle_{V_t,V} - \int_\Omega \overline{\phi^0} \cdot y^1 dx. \tag{2.87}$$

Pelo Lema 2.4, para $g \in L^2(\Omega \times (0,T))^N$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\omega g \cdot \overline{\phi} dxdt &= \langle \{\overline{\phi^0}, \overline{\phi^1}\}, \{y^1, y^0\}\rangle \\ &= -\int_\Omega \overline{\phi^0} y^1 dx + \langle \overline{\phi^1}, y^0\rangle_{V_t,V}. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Assim, por (2.87) e (2.88) obtemos

$$\begin{aligned} \|h\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))^N} &= \int_0^T \int_\omega g \cdot \overline{\phi} dxdt \\ &\leq \|g\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \|\overline{\phi}\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \\ &= \|g\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \|h\|_{L^2(\omega\times(0,T))}. \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração. □

Capítulo 3

O sistema de Stokes com dado inicial regular

Neste capítulo, provaremos que se o dado inicial for suficientemente regular então o sistema de Stokes (7) é nulo controlável com custo de ondem $e^{C/T}$ quando $T \to 0^+$. Nossa prova é baseada no método do controle de transmutação(MCT) e em um resultado de controlabilidade nula para o sistema (11). Também mostramos que se tomarmos dados menos regulares ainda se obtêm controlabilidade para o sistema de Stokes com custo de ordem $e^{c/T}$ quando $t \to 0^+$. Os resultados aqui expostos podem ser encontrados em [5].

3.1 Controlabilidade do Sistema de Stokes

Esta seção é dedicada a provar o seguinte resultado

Teorema 3.1. *Assuma que* ω *satisfaz* (2.3),$y_0 \in V$ *e seja* $0 < T \leq 1$. *Então existe um controle* $g \in L^2(\omega \times (0,T))$ *tal que a solução de* (7) *satisfaz*

$$y(T) = 0 \quad em \quad \Omega.$$

Além disso, existem constantes C_1 *e* C_2, *dependendo somente de* Ω *e* ω, *tal que*

$$\int\int_{\omega\times(0,T)} |g|^2 dxdt \leq C_1 e^{C_2/T} \|y_0\|_V^2. \tag{3.1}$$

Para a demonstração de tal teorema faremos uso dos seguintes resultados

Teorema 3.2. *Assuma que* ω *satisfaz* (2.3). *Então existe* $T_0 > 0$ *tal que para qualquer* $T > T_0$ *e qualquer* $(u_0, u_1) \in V \times H$, *podemos encontrar um controle* $h \in L^2(0,T;H)$

tal que a solução associada u de (11) *satisfaz*

$$u(T) = u_t(T) = 0.$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int\int_{\omega\times(0,T)} | h |^2 \, dxdt \leq C(\|u_0\|_V^2 + | u_1 |_H^2). \tag{3.2}$$

Lema 3.1. Existe uma constante $\alpha^* > 0$ tal que, para todo $\alpha > \alpha^*$, existe $\gamma > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $L > 0$ e $T \in (0, inf(\Pi/2, L)^2)$ existe uma distribuição $K \in C([0,t]; \mathcal{M}(-L, L))$ satisfazendo

$$\begin{cases} K_t = \partial_s^2 K & \text{em} \quad \mathcal{D}'((0,T) \times (-L,L)) \\ K(0,x) = \delta(0) & \\ K(T,x) = 0 & \\ \|K\|_{L^2((0,T)\times(-L,L))} \leq \gamma e^{\alpha L^2/T}. & \end{cases} \tag{3.3}$$

Provamos um resultado análogo ao Teorema 3.2 em 2.6, por conta disso sua demonstração não será feita. Maiores detalhes da prova para o Lema 3.1 encontra-se em [18].

Demonstração do Teorema 3.1. Introduzimos dois intervalos de tempo diferentes $(0,T)$ e $(0,L)$ e consideramos os sistemas

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla q = g1_\omega & \text{em} \quad Q_t := \Omega \times (0,T); \\ \text{div } y = 0 & \text{em} \quad Q_t; \\ y = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_t := \partial\Omega \times (0,T); \\ y(0) = y_0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

e

$$\begin{cases} u_{ll} - \Delta u + \nabla p = h1_\omega & \text{em} \quad Q_l := \Omega \times (0,L); \\ \text{div } u = 0 & \text{em} \quad Q_l; \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_l := \partial\Omega \times (0,L); \\ u(0) = y_0, u_l(0) = 0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

em $\Omega \times (0,T)$ e $\Omega \times (0,L)$, respectivamente. Aqui, l assume o papel de uma pseudo variável de tempo.

Tomando $L > T_0$, que é o tempo mínimo do Teorema 3.2, segue que o sistema 3.5 é nulo controlável, com controle $h \in L^2(\omega \times (0,L))$ satisfazendo (3.2).

Em seguida, estendemos K para zero fora $[0,T] \times (0,L)$, u e h por reflexão a $[-L,0]$ e por zero fora de $[-L,L]$, observe que podemos fazer tais extensões pois o sistema hiperbólico é reversível com o tempo. Consideremos

$$y(\cdot,t) = \int_{\mathbb{R}} K(t,s)u(\cdot,s)ds \tag{3.6}$$

e

$$g(\cdot,t) = \int_{\mathbb{R}} k(t,s)h(\cdot,s)ds. \tag{3.7}$$

Segue do Lema 3.1 que

$$\begin{aligned} y(\cdot,0) &= \int_{\mathbb{R}} K(0,s)(\cdot,s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta(0)u(\cdot,s) \\ &= u(0) \\ &= y_0, \end{aligned}$$

e, segue do Lema 3.3 que,

$$y(T) = 0.$$

Temos ainda que, pelo Lema 3.1 e por (3.2),

$$\begin{aligned} \int\int_{\Omega\times(0,T)} \mid g \mid^2 dxdt &= \int\int_{\Omega\times(0,T)} (\mid \int_{-L}^{L} K(t,s)h(\cdot,s)ds \mid)^2 dxdt \\ &\leq \int\int_{\Omega\times(0,T)} \left((\int_{-L}^{L} \mid K \mid^2 ds)^{1/2} (\int_{-L}^{L} \mid h \mid^2 ds)^{1/2} \right)^2 dxdt \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_0^T (\int_{-L}^{L} \mid K \mid^2 ds)(\int_{-L}^{L} \mid h \mid^2 ds)dt \right) dx \\ &\leq \int_{\Omega} (\int_{-L}^{L} \mid h \mid^2 ds)\gamma e^{\alpha L^2/T} dx \\ &\leq C\|u_0\|_V \\ &= C\|y_0\|_V. \end{aligned}$$

Finalizamos a prova mostrando que o par (y,g) resolve, juntamente com q, o sistema de Stokes (3.4). Primeiro, notemos que

$$div(Y(\cdot,t)) = div\left(\int_{\mathbb{R}} K(t,s)u(\cdot,s)ds \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} div\,(K(t,s)u(\cdot,s))\,ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} K(t,s)div(u(\cdot,s))ds \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Além disso, $y = 0$ em Σ_t. Agora, para qualquer $\varphi \in V$, temos

$$\Big\langle y(\cdot,t),\varphi\Big\rangle_H = \Big\langle \int_{-L}^{L} K(t,s)u(\cdot,s),\varphi\Big\rangle_H$$

o que implica que

$$\Big\langle y_t(\cdot,t),\varphi\Big\rangle_H = \Big\langle \int_{-L}^{L} K_t(t,s)u(\cdot,s),\varphi\Big\rangle_H.$$

E pelas propriedades de K, temos

$$\Big\langle y_t(\cdot,t),\varphi\Big\rangle_H = \Big\langle \int_{-L}^{L} K_{ss}(t,s)u(\cdot,s)ds,\varphi\Big\rangle_H.$$

Integrando por partes obtemos

$$\Big\langle y_t(\cdot,t),\varphi\Big\rangle_H = \Big\langle K_s(t,s)u(\cdot,s)\Big|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} K_s(t,s)u_s(\cdot,s)ds,\varphi\Big\rangle_H.$$

Usando que $u(\cdot,L) = u(\cdot,-L) = 0$ temos

$$\Big\langle y_t(\cdot,t),\varphi\Big\rangle_H = \Big\langle -\int_{-L}^{L} K_s(t,s)u_s(\cdot,s)ds,\varphi\Big\rangle_H.$$

Integrando novamente por partes concluímos que

$$\Big\langle y_t(\cdot,t),\varphi\Big\rangle_H = \Big\langle -K(t,s)u_s(\cdot,s)\Big|_{-L}^{L} + \int_{-L}^{L} K(t,s)u_{ss}(\cdot,s)ds,\varphi\Big\rangle_H.$$

Como $u_s(\cdot,L) = u_s(\cdot,s) = 0$ obtemos que

$$\Big\langle y_t(\cdot,t),\varphi\Big\rangle_H = \Big\langle \int_{-L}^{L} K(t,s)u_{ss}(\cdot,s)ds,\varphi\Big\rangle_H.$$

Agora, como u, juntamente com algum p, é solução de (3.5), chegamos que

$$\Big\langle y_t(\cdot,t),\varphi\Big\rangle_H = \int_{-L}^{L} K(t,s)\Big\langle \Delta u(\cdot,s) + h(\cdot,s)1_\omega,\varphi\Big\rangle_H ds.$$

Portanto,

$$\Big\langle y_t(\cdot,t),\varphi\Big\rangle_H = \Big\langle \int_{-L}^{L} K(t,s)\Delta u(\cdot,s)ds,\varphi\Big\rangle_H + \Big\langle \int_{-L}^{L} K(t,s)h(\cdot,s)1_\omega ds,\varphi\Big\rangle H.$$

Daí,

$$\Big\langle y_t(\cdot,t)-\Delta y(\cdot,s),\varphi\Big\rangle_H = \Big\langle g1_\omega,\varphi\Big\rangle_H.$$

Fazendo uso do Lema 1.5 concluímos a prova. □

3.2 O Sistema de Stokes com dados menos regulares

Nesta seção provaremos que podemos tomar dados menos regulares e ainda assim ter controlabilidade para o sistema de Stokes (7) com custo de controlabilidade de ordem $e^{C/T}$ quando $t \to 0^+$. Para mostrar o resultado, combinamos o Teorema 3.1, uma desigualdade de energia e o efeito suavizador do sistema de Stokes. O resultado é o seguinte.

Teorema 3.3. *Assuma que ω satisfaz (2.3), $y_0 \in H$ e seja $0 < T \leq 1$. Então, existe um controle $g \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução y de (7) satisfaz*

$$y(T) = 0.$$

Além disso, existem constantes C_1 e C_2, dependendo somente de Ω e ω, tal que

$$\int\int_{\omega\times(0,T)} |g|^2 dxdt \leq C_1 e^{C_2/T}|y_0|_H^2. \tag{3.8}$$

Demonstração. Iniciamos escolhendo $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente e permitindo que o sistema (3.4) evolua livremente no intervalo $(0,\epsilon)$. Do efeito regularizante do sistema de Stokes, temos que $y(\epsilon) = y_\epsilon \in V$. Temos também, graças ao Teorema 3.2, que existe $g \in L_2(\omega \times (0, T-\epsilon))$ tal que a solução associada y para o problema

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla p = g1_\omega & \text{em} \quad \Omega \times (0,T-\epsilon); \\ \text{div } y = 0 & \text{em} \quad (0,T-\epsilon); \\ y = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T-\epsilon); \\ y(0) = y_\epsilon & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

satisfaz

$$y(T-\epsilon)=0.$$

Além disso,

$$\int_0^{T-\epsilon}\int_\omega |\ g\ |^2\ dxdt \leq Ce^{\alpha/T}\|y_\epsilon\|_V^2. \tag{3.10}$$

Definimos agora as funções $\overline{y}$ e $\overline{g}$ por $\overline{y}(t+\epsilon)=y(t), \overline{g}(t+\epsilon)=g(t)$ para $0<t<T-\epsilon$. As funções $\overline{y}$ e $\overline{g}$ estão definidas em (ϵ,T) e satisfazem

$$\begin{cases} \overline{y}_t-\Delta\overline{y}+\nabla\overline{p}=\overline{g}1_\omega & \text{em} \quad \Omega\times(\epsilon,T); \\ \text{div } \overline{y}=0 & \text{em} \quad (\epsilon,T); \\ \overline{y}=0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(\epsilon,T); \\ \overline{y}(\epsilon)=y_\epsilon & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

A desigualdade (3.10) torna-se então

$$\int_\epsilon^{T}\int_\omega |\ \overline{g}\ |^2\ dxdt \leq Ce^{\alpha/T}\|y_\epsilon\|_V^2. \tag{3.12}$$

Em seguida, considere

$$g(t)=\begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0\leq t<\epsilon; \\ \overline{g}(t), & \text{se} \quad \epsilon\leq t\leq T. \end{cases} \tag{3.13}$$

Note que a solução de (3.4), com controle g, cumpre $y(T)=0$. De (3.12) e, da definição de g, temos a seguinte estimativa

$$\int_0^{T}\int_\omega |\ g\ |^2\ dxdt \leq Ce^{\alpha/T}\|y_\epsilon\|_V^2. \tag{3.14}$$

Consideremos agora o sistema (3.4) no intervalo $[0,\epsilon]$, isto é, consideramos o sistema

$$\begin{cases} y_t-\Delta y+\nabla p=0 & \text{em} \quad \Omega\times(0,\epsilon); \\ \text{div } y=0 & \text{em} \quad \Omega\times(0,\epsilon); \\ y=0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,\epsilon); \\ y(0)=y_0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Fazendo a mudança de variáveis $z = e^{-1/t}y(t)$. Então essa nova função resolve

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \nabla \widehat{p} = \dfrac{1}{t^2}e^{-1/t}y & \text{em} \quad \Omega \times (0, \epsilon); \\ \text{div } z = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0, \epsilon); \\ z = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, \epsilon); \\ z(0) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.16}$$

Note que $\dfrac{1}{t^2}e^{-1/t}y \in L^2(0, \epsilon, H)$. De fato,

$$\int_{\omega \times (0,\epsilon)} \|\frac{1}{t^2}e^{-1/t}y\|^2 \leq \|\frac{1}{t^2}e^{-1/t}\|^2 \|y\|^2,$$

pois, como y tem norma em H finita, basta mostrarmos que $\dfrac{1}{t^2}e^{-1/t}$ tem norma finita. Com efeito,

$$\int_0^\epsilon \left(\frac{1}{t^2}e^{\frac{-1}{t}}\right)^2 dt = \int_0^\epsilon e^{\frac{-2}{t}} \frac{1}{t^2} \frac{dt}{t^2}$$

Agora, usando integração por substituição, com $u = \frac{-1}{t}, du = \dfrac{1}{t^2}dt$, a integral fica $\int_{-\infty}^{\frac{-1}{\epsilon}} e^{2u}u^2 du$. Integrando por partes, com

$$\begin{cases} dv = e^{2u}, \text{então } v = \dfrac{e^{2u}}{2}, \\ k = u^2, \text{então } dk = 2udu. \end{cases}$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\frac{-1}{\epsilon}} e^{2u}u^2 du = \frac{u^2 e^{2u}}{2}\Big|_{-\infty}^{\frac{-1}{\epsilon}} - \int_{-\infty}^{\frac{-1}{\epsilon}} ue^{2u} du,$$

agora, aplicando integração por partes novamente, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\frac{-1}{\epsilon}} e^{2u}u^2 du = \frac{u^2 e^{2u}}{2}\Big|_{-\infty}^{\frac{-1}{\epsilon}} - (\frac{e^{2u}}{2}\Big|_{-\infty}^{\frac{-1}{\epsilon}} - \int_{-\infty}^{\frac{-1}{\epsilon}} \frac{e^{2u}}{2})du = \frac{e^{2u}}{2}(u^2 - u + \frac{1}{2})\Big|_{-\infty}^{\frac{-1}{\epsilon}}.$$

Daí,

$$\int_{-\infty}^{\frac{-1}{\epsilon}} e^{2u}u^2 du = \frac{e^{\frac{2}{\epsilon}}}{2}(\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2}) < \infty.$$

Assim, usando que $\dfrac{1}{t^2}e^{-1/t}y \in L^2(0, \epsilon, H)$ e a regularidade do sistema de Stokes, concluímos que $z \in L^2(0, \epsilon; H^2(\Omega))$ e que $z_t \in L^2(0, \epsilon; H)$.

Multiplicado $(3.16)_1$ por z_t e integrando em Ω obtemos

$$\int_\Omega z_t.z_t dx - \int_\Omega \Delta z.z_t dx + \int_\Omega \nabla p.z_t = \int_\Omega \frac{1}{t^2} e^{-1/t} y(t).z_t dx$$

Mas, observe que,

$$\begin{aligned}
(\nabla p, z_t) &= \int_\Omega \nabla p.z_t dx \\
&= \int_\Omega \sum_i p_{x_i} z_t^i dx \\
&= \sum_i \int_\Omega p_{x_i} z_t^i dx \quad = - \sum_i \int_\Omega p z_{t,x_i}^i dx \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = - \int_\Omega p \sum_i z_{t,x_i}^i dx \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = - \int_\Omega p \; div(z_t) dx \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = - \int_\Omega p \; (div \; z)_t dx \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

De onde concluímos que,

$$2 \mid z_t \mid_H^2 + \frac{d}{dt} \|z(t)\|_V^2 = 2 \left(\frac{1}{t^2} e^{-1/t} y(t), z_t \right)_H. \tag{3.17}$$

Integrando (3.17) de 0 a ϵ e usando a desigualdade de Young obtemos

$$2 \int_0^\epsilon \Big| z_t \Big|_H^2 dt + \Big\| z(\epsilon) \Big\|_V^2 \leq C_\delta \int_0^\epsilon \Big| \frac{1}{t^2} e^{-1/t} y(t) \Big|_H^2 dt + \delta \int_0^\epsilon \Big| z_t \Big|_H^2 dt,$$

para $\delta > 0$. Tomando δ pequeno o suficiente, e observando que o termo $2 \int_0^\epsilon \mid z_t(t) \mid_H^2 dt$ é positivo, temos

$$\Big\| z(\epsilon) \Big\|_V^2 \leq C \int_0^\epsilon \Big| \frac{1}{t^2} e^{-1/t} y(t) \Big|_H^2 dt$$

e, como, para ϵ pequeno o suficiente, temos $\frac{1}{t^4} e^{-2/t} \leq e^{1/\epsilon}$, daí

$$\Big\| z(\epsilon) \Big\|_V^2 \leq C e^{1/\epsilon} \int_0^\epsilon \Big| y(t) \Big|_H^2 dt.$$

Finalmente, usando o fato que $\|y\|_{L^2(0,\epsilon;H)}^2 \leq \epsilon |y_0|_H^2$,onde fizemos uso de uma desigualdade de energia para o sistema (3.15), obtemos que

$$\Big| z(\epsilon) \Big|_V^2 \leq \epsilon e^{1/\epsilon} \Big| y_0 \Big|_H^2,$$

e, em particular usando o fato que $z(t) = e^{-1/t}y(t)$, concluímos que

$$\left\| y(\epsilon) \right\|_V^2 \leq \epsilon e^{2/\epsilon} \left\| y_0 \right\|_H^2. \tag{3.18}$$

de (3.18) e (3.14) concluímos a demonstração. □

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams and J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, vol. 140. Academic Press, 2003.

[2] G. O. Antunes,F. D. Araruna,L. A. Medeiros. *Simultaneous controllability for a system with resistance term,* TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., 3 (1) (2002), 31-40.

[3] F. Boyer and P. Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*,Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 183 (2013), 76-02.

[4] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer, New York, 2011.

[5] F. W. Chaves-Silva. *A hyperbolic system and the cost of the null controllability for the stokes system.* TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., 34(3)(2015):1057–1074.

[6] S. Ervedoza and E. Zuazua. *Sharp observability estimates for heat equations.* Archive for rational mechanics and analysis, 202(3):975–1017, 2011.

[7] E. Fernández-Cara and E. Zuazua. *Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations.* In Annales de l'IHP Analyse non linéaire, vol.17, pages 583–616, 2000.

[8] E. Fernández-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov, and J-P Puel. *Local exact controllability of the navier–stokes system.* Journal de mathématiques pures et appliquées, 83(12) (2004):1501–1542.

[9] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, vol. 5. Springer, 2012.

[10] G. Lebeau and L. Robbiano. *Contrôle exact de léquation de la chaleur.* Communications in Partial Differential Equations, 20(1-2):335–356, 1995.

[11] J. L. Lions. *Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués(tome 1, contrôlabilité exacte. tome 2, perturbations).* Recherches en mathematiques appliquées, 1988.

[12] J. L. Lions. *On some hyperbolic equations with a pressure term.* Proceedings of the conference dedicated to Louis Nirenberg held in Trento, Italy, pages 196–208, 1990.

[13] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires*, volume 31. Dunod Paris, 1969.

[14] J. L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. SIAM review, 30(1):1–68, 1988.

[15] L. A. Medeiros. *Exact controllability for wave equations-hum.* 1993.

[16] L. A. Medeiros. *Equaçoes Diferenciais Parciais Parte I.* 1994.

[17] Melo, S. T., Neto, F. M. *Mecânica dos fluidos e equaçoes diferenciais. IMPA.* 1994.

[18] L. Miller. *The control transmutation method and the cost of fast controls.* SIAM journal on control and optimization, 45(2):762–772, 2006.

[19] K. P. Murillo and F. D. Araruna. *Controlabilidade exata e aproximada da equaçao da onda linear.* 2008.

[20] A. R. Santos. *Exact controllability in dynamic incompressible materials.* PhD thesis, Ph. D. Thesis, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro-Rj-Brasil, 1996.

[21] D. L. Russell. *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations.* Studies in Applied Mathematics, 52(3):189–211, 1973.

[22] J. C. Saut and B. Scheurer. *Unique continuation for some evolution equations.* Journal of differential equations, 66(1):118–139, 1987.

[23] V. A. Solonnikov. *Estimates for solutions of a non-stationary linearized system of navier-stokes equations.* Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova, 70:213–317, 1964.

[24] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68. Springer Science & Business Media, 2012.