

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

O CÁLCULO DE DISTÂNCIAS ENTRE PONTOS INACESSÍVEIS

Francisco Raimundo de Souza Neto

João Pessoa - PB
2015



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



O CÁLCULO DE DISTÂNCIAS ENTRE PONTOS INACESSÍVEIS[†]

por

Francisco Raimundo de Souza Neto

sob orientação dos

**Prof. Dr. Carlos Bocker Neto e Prof. Ms. Gilmar Otávio
Correia**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2015
João Pessoa - PB

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

S729c Souza Neto, Francisco Raimundo de.
O cálculo de distâncias entre pontos inacessíveis /
Francisco Raimundo de Souza Neto.- João Pessoa, 2015.
86f. : il.
Orientadores: Carlos Bocker Neto, Gilmar Otávio Correia
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Distâncias. 3. Trigonometria.
4. Geometria. 5. Astronomia.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

O CÁLCULO DE DISTÂNCIAS ENTRE PONTOS INACESSÍVEIS

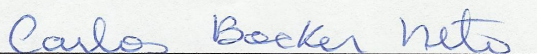
por

Francisco Raimundo de Souza Neto

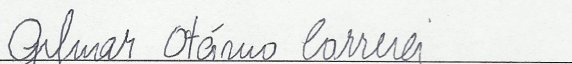
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática, Trigonometria, Geometria e Astronomia

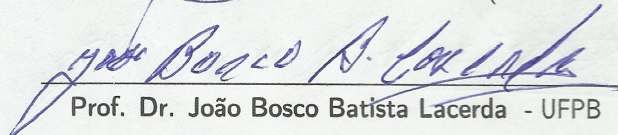
Aprovada por:



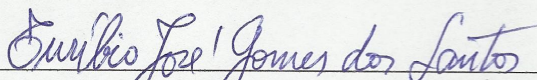
Prof. Dr. Carlos Bocker Neto -UFPB (Orientador)



Prof. Ms. Gilmar Otávio Correia - UFPB (Coorientador)



Prof. Dr. João Bosco Batista Lacerda - UFPB



Prof. Dr. Turibio José Gomes dos Santos -UNIPÊ - UNIPÊ

Fevereiro/2015

Agradecimentos

Quero agradecer em primeiro lugar ao Sr. Jesus Cristo, por me proporcionar mais essa conquista, a meus familiares: pais(Pedro e Neves), esposa(Rejonilda), irmãos(Phablo, Pedro e Paulo), filhos(Pedro Ivo, Beysa Wanda e Petros Brian), colegas e amigos(em especial Felix Neto). A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, em particular aos Professores: Gilmar Otávio Correia e Carlos Bocker Neto.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Rejonilda Cardoso de Lima, companheira de todos os dias, mãe dos meus filhos, por sua paciência e total incentivo.

Resumo

Serão estudadas neste trabalho formas de calcular distâncias entre pontos inacessíveis, utilizando conceitos e definições de trigonometria, geometria analítica espacial e geometria esférica. Também será apresentada uma abordagem histórica dos principais pensadores matemáticos da antiga Grécia. Ainda serão apresentados no decorrer do trabalho definições, teoremas e aplicações dos temas acima citados.

Palavras Chave: Distâncias, Matemática, Trigonometria, Geometria e Astronomia.

Abstract

Will be studied in this paper forms to calculate distances between inaccessible points using trigonometry concepts and definitions , spatial analytic geometry and spherical geometry . It will also be presented a historical approach to the main mathematical thinkers of ancient Greece. Still will be presented during the work settings , theorems and applications of the above themes.

Keywords: Distances , Mathematics , Trigonometry , Geometry and Astronomy.

Sumário

1	Revedo conceitos de trigonometria	1
1.1	Triângulos retângulos	1
1.2	Relações métricas no triângulo retângulo	2
1.3	Trigonometria no triângulo retângulo	5
1.3.1	Razões trigonométricas no triângulo retângulo	5
1.3.2	Ângulos notáveis	17
1.4	Trigonometria em um triângulo qualquer	21
1.4.1	Lei dos cossenos	21
1.4.2	Lei dos senos	27
1.4.3	Ângulos suplementares	32
1.5	Algumas aplicações	33
2	Um pouco de geometria analítica e esférica	39
2.1	Geometria analítica no espaço	39
2.1.1	Distância entre dois pontos no espaço	39
2.1.2	Plano mediador	40
2.2	Geometria esférica	41
2.2.1	Definições básicas	41
2.2.2	Ângulo esférico	43
2.2.3	Triângulo esférico	43
2.2.4	Lei dos cossenos	47
2.3	O cálculo de distâncias aéreas e o ângulo azimute	49
2.3.1	Exemplo 2.1	49
2.3.2	Exemplo 2.2	52
3	A geometria e as distâncias astronômicas na antiga Grécia	55
3.1	Eratóstenes e o tamanho da Terra	55
3.1.1	O trabalho de Eratóstenes	56
3.1.2	Que matemática foi usada?	57
3.1.3	Será que foi isso mesmo?	57
3.1.4	O raio da Terra	58
3.1.5	Os números de Eratóstenes e os de hoje	59
3.2	Aristarco e a distância ao Sol	59
3.2.1	Qual o mais distante: o Sol ou a Lua?	60
3.2.2	A genial ideia de Aristarco	60

3.2.3	Tamanhos do Sol e da Terra	62
3.2.4	Os resultados obtidos por Aristarco	63
3.2.5	A utilidade de um eclipse lunar	65
A	Apêndice	68
A.1	Os astrônomos da Grécia antiga - um pouco de história	68
A.1.1	Tales de Mileto(624-546 a.C.)	68
A.1.2	Pitágoras de Samos(572-497 a.C.)	68
A.1.3	Aristóteles de Estagira(384-322 a.C.)	69
A.1.4	Heraclites de Pontus(388-315 a.C.)	69
A.1.5	Aristarco de Samos(310-230 a.C.)	70
A.1.6	Eratóstenes de Cirênia(276-194 a.C.)	70
A.1.7	Hiparco de Nicéia(160-125 a.C.)	71
A.1.8	Ptolomeu(85-165 d.C.)	71
A.2	Matemática e Astronomia	72
A.3	Um pouco de álgebra linear	73
A.3.1	Produto escalar	73
A.3.2	Produto vetorial	73
	Referências Bibliográficas	74

Lista de Figuras

1.1	Triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$.	1
1.2	Triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$.	2
1.3	Triângulo ABC retângulo e $\hat{A}$.	3
1.4	Triângulos ABH e A_1H_1C , ambos retângulos.	3
1.5	Triângulo do Exemplo 1.1.	4
1.6	Triângulo retângulo ABC.	6
1.7	Figura do exemplo 1.2.	7
1.8	figura 1 do exemplo 1.3.	7
1.9	figura 2 do exemplo 1.3.	8
1.10	Triângulo retângulo ABC.	10
1.11	Figura do exemplo 1.4.	11
1.12	figura do exemplo 1.5.	12
1.13	Triângulo retângulo ABC.	13
1.14	Triângulo retângulo ABC.	15
1.15	Triângulo retângulo ABC.	16
1.16	Triângulo retângulo ABC.	16
1.17	Triângulo equilátero ABC.	17
1.18	Triângulo retângulo ABC.	19
1.19	Triângulo retângulo e isósceles ABC.	19
1.20	Figura do exemplo 1.10.	20
1.21	Triângulo retângulo ABC.	21
1.22	Triângulo obtusângulo ABC.	22
1.23	figura do exemplo 1.13.	24
1.24	Triângulo ABC.	25
1.25	Triângulo ABC.	25
1.26	Figura do exemplo 1.14.	26
1.27	Triângulo acutângulo ABC.	27
1.28	Triângulo obtusângulo ABC.	28
1.29	Triângulo retângulo ABC.	29
1.30	Figura do exemplo 1.11.	30
1.31	Figura do exemplo 1.12.	31
1.32	Figura do Problema 1	33
1.33	Figura do Problema 2 - Triângulo ABP.	35
1.34	Triângulos ABX e ABY.	36
1.35	Figura: medindo o raio da Terra	37

2.1	Diagonal de um paralelepípedo.	40
2.2	Plano Mediador	41
2.3	Grande círculo	41
2.4	Geodésica AB	42
2.5	Geodésica AB	42
2.6	Ângulo esférico	43
2.7	Triângulo esférico	44
2.8	Ângulos de lados	45
2.9	Ângulos de lados	45
2.10	Figura 1 da demonstração.	46
2.11	Figura 2 da demonstração.	47
2.12	Lei dos cossenos	47
2.13	Figura 1 do exemplo 2.1.	50
2.14	Figura 2 do exemplo 2.1.	50
2.15	Figura 1 do exemplo 2.2.	52
2.16	Figura 2 do exemplo 2.2.	53
3.1	Mapa da região da grande represa de Assuã.	56
3.2	Raios solares sobre Alexandria.	57
3.3	Raio solar.	58
3.4	Modelo matemático.	58
3.5	Modelo onde a Terra é centro do Sistema solar.	60
3.6	A idéia de Aristarco.	61
3.7	Tamanhos angulares do Sol e da Terra.	62
3.8	Modelo de um eclipse lunar.	65
3.9	Modelo matemático de um eclipse lunar.	66
A.1	Talles de Mileto, 624 - 546 a.C.	68
A.2	Pitágoras de Samos, 572 - 497 a.C.	68
A.3	Aristóteles de Estagira, 384 - 322 a.C.	69
A.4	Heraclites de Pontus, 388 - 315 a.C.	69
A.5	Aristarco de Samos, 310 - 230 a.C.	70
A.6	Eratóstenes de Cirênia, 276 - 194 a.C.	70
A.7	Hiparco de Nicéia, 160 - 125 a.C.	71
A.8	Claudius Ptolomaeus, 85 - 165 d.C.	71
A.9	Modelo onde a Terra é centro do Sistema solar.	72

Lista de Tabelas

1.1	Tabela com valores de seno	9
1.2	Tabela com Ângulos Notáveis	20
2.1	Tabela do EXEMPLO 2.1	49

Introdução

Quando estudante do ensino regular, me intrigava questões, tais como: A distância da Terra ao Sol é X , a distância da Terra a Lua é Y . Tais intrigas persistiram durante minha formação como estudante de matemática, ficando mais claras com o passar do tempo. E, como professor, percebi a inquietação de meus alunos quando nos referíamos a tais assuntos, isso foi um elemento propulsor para realização deste trabalho.

Quanto mais o tempo passa e mais se acelera o ritmo das perturbadoras descobertas, tanto mais longe, para horizontes vertiginosos, recuam os limites do Universo. Até mesmo os nossos mais familiares companheiros nos mergulham numa estupefação crescente, à medida que os vamos conhecendo melhor. O Sol, por exemplo, com seus 696.000 quilômetros de raio, que se encontra a 149.600.000 quilômetros de nós e que pesa 322.500 vezes mais do que a Terra, astro que devora a si mesmo, já que transforma, a cada segundo, 500 milhões de toneladas de hidrogênio em hélio e perde, a cada ano, 20.000 bilhões de toneladas, astro, não obstante, ínfimo perdido entre os milhares de estrelas da nossa galáxia, a 30.000 anos-luz do centro dela (GROUEFF, 1978, p.21). Há apenas algumas dezenas de anos que os cientistas começaram a explorar as outras galáxias, entre as quais Andrômeda, que se encontra a dois milhões de anos-luz, e que se aglutinam às dezenas ou aos milhares em agrupamentos ora regulares, ora irregulares. Que dizer das novas, estas estrelas que ficam, de repente, tão brilhantes que emitem, em alguns meses, tanta energia quanto o Sol em dez mil anos? E das supernovas que aparecem de tempos em tempos e das quais algumas são, no seu apogeu, muito mais possantes que o Sol? Seria necessário também mencionar os pulsares e os quasares, que os astrônomos estão começando a entender melhor.

Para falar de todos os fenômenos observados, foi preciso encontrar uma nova linguagem. Já não basta o ano-luz, que, no entanto representa 300.000 quilômetros por segundo durante um ano. Os cientistas efetuam atualmente os seus cálculos em parsecs, cada qual equivalendo a 3,26 anos-luz, e também em unidades astronômicas (UA), sendo esta unidade equivalente à distância média entre a Terra e o Sol. Queremos, neste trabalho, não apenas descrever as técnicas que nos permitem chegar às distâncias astronômicas, mas também apresentar técnicas que permitam calcular distâncias entre dois pontos incassíveis, utilizando de recursos matemáticos encontrados na geometria, trigonometria e geometria esférica. Para isso, utilizaremos exemplos anteriormente comprovados e demonstrados. Percorreremos um caminho que nos mostrará conceitos e em seguida suas aplicações, e desta forma esperamos mostrar da melhor maneira o que propomos.

Capítulo 1

Revendo conceitos de trigonometria

Neste capítulo iremos rever alguns conceitos básicos de trigonometria que nos ajudarão no decorrer do trabalho, na resolução de problemas propostos e demonstrações de alguns resultados. Além disso iremos desenvolver uma teoria geométrico-trigonométrica que permita calcular as medidas de segmentos ou ângulos de um triângulo retângulo, partindo de um número mínimo de dados. As demonstrações não feitas aqui serão apresentadas no apêndice.

1.1 Triângulos retângulos

Sabemos que um triângulo é dito retângulo quando um de seus ângulos internos é reto (90°).

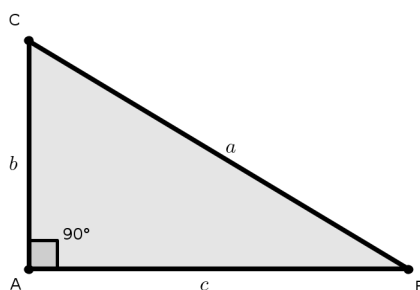


Figura 1.1: Triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$.

Como é habitual, vamos utilizar a notação seguinte para os elementos de um triângulo **ABC**, retângulo em $\hat{A}$, de acordo com a figura 1.1:

- Lados: **AB**, **BC** e **AC**;
- Ângulos internos: $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$;

- Medidas dos lados: a = medida de BC , b = medida de AC e c = medida de AB ;
- Medidas dos ângulos: $\hat{A}$ = medida de $B\hat{A}C$, $\hat{B}$ = medida de $A\hat{B}C$ e $\hat{C}$ = medida de $A\hat{C}B$.

Sempre que tratarmos de um triângulo retângulo ABC , daqui por diante adotaremos que o ângulo interno $\hat{A}$ mede (90°) .

Sabemos que o lado BC , oposto ao ângulo reto, é chamado de *hipotenusa* e os lados AB e AC , adjacentes ao ângulo reto, são chamados de *catetos* do triângulo ABC .

Para simplificar nossa linguagem diremos que o triângulo ABC tem hipotenusa a e catetos b e c , isto é, vamos representar BC , AC e AB por suas respectivas medidas a , b e c . Analogamente, diremos que os ângulos internos do triângulo são $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

1.2 Relações métricas no triângulo retângulo

Todo triângulo retângulo possui dois ângulos agudos complementares e um ângulo reto, ao qual se opõe o seu maior lado, chamado hipotenusa; os outros dois lados são denominados catetos. Provaremos algumas relações notáveis entre segmentos de um mesmo triângulo retângulo.

Tomemos o triângulo ABC da figura 1.2, abaixo. Se traçarmos AH perpendicular à BC , com H em BC , obtemos:

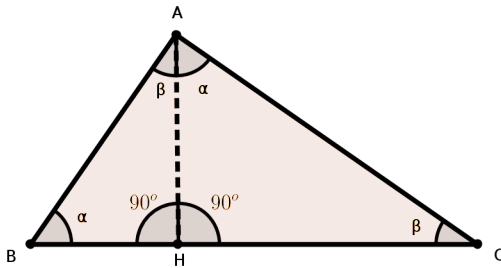


Figura 1.2: Triângulo ABC , retângulo em $\hat{A}$.

A perpendicular ao lado $\overline{BC}$, traçada por A , é a altura h , relativa à hipotenusa do triângulo.

$BH = n$ e $CH = m$ são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Observando as medidas dos ângulos, concluímos que os três triângulos formados são semelhantes:

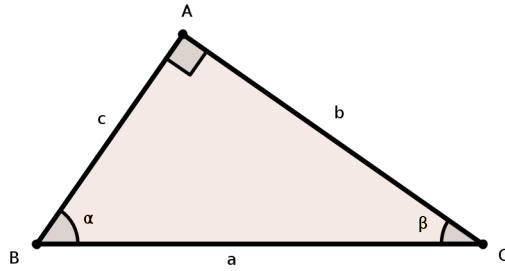


Figura 1.3: Triângulo ABC retângulo e $\hat{A}$.

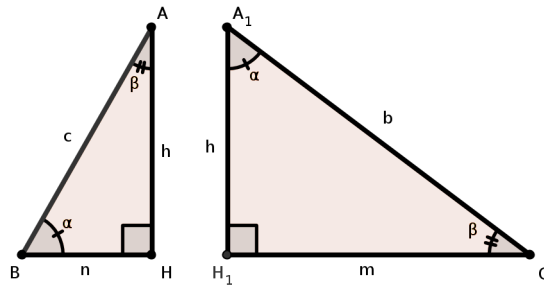


Figura 1.4: Triângulos ABH e A_1H_1C , ambos retângulos.

Considerando a semelhança entre os três triângulos, temos:

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow$$

$$b^2 = a \cdot m \text{ (1.1) e } a \cdot h = b \cdot c \text{ (2)}$$

Pela semelhança entre o primeiro e o terceiro triângulos:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \text{ (1.2)}$$

Considerando agora a semelhança entre os dois últimos triângulos, podemos escrever:

$$\frac{h}{n} = \frac{c}{m} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \text{ (3)}$$

Assim, podemos afirmar que em todo triângulo retângulo:

- O quadrado de cada cateto vale o produto da sua projeção sobre a hipotenusa vezes a hipotenusa.

- O produto da hipotenusa pela altura relativa a ela vale o produto dos catetos.
- O quadrado da altura relativa à hipotenusa vale o produto entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Lembrando que $a = m + n$ e considerando ainda as relações (1.1) e (1.2), temos:

$$\begin{aligned} a \cdot m &= b^2 \\ \text{e} \\ a \cdot n &= c^2 \end{aligned}$$

somando as equações acima, obteremos:

$$a \cdot m + a \cdot n = b^2 + c^2 \Rightarrow a \cdot (m + n) = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad (4)$$

Esta última, e muito importante, relação é conhecida com Teorema de Pitágoras e é assim enunciada:

Teorema 1.1 - [Teorema de Pitágoras]:

"Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos."

Exemplo 1.1

Sejam 2 e 3 as medidas das projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa. Vamos calcular as medidas dos catetos.

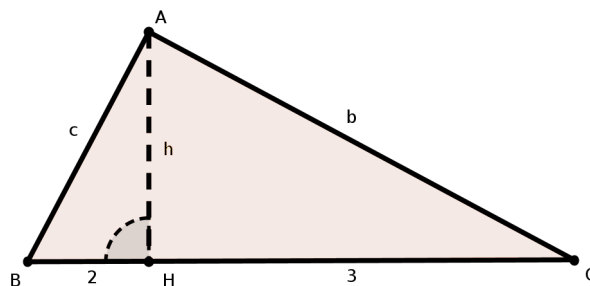


Figura 1.5: Triângulo do Exemplo 1.1.

Podemos fazer pela relação (3):

$$h^2 = 2 \cdot 3 \Rightarrow h = \sqrt{6}$$

Como o triângulo $\triangle ABH$ é retângulo em **H**, vale o Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 2^2 + h^2 = 4 + 6 = 10$$

e

$$c = \sqrt{10}$$

Por (1), temos:

$$b^2 = 5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow b = \sqrt{15}\text{cm}$$

Também podemos usar o Teorema de Pitágoras, no $\triangle ACH$ ou no $\triangle ABC$.

Constatando os resultados obtidos:

$$\text{Por (1): } \sqrt{10^2} = 5 \cdot 2 \text{ e } \sqrt{15^2} = 5 \cdot 3$$

$$\text{Por (2): } 5 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{10}$$

$$\text{Por (3): } \sqrt{6^2} = 2 \cdot 3$$

$$\text{Pelo Teorema de Pitágoras: } 5^2 = \sqrt{10^2} + \sqrt{15^2}$$

1.3 Trigonometria no triângulo retângulo

Vamos agora provar as três propriedades que relacionam as medidas dos lados e as dos ângulos internos de um triângulo retângulo **ABC**, também conhecidas como *razões trigonométricas no triângulo retângulo*.

1.3.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Um triângulo é uma figura geométrica plana, constituída por três lados e três ângulos internos. Esses ângulos, tradicionalmente, são medidos numa unidade de medida, denominada grau e, cada um deles tem medida entre 0° e 180° , de modo que, em qualquer triângulo, a soma dessas medidas é 180° (Teorema de Talles).

Num triângulo retângulo definimos as chamadas razões trigonométricas que são relações entre os lados do triângulo e que têm a propriedade de determinar a medida dos ângulos do

triângulo, uma vez que seus lados sejam conhecidos.

As seis razões trigonométricas são: Seno(**sen**), Cosseno(**cos**), Tangente(**tg**), Cotangente(**cotg**), Secante(**sec**) e Cossecante(**cossec**).

Seno de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é dado pelo quociente(razão) entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa.

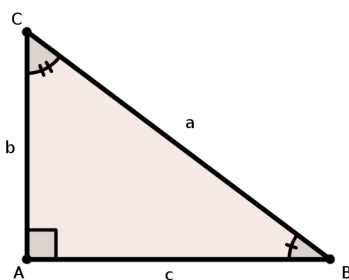


Figura 1.6: Triângulo retângulo ABC.

$$\text{sen}(x) = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{hipotenusa}}$$

No caso, temos:

$$\text{sen}(B) = \frac{b}{a}$$

e

$$\text{sen}(C) = \frac{c}{a}$$

Exemplo 1.2

Seja o triângulo **ABC** de hipotenusa 17 e catetos 8 e 15.

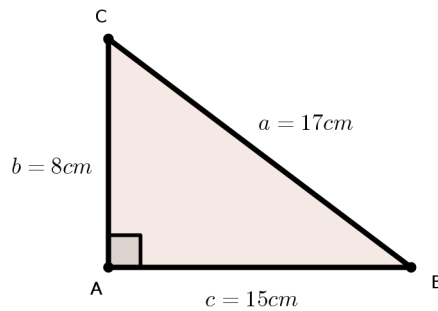


Figura 1.7: Figura do exemplo 1.2.

Para determinar o seno de cada ângulo agudo, fazemos:

$$\text{sen}(B) = \frac{\text{cateto oposto à B}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{8}{17} \cong 0,470$$

$$\text{sen}(C) = \frac{\text{cateto oposto à C}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{15}{17} \cong 0,882$$

Exemplo 1.3

Vamos calcular o seno de cada ângulo agudo do triângulo **DEF** de catetos 6 e 8.

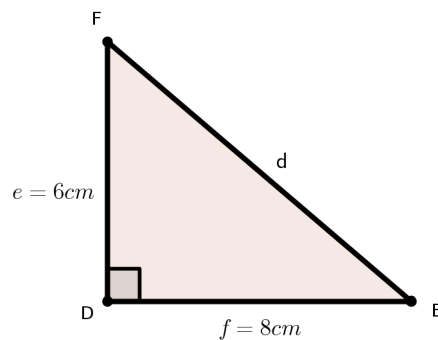


Figura 1.8: figura 1 do exemplo 1.3.

Antes precisamos determinar a medida da hipotenusa **d**:

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = e^2 + f^2 \Rightarrow d^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow d = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$d = \sqrt{100} = 10$$

Agora temos:

$$\text{sen}(E) = \frac{e}{d} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen}(F) = \frac{f}{d} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Observe a seguir o triângulo $D'E'F'$, com hipotenusa medindo 5 cm e catetos com medidas 3 cm e 4 cm.

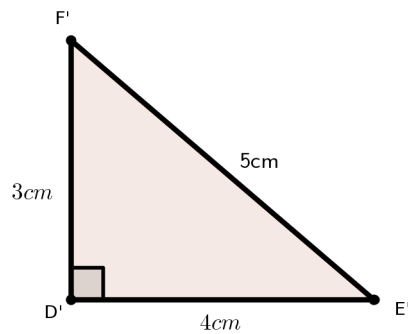


Figura 1.9: figura 2 do exemplo1.3.

Vejamos que:

$$\triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$$

$$\text{sen}(E') = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen}(F') = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

Como os triângulos são semelhantes, há congruência entre ângulos que se correspondem:

$$E \equiv E'$$

e

$$F \equiv F'$$

O fato de $\text{sen}E = \text{sen}E'$ e $\text{sen}F = \text{sen}F'$ sugere invariância do seno de qualquer ângulo: independentemente do "tamanho" de cada triângulo, o ângulo **E** (que mede aproximadamente 37°) possui o seno valendo 0,6 e o ângulo **F** (que mede aproximadamente 53°) possui o seno valendo 0,8.

Justifica-se, assim, uma tabela contendo o valor de cada ângulo agudo (tomadas quantidades inteiras de graus).

Veja uma parte da tabela:

Ângulo	Seno
1°	0,01745
2°	0,03490
3°	0,05234
...	...
36°	0,58779
37°	0,60182
38°	0,61566
...	...
52°	0,78801
53°	0,79864
...	...
88°	0,99939
89°	0,99985
90°	1

Tabela 1.1: Tabela com valores de seno

É importante notar que, conforme aumenta a medida do ângulo agudo, cresce também, de modo não linear, o valor do seno do ângulo agudo.

Esta tabela apresenta caráter biunívoco: a cada ângulo agudo corresponde um único valor do seno e, reciprocamente, a cada valor de seno associa-se um único ângulo agudo.

OBSERVAÇÃO:

A tabela completa contendo o seno de cada ângulo agudo (de grau em grau) e as outras razões trigonométricas (que serão vistas a seguir), encontra-se no apêndice deste, e devem ser consultadas sempre que necessário.

Cosseno de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é dado pelo quociente(razão) entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa.

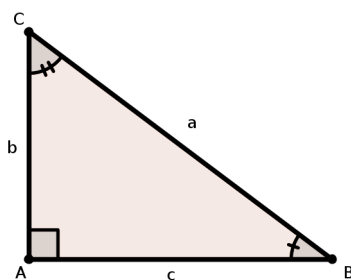


Figura 1.10: Triângulo retângulo ABC.

$$\cos(x) = \frac{\text{cateto adjacente a } x}{\text{hipotenusa}}$$

No caso, temos:

$$\cos(B) = \frac{c}{a}$$

e

$$\cos(C) = \frac{b}{a}$$

Exemplo 1.4

Determinemos o cosseno de cada ângulo agudo do triângulo DEF.

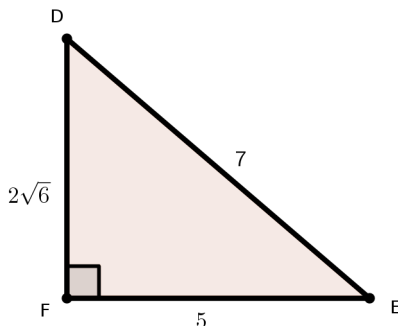


Figura 1.11: Figura do exemplo 1.4.

Temos:

$$\cos(D) = \frac{\text{cateto adjacente a D}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\cos(E) = \frac{\text{cateto adjacente a E}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{7}$$

O cosseno de um determinado ângulo agudo também não depende do particular triângulo retângulo tomado para calculá-lo.

Assim, é possível incluir os valores dos cossenos dos ângulos na tabela citada anteriormente, a qual também mostra caráter biunívoco entre a medida de cada ângulo agudo e o valor do respectivo cosseno. Porém, diferentemente do seno, o cosseno de um ângulo agudo decresce à proporção que aumenta a medida do ângulo. Procure observar este fato na tabela completa que consta no apêndice deste.

Exemplo 1.5

Para calcular os cossenos dos ângulos do triângulo **GHF**, fazemos:

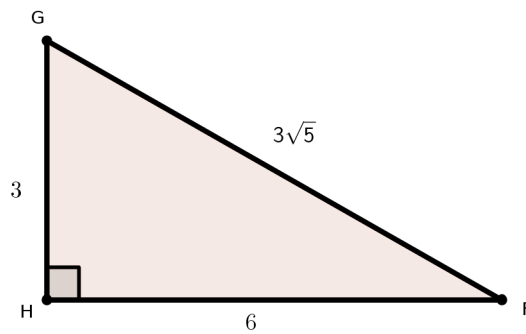


Figura 1.12: figura do exemplo 1.5.

$$\cos(F) = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos(G) = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Se, por outro lado, calculamos os senos dos ângulos agudos do triângulo **GHF**, obteremos:

$$\text{sen}(F) = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

e

$$\text{sen}(G) = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Observemos que:

$$\text{sen}(I) = \cos(G)$$

e

$$\text{sen}(G) = \cos(F)$$

Lembrando que os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares, surge uma propriedade importante envolvendo senos e cossenos:

$$\operatorname{sen}(x) = \cos(90^\circ - x)$$

e

$$\cos(x) = \operatorname{sen}(90^\circ - x)$$

Note esse fato na tabela das razões trigonométricas (ver apêndice). Veja, por exemplo, que $\operatorname{sen}20^\circ = 0,34202$ e que $\cos(90^\circ - 20^\circ) = \cos70^\circ = 0,34202$.

Relação fundamental I

Seja o triângulo retângulo **ABC** a seguir.

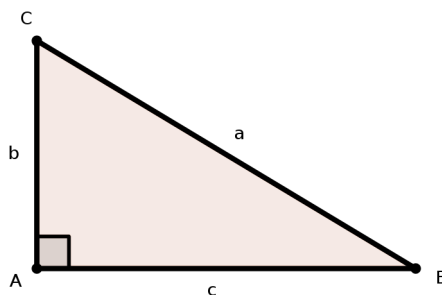


Figura 1.13: Triângulo retângulo ABC.

Sabemos, pelo Teorema de Pitágoras, que $b^2 + c^2 = a^2$.

Dividindo, membro a membro, por a^2 , obtemos:

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = 1$$

ou

$$\cos^2(C) + \operatorname{sen}^2(C) = 1$$

De modo geral, podemos escrever, para um ângulo x qualquer, com $0^\circ < x < 90^\circ$:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

a igualdade acima é chamada de **relação fundamental I da trigonometria**.

Exemplo 1.6

Tomemos, para exemplificar, um ângulo de 32° e, mediante o uso da tabela (ver apêndice), comprovemos a *relação fundamental I*.

Temos:

$$\operatorname{sen}(32^\circ) = 0,52992 \Rightarrow \operatorname{sen}^2(32^\circ) = 0,28081 \quad (1)$$

$$\operatorname{cos}(32^\circ) = 0,84805 \Rightarrow \operatorname{cos}^2(32^\circ) = 0,71918 \quad (2)$$

somando (1) e (2), obteremos:

$$\operatorname{sen}^2(32^\circ) + \operatorname{cos}^2(32^\circ) = 0,28081 + 0,71918 = 0,99999 \cong 1$$

Exemplo 1.7

A *relação fundamental I* permite que, dadas duas razões de um ângulo agudo, determinemos o valor da outra razão trigonométrica do mesmo ângulo.

Dado, por exemplo, $\operatorname{cos}(x) = 0,17365$, é possível determinar, sem o uso da tabela, o valor de $\operatorname{sen}(x)$, com $0^\circ < x \leq 90^\circ$.

Basta fazer:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2(x) + 0,17365^2 = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = 1 - 0,17365^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = 0,96985$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(x) = \sqrt{0,96985} \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = 0,984809$$

Verificando na tabela:

x	sen(x)	cos(x)
...	...	...
80°	0,98481	0,17365
...	...	...

Tangente de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, a *tangente* de um ângulo agudo é dada pela razão entre o cateto oposto a esse ângulo e o cateto adjacente a ele.

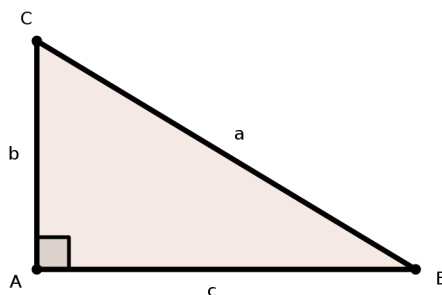


Figura 1.14: Triângulo retângulo ABC.

$$tg(x) = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{cateto adjacente a } x}$$

no caso temos:

$$tg(B) = \frac{b}{c} \text{ e } tg(C) = \frac{c}{b}$$

Exemplo 1.8

Não é necessário que conheçamos a hipotenusa para achar $tg(B)$ e $tg(C)$.

Veja:

$$tg(B) = \frac{9}{5} \text{ e } tg(C) = \frac{5}{9}$$

Podemos notar que as tangentes dos ângulos agudos e complementares são inversas uma da outra.

Lembrando que os ângulos **B** e **C** são complementares, podemos escrever, generalizando:

$$(tg(x)) \cdot (tg(90^\circ - x)) = 1 \text{ ou } tg(90^\circ) = \frac{1}{tg(90^\circ - x)}$$

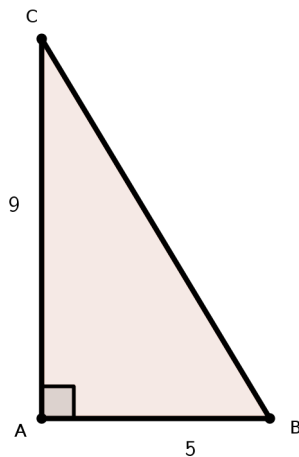


Figura 1.15: Triângulo retângulo ABC.

Relação fundamental II

Observe o triângulo **ABC** abaixo. Podemos escrever $tg(B) = \frac{b}{c}$.

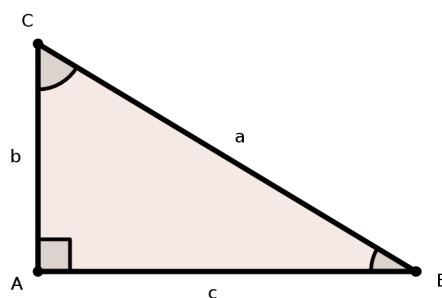


Figura 1.16: Triângulo retângulo ABC.

Dividindo simultaneamente o numerador e o denominador da fração por a (medida da hipotenusa do triângulo), obtemos:

$$tg(B) = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}},$$

ou seja,

$$tg(B) = \frac{\text{sen}(B)}{\text{cos}(B)}$$

De modo geral, escrevemos:

$$tg(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}, \text{ para todo ângulo agudo } x.$$

É chamada *relação fundamental II da trigonometria*.

Exemplo 1.9

Se $x = 29^\circ$ e consultando a tabela do apêndice, temos:

Seja $x = 29^\circ$. Temos $\text{sen}(29^\circ) = 0,48481$ e $\text{cos}(29^\circ) = 0,87462$.

Dividindo 0,48481 por 0,87462, obtemos:

$$0,48481 \div 0,87462 = 0,5543 = tg(29^\circ)$$

1.3.2 Ângulos notáveis

Faremos agora algumas considerações importantes com relação aos ângulos de 30° , 45° e 60° , chamados *ângulos notáveis*.

- Há triângulos que apresentam um ângulo agudo de 30° (consequentemente, o outro ângulo mede 60°). Procuraremos calcular os valores das razões trigonométricas de 30° e 60° . Para tanto, construiremos um triângulo equilátero **ABC** de lado **l**, traçando sua altura **AH**, de medida **h**.

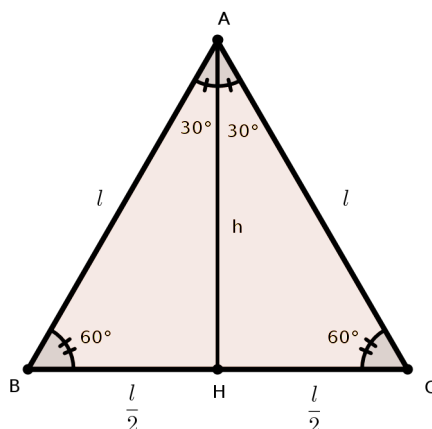


Figura 1.17: Triângulo equilátero ABC.

Temos:

$$\overline{BH} = \overline{CH} = \frac{l}{2}$$

$$BAH = CAH = 30^\circ$$

Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado no $\triangle AHC$, obtemos:

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Podemos, assim, determinar as razões procuradas:

- $\sin(30^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow \sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$
- $\cos(30^\circ) = \frac{h}{l} \Rightarrow \cos(30^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow \cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan(60^\circ) = \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} \Rightarrow \tan(60^\circ) = \sqrt{3}$
- $\tan(30^\circ) = \frac{1}{\tan(60^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Há triângulos retângulos que apresentam os dois ângulos medindo, cada um, 45° . Vejamos o triângulo retângulo isósceles **ABC** de catetos iguais a **1** e hipotenusa **a**. Calcularemos os valores das razões trigonométricas de 45° .

OBSERVAÇÃO:

Uma consequência importante:

"Se um triângulo retângulo possui um ângulo de 30° , a hipotenusa mede o dobro do cateto oposto a esse ângulo."

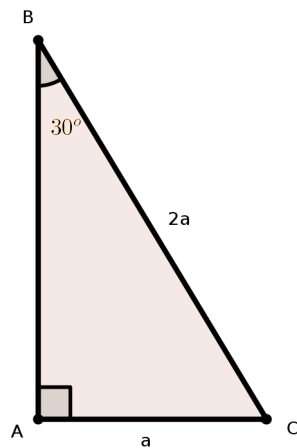


Figura 1.18: Triângulo retângulo ABC.

Há triângulos retângulos que apresentam os dois ângulos medindo, cada um, 45° . Vejamos o triângulo retângulo isósceles **ABC** de catetos iguais a **l** e hipotenusa **a**. Calcularemos os valores das razões trigonométricas de 45° .

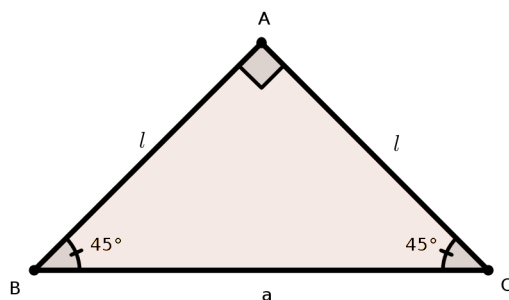


Figura 1.19: Triângulo retângulo e isósceles ABC.

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$a^2 = l^2 + l^2 = 2 \cdot l^2 \Rightarrow a = l\sqrt{2}$$

Assim, temos:

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}(45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Temos também:

$$tg(45^\circ) = \frac{\text{sen}(45^\circ)}{\text{cos}(45^\circ)} \Rightarrow tg(45^\circ) = 1$$

Resumindo, temos a seguinte tabela:

Razão/Ângulo	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1.2: Tabela com Ângulos Notáveis

Observe, por exemplo, o valor de $\text{sen}(45^\circ)$. Nessa tabela aparece o valor $\frac{\sqrt{2}}{2}$, exatamente o mesmo número que consta na tabela completa ($\text{sen}(45^\circ) = 0,70711$).

A alta frequência com que os ângulos notáveis aparecem justifica a apresentação da tabela anterior. Com ela, os cálculos ficam facilitados.

Exemplo 1.10

Observando a figura abaixo, podemos calcular as medidas dos segmentos **BD** e **CD**.

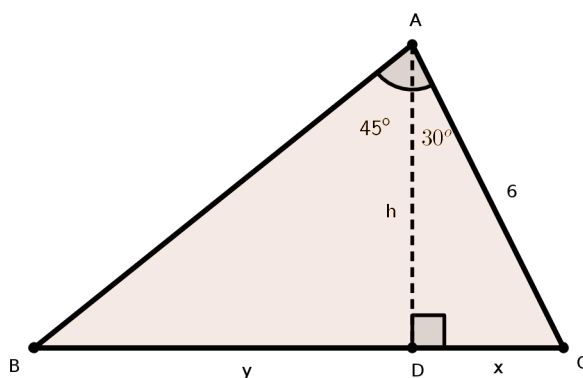


Figura 1.20: Figura do exemplo 1.10.

Pela propriedade enunciada, temos:

$$\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 = \overline{CD}$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} 6^2 &= (\overline{AD})^2 + 3^2 \Rightarrow (\overline{AD})^2 = 6^2 - 3^2 \\ &\Rightarrow \overline{AD} = 3\sqrt{3} = y = \overline{BD} \end{aligned}$$

1.4 Trigonometria em um triângulo qualquer

As propriedades estudadas nas seções anteriores deste capítulo, são válidas somente para triângulos retângulos. Nesta seção, vamos apresentar as propriedades válidas para quaisquer triângulos.

As razões trigonométricas estabelecidas para os ângulos agudos também são definidas para os outros tipos de ângulos. Porque trataremos de triângulos obtusângulos, inclusive, apresentaremos os senos e cossenos de ângulos suplementares.

1.4.1 Lei dos cossenos

"Em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado."

DEMONSTRAÇÃO:

- Seja o triângulo **ABC**, acutângulo, e $CH = h$ a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$

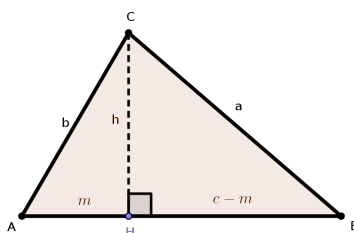


Figura 1.21: Triângulo retângulo ABC.

$$\triangle ABC : a^2 = h^2 + (c - m)^2 \quad (1)$$

$$\triangle ACH : b^2 = h^2 + m^2$$

$$\Rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \quad (2)$$

Portanto, aplicando (2) em (1), temos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m \quad (3)$$

Mas $m = b \cdot \cos A$.

Assim,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

.

Analogamente, podemos escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B) \text{ e}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

- Seja o triângulo **ABC**, obtusângulo em **A**, e $CH = h$ a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

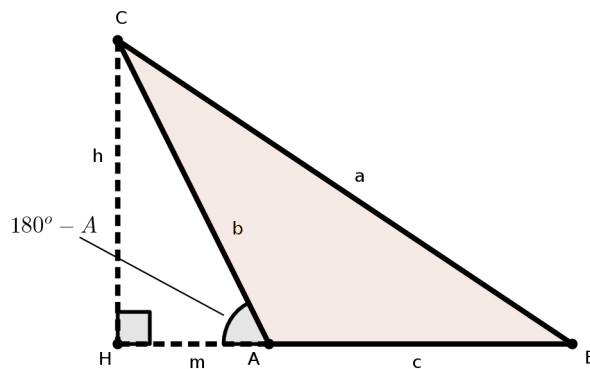


Figura 1.22: Triângulo obtusângulo ABC.

$$\triangle BCH : a^2 = h^2 + (c + m)^2 \quad (4)$$

$$\triangle ACH : h^2 = b^2 - m^2 \quad (5)$$

Logo, aplicando (5) em (4), temos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m$$

Mas,

$$m = b \cdot \cos(180^\circ - A) = b \cdot (-\cos A) = -b \cdot \cos(A)$$

Assim,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Analogamente, podemos escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B) \text{ e}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C).$$

- No caso de o triângulo **ABC** ser retângulo (em **A**, por exemplo), como $\cos(90^\circ) = 0$, verifica-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(90^\circ)$, que se reduz à expressão do teorema de Pitágoras. Para cada um dos dois ângulos agudos do triângulo (B e C) caberia uma demonstração análoga à primeira.

Como pudemos perceber nos três casos, em qualquer triângulo **ABC** temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

Exemplo 1.13

Um triângulo possui um ângulo de 60° compreendido entre os lados de 5 cm e 8 cm.

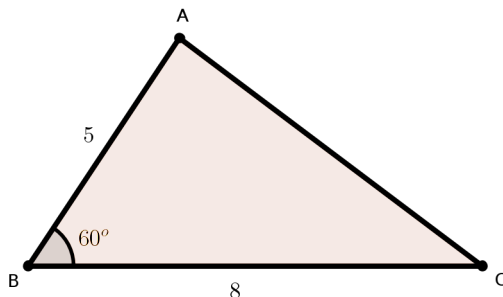


Figura 1.23: figura do exemplo 1.13.

Podemos determinar a medida do lado **AC** usando a lei dos cossenos:

$$b^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(60^\circ)$$

$$b^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49 \Rightarrow b = 7$$

Assim, o terceiro lado do triângulo mede 7 cm.

Vale lembrar duas importantes propriedades acerca dos triângulos:

- Em todo triângulo, a soma das medidas de dois lados supera a medida do outro lado (desigualdade triangular).

$$BC < AB + AC$$

$$AC < AB + BC$$

$$AB < AC + BC$$

- Em todo triângulo, ao maior (ou menor) lado opõe-se o maior (ou menor) ângulo e vice-versa.

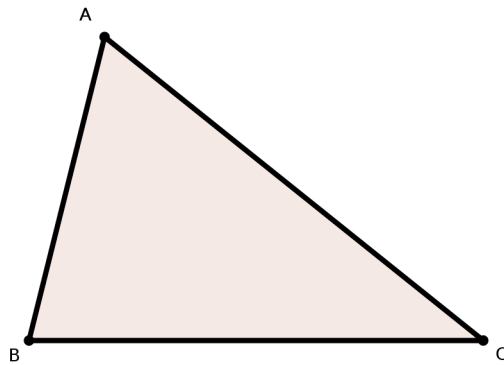


Figura 1.24: Triângulo ABC.

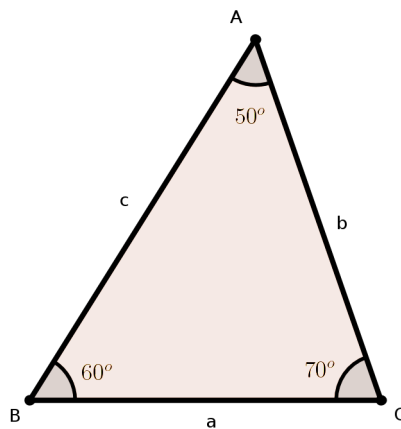


Figura 1.25: Triângulo ABC.

$$a < b < c$$

Exemplo 1.14

Observe a figura a seguir.

Podemos determinar as medidas dos ângulos desse triângulo **ABC** usando inicialmente a lei dos cossenos, escolhendo um lado:

$$12^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos(A)$$

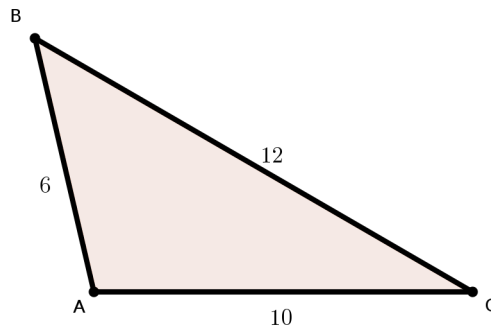


Figura 1.26: Figura do exemplo 1.14.

$$\cos(A) = -\frac{1}{15}$$

e

$$A \cong 94^\circ$$

Para determinar a medida do ângulo **B**:

$$10^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos(B)$$

Logo:

$$144 \cdot \cos B = 80 \Rightarrow \cos(B) = \frac{5}{9}$$

e

$$B \cong 56^\circ$$

(Também nesse momento poderíamos ter utilizado a lei dos senos.)

Finalmente:

$$C = 30^\circ, \text{ por diferença.}$$

1.4.2 Lei dos senos

"Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles."

DEMONSTRAÇÃO:

- Seja o triângulo **ABC**, acutângulo, e **CH** a altura relativa ao lado **AB**.

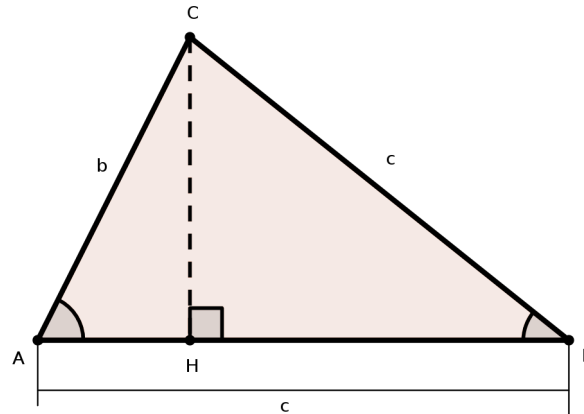


Figura 1.27: Triângulo acutângulo ABC.

$$\triangle CAH : \operatorname{sen}(A) = \frac{CH}{b} \Rightarrow CH = b \cdot \operatorname{sen}(A) \quad (1)$$

$$\triangle CBH : \operatorname{sen}(B) = \frac{CH}{a} \Rightarrow CH = a \cdot \operatorname{sen}(B) \quad (2)$$

Portanto, de (1) e (2), temos:

$$b \cdot \operatorname{sen}(A) = a \cdot \operatorname{sen}(B) \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)}$$

Procedendo de modo análogo, temos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Podemos escrever, então:

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)}$$

- Seja o triângulo **ABC**, obtusângulo em **A**, e **CH** a altura relativa ao lado **AB**.

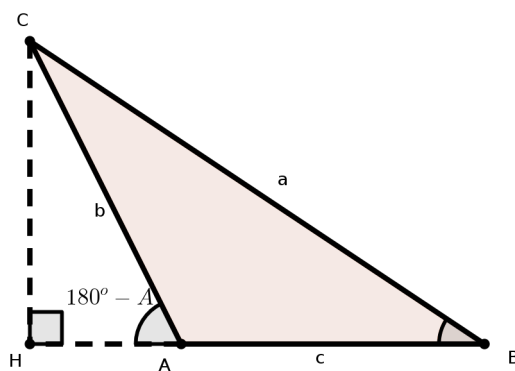


Figura 1.28: Triângulo obtusângulo ABC.

$$\triangle CAH : \text{sen}(180^\circ - A) = \frac{CH}{b} = \text{sen}(A) \Rightarrow CH = b \cdot \text{sen}(A) \quad \textbf{(3)}$$

$$\triangle CBH : \text{sen}(B) = \frac{CH}{a} \Rightarrow CH = a \cdot \text{sen}(B) \quad \textbf{(4)}$$

Portanto, de **(3)** e **(4)**, temos:

$$b \cdot \text{sen}(A) = a \cdot \text{sen}(B) \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)}$$

Procedendo de modo análogo, temos:

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{c}{\text{sen}(C)}$$

Podemos escrever, então:

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)}$$

- seja o triângulo **ABC**, retângulo. Temos:

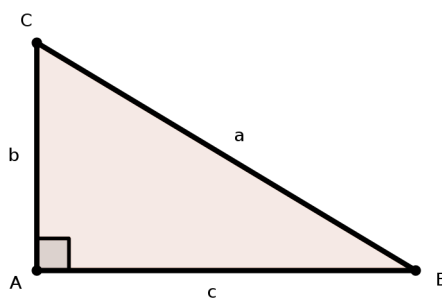


Figura 1.29: Triângulo retângulo ABC.

$$\text{sen}(B) = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen}(B)} \quad (5)$$

$$\text{sen}(C) = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\text{sen}(C)} \quad (6)$$

Portanto, de (5) e (6), temos:

$$\frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)}$$

Por outro lado, temos:

$$\text{sen}(A) = \text{sen}(90^\circ) = 1$$

e

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\text{sen}(B)} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)}$$

Como pudemos perceber nos três casos, em qualquer triângulo **ABC** temos:

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)}$$

Exemplo 1.11

No triângulo **ABC** da figura abaixo, vamos determinar as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

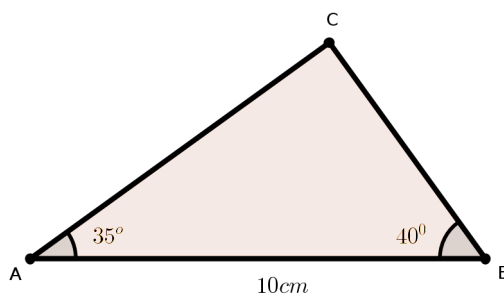


Figura 1.30: Figura do exemplo 1.11.

$$C = 180^\circ - (35^\circ + 40^\circ) = 105^\circ$$

Logo:

$$\text{sen}(C) = \text{sen}(105^\circ) = \text{sen}(75^\circ) = 0,96593$$

Pela lei dos senos, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\text{sen}(40^\circ)} &= \frac{\overline{BC}}{\text{sen}(35^\circ)} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(105^\circ)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{0,64279} &= \frac{\overline{BC}}{0,57358} = \frac{10}{0,96593} = 10,352 \end{aligned}$$

Daí, teremos:

- $\overline{AC} = 10,352 \cdot 0,64279 \cong 6,65\text{cm}$ e
- $\overline{BC} = 10,352 \cdot 0,57358 \cong 5,94\text{cm}$.

Exemplo 1.12

As medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo abaixo podem ser expressas em função da medida do terceiro lado.

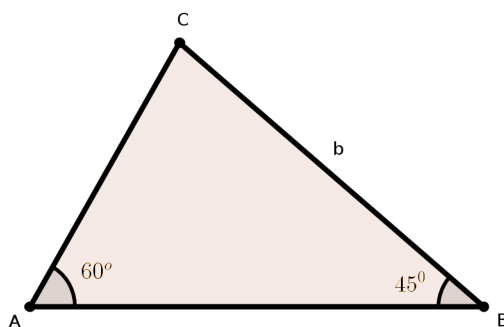


Figura 1.31: Figura do exemplo 1.12.

Pela lei dos senos:

$$\frac{b}{\text{sen}(60^\circ)} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(45^\circ)} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen}(75^\circ)}$$

Daí, temos:

- $\overline{AB} = \frac{\text{sen}(45^\circ)}{\text{sen}(60^\circ)} \cdot b \Rightarrow \overline{AB} = \frac{0,70711}{0,86603} \cong 0,816$ e
- $\overline{BC} = \frac{\text{sen}(75^\circ)}{\text{sen}(60^\circ)} \cdot b \Rightarrow \overline{BC} = \frac{0,96593}{0,86603} \cong 1,115$

1.4.3 Ângulos suplementares

Até este momento, definimos razões trigonométricas somente para ângulos agudos. Mas a expressão dada pela *lei dos cossenos* sugere que é conveniente definir o cosseno de um ângulo obtuso $\hat{A}$ como sendo negativo e igual a $-\cos(180^\circ - \hat{A})$. Deste modo, a *lei dos cossenos* pode novamente ser escrita como $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$, unificando a expressão da *lei dos cossenos* para um triângulo qualquer.

Definição:

Dois ângulos são ditos suplementares se a soma de suas medidas for igual à 180° .

Senos de dois ângulos suplementares

Os valores dos senos de dois ângulos suplementares coincidem, isto é:

$$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}(x)$$

sendo x a medida de um ângulo de um triângulo.

Por exemplo, sendo $x = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$\text{sen}(x) = \text{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim:

$$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cossenos de dois ângulos suplementares

Os valores dos cossenos de dois suplementares diferem apenas no sinal, ou seja:

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

sendo x a medida de um ângulo de um triângulo.

Ainda, sendo $x = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$\cos(x) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim:

$$\cos(\pi - x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

OBSERVAÇÃO:

Para o caso particular de $x = \frac{\pi}{2}$, temos $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

1.5 Algumas aplicações

Problema 1: Medir a altura do Pico do Jabre - Matureia/PB

Um observador está em um ponto **A** do município de Matureia/PB e vê o Pico do Jabre segundo um ângulo de elevação de 50° com o plano horizontal (medido com o teodolito). Ele anda em direção ao Pico (seu objeto de estudo) até um ponto **B** distante aproximadamente 640 m de **A**, e agora vê o Pico do Jabre segundo um ângulo de 72° . Qual é a altura do Pico do Jabre em relação ao plano de observação?

RESOLUÇÃO:

Observemos a figura abaixo:

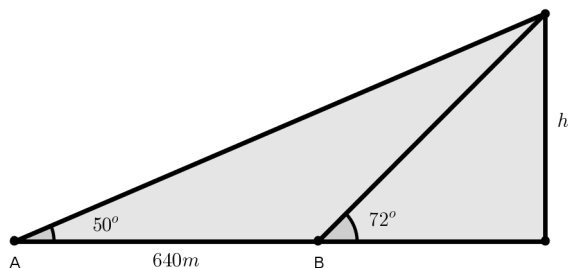


Figura 1.32: Figura do Problema 1

Seja **h** a altura do Pico do Jabre em relação ao plano horizontal de medição e seja **x** a distância de **B** ao pé da altura. Nos dois triângulos retângulos formados no plano vertical temos:

$$\frac{h}{x} = \operatorname{tg}(50^\circ) = 1,19175 \quad (1)$$

$$\frac{h}{640 + x} = \operatorname{tg}(72^\circ) = 3,27085 \quad (2)$$

Então, vamos resolver o sistema acima:

De **1**, temos:

$$x = \frac{h}{3,27085} \quad (3)$$

Daí aplicando **(3)** em **(2)**, temos:

$$\frac{h}{640 + \frac{h}{3,27085}} = 1,19175$$

Logo:

$$\frac{h}{\frac{2093,344 + h}{3,27085}} = 1,19175$$

Daí resulta que:

$$h \approx 1199\text{m.}$$

Problema 2: Medir a distância de um ponto de uma cidade (**X**) a um ponto visível de uma outra cidade (**Y**)

De um ponto **A** em uma praia na cidade (A), avista-se um ponto **P** em outra praia na cidade (Y) (estes dois pontos estão em lados opostos em um canal que separa as duas cidades. De um ponto **B** na Praia da cidade (A), distante 1 km de **A** também se avista o ponto **P** (figura abaixo). Um observador na cidade (A) mediu os ângulos $BAP = 119^\circ$ e $ABP = 52^\circ$. Qual é a distância entre **A** e **P**?

RESOLUÇÃO:

Aplicando a Lei dos senos no triângulo **ABP** (figura abaixo) temos:

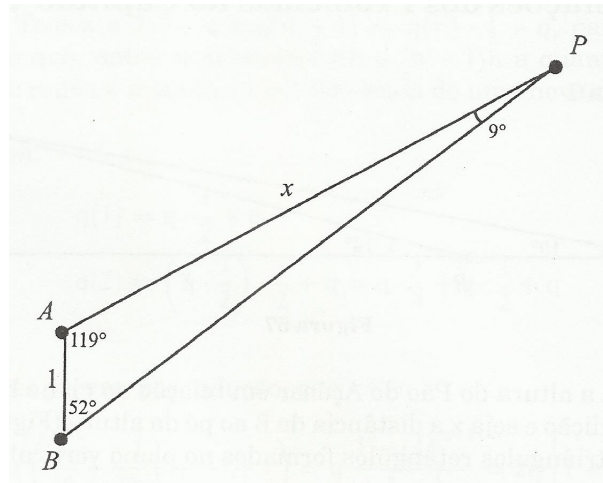


Figura 1.33: Figura do Problema 2 - Triângulo ABP.

$$\frac{1}{\text{sen}(9^\circ)} = \frac{x}{\text{sen}(52^\circ)}$$

donde,

$$x = \frac{0,7880}{0,1564} = 5,04$$

Problema 3: Medir a distância entre dois pontos, ambos inacessíveis

De uma praia é possível ver dois pontos **X** e **Y**. Um observador assinala nesta praia dois pontos **A** e **B** distantes 1 km entre si, e com seu instrumento mede os seguintes ângulos: $\widehat{XAY} = 62^\circ$, $\widehat{YAB} = 54^\circ$, $\widehat{ABX} = 46^\circ$ e $\widehat{XBY} = 74^\circ$. Qual é a distância entre **X** e **Y**?

RESOLUÇÃO:

É fácil calcular os seguintes ângulos (figura abaixo):

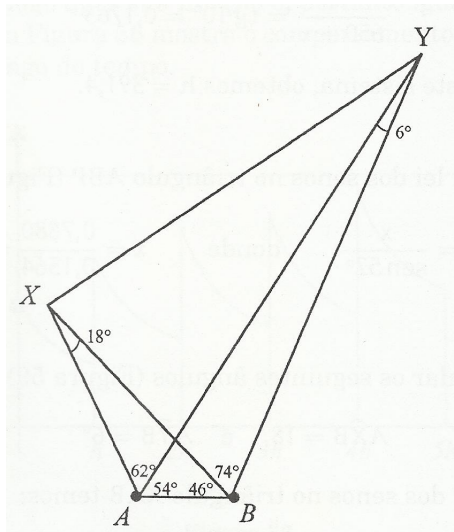


Figura 1.34: Triângulos ABX e ABY.

$$\widehat{AXB} = 18^\circ \text{ e } \widehat{AYB} = 6^\circ$$

Aplicando a Lei dos senos no triângulo **XAB** temos:

$$\frac{\overline{XA}}{\text{sen}(46^\circ)} = \frac{1}{\text{sen}(18^\circ)}$$

o que nos fornece $\overline{XA} = 1,328$.

Sendo $\widehat{ABY} = 120^\circ$, novamente aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\overline{YA}}{\text{sen}(120^\circ)} = \frac{1}{\text{sen}(6^\circ)}$$

o que dá $\overline{YA} = 8,285$.

No triângulo AXY usamos, agora, a Lei dos cossenos:

$$(\overline{XY})^2 = (\overline{XA})^2 + (\overline{YA})^2 - 2 \cdot \overline{XA} \cdot \overline{YA} \cdot \cos(\widehat{XAY})$$

e os cálculos indicam $\overline{XY} = 7,48\text{Km}$.

Problema 4: Medindo o raio da Terra

Suponha que enquanto você está deitado em uma praia observando o Sol se pôr em um oceano tranquilo, você liga um cronômetro assim que a parte mais alta do Sol desaparece. Você então fica em pé, eleva seus olhos de uma altura $h = 1,70m$, e para o cronômetro quando a parte mais alta do Sol desaparece novamente. Se o tempo decorrido no relógio t é igual a $11,1s$, qual é o raio r da Terra?

RESOLUÇÃO:

Uma *idéia fundamental* neste caso é que, à medida que o Sol desaparece, a linha de visada do observador até a parte de cima do Sol é tangente à superfície da Terra. A figura abaixo mostra duas destas linhas de visada. Nesta figura, seus olhos estão localizados no ponto **A** enquanto você está deitado, e na altura h acima deste ponto enquanto você está em pé. Na segunda situação, a linha de visada é tangente à superfície da Terra no ponto **B**. Se a distância entre o ponto **B** e a posição dos seus olhos quando você está em pé for representada por d , e traçarmos raios r como mostrado na figura, temos pelo Teorema de Pitágoras.

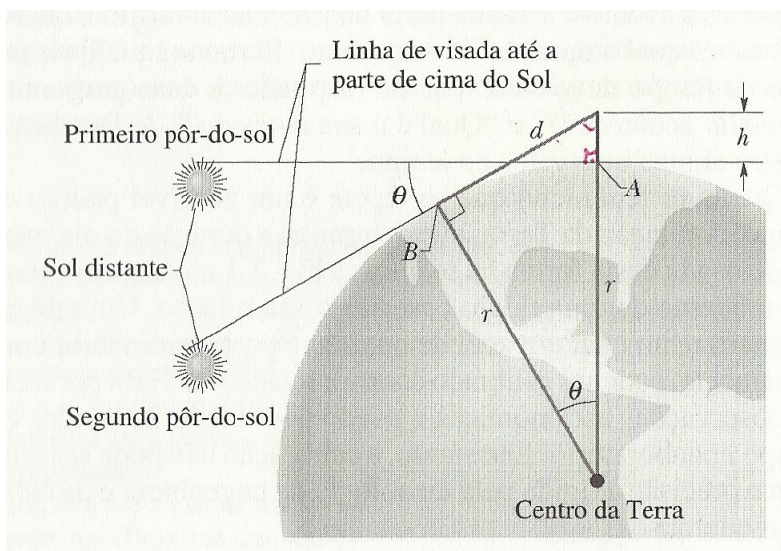


Figura 1.35: Figura: medindo o raio da Terra

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2 = r^2 + 2 \cdot r \cdot h + h^2,$$

$$d^2 = 2 \cdot r \cdot h + h^2, \quad (1)$$

ou

Como a altura h é bem menor do que o raio r da Terra, o termo h^2 é desprezível quando comparado com o termo $2 \cdot r \cdot h$, e podemos reescrever a equação (1), da seguinte forma:

$$d^2 = 2 \cdot r \cdot h, \text{ (2)}$$

Observando a figura, temos que, o ângulo entre os raios da Terra até os dois pontos **A** e **B** de tangência das linhas de visada é θ , que também é o ângulo descrito pelo Sol em torno da Terra durante o tempo medido $t = 11,1s$. Durante um dia inteiro, que contém aproximadamente $24h$, o Sol descreve um ângulo de 360° em torno da Terra. Isto nos permite escrever:

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{t}{24h},$$

como $t = 11,1s$, então isso nos fornece:

$$\theta = \frac{(360^\circ) \cdot (11,1s)}{(24h) \cdot (60min/h) \cdot (60s/min)} = 0,04625^\circ,$$

Novamente, observando a figura acima, vemos que $d = r \cdot tg\theta$. substituindo esta expressão de **d** na equação (2), resulta em:

$$r^2 \cdot tg^2\theta = 2 \cdot r \cdot h,$$

$$r = \frac{2 \cdot h}{tg^2\theta},$$

ou

Substituindo $\theta = 0,04625^\circ$ e $h = 1,70m$, achamos:

$$r = \frac{(2) \cdot (1,70m)}{tg^2 0,04625^\circ} = 5,22 \times 10^6 m, \text{ (Resposta)}$$

que não difere mais do que 20 por cento do valor aceito ($6,37 \times 10^6 m$) para o raio da Terra.

Capítulo 2

Um pouco de geometria analítica e esférica

Estudaremos aqui, definições e conceitos referentes à Geometria Analítica no espaço e definições de Geometria esférica.

2.1 Geometria analítica no espaço

Trataremos nesta seção de conceitos e definições sobre o estudo da Geometria analítica, porém agora com um tratamento tridimensional, ou seja, faremos estudos envolvendo figuras espaciais.

2.1.1 Distância entre dois pontos no espaço

A distância entre dois pontos **A** e **B** no espaço é simplesmente a medida do segmento **AB**. No plano, a distância entre dois pontos é frequentemente obtida utilizando o Teorema de Pitágoras. Isto ocorre porque muitas vezes dispomos das medidas das projeções de um segmento segundo duas direções perpendiculares. Esta situação também ocorre frequentemente no espaço. Novamente, a ferramenta a utilizar é o Teorema de Pitágoras.

Vejamos:

Consideremos o problema de calcular a diagonal $BH = d$ de um paralelepípedo retângulo **ABCDEFGH** de arestas $AB = a$, $AD = b$ e $AE = c$ (figura abaixo). Resolvemos o problema utilizando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos **ABD** e **BDH** (este segundo triângulo é retângulo porque BH é perpendicular ao plano da base e, assim, perpendicular à reta **BD** que está contida nesta base).

Temos:

$$\begin{aligned} BD^2 &= a^2 + b^2 \text{ (no triângulo ABD)} \\ d^2 &= BD^2 + c^2 \text{ (no triângulo BDH)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Em particular, a diagonal de um cubo de aresta **a** mede $d = a\sqrt{3}$.

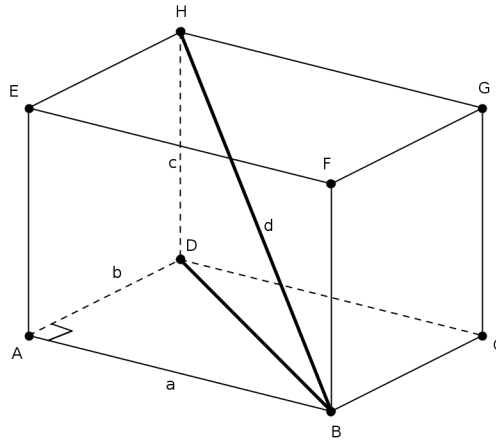


Figura 2.1: Diagonal de um paralelepípedo.

2.1.2 Plano mediador

Qual é o lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes de dois pontos dados **A** e **B**?

Sabemos que, no plano, o conjunto dos pontos equidistantes de **A** e **B** é a reta mediatriz de $\overline{AB}$; isto é, a perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo ponto médio **M**. A situação é análoga no espaço. Um ponto **P** do espaço é equidistante de **A** e **B** se, e somente se **PM** é perpendicular a $\overline{AB}$ (Figura abaixo).

De fato, se **PM** é perpendicular a $\overline{AB}$, os triângulos retângulos **PMA** e **PMB** são congruentes, por possuírem um cateto comum **PM** e catetos iguais $\overline{MA}$ e $\overline{MB}$; assim, $\overline{PA} = \overline{PB}$. Por outro lado, se $\overline{PA} = \overline{PB}$, então os triângulos **PAM** e **PBM** são de fato congruentes, por possuírem lados respectivamente iguais; logo, os ângulos **PMA** e **PMB** são iguais e, portanto, retos. Provamos, então, que os pontos do espaço equidistante de **A** e **B** são todos aqueles pontos **P** tais que a reta **PM** é perpendicular a $\overline{AB}$. Mas estes são exatamente os pontos do plano que passa por **M** e é perpendicular a $\overline{AB}$; este é chamado de *plano mediador* de **AB**.

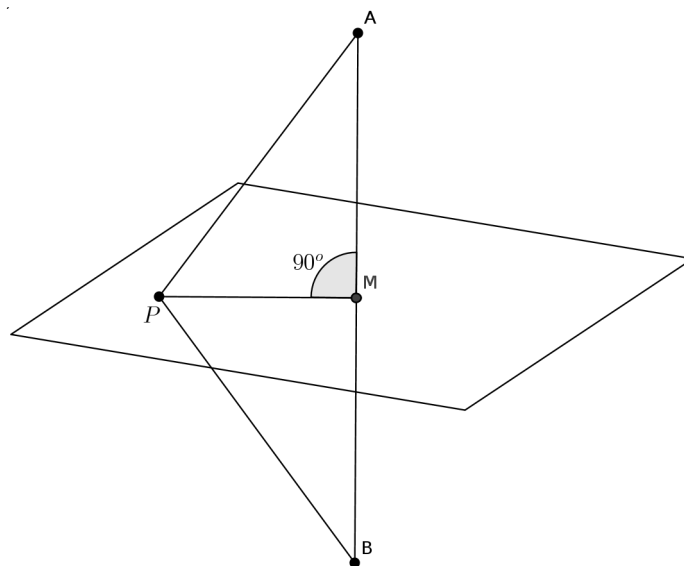


Figura 2.2: Plano Mediador

2.2 Geometria esférica

2.2.1 Definições básicas

Nesta seção considera-se uma superfície esférica S de raio R e centro O contida no espaço.

Definição

Se um plano passa pelo centro de S , ele a divide em dois hemisférios. A intersecção desse plano com S é um **grande círculo** ou **círculo máximo**. Nesse caso, o raio de um grande círculo é igual ao raio(R) de S . Qualquer outro círculo contido em S , cujo raio é menor que R , não é um grande círculo.

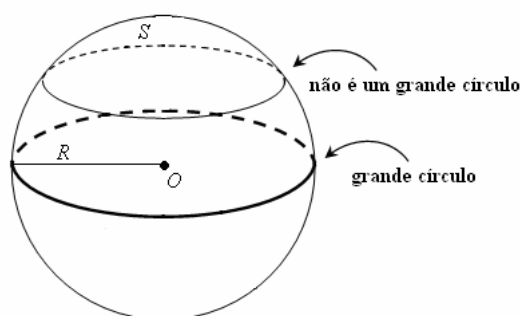


Figura 2.3: Grande círculo

Definição

Dados dois pontos distintos **A** e **B** em **S**, o menor caminho contido em **S** que liga **A** até **B**, por um grande círculo, é chamado de **geodésica**.

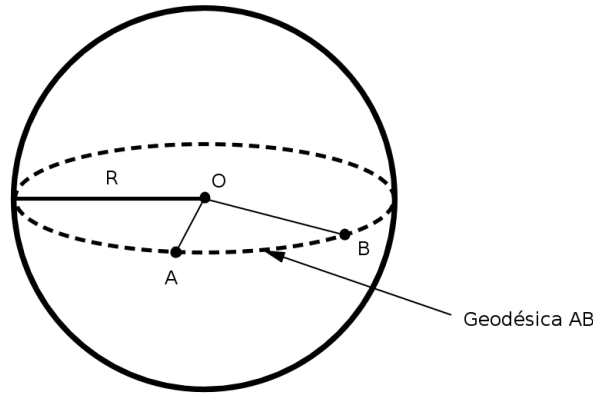


Figura 2.4: Geodésica AB

A partir desse resultado, pode-se calcular a distância entre dois pontos **A** e **B** contidos na superfície esférica **S**, de centro **O** e raio **R**. Para isso, considera-se o grande círculo determinado pela intersecção de **S** com o plano que contém os pontos **A**, **B** e **O**.

Esse é um círculo de raio **R** e centro **O**:

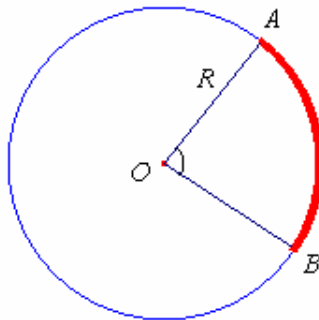


Figura 2.5: Geodésica AB

Os pontos **A** e **B** dividem esse círculo em dois arcos. A geodésica que liga os pontos **A** e **B** é o menor desses arcos, ou seja, é aquele que tem um ângulo central **AÔB** tal que $0 \leq \alpha \leq \pi$. Como a medida de um arco é igual ao produto do raio pelo ângulo central (em radianos), a

distância entre **A** e **B** é dada por:

$$d(A, B) = R \cdot \alpha$$

2.2.2 Ângulo esférico

Quando dois **grandes círculos** se intersectam em um ponto **P**, formam entre si um **ângulo esférico**. A medida de um ângulo esférico é igual à medida do ângulo plano entre as retas tangentes em **P** aos arcos que formam o ângulo esférico. Desse modo, se essas retas tiverem vetores diretores **V** e **W**, como a figura a seguir, o ângulo entre os vetores **V** e **W** é o ângulo esférico. Por definição, a medida do ângulo esférico sempre é menor do que ou igual a π .

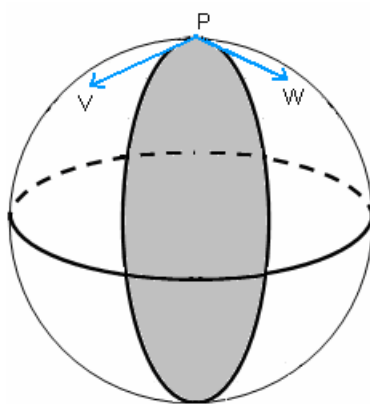


Figura 2.6: Ângulo esférico

2.2.3 Triângulo esférico

Sobre uma superfície, um **triângulo esférico** é um conjunto formado por três pontos distintos **A**, **B** e **C** e pelos arcos geodésicos **AB**, **AC** e **BC** de modo que, esses três arcos não estão contidos em um mesmo grande círculo.

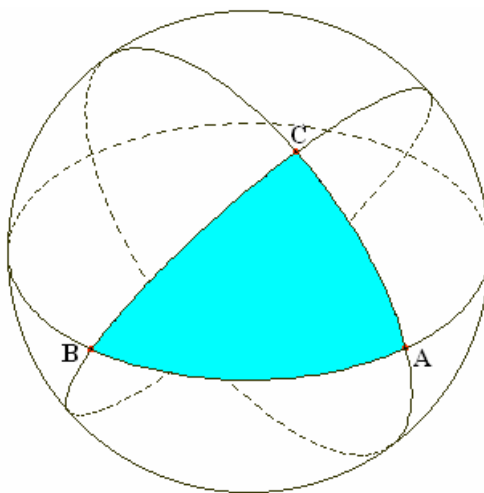


Figura 2.7: Triângulo esférico

Um triângulo esférico define seis ângulos, sendo três ângulos de lados e três ângulos de vértices.

Os três **ângulos de lados** são α , β e δ (ver fig. 2.8, pág.45), sendo:

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{ang}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \\ \beta &= \text{ang}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \\ \delta &= \text{ang}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\end{aligned}$$

Uma vez que os pontos **A**, **B** e **C** não pertencem a um mesmo grande círculo, segue-se que cada um desses ângulos é maior que zero e menor que π . Assim, os comprimentos dos lados desse triângulo esférico são:

$$\begin{aligned}d(B, C) &= R \cdot \alpha \\ d(A, C) &= R \cdot \beta \\ d(A, B) &= R \cdot \delta\end{aligned}$$

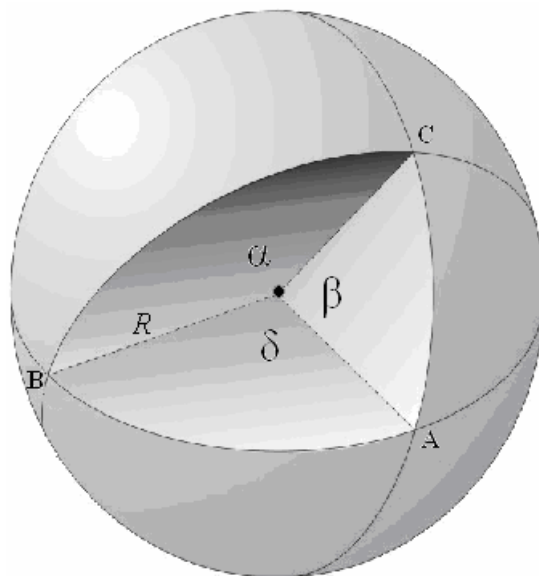


Figura 2.8: Ângulos de lados

Os três **ângulos de vértices** são **A**, **B** e **C**, sendo: $A = \text{ang}(\text{arco}AC, \text{arco}AB) = \text{ang}(V, W)$, em que **V** é um vetor tangente em **A** ao arco **AC** e **W** é um vetor tangente em **A** ao arco **AB**. Da mesma forma, pode-se definir os ângulos **B** e **C**.

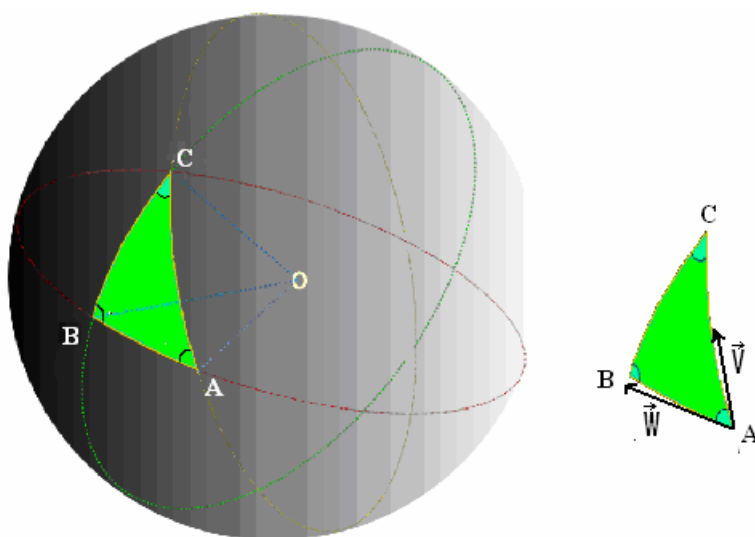


Figura 2.9: Ângulos de lados

Obs: Para simplificar a notação, serão usados:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{A}, \overrightarrow{OB} = \vec{B}, \overrightarrow{OC} = \vec{C}.$$

Teorema

Seja dado um triângulo esférico ΔABC em uma esfera $\mathbf{S}$ de centro $\mathbf{O}$ e raio $\mathbf{R}$. Neste caso, esses ângulos podem ser dados por:

$$\hat{A} = \text{ang}(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C})$$

$$\hat{B} = \text{ang}(\vec{B} \times \vec{C}, \vec{B} \times \vec{A})$$

$$\hat{C} = \text{ang}(\vec{C} \times \vec{A}, \vec{C} \times \vec{B})$$

Demonstração

Vamos apenas demonstrar que $\hat{A} = \text{ang}(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C})$, pois os outros casos são análogos. Por definição, $\hat{A} = \text{ang}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, sendo $\mathbf{V}$ o vetor tangente ao arco $\mathbf{AC}$ em $\mathbf{A}$ e $\mathbf{W}$ o vetor tangente ao arco $\mathbf{AB}$ em $\mathbf{A}$.

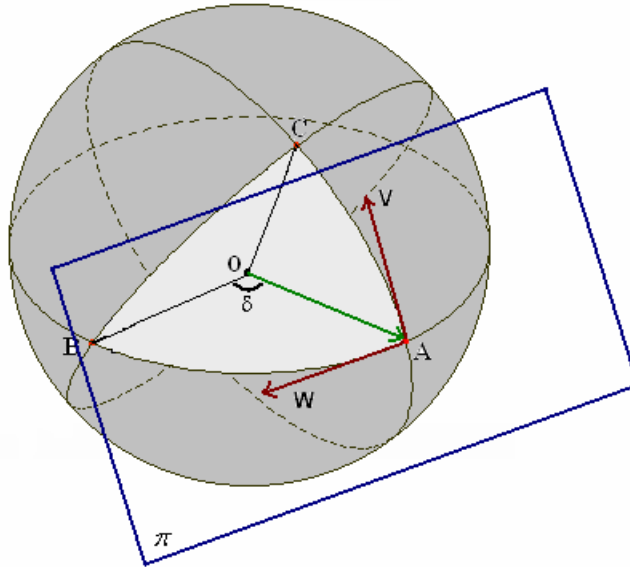


Figura 2.10: Figura 1 da demonstração.

Como $\vec{A}$ é perpendicular a $\mathbf{V}$ e a $\mathbf{W}$, segue que (veja a figura a seguir):

$$\text{ang}(V, W) = \text{ang}(\vec{A} \times V, \vec{A} \times W).$$

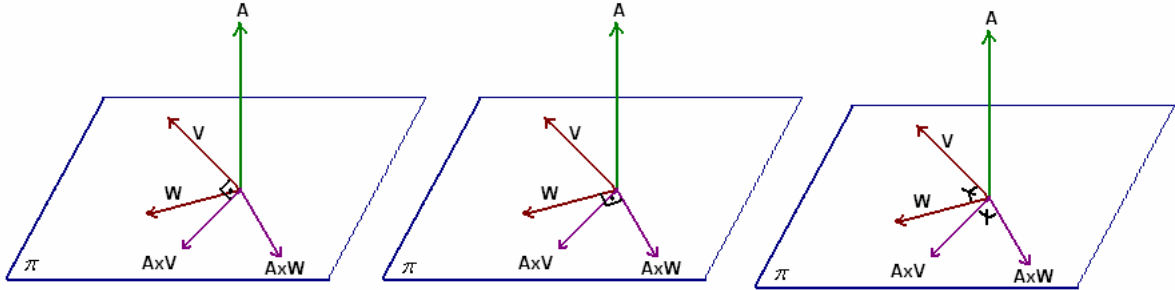


Figura 2.11: Figura 2 da demonstração.

Por outro lado, pela regra da mão direita, como δ é um ângulo menor que π e como os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\mathbf{W}$ são coplanares, segue-se que os vetores $\vec{A} \times W$ e $\vec{A} \times \vec{B}$ são vetores normais do plano que contém $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{O}$.

Do mesmo modo, prova-se que os vetores $\vec{A} \times V$ e $\vec{A} \times \vec{C}$ também têm mesma direção e sentido. Daí $\hat{A} = \text{ang}(V, W) = \text{ang}(\vec{A} \times V, \vec{A} \times W) = \text{ang}(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C})$.

2.2.4 Lei dos cossenos

Teorema

Seja dado um triângulo esférico $\triangle ABC$ em uma esfera $\mathbf{S}$ de centro $\mathbf{O}$ e raio $\mathbf{R}$. Então $\cos \alpha = \cos(\beta) \cdot \cos(\delta) + \text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\delta) \cdot \cos(\hat{A})$.

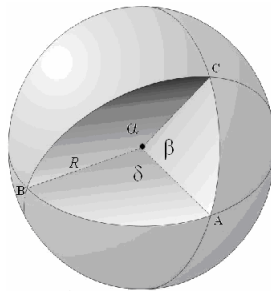


Figura 2.12: Lei dos cossenos

Demonstração

Do teorema anterior tem-se que $\hat{A} = \text{ang}(\hat{A} \times \hat{B}, \hat{A} \times \hat{C})$. Pela definição de produto escalar, $\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C} \rangle = |\vec{A} \times \vec{B}| \cdot |\vec{A} \times \vec{C}| \cdot \cos(\hat{A})$. Pela definição de produto vetorial, $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\delta)$ e $|\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{C}| \sin(\beta)$.

Obs: Os temas **Produto Escalar** e **Produto Vetorial** encontram-se definidos no apêndice.

Assim, pode-se escrever:

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C} \rangle = (|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \delta) \cdot (|\vec{A}| |\vec{C}| \sin(\beta) \cdot \cos(\hat{A}))$$

Mas,

$$|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = R$$

.

Daí:

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C} \rangle = R^4 \cdot \sin(\delta) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\vec{A})$$

Usando a identidade:

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \times \vec{D} \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle & \langle \vec{A}, \vec{D} \rangle \\ \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle & \langle \vec{B}, \vec{D} \rangle \end{pmatrix}, \text{ pode-se escrever:}$$

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C} \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle & \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \\ \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle & \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R^2 & R^2 \cos(\beta) \\ R^2 \cos(\delta) & R^2 \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\text{ou seja, } \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C} \rangle = R^4 \cos(\alpha) - R^4 \cos(\beta) \cdot \cos(\delta)$$

Dessa forma, têm-se:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) - \cos(\beta) \cdot \cos(\delta) &= \sin(\beta) \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\vec{A}) \\ \cos(\alpha) &= \cos(\beta) \cdot \cos(\delta) + \sin(\beta) \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\vec{A}) \end{aligned}$$

2.3 O cálculo de distâncias aéreas e o ângulo azimute

Nesta seção será usada a teoria desenvolvida na seção anterior para calcular distâncias aéreas e o ângulo azimute entre pontos no globo terrestre.

Então vamos imaginar dois pontos **A** e **B** sobre uma superfície esférica, sendo que as coordenadas geográficas desses pontos são conhecidas. Se alguém deseja viajar de **A** para **B**, e deseja caminhar sobre uma geodésica da esfera, o ângulo entre sua trajetória e o meridiano do Globo que passa por **A** é chamado de **ângulo de azimute**. Costuma-se considerar esse ângulo entre 0° e 90° .

Vejamos nos próximos exemplos como esse ângulo, e a distância entre **A** e **B**, podem ser calculados a partir das coordenadas de **A** e **B**. Para isso, vamos considerar o Globo Terrestre como uma esfera de $6.366km$ de raio.

2.3.1 Exemplo 2.1

A tabela a seguir mostra as coordenadas geográficas de São Paulo e São Francisco:

	Latitude	Longitude
São Francisco	$37^\circ N$	$122^\circ O$
São Paulo	$23^\circ S$	$47^\circ O$

Tabela 2.1: Tabela do EXEMPLO 2.1

Utilizando essas coordenadas:

- a) Calcule a distância entre São Francisco e São Paulo;
- b) Calcule o ângulo azimute λ de São Francisco a São Paulo;
- c) Calcule o ângulo azimute θ de São Paulo a São Francisco.

Resolução:

a) Vamos considerar o triângulo esférico com vértices no Pólo Norte, São Francisco e São Paulo (ver figura abaixo).

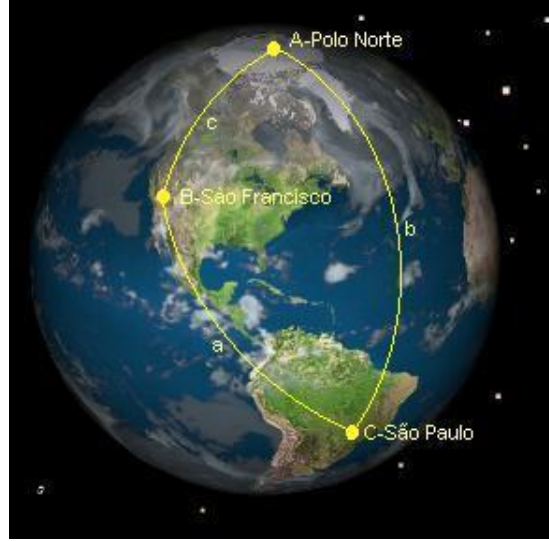


Figura 2.13: Figura 1 do exemplo 2.1.

O ângulo entre as geodésicas que ligam o Pólo Norte a São Paulo e o Pólo Norte e São Francisco é a diferença entre as longitudes de São Francisco e São Paulo, $122^\circ - 47^\circ = 75^\circ$. Como São Francisco está a 37° ao Norte, o arco geodésico que liga o Pólo Norte até São Francisco mede $90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$; e como São Paulo está a 23° ao Sul, o arco geodésico que liga o Pólo Norte a São Paulo mede $90^\circ + 23^\circ = 113^\circ$. Logo, têm-se as seguintes medidas para o triângulo esférico (figura acima).

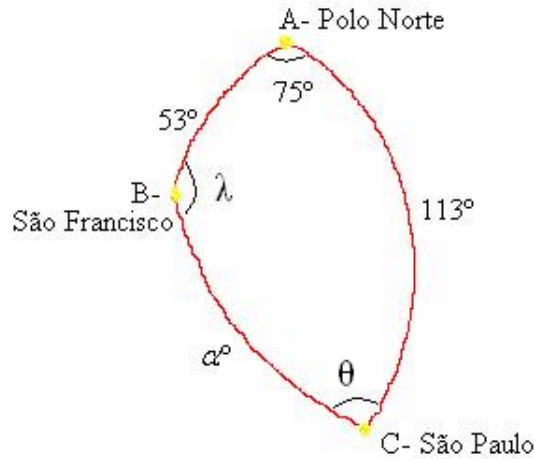


Figura 2.14: Figura 2 do exemplo 2.1.

Sendo λ o ângulo azimute de São Francisco para São Paulo e θ o ângulo azimute de São Paulo para São Francisco.

Para calcular o arco geodésico α que liga São Francisco a São Paulo, basta usar a Lei dos cossenos: $\cos(\alpha) = \cos(\beta) \cdot \cos(\delta) + \sin(\beta) \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\vec{A})$.

Para o triângulo esférico ΔABC , tem-se:

$$\beta = 113^\circ, \delta = 53^\circ, \gamma = 75^\circ$$

$$\cos(\alpha) = \cos(113^\circ) \cdot \cos(53^\circ) + \sin(113^\circ) \cdot \sin(53^\circ) \cdot \cos(75^\circ)$$

$$\cos(\alpha) = -0,0448775951$$

$$\alpha = 1,615688999 \text{ radianos}$$

$$\alpha = 92,57^\circ$$

Obtém-se a distância entre São Francisco e São Paulo multiplicando-se α pelo raio da Terra.

$$\text{Distância} = 1,615688999 \times 6366 \text{ Km} \approx 10286 \text{ km}$$

b) Para determinar o ângulo azimute λ de São Francisco a São Paulo, novamente deve-se usar a Lei dos cossenos, então:

$$\cos(113^\circ) = \cos(53^\circ) \cdot \cos(92,57^\circ) + \sin(53^\circ) \cdot \sin(92,57^\circ) \cdot \cos(\lambda)$$

$$\cos(\lambda) = \frac{\cos(113^\circ) - \cos(53^\circ) \cdot \cos(92,57^\circ)}{\sin(53^\circ) \cdot \sin(92,57^\circ)}$$

$$\cos(\lambda) = -0,4559176421$$

$$\lambda \approx 117^\circ$$

Assim o azimute de São Francisco a São Paulo é 117° Norte-Leste. Mas considerando que, usualmente, o azimute é um ângulo agudo, podemos dizer que o azimute de São Francisco a São Paulo é 73° Sul-Leste, pois $180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$.

c) Para o cálculo do ângulo azimute θ de São Paulo a São Francisco, pode-se usar a Lei dos cossenos e obter:

$$\cos(53^\circ) = \cos(113^\circ) \cdot \cos(92,57^\circ) + \sin(113^\circ) \cdot \sin(92,57^\circ) \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\cos(53^\circ) - \cos(113^\circ) \cdot \cos(92,57^\circ)}{\sin(113^\circ) \cdot \sin(92,57^\circ)}$$

$$\theta \approx 50^\circ$$

Assim o azimute de São Paulo a São Francisco é 50° Norte-Oeste.

2.3.2 Exemplo 2.2

Sabendo que Belo Horizonte está aproximadamente a 20° ao Sul da linha do Equador e 44° a Oeste do Meridiano de Greenwich e Beijing está aproximadamente a 40° ao Norte da linha do Equador e 116° a leste do Meridiano de Greenwich, deseja-se saber:

- Quantos quilômetros um viajante que partiu de Belo Horizonte percorreu para assistir aos Jogos Olímpicos de 2008 em Beijing?
- Calcular o ângulo de azimute de Belo Horizonte a Beijing;
- Calcular o ângulo de azimute de Beijing a Belo Horizonte.

Resolução:

a) Pode-se imaginar um triângulo esférico com vértices **A**, **B** e **C**, respectivamente no Polo Norte, Beijing e Belo Horizonte.

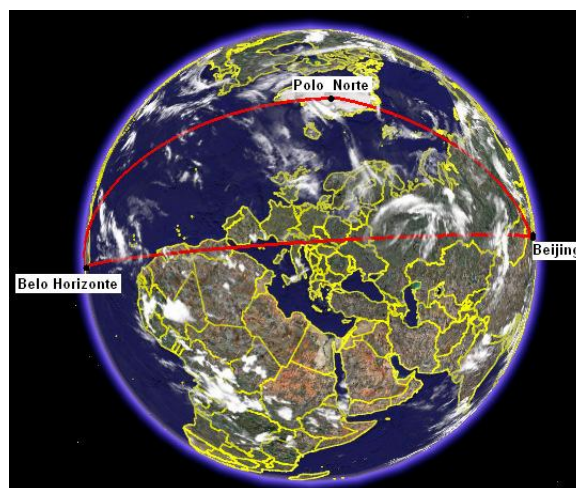


Figura 2.15: Figura 1 do exemplo 2.2.

Assim, este triângulo esférico tem as seguintes medidas:

- A medida do arco geodésico **AC** é obtida somando-se 90° à latitude de Belo Horizonte.
- A medida do arco geodésico **AB** é obtida subtraindo-se 90° da latitude de Beijing, já que está acima da Linha do Equador.

- A medida do ângulo $\hat{A}$ é a soma das longitudes das duas cidades.

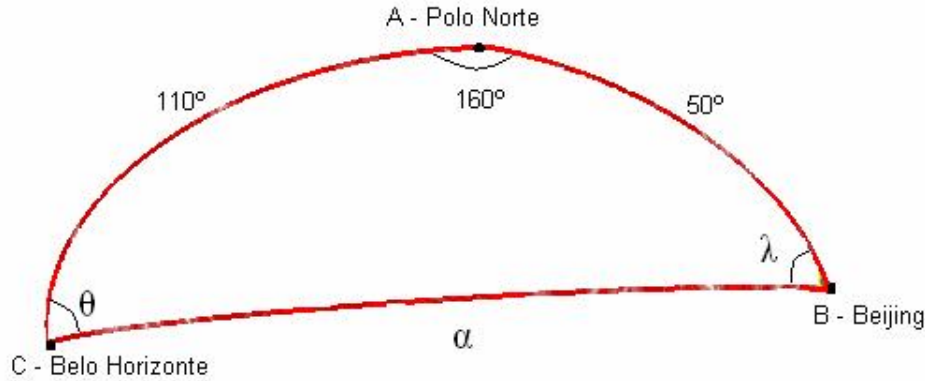


Figura 2.16: Figura 2 do exemplo 2.2.

Aplicando-se a Lei dos cossenos, tem-se a distância aproximada entre Belo Horizonte e Beijing.

$$\cos(\alpha) = \cos(110^\circ) \cdot \cos(50^\circ) + \sin(110^\circ) \cdot \sin(50^\circ) \cdot \cos(160^\circ)$$

$$\cos(\alpha) = -0,896280573$$

$$\alpha = 2,682112936 \text{ radianos}$$

$$\alpha = 153,67^\circ$$

Multiplicando-se α pelo raio da Terra, tem-se a distância aproximada entre Belo Horizonte e Beijing.

$$\text{Distância} = 2,682112936 \times 6.366 \text{ Km} \approx 17.076 \text{ km}$$

Logo, se o viajante realizou sua viagem em uma aeronave civil, por exemplo, em um Boeing 777 – 200LR, cuja velocidade máxima é 945 Km/h , ele ficou 18 horas dentro do avião. Mas, se ele se aventurou em um monomotor cuja velocidade máxima é de 175 km/h , ele passou aproximadamente 97 horas voando até chegar a seu destino.

b) Calculando o ângulo azimute de Belo Horizonte a Beijing, para tal usaremos novamente a Lei dos cossenos, então:

$$\cos(50^\circ) = \cos(110^\circ) \cdot \cos(153,67^\circ) + \sin(110^\circ) \cdot \sin(153,67^\circ) \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\cos(50^\circ) - \cos(110^\circ) \cdot \cos(153,67^\circ)}{\sin(110^\circ) \cdot \sin(153,67^\circ)}$$

$$\cos(\theta) = 0,8067591801$$

$$\theta \approx 36^\circ$$

Assim o azimuth de Belo Horizonte a Beijing é 36° Norte-Leste.

c) Calculando o ângulo azimuth de Beijing a Belo Horizonte, novamente usaremos a Lei dos cossenos:

$$\cos(110^\circ) = \cos(50^\circ) \cdot \cos(153,67^\circ) + \sin(50^\circ) \cdot \sin(153,67^\circ) \cdot \cos(\lambda)$$

$$\cos(\lambda) = \frac{\cos(110^\circ) - \cos(50^\circ) \cdot \cos(153,67^\circ)}{\sin(50^\circ) \cdot \sin(153,67^\circ)}$$

$$\cos(\lambda) = 0,6889360915$$

$$\lambda \approx 46^\circ$$

Assim o azimuth de Beijing a Belo Horizonte é 46° Norte-Oeste.

Capítulo 3

A geometria e as distâncias astronômicas na antiga Grécia

Estudaremos neste capítulo observações matemáticas importantes para responder a perguntas como: qual é o mais distante da Terra: o Sol ou a Lua? Quais os tamanhos do Sol e da Lua? E veremos que baseados em idéias muito simples e sustentadas por noções de Geometria, cientistas/filósofos como Aristarco, Eratóstenes e Ptolomeu chegaram a brilhantes resultados.

3.1 Eratóstenes e o tamanho da Terra

O procedimento de Eratóstenes para calcular o tamanho da Terra baseia-se em fatos simples que passaremos a descrever agora. Mais ao sul de Alexandria, onde localiza-se a grande represa de Assuã, ficava a cidade de Siena, como ilustra o mapa da figura 1. Naquela época deveria haver um tráfego regular de caravanas entre as duas cidades; e talvez por causa desse tráfego, sabia-se da distância entre as duas cidades Alexandria e Siena, que era de aproximadamente 5000 estádios, ou seja, atualmente 800 km (tomando o estádio como igual a 160 metros). Outra coisa sabida é que as duas cidades estavam mais ou menos no mesmo meridiano, ou seja, tinham a mesma longitude. Este fato é intrigante, pois, enquanto é relativamente fácil fazer uma estimativa da latitude de um lugar, já a longitude de dois lugares diferentes é um problema bem mais complicado.

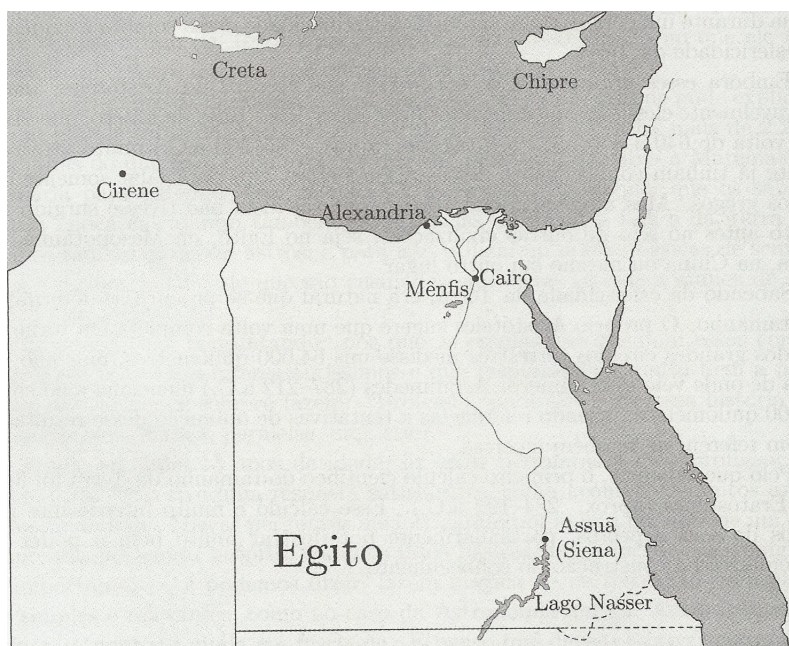


Figura 3.1: Mapa da região da grande represa de Assuã.

3.1.1 O trabalho de Eratóstenes

Além desses dois fatos, antes citados, a distância entre as duas cidades, de 800 km, e elas estarem no mesmo meridiano, dois outros fatos foram cruciais no raciocínio de Eratóstenes: devido à grande distância a que o Sol se encontra da Terra, os raios solares que chegam ao nosso planeta são praticamente paralelos, ver figura 2; e quando o Sol mais se desviava para o norte, no chamado "solstício de verão", ao meio-dia em Siena os raios solares caíam verticalmente (o que era comprovado vendo que as cisternas ficavam totalmente iluminadas e o disco solar podia ser visto refletido no fundo delas), em Alexandria eles formavam, com a vertical do lugar, um ângulo igual a $1/50$ da circunferência completa. Com a medida em graus, isto equivale a dizer que esse ângulo era de $7,2^\circ$, veja:

$$\frac{7,2}{360} = \frac{72}{36 \times 100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

Neste ponto entra o raciocínio de Eratóstenes, ilustrado na figura 2: se a $1/50$ de ângulo correspondem a 800 km de arco, ao ângulo de 360° corresponderão $50 \times 800 = 40000\text{km}$.

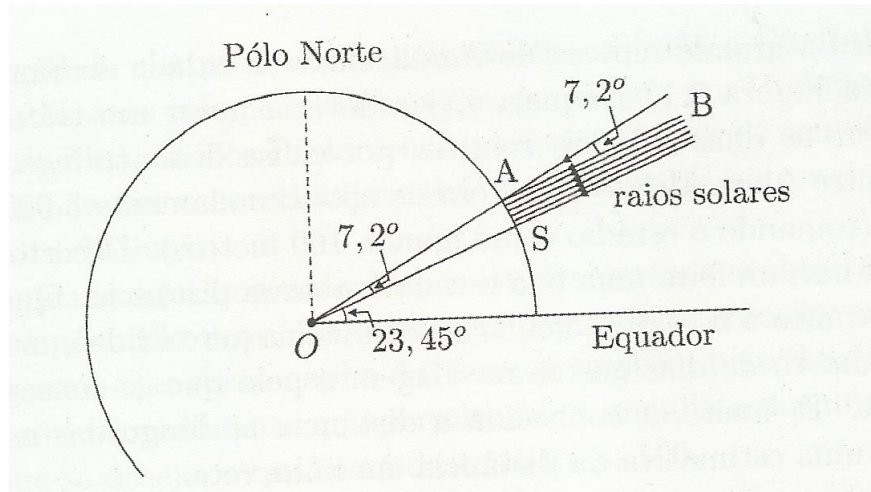


Figura 3.2: Raios solares sobre Alexandria.

3.1.2 Que matemática foi usada?

Revedo o raciocínio de Eratóstenes identificaremos os fatos matemáticos usados em seu raciocínio. Ele entendeu que o ângulo de $7,2^\circ$ em Alexandria (A na Figura 2) é igual ao ângulo central em O, o que pressupõe que os raios solares que chegam à Terra são paralelos, em virtude da grande distância do Sol. Portanto, a igualdade dos ângulos em O e A se deve ao fato de eles serem ângulos correspondentes em duas paralelas (AS e OS) cortadas pela transversal OA. O outro fato matemático utilizado é o da proporcionalidade entre arcos e ângulos: os ângulos centrais são proporcionais aos arcos que subentendem; assim, o ângulo de $7,2^\circ$ está para o arco AS assim como o de 360° está para a circunferência completa.

3.1.3 Será que foi isso mesmo?

Sim, será que ele, Eratóstenes, mediu mesmo o ângulo de incidência dos raios solares? Para isso ele teria de se valer de algum aparelho, e teria de realizar uma operação um pouco sofisticada, com difícil precisão para a época. O mais provável é que ele tenha usado procedimento, muito mais simples. Em Alexandria certamente havia um relógio solar, com uma coluna construída bem na vertical, cujas sombras projetadas serviam para montar a hora do dia (ver Figura 3). Ele decerto esperou o dia do ano em que se sabia que os raios solares incidiam verticalmente em Siena ao meio-dia; e então mediu o comprimento da sombra projetada pela coluna do relógio solar em Alexandria. De posse do comprimento dessa sombra (AB na Figura 3) e da altura BC da coluna, seria possível desenhar um triângulo $A'B'C'$ (numa folha de papiro, com certeza), com lados $A'B'$ e $B'C'$ proporcionais aos lados AB e BC, respectivamente, do triângulo maior ABC, que também é retângulo em B (veja nas figuras 3 e 4). Seria agora relativamente fácil medir o ângulo de incidência, ou seja, o ângulo $A'C'B'$ na Figura 4. Eratóstenes teria verificado que esse ângulo era de $1/50$ da circunferência, ou seja, $7,2^\circ$.

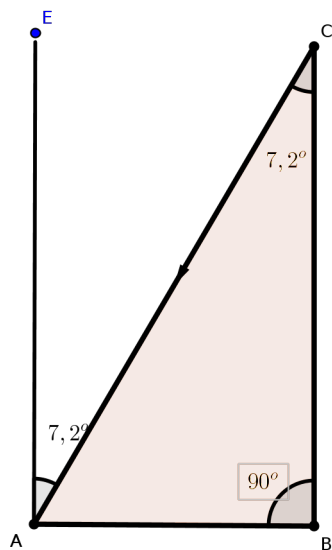


Figura 3.3: Raio solar.

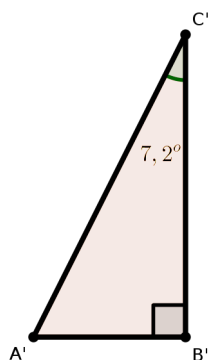


Figura 3.4: Modelo matemático.

Novamente, vale a pena chamar a atenção para a Matemática que está sendo usada. A igualdade do ângulo de incidência em A com o ângulo ACB decorre de que esses ângulos são alternos internos; e a igualdade dos ângulos ACB e $A'C'B'$ é devida a semelhança entre os triângulos ACB e $A'C'B'$.

3.1.4 O raio da Terra

Da circunferência terrestre podemos passar ao raio da Terra sem necessidade de novas medições.

Antes de falar sobre isso, vale a pena refletir sobre a medição desse raio. Enquanto podemos pensar em medir um comprimento, mesmo diretamente, como a distância de Siena a Alexan-

dria, o mesmo é absolutamente impensável no caso do raio da Terra, pois nunca houve como penetrar fundo no interior do planeta, não só na Antiguidade, mas mesmo em nossos dias. E de certa forma isso deve continuar intrigando estudantes curiosos, e tal fato deve sempre nos lembrar da conscientização de tais alunos da importância de um fato tão simples como a proporcionalidade entre a circunferência e o diâmetro, um fato que é exprimido através da fórmula $C = 2\pi r$, que tem grande poder.

A razão da circunferência para o diâmetro é uma constante em todas as circunferências.

Já no caso do raio da Terra, como $C = 40000$ km, calcula-se $r = \frac{C}{2\pi} \approx 6370$ km.

3.1.5 Os números de Eratóstenes e os de hoje

Eratóstenes utilizou o valor de 5000 estádios para a distância entre Siena e Alexandria, dando para a circunferência terrestre o valor $C = 50 \times 5000 = 250000$ estádios

Comparado com $C = 40000$ km, isso daria pra o estádio o valor de 160 metros. Teria sido realmente esse valor do estádio usado por Eratóstenes? Esta é uma questão que, provavelmente, nunca será devidamente esclarecida, pois, ao que parece, havia vários estádios em uso naquele tempo nas diferentes localidades do mundo helenístico; e não se sabe ao certo qual deles Eratóstenes teria adotado. Mesmo que fosse o estádio olímpico, de aproximadamente 185 metros, ele teria obtido como resultado o valor $C = 250000 \times 0,185 = 46250$ km.

Nada ao comparado ao valor mais correto de 40000 km.

Nos dois casos, o raio da Terra pode ser calculado pela fórmula $C = 2\pi R$, lembrando que $\pi \approx 3,14$, isso nos dá, respectivamente, $R \approx 6369$ km e $R \approx 7365$ km.

O primeiro desses valores é mais correto que o segundo, pois sabemos hoje que o raio da Terra varia de 6378 km no Equador a 6356 km nos polos, pois a Terra é levemente achatada nos polos guardadas as proporções. Mesmo assim, é admirável o valor $R = 7365$ km encontrado por Eratóstenes há mais de 22 séculos.

3.2 Aristarco e a distância ao Sol

Aristarco foi o primeiro grande astrônomo de Alexandria. Ele era originário de Samos (veja figura 2), a mesma ilha donde viera Pitágoras no século VI a.C.

Aristarco encontrou um modo muito simples e, ao mesmo tempo, bastante engenhoso para comparar as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua. Porém antes de explicar seu raciocínio, procuremos entender por que o Sol está mais longe da Terra do que a Lua.

3.2.1 Qual o mais distante: o Sol ou a Lua?

Para constatar que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, basta observar atentamente as várias faces da Lua. Se ela estivesse mais longe de nós que o Sol, então por simples análise de suas várias posições relativamente ao Sol e à Terra (a figura 5 ilustra quatro dessas posições), concluímos que ela estaria sempre iluminada pelo Sol quando vista da Terra. Em particular, não haveria Lua Nova. E haveria duas posições da Lua onde ela seria Lua Cheia, uma delas em pleno meio-dia, o que nunca acontece realmente.

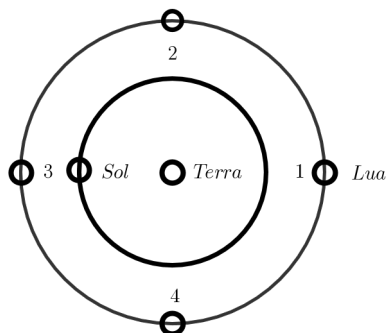


Figura 3.5: Modelo onde a Terra é centro do Sistema solar.

A hipótese contrária, de que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, é a única compatível com as várias faces da Lua, em particular com a ocorrência de luas novas. Outro fato a corroborar com essa hipótese é a ocorrência de eclipses do Sol, que só é possível com a Lua mais próxima da Terra que o Sol.

3.2.2 A genial ideia de Aristarco

Muitos podem pensar que as ideias geniais são costumeiramente profundas e complicadas. E com frequência elas são simples; tanto que muitas vezes nós, comuns mortais, nos surpreendemos e exclamamos: "Mas como é que eu não pensei nisso antes?"

Para descobrir quão mais distante a Lua se encontra da Terra em relação ao Sol é necessária uma observação mais profunda do ciclo lunar. A seguir, o método que o sábio grego Aristarco de Samos (Séc. III a.C.), da escola de Alexandria, usou para comparar essas distâncias.

Existem duas posições da Lua em sua órbita, o "quarto crescente" e o "quarto minguante", quando o disco lunar apresenta-se, para um observador terrestre, com metade iluminada e outra metade escura (figura 6). Quando isso acontece, o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo, com ângulo reto no vértice ocupado pela Lua.

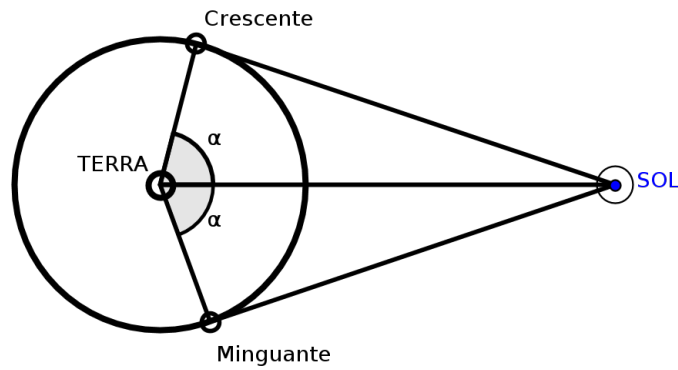


Figura 3.6: A idéia de Aristarco.

Qualquer pessoa pode fazer uma observação simples e notar que nessa configuração o ângulo α é muito próximo de 90° , indício de que o Sol está efetivamente muito mais longe da Terra que a Lua.

Aristarco teria medido esse ângulo α , encontrando para ele um valor de 87° . Então o ângulo determinado pelo vértice do Sol seria de 3° . Basta agora construir um triângulo retângulo com esses ângulos e verificar a razão $\frac{TS}{TL}$, que é a mesma para todos os triângulos a ele semelhantes. Aristarco verificou que essa razão estava compreendida entre 18 e 20, de sorte que a distância da Terra ao Sol é cerca de 20 vezes a distância da Terra à Lua.

$$\frac{TS}{TL} \cong \frac{1}{\text{sen}(3^\circ)} \cong 19$$

Para calcular o valor do ângulo α basta observar o tempo de um ciclo lunar (tempo gasto para a distância angular de 360°), que é de 29,5 dias e o tempo gasto para a Lua passar de Minguante a Crescente (percurso angular de 2α), 14,25 dias. Assim, levando-se novamente em conta o critério de proporção tem-se:

$$\frac{360^\circ}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25} \therefore \alpha = 86,95^\circ$$

Pode-se, então calcular as distâncias relativas à Terra:

$$\frac{TS}{TL} = \text{seca} \cong 18,8$$

O resultado obtido por Aristarco, no entanto, está longe da realidade, sendo sabido hoje, que a distância do Sol à Terra é 400 vezes a distância da Lua a Terra, sendo então, o valor do ângulo α próximo a $89,86^\circ$, ou seja, muito próximo de 90° . Isto põe o problema de explicar como aristarco teria chegado ao ângulo α . Ao que parece, a diferença que ele teria notado entre o tempo gasto pela Lua numa volta completa em torno da Terra e o tempo para ir de minguante à crescente gerou esse erro em seus resultados.

3.2.3 Tamanhos do Sol e da Terra

Aristarco comprovou através da observação de um eclipse total do Sol, que o Sol e a Lua possuem o mesmo "tamanho angular", ou seja, o ângulo sob o qual o observador vê o Sol é o mesmo sob o qual vê a Lua. Ele estimou o ângulo 2γ como sendo 2° , quando na verdade ele é apenas $0,5^\circ$. Considere a figura abaixo. Baseado na semelhança entre os triângulos TLL' e TSS' (Caso A.A., γ e ângulo reto).

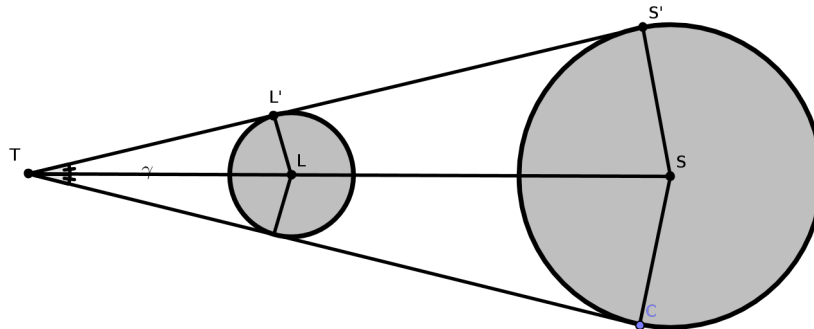


Figura 3.7: Tamanhos angulares do Sol e da Terra.

Tal semelhança nos permite escrever que:

$$\frac{SS'}{LL'} = \frac{TS}{TL}$$

Isso significa que os raios do Sol e da Lua, SS' e LL' respectivamente, estão entre si como as distâncias da Terra ao Sol e à Lua, respectivamente TS e TL . Como a razão dessas duas últimas distâncias é conhecida, o mesmo é verdade da razão $\frac{SS'}{LL'}$. Sendo assim, segundo Aristarco, essas razões são iguais e estão compreendidas entre 18 e 20.

3.2.4 Os resultados obtidos por Aristarco

Para explicarmos de forma clara os resultados obtidos por Aristarco, introduziremos as seguintes notações:

D_S = distância da Terra ao Sol

D_L = distância da terra à Lua

R_S = raio do Sol

R_L = raio da Lua

R_T = raio da Terra

Introduziremos os parâmetros a e b assim definidos, para melhor entendermos a igualdade entre as razões $\frac{R_S}{D_S}$ e $\frac{R_L}{D_L}$.

Tomemos:

$$a = \frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L}$$

e

$$b = \frac{D_S}{D_L}$$

Para Aristarco, como visto antes, $b \approx 20$. Então para obter o parâmetro a , como o ângulo γ era conhecido, ele teria que medir os lados SS' e TS no triângulo TSS' da figura 3. Já para nós, hoje, a razão $\frac{SS'}{TS}$ é o que chamamos de seno do ângulo γ , de sorte que $a = \sin \gamma$. Então ele completou a determinação das grandezas: D_S , D_L , R_S e R_L em função do raio da Terra R_T , utilizando-se de um eclipse da Lua. Permitindo escrever que:

$$D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab}$$

$$D_S = b = \frac{3(b+1)R_T}{11a}$$

$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11}$$

$$R_L = aD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11b}$$

então de acordo com os dados de Aristarco, temos:

$$D_L \approx 16,8R_T$$

$$D_S \approx 337R_T$$

$$R_S \approx 5,7R_T$$

$$R_L \approx 0,29R_T$$

Já atualmente, contrariando Aristarco, com valores mais corretos para os ângulos utilizados, obtemos resultados mais próximos dos valores modernos, que são:

$$D_L \approx 62R_T$$

$$D_S \approx 24855R_T$$

$$R_S \approx 109R_T$$

$$R_L \approx 0,27R_T$$

Vimos aqui que Aristarco necessitou do raio da Terra para seus cálculos. No entanto, o raio da Terra, pelo que conta a história, foi calculado por Eratóstenes, depois de Aristarco. Também é sabido por referências vagas que outros sábios, antes de Eratóstenes e Aristarco, calcularam o raio da Terra. Sobretudo podem ser citados Aristóteles e Arquimedes. As próprias distâncias da Terra à Lua e ao Sol, foram calculadas - ou, pelo menos, avaliadas grosseiramente - antes desses sábios, mas desses fatos não temos informações precisas.

Tais resultados aqui apresentados, estão em um livro de Aristarco intitulado "*sobre o tamanho e distâncias do Sol e da Lua*". Tal livro foi reeditado e comentado pelo historiador da ciência Thomas L. Heath (1861-1940), sob o título *Aristarcus of Samos*".

3.2.5 A utilidade de um eclipse lunar

Vamos tentar descrever o raciocínio utilizado por Aristarco na observação de um eclipse da Lua. Isto ocorre quando este satélite atravessa o cone de sombra da Terra (Figura abaixo). Usaremos, por conveniência, a notação moderna, de que aristarco não dispunha.

Pelo tempo gasto pela Lua para atravessar o cone de sombra da Terra, Aristarco colocou o diâmetro desse cone na altura da Lua - LD ver Figura 8 - como sendo $8/3$ do diâmetro da Lua.

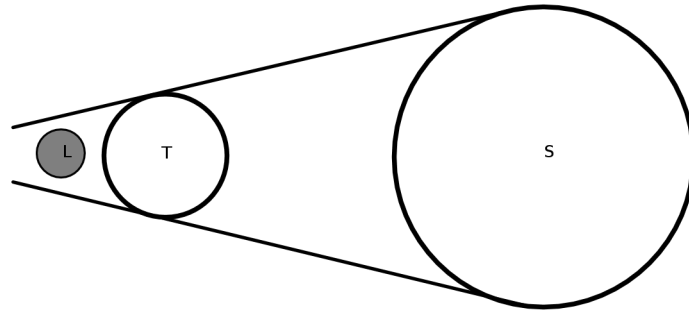


Figura 3.8: Modelo de um eclipse lunar.

Na Figura 8, L , T e S , são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; $LD = R_L$, $TC = R_T$ e $SA = R_S$ são os respectivos raios. De acordo com ele, $LD = \frac{8R_L}{3}$. Da semelhança dos triângulos DFC e CEA resulta $\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE}$.

Oberserve que:

$$CF = TC - TF = R_T - LD = R_T - \frac{8R_L}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DF = D_L$$

$$\Rightarrow AE = AS - SE = R_S - R_T$$

$$\Rightarrow CE = D_S$$

Substituindo esses valores na proporção anterior, obtemos

$$\frac{R_T - \frac{8R_L}{3}}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S}$$

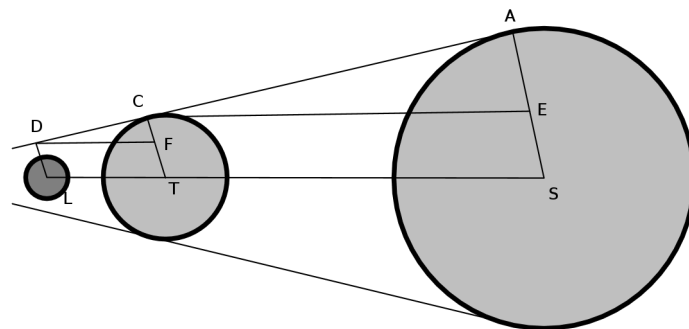


Figura 3.9: Modelo matemático de um eclipse lunar.

Por outro lado, já sabemos que

$$D_S = bD_L$$

$$R_S = aD_S = abD_L$$

$$R_L = aD_L$$

de sorte que a igualdade anterior pode ser escrita assim:

$$\frac{R_t - \frac{8aD_L}{3}}{D_L} = \frac{abD_L - R_T}{bD_L}$$

donde

$$\frac{R_T}{D_L - \frac{8a}{3}} = a - \frac{R_T}{bD_L}$$

que também se escreve,

$$(1 + \frac{1}{b}) \frac{R_T}{D_L} = \frac{11a}{3}$$

donde

$$D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab}$$

Então:

$$D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab}$$

$$D_S = bD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11a}$$

$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11}$$

$$R_L = aD_L = \frac{3(b+1)R_t}{11b}$$

que são os outros valores reegistrados anteriormente.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Os astrônomos da Grécia antiga - um pouco de história

A.1.1 Tales de Mileto(624-546 a.C.)

Introduziu na Grécia os fundamentos da geometria e da astronomia, trazidos do Egito. Pensava que a Terra era um disco plano em uma vasta extensão de água.

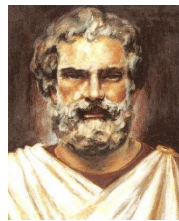


Figura A.1: Tales de Mileto, 624 - 546 a.C.

A.1.2 Pitágoras de Samos(572-497 a.C.)

Acreditava na esfericidade da Terra, da Lua e de outros corpos celestes. Achava que os planetas, o Sol, e a Lua eram transportados por esferas separadas da que carregava as estrelas. Foi o primeiro a chamar o céu de cosmos.

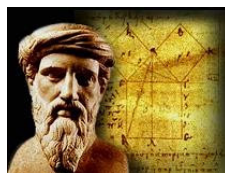


Figura A.2: Pitágoras de Samos, 572 - 497 a.C.

A.1.3 Aristóteles de Estagira(384-322 a.C.)

Explicou que as fases da Lua dependem de quanto da parte da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra. Explicou, também, os eclipses: um eclipse do Sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o Sol; um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Aristóteles argumentou a favor da esfericidade da Terra, já que a sombra da Terra na Lua durante um eclipse lunar é sempre arredondada. Afirmava que o Universo é esférico e finito. Aperfeiçoou a teoria das esferas concêntricas de Eudoxus de Cnidus(408-355 a.C.), propondo em seu livro *De Caelo*, que "o Universo é finito e esférico, ou não terá centro e não pode se mover."

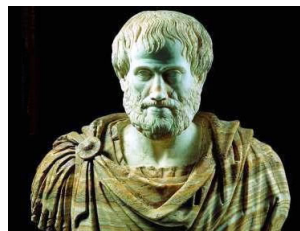


Figura A.3: Aristóteles de Estagira, 384 - 322 a.C.

A.1.4 Heraclites de Pontus(388-315 a.C)

Propôs que a Terra gira diariamente sobre seu próprio eixo, que Vênus e Mercúrio orbitam o Sol, e a existência de epiciclos.



Figura A.4: Heraclites de Pontus, 388 - 315 a.C.

A.1.5 Aristarco de Samos(310-230 a.C.)

Foi o primeiro a propor que a Terra se movia em volta do Sol, antecipando Copérnico em quase 2000 anos. Entre outras coisas, desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra e mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua.



Figura A.5: Aristarco de Samus, 310 - 230 a.C.

A.1.6 Eratóstenes de Cirênia(276-194 a.C.)

Bibliotecário e Diretor da Biblioteca Alexandrina de 240 a.C. a 194 a.C., foi o primeiro a medir o diâmetro da Terra.

Ele notou que, na cidade egípcia de Siena (atualmente chamada de Aswân), no primeiro dia de verão, ao meio-dia, a luz solar atingia o fundo de um grande poço, ou seja, o Sol estava incidindo perpendicularmente à Terra em Siena. Já em Alexandria, situada ao norte de Siena, isso não ocorria; medindo o tamanho da sombra de um bastão na vertical, Eratóstenes observou que em Alexandria, no mesmo dia e hora, o Sol estava aproximadamente sete graus mais ao sul. A distância entre Alexandria e Siena era conhecida como de 500 estádios. Um estádio era uma unidade de distância usada na Grécia antiga. Um camelo atravessa 100 estádios em um dia, e viaja a cerca de 16Km/dia. Como 7 graus corresponde a $1/50$ de um círculo (360 graus), Alexandria deveria estar a $1/50$ da circunferência da Terra ao norte de Siena e a circunferência da Terra deveria ser 50×5000 estádios. Infelizmente, não é possível se ter certeza do valor do estádio usado por Eratóstenes, já que os gregos usavam diferentes tipos de estádios. Se ele utilizou um estádio equivalente a $1/6$ Km, o valor está a 1 por cento do valor correto de 40000 Km.



Figura A.6: Eratóstenes de Cirênia, 276 - 194 a.C.

A.1.7 Hiparco de Nicéia(160-125 a.C.)

Considerado o maior astrônomo da era pré-critã, construiu um observatório da ilha de Rhodes, onde fez observações durante o período de 160 a 127 a.C.. Como resultado, ele compilou um catálogo com a posição no céu e a magnitude de 850 estrelas. A magnitude, que especificava o brilho da estrela, era dividida em seis categorias, de 1 a 6, sendo 1 mais brilhante, e 6 a mais fraca visível a olho nu. Hiparco deduziu corretamente a direção do eixo de rotação da Terra devido à influência gravitacional da Lua e do Sol, que leva 26000 anos para completar um ciclo. Para deudzir a precessão, ele comparou as posições de várias estrelas com aquelas catalogadas por Timocharis de Alexandria e Aristyllus de Alexandria 150 anos antes (cerca de 283 - 260 a.C.). Estes eram membros da Escola Alexandrina do século III a.C. e foram os primeiros a medir as distâncias das estrelas de pontos fixos no céu(ccordenadas eclípticas). Foram, também, dos primeiros a trabalhar na Biblioteca de Alexandria, que se chamava Museu, fundada pelo rei do Egito, Ptolémée Sôter ler, em 305 a. C..



Figura A.7: Hiparco de Nicéia, 160 - 125 a.C.

A.1.8 Ptolomeu(85-165 d.C.)

Claudius Ptolemaeus foi o último astrônomo importante da antiguidade. Não se sabe se ele era egípcio ou romano. ele compilou uma série de treze volumes sobre astronomia, conhecida como o Almagesto, que é a maior fonte de conhecimento sobre a astronomia na Grécia.



Figura A.8: Claudius Ptolomaeus, 85 - 165 d.C.

A.2 Matemática e Astronomia

Há mais de 2200 anos ...

Na antiguidade, os gregos exerceram um papel importante no desenvolvimento de diversos ramos do conhecimento humano. Movidos talvez pela curiosidade ou fascínio pelos astros, empreenderam incursões interessantes em assuntos de Astronomia.

Vejamos, por exemplo, o caso do geógrafo e matemático Erastótenes, que viveu entre os anos de 276 - 194 a.C. e trabalhou na famosa biblioteca de Alexandria. Baseando-se em alguns fatos conhecidos na época, ele conseguiu determinar o raio da Terra através de um procedimento bastante interessante.

Já se sabia na época que no solstício de verão - dia 21 de junho, início do verão no hemisfério norte - os raios solares atingiam perpendicularmente a superfície da cidade egípcia de Siena (atualmente chamada Aswan). Com essa informação, Erastótenes pensou em observar a inclinação dos raios solares em Alexandria, outra cidade egípcia situada ao sul de Siena, e em um 21 de junho verificou que aquela inclinação era de $7,2^\circ$.

Observe o esquema abaixo.

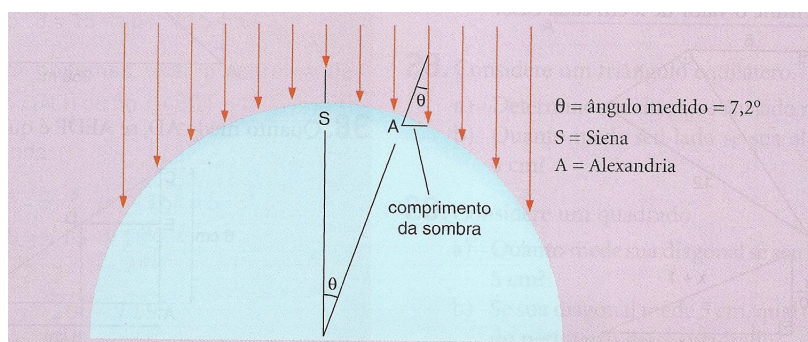


Figura A.9: Modelo onde a Terra é centro do Sistema solar.

Aplicando conhecimentos básicos de semelhança de triângulos, Erastótenes percebeu que, como $7,2^\circ$ equivale à quinquagésima parte de 360° , a distância entre as duas cidades - que estariam sobre o mesmo meridiano - corresponderia a $\frac{1}{50}$ da circunferência da Terra. A distância entre Siena e Alexandria, apurada a duras penas, media cerca de 790 Km (ao que parece Erastótenes pagou um homem para percorrer essa distância contando seus passos).

Multiplicando, então, 50 por 7990, ele obteve para a circunferência terrestre a medida de 39.500 Km. Como sabemos, para obter a medida do raio, bastaria fazer o cálculo do quociente entre 39.500 Km e 2π , mas na época o valor de π era aproximado para $\frac{22}{7}$. Assim, Erastótenes fez

$39500 \div (2 \cdot \frac{22}{7})$ e obteve a medida de aproximadamente 6.284 Km para o raio da Terra.

Hoje sabemos que, considerando o achatamento que existe nos pólos, o raio polar terrestre é de aproximadamente 6.357 Km e que a circunferência polar é 39.942 Km. Ou seja, podemos afirmar que Erastótenes obteve com seu método medidas surpreendentemente boas, considerando a precariedade dos instrumentos utilizados. Por exemplo, qual teria sido a precisão da medida

angular feita inicialmente? Além disso, ele considerou que as duas cidades estavam sobre o mesmo meridiano, o que hoje, sabe-se, não é exato. Na verdade, há uma diferença de cerca de 3°.

ainda assim, sua iniciativa é plena de méritos, como também seus outros trabalhos nas áreas de Aritmética e Geografia.

A.3 Um pouco de álgebra linear

A.3.1 Produto escalar

Em matemática, em álgebra linear, o produto escalar é uma função binária definida entre dois vetores que fornece um número real (também chamado "escalar") como resultado. É o produto interno padrão do espaço euclidiano.

Definição

O produto escalar de dois vetores A e B, que se representa por $\cdot$ ou ainda por um traço vertical $|$ é o resultado do produto do comprimento (também chamado de norma ou módulo) de B pela projeção escalar de A em B. Logo:

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C} \rangle = |\vec{A} \times \vec{B}| \cdot |\vec{A} \times \vec{C}| \cdot \cos(\hat{A})$$

A.3.2 Produto vetorial

Em matemática, o produto vetorial ou produto externo, é uma operação binária sobre vetores em um espaço vetorial. Seu resultado difere do produto escalar por ser também um vetor, ao invés de um escalar. Seu principal uso baseia-se no facto que o resultado de um produto vetorial é sempre perpendicular a ambos os vetores originais.

Definição

A notação do produto vetorial entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ do espaço vetorial R^3 é $|\vec{A} \times \vec{B}|$ (em manuscritos, alguns matemáticos escrevem $\vec{A} \wedge \vec{B}$ para evitar a confusão com a letra x). Podemos defini-lo como:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta),$$

onde θ é a medida do ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$, tal que $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ no plano definido pelos dois vetores.

Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, Geraldo Severo de Souza, *VÁRIAS FACES DA MATEMÁTICA - Tópicos para Licenciatura e leitura em geral*, 2ª ed. - são Paulo: Blucher, 2010.
- [2] Iezzi, G., *Fundamentos de Matemática Elementar, Vol.3*. São Paulo, Atual Ed., (1977-78).
- [3] Halliday, D., Resnick, R., Walker, j., *Fundamentos de Física I*, Rio de Janeiro/RJ, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., (2002).
- [4] Carvalho, P. C. P., *Introdução à Geometria Espacial*, Coleção do Professor de Matemática, SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, (2005).
- [5] do Carmo, M. P., Morgado, A. C., Wagner, E., *Trigonometria e Números Complexos*, Coleção do Professor de Matemática, SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, (2001).
- [6] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio - Vol I*, Coleção do Professor de Matemática, SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, (1999).
- [7] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio - Vol II*, Coleção do Professor de Matemática, SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, (2002).
- [8] Barbosa, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática, SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, (2012).
- [9] Smith, P. F., Gale, A. S., Neelley, J. H., *Geometria Analítica*, Rio de Janeiro/RJ, Brasil. Ed. LT (1957).
- [10] Hellmeister, A. C. P., *Explorando o ensino da Matemática - Atividades - Vol. 2*, Brasília/DF, MEC - Secretaria de Educação Básica, (2004).
- [11] Zanella, I. A., *Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações*, Dissertação - Mestrado Profissional de Matemática, Londrina/PR, (2013).