PROFMAT

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

UFPB

Quadrados Latinos e Quadrados Mágicos - Uma proposta didática †

por

Fausto Gustavo Farias

sob orientação do

Prof. Eduardo Gonçalves dos Santos

Trabalho apresentado como requisito para a conclusão do Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT

Março/2017
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

F224q Farias, Fausto Gustavo.
Quadrados latinos e quadrados mágicos – uma proposta didática / Fausto Gustavo Farias. - João Pessoa, 2017.
64 f. : il. -

Orientador: Prof. Eduardo Gonçalves dos Santos.
Dissaertação (Mestrado) – UFPB/PROFMAT

1. Matemática – Teoria. I. Título.

UFPB/BC CDU – 51(043)

Quadrados Latinos e Quadrados Mágicos - Uma proposta didática

por

Fausto Gustavo Farias

Trabalho apresentado como requisito para a conclusão do Mesgtrado Profissional PROFMAT.

Área de Concentração: Matrizes e Análise Combinatória

Aprovada por:

____

Prof. Eduardo Gonçalves dos Santos - UFPB (Orientador)

____

Prof. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

____

Prof. Graciana Ferreira Dias - UFPB - Campus IV

Março/2017

Agradecimentos

Quero agradecer à nossa força maior, a quem alguns chamam de Deus, que é quem nos rege e sem a qual não conseguiríamos nada.

À minha família, por sempre ter acreditado em meu potencial. Em especial à minha mãe, Carmélia, que foi a maior incentivadora e à minha tia Carmelinda, mentora e responsável intelectual por todas as minhas conquistas até aqui.

Aos amigos, pela compreensão da ausência em muitos momentos, pela força e amizade.

Aos meus queridos amigos da turma 2014 do PROFMAT UFPB, com quem compartilhei momentos difíceis e momentos alegres, com quem aprendi e reforcei o verdadeiro sentido de amizade, da ajuda ao próximo, com quem divido esta alegria.

Ao professor orientador Eduardo dos Santos pela paciência e pela valorosa condução na orientação deste trabalho. Aos demais professores do curso pelo aprendizado e principalmente pela convivência.

Dedicatória

Ao meu pai, o único e verdadeiro pai,
Oscar Brasiliano(in memorian)

Resumo

Neste trabalho fizemos uma pesquisa bibliográfica sobre os Quadrados Latinos e os Quadrados Mágicos. Mostramos a teoria matemática envolvida e, sobretudo, estudamos a ligação entre esses objetos. Trouxemos as informações necessárias para subsidiar o professor a usar Quadrados Mágicos e Quadrados Latinos como conteúdos. Nosso objetivo é discutir o uso de jogos e passatempos como ferramenta didática e chegar a uma proposta para utilização desses objetos em sala de aula.

Palavras-chave: Quadrados Latinos, Quadrados Mágicos, Quadrados Latinos Ortogonais, Proposta Didática.

Abstract

In this work we study the Latin Squares and the Magic Squares. We explore the mathematical teory and, above all, we study the link between theses objects. We bring the necessary information to support the teacher in the usage of Latin Squares and Magic Squares as content. Our goal is to discuss the usage of games and challenges like didatic tools, and to find a proposal to applicate him in the classroom.

Keywords: Latin Squares, Magic Squares, Orthogonal Latin Squares, Didatic Proposal.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Notações

Notações Gerais

- L_{n} representa o número total de Quadrados latinos de ordem n.
- l_{n} é o número de Quadrados latinos reduzidos.
- *QL* - Quadrado Latino, defido por Euler.
- *QLMO* - Quadrados Latinos Mutuamente Ortogonais.
- *L(i,j,n)* - Número de Quadrados Latinos *i-j* Reduzidos, ou seja, o número de Quadrados Latinos quando fixamos as i primeiras linhas e as j primeiras colunas, e permutamos os demais elementos.
- D_{n} - Número de Permutações Caóticas.

Introdução

Ao longo do tempo, com o desenvolvimento das técnicas de ensino e das teorias didáticas, temos visto a evolução da utilização de jogos, brincadeiras, passatempos como ferramentas bastante eficazes no processo de ensino-aprendizagem. O caráter lúdico dos jogos convida as pessoas, que antes eram avessas à teoria matemática contida neles, a mergulhar num conhecimento, muitas vezes complexo. A intenção da utilização dos jogos como ferramentas didáticas é dotar o aluno de um conhecimento importante através de uma linguagem acessível e dinâmica. Alguns autores já deram sua contribuição à pesquisa do uso de jogos como ferramentas didáticas.

> *Um jogo (do latim, jocus), é uma atividade com a finalidade de divertir, entreter, recrear, onde exista a figura do jogador, que é quem pratica a ação, e suas respectivas regras estabelecidas para se determinar a condição de vencer ou perder. A ação no jogo, tanto quanto no problema, envolve um objetivo único que é vencer o jogo ou resolver o problema e, em ambos os casos, o indivíduo se sente desafiado e motivado a cumprir tal objetivo. Atingir o objetivo implica em dominar, em conhecer, em compreender todos os aspectos envolvidos na ação e, portanto, produzir conhecimento. (Grando, 1995, p.77)* [1]

O ponto positivo dos jogos é que eles proporcionam desafios e ambientes visualmente atrativos, com a utilização de imagens que motivam e estimulam o interesse, a atenção, a concentração e a memória do jogador. Com isso, eles deixaram de ser apenas entretenimento e se tornaram importantes ferramentas de apoio ao aprendizado, pois segundo Antunes (2000), o interesse do usuário passou a ser a força que comanda o processo de aprendizagem.

O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) pode ser o ambiente ideal e propício para a interação dos alunos com esses jogos e desafios. Este espaço, criado em instituições de Ensino e Pesquisa, é dedicado ao desenvolvimento de situações desafiadoras e à busca de soluções para problemas encontrados no cotidiano. Nesse sentido, a inserção dos alunos em um ambiente diverso da sala de aula, facilita a motivação e o interesse pela busca de solucionar problemas. Alguns autores deram suas contribuições a respeito dos LEM e dos materiais manipuláveis como Rêgo e Rêgo (2006), Lorenzato (2006), Bezerra (1962) e Chaves (1960).

> *Vemos uma forte potencialidade, no uso desses materiais, para auxiliar a aprendizagem de conhecimentos de naturezas diversas (informações, conceitos, habilidades ou atitude), seu alcance e suas limitações e a sua adequação à competência, levando-se em conta conhecimentos prévios, faixa etária, entre outros elementos. (RÊGO e RÊGO, 2006, p. 42).* [2]

Com vistas à procura de um conteúdo para trabalhar essa situação desafiadora e tentar quebrar esse paradigma de que as pessoas têm medo da disciplina de Matemática, analisamos a bibliografia disponível sobre Quadrados Latinos[3], pudemos perceber a grande variação das abordagens, tanto das definições e consequências, como de, principalmente, suas aplicações, onde se destacam as aplicações no ramo da estatística. As aplicações estatísticas mais comuns são os chamados Delineamentos em Quadrados Latinos. Podemos encontrar alguns trabalhos disponíveis que tratam dos Quadrado Latinos, os quais listamos a seguir:

- Quadrados Latinos obtidos por meio de técnicas de confundimento em ensaios fatoriais.
- Quadrados Latinos com aplicações em Engenharia de Software [4]
- Princípios sobre Delineamentos em Experimentação Agrícola [5]
- Matemática e Estatística na Análise de Experimentos e no Melhoramento Genético. [6]

Tentaremos aqui fazer uma abordagem simples e com aplicações voltadas ao uso em sala de aula, especificamente do Ensino Médio. Vamos trabalhar a relação existente entre Quadrados Mágicos e Quadrados Latinos. Essa relação ficará clara através dos processos de construção dos Quadrados Mágicos.

Foi realizada uma pesquisa bibliográfica, primeiramente, sobre Quadrados Latinos e sua teoria pertinente. Em seguida, pesquisamos a utilização de conteúdos matemáticos em jogos e desafios, uma vez que pretendíamos construir uma proposta

[3]Termo cunhado por Euler, ao utilizar letras gregas e latinas (Quadrado Greco-Latino), que com o tempo passou a se chamar apenas de latino, para definir uma Matriz quadrada, de ordem $n \times n$, onde suas entradas são preenchidas com os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$, de modo que cada elemento ocorra uma única vez em cada linha e cada coluna dessa matriz

didática. Fechamos nossa pesquisa com a leitura de um artigo da Revista Scientific American, sobre métodos de construção de Quadrados Mágicos. A partir daí, tentamos traçar um fio condutor e relacionar os vários objetos da pesquisa.

O objetivo geral deste trabalho é dar subsídios ao professor para que ele seja capaz de levar esses assuntos, Quadrados Latinos e Quadrados Mágicos, para o ambiente de sala de aula, bem como realizar atividades lúdicas como ferramentas, para busca de uma boa aprendizagem.

Tentaremos alcançar este objetivo geral através de alguns objetivos específicos como apresentar algumas definições e teoremas da teoria dos elementos matemáticos que baseiam os Quadrados Mágicos e os Quadrados Latinos, e também oferecer uma proposta didática com a utilização desses objetos.

Nosso trabalho está dividido em 4 capítulos. A seguir, damos um pequeno resumo do que será abordado em cada um deles.

No primeiro capitulo faremos um breve apanhado histórico dos objetos deste trabalho, como os Quadrados Latinos, Quadrados Mágicos e do Sudoku, que é um exemplo de Quadrado Latino, bem como os agentes responsáveis pela pesquisa e desenvolvimento da vasta teoria que fundamentam esses objetos.

No segundo capítulo, iremos abordar a teoria matemática que foi desenvolvida e que fundamenta o estudo dos Quadrados Latinos e Quadrados Latinos Ortogonais. Tentaremos elencar as principais definições e teoremas, bem como suas respectivas demonstrações. Ainda neste capitulo, iremos falar do surgimento do Sudoku. Em seguida vamos elencar algumas regras e sugestões para a resolução, além do número de jogos possíveis.

No terceiro capítulo, iremos estudar os Quadrados Mágicos. Trazemos a definição, suas propriedades, e métodos de construção. Vamos ver que há várias maneiras de se construir um Quadrado Mágico de ordem n, para n par ou ímpar.

Já no quarto capítulo, iremos trazer uma proposta de intervenção didática, para alunos do Ensino Médio com a utilização de Quadrados Mágicos e Quadrados Latinos. Vamos explorar a construção de Quadrados Mágicos e Quadrados latinos em algumas de suas aplicações.

Capítulo 1

Breve apanhado histórico

Não podemos começar a falar de um assunto tão importante, que são os Quadrados Latinos, sem mencionar o grande expoente, um verdadeiro gênio matemático, que deu contribuições indeléveis à várias teorias matemáticas, inclusive a esta pesquisa, que é Leonhard Euler (1707 - 1783). Suas pesquisas passam por várias áreas da Matemática como o Cálculo, Geometria, Teoria dos Números, Teoria dos Grafos e, claro, a Matemática Recreativa.

Figura 1.1: Foto: Leonhard Euler

Leonhard Euler é suíço, nascido na cidade da Basiléia em 1707. Viveu boa parte de sua vida em São Petersburgo, na Russia, onde faleceu no ano de 1783.

1.1 A Origem dos Quadrados Mágicos - precursores dos Quadrados Latinos

Muito antes de Euler começar os estudos e criar a ideia de Quadrado Latino, surgem os Quadrados Mágicos. Quadrados Mágicos são matrizes quadradas de ordem n, onde suas entradas são números do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n^2\}$, distribuídos de tal forma que a soma dos elementos de cada linha ou coluna é sempre constante, chamada de Constante Mágica. O termo *Mágico* se deve muito ao misticismo que envolveu a descoberta na época, na China, e da suposta sorte que acompanhava quem conseguisse enxergar.

> *Os historiadores dizem que os quadrados mágicos teriam surgido há cerca de 3000 anos (na China e na Índia). Cerca de 2200 a.C., o imperador-engenheiro Yu, o Grande, estaria a observar o rio Amarelo quando viu uma tartaruga divina (era, na época, considerado um animal sagrado), que em seu casco estava o símbolo, que hoje em dia é conhecido pelo nome de lo shu. Assim, Yu percebeu que as marcas nas costas da tartaruga (que formava os símbolos com nós) achou que os nós podiam ser transformados em números, de um a nove, e que todos eles somavam 15 em todas as direções como se fossem algarismos mágicos (Lopes, 2007)*

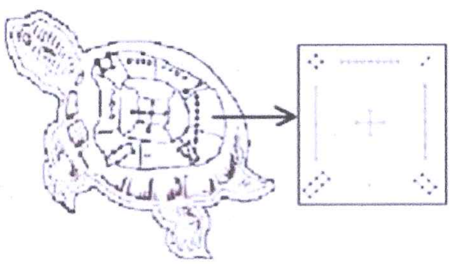

Figura 1.2: Reprodução. Imagem aproximada dos símbolos encontrados na tartaruga. Fonte: Wikipedia

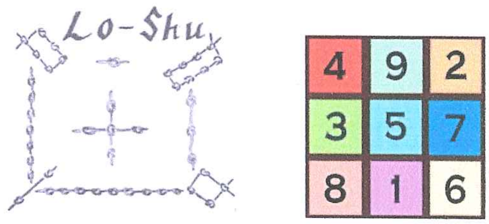

Figura 1.3: Reprodução. A partir dos símbolos, o Quadrado Mágico correspondente. Fonte: Wikipedia

Outro Quadrado Mágico famoso, que tem o formato 4×4, foi incluído pelo pintor e matemático alemão Albrecht Dürer na obra Melancolia I, de 1514, figura 1.4. Situado no canto superior direito do quadro, figura 1.5, a sua soma é igual a 34 e distingue-se por apresentar nas células centrais da linha inferior os números 15 e 14 que, juntos, indicam a data da conclusão da obra.

Figura 1.4: Reprodução. Melancolia, de Albrecht Dürer, 1514

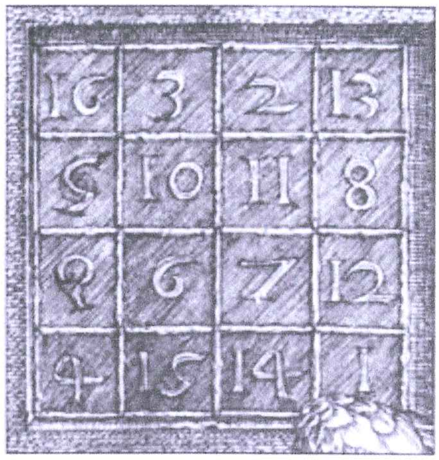

Figura 1.5: Reprodução. No canto superior direito da obra, observa-se um Quadrado Mágico, com destaque para os números centrais da linha inferior, fazendo referência ao ano da obra

Devido à cultura e religiosidade da época, a descoberta desses sinais tornavam-nos especiais e com poderes mágicos, de tal maneira que, quem possuísse um desses Quadrados Mágicos, teria sorte na vida e gozaria de outras benesses. Na Índia e na China, havia ainda quem marcasse Quadrados Mágicos em metais e os usassem como amuletos. (Lopes, 2007)

1.2 Euler e os Quadrados Latinos

Muitos anos depois, em 1792, Euler viria a estudar os Quadrados Mágicos e, desafiado pelo problema clássico dos 36 oficiais, desenvolveria a teoria dos Quadrados Latinos. O problema consistia em organizar 36 oficiais, de 6 patentes diferentes e 6 regimentos, sendo cada regimento representado por 6 oficiais de patentes diferentes. O enunciado do problema está transcrito a seguir:

"Suponhamos que seis regimentos fornecem seis oficiais de patentes diferentes. Por exemplo, um general, um coronel, um capitão, um major, um tenente e um alferes. Será possível colocar os oficiais numa disposição quadrangular seis por seis, para que em cada linha e cada coluna não haja nenhuma repetição de patente nem de regimento?

Um Quadrado Latino (antes chamado de Quadrado Greco-Latino por terem sido usadas letras dos alfabetos Grego e Latinos em suas entradas, e, com o passar do tempo, passou a ser chamado simplesmente de Latino) é uma matriz quadrada de ordem n, contendo n^2 entradas, onde em cada linha e cada coluna apareça uma única vez cada um dos n elementos. A partir desse conceito, Euler definiu o que são Quadrados Latinos ortogonais, ou quadrados greco-latinos. Um par de quadrados latinos de mesma ordem são ortogonais se os pares ordenados formados por entradas correspondentes forem todos distintos. Segundo, Euler, caso se encontrasse um par de quadrados latinos ortogonais de ordem 6, o problema estaria solucionado. Como não encontrou, Euler conjecturou que não havia Quadrados Latinos ortogonais de ordem $n = 4k + 2$, com k natural. O problema original dos 36 oficiais é um caso particular da conjectura de Euler, o Quadrado Latino de ordem 6, quando $k = 1$.

Mais tarde, em 1900, o matemático amador Gaston Tarry (Tarry, 1900) conseguiu provar, usando um método exaustivo de obtenção de Quadrados Latinos Ortogonais, que realmente não existia um par de Quadrados Latinos Ortogonais de ordem 6, mostrando, assim, que o problema dos 36 oficiais não tinha solução. Ainda em 1959, os matemáticos Bose, Shrikhande e Parker provaram a existência de Quadrados Latinos Ortogonais de ordem $10, 14, 18, 20, ...$, ou seja, $n = 4k + 2$, para $n > 1$, derrubando de vez a conjectura de Euler, embora que ele estivesse certo para o caso $n = 6$.

Capítulo 2

Quadrados Latinos, Quadrados Latinos Ortogonais e algumas aplicações

Neste capítulo iremos falar um pouco da parte teórica dos Quadrados Latinos. Elencamos as mais pertinentes teorias relacionadas ao conteúdo e algumas de suas aplicações.

2.1 Quadrados Latinos

Um Quadrado Latino (QL) de ordem n , é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, onde suas entradas são números do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$, ou qualquer conjunto de elementos que apresente uma certa ordem inicial, onde em cada linha e em cada coluna, cada elemento só apareça uma única vez.

Vamos ver alguns exemplos de Quadrados Latinos de ordens variadas, com entradas numéricas e não numéricas.

Exemplo 1 Considere a matriz quadrada de ordem 3×3, onde as entradas são apenas os números do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Perceba que, em cada linha e em cada coluna dessa matriz, só aparece cada elemento apenas uma vez, o que a caracteriza como Quadrado Latino.

Exemplo 2 Considere a matriz quadrada de ordem 5×5, onde as entradas são apenas os números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Essa matriz também é um Quadrado latino, pois preserva as propriedades descritas na definição.

Exemplo 3 Considere uma matriz 4×4, onde suas entradas são apenas os elementos do conjunto $\{x, y, z, t\}$.

$$\begin{bmatrix} x & z & t & y \\ y & t & x & z \\ t & y & z & x \\ z & x & y & t \end{bmatrix}$$

Vamos, agora, mostrar que podemos ter Quadrados Latinos de ordem n, para qualquer que seja esse n inteiro, ou seja, podemos obter pelo menos um Quadrado Latino para uma ordem qualquer.

Teorema 1 *Para todo inteiro n, existe um Quadrado Latino de ordem n.*

PROVA: Uma maneira de provar este resultado é tomar os inteiros $1, 2, ..., n$, como a primeira linha de um quadrado $n \times n$. Em seguida, para construir a segunda linha, simplesmente transferimos cada um desses números inteiros uma posição para a esquerda e movemos o n para a extrema direita. Assim, a segunda linha se torna $2, 3, ..., n, 1$. Isso é o que chamamos de Permutação Cíclica.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & 1 \\ 3 & 4 & 5 & ... & 2 \\ ... & ... & ... & ... & \\ n & 1 & 2 & ... & n-1 \end{bmatrix}$$

Nós então continuamos este processo, deslocando os símbolos de uma determinada linha para uma posição a esquerda para formar a próxima linha, até que tenhamos construído um quadrado $n \times n$. Por essa construção, cada linha tem n elementos distintos e, com um simples entendimento, o leitor estará apto a se convencer de que cada coluna também term n elementos distintos. ■

Aqui, por quadrados distintos, queremos dizer matrizes distintas de modo que dois Quadrados Latinos de ordem n serão considerados diferentes e se diferirem em, pelo menos, uma posição. Vamos denotar por L_{n} o número total de Quadrados Latinos distintos de ordem n. Em um esforço para nos ajudar a calcular o L_{n}, vamos introduzir a noção de Quadrado Latino Reduzido de ordem n, denotado por l_{n}.

2.2 Quadrados Latinos Reduzidos

Um Quadrado Latino Reduzido é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, onde suas entradas são os números do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, ou qualquer conjunto que tenha uma sequência primitiva, onde apresentam, ambas, primeira linha e primeira coluna os elementos em sua ordem primitiva.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 2 & ... & ... & ... & \square \\ 3 & ... & ... & ... & \square \\ ... & ... & ... & ... & \square \\ n & ... & ... & ... & \square \end{bmatrix}$$

Exemplo 4 Considere a seguinte matriz 3×3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz é uma Quadrado Latino Reduzido, pois sua primeira linha e primeira coluna apresentam a ordem primitiva do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Exemplo 5 Considere a seguinte matriz 4×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos aqui mais um exemplo de um Quadrado Latino Reduzido, pois, ambas, primeira linha e primeira coluna preservam a ordem primitiva de suas entradas $\{1, 2, 3, 4\}$.

Uma questão nos é imposta ao tomar ciência dessas definições: **É possível determinar o número total de Quadrados Latinos de uma ordem qualquer?** Vamos tentar responder a essa questão utilizando o Teorema abaixo.

Se denotarmos por l_n, o número de Quadrados Latinos Reduzidos, e $n!$ a usual multiplicação $n.(n-1).(n-2).....1$, temos:

Teorema 2 *Para cada $n \geq 2$, o número total de Quadrados Latinos, L_n, é dado por*

$$L_n = n!(n-1)!.l_n.$$

PROVA. Seja um Quadrado Latino de ordem n. Podemos permutar as colunas de $n!$ maneiras diferentes. Obviamente, cada uma das permutações torna a matriz ainda um Quadrado Latino, e duas dessas não serão a mesma matriz. Fixamos, então, a primeira linha como sendo a ordem original $1, 2, 3, ..., n$. Analogamente, depois de permutar as colunas, podemos permutar as $(n-1)$ linhas de $(n-1)!$ maneiras. Mais uma vez, cada uma das matrizes serão Quadrados Latinos, distintos um dos outros, e mais importante, cada um desses Quadrados Latinos serão distintos daqueles obtidos na permutação das colunas. Essa ultima afirmação é verdadeira pois na permutação das linhas, a primeira não é mudada. Assim, começando com um Quadrado Latino Reduzido de ordem n, a permutação das $n!$ colunas e $(n-1)!$ linhas resulta em exatamente $n!.(n-1)!$ Quadrados Latinos de ordem n, e exatamente um desses Quadrados Latinos será reduzido. Desde que existam l_n reduzidos de ordem n, segue o resultado. ■

Por esse resultado, vimos que o número de Quadrados Latinos depende diretamente do número de Quadrados Latinos Reduzidos. Então, uma questão é pertinente: **Quantos Quadrados Latinos Reduzidos existem?** Ou seja, é possível determinar o número l_n?

Vimos que, para calcular o número total de Quadrados Latinos de ordem n, dependemos do número de Quadrados Latinos Reduzidos, l_n. Reside aí uma dificuldade, pois os conhecimentos computacionais atuais só nos permitem, hoje, calcular até o valor l_{15}.

A determinação de l_n tem sido uma busca árdua por longos anos. Podemos encontrar l_n para $n \leq 4$, mas o número de Quadrados Latinos reduzidos de ordem a partir de 5 foi conhecido por Euler e Arthur Cayley; Percy McMahon usou um método diferente para encontrar o mesmo número, mas encontrou um valor errado para ordem 5. O número de Quadrados Latinos reduzidos de ordem 6 foi encontrado por M. Frolov e mais tarde por Gaston Tarry. M. Frolov também deu uma contagem errada para o número de Quadrados Latinos reduzidos de ordem 7. Donald Allan Norton enumerou os Quadrados Latinos reduzidos de ordem 7, mas incompletamente; este, por sua vez, foi completado por Sade e Saxena. O número de Quadrados Latinos reduzidos de ordem 8 foi encontrado por Wells, de ordem 9 por Stanley Bammel e Jerome Rothstein.

O valor de l_{10} foi inicialmente encontrado em 1990, pelo matemático amador Eric Rogoyski, trabalhando no seu computador pessoal e no ano seguinte por Brendan Mckay. O documento resultante também apresentou o número de Retângulos Latinos (veja em 2.2) com até 10 colunas. Antes de morrer em 2002, Eric Rogoyski trabalhou durante vários anos sobre os quadrados de ordem 11, mas o poder de computação disponível para ele era inadequado, apesar de sua abordagem ter sido bastante repercutida. Dado o avanço em computadores desde então, podemos agora concluir o cálculo de maneira mais adequada.

Na tabela abaixo, organizamos um cronograma com as descobertas feitas pelos seus e respectivos autores, sobre o número l_n.

n	l_n	Autor(Ano)
1	1	
2	1	
3	1	
4	4	
5	56	Euller(1782),C.(1890),MacM.(1915)
6	9408	Frolov(1890) e Terry(1900)
7	16942080	F.(1890),N.(1939),S.(1948),Sax.(1951)
8	535281401856	Wells(1967)
9	377597570964258816	Bammel e Rothstein(1975)
10	7580721483160133811489280	Mckay e Rogoyski(1995)
11	5363937773277371298119673540771840	Mckay e Wanless(2005)
12	$1,62 \times 10^{44}$	Mckay e Rogoyski(1995)
13	$2,52 \times 10^{56}$	Mckay e Rogoyski(1995)
14	$2,53 \times 10^{70}$	Mckay e Rogoyski(1995)
15	$1,56 \times 10^{86}$	Mckay e Rogoyski(1995)

Tabela 2.1: Cronograma das descobertas para l_n e seus respectivos autores

2.3 Algumas Estimativas

Devido às limitações quanto à obtenção dos valores de l_n, para $n \geq 15$, existem desencontros quanto ao número total de Quadrados Latinos, de ordem n. Então, não conseguiremos encontrar o número total de Quadrados latinos para uma ordem qualquer. Entretanto, podemos fazer estimativas a respeito de L_n. Vamos trazer aqui, algumas estimativas feitas por Cameron (Cameron, 1994).

Para este Teorema, vamos usar as informações da seção 4.2 do nosso Apêndice.

Teorema 3 *O número de Quadrados Latinos, de ordem n, é, pelo menos*

$$\prod_{k=1}^{n} k!$$

PROVA Adicionamos uma linha por vez. Existem, pelo menos, $n!$ escolhas para a primeira linha, e pelo menos $(n-1)!$ escolhas para a segunda, e assim por diante. Este problema incorpora um problema de contagem que nós mencionamos anteriormente (Teorema 2). A primeira linha do Quadrado Latino de ordem n é, simplesmente, uma permutação do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$, e existem, exatamente, $n!$ escolhas para isto. Dada a primeira linha, nós podemos fixa-la como $\{1, 2, 3, ..., n\}$; em seguida, uma segunda linha é precisamente uma permutação, satisfazendo $i\pi \neq i$, com $i = 1, 2, 3, ..., n$, que é um desarranjo (ou *Permutação Caótica* 4.2). Nós sabemos que o número de Permutações Caóticas é o número inteiro mais próximo de

$$\frac{n!}{e}$$

para $n \geq 2$. Este valor é melhor que o limite inferior de $(n-1)!$ que nós usamos. Então a estimativa para o número de Quadrado Latino de ordem n pode ser melhorado um pouco mais. Entretanto, o número de escolhas da terceira linha depende da maneira como foram escolhidas as duas primeiras linhas, então não podemos obter o número exato simplesmente multiplicando n números.

Exemplos

Os exemplos a seguir irão mostrar que o valor da estimativa, do Teorema 3, coincide com o valor exato, dado pelo Teorema 2.

7) Existem 2 Quadrados Latinos de ordem 2 $(1!.2! = 2)$

Usando o Teorema 2, temos $L_2 = 2!(2-1)! = 2$, a saber $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

8) Existem 12 Quadrados Latinos de ordem 3 $(1!.2!.3! = 12)$

Usando o Teorema 2, temos $L = 3!(3-1)!.1 = 12$, a saber

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

9) Para Quadrados Latinos de ordem 4, entretanto, existem $24.3 = 72$ escolhas para as duas primeiras linhas, que podem ser extendidas de 4 maneiras diferentes, e $24.6 = 144$ que têm apenas 2 extensões, então o número de Quadrados latinos de ordem 4 é $24.3.4 + 24.6.2 = 576$

Usando o Teorema 2 temos $L_4 = 4!.(4-1)!.4 = 24.6.4 = 576$. Note que usamos o valor de l_4 que é tabelado, e retiramos da tabela 2.1

Vamos, agora, tentar melhorar essas estimativas (Cameron, 1994)

Seja L_n o número de Quadrados Latinos de ordem n. Se $L_n \geq n!(n-1)!...1.$, então

$$L_n \geq \frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}}$$

Sabe-se que n^{n^2} é o número de matrizes $n \times n$ com elementos no conjunto $1, 2, 3, ..., n$

Existem n^{n^2} maneiras de preencher as n^2 posições da matriz, onde as entradas são escolhidas no conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Assim,

$$L_n \leq n^{n^2}$$

.

Como são n linhas e existem $n!$ permutações para cada uma delas, então

$$L_n \leq (n!)^n$$

.

Observando que cada entrada da linha é escolhida do conjunto de permutações de $\{1, 2, 3, ..., n\}$, e existem $n!$ permutações, então

$$L_n \leq (n!).(n!).....(n!) = (n!)^n$$

Como todas as linhas, após a primeira, são desarranjos (Permutações Caóticas), então

$$L_n \leq \frac{(n!)^n}{e^{n-1}}$$

OBSERVAÇÃO - Comparar esses resultados, é uma ajuda para estimar $logL_n$ em vez do próprio L_n. A intenção de estimar o $logL_n$ é trazer esse número para um patamar mais plausível, uma vez que o número n^{n^2} é muito grande. A possibilidade mais simples próxima do resultado, ou seja, $L_n \leq n^{n^2}$, nos dá $logL_n \leq n^2.logn$.

Vamos agora estudar um pouco dos Quadrados Latinos Ortogonais. Euler foi um dos grande estudiosos que desenvolveram e batizaram esses tipos de Quadrados Latinos. Vamos ver a definição e mostrar algumas de suas aplicações.

2.4 Quadrados Latinos Ortogonais

Dois Quadrados Latinos $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são ditos *Ortogonais* se, para qualquer elemento (k, l) do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$ existe um único valor de i e j cada, que $a_{ij} = k$ e $b_{ij} = l$; em outras palavras, existe uma única posição onde A tem entrada k e B tem entrada l. Um conjunto $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de Quadrados Latinos é chamado de **Quadrados Latinos Mutuamente Ortogonais**, ou simplesmente **QLMO**, se quaisquer dois Quadrados Latinos no conjunto são Ortogonais.

Uma outra maneira de chamarmos os Quadrados Latinos Ortogonais, é Quadrado *greco-romano* ou *greco-latino*. A razão disso vem das diferentes notações que algumas vezes são usadas. Ao invés de números, as entradas podem ser tomadas de um conjunto de tamanho n; as n primeiras letras do alfabeto comumente usadas. Agora, se nós usamos letras de diferentes alfabetos, dizemos o alfabeto Latino para A e o alfabeto Grego para B, são usados, em seguida dois quadrados podem ser combinados univocamente; e A e B são ortogonais se, e só se, cada combinação de uma letra Latina e Grega ocorre exatamente uma vez no quadrado.

Exemplo 10: Aqui estão dois Quadrados Latinos Ortogonais de ordem 3, e o correspondente quadrado *Greco-Latino*.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a\alpha & b\beta & c\gamma \\ b\gamma & c\alpha & a\beta \\ c\beta & a\gamma & b\alpha \end{bmatrix}$$

Perceba que, tomando as entradas da última matriz, que chamamos de *Matriz Concatenada*, ou seja, como sendo um par de letras, onde a primeira letra é da primeira matriz, e a segunda letra da segunda matriz; cada par formado na última matriz é único. Isso comprova que os Quadrados Latinos são Ortogonais.

Exemplo 11: Observe agora os Quadrados Latinos a seguir. Queremos verificar se esses Quadrados Latinos são Ortogonais.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Considere agora a *Matriz Concatenada* onde as entradas são formadas pelos pares (x, y), onde x é uma entrada da primeira matriz, e y é sua correspondente (mesma posição) da segunda matriz.

$$\begin{bmatrix} (1,2) & (2,3) & (3,1) \\ (3,1) & (2,2) & (1,3) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \end{bmatrix}$$

Tabela 2.2: Matriz que apresenta vários pares ordenados repetidos. Quadrados Latinos não Ortogonais

Perceba, agora, que vários pares ordenados aparecem em mais de uma posição. Então, os Quadrados Latinos do exemplo **NÃO** são Ortogonais.

2.4.1 Algumas aplicações interessantes dos Quadrados Latinos Ortogonais

Criando uma tabelas de jogos de um torneio entre duas equipes

Suponhamos que duas equipes, A e B, com cinco atletas cada, estejam disputando a final de um torneio de Tênis. A organização do torneio definiu o formato da disputa, que terá 25 jogos:

- Os jogos serão realizados na categoria "simples", ou seja, jogos entre apenas dois jogadores, um de cada equipe;
- Cada jogador da equipe A jogará com todos os jogadores da equipe B uma única vez;
- Os 25 jogos serão disputados em 5 rodadas, onde todos os atletas das duas equipes jogam.

Como se trata de uma final, todos os jogos de cada rodada devem ser realizados ao mesmo tempo, em locais diferentes. Portanto, há a necessidade de se alocar os jogos em 5 locais. Os técnicos definiram, então, os locais onde cada atleta vai jogar em cada rodada:

	Rodada 1	Rodada 2	Rodada 3	Rodada 4	Rodada 5
Local 1	B	J	A	R	P
Local 2	P	B	J	A	R
Local 3	R	P	B	J	A
Local 4	A	R	P	B	J
Local 5	J	A	R	P	B

Tabela 2.3: Time A: (J) João, (P) Paulo, (A) André, (B) Bruno, (R) Rodolfo

	Rodada 1	Rodada 2	Rodada 3	Rodada 4	Rodada 5
Local 1	S	E	C	F	D
Local 2	E	C	F	D	S
Local 3	C	F	D	S	E
Local 4	F	D	S	E	C
Local 5	D	S	E	C	F

Tabela 2.4: Time B: (S) Saulo, (C) Carlos, (D) Danilo, (E) Eduardo e (F) Fábio

Perceba que a forma de construir a tabela, com a distribuição dos atletas pelos locais de partida de cada time, é tal que obtemos dois Quadrados Latinos Ortogonais. Essa propriedade se observa quando cada jogador disputa um jogo apenas uma vez em cada local, em rodadas diferentes.

Agora, quando efetuamos a concatenação dos dois Quadrados, podemos definir os 25 confrontos. Veja:

	Rodada 1	Rodada 2	Rodada 3	Rodada 4	Rodada 5
Local 1	S $\times$ B	E $\times$ J	C $\times$ A	F $\times$ R	D $\times$ P
Local 2	E $\times$ P	C $\times$ B	F $\times$ J	D $\times$ A	S $\times$ R
Local 3	C $\times$ R	F $\times$ P	D $\times$ B	S $\times$ J	E $\times$ A
Local 4	F $\times$ A	D $\times$ R	S $\times$ P	E $\times$ B	C $\times$ J
Local 5	D $\times$ J	S $\times$ A	E $\times$ R	C $\times$ P	F $\times$ B

Tabela 2.5: Tabela dos confrontos, derivada da concatenação dos Quadrados Latinos

Podemos verificar a propriedade Ortogonal dos Quadrados Latinos, uma vez que os confrontos são únicos.

Uma outra aplicação importante dos Quadrados Latinos Ortogonais é a criação de códigos. Existe uma área da Álgebra Abstrata e da Álgebra Linear que trabalha o que se chama de Corretor de códigos. Como esse não é o objetivo do nosso trabalho, se o leitor quiser conhecer a Teoria dos Códigos, com uma abordagem algébrica, recomendamos a leitura do trabalho de Alegri (Alegri, 2006).

2.5 Sudoku - O jogo

O Sudoku, por sua vez, é um jogo que se tornou popular muito recentemente. O Sudoku é um tipo de Quadrado Latino. Ao contrário do que se pensa, foi criado para fins de entretenimento, nos Estados Unidos, em meados da década de 70, por Howard Garns. Foi publicado em revistas americanas especializadas em jogos e desafios e surgiu com o nome original de *Number Place*. Em 1984, uma empresa japonesa descobriu o jogo e o levou para o Japão. A marca *Sudoku* já era registrada por essa empresa e trata-se da abreviatura de "os dígitos devem permanecer únicos". O jogo retornou ao Ocidente quando foi publicado pela revista Times em Novembro de 2004, e, a partir daí, tornou-se o fenômeno que nós conhecemos hoje.

O Sudoku padrão, uma matriz 9×9, dividido em 9 subgrades de ordem 3×3, é um jogo onde o objetivo é completar o seu preenchimento com números(de 1 a 9). O tipo padrão desse jogo assemelha-se a um Quadrado Latino. A única diferença para os Quadrados Latinos é a exigência de cada subgrade 3×3 seja preenchida apenas com números de 1 a 9.

Tabela 2.6: Formato padrão de um desafio Sudoku

De certa forma causa surpresa o fato de que o grau de dificuldade do jogo não estar relacionado com a quantidade de número fornecidos previamente, mas sim com o posicionamento dos números fornecidos e com a relevância das informações. Dessa maneira, um jogo com poucos números fornecidos pode ser mais fácil do que um jogo com mais números previamente fornecidos. Há também a possibilidade de aferir a dificuldade de um jogo pela complexidade das estratégias necessárias para resolvê-lo.

Já mencionamos anteriormente que um jogo Sudoku padrão se assemelha a um Quadrado Latino. Dessa maneira, podemos estimar o número de jogos possíveis.

Se formos usar algumas informações já mostradas nesse trabalho, podemos determinar o número de Quadrados Latinos de ordem 9. Esse número, na verdade, trata-se de um limite superior para o número de jogos Sudoku possíveis. Esse número é conhecido e é especialmente grande. Existem 5.524.751.496.156.892.842.531.225.600 Quadrados Latinos de ordem 9. Mas, se desconsiderarmos os Quadrados simétricos, esse número cai para 377.597.570.964.258.816.

Para determinar o número de jogos de Sudoku possíveis, é preciso que façamos estimativas, e de maneira aproximada chegamos ao número de 6.670.903.752.021.072.936.960. Nesse número fabuloso, encontram-se os jogos que são considerados simétricos (quando rotacionamos o quadrado, quando trocamos três linhas por três colunas, e etc.). Então, se desconsiderarmos essas simetrias, esse número chega a um patamar plausível, que é 5.472.730.538. Um número pouco menor do que a atual população do planeta Terra.

Vamos agora elencar algumas das mais importantes estratégias de solução do Sudoku que são popularmente conhecidas.

2.5.1 Estratégias de Solução do Sudoku

Os nomes atribuídos às estratégias de solução do Sudoku foram dados pelo escritor Paul Stephens (Stephens, 2007).

Crosshatching: Escolha uma das subgrades do Sudoku, de preferência uma que contenha mais números fornecidos previamente. Verifique os números que estão faltando nas células da subgrade. O "Crosshatching"consiste em verificar ao longo da mesma linha e mesma coluna a ocorrência daquele número candidato à celula escolhida.

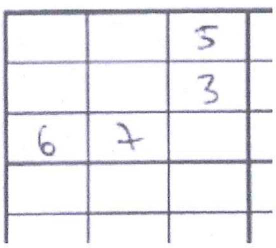

Figura 2.1: Imagem: Região escolhida para iniciar o jogo

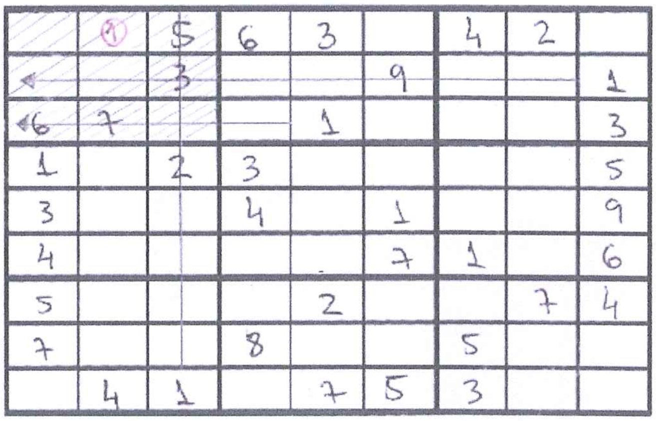

Figura 2.2: Imagem: Aplicando o "Crosshatching", verificando linha e coluna a existência de um número

Perceba que, ao escolher o número 1, por exemplo, na figura 2.2, ele já ocorre na terceira coluna e também na segunda linha, havendo restrição.

Continuando o processo, podemos verificar usando o "Crosshatching"para todos os números que estão faltando na subgrade.

Grouphatching: Essa estratégia é bem parecida com a "Crosshatching". Mas o *grouphatching* trabalha com grupos de três subgrades, o que otimiza a solução e abrange a utilização do "Crosshatching".

Escolhemos, então, três subgrades adjacentes, que podem estar na vertical ou horizontal. Sempre escolha a região com mais números previamente fornecidos.

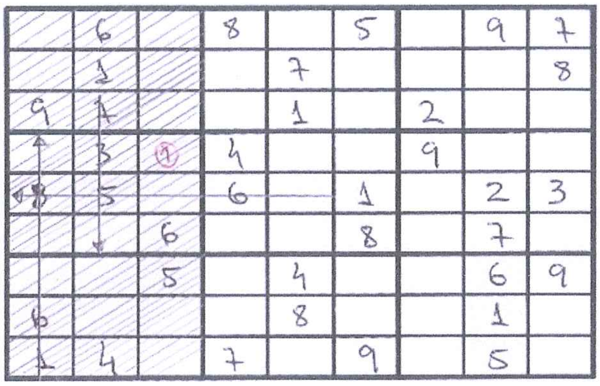

Figura 2.3: Imagem: Três regiões escolhidas para usar o *grouphatching*

Quando usamos o "Crosshatching", vemos várias possibilidades de preenchimento, uma vez que não temos ainda a certeza da localização. Usamos esse hall de possibilidades para preencher outras células com o "grouphatching.

Candidatos: Aqui, as duas estratégias que mencionamos são usadas sistematicamente. A partir daí, nós devemos considerar os números candidatos àquelas células em branco.

Candidatos são os números possíveis para aquela célula. Escrevemos esses candidatos nas células, até que sejam "eliminados"à medida que fazemos o "Crosshatching".

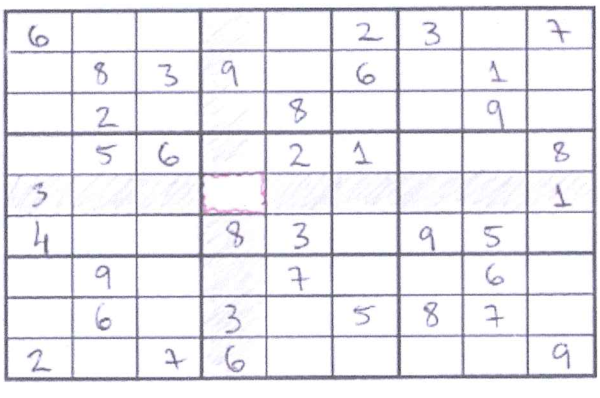

Figura 2.4: Imagem: Escolhemos uma região para listar os candidatos

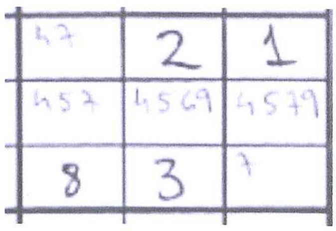

Figura 2.5: Imagem: Lista de candidatos nas células

À medida que nós aplicamos de maneira sistemática e sucessiva essas regras, é possível solucionar uma quantidade expressiva de jogos do Sudoku.

O detalhamento formal e a apresentação de outras técnicas de resolução do Sudoku para níveis muito elevados, o leitor pode consultar o livro de Stephens (Stephens, 2007) para maiores detalhes. O objetivo deste trabalho é apresentar estratégias simples que possam ser passadas para alunos de Ensino Médio.

Capítulo 3

Quadrados Mágicos

Como já mencionamos incialmente, na Introdução deste trabalho, uma das áreas de pesquisa de Leonhard Euler, dentro da Análise Combinatória, foi a Matemática Recreativa, como os Quadrados Mágicos, que serviram de motivação para o próprio Euler a desenvolver e estudar os Quadrados Latinos.

Neste capítulo vamos estudar os Quadrados Mágicos, partindo da sua definição, assim como da Constante Mágica. Em seguida, teremos uma seção inteira sobre a construção de Quadrados Mágicos. Por fim, veremos a relação existente entre os Quadrados Mágicos construídos e os Quadrados Latinos Ortogonais.

3.1 Quadrados Mágicos - Definição

Um *Quadrado Mágico* é uma matriz quadrada $n \times n$, em que suas entradas são números distintos do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n^2\}$, distribuídos de tal forma que a soma dos termos de todas as linhas, todas as colunas e diagonais seja constante, e essa soma é chamada de *Constante Mágica*.

Exemplo 13: Considere a matriz quadrada de ordem 4×4, onde as entradas são números do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 16\}$,

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Tabela 3.1: Quadrado Mágico de ordem 4, e constante mágica igual a 34

Exemplo 14: Vejamos agora, um Quadrdado Mágico de ordem 3, onde a Constante Mágica é 15. Este é o único Quadrado Mágico dessa ordem, pois as demais opções são derivados de rotações e simetrias.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Tabela 3.2: Quadrado Mágico de ordem 3, e constante mágica igual a 15

Como podemos determinar a Constante mágica de um Quadrado Mágico? Essa pergunta será respondida através do Teorema a seguir.

Teorema 4 *A Constante Mágica dos Quadrados Mágicos é dada pela fórmula*

$$CM = \frac{n.(n^2+1)}{2}$$

PROVA. Considere uma matriz quadrada $n \times n$, de entradas $\{1, 2, 3, ..., p\}$, onde $p = n^2$. Note que as entradas dessa matriz formam uma Progressão Aritmética, de n^2 termos, cujo primeiro termo é 1, o último termo é n^2 e a razão dessa P.A. é 1. Assim, vemos que a soma dos termos de cada linha, ou coluna, é $\frac{S_p}{n}$, onde S_p é a soma de todos os termos da matriz, e existem n linhas. Como essa soma deve ser constante para todas as linhas e colunas, temos que:

$$CM = \frac{\frac{(1+n^2).n^2}{2}}{n} = \frac{(1+n^2).n^2}{2}.\frac{1}{n}$$

Usando a lei do cancelamento, dividimos ambos os termos da fração por n, e obtemos

$$CM = \frac{n.(n^2+1)}{2} \quad \blacksquare$$

3.2 Construção de um Quadrado Mágico de ordem ímpar, pelo método de Simon

Já vimos que os Quadrados Mágicos surgiram muito antes de Euler, e houve estudos a respeito dos Quadrados Mágicos anteriores ás pesquisas de Euler, particularmente no Extremo Oriente. Foi Simon de la Loubére [11], embaixador francês na Tailândia (antigo Sião) que, em seu livro de 1693, *Du Royaume de Siam*, ensinou ao Ocidente um método simples de construção de Quadrados Mágicos de ordem ímpar.

A principal característica deste método consiste em preencher as Células das Diagonais em sequência numérica $(1, 2, 3, ..., n^2)$ sempre na direção Nordeste (para direita e para cima), começando da célula central da primeira linha.

Para ilustrar esse método, vamos construir um Quadrado Mágico de ordem 5, onde sua Constante Mágica (CM) é igual a 65.

L_1			1		
L_2					
L_3					
L_4					
L_5					
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5

Tabela 3.3: Construção do Quadrado Mágico de ordem 5, com o número 1 na posição a_{13}

Para que nós possamos aplicar o método criado por Simon (Simon, 1693), devemos posicionar, sobre a matriz original, as três últimas linhas, e do lado direito devemos posicionar as três primeiras colunas, da seguinte forma:

L_3								
L_4								
L_5								
L_1			1					
L_2								
L_3								
L_4								
L_5								
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3

Tabela 3.4: Acrescentando as três últimas linhas e as três primeiras colunas na matriz original

É importante lembrar que esta técnica de acrescentar as três últimas linhas na parte de cima do Quadrado, bem como acrescentar as três primeiras colunas no lado direito do Quadrado é similar á técnica de dobrar o papel em que se está escrevendo, deixando-o na forma de um cilindro. E isto é feito de maneira conveniente, no sentido horizontal e no sentido vertical, pois queremos preservar o que chamamos de *Diagonais Quebradas*, e elas se preservam ao unir as extremidades dos Quadrados, como podemos ver nas figuras abaixo.

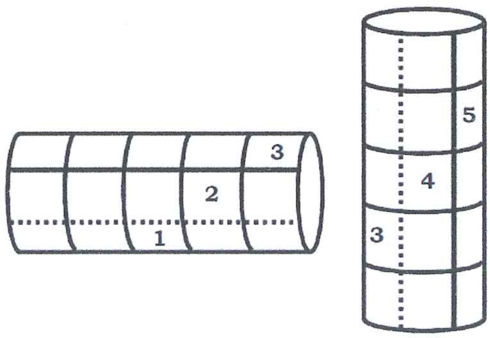

Figura 3.1: Reprodução. Fonte: cienciadegaragem.blogspot.com

Começando na célula central da primeira linha da matriz (Linha 1, coluna 3), com o número 1, e preenchendo com a sequência numérica as células sempre na direção

Nordeste. Cada vez que preenchermos com 5 números da sequência, chegaremos num ponto onde não poderemos continuar; devemos, então devemos recomeçar na célula imediatamente abaixo.

L_3								
L_4					**3**			
L_5				**2**				
L_1			**1**					
L_2								
L_3								
L_4					**3**			
L_5				**2**				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3

Tabela 3.5: Preenchendo as células na direção Nordeste.

Continuando o processo, seguimos preenchendo a diagonal onde os elementos 2 e 3 estão já fixados.

L_3								
L_4					3			
L_5				2				
L_1			1					1
L_2		**5**					**5**	
L_3	**4**					**4**		
L_4					3			
L_5				2				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3

Tabela 3.6: Continuando o preenchimento das células, até o número 5

Note que, ao escrever o número 5 no Quadrado, ficamos impossibilitados de seguir na direção Nordeste. Então, preenchemos a célula imediatamente abaixo e continuamos o processo.

L_3								
L_4					3			
L_5				2	**9**			
L_1			1	**8**				1
L_2		5	**7**				5	**7**
L_3	4	**6**				4	**6**	
L_4					3			
L_5				2	**9**			
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3

Tabela 3.7: Continuando o preenchimento das células, até o número 9

L_3								
L_4					3			
L_5				2	9			
L_1			1	8				1
L_2		5	7				5	7
L_3	4	6				4	6	
L_4	**10**				3	**10**		
L_5	**11**			2	9	**11**		
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3

Tabela 3.8: Depois de escrever o número 10, preenchemos a célula imediatamente abaixo com o número 11

Preenchendo agora até o número 15

L_3								
L_4					3			
L_5				2	9			
L_1			1	8	**15**			1
L_2		5	7	**14**			5	7
L_3	4	6	**13**			4	6	**13**
L_4	10	**12**			3	10	**12**	
L_5	11			2	9	11		
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3

Tabela 3.9: Preenchendo toda a diagonal da matriz original

L_3	4	6	13					
L_4	10	12			3			
L_5	11			2	9			
L_1	**17**		1	8	15	**17**		1
L_2		5	7	14	**16**		5	7
L_3	4	6	13			4	6	13
L_4	10	12			3	10	12	
L_5	11			2	9	11		
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3

Tabela 3.10: Seguindo o processo, sempre na direção Nordeste

L_3	4	6	13	**20**	**22**			
L_4	10	12	**19**	**21**	3			
L_5	11	**18**	**25**	2	9			
L_1	17	**24**	1	8	15	17	**24**	1
L_2	**23**	5	7	14	16	**23**	5	7
L_3	4	6	13	**20**	**22**	4	6	13
L_4	10	12	19	**21**	3	10	12	**19**
L_5	11	18	**25**	2	9	11	**18**	**25**
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3

Tabela 3.11: Seguindo o método, preenchemos até o final.

Assim, o Quadrado Mágico construído pelo método de Simon (Simon, 1693) é o seguinte:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Tabela 3.12: Quadrado Mágico resultante que foi construído pelo método de Simon

Vimos a aplicação do método de Simon (Simon, 1693) para a construção de um Quadrado Mágico de ordem 5. Podemos afirmar que este método é eficaz para a construção de qualquer Quadrado Mágico de ordem n ímpar, com $n \geq 3$.

Entretanto, existe um método mais abrangente e que nos permite uma variação na obtenção de Quadrados Mágicos de ordem ímpar, que é anterior ao método de Simon. Este método data do século XI, e foi desenvolvido por Ibn al-Haytham (965 – 1041) [15]. Vamos ver adiante que o método de Simon guarda bastante semelhança com este que vamos ver agora.

3.3 Método Ibn al-Haytham para a Construção de Quadrados Mágicos de ordem ímpar

O método de Ibn al-Haytham, para a construção de um Quadrado Mágico de ordem ímpar qualquer, com $n \geq 3$, consiste em começar com o número 1 por qualquer uma das quatro casas contíguas á célula central, marcadas com um X no Quadrado da figura abaixo. Em seguida, continuar o preenchimento seguindo a direção Sudeste (Diagonal, para baixo e para a direita). Também aqui, vamos preservar as *Diagonais Quebradas* unindo as extremidades dos Quadrados, assim como fizemos no método Simon.

Para ilustrar esse método de construção, vamos construir um Quadrado Mágico de ordem 7.

			X			
		X		X		
			X			

Tabela 3.13: Início da construção do Quandrado Mágico, começando por uma das células contíguas da célula central.

Vamos começar o preenchimento, colocando o número 1 na célula, digamos, á esquerda da célula central. Guardando semelhança com o método de Simon, cada vez que preenchermos com uma quantidade igual a ordem do Quadrado, ficamos impossibilitados de seguir preenchendo na direção Sudeste. Então recomeçamos duas casas abaixo da última.

						5
6						
	7					
		1				
			2			
				3		
					4	

Tabela 3.14: Começando a preencher a partir da célula á esquerda da célula central, até o número 7

Recomeçamos o preenchimento duas células abaixo da última. Veja:

				11		5
6					**12**	
	7					**13**
14		1				
	8		2			
		9		3		
			10		4	

Tabela 3.15: Preenchendo até o número 14

Novamente, ao preencher até o número 14, recomeçamos duas células abaixo.

		17		11		5
6			**18**		12	
	7			**19**		13
14		1			**20**	
	8		2			**21**
15		9		3		
	16		10		4	

Tabela 3.16: Preenchendo até o número 21

23		17		11		5
6	**24**		18		12	
	7	**25**		19		13
14		1	**26**		20	
	8		2	**27**		21
15		9		3	**28**	
	16		10		4	**22**

Tabela 3.17: Preenchendo até o número 28

23		17		11	**29**	5
6	24		18		12	**30**
31	7	25		19		13
14	**32**	1	26		20	
	8	**33**	2	27		21
15		9	**34**	3	28	
	16		10	**35**	4	22

Tabela 3.18: Preenchendo até o número 35

23		17	**42**	11	29	5
6	24		18	**36**	12	30
31	7	25		19	**37**	13
14	32	1	26		20	**38**
39	8	33	2	27		21
15	**40**	9	34	3	28	
	16	**41**	10	35	4	22

Tabela 3.19: Preenchendo até o número 42

Finalizando o processo de construção do Quadrado Mágico de ordem 7, pelo método Ibn al-Haytham, obtemos o seguinte Quadrado:

23	**48**	17	42	11	29	5
6	24	**49**	18	36	12	30
31	7	25	**43**	19	37	13
14	32	1	26	**44**	20	38
39	8	33	2	27	**45**	21
15	40	9	34	3	28	**46**
47	16	41	10	35	4	22

Tabela 3.20: Encerrando a construção do Quadrado Mágico de ordem 7

Como mencionamos no início da construção, podemos encontrar outros três Quadrados Mágicos, a partir desse método, uma vez que podemos começar pelas outras células próximas da célula central. Portanto, é um método mais abrangente do que apresentou Simon, para a construção de Quadrados Mágicos de ordem ímpar.

3.4 Construção de Quadrados Mágicos de ordem Par

Aqui vamos mostrar um método de construção para Quadrados Mágicos de ordem par. Para esse tipo de Quadrado Mágico, é possível determinar um método pela existência de duas propriedades importantes, presentes em Quadrados Naturais, ou seja, Quadrados que apresentam números consecutivos. (Veja na tabela 3.21). O autor Ibn al-Haytham observou o seguinte: "A soma da metade dos elementos de uma linha, unida á soma da metade dos elementos não alinhados aos precedentes, pertencendo á fileira colocada simetricamente em relação á fileira mediana, é igual a Constante Mágica. Aliás, a soma dos elementos das diagonais, também 'e igual a Constante Mágica."

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Tabela 3.21: Quadrado Natural, de ordem 4. Os métodos de construção se iniciam a partir dele.

Vamos começar a construção para os Quadrados de ordem $n = 4k$, com $k \geq 1$. Esse método é eficaz para todos os Quadrados dessa ordem. A partir do Quadrado Natural, o método para a construção consiste em:

- Subdividir o Quadrado em 4 quadrantes, com o auxílio de dois eixos (vertical e horizontal);
- Tomar um quadrante; marcar pontos de maneira que haja k pontos nas fileiras horizontal e vertical. O valores a serem assinalados nessas casas marcadas, são os valores das suas respectivas posições no Quadrado Natural que vão permanecer fixos.
- Aproximar esse quadrante dos demais e fazer as marcações de maneira simétrica.

- Fazer trocas diagonais dos elementos que não foram marcados; sempre entre elementos simétricos em relação a um dos eixos.

Para ilustrar esse método de construção vamos construir um Quadrado Mágico de ordem $n = 8$, ou seja, $n = 4.2$, com $k = 2$.

X			X
	X	X	
	X	X	
X			X

Tabela 3.22: Tomando um dos quadrantes e marcando $k = 2$ pontos em cada fileira

Aproximando o quadrante dos demais, marcamos as posiç ões simétricas.

X			X	X			X
	X	X			X	X	
	X	X			X	X	
X			X	X			X
X			X	X			X
	X	X			X	X	
	X	X			X	X	
X			X	X			X

Tabela 3.23: Marcando as posições simétricas.

Vamos posicionar os números que permanecerão fixos, em relação ao Quadrado Natural.

1			4	5			8
	10	11			14	15	
	18	19			22	23	
25			28	29			32
33			36	37			40
	42	43			46	47	
	50	51			54	55	
57			60	61			64

Tabela 3.24: Colocando os números em suas posições originais

Agora, preenchemos com os demais números, sempre fazendo trocas diagonais com seus elementos simétricos.

1	**63 / 2**	**62 / 3**	4	5	**59 / 6**	**58 / 7**	8
56 / 9	10	11	**53 / 12**	**52 / 13**	14	15	**49 / 16**
48 / 17	18	19	**45 / 20**	**44 / 21**	22	23	**41 / 24**
25	**39 / 26**	**38 / 27**	28	29	**35 / 30**	**34 / 31**	32
33			36	37			40
	42	43			46	47	
	50	51			54	55	
57			60	61			64

Tabela 3.25: Efetuando as trocas dos números

Seguindo esse processo, chegamos ao Quadrado Mágico de ordem 8:

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Tabela 3.26: Depois de efetuar todas as trocas, obtemos um Quadrado Mágico de ordem 8

É lógico que este não é a única forma de marcar as casas no quadrante. Isto implica dizer que, para outras formas de marcar as casas no quadrante, podemos encontrar outros Quadrados Mágicos.

		X	X
	X	X	
X	X		
X			X

Tabela 3.27: Marcando de outra maneira no quadrante

De maneira análoga, aproximando este quadrante dos demais e marcando as respectivas casas simétricas, obtemos o seguinte:

		X	X	X	X		
	X	X			X	X	
X	X					X	X
X			X	X			X
X			X	X			X
X	X					X	X
	X	X			X	X	
		X	X	X	X		

Tabela 3.28: Outra maneira de marcar os quadrantes, temos um novo Quadrado Mágico

Para essa nova forma de preenchimento dos quadrantes, obtemos o seguinte Quadrado Mágico:

64	63	3	4	5	6	58	57
56	10	11	53	52	14	15	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	50	51	13	12	54	55	9
8	7	59	60	61	62	2	1

Tabela 3.29: Outro Quadrado Mágico, de ordem 8, quando mudamos o preenchimento dos quadrantes

Ainda existe um método, popular, para a construção de do Quadrado Mágico de ordem 4, e apenas para ele. Consiste em apenas inverter os números das duas diagonais.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Tabela 3.30: Início da construção do Quadrado Mágico de ordem 4.

Agora, invertemos os sentido das duas diagonais do Quadrado.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Tabela 3.31: Invertendo as diagonais do Quadrado, já obtemos um Quadrado Mágico de ordem 4

Na próxima seção, vamos estudar um método desenvolvido por Euler para a obtenção de um par que Quadrados Latinos Ortogonais a partir de um Quadrado Mágico, de ordem ímpar qualquer. Vamos ver que podemos obter Quadrados Latinos Ortogonais de ordem ímpar, sempre que tivermos Quadrados Mágicos de ordem ímpar

3.5 Relação entre Quadrados Mágicos e Quadrados Latinos Ortogonais

O primeiro trabalho de Euler sobre Quadrados Mágicos foi apresentado á Academia de São Petersburgo, em 1776. Nesse trabalho, *De quadratis magicis* (Euler, 1776), ele usou Quadrados Latinos Ortogonais para construir Quadrados Mágicos.

Para ver a relação entre os dois, Quadrados Latinos e Quadrados Mágicos, estabelecida por Euler, tome o Quadrado Mágico de ordem 5 da construção de Simon. Siga as instruções a seguir:

- De cada entrada do Quadrado Mágico , subtraia 1;

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

$\rightarrow$

17-1	24-1	1-1	8-1	15-1
23-1	5-1	7-1	14-1	16-1
4-1	6-1	13-1	20-1	22-1
10-1	12-1	19-1	21-1	3-1
11-1	18-1	25-1	2-1	9-1

- Cada diferença obtida, escreva-a na forma $5a + b$, onde $0 \leq a \leq 4$ e $0 \leq b \leq 4$;

16	23	0	7	14
22	4	6	13	15
3	5	12	19	21
9	11	18	20	2
10	17	24	1	8

$\rightarrow$

$5.3+1$	$5.4+3$	$5.0+0$	$5.1+2$	$5.2+4$
$5.4+2$	$5.0+4$	$5.1+1$	$5.2+3$	$5.3+0$
$5.0+3$	$5.1+0$	$5.2+2$	$5.3+4$	$5.4+1$
$5.1+4$	$5.2+1$	$5.3+3$	$5.4+0$	$5.0+2$
$5.2+0$	$5.3+2$	$5.4+4$	$5.0+1$	$5.1+3$

- Cada a encontrado será a entrada de uma matriz A e cada b encontrado será entrada de uma matriz B.

Repetindo esse processo com todas as entradas do Quadrado Mágico, obtemos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tabela 3.32: Quadrados Latinos Ortogonais, de ordem 5 gerados a partir do método de Euler

Agora, concatenando as matrizes, podemos verificar que são Quadrados Latinos Ortogonais.

$$\begin{bmatrix} (3,1) & (4,3) & (0,0) & (1,2) & (2,4) \\ (4,2) & (0,4) & (1,1) & (2,3) & (3,0) \\ (0,3) & (1,0) & (2,2) & (3,4) & (4,1) \\ (1,4) & (2,1) & (3,3) & (4,0) & (0,2) \\ (2,0) & (3,2) & (4,4) & (0,1) & (1,3) \end{bmatrix}$$

Tabela 3.33: Matriz dos pares ordenados das matrizes A e B, mostrando que são Quadrados Latinos Ortogonais

Perceba, ainda, que as entradas de cada linha e coluna das matrizes A e B formam o conjunto dos possíveis restos da divisão por 5. Por isso, é razoável se pensar em números da forma $5a+b$, ou seja, $(x_{\mathrm{i}}-1)=5.a \equiv b \ (mod\ 5)$, onde x_{i} é cada entrada do Quadrado Mágico de ordem 5, e $0 \leq a \leq 4$ e $0 \leq b \leq 4$.

Este fato nos faz pensar a validade desse método de Euler, da obtenção de dois Quadrados Latinos Ortogonais a partir de um Quadrado Mágico de ordem ímpar construído pelo método de Simon (Simon, 1693) ou pelo método Ibn al-Haytham para outros casos. Vejamos para $n=7$, por exemplo. Assim, queremos obter dois Quadrados Latinos Ortogonais, de ordem 7, onde suas entradas são os possíveis restos da divisão por 7. De maneira conveniente, poderemos substituir esses valores por outros, mantendo suas posições, para aplicarmos em determinados fins.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Tabela 3.34: Quadrado Mágico de ordem 7 construído pelo método de Simon

Tal como fizemos com o Quadrado Mágico de ordem 5, construído pelo método de Simon, queremos obter dois Quadrados Latinos Ortogonais, de ordem 7, onde suas entradas são os possíveis restos da divisão por 7. Para isso, devemos tomar cada entrada do Quadrado Mágico desta ordem, subtrair uma unidade, e escrever essa diferença sob a forma $7a+b$, onde $0 \leq a \leq 6$ e $0 \leq b \leq 6$, de maneira que todos os valores de a comporão a matriz A e todos os valores de b comporão a matriz B.

Tome a entrada 30 (primeira linha, primeira coluna). Note que podemos escrever $30-1=29=7.4+1$. Seguindo este processo com as demais entradas do Quadrado Mágico de ordem 7, subtraindo uma unidade de cada entrada, e escrevendo este resultado sob a forma $7a+b$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Tabela 3.35: Quadrados Latinos Ortogonais gerados pelo método Euler, de ordem 7

Vamos agora fazer concatenar as matrizes:

$$\begin{bmatrix} (4,1) & (5,3) & (6,5) & (0,0) & (1,2) & (2,4) & (3,6) \\ (5,2) & (6,4) & (0,6) & (1,1) & (2,3) & (3,5) & (4,0) \\ (6,3) & (0,5) & (1,0) & (2,2) & (3,4) & (4,6) & (5,1) \\ (0,4) & (1,6) & (2,3) & (3,3) & (4,5) & (5,0) & (6,2) \\ (1,5) & (2,0) & (3,2) & (4,4) & (5,6) & (6,1) & (0,3) \\ (2,6) & (3,1) & (4,3) & (5,5) & (6,0) & (0,2) & (1,4) \\ (3,0) & (4,2) & (5,4) & (6,6) & (0,1) & (1,3) & (2,5) \end{bmatrix}$$

Tabela 3.36: Matriz Concatenada dos pares ordenados das matrizes A e B, mostrando que são Quadrados Latinos Ortogonais, de ordem 7

Perceba que os pares ordenados são únicos, o que garante que as matrizes A e B são, na verdade, Quadrados Latinos Ortognais de ordem 7.

Portanto, estamos mais seguros de que esse método é realmente eficaz para obtermos Quadrados Mágicos de ordens ímpares e, consequentemente, Quadrados Latinos Ortogonais.

Capítulo 4

Proposta de sequência Didática

Chegamos à culminância do nosso trabalho, que é o desenvolvimento de um tema proposto para atividades, que sejam aplicáveis em turmas de Ensino Médio. Essas atividades têm por objetivo trabalhar com os Quadrados Latinos e Quadrados Mágicos.

São exigidos conhecimentos prévios relativos aos conteúdos de Matrizes e Análise Combinatória.

Nossa proposta didática de atividade tem por objetivo:

- Proporcionar ao aluno outras opções para se chegar a aprendizagem, a respeito das Matrizes, Quadrados Latinos e Quadrados Mágicos aplicando as técnicas da Análise Combinatória;

- Dotar os alunos de conceitos e aplicações através de construções práticas;

- Usar os jogos e passatempos (Quadrados Mágicos e Sudoku, que é um tipo de Quadrado Latino) como ferramentas didáticas.

Vamos agora descrever uma sequência didática que se pretende aplicar com alunos das séries finais do Ensino Fundamental e/ou alunos do Ensino Médio. Segundo ZABALA (1998), sequências didáticas são maneiras de encadear e articular atividades ao longo de uma unidade didática.

4.1 Sequência Didática

A atividade que vamos propor aqui pode ser desenvolvida como atividade lúdica e com caráter recreativo, apesar de envolver conceitos importantes. Esta atividade também pode servir de motivação para um projeto de Feira de Ciências ou Mostra Pedagógica.

Público Alvo: Alunos das séries finais do Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio.

Tempo estimado: 20 horas/aula, divididas em 10 encontros de 2 horas/aula.

Metodologia: No primeiro momento, sondagem de conhecimentos; no segundo momento, exposição das técnicas de construção de Quadrados Mágicos e Quadrados Latinos Ortogonais; no terceiro momento, aplicação de um exercício; por fim, criação de um portfólio com as construções feitas pelos alunos.

Material: Quadro, pincel, computador com Planilhas tipo Excel, Datashow.

4.1.1 Introdução - Motivação

Inicialmente o professor faz uma sondagem oral a respeito do tema Quadrados Mágicos. Averigua-se qual nível de conhecimento do tema. Em seguida, com o auxílio de um Datashow, o professor exibe uma grade 3×3 e, após explicar o conceito de Quadrado Mágico, pede que os alunos tentem preencher a grade, atendendo as propriedades.

Depois do primeiro preenchimento da grade, o professor inicia um debate com os seguintes questionamentos: Essa forma de preenchimento é única? Como chegamos a esse valor da soma que é constante? Existe uma lógica para a construção desses Quadrados Mágicos?

4.1.2 Segundo Momento - Exposição do conteúdo e técnicas de construção de Quadrados Mágicos

Depois da sondagem feita pelo professor e de averiguar os conhecimentos prévios dos alunos, o professor elabora uma apresentação expositiva e dialogada a respeito dos Quadrados Mágicos e Quadrados Latinos. Essa apresentação deve contemplar as principais definições, propriedades dos Quadrados Mágicos e Quadrados Latinos, bem como suas técnicas de construção.

Para que esse momento seja mais interessante, do ponto de vista do aluno, o professor pode pedir que os alunos tentem, de maneira intuitiva, construir Quadrados Mágicos. Em seguida, já de posse das técnicas de construção, o professor pede que se faça uma comparação entre os métodos de construção.

4.1.3 Aplicação do Conhecimento

Neste momento da sequência didática vamos fazer algumas aplicações dos conteúdos aprendidos. Pretende-se aplicar e relacionar o que foi aprendido em situações práticas.

Agora propomos algumas questões a serem realizadas pelos alunos e posteriormente possa-se obter uma resposta em relação ao conteúdo aprendido.

Questão 1

É possível construir Quadrados Mágicos de uma ordem qualquer? Construa Quadrados Mágicos de ordem n, onde $3 \leq n \leq 8$.

Questão 2

Estabeleça semelhanças e diferenças entre os métodos de construção de Quadrados Mágicos aprendidos na atividade. Os métodos de construção são gerais?

Questão 3

Supondo que a turma tenha 28 alunos, deseja-se formar 4 equipes, A, B, C e D, com 7 alunos, cada. Queremos organizar um campeonato de Dominós, entre as quarto equipes. Sorteiam-se os confrontos, que já terão *status* de Semi-final, ou seja, as equipes vencedoras já disputarão a final.

O formato da disputa é o seguinte: a disputa entre duas equipes, digamos $A \times C$ e $B \times D$, terá 49 partidas, distribuídas em 7 rodadas (cada participante de uma equipe jogará uma vez com cada participante da outra equipe e todos jogarão em todas as rodadas).

Construa as tabelas das disputas da Semi-final e final, totalizando 147 partidas, utilizando Quadrados Mágicos e Quadrados Latinos Ortogonais.

Questão 4

Estabeleça semelhanças e diferenças entre um Quadrado Latino e um modelo padrão do *Sudoku*.

Questão 5

É possível se determinar a solução de um jogo do *Sudoku* através da construção de um Quadrado Mágico de ordem 9 e, consequentemente, a obtenção de Quadrados Latinos Ortogonais dessa ordem?

4.1.4 Avaliação

O momento da avaliação é também um momento reflexivo sobre os resultados alcançados. É um momento onde o professor deixa aberto o espaço para que os alunos sugiram novas e diferentes formas de construir os Quadrados Mágicos.

É nesse momento que se observa o significado dos conceitos e a aplicabilidade deles. Quando o professor fala sobre os Quadrados Latinos Ortogonais e os códigos ou a confecção de uma tabela de campeonato, ele está levando ao contato dos alunos formas variadas de aplicar um conhecimento.

Essa avaliação pode ser feita através da análise de um portfófio criados pelos alunos. Esse portfófio é uma espécie de coleção das atividades realizadas, o que facilita bastante a avaliação do professor; momento onde ele verifica a absorção pelos alunos e de como ele pode utilizar esses objetos em atividades posteriores.

4.2 Considerações Finais

Temos fortes suspeitas de que a utilização de jogos e passatempos, como ferramentas didáticas, otimiza a aprendizagem. Além de descontrair e expor os conteúdos de maneira mais informal, os benefícios são notórios: a concentração, a memória. O caráter desafiador da atividade instiga o aluno a buscar novas formas de resolver um problema.

Esse tema para proposta diática foi escolhida em virtude da necessidade deste autor de adquirir novas formas e novas possibilidades didáticas, buscando uma melhoria no ensino da Matemática. O tema dos Quadrados Mágicos e Quadrados Latinos, apesar ja ter sido bastante abordado em outros trabalhos, foi pouco trabalhado na perspectiva de proposta didática.

Ao estudar os Quadrados Latinos e os Quadrados Mágicos, abrindo essa perspectiva didática, construímos uma proposta diferente, pois fugimos das aplicações técnicas desses objetos, encontradas na bibliografia estudada.

Na proposta didática, procuramos focar no processo individual do aluno, fazendo com que ele seja o principal condutor de sua aprendizagem, através das construções e da apreensão dos conteúdos.

Acreditamos que o momento das construções dos Quadrados Mágicos é o mais importante dessa proposta, pois é o momento em que o aluno vivencia tudo que aprendeu na teoria. É nesse momento que os conteúdos tomam significado, chegando assim ao objetivo da aprendizagem.

Esperamos que esta proposta didática venha a ser mais uma opção para professores de Matemática na busca pela melhoria da qualidade da educação básica, sejam de escolas públicas ou da iniciativa privada, que tem sido bastante carente e ainda não apresentam bons indicadores nas avaliações de desempenho nacionais.

Apêndice

Trazemos aqui resultados de complementação do texto.

1. Retângulos Latinos

Um retângulo latino de n colunas e k linhas ($k < n$) é uma matriz de n símbolos, e ordem $k \times n$, de tal modo que cada coluna contém todos os símbolos e nenhuma linha contém um símbolo mais de uma vez.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Temos, então, uma matriz de ordem 3×5, onde os elementos das linhas e das colunas só aparecem uma vez. Portanto, trata-se de um Retângulo Latino.

2. Permutações Caóticas

Uma Permutação dos elementos do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, ou de qualquer conjunto que possua uma ordem primitiva, é dita **caótica** (ou desordenamento) quando nenhum número (ou elemento) está no seu lugar primitivo.

Exemplo: Tome o conjunto $\{a, b, c, d, e\}$. A sequências (b, a, e, c, d) e (e, d, a, c, b) são permutações caóticas, pois seus elementos estão em posições diferentes das suas posições primitivas.

Teorema 5 *O número de Permutações Caóticas do conjunto* $\{1,2,3,...,n\}$*, ou de qualquer conjunto que possua uma ordem primitiva, é dado por*

$$D_n = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

PROVA. Defina-se A_i Conjunto das Permutações de $\{1,2,...,n\}$ em que o número i ocupa o i-ésimo lugar, $i \in \{1,2,...,n\}$.

Seja Ω o conjunto de todas as permutações de $\{1,2,...,n\}$. Queremos calcular o número de elementos do conjunto Ω das permutações de $\{1,2,...,n\}$ que não seja nenhum dos conjuntos A_1, A_2, ..., A_n. Ou seja, vamos calcular $n(\Omega) - n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$(*). Iremos usar a generalização do Princípio da Inclusão-Exclusão, que pode ser encontrado em . Temos:

- $S_0 = \#(\Omega) = n!$ (Quantidade total de permutações de n elementos)

- $S_1 = \sum_{i=1}^{n} \#(A_i) = \sum_{i=1}^{n}(n-1)! = n.(n-1)! = n!$ (Note que essa soma apresenta exatamente $C_{n,1}$ parcelas iguais a $(n-1)!$)

- $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = C_{n,2}.(n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2)!}.(n-2)! = \frac{n!}{2!}$ (Agora, essa soma apresenta $C_{n,2}$ parcelas iguais a $(n-2)!$)

- $S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (n-3)! = C_{n,3}.(n-3)! = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n!}{3!}$ (Essa soma tem exatamente $C_{n,3}$ parcelas iguais a $(n-3)!$)

Seguindo esse raciocínio, temos: $\vdots$

- $S_{\rm n} = C_{\rm n,n}.(n-n)! = \frac{n!}{n!} = 1$, ou seja, existe apenas um elemento do conjunuto Ω em que os elementos estão nos seus lugares primitivos.

O número de elementos de Ω que pertencem a examente zero dos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_{\rm n}$ é:

$$a_0 = \sum_{k=0}^{n-0}(-1)^k.C^k_{0+{\rm k}}.S_{0+{\rm k}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.S_{\rm r} \Rightarrow$$

$$a_0 = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + ... + (-1)^n S_{\rm n}(*) \Rightarrow$$

$$a_0 = n! - n! + \tfrac{n!}{2!} - \tfrac{n!}{3!} + ... + (-1)^n \tfrac{n!}{n!} \Rightarrow$$

$$a_0 = n!\left[\tfrac{1}{0!} - \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!} + ... + \tfrac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Como $a_0 = D_{\rm n}$, então

$$D_{\rm n} = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right] \blacksquare$$

Exemplo: Vamos calcular o número de permutações caóticas de um conjunto com 4 elementos, que tem uma certa ordem primitiva estabelecida. Assim, temos que:

$$D_4 = 4!.\left[\tfrac{1}{0!} - \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!}\right]$$

$$D_4 = 24(1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24}) = 9$$

De fato, tome o conjunto $\{a, b, c, d\}$ de 4 elementos, que ilustra o exemplo anterior. Suas permutações caóticas são as sequências (b, a, d, c), (c, a, d, b), (d, a, b, c), (c, d, a, b), (d, c, a, b), (b, d, a, c), (b, c, d, a), (c, d, b, a), (d, c, b, a), ou seja, existem 9 permutações caóticas.

Para ajudar nas estimativas de Cameron, é interessante observar que:

Teorema 6 *D_n é aproximadamente igual a $\frac{n!}{e!}$. Mais precisamente, D_n é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e!}$*

PROVA: Observe que o teorema é verdadeiro para $n = 1$ e para $n = 2$. Vamos prová-la para $n > 2$. Com efeito, sabemos que a expansão em série de potências de Taylor da função exponencial é dada por:

$e^x = \left[\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right]$

E, portanto, que

$e^-1 = \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ...\right]$

Sabendo que D_{n} é um número inteiro, então temos:

$|D_{\text{n}} - \frac{n!}{e}| = |D_{\text{n}} - n!.e^-1| = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right] - n!.\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ...\right] | \Rightarrow$

$|D_{\text{n}} - \frac{n!}{e}| = n!|\frac{(-1)^n+1}{(n+1)!} + \frac{(-1)^n+2}{(n+2)!} + ...| \leq n!\left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ...\right]$. Mas, temos que

$n!\left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ...\right] = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + ... \rightarrow$

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + ... = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n}$.

Como estamos tomando $n > 2$, temos que $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$.

Ou seja, $|D_{\text{n}} - \frac{n!}{e}| < \frac{1}{2}$. Logo, D_{n} é um número inteiro situado a uma distância menor que $\frac{1}{2}$ do número $\frac{n!}{e}$. Assim, D_{n} é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$. ■

n	D_{n}	$\frac{n!}{e}$
1	0	0, 3...
2	1	0, 7...
3	2	2, 2...
4	9	8, 8...
5	44	44, 4...
...	...	...

Tabela 1: Tabela de aproximações para o estudo das estimativas

Referências Bibliográficas

[1] GRANDO, Regina Célia. O jogo e as suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática. 1995. Dissertação (Mestrado em Educação, subárea: Matemática) 226 UNICAMP, Campinas, 1995.

[2] RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 39-56.

[3] TARRY, Gaston. "O problema dos 36 oficiais". Ata da Associação Francesa para o avanço das Ciências Naturais. Secretaria da Associação. 1900.

[4] SANCHEZ, Iván Fernando Herrera. Quadrados Latinos com aplicações em Engenharia de Software. Dissertação de Mestrado, CCEN, UFPE, 2011.

[5] DUARTE, João Batista. Princípios sobre Delineamentos em Experimentação Agrícola. Trabalho de Conclusão de Especialização. UFGO, 1996.

[6] RESENDE, M. D. V. de. Matemática e Estatística na Análise de Experimentos e no Melhoramento Genético. Colombo: Embrapa Florestas. 2007

[7] LOPES, Tânia Isabel Duarte. A História dos Quadrados Mágicos. Universidade de Coimbra, Departamento de Matemática, 2007.

[8] CAHÚ, Roberto Dias. Quadrados mágicos de ordem ímpar a partir de quadrados latinos. Dissertação de Mestrado Profmat, UFPE, 2013.

[9] CAMERON, Peter J. Combinatorics: Topics, Techniques and Algorithms. Press of Syndicate of the University of Cambridge. 1994.

[10] TAYLOR, Brook. Methodus Incrementorum Directa et Inversa. Inglaterra, 1715.

[11] LOUBÈRE, Simon de la. Du Royaume de Siam. Tailândia, 1693.

[12] EULER, Leonhard. De quadratis magicis. Academia de São Petersburgo, 1776.

[13] ARSIE, Karla Cristiane. Jogos Sudoku e Quadrados Mágicos. Monografia de Conclusão do curso. Centro de Ciências Exatas, UFPR. Curitiba. 2010.

[14] STEPHENS Paul: Mastering Sudoku week by week. Duncan Baird Publishers. Londres. 2007.

[15] http://www.ibnalhaytham.com/

[16] ALEGRI, Matheus. Quadrados Latinos e aplicações. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática Aplicada. UNICAMP, 2006.

[17] ZABALA, Antoni; ROSA, Ernani F. da F. A prática educativa: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.