



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

CORRENTES INDUZIDAS E CONDENSADO
FERMIÔNICO NO ESPAÇO-TEMPO DE UMA CORDA
CÓSMICA

EDUARDO ANDRÉ DE FIGUEIREDO BRAGANÇA

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2017

EDUARDO ANDRÉ DE FIGUEIREDO BRAGANÇA

CORRENTES INDUZIDAS E CONDENSADO
FERMIÔNICO NO ESPAÇO-TEMPO DE UMA CORDA
CÓSMICA

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, do
Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como
requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Física.*

Orientador: Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello

João Pessoa – PB

Fevereiro de 2017

B813c Bragança, Eduardo André de Figueiredo.
Correntes induzidas e condensado fermiônico no
espaço-tempo de uma corda cósmica / Eduardo André de
Figueiredo Bragança. - João Pessoa, 2017.
126 f. il.-

Orientador: Eugênio Ramos Bezerra de Mello.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN

1. Corda cósmica. 2. Correntes induzidas.
3. Compactificação. 4. Condensado fermiônico.
5. Temperatura finita. 6. Campo magnético. I. Título.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Eduardo André de
Figueiredo Bragança**, candidato ao Título de
Doutor em Física na Área de Concentração
Gravitação e Cosmologia.

1 Aos vinte dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezessete, às 14h00, no
2 Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de
5 Gravitação e Cosmologia, **Eduardo André de Figueiredo Bragança**. A comissão
6 examinadora foi composta pelos professores doutores: *Eugênio Ramos Bezerra de*
7 *Mello* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Valdir Barbosa Bezerra*
8 (UFPB), *Sérgio André Fontes Azevedo* (UFPB), *Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos*
9 (UFCG) e *Geusa de Araújo Marques* (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof.
10 Eugênio Ramos Bezerra de Mello comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A
11 seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição
12 do trabalho de tese intitulado “*Correntes induzidas no espaço-tempo de uma corda*
13 *cósmica*”. Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora, que
14 emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da
15 Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para
16 constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, redigiu a presente ata
17 que vai assinada pelo mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa,
18 Paraíba, **20 de fevereiro de 2017**.

19

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Orientador - UFPB

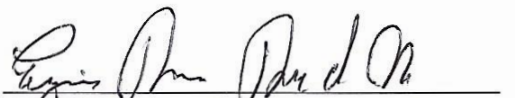
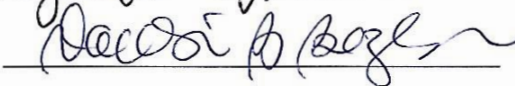
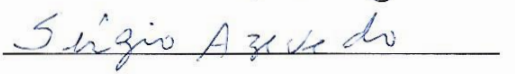
Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
UFPB

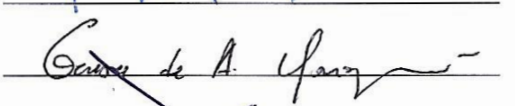
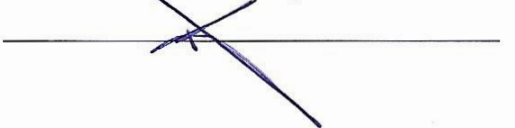
Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo
UFPB

Profa. Dra. Eduardo Marcos Rodrigues dos
Passos
UFCG

Profa. Dra. Geusa de Araújo Marques
UFCG

Danilo Wilson Lemos Menezes
Técnico em Assuntos Educacionais

*Para minha família, especialmente, para Heloisa
Cristina. Saudades eternas.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Edilson Seabra Bragança e Heloiza Cristina Castro de Figueiredo, pela educação e por sempre me manter nos caminhos dos estudos. Obrigado pela força, compreensão por estar longe em alguns momentos importantes, mas tudo isso foi necessário para poder chegar a este momento, que tanto lutei para conseguir. Infelizmente, durante este período longe de casa, você minha mãe, se foi, e não pude estar presente para ver seu sorriso pela última vez, porém, ele ainda está vivo em minha memória. Seus conselhos serão levados para sempre comigo e me deram força para continuar esta caminhada após sua partida. Sua falta ainda se faz muito presente.

Aos meus irmãos, Andréia, Adriano e Andrei. Agradeço a amizade, o companheirismo e a compreensão por não estar com vocês em muitos momentos importantes por quais passaram. Às minhas sobrinhas, Bianca, Bruna e Thayla. Pois, ainda não pude participar de nenhuma de suas festas de aniversário devido a distância.

Agradeço aos meus primos, pois também estive distante em alguns momentos importantes. Sou grato pela amizade, compreensão e companheirismo. Nossas reuniões são sempre muito marcantes.

Agradeço também a todo o restante de minha família, tios e avós, por sempre apoiar e entender minhas escolhas, e por inúmeras ajudas durante toda esta caminhada, até mesmo financeiras, desde bem novo quando ia pedir dinheiro para pagar minha passagem de ônibus para não faltar a escola. Obrigado pela compreensão por estar longe de casa. Sou grato por tudo que fizeram por mim.

A todos os amigos que fiz durante o período em que estive em João Pessoa: Artur, Gislaine, Alex, João, Felipe, Tiago, Eugênio, Paulista, Anny, Seu Mariano, Azadeh, André, Clarissa, Lilica, Antônio, Leocádio, Tiago Guerra, Leonardo, Rodrigo, Igor, entre outros. Também ao pessoal do futebol. Obrigado a todos pelo bom convívio.

Aos amigos Luis Paulo e Maricélia Lopes, amigos dos tempos de UFPA, Herondy Mota e Paulo Rogério. Suas ajudas também foram muito importantes, principalmente, no momento em que perdi minha mãe.

Aos grandes amigos que fiz em João Pessoa: Júlio César, Laryssa, Adriano e Laura. Obrigado pelo companheirismo e o apoio que me deram quando perdi minha mãe. Prezo muito a amizade de vocês.

Agradecimentos também para outros amigos: Tamires, Thayres, Mara e André. Por também me darem força quando minha mãe partiu e apoio para conseguir seguir em frente e terminar esta caminhada. Aos demais amigos: de Icoaraci, Salvaterra, UFPA, Telégrafo. Obrigado a todos pelo bom convívio.

Minha imensa gratidão a Iarley e Febrânia por terem me dado abrigo longe de casa, quando fui para a Itália. Serei eternamente grato a vocês, obrigado pela amizade. Meus agradecimentos também aos amigos brasileiros que fiz em Roma: Eduardo, Grasi, Bernardo, Gabriel, Iara, Carlos. Minha adaptação rápida a Roma também se deve a ajuda de vocês. Sempre lembro de nossas saídas e reuniões, bastante animadas.

Agradecimentos também vão para outros amigos que fiz em Roma: Davide, Carito, Gabriel (colombiano), Haymy, Francesco, o pessoal do futebol, o pessoal do samba, entre outros. Agradeço o bom convívio.

À meu orientador, Eugênio Ramos Bezerra de Mello, por sempre estar disposto a tirar minhas dúvidas. Agradeço sua orientação, conselhos e, principalmente, por ser uma ótima pessoa e um excelente profissional.

Minha gratidão ao professor Stefano Bellucci, por aceitar me orientar no período em que estive no Laboratori Nazionali di Frascati. Agradeço seu profissionalismo e ajuda no desenvolvimento do trabalho. Ao professor Aran Saharian, com quem tive a oportunidade de fazer uma colaboração no período em que estive em Frascati. Também agradeço suas inúmeras ajudas para a conclusão do trabalho.

Por fim, agradeço às instituições por onde passei ao longo de minha trajetória acadêmica, UFPA, UFPB e Laboratori Nazionali di Frascati, pela infra-estrutura para que pudesse realizar um bom trabalho. Aos professores destas instituições, pois foram muito importantes para minha formação. E a Capes pelo suporte financeiro.

“ A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

Sumário

Resumo	x
Abstract	xi
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
2 Teoria Clássica de Campos	4
2.1 O espaço-tempo de Einstein	4
2.2 A equação de Klein-Gordon	7
2.2.1 Interação do campo de escalar com o campo eletromagnético	7
2.2.2 Interação do campo escalar com o campo gravitacional	8
2.2.3 Interação do campo escalar com os campos gravitacional e eletromagnético	10
2.3 A equação de Dirac	11
2.3.1 Interação do campo fermiônico com o campo eletromagnético	12
2.3.2 Interação do campo fermiônico com o campo gravitacional	13

2.3.3	Interação do campo fermiônico com os campos gravitacional e eletromagnético	20
3	Teoria Quântica de Campos	21
3.1	Quantização do Campo de Klein-Gordon	21
3.1.1	Quantização Canônica	21
3.1.2	O campo real de Klein-Gordon	23
3.1.3	O campo complexo de Klein-Gordon	27
3.2	Quantização do campo fermiônico	30
3.2.1	A representação de número para férmions	30
3.2.2	A segunda quantização	31
3.3	Mecânica Estatística Quântica	35
4	Correntes bosônicas	39
4.1	Função de Wightman	39
4.2	Corrente bosônica	44
4.2.1	Densidade de carga e corrente radial	44
4.2.2	Densidade de corrente azimutal	46
4.2.3	Densidade de corrente axial	54
4.3	Considerações a respeito dos resultados	58
5	Condensado fermiônico e Correntes fermiônicas	61
5.1	Condensado Fermiônico	61
5.1.1	Análise do condensado para $ \mu \leq m$	68
5.1.2	Análise do condensado para $ \mu > m$	73
5.2	Densidade de carga	75
5.2.1	Análise da densidade de carga para $ \mu \leq m$	77
5.2.2	Análise da densidade de carga para $ \mu > m$	82

5.3	Carga induzida	85
5.4	Densidades de corrente	86
5.4.1	Análise da densidade de corrente para $ \mu \leq m$	87
5.4.2	Análise da densidade de corrente para $ \mu > m$	91
5.5	Considerações a respeito dos resultados	92
6	Considerações finais	95
A	Fórmulas de soma	97
A.1	Fórmula de soma envolvendo a função de Bessel modificada $I_{\beta_n}(w)$	97
A.2	A segunda soma envolvendo a função de Bessel modificada $I_{\beta_n}(z)$	99
A.3	Análise da densidade de corrente induzida ao longo das dimensões extras . . .	101
B	Fórmulas usadas na simplificação da carga total	103
	Referências bibliográficas	105

Resumo

Nesta tese, investigamos o efeito da topologia e de um campo magnético nas flutuações do vácuo associadas à campos bosônicos e fermiônicos carregados. Primeiramente, analisamos as densidades de correntes induzidas no vácuo para um campo bosônico em um espaço-tempo de uma corda cósmica com $(D+1)$ dimensões. Para esta análise, consideramos a presença de um fluxo magnético ao longo das direções axial e azimutal e que o eixo z é compactificado em um círculo de comprimento L . Esta análise é realizada fazendo uso da função de Wightman de frequências positivas, que é necessária para calcular os valores esperados no vácuo das densidades de correntes induzidas. Nossa segunda investigação é relacionada a campos fermiônicos. Investigamos os valores esperados do condensado fermiônico, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, carga e densidades de corrente para um campo fermiônico massivo em equilíbrio térmico a uma temperatura T , e com um potencial químico não-nulo, μ . Consideramos um espaço-tempo cônico em $(2+1)$ dimensões na presença de um campo magnético no vértice do cone. Para esta análise, dois casos foram considerados separadamente. Primeiramente, consideramos o caso em que $|\mu| \leq m$, e em seguida, o caso em que $|\mu| > m$.

Palavras-chave: corda cósmica, correntes induzidas, compactificação, condensado fermiônico, temperatura finita, campo magnético.

Abstract

In this thesis, we investigate the effect of the topology and the magnetic field on the vacuum fluctuations associated to bosonic and fermionic charged fields. Firstly, we analyze the vacuum induced current densities for a bosonic field in a (D+1)-dimensional cosmic string spacetime. For this analysis, we consider the presence of a magnetic field along of the azimuthal and axial directions and that the z-axis is compactified to a circle of length L . This analysis is performed using the positive frequencies Wightman function, that is necessary to calculate the vacuum expectation values of the induced current densities. Our second investigation is related with fermionic fields. We investigate the expectation values of the fermionic condensate, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, charge and current densities for a massive fermionic field in thermal equilibrium with T temperature, with a nonzero chemical potential, μ . We consider the background of a (2+1)-dimensional conical spacetime and the presence of a magnetic field in the cone apex. In this analysis, we consider two separated cases. Firstly, we consider the case where $|\mu| \leq m$ and after that the case where $|\mu| > m$.

Keywords: cosmic string, induced currents, compactification, fermionic condensate, finite temperature, magnetic field.

Lista de Figuras

4.1	Densidade de corrente azimutal sem a presença da compactificação para $D = 3$ em unidades de “ m^4e ”, em termos de α_0 para $mr = 0.5$ e $q = 1.5, 2.5$ e 3.5	49
4.2	Densidade de corrente azimutal induzida pela compactificação para $D = 3$ é mostrada, em unidades de “ m^4e ”, em termos de α_0 para $mr = 0.5$, $mL = 1$ e $q = 1.5, 2.5$ e 3.5 . O gráfico da esquerda é para $\tilde{\beta} = 0.1$ enquanto que o da direita é para $\tilde{\beta} = 0.7$	52
4.3	Densidade total de corrente azimutal para $D = 3$ em unidades de “ m^4e ”, em termos de mr para os valores $q = 2.5$, $\alpha_0 = 0.25$ e $mL = 0.1, 0.2, 1.0$. As curvas correspondentes aos valores finitos de mL são comparadas com as curvas sólidas para $mL \rightarrow \infty$. Para o gráfico da esquerda temos $\tilde{\beta} = 0$ enquanto que para o da direita $\tilde{\beta} = 0.5$	53
4.4	Densidade de corrente axial para $D = 3$ na Eq. (4.70) em unidades de “ m^3e ”, em termos de $\tilde{\beta}$ para os valores $mr = 0.4$, $mL = 1$ e $q = 1.5, 2.5, 3.5$. O gráfico da esquerda é para $\alpha_0 = 0$ enquanto para o da direita $\alpha_0 = 0.25$	57
5.1	Parte topológica na densidade de carga como função do parâmetro α_0 considerando as representação irreduzíveis com $s = 1$ (curvas cheias) e $s = -1$ (curvas tracejadas). Os números próximos as curvas correspondem aos valores de q . Os gráficos são plotados para $\mu/m = 0.25$, $mr = 0.5$, and $T/m = 0.5$	79

5.2	Parte topológica na densidade de corrente em função da temperatura para a representação irredutível com $s = 1$ (curvas cheias). Os gráficos são plotados para $q = 1.5$, $\alpha_0 = 0.25$ e $mr = 0.5$. As curvas tracejadas apresentam a densidade de corrente no espaço-tempo de Minkowski . Os números próximos as curvas indicam os valores de μ/m	82
5.3	Densidade de carga como função da distância a partir do vértice do cone para diferentes valores do parâmetro q (números próximos as curvas). No gráfico da esquerda, a parte topológica é apresentada para a representação $s = 1$ e para $\mu/m = 0.25$, $\alpha_0 = 0.25$, $T/m = 0.5$. O gráfico da direita mostra a dependência da razão $\langle j^0 \rangle / \langle j^0 \rangle^{(M)}$ a temperatura zero. As curvas cheias e tracejadas nos gráficos acima correspondem a $\alpha_0 = 0.25$ e $\alpha_0 = 0$, respectivamente.	84
5.4	Densidade de corrente azimutal como função de α_0 para diferente valores do parâmetro q (valores próximos as curvas) e para $\mu/m = 0.25$, $mr = 0.5$, $T/m = 0.5$	88
5.5	Densidade corrente em função da temperatura. Os números próximos as curvas são os valores da razão μ/m considerando os valores $q = 1.5$, $\alpha_0 = 0.25$, $mr = 0.5$	90
5.6	Densidade de corrente <i>versus</i> a distância a partir do vértice para $\alpha_0 = 0.25$ e para diferentes valores do parâmetro q (números próximos as curvas). O gráfico da esquerda é considerado para $\mu/m = 0.25$, $T/m = 0.5$. O gráfico da direita representa o limite de temperatura zero (linhas cheias) e as correntes no vácuo (linhas tracejadas) para um campo sem massa.	92

CAPÍTULO 1

Introdução

Quebras de simetria no universo primordial devido à transições de fase, têm diversas consequências cosmológicas, fornecendo um elo importante entre física de partículas e a cosmologia. Em particular, diferentes tipos de defeitos topológicos podem ter sido formados devido às transições de fase do vácuo após o tempo de Planck [1, 2]. Entre eles, cordas cósmicas são de interesse especial, pois acreditava-se que elas poderiam oferecer uma alternativa à inflação, no sentido de gerar as perturbações de densidade primordial que causaram o crescimento de galáxias [3, 4]. Porém, mesmo com observações recentes da radiação cósmica de fundo, onde foi descartado às cordas cósmicas como fonte primordial de perturbação na distribuição de matéria no universo [5], elas ainda são candidatas a um número de efeitos físicos interessantes, como explosões de raios gama [6], ondas gravitacionais [7] e raios cósmicos de altas energias [8]. Mais recentemente, devido ao fato de uma variação de seu mecanismo de formação ser proposta no contexto da inflação [9, 10], o interesse por cordas cósmicas foi renovado.

Uma corda cósmica ideal é um defeito linear, retilíneo, cujo raio é desprezível, com o espaço-tempo produzido por ela sendo localmente plano, porém, globalmente cônico, com um déficit de ângulo planar determinado pela tensão da corda, $\Delta\phi = 8\pi G\mu_0$, onde G é a constante da gravitação de Newton e μ_0 é a densidade linear de massa da corda. Embora este objeto tenha sido introduzido na literatura primeiramente como sendo uma distribuição de energia

tipo Delta de tensão axial ao longo de uma linha reta [11], ele também pode ser descrito por uma teoria clássica de campos onde o tensor energia-momento associado ao sistema Maxwell-Higgs, investigado por Nielsen e Olesen em [12], se acopla às equações de Einstein. Este sistema acoplado foi investigado por Garfinkle e Linet em [13] e [14], respectivamente. Os autores mostraram que um déficit de ângulo planar, $\Delta\phi$, surge na superfície bi-dimensional perpendicular à corda, assim como um fluxo magnético atravessando seu núcleo.

Nesta tese, uma de nossas contribuições é analisar os efeitos quânticos, mais especificamente, as flutuações do vácuo das densidades de corrente, em um campo bosônico considerando um espaço-tempo com $D+1$ dimensões de uma corda cósmica, na presença de um fluxo magnético e da compactificação do eixo z de nosso modelo. As flutuações do vácuo são alteradas devido a estrutura cônica do espaço-tempo de uma corda cósmica, com isso o valor esperado no vácuo (VEV) de observáveis físicos adquirem valores não nulos [15–19] e [20–23]. Além disso, a presença de um campo magnético atravessando o núcleo da corda fornece contribuições adicionais para os VEVs associados a campos carregados [24–30], assim como, densidades de corrente induzidas no vácuo, $\langle j^\mu \rangle$.

A presença de dimensões compactas também induz efeitos quânticos topológicos em campos de matéria. É bem conhecido que a presença de dimensões compactas é uma característica importante em muitas teorias da física fundamental de altas energias, como teorias de supergravidade e supercordas. Os efeitos combinados da topologia não trivial do espaço-tempo de uma corda cósmica, de dimensão compacta ao longo do eixo da corda e da presença do fluxo magnético no núcleo da corda, nos VEVs do tensor energia-momento, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, e densidades de correntes, $\langle j_\mu \rangle$, associados a campos quânticos fermiônicos carregados em um espaço-tempo 4-dimensional de uma corda cósmica foram investigados em [31] e [32], respectivamente. Uma aplicação interessante de modelos teóricos com a presença de dimensões compactas pode ser encontrada em nanofísica [33]. A descrição de longo comprimento de onda dos estados eletrônicos no grafeno pode ser formulada em termos da teoria tipo Dirac em um espaço-tempo tri-dimensional, com a velocidade de Fermi fazendo o papel da velocidade da luz.

A outra contribuição que damos nesta tese, é analisar o condensado fermiônico e as densidades de correntes induzidas por um campo magnético, considerando um espaço-tempo cônico com $(2+1)$ dimensões em equilíbrio térmico a uma temperatura T e a presença de um potencial químico não-nulo. Modelos teóricos com campos fermiônicos em $(2+1)$ dimensões dão origem a inúmeros problemas físicos, como as já mencionadas teorias tipo Dirac. Os exemplos incluem modelos de supercondutividade a altas temperaturas, grafeno, estados com

densidades de ondas e isolantes topológicos [33–37]. Outra motivação para estudar estes sistemas é devida à conexão de modelos com $(2+1)$ dimensões para o comportamento de altas temperaturas de um campo 4-dimensional [38]. Teorias de campo em três dimensões também fornecem modelos simples na física de partículas. Por causa de uma dimensão a menos elas são mais fáceis de manusear. Na presença de um campo de gauge externo, férmions em um espaço-tempo tri-dimensional induzem uma corrente no vácuo topologicamente não-trivial com paridade anormal [39–44]. Em modelos com férmions acoplados com o campo de gauge de Chern-Simons a invariância de Lorentz deve ser espontaneamente quebrada [45–50]: existe um estado com um campo magnético não-nulo e com energia menor do que a energia mais baixa na ausência do campo magnético.

Entre os mais interessantes tópicos no estudo de teorias em $(2+1)$ dimensões está a quebra de simetria chiral e de paridade. Em particular foi mostrado que o campo magnético serve como um catalisador para a quebra de simetria dinâmica [51–56]. Um ponto chave destas considerações é a aparência de um condensado fermiônico não-nulo induzido pelo campo magnético. Este fenômeno pode ser importante na física de supercondutividade a altas temperaturas [57–59]

Esta tese está organizada da seguinte maneira: nos capítulos 2 e 3 faremos uma revisão a respeito das Teorias Clássica e Quântica de Campos, respectivamente. Já nos capítulos 4 e 5 estão as nossas contribuições, ver Refs. [60] e [61]. No capítulo 4, analisamos os VEVs da densidade de corrente bosônica induzida por um fluxo magnético em um espaço-tempo idealizado de uma corda cósmica com $(D+1)$ dimensões, admitindo que a coordenada ao longo do eixo z é compactificada em um círculo de comprimento L . No capítulo 5 analisamos o condensado fermiônico e os VEVs das densidades de correntes para um campo fermiônico massivo em um espaço-tempo cônico com $(2+1)$ dimensões com um fluxo magnético localizado no vértice do cone. Consideramos que o campo fermiônico está em equilíbrio térmico a uma temperatura T e a presença de uma potencial químico não-nulo. No capítulo 6 mostramos as conclusões de nossas análises. Introduzimos também alguns Apêndices, A e B, contendo detalhes matemáticos relevantes ao texto. Ao longo da tese, adotamos o sistema de unidades naturais $\hbar = G = c = k_B = 1$ e a assinatura $(+, -, -, -)$.

CAPÍTULO 2

Teoria Clássica de Campos

Neste capítulo vamos fazer uma breve revisão da Teoria Clássica de Campos e ver como ela se comporta sob transformações gerais de coordenadas. Iremos analisar como as teorias escalares e fermiônicas devem ser generalizadas para se tornarem invariantes sob este tipo de transformação. Antes, porém, faremos uma breve discussão a respeito da geometria pseudo-Riemmaniana.

2.1 O espaço-tempo de Einstein

Em 1905, A. Einstein propôs uma nova formulação para a teoria da gravitação. Nesse novo formalismo, a presença de matéria e energia modificaria a estrutura geométrica do espaço e do tempo, e essas duas grandezas, o espaço e o tempo, seriam na verdade uma só: o espaço-tempo. Desta forma, em uma determinada região onde houvesse a presença de um objeto com uma grande quantidade de massa, o espaço-tempo ao redor deste objeto seria modificado, geometricamente falando. Para dar base matemática a esta idéia, Einstein dotou o espaço de uma estrutura métrica, onde deveria conter toda a informação geométrica do espaço-tempo. Esta estrutura métrica Einstein denominou de tensor métrico, usualmente representado por $g_{\mu\nu}(x)$. A seguir, faremos uma breve revisão a respeito de conceitos básicos

que são necessários na introdução da estrutura métrica do espaço-tempo.

Iniciaremos tratando de referencial inercial e não-inercial. Em um espaço-tempo quadri-dimensional, o elemento de linha, ds , em um referencial inercial, usando as coordenadas (t, x, y, z) , é dado por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.1)$$

e é invariante por transformações de Lorentz¹. Se considerarmos um sistema de referência não-inercial, o elemento de linha já não será mais dado pela soma dos quadrados das diferenciais das coordenadas. Por exemplo, se tivermos em mente um referencial girante com velocidade angular ω , em torno de um eixo z , onde as coordenadas são dadas por (t', x', y', z') , as transformações de coordenadas entre os referenciais são dadas por

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t), \\ y &= x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t), \\ z &= z', \end{aligned} \quad (2.2)$$

que pode ser invertida, para escrevermos

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t), \\ y' &= -x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t), \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Desta maneira, o elemento de linha, ds' , é escrito como

$$ds'^2 = [1 - \omega^2(x^2 + y^2)]dt^2 - 2\omega dt(ydx - xdy) - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.4)$$

A partir da equação anterior, notamos que o elemento de linha não é dado pela soma ou diferença dos quadrados das diferenciais das coordenadas.

Definimos o quadri-vetor posição por $x^\mu = (x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$, com

¹Uma transformação de Lorentz é definida como uma transformação de coordenadas, dada por: $x'^a = \Lambda^a_b x^b$. Com Λ^a_b sendo as matrizes que constituem elementos do grupo de Lorentz, obedecendo a relação $\Lambda^a_b \Lambda^b_c = \delta^a_c$.

$\mu = 0, 1, 2, 3$ e o tensor métrico como $\eta_{\mu\nu}$ por ²

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2.5)$$

Assim, a Eq. (2.1) pode ser escrita na seguinte forma

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.6)$$

onde os índices repetidos estão sendo somados.

Quando fazemos uso de sistemas de referência não-inerciais, de maneira geral, o elemento de linha pode incluir termos que são produtos de diferenciais de diferentes coordenadas. Consequentemente, o elemento de linha passa a ser escrito como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.7)$$

com $g_{\mu\nu}$ representando um conjunto de dez funções dependentes das coordenadas, do tempo e espaço. As funções $g_{\mu\nu}$ contêm todas as propriedades geométricas do espaço-tempo, de modo que o espaço-tempo associado a ele é curvilíneo, correspondente a um referencial acelerado. Para um referencial inercial, temos que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Segundo Einstein, referenciais não-inerciais, de certa maneira, são correspondentes a campos gravitacionais, passando a serem descritos pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, sendo a gravitação descrita pelos desvios na métrica do espaço-tempo plano (espaço-tempo de Minkowski) dependente da distribuição de matéria local. Esta equivalência entre referenciais acelerados e campos gravitacionais se dá apenas localmente, pois em um sistema não-inercial, com uma métrica $g_{\mu\nu}$, ela pode ser reduzida globalmente a forma dada pela Eq. (2.6) por uma transformação de coordenadas. Além disso, não podemos eliminar um campo gravitacional por meio de uma transformação de coordenadas, e a métrica só pode ser reduzida ao espaço-tempo de Minkowski em uma região finita do espaço, ou seja, localmente. Quando isso ocorre, dizemos que o espaço-tempo é curvo ou pseudo-Riemmaniano.

O objeto geométrico, $g_{\mu\nu}$, em um espaço-tempo pseudo-Riemmaniano, é um tensor covariante e simétrico de ordem 2. Também pode ser definido um tensor métrico contravari-

²Adotaremos nesta tese a assinatura para o tensor métrico $(+, -, -, -)$.

ante, $g^{\mu\nu}$, que é o inverso do tensor métrico covariante. Logo, $g^{\mu\nu}$ é dado por:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}, \quad (2.8)$$

com g sendo o determinante de $g_{\mu\nu}$ e $\Delta^{\mu\nu}$ o co-fator de $g_{\mu\nu}$.

2.2 A equação de Klein-Gordon

A dinâmica relativística de um campo escalar, $\varphi(x)$, é governada pela equação de Klein-Gordon. Nesta seção, iremos analisar a interação do campo escalar com os campos eletromagnético e gravitacional separadamente. Em seguida, iremos considerar a interação deste campo com o gravitacional e eletromagnético simultaneamente. Veremos que isso implicará em modificações que a equação do campo deve sofrer, afim de torná-la invariante de gauge e covariante por transformações gerais de coordenadas.

2.2.1 Interação do campo de escalar com o campo eletromagnético

A ação associada a um campo escalar carregado e livre, com massa m , é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(x), \quad (2.9)$$

onde $\mathcal{L}(x)$ é a densidade de Lagrangeana do campo escalar, dada por

$$\mathcal{L}(x) = g^{ab} \partial_a \varphi^*(x) \partial_b \varphi(x) - m^2 \varphi^*(x) \varphi(x), \quad (2.10)$$

sendo g^{ab} ³ o tensor métrico correspondente ao espaço plano e $g = \det(g_{ab})$.

A inclusão da interação eletromagnética se dá através do campo de gauge, A_a , na densidade de Lagrangeana. Nesse sentido, o conceito de derivada é redefinido, como mostrado abaixo

$$\partial_a \rightarrow \partial_a + ieA_a, \quad (2.11)$$

onde A_a é o quadri-vetor potencial eletromagnético sendo e a carga elétrica do campo, in-

³Os índices latinos $a, b, c, \dots$ serão usados quando escrevemos as equações em coordenadas cartesianas, na ausência da gravitação. Quando considerarmos a presença do campo gravitacional, iremos utilizar os índices gregos $\mu, \nu, \dots$

troduzindo o acoplamento entre o campo de matéria e o campo de gauge (Acoplamento mínimo). Dessa forma, considerando que o campo $\varphi(x)$ esteja interagindo com o campo eletromagnético $A_a(x)$, a densidade de Lagrangeana dada pela Eq. (2.10), usando a Eq. (2.11), torna-se

$$\mathcal{L}(x) = g^{ab}(D_a\varphi(x))^* D_b\varphi(x) - m^2\varphi^*(x)\varphi(x), \quad (2.12)$$

com $D_a = \partial_a + ieA_a$.

As equações de Euler-Lagrange nos fornecem a equação de Klein-Gordon, dada por

$$(D_a D^a + m^2)\varphi = 0. \quad (2.13)$$

Também podemos determinar o tensor energia-momento, que é definido como

$$T_{ab}(x) = \frac{2}{\sqrt{-g(x)}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}(x)}. \quad (2.14)$$

Logo, variando a ação em relação ao tensor métrico $g_{ab}(x)$, obtemos para o tensor energia-momento

$$T_{ab}(x) = (D_a\varphi(x))^* D_b\varphi(x) + D_a\varphi(x)(D_b\varphi(x))^* - g_{ab}\mathcal{L}(x). \quad (2.15)$$

2.2.2 Interação do campo escalar com o campo gravitacional

De acordo com a Teoria da Relatividade Geral, quando a gravitação está presente, um espaço-tempo curvo se faz necessário para acomodar o campo gravitacional. Ou seja, a curvatura do espaço-tempo pseudo-Riemmaniano é descrita através do campo gravitacional.

Segundo o princípio da covariância, que é um dos fundamentos da Relatividade Geral, as leis da física devem permanecer invariantes, independentes do sistema de coordenadas adotado. Ou seja, os resultados físicos não dependem do sistema de coordenadas usado para obter um determinado resultado.

Quando consideramos a interação do campo escalar com o campo gravitacional, devemos considerar a generalização covariante da equação de Klein-Gordon, considerando em vez de ∂_μ a derivada covariante gravitacional $\mathcal{D}_\mu$ no formalismo do campo livre. Esta interação é denominada de acoplamento mínimo gravitacional. Sendo assim, a equação do campo será escrita como

$$(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu + m^2)\varphi(x) = 0, \quad (2.16)$$

que também pode ser escrita na forma

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + m^2 \right] \varphi(x) = 0, \quad (2.17)$$

com $g = \det(g_{\mu\nu})$. Esta equação é invariante por transformações gerais de coordenadas.

Vale destacar que esta equação não é invariante por transformações conformes. Ou seja, quando fazemos um mapeamento do espaço Riemmaniano com a métrica $g_{\mu\nu}$ em outro com uma métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, dada por

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} e^{-2\sigma(x)}, \quad (2.18)$$

sendo $\sigma(x)$ uma função arbitrária e bem comportada das coordenadas, não há nenhuma transformação do tipo $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = F[\sigma]\varphi$ de modo que a Eq. (2.16) mantenha sua covariância.

Gursey em [62], sugeriu uma generalização da equação de Klein-Gordon, dada por

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + \xi \mathcal{R} + m^2 \right] \varphi(x) = 0, \quad (2.19)$$

onde $\mathcal{R} = R^\mu_\mu$ é o escalar de curvatura do espaço-tempo, sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci.

Agora, supondo que $\xi = \xi_c = (N - 2)/[4(N - 1)]$, onde N a dimensão do espaço, a equação associada ao campo escalar sem massa é invariante conforme⁴. Quando fizermos o mapeamento do espaço Riemmaniano, dado pela Eq. (2.18), acompanhado com a transformação do campo dada por

$$\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) e^{\frac{N-2}{4}\sigma(x)}, \quad (2.20)$$

temos que a equação do campo passa a ser dada por

$$(\tilde{\mathcal{D}}_\mu \tilde{\mathcal{D}}^\mu + \xi_c \tilde{\mathcal{R}} + m^2 e^{2\sigma(x)}) \tilde{\varphi}(x) = 0, \quad (2.21)$$

com $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ e $\tilde{\mathcal{R}}$ sendo calculados na métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Esta verificação pode ser feita fazendo uso da lei de transformação do escalar de curvatura $\mathcal{R}$ sob a transformação dada pela Eq. (2.18) [63]

$$\tilde{\mathcal{R}} = e^{2\sigma(x)} [\mathcal{R} + 2(N - 1)\Delta_2\sigma - (N - 1)(N - 2)\Delta_1\sigma], \quad (2.22)$$

onde $\Delta_1\sigma = \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma$ e $\Delta_2\sigma = \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\sigma$. Note que para $m = 0$ e $\xi = \xi_c$, a Eq. (2.21) é

⁴Note que para $N = 4$ temos que $\xi = 1/6$.

invariante conforme.

A Eq. (2.21) é obtida a partir da densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}(x) = [g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^*(x) \partial_\nu \varphi(x) - (m^2 + \xi \mathcal{R}) \varphi^*(x) \varphi(x)], \quad (2.23)$$

e variando a ação correspondente com respeito a métrica de acordo com a Eq. (2.14), obtemos para o tensor energia-momento

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= \left(\frac{1}{2} - \xi \right) (\partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi^*) + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} \partial^\sigma \varphi^* \partial_\sigma \varphi \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2} - 2\xi \right) m^2 g_{\mu\nu} - \xi G_{\mu\nu} - 2\xi^2 \mathcal{R} g_{\mu\nu} \right] \varphi^* \varphi \\ &- \xi [\varphi^* \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \varphi + (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \varphi^*) \varphi], \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}$ é o tensor de Einstein. O tensor acima também é chamado de Chernikov-Tagirov e ele obedece a lei de conservação, ou seja

$$\mathcal{D}_\mu T^\mu{}_\nu(x) = 0. \quad (2.25)$$

Tomando o traço do tensor dado na Eq. (2.24), para um campo real, encontramos

$$T = T^\mu{}_\mu = 3 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \square \varphi + m^2 \varphi^2. \quad (2.26)$$

Para um campo sem massa, notamos que o traço é nulo quando $\xi = \xi_c$.

2.2.3 Interação do campo escalar com os campos gravitacional e eletromagnético

Agora analisaremos a situação mais geral, na qual o campo escalar interage com o campo gravitacional e o campo eletromagnético simultaneamente. Novamente, devemos escrever a equação de Klein-Gordon de maneira apropriada afim de a mesma conter as duas interações. Lembrando o que foi feito anteriormente, vimos que na presença da interação eletromagnética, a equação de Klein-Gordon é modificada, para torná-la invariante de gauge. Para o caso em que o campo escalar interage com o campo gravitacional, vimos que era necessário trocar a derivada ordinária ∂_μ pela derivada covariante gravitacional $\mathcal{D}_\mu$, fazendo

com que a equação de campo respeitasse o princípio da covariância por transformações de coordenadas.

Quando consideramos a presença das interações gravitacional e eletromagnética, simultaneamente, as duas condições acima citadas devem ser satisfeitas. Logo, devemos combinar as duas condições efetuando a troca da derivada ∂_μ por $\partial_\mu + ieA_\mu$ na Eq. (2.19). De maneira que, a equação de Klein-Gordon generalizada, levando em conta as interações gravitacional e eletromagnética, é dada por

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu) + \xi \mathcal{R} + m^2 \right] \varphi(x) = 0, \quad (2.27)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

De maneira similar ao feito anteriormente, encontramos para o tensor energia-momento

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= \left(\frac{1}{2} - \xi \right) ((D_\mu \varphi)^* D_\nu \varphi + D_\mu \varphi (D_\nu \varphi)^*) + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} (D^\sigma \varphi)^* D_\sigma \varphi \\ &\quad - \xi [\varphi^* (\mathcal{D}_\mu + ieA_\mu) (\mathcal{D}_\nu + ieA_\nu) \varphi + [(\mathcal{D}_\mu + ieA_\mu) (\mathcal{D}_\nu + ieA_\nu) \varphi]^* \varphi] \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{2} - 2\xi \right) m^2 g_{\mu\nu} - \xi G_{\mu\nu} - 2\xi^2 \mathcal{R} g_{\mu\nu} \right] \varphi^* \varphi. \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.3 A equação de Dirac

Em 1928, Dirac propôs uma equação que governa a dinâmica de uma partícula com spin 1/2, onde ele observou que devido ao grau de liberdade fermiônico, uma função escalar não poderia conter toda a informação contida no campo. A proposta de Dirac foi adotar um campo espinorial de quatro componentes, no qual levava em conta os dois possíveis estados de energia e de spin. Logo, a equação proposta é matricial com derivadas lineares no espaço e no tempo.

Seguiremos aqui de maneira similar ao que foi feito com relação ao campo escalar. Iremos considerar a interação do campo fermiônico, $\psi(x)$, com o campo eletromagnético e gravitacional, separadamente, e em seguida, iremos generalizar a equação considerando as duas interações simultaneamente.

2.3.1 Interação do campo fermiônico com o campo eletromagnético

A interação de um campo espinorial carregado, ψ , com um campo eletromagnético, A_a , assim como acontece com o campo escalar, é descrita pela troca da deriva parcial ∂_a pela derivada estendida D_a , de acordo com

$$\partial_a \rightarrow D_a = \partial_a + ieA_a, \quad (2.29)$$

com A_a sendo o quadri-vetor potencial eletromagnético e e a carga elétrica da partícula. Introduzindo a interação eletromagnética desta maneira, garantimos a invariância de gauge da teoria. Levando a Eq. (2.29) em consideração, a densidade de Lagrangeana do campo ψ interagindo com o campo A_a é dada por

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x)\gamma^a D_a \psi(x) - (D_a^* \bar{\psi}(x))\gamma^a \psi(x)] - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.30)$$

com as matrizes 4x4 de Dirac, γ^a , obedecendo as relações de anti-comutação

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}. \quad (2.31)$$

Uma possível representação para as matrizes de Dirac é [64]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^a \\ \sigma^a & 0 \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (2.32)$$

onde I é a matriz identidade 2x2 e σ^a são as matrizes de Pauli.

Variando a Eq. (2.30) com respeito a $\bar{\psi}$, obtemos a equação de Dirac

$$(i\gamma^a D_a - m)\psi(x) = 0. \quad (2.33)$$

Para o tensor energia-momento do campo de Dirac interagindo com um campo eletromagnético, temos que

$$T_{ab}(x) = \frac{i}{4} [\bar{\psi}(x)\gamma_a D_b \psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_b D_a \psi(x) - (D_a^* \bar{\psi}(x))\gamma_b \psi(x) - (D_b^* \bar{\psi}(x))\gamma_a \psi(x)], \quad (2.34)$$

que satisfaz a relação $T_{ab} = T_{ba}$.

2.3.2 Interação do campo fermiônico com o campo gravitacional

Nesta seção, iremos considerar que o campo de Dirac interage com um campo gravitacional e, similarmente ao campo de Klein-Gordon, isso se faz generalizando o conceito de covariância da equação do campo. Porém, a generalização do conceito de covariância para o campo de Dirac interagindo com um campo gravitacional, é um pouco mais complicada com relação ao caso escalar. A noção de espinor para uma geometria pseudo-Riemmaniana deverá ser generalizada.

Como em uma geometria pseudo-Riemmaniana o espaço-tempo é localmente plano, a exigência da equação de Dirac respeitar a covariância de Lorentz se dá apenas localmente. Para fazer isso, em qualquer ponto x do espaço, podemos introduzir um espaço tangente pseudo-Euclidiano. Como uma base de vetores para este espaço tangente, podemos escolher as chamadas bases tétradas $e^a{}_\mu$, onde $a, \mu = 0, 1, 2, 3$. Antes de prosseguir, faremos uma breve revisão a respeito das bases tétradas.

Sabemos que uma das quantidades mais importantes da Relatividade de Einstein é o tensor métrico. Em termos dele, por exemplo, podemos definir o elemento de linha ds^2 e o produto interno de dois vetores, da seguinte forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.35)$$

$$V \cdot W = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu. \quad (2.36)$$

Temos que a métrica é simétrica ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) e não singular. A inversa $g^{\mu\nu}$ é definida como

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu{}^\rho = g_{\nu\mu} g^{\rho\nu}. \quad (2.37)$$

Isto significa que g pode ser diagonalizado por uma transformação

$$g_{\mu\nu} = O_{\mu a} D_{ab} (O^{-1})_{\nu b}, \quad (2.38)$$

onde $(O^{-1})_{b\nu} = O_{\nu b}$, tal que

$$D_{ab} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

A não singularidade implica que $\lambda^{(a)} \neq 0$, e a assinatura significa que $\lambda^{(a)} > 0$, para todo $a = 0, 1, 2, 3$.

O caráter Lorentziano do espaço-tempo da Relatividade Geral nos permite definir referenciais de Lorentz locais, relacionados a uma escolha de tétradas, de modo que localmente a métrica assuma os valores constantes da Relatividade Geral [65].

Definindo a base tétrada como ⁵

$$e^{(a)}_{\mu} = \sqrt{\lambda^{(a)}} O_{\mu a}, \quad (2.40)$$

no qual o índice a que aparece em $O_{\mu a}$ não é um índice de soma, o tensor métrico pode ser escrito como

$$g_{\mu\nu} = e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_{\nu} \eta_{ab}, \quad (2.41)$$

sendo η_{ab} o tensor de Minkowski. Admitindo que $e^{(a)}_{\mu}$ tem uma inversa $e_{(a)}^{\mu}$, satisfazendo as relações

$$e_{(a)}^{\mu} e^{(b)}_{\mu} = \delta_a^b \quad (2.42)$$

e

$$e_{(a)}^{\mu} e^{(a)}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (2.43)$$

podemos mostrar que

$$e_{(a)}^{\mu} = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e^{(b)}_{\nu} \quad (2.44)$$

e

$$\eta_{ab} = e_{(a)}^{\mu} e_{(b)}^{\nu} g_{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

A partir da Eq. (2.45) nota-se que uma tétrada está associada com uma transformação local do sistema de coordenadas x^{α} para coordenadas locais x^a , de modo que, no ponto considerado, a métrica assuma a forma de Minkowski η_{ab} . A partir destas equações notamos que, relativamente aos índices das tétradas, as matrizes η têm um papel de uma métrica. Ainda de acordo com as equações acima, vemos que as tétradas formam um conjunto de vetores ortonormais no espaço tangente ao espaço Riemmaniano em um ponto x . Então, para qualquer tensor ou vetor, temos que

$$V^{\mu} = e_{(a)}^{\mu} V^a \quad (2.46)$$

⁵Os índices latinos se referem ao espaço tangente, enquanto os índices gregos ao espaço da base.

e, de forma inversa

$$V^a = e^{(a)}_{\mu} V^{\mu}, \quad (2.47)$$

sendo, V^{μ} e V^a , as componentes de um vetor nas bases de coordenadas e local, respectivamente. Sendo assim, podemos relacionar as bases de coordenadas com as bases de Lorentz locais, usando as tétradas. O elemento de linha também pode ser escrito em termos das tétradas, como

$$ds^2 = \eta_{ab} e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_{\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (2.48)$$

Dada a métrica $g_{\mu\nu}(x)$, temos que a base tétrada não é unicamente determinada. Para qualquer transformação de Lorentz local

$$e'^{(a)}_{\mu} = \Lambda^a_b(x) e^{(b)}_{\mu}, \quad (2.49)$$

com

$$\Lambda^a_c(x) \Lambda_b^c(x) = \delta^a_b, \quad (2.50)$$

as Eqs. (2.41) e (2.45) permanecem inalteradas. Logo, o princípio da covariância geral deve ser estendido, de modo que as equações da teoria gravitacional sejam covariantes não apenas sob mudanças de base de coordenadas no espaço tangente da variedade Riemmaniana, mas também sob transformações de Lorentz locais das bases ortonormais da variedade.

Para escrever a equação de Dirac em um espaço pseudo-Riemmaniano, tomaremos, independentemente, em cada ponto da variedade, uma estrutura espinorial local de Dirac. Definimos os espinores de Dirac como objetos de quatro componentes que, sob o grupo de transformações de Lorentz locais, dado pela Eq. (2.49), se transformam como os seus correspondentes em um espaço plano

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda(x))\psi(x), \quad (2.51)$$

e o seu conjugado correspondente

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda(x)), \quad (2.52)$$

onde $S(\Lambda(x))$ é uma matriz 4x4, que opera nos vetores coluna de quatro componentes e depende da transformação de Lorentz $\Lambda^{\alpha}_{\beta}(x)$. Esta matriz satisfaz a seguinte restrição

$$\det(S) = 1. \quad (2.53)$$

Em termos de componentes, podemos escrever as Eqs. (2.51) e (2.52) como

$$\psi^a(x) \rightarrow \psi'^a(x) = S^a_b(x) \psi^b(x) \quad (2.54)$$

e

$$\psi_a(x) \rightarrow \psi'_a(x) = \psi_b(x) (S^{-1})^b_a(x). \quad (2.55)$$

Sob transformações de coordenadas sobre a variedade, $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x'^\alpha(x)$, os espinors se transformam como escalares, ou seja

$$\psi'(x') = \psi(x). \quad (2.56)$$

Nota-se que neste caso, não existe relação entre o grupo de transformações gerais de coordenadas sobre a variedade e o grupo local de Lorentz. Ao contrário da variedade plana da Relatividade Restrita, onde o grupo de transformações dado pelas Eqs. (2.51) e (2.52) pode constituir uma representação de transformações lineares e homogêneas sobre a variedade, para um espaço-tempo curvo a estrutura Lorentziana existe independentemente em cada ponto e as transformações dadas pelas equações citadas acima não podem constituir uma representação das transformações gerais sobre a variedade.

Para o campo de Dirac, as matrizes γ^a satisfazem à relação de anti-comutação, dada pela Eq. (2.31), e usando as tétradas, podemos definir sobre a variedade o campo de matrizes

$$\gamma^\mu(x) = e_{(a)}^\mu(x) \gamma^a, \quad (2.57)$$

satisfazendo, devido as Eqs. (2.31), (2.42) e (2.43),

$$\gamma^\mu(x) \gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x) \gamma^\mu(x) = 2g^{\mu\nu}(x), \quad (2.58)$$

constituindo a álgebra de Clifford associada a métrica $g^{\mu\nu}$ da variedade.

As matrizes $\gamma^\mu(x)$ se transformam, de acordo com as Eqs. (2.54) e (2.55), da seguinte maneira

$$(\gamma'^\mu)^a_b = S^a_c (S^{-1})^d_b (\gamma^\mu)^c_d = (S(x) \gamma^\mu S^{-1}(x))^a_b. \quad (2.59)$$

Fazendo uso do formalismo das tétradas, obtemos

$$(\Lambda^{-1}(x))^a_b \gamma^b = S(x) \gamma^a S^{-1}(x), \quad (2.60)$$

que é uma equação conhecida quando avaliamos espinores no espaço plano. Observamos que as matrizes constantes de Dirac supostamente preservam sua forma por uma transformação de Lorentz [64].

Com relação as transformações de coordenadas, as matrizes dadas pela Eq. (2.57), se transformam como um vetor contravariante

$$\gamma'^{\mu}(x) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \gamma^{\nu}(x). \quad (2.61)$$

Temos que as matrizes do grupo de transformações dadas pelas Eqs. (2.51) e (2.52), são funções do ponto, e com isso, a derivada de um espinor não se transforma como um espinor. Diante disso, necessitamos definir o conceito de derivada covariante de um espinor, e esta definição é dada por

$$\nabla_{\alpha} \psi^a(x) = \partial_{\alpha} \psi^a + \Gamma_{\alpha}^a{}_b \psi^b(x), \quad (2.62)$$

de forma que, sob o grupo de transformação dada pela Eq. (2.54), se transforme como um espinor

$$\nabla_{\alpha} \psi'^a = S^a{}_b(x) \nabla_{\alpha} \psi^b. \quad (2.63)$$

Usando a equação acima, temos que Γ_{α} se transforma como

$$\Gamma'_{\alpha}{}^a{}_b = S^a{}_b \Gamma_{\alpha}{}^d{}_f (S^{-1})^f{}_b - (\partial_{\alpha} S^a)_d (S^{-1})^d{}_b \quad (2.64)$$

ou ainda

$$\Gamma'_{\alpha} = S \Gamma_{\alpha} S^{-1} - (\partial_{\alpha} S) S^{-1}. \quad (2.65)$$

Temos que a lei de transformação dada pela Eq. (2.65), garante que a derivada covariante de um espinor se transforme como um espinor, frente uma transformação de Lorentz. No caso de transformação geral de coordenadas, Γ_{α} se transforma como um covetor. As quantidades Γ_{α} são denominadas de afinidades espinoriais ou conexões espinoriais.

Sob as transformações dadas pelas Eqs. (2.51) e (2.52), vemos que $\psi_a \psi^a = \bar{\psi} \psi$ é um escalar, implicando que $\nabla_{\alpha}(\psi_a \psi^a) = \psi_a \nabla_{\alpha} \psi^a + (\nabla_{\alpha} \psi_a) \psi^a = \partial_{\alpha}(\psi_a \psi^a)$. E com isso, obtemos

$$\nabla_{\alpha} \psi_a = \partial_{\alpha} \psi_a - \Gamma_{\alpha}^b{}_a \psi_b. \quad (2.66)$$

A derivada covariante de um objeto com índices espinoriais e tensoriais é dada por

$$\mathcal{D}_\alpha F^{\lambda a}{}_b = \partial_\alpha F^{\lambda a}{}_b + \left\{ \alpha \begin{smallmatrix} \lambda \\ b \end{smallmatrix} \right\} F^{\beta a}{}_b + \Gamma_\alpha^a{}_d F^{\lambda d}{}_b - \Gamma_\alpha^d{}_b F^{\lambda a}{}_d, \quad (2.67)$$

que generaliza a derivada covariante usual.

Temos que o espaço-tempo da Relatividade Geral é pseudo-Riemmaniano, neste caso, $\mathcal{D}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, implicando, a partir da Eq. (2.58), que

$$\mathcal{D}_\alpha g_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\alpha (\gamma_\mu(x) \gamma_\nu(x) + \gamma_\nu(x) \gamma_\mu(x)) = 0. \quad (2.68)$$

Uma condição suficiente para a equação acima é que

$$\mathcal{D}_\alpha \gamma_\mu = \partial_\alpha \gamma_\mu + \left\{ \mu \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\} \gamma_\lambda - \gamma_\mu \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha \gamma_\mu. \quad (2.69)$$

Usando a Eq. (2.57) e as propriedades da álgebra de Dirac gerada pelas matrizes constantes γ^a , verificamos que a conexão é dada por

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{8} \left[\gamma^\mu (\partial_\alpha \gamma_\mu) - (\partial_\alpha \gamma_\mu) \gamma^\mu - \left\{ \mu \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\} (\gamma^\mu \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma^\mu) \right]. \quad (2.70)$$

É possível mostrar ainda

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{2} w_{\alpha ab} \Sigma^{ab}, \quad (2.71)$$

onde

$$w_{\alpha ab} = -e_{b\mu} (\partial_\alpha e_a^\mu) - \left\{ \mu \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\} e_a^\mu e_{b\mu}, \quad (2.72)$$

e

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{4} [\gamma^a, \gamma^b]. \quad (2.73)$$

Impondo a Eq. (2.69), é suficiente para garantir que $\mathcal{D}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ mas não é necessária. Tomando

$$\mathcal{D}_\alpha \gamma_\mu = [V_\alpha, \gamma_\mu], \quad (2.74)$$

para qualquer V_α pertencente a álgebra de Pauli das matrizes $\gamma^\mu(x)$, a condição de termos a afinidade métrica é preservada. De acordo com a equação acima, a afinidade espinorial deve satisfazer

$$\partial_\mu \gamma_\nu - \left\{ \mu \begin{smallmatrix} \lambda \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} \gamma_\lambda + \Gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \Gamma_\mu = V_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu V_\mu, \quad (2.75)$$

tendo como possível solução

$$\tilde{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu - V_\mu, \quad (2.76)$$

onde Γ_μ é dado pela equação (2.70) [65].

Em [65], foi visto que, em geral, não temos critério para decidir entre as Eqs. (2.69) e (2.74). A escolha pela primeira parece ser a mais simples, já que neste caso o tensor energia-momento do campo de Dirac interagindo com o campo gravitacional tem a sua forma da Relatividade Restrita, a menos da substituição $\partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$. Aqui escolheremos a Eq. (2.69), com a afinidade dada pela Eq. (2.70).

Para uma variedade Riemmaniana com a noção de derivada covariante dada pela Eq. (2.67) em relação a transformações de gerais de coordenadas e transformações de Lorentz locais, a equação de Dirac é generalizada fazendo

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu, \quad (2.77)$$

de modo que agora é escrita na forma seguinte

$$[i\gamma^\mu(x)(\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m]\psi(x) = 0. \quad (2.78)$$

A equação generalizada de Dirac levando em conta a interação gravitacional é obtida a partir da densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}(x) = \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x)\nabla_\mu\psi(x) - (\nabla_\mu\bar{\psi}(x))\gamma^\mu(x)\psi(x)] - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \right\}. \quad (2.79)$$

E para o tensor energia-momento, temos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) = & \frac{i}{4} [\bar{\psi}(x)\gamma_\nu(x)\nabla_\mu\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_\mu(x)\nabla_\nu\psi(x) \\ & - (\nabla_\mu\bar{\psi}(x))\gamma_\nu(x)\psi(x) - (\nabla_\nu\bar{\psi}(x))\gamma_\mu(x)\psi(x)]. \end{aligned} \quad (2.80)$$

O tensor energia-momento acima obedece a lei de conservação dada por

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0. \quad (2.81)$$

E o traço, é dado por

$$T^\mu_\mu = m\bar{\psi}(x)\psi(x). \quad (2.82)$$

Note que para o caso de um campo não massivo, a equação de Dirac é invariante conforme, sem uma modificação adicional, se juntamente com a condição [66]

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} e^{-2\sigma(x)}, \quad (2.83)$$

ocorrer a seguinte transformação

$$\psi(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x) = \psi(x) e^{\frac{3}{2}\sigma(x)}. \quad (2.84)$$

2.3.3 Interação do campo fermiônico com os campos gravitacional e eletromagnético

Nas seções anteriores, vimos que a interação do campo de Dirac com o campo eletromagnético é descrita pela troca da derivada ordinária pela estendida, garantindo desta maneira que a equação de Dirac seja invariante por transformações de gauge. Quando consideramos o campo de Dirac interagindo com o campo gravitacional, vimos que a derivada de um espinor também deve ser modificada, de modo que a mesma se transforme como um espinor por transformações de Lorentz locais, fazendo com que a equação de Dirac seja covariante por transformações de Lorentz locais e por transformações gerais de coordenadas.

Logo, considerando que o campo de Dirac interage, simultaneamente, com os campos eletromagnético e gravitacional, a equação do campo é dada por

$$i\gamma^\mu(x)(\nabla_\mu + ieA_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (2.85)$$

onde $\gamma_\mu(x)$ e ∇_μ são dados pelas Eqs. (2.57) e (2.77), respectivamente. De modo que, desta forma, a equação de Dirac é invariante de gauge e covariante por transformações de Lorentz e transformações gerais de coordenadas.

Da definição do tensor energia-momento, obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) = & \frac{i}{4} \left[\bar{\psi}(x)\gamma_\nu(x)\mathcal{D}_\mu\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_\mu(x)\mathcal{D}_\nu\psi(x) \right. \\ & \left. - (\mathcal{D}_\mu^*\bar{\psi}(x))\gamma_\nu(x)\psi(x) - (\mathcal{D}_\nu^*\bar{\psi}(x))\gamma_\mu(x)\psi(x) \right], \end{aligned} \quad (2.86)$$

onde, aqui $\mathcal{D} = \nabla_\mu + ieA_\mu$.

CAPÍTULO 3

Teoria Quântica de Campos

Neste capítulo, iremos revisar o formalismo de quantização dos campos escalares e fermiônicos. Os campos serão tratados, em cada ponto do espaço, como variáveis dinâmicas e faremos a quantização dos mesmos utilizando o formalismo canônico, generalizando assim, a mecânica clássica de um sistema de partículas e sua quantização, para um sistema contínuo.

Sabemos que as equações de campo são obtidas por meio do princípio de Hamilton, através de uma densidade de Lagrangeana e quantizaremos os campos impondo relações de comutação, para o caso de campos bosônicos, e relações de anti-comutação, no caso de campos fermiônicos.

3.1 Quantização do Campo de Klein-Gordon

3.1.1 Quantização Canônica

Iniciaremos, considerando um sistema descrito por vários campos, denotados por $\varphi_r(x)$, $r = 1, 2, 3, \dots, N$. Onde o índice r pode rotular componentes ou se referir a campos independentes. Admitimos que as equações de campo são obtidas a partir do princípio

variacional de uma ação que envolve a densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\alpha \varphi_r(x)), \quad (3.1)$$

que depende dos campos e de suas primeiras derivadas.

De modo a fazermos a quantização do campo utilizando o formalismo canônico, iremos, primeiramente definir as variáveis canonicamente conjugadas e em seguida, promovê-las a operadores impondo as relações de comutação. Aqui, estaremos tratando um sistema com um número infinito de graus de liberdade, que corresponde aos valores do campo em cada ponto do espaço. Como este sistema pode ser aproximado para um sistema com enumeráveis graus de liberdade, isso nos permite tomar em seguida o limite do contínuo, ou seja, $\delta \vec{x}_i \rightarrow 0$.

Iremos considerar um sistema em um determinado instante de tempo t e decompor o espaço tridimensional em células de volumes iguais, denotadas por $\delta \vec{x}_i$, rotuladas pelos índices $i = 1, 2, \dots$. Os valores dos campos serão aproximados por seus respectivos valores no centro de cada célula ($\vec{x} = \vec{x}_i$). De modo que, o sistema passa a ser descrito pelo conjunto de coordenadas generalizadas

$$q_{ri} \equiv \varphi_r(i, t) \equiv \varphi_r(\vec{x}_i, t), \quad r = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Escrevendo as derivadas espaciais dos campos como as diferenças dos campos localizados em sítios vizinhos, rotulados por i e i' , a Lagrangeana do sistema discreto é escrita como

$$L(t) = \sum_i \delta \vec{x}_i \mathcal{L}(\varphi_r(i, t), \dot{\varphi}_i(i, t), \varphi_r(i', t)), \quad (3.3)$$

onde $\dot{\varphi}_i(i, t) \equiv \partial \varphi_r(i, t) / \partial t$. Definimos o momento conjugado a q_{ri} como

$$p_{ri} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ri}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_r(i, t)} \equiv \pi_r(i, t) \delta \vec{x}_i, \quad (3.4)$$

onde

$$\pi_r(i, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\varphi}_r}. \quad (3.5)$$

Tomando o limite do contínuo, $\delta \vec{x}_i \rightarrow 0$, temos a definição do momento conjugado a φ_r , que é dado por

$$\pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_r}. \quad (3.6)$$

Neste limite, a Lagrangeana do sistema é descrita por

$$L(t) = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}(\varphi_r(\vec{x}, t), \partial_\alpha(\vec{x}, t)). \quad (3.7)$$

A transição da teoria clássica para a teoria quântica, se dá pela interpretação das coordenadas e o momento conjugado definidos pelas Eqs. (3.2) e (3.5), respectivamente, como operadores de Heisenberg obedecendo às relações de comutação canônica

$$[\hat{\varphi}_r(j, t), \hat{\pi}_s(j', t)] = i \frac{\delta_{rs} \delta_{jj'}}{\delta \vec{x}_j} \quad (3.8)$$

$$[\hat{\varphi}_r(j, t), \hat{\varphi}_s(j', t)] = [\hat{\pi}_r(j, t), \hat{\pi}_s(j', t)] = 0. \quad (3.9)$$

Tomando o limite do contínuo, as Eqs. (3.8) e (3.9), tornam-se as relações de comutação para os campos, dadas por

$$[\hat{\varphi}_r(\vec{x}, t), \hat{\pi}_s(\vec{x}', t)] = i \delta_{rs} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.10)$$

e

$$[\hat{\varphi}_r(\vec{x}, t), \hat{\varphi}_s(\vec{x}', t)] = [\hat{\pi}_r(\vec{x}, t), \hat{\pi}_s(\vec{x}', t)] = 0, \quad (3.11)$$

visto que, no limite $\delta \vec{x}_j \rightarrow 0$, $\delta_{jj'}/\delta \vec{x}_j$ torna-se a função delta de Dirac tri-dimensional $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, estando os pontos $\vec{x}$ e $\vec{x}'$ nas células j e j' , respectivamente.

3.1.2 O campo real de Klein-Gordon

Sabemos que um campos escalar possui apenas momento angular orbital, não possuindo momento angular relacionado ao spin, ou seja, representa partículas com spin nulo [67]. Iniciaremos, considerando que o campo seja real, que descreve partículas eletricamente neutras.

Para partículas com massa de repouso m , podemos relacionar energia e momento, de acordo com

$$E^2 = m^2 + \vec{p}^2. \quad (3.12)$$

Para uma função de onda escalar $\varphi(x)$, que descreve as partículas, das relações da mecânica quântica não relativística

$$\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} \quad , \quad E \rightarrow i\partial/\partial t \quad (3.13)$$

obtemos a equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0, \quad (3.14)$$

que pode ser obtida a partir da densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) + m^2 \varphi^2(x)), \quad (3.15)$$

com o momento conjugado, de acordo com a Eq. (3.6), dado por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(x). \quad (3.16)$$

No processo de quantização, o campo $\varphi(x)$ torna-se um operador hermitiano, $\varphi^\dagger = \varphi$, satisfazendo as relações de comutação dadas pelas Eqs. (3.10) e (3.11)

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\varphi}(\vec{x}', t)] &= i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\varphi}(\vec{x}', t)] &= [\hat{\dot{\varphi}}(\vec{x}, t), \hat{\dot{\varphi}}(\vec{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para estabelecer uma relação com partículas, expandimos $\varphi(x)$ em um conjunto completo de soluções da equação de Klein-Gordon

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}^+(x) + \hat{\varphi}^-(x), \quad (3.18)$$

onde

$$\hat{\varphi}^+(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} a(\vec{k}) e^{ikx} \quad (3.19)$$

e

$$\hat{\varphi}^-(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} a^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx}. \quad (3.20)$$

Nas equações acima, $a(\vec{k})$ e $a^\dagger(\vec{k})$ são operadores de aniquilação e criação de bósons, respectivamente, satisfazendo a relações de comutação.

O campo $\hat{\varphi}(x)$ possui infinitos e contínuos graus de liberdade. Afim de simplificar o problema, consideramos que o campo escalar está dentro de um cubo de lados L e, portanto, volume $V = L^3$, satisfazendo condições de contorno periódicas. Então, $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$, com $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, sendo inteiros. Desta maneira, o campo $\hat{\varphi}(x)$ pode ser representado como uma

série de Fourier como foi feito acima, ou seja, ele pode ser especificado por um conjunto enumerável de coeficientes de Fourier, desta maneira obtemos a descrição do campo em termos de infinitos, porém enumeráveis graus de liberdade. Com isso, obtemos a seguinte relação de dispersão

$$k^0 \equiv \omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}. \quad (3.21)$$

A partir da Eq. (3.18) e das relações de comutação, obtemos as relações de comutação para os operadores $a(\vec{k})$ e $a^\dagger(\vec{k})$, dadas por

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \\ [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] &= [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Note que estas relações são as mesmas para os operadores escada do oscilador harmônico simples da mecânica quântica não-relativística. Podemos construir o espaço de Fock, que é o espaço associado ao de Hilbert, também denominado de estado de ocupação, fazendo a definição do estado de vácuo, ou seja, de nenhuma partícula, $|0\rangle$, normalizado e satisfazendo a seguinte relação

$$a(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad \text{para todo } \vec{k}, \quad (3.23)$$

ou expressa em termos dos operadores de campo

$$\varphi^\dagger(x)|0\rangle = 0, \quad \text{para todo } x. \quad (3.24)$$

Sendo assim, podemos construir o estado de n -partículas no nível quântico k , através de sucessivas aplicações do operador $a^\dagger(\vec{k})$. E este estado normalizado é dado por

$$|n(\vec{k})\rangle = \frac{[a^\dagger(\vec{k})]^{n(\vec{k})}}{\sqrt{n(\vec{k})!}}|0\rangle. \quad (3.25)$$

Temos que, o operador número de partículas no estado k é dado por

$$\hat{N}(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}), \quad (3.26)$$

que aplicado ao estado $|n(\vec{k})\rangle$ possui auto-valores $n(\vec{k})$, ou seja

$$\hat{N}|n(\vec{k})\rangle = n(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle, \quad n(\vec{k}) = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Generalizando o oscilador harmônico, podemos interpretar os operadores $a^\dagger(\vec{k})$ e $a(\vec{k})$, como os operadores criação e aniquilação de partículas no modo $\vec{k}$.

Podemos obter os operadores Hamiltoniano e momento do campo real de Klein-Gordon a partir das integrais espaciais das componentes T_{00} e T_{0i} do tensor energia-momento dado pela Eq. (2.24), dadas por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} [\hat{\dot{\phi}}^2 + (\nabla\hat{\phi})^2 + m^2\hat{\phi}^2] \quad (3.28)$$

e

$$\hat{\vec{P}} = - \int d^3\vec{x} \hat{\dot{\phi}} \nabla \hat{\phi}. \quad (3.29)$$

Substituindo as Eqs. (3.18), (3.19) e (3.20) nas integrais acima, obtemos

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (3.30)$$

e

$$\hat{\vec{P}} = \sum_k \vec{k} \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right), \quad (3.31)$$

confirmando a interpretação de $[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})]$ como operadores de número para partículas com vetor de onda $\vec{k}$. Também a partir das duas últimas equações, notamos que o momento $\hat{\vec{P}}$ é uma constante de movimento para o campo de Klein-Gordon livre.

As auto-funções do operador Hamiltoniano dado pela Eq. (3.30), são dadas por

$$|...n(\vec{k})...\rangle = \prod_k |n(\vec{k})\rangle, \quad (3.32)$$

com auto-valores

$$\sum_k \omega_k \left(n(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right). \quad (3.33)$$

A partir da equação anterior, notamos que o estado de energia mais baixo do campo de Klein-Gordon, é o estado de vácuo $|0\rangle$, que tem uma energia infinita $\frac{1}{2} \sum_k \omega_k$. Porém, este não é um resultado físico, já que o que é sempre medido é a diferença de energia. Para prosseguir, devemos subtrair os valores da energia do estado do vácuo, de um determinado estado físico, ou seja, devemos fazer $E_n - E_0$. Este processo é chamado de renormalização.

O denominado ordenamento normal é o procedimento formal de renormalização e

consiste em ordenar os operadores de aniquilação a direita dos operadores de criação, de acordo com

$$: a(\vec{k}_1)a(\vec{k}_2)a^\dagger(\vec{k}_3) := a^\dagger(\vec{k}_3)a(\vec{k}_1)a(\vec{k}_2) \quad (3.34)$$

Redefinindo os observáveis como produtos normais, seus valores esperados no estado de vácuo são nulos, e as Eqs. (3.30) e (3.31) tornam-se

$$\hat{P}^\alpha = \left(\hat{H}, \hat{\vec{P}} \right) = \sum_k k^\alpha a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}), \quad (3.35)$$

onde $k^\alpha = (\omega_k, \vec{k})$.

As partículas do campo de Klein-Gordon são bósons, obedecendo a estatística de Bose-Einstein, e os números de ocupação podem tomar quaisquer valores $n(\vec{k}) = 0, 1, 2, \dots$. Outra característica dos estados de bósons, é que eles são simétricos sob a mudança dos rótulos da partículas, ou seja

$$a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')|0\rangle = a^\dagger(\vec{k}')a^\dagger(\vec{k})|0\rangle. \quad (3.36)$$

3.1.3 O campo complexo de Klein-Gordon

Na seção anterior, vimos que o campo real de Klein-Gordon descreve uma coleção de partículas com spin 0 e sem carga. Podemos generalizar o que foi visto na seção anterior considerando partículas que contêm um grau de liberdade interno. Uma simples generalização é considerar um duplete de partículas, sendo descrito por um campo complexo, $\varphi \neq \varphi^*$, fazendo com que os campos deixem de ser hermitianos.

Para o campo complexo de Klein-Gordon, a densidade de Lagrangeana dada pela Eq. (2.10) é reescrita da seguinte maneira

$$\mathcal{L} =: (\partial_\mu \hat{\varphi}^\dagger \partial^\mu \hat{\varphi} - m^2 \hat{\varphi}^\dagger \hat{\varphi}) :, \quad (3.37)$$

onde $\hat{\varphi}$ e $\hat{\varphi}^\dagger$ são tratados como campos independentes. Das equações de Euler-Lagrange encontramos as equações de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0 \quad e \quad (\square + m^2)\varphi^\dagger(x) = 0. \quad (3.38)$$

Os campos canonicamente conjugados a φ e $\varphi^\dagger$ são

$$\hat{\pi}(x) = \hat{\varphi}^\dagger(x) \quad e \quad \hat{\pi}^\dagger(x) = \hat{\varphi}(x) \quad (3.39)$$

e as relações de comutação nas Eqs. (3.10) e (3.11), tornam-se

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\varphi}^\dagger(\vec{x}', t)] &= [\hat{\varphi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\varphi}(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\varphi}(\vec{x}', t)] &= [\hat{\varphi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\varphi}^\dagger(\vec{x}', t)] = [\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\varphi}(\vec{x}', t)] = \\ &[\hat{\varphi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\varphi}^\dagger(\vec{x}', t)] = [\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\varphi}(\vec{x}', t)] = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

De maneira similar a Eq. (3.18), escrevemos a expansão de Fourier para os campos

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}^+(x) + \hat{\varphi}^-(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \left[a(\vec{k})e^{ikx} + b^\dagger(\vec{k})e^{-ikx} \right] \quad (3.41)$$

e

$$\hat{\varphi}^\dagger(x) = \hat{\varphi}^{\dagger+}(x) + \hat{\varphi}^{\dagger-}(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \left[b(\vec{k})e^{ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{-ikx} \right]. \quad (3.42)$$

Utilizando as relações de comutação acima e as Eqs. (3.41) e (3.42), obtemos as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \\ [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] &= [b(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [a(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

As relações acima nos permitem interpretar, $a(\vec{k})$, $a^\dagger(\vec{k})$, $b(\vec{k})$ e $b^\dagger(\vec{k})$, como operadores de operação e criação de dois tipos de partículas, denominadas de partículas tipo a e partículas tipo b . E os operadores

$$\hat{N}_a(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) \quad , \quad \hat{N}_b(\vec{k}) = b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \quad (3.44)$$

são os operadores de número, com autovalores $0, 1, 2, \dots$. Podemos, novamente, construir o espaço de Fock a partir do estado de vácuo, sendo representado por

$$a(\vec{k})|0\rangle = b(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad \text{para todo } \vec{k}. \quad (3.45)$$

Expresso em termos dos operadores de criação e aniquilação, o operador energia-momento é escrito como

$$\hat{P}^\alpha = (\hat{H}, \hat{\vec{P}}) = \sum_k k^\alpha (\hat{N}_a(\vec{k}) + \hat{N}_b(\vec{k})). \quad (3.46)$$

Note que a densidade de Lagrangeana dada pela Eq. (3.37) é invariante sob uma transformação global de fase, de acordo com

$$\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\varphi} e^{-i\alpha q} \quad \text{e} \quad \hat{\varphi}^\dagger \rightarrow \hat{\varphi}^\dagger e^{i\alpha q}. \quad (3.47)$$

Deste fato, como consequência, segue a conservação da carga $\hat{Q}$, dada por

$$\hat{Q} = -iq \int d^3x : [\hat{\varphi}^\dagger(x) \hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}^\dagger(x)] :. \quad (3.48)$$

A densidade de corrente correspondente é dada por

$$s^\alpha(x) = (\rho(x), \vec{j}(x)) = -iq : \left[\frac{\partial \hat{\varphi}^\dagger}{\partial x_\alpha} \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_\alpha} \hat{\varphi}^\dagger \right] :, \quad (3.49)$$

a qual satisfaz a equação da continuidade

$$\frac{\partial s^\alpha(x)}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (3.50)$$

Expressa em termos dos operadores de criação e absorção, a Eq. (3.48), torna-se

$$\hat{Q} = q \sum_k [N_a(\vec{k}) - N_b(\vec{k})]. \quad (3.51)$$

A equação acima nos permite associar as cargas $+q$ e $-q$ com as partículas a e b , respectivamente, sendo a única coisa que difere as duas partículas. Além disso, a teoria é completamente simétrica com relação a elas, ou seja, trocando os sinais das partículas vemos que a carga $\hat{Q}$ muda de sinal. As partículas a e b são interpretadas como partícula e anti-partícula.

3.2 Quantização do campo fermiônico

Vimos anteriormente, na quantização do campo escalar, que os operadores de campo satisfazem relações de comutação, obedecendo a estatística de Bose-Einstein. No processo de quantização do campo fermiônico, iremos notar que os operadores irão satisfazer relações de anti-comutação, e serão levados a obedecer à estatística de Fermi-Dirac.

3.2.1 A representação de número para férmions

Diferente do que foi feito anteriormente, vamos supor que os operadores $a_r, a_r^\dagger, r = 1, 2, \dots$, satisfazem agora à relações de anti-comutações, dadas por

$$\begin{aligned} \{a_r, a_s^\dagger\} &= \delta_{rs} \\ \{a_r, a_s\} &= \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Em particular, temos que

$$(a_r)^2 = (a_r^\dagger)^2 = 0. \quad (3.53)$$

Definindo o operador N_r como

$$N_r = a_r^\dagger a_r, \quad (3.54)$$

podemos utilizar as relações de anti-comutação acima para mostrar que

$$\begin{aligned} [N_r, a_s] &= -\delta_{rs} a_s \\ [N_r, a_s^\dagger] &= \delta_{rs} a_s^\dagger, \end{aligned} \quad (3.55)$$

de modo que, nos permite interpretar novamente $a_r^\dagger, a_r$ e N_r como operadores de criação, aniquilação e número de partículas, respectivamente. Podemos mostrar que também a partir das relações de anti-comutação que

$$N_r^2 = a_r^\dagger a_r a_r^\dagger a_r = a_r^\dagger (1 - a_r^\dagger a_r) a_r = N_r, \quad (3.56)$$

de onde pode-se mostrar que

$$N_r(N_r - 1) = 0. \quad (3.57)$$

Concluimos que, se os operadores de criação e aniquilação anti-comutarem, o operador número de partículas possui apenas dois auto-valores, sendo $n_r = 0$ e $n_r = 1$, que mostra claramente que estamos tratando aqui com a estatística de Fermi-Dirac.

Podemos definir novamente o estado de vácuo como

$$a_r|0\rangle = 0. \quad (3.58)$$

O estado onde uma partícula encontra-se no estado r é dado por

$$|1_r\rangle = a_r^\dagger|0\rangle, \quad (3.59)$$

e para o estado de duas partículas, com $r \neq s$

$$|1_r 1_s\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger|0\rangle = -a_s^\dagger a_r^\dagger|0\rangle = -|1_s 1_r\rangle, \quad (3.60)$$

de onde conclui-se que, os estados são anti-simétricos sob a troca de partículas, como é exigido para férmions. Para o caso em que $r = s$, temos que

$$|2_r\rangle = (a_r^\dagger)^2|0\rangle = 0, \quad (3.61)$$

que está de acordo com o princípio de exclusão de Pauli, no qual diz que duas partículas não podem estar no mesmo estado quântico.

3.2.2 A segunda quantização

Sabemos do capítulo anterior que, o campo fermiônico, descreve partículas de spin $1/2$ e que este campo é um campo espinorial possuindo 4-componentes. Também, a partir do capítulo anterior, vimos que a equação que rege a dinâmica do campo fermiônico, a equação de Dirac, é uma equação diferencial de primeira ordem e matricial.

Para um elétron livre, com massa de repouso m a equação de Dirac é dada por

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0, \quad (3.62)$$

sendo γ_μ as matrizes de Dirac 4x4, satisfazendo a álgebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (3.63)$$

e as condições de hermiticidade $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ e $\gamma^{j\dagger} = -\gamma^j$ para $j = 1, 2, 3$, podendo ser combinadas em

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (3.64)$$

O campo adjunto definido como $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0$ satisfaz a equação de Dirac adjunta

$$i\partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu + m\bar{\psi}(x) = 0. \quad (3.65)$$

As equações para o campo ψ e seu adjunto podem ser derivadas a partir da densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)] - m\bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (3.66)$$

De modo similar ao feito para o campo bosônico, a quantização do campo fermiônico, se dá através da expansão do campo para um conjunto completo de soluções da equação de Dirac para, em seguida, promovê-lo a operador de modo que satisfaça as relações de anti-comutação.

Vamos considerar, novamente, que o campo encontra-se em um cubo de lado L , cujo volume é $V = L^3$, obedecendo condições de contornos periódicas. Um conjunto completo de estados de ondas planas pode então ser definido como segue. Para cada momento $\vec{p}$, permitido pelas condições de contorno periódicas, e energia positiva dada por

$$E_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \quad (3.67)$$

a equação de Dirac possui quatro soluções independentes. Estas soluções serão escritas como

$$u_r(\vec{p}) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} \quad , \quad v_r(\vec{p}) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}}, \quad r = 1, 2, \quad (3.68)$$

ou seja, $u_r(\vec{p})$ e $v_r(\vec{k})$ são espinores constantes satisfazendo as equações

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u_r(\vec{p}) = 0 \quad , \quad (\gamma^\mu p_\mu + m)v_r(\vec{p}) = 0 \quad r = 1, 2. \quad (3.69)$$

Os espinores $u_r(\vec{p})$ e $v_r(\vec{p})$ são normalizados usando

$$u_r^\dagger(\vec{p})u_r(\vec{p}) = v_r^\dagger(\vec{p})v_r(\vec{p}) = \frac{E_p}{m}, \quad (3.70)$$

e satisfazem as seguintes relações de ortonormalidade

$$\begin{aligned} u_r^\dagger(\vec{p})u_s(\vec{p}) &= v_r^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \frac{E_p}{m}\delta_{rs}, \\ u_r^\dagger(\vec{p})v_s(-\vec{p}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.71)$$

de modo que os estados dados pelas Eqs. (3.68) formam um conjunto ortonormal completo de soluções da equação de Dirac.

Para quantizar o campo fermiônico, iremos expandir o campo de Dirac em termos de um conjunto completo de estados de ondas planas

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \hat{\psi}^+(x) + \hat{\psi}^-(x) \\ \hat{\psi}(x) &= \sum_{r,\vec{p}} \left(\frac{m}{VE_p} \right)^{1/2} \left[c_r(\vec{p})u_r(\vec{p})e^{-ipx} + d_r^\dagger(\vec{p})v_r(\vec{p})e^{ipx} \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

e também para o campo adjunto

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\psi}}(x) &= \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \\ \hat{\bar{\psi}}(x) &= \sum_{r,\vec{p}} \left(\frac{m}{VE_p} \right)^{1/2} \left[d_r(\vec{p})\bar{v}_r(\vec{p})e^{-ipx} + c_r^\dagger(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p})e^{ipx} \right], \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde $\bar{u}_r = u_r^\dagger \gamma^0$. As somas nas equações acima são sobre todos os momentos permitidos $\vec{p}$ e os estados de spin, rotulados por $r = 1, 2$.

Impondo as relações de anti-comutação para os coeficientes da expansão, temos que

$$\{c_r(\vec{p}), c_s^\dagger(\vec{p}')\} = \{d_r(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{rs}\delta_{\vec{p},\vec{p}'}, \quad (3.74)$$

e todos os outros anti-comutadores, temos

$$\begin{aligned} \{c_r, c_s\} &= \{c_r^\dagger, c_s^\dagger\} = \{d_r, d_s\} = \{d_r^\dagger, d_s^\dagger\} = 0, \\ \{c_r, d_s\} &= \{c_r, d_s^\dagger\} = \{c_r^\dagger, d_s\} = \{c_r^\dagger, d_s^\dagger\} = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Para o caso de definirmos os operadores

$$N_r(\vec{p}) = c_r^\dagger(\vec{p})c_r(\vec{p}) \quad , \quad \bar{N}_r(\vec{p}) = d_r^\dagger(\vec{p})d_r(\vec{p}), \quad (3.76)$$

a interpretação de $c_r, c_r^\dagger, N_r$ e $d_r, d_r^\dagger, \bar{N}_r$ como operadores absorção, criação e número, de dois

tipos de partículas, ambas férmions, a partir das relações de anti-comutação.

O estado de vácuo é definido como

$$c_r(\vec{p})|0\rangle = d_r(\vec{p})|0\rangle = 0, \text{ para todo } \vec{p}, \text{ e } r = 1, 2, \quad (3.77)$$

ou de modo equivalente

$$\hat{\psi}^+(x)|0\rangle = \hat{\bar{\psi}}^+(x)|0\rangle = 0, \text{ para todo } x. \quad (3.78)$$

E novamente podemos gerar os estados contendo partículas a partir de seguidas aplicações do operador de criação ao estado de vácuo. Os estados do operador número de ocupação são $|\dots n(\vec{k})\dots\rangle$, com $n(\vec{k}) = 0, 1$.

Similarmente ao caso do campo bosônico, obtemos o operador hamiltoniano e momento a partir das componentes T_{00} e T_{0i} do tensor energia-momento, em conjunto com a equação de movimento. Diante disso, obtemos

$$\hat{H} = \int d^3\vec{x} : \left\{ \hat{\psi}(x) [-i\gamma^j \partial_j + m] \hat{\psi}(x) \right\} : . \quad (3.79)$$

Usando as Eqs. (3.72) e (3.73) e as condições de ortonormalidade dada pela Eq. (3.68), encontramos para os operadores hamiltoniano e momento

$$\hat{H} = \sum_{r,\vec{p}} E_p \left[\hat{N}_r(\vec{p}) + \hat{\bar{N}}_r(\vec{p}) \right] \quad (3.80)$$

e

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{r,\vec{p}} \vec{p} \left[\hat{N}_r(\vec{p}) + \hat{\bar{N}}_r(\vec{p}) \right]. \quad (3.81)$$

Como a densidade de lagrangeana, dada pela Eq. (3.66), é invariante sob transformações de gauge locais, existe uma densidade de corrente de Noether conservada, dada por

$$\hat{j}^\mu = q \hat{\bar{\psi}} \gamma^\mu \hat{\psi}, \quad (3.82)$$

implicando em uma carga conservada

$$\hat{Q} = q \sum_{r,\vec{p}} \left[\hat{N}_r(\vec{p}) - \hat{\bar{N}}_r(\vec{p}) \right]. \quad (3.83)$$

Admitindo que q seja a carga do elétron e identificando m como sendo a massa do elétron, interpretamos as partículas associadas aos operadores c e d como elétrons e pósitrons, respectivamente.

3.3 Mecânica Estatística Quântica

Nesta seção, iremos fazer uma pequena revisão do ensemble grande canônico da Mecânica Estatística. Esta análise será útil no capítulo 5, quando trataremos do condensado e correntes fermiônicas a temperatura finita.

Um sistema aberto pode trocar calor e matéria com o meio em que está inserido, e portanto, a energia e o número de partículas irão flutuar. Para um sistema aberto em equilíbrio, fixamos a energia média $\langle E \rangle$, e o número médio de partículas, $\langle N \rangle$. Para obter a densidade de probabilidade no equilíbrio deste sistema, iremos fazer uso do método dos multiplicadores de Lagrange para extremizar a entropia de Gibbs sujeita às condições que serão dadas a seguir [68].

Primeiro, exigimos que a normalização seja dada por

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \quad (3.84)$$

onde $\hat{\rho}$ é o operador densidade de probabilidade.

Para as outras condições, relembramos que a média do ensemble para qualquer quantidade física, representada por um operador A , pode ser calculada utilizando a seguinte equação

$$\langle \bar{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}). \quad (3.85)$$

Deste modo, as outras condições que o sistema deve obedecer, é que tenha o valor médio da energia tenha um valor fixo, de modo que

$$\langle \bar{H} \rangle = \text{Tr}(\hat{E}\hat{\rho}), \quad (3.86)$$

onde $\hat{H}$ é a hamiltoniana do sistema. Finalmente, a última condição é que o número médio de partículas também tenha um valor fixo, logo

$$\langle \bar{N} \rangle = \text{Tr}(\hat{N}\hat{\rho}), \quad (3.87)$$

onde $\hat{N}$ é o operador número de partículas.

Agora, podemos determinar o operador densidade de probabilidade, $\hat{\rho}$, que extremiza a entropia de Gibbs, que para sistemas quânticos é dada por [68]

$$S = -k_B \text{Tr} [\hat{\rho} \ln(\hat{\rho})], \quad (3.88)$$

sujeitas às condições dadas pelas Eqs. (3.84), (3.86) e (3.87). Na equação acima, temos que k_B é a constante de Boltzmann. A condição de extremização é

$$\begin{aligned} & \delta \left\{ \text{Tr} \left[\alpha_0 \hat{\rho} + \alpha_E \hat{H} \hat{\rho} + \alpha_N \hat{N} \hat{\rho} - k_B \hat{\rho} \ln(\hat{\rho}) \right] \right\} \\ &= \text{Tr} \left[\left\{ (\alpha_0 - k_B) \hat{I} + \alpha_E \hat{H} + \alpha_N \hat{N} - k_B \ln(\hat{\rho}) \right\} \delta \hat{\rho} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.89)$$

onde α_0, α_E e α_N são os multiplicadores de Legendre. Como $\delta \hat{\rho}$ é arbitrário, temos

$$(\alpha_0 - k_B) \hat{I} + \alpha_E \hat{H} + \alpha_N \hat{N} - k_B \ln(\hat{\rho}) = 0. \quad (3.90)$$

Podemos usar, agora, a equação acima e as Eqs. (3.84), (3.86) e (3.87) para determinar os multiplicadores de Legendre. A Eq. (3.84) nos permite introduzir a grande função de partição

$$Z(\alpha_E, \alpha_N) = \exp \left(1 - \frac{\alpha_0}{k_B} \right) = \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{\alpha_E}{k_B} \hat{H} + \frac{\alpha_N}{k_B} \hat{N} \right) \right], \quad (3.91)$$

que relaciona α_0 , com α_E e α_N . Para determinar α_E e α_N multiplicamos a equação acima por $\hat{\rho}$ e tomamos o traço e, com isso, obtemos

$$-k_B \ln[Z(\alpha_E, \alpha_N)] + \alpha_E \langle E \rangle + \alpha_N \langle N \rangle + S = 0. \quad (3.92)$$

Comparando a equação acima com a equação fundamental para o grande potencial $\Omega = U - TS - \mu N$, podemos identificar que $\alpha_E = -1/T$ e $\alpha_N = \mu/T$, sendo μ o potencial químico e

$$\Omega(T, \mu) = -k_B T \ln[Z_\mu(T)], \quad (3.93)$$

que é a equação fundamental para o grande potencial, sendo escrita em termos da grande função de partição, que é definida como

$$Z_\mu(T) = e^{-\beta \Omega(T, \mu)} = \text{Tr} \left(e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right), \quad (3.94)$$

com $\beta = 1/k_B T$, onde T é a temperatura absoluta. O operador densidade de probabilidade pode ser escrito como

$$\hat{\rho} = e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N}-\Omega)} = \frac{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{\text{Tr}\left(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\right)}. \quad (3.95)$$

Se consideramos um sistema com partículas idênticas não interagentes, conhecido em termodinâmica como um gás ideal generalizado, temos que a energia de uma partícula é ϵ_i . Logo, a hamiltoniana será [69]

$$\hat{H} = \sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i. \quad (3.96)$$

Usando a Eq. (3.85) podemos encontrar o valor médio dos números de ocupação $\hat{N}_i$. Com isso, temos

$$\langle \hat{N}_i \rangle = \langle a_i^\dagger a_i \rangle = \frac{\text{Tr}(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} a_i^\dagger a_i)}{Z}. \quad (3.97)$$

Usando as Eqs. (3.55) e a seguinte relação

$$e^A B e^{-A} = e^\gamma B, \quad (3.98)$$

onde γ é uma constante definida por $[A, B] = \gamma B$, encontramos que

$$\text{Tr}\left(e^{-\beta(H-\mu N)} a_i^\dagger a_i\right) = e^{-\beta(\epsilon_i-\mu)} \text{Tr}\left(e^{-\beta(H-\mu N)} a_i a_i^\dagger\right). \quad (3.99)$$

Se usarmos as relações de comutação para bósons ou de anti-comutação para férmions, obtemos

$$\text{Tr}\left(e^{-\beta(H-\mu N)} a_i^\dagger a_i\right) = e^{-\beta(\epsilon_i-\mu)} \text{Tr}\left(e^{-\beta(H-\mu N)} (1 \mp a_i^\dagger a_i)\right), \quad (3.100)$$

onde o sinal superior é usado para bósons e o inferior usado para férmions. Combinando a equação anterior com a Eq. (3.95), encontramos

$$\langle \bar{N}_i \rangle = \langle a_i^\dagger a_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i-\mu)} \mp 1}. \quad (3.101)$$

Como $\beta > 0$, segue-se que para sistemas bosônicos devemos ter sempre $\mu < \epsilon_i$ para todos os níveis, e consequentemente

$$\mu \leq \epsilon_0, \quad (3.102)$$

sendo ϵ_0 a energia do estado fundamental do estado de uma partícula. Entretanto, para

férmions não existe restrições para o potencial químico.

CAPÍTULO 4

Correntes bosônicas

Neste capítulo, iremos apresentar uma das nossas contribuições que é a análise das densidades de correntes bosônicas induzidas por um fluxo magnético em um espaço-tempo com $(D+1)$ dimensões de uma corda cósmica, considerando que o eixo z é compactificado a um círculo [60]. Iremos, primeiramente, calcular a função de Wightman de frequências positivas para um campo bosônico massivo. Através desta função, desenvolveremos os cálculos das densidades de correntes renormalizadas induzidas pelo campo magnético e pela compactificação do eixo da corda.

4.1 Função de Wightman

Consideramos aqui um espaço-tempo com $(D + 1)$ dimensões de uma corda cósmica idealizada, sendo $D \geq 3$. Fazendo uso das coordenadas cilíndricas generalizadas $(x^1, x^2, \dots, x^D) = (r, \phi, z, x^4, \dots, x^D)$, onde a corda cósmica está localizada na hipersuperfície $(D-2)$ -dimensional, a geometria correspondente é descrita pelo elemento de linha,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2 - \sum_{i=4}^D (dx^i)^2 . \quad (4.1)$$

Onde as coordenadas assumem os seguintes valores: $r \geq 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi/q$ e $-\infty < (t, x_i) < +\infty$, para $i = 4, \dots, D$.¹ O parâmetro $q \geq 1$ garante a presença da corda cósmica. Além disso, assumimos que a direção ao longo do eixo z é compactificada a um círculo com comprimento L , logo $0 \leq z \leq L$. No caso em $D = 3$, $q^{-1} = 1 - 4\mu_0$, com μ_0 sendo a densidade linear de massa da corda.

Para calcular a densidade de corrente induzida do vácuo, $\langle j_\mu \rangle$, associada com um campo escalar quântico carregado, $\varphi(x)$, na presença de um fluxo magnético ao longo do núcleo da corda, devemos calcular primeiramente o conjunto completo de autofunções de onda bosônicas normalizadas. A equação que governa a dinâmica de uma campo bosônico quântico carregado com massa m , em um espaço-tempo curvo e na presença de um potencial eletromagnético, A_μ , é dada por

$$(\mathcal{D}^2 + m^2 + \xi \mathcal{R}) \varphi(x) = 0, \quad (4.2)$$

onde o operador diferencial acima é definido como

$$\mathcal{D}^2 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} D_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} D_\nu \right), \quad (4.3)$$

sendo $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ e $g = \det(g_{\mu\nu})$. Consideramos também a presença de um acoplamento não-mínimo, ξ , entre o campo e a geometria representado pelo escalar de Ricci, $\mathcal{R}$. Entretanto, para uma corda cósmica infinitamente fina, $\mathcal{R} = 0$ para $r \neq 0$.

Na análise que iremos desenvolver, assumiremos que a direção ao longo do eixo z é compactificada em um círculo de comprimento L : $0 \leq z \leq L$. A compactificação é dada pela imposição da condição de quasi-periodicidade do campo de matéria, dada por

$$\varphi(t, r, \phi, z + L, x^4, \dots, x^D) = e^{2\pi i \beta} \varphi(t, r, \phi, z, x^4, \dots, x^D), \quad (4.4)$$

com uma fase constante β , $0 \leq \beta \leq 1$. Os casos especiais em que $\beta = 0$ e $\beta = 1/2$, correspondem aos campos *untwisted* e *twisted*, respectivamente. Adicionalmente, consideramos a presença do seguinte potencial vetor

$$A_\mu = (0, 0, A_\phi, A_z), \quad (4.5)$$

com $A_\phi = -q\Phi_\phi/(2\pi)$ e $A_z = -\Phi_z/L$, sendo Φ_ϕ e Φ_z os fluxos magnéticos correspon-

¹O espaço-tempo padrão de uma corda cósmica é considerado com $D = 3$.

tes. Em teoria quântica de campos a condição dada pela Eq. (4.4) altera o espectro das flutuações do vácuo comparadas com o caso em que não temos dimensões compactificadas, e consequentemente, a densidade de corrente induzida no vácuo sofre uma alteração [31, 32].

No espaço-tempo definido pela Eq. (4.1) na presença do potencial vetor dado acima, a Eq. (4.2) torna-se, com $\mathcal{R} = 0$

$$\left[\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} (\partial_\phi + ieA_\phi)^2 - (\partial_z + ieA_z)^2 - \sum_{i=4}^D \partial_i^2 + m^2 \right] \varphi(x) = 0 . \quad (4.6)$$

A solução de energia positiva para esta equação pode ser obtida considerando o *ansatz*

$$\varphi(x) = CR(r)e^{-i\omega t + iqn\phi + ik_z z + i\vec{k} \cdot \vec{r}_\parallel} , \quad (4.7)$$

onde $\vec{r}_\parallel$ são as coordenadas das dimensões extras, $\vec{k}$ é o momento ao longo destas direções e C é uma constante de normalização. Substituindo a Eq. (4.7) na Eq. (4.6) encontramos que a função radial $R(r)$ deve obedecer a equação diferencial

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R(r) = 0 , \quad (4.8)$$

com

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\omega^2 - \vec{k}^2 - \tilde{k}_z^2 - m^2} , \\ \nu &= qn + eA_\phi , \\ \tilde{k}_z &= k_z + eA_z . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Na presente análise, vamos assumir que as funções de onda obedecem as condições de contorno de Dirichlet no núcleo da corda. A solução regular na origem é $R(r) = J_\nu(\lambda r)$, onde $J_\nu(\lambda r)$ representa a função de Bessel de ordem

$$\nu = \nu_n = q|n + \alpha| \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{eA_\phi}{q} = -\frac{\Phi_\phi}{\Phi_0} , \quad (4.10)$$

e $\Phi_0 = 2\pi/e$ sendo o fluxo quântico. Então, a solução geral é dada por

$$\varphi_\sigma(x) = C J_{q|n+\alpha|}(\lambda r) e^{-i\omega t + iqn\phi + ik_z z + i\vec{k} \cdot \vec{r}_\parallel} . \quad (4.11)$$

A condição de quasi-periodicidade dada pela Eq. (4.4), fornece a discretização do número quântico k_z , como mostrado abaixo

$$k_z = k_l = \frac{2\pi}{L}(l + \beta) \quad \text{com } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.12)$$

Com isso, a energia é dada por

$$\omega = \omega_l = \sqrt{m^2 + \lambda^2 + \tilde{k}_l^2 + \vec{k}^2}, \quad (4.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{k}_z &= \tilde{k}_l = \frac{2\pi}{L}(l + \tilde{\beta}), \\ \tilde{\beta} &= \beta + \frac{eA_z L}{2\pi} = \beta - \frac{\Phi_z}{\Phi_0}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

A constante C é obtida através da condição de normalização [70]

$$i \int d^D x \sqrt{|g|} [\varphi_{\sigma'}^*(x) \partial_t \varphi_{\sigma}(x) - \varphi_{\sigma}(x) \partial_t \varphi_{\sigma'}^*(x)] = \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (4.15)$$

onde do lado direito da equação acima temos a função delta de Dirac para os números quânticos contínuos, λ e $\vec{k}$, e delta de Kronecker para os números quânticos discretos n e k_l . Logo, a partir da Eq. (4.15) encontramos

$$|C|^2 = \frac{q\lambda}{2(2\pi)^{D-2}\omega_l L}. \quad (4.16)$$

Com isso, a função de onda bosônica renormalizada é dada por

$$\varphi_{\sigma}(x) = \left[\frac{q\lambda}{2(2\pi)^{D-2}\omega_l L} \right]^{\frac{1}{2}} J_{q|n+\alpha|}(\lambda r) e^{-i\omega t + iqn\phi + ik_l z + i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\parallel}}. \quad (4.17)$$

As propriedades do estado de vácuo são descritas pela função de Wightman,

$$W(x, x') = \langle 0 | \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}^*(x') | 0 \rangle, \quad (4.18)$$

onde $|0\rangle$ significa o estado de vácuo bosônico. De posse dessa função, podemos avaliar a corrente bosônica induzida. Para a avaliação da função de Wightman de frequência positiva,

expandimos o operador de campo da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= \sum_{\sigma} [\varphi_{\sigma}(x)a_{\sigma} + \varphi_{\sigma}^{*}(x)b_{\sigma}^{\dagger}] \\ \hat{\varphi}^{*} &= \sum_{\sigma} [\varphi_{\sigma}^{*}(x)a_{\sigma}^{\dagger} + \varphi_{\sigma}(x)b_{\sigma}] .\end{aligned}\quad (4.19)$$

Adotando as relações de comutação dadas pela Eq. (3.43), encontramos

$$W(x, x') = \sum_{\sigma} \varphi_{\sigma}(x) \varphi_{\sigma}^{*}(x') , \quad (4.20)$$

onde estamos usando uma notação compacta definida como

$$\sum_{\sigma} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\vec{k} \int_0^{\infty} d\lambda \sum_{l=-\infty}^{+\infty} . \quad (4.21)$$

O conjunto $\{\varphi_{\sigma}(x), \varphi_{\sigma}^{*}(x')\}$, representa o conjunto completo de funções normalizadas satisfazendo a condição dada pela Eq. (4.4). Em nosso caso, as funções dadas pela Eq. (4.17) são especificadas pelo conjunto de números quânticos $\sigma = (n, \lambda, k_l, \vec{k})$, com os valores nos seguintes intervalos $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, -\infty < k^j < +\infty$ com $j = 4, \dots, D, 0 < \lambda < \infty$ e $k_l = 2\pi(l + \beta)/L$ com $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Utilizando a decomposição do operador de campo dada pela Eq. (4.19) com a ajuda da Eq. (4.17), a Eq. (4.20) torna-se

$$\begin{aligned}W(x, x') &= \frac{q}{2L(2\pi)^{D-2}} \sum_{\sigma} e^{iqn\Delta\phi} e^{i\vec{k} \cdot \Delta\vec{r}_{\parallel}} \lambda J_{q|n+\alpha|}(\lambda r) J_{q|n+\alpha|}(\lambda r') \\ &\times \frac{e^{-i\omega_l \Delta t + i k_l \Delta z}}{\omega_l} ,\end{aligned}\quad (4.22)$$

onde $\Delta\phi = \phi - \phi'$, $\Delta\vec{r}_{\parallel} = \vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'_{\parallel}$, $\Delta t = t - t'$ e $\Delta z = z - z'$.

Assim, tendo em mãos a função de Wightman acima, estamos em posição de calcular a densidade de corrente bosônica induzida no vácuo, $\langle j_{\mu} \rangle$. Este cálculo será realizado na próxima seção.

4.2 Corrente bosônica

O operador densidade de corrente bosônica é dado por [71]

$$\begin{aligned}\hat{j}_\mu(x) &= ie [\varphi^*(x) D_\mu \varphi(x) - (D_\mu \varphi)^* \varphi(x)] \\ &= ie [\varphi^*(x) \partial_\mu \varphi(x) - \varphi(x) (\partial_\mu \varphi(x))^*] - 2e^2 A_\mu(x) |\varphi(x)|^2 .\end{aligned}\quad (4.23)$$

O seu valor esperado no vácuo (VEV) pode ser avaliado em termos da função de Wightman, usando a expressão

$$\langle \hat{j}_\mu(x) \rangle = ie \lim_{x' \rightarrow x} \{ (\partial_\mu - \partial_{\mu'}) W(x, x') + 2ie A_\mu W(x, x') \} . \quad (4.24)$$

Este VEV é uma função periódica dos fluxos magnéticos Φ_ϕ e Φ_z , com período igual ao fluxo quântico. Este fato pode ser observado, se escrevermos o parâmetro α na Eq. (4.10) da seguinte maneira

$$\alpha = n_0 + \alpha_0 \text{ com } |\alpha_0| < \frac{1}{2} , \quad (4.25)$$

onde n_0 é um número inteiro. Como a ordem da função de Bessel depende da combinação $n + \alpha = n + n_0 + \alpha_0$, podemos redefinir a soma em n , de modo que neste caso, o VEV da densidade de corrente irá depender somente de α_0 .

4.2.1 Densidade de carga e corrente radial

Iniciaremos com o cálculo da densidade de carga. Devido ao fato de que $A_0 = 0$, temos que

$$\rho(x) = \langle j^0(x) \rangle = ie \lim_{x' \rightarrow x} (\partial_t - \partial_{t'}) W(x, x') . \quad (4.26)$$

Substituindo na equação acima a Eq. (4.22), calculando a derivada temporal e finalmente tomando o limite de coincidência $x' \rightarrow x$, a expressão formal para a densidade de corrente é

$$\rho(x) = \frac{qe}{(2\pi)^{D-2} L} \sum_{\sigma} \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) . \quad (4.27)$$

Note, porém, que a equação acima é divergente. Para conseguirmos um resultado finito e bem definido, temos que regularizar a equação acima introduzindo uma função de corte $e^{-\eta(\lambda^2 + \vec{k}^2 + k_l^2)}$, com o parâmetro de corte $\eta > 0$. Com essa função a soma generalizada fornece um valor finito. No final dos cálculos, devemos tomar o limite em que η vai para zero.

Então, usando a função de corte, a integral sobre a variável λ pode ser calculada com a ajuda de [72], e a contribuição regularizada é dada por

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda e^{-\eta\lambda^2} J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) = \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{r^2}{2\eta}} I_{q|n+\alpha|}(r^2/(2\eta)) , \quad (4.28)$$

com $I_\nu(z)$ sendo a função de Bessel modificada. Para a integral sobre $\vec{k}$ temos

$$\int d\vec{k} e^{-\eta\vec{k}^2} = \left(\frac{\pi}{\eta}\right)^{\frac{(D-3)}{2}} . \quad (4.29)$$

Assim, a densidade de carga regularizada é dada por

$$\rho_{\text{reg}}(x, \eta) = \frac{qe}{(4\pi)^{\frac{(D-1)}{2}} L} \frac{e^{-\frac{r^2}{2\eta}}}{\eta^{\frac{(D-1)}{2}}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\eta k_l^2} \mathcal{I}(q, \alpha_0, r^2/(2\eta)) , \quad (4.30)$$

onde

$$\mathcal{I}(q, \alpha_0, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\alpha|}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\alpha_0|}(w) . \quad (4.31)$$

No Apêndice A.1, é mostrado que a soma acima no número quântico n é dada pelas Eqs. (A.8) e (A.7). Substituindo este resultado na Eq. (4.30), obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{\text{reg}}(x, \eta) &= \frac{qe}{(2\pi)^{\frac{(D-1)}{2}} L} \frac{w^{\frac{(D-1)}{2}} e^{-w}}{r^{(D-1)}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2 k_l^2}{2w}} \left[\frac{e^w}{q} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{e^{-w \cosh(y)} f(q, \alpha_0, y)}{\cosh(qy) - \cos(q\pi)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{q} \sum_{k=1}^p \cos(2k\pi\alpha_0) e^{w \cos(2k\pi/q)} \right] , \end{aligned} \quad (4.32)$$

com $w = r^2/(2\eta)$. Na expressão acima temos que $p = [q/2]$, onde $[q/2]$ é a parte inteira de $q/2$, e o sinal ' no sinal da soma significa que no caso em que $q = 2p$ o termo $k = q/2$ dever ser tomado com o coeficiente $1/2$. Se $q < 2$ o somatório na Eq. (4.32) deve ser desconsiderado.

O primeiro termo dentro do colchete na Eq. (4.32) corresponde a densidade de carga para $\alpha_0 = 0$ e $q = 1$. O valor renormalizado para a densidade de carga é dado subtraindo da Eq. (4.32) a contribuição correspondente ao espaço-tempo de Minkowski na ausência do fluxo magnético. Podemos fazer isto, descartando o primeiro termo dentro do colchete. As outras contribuições contêm $e^{-2w \cosh^2(y/2)}$ e $e^{-2w \sin^2(\pi k/q)}$, dentro da integral e da soma, respectivamente; consequentemente no limite $\eta \rightarrow 0$ ($w \rightarrow \infty$) estes termos somem para

$r > 0$. Desse modo, concluímos que o valor renormalizado para a densidade de carga é zero, ou seja, não há densidade de carga induzida.

No Apêndice A.3 mostramos explicitamente que não há densidade de corrente induzida ao longo das dimensões extras, ou seja, $\langle j_i(x) \rangle_{ren} = 0$, para $i = 4, \dots, D$. Este resultado está em concordância com a invariância do sistema sob um boost ao longo da direção x^i .

Vamos agora analisar a densidade de corrente radial. Temos que $A_r = 0$, e o VEV da componente r da densidade de corrente é simplesmente expressa como

$$\langle j_r(x) \rangle = ie \lim_{x' \rightarrow x} (\partial_r - \partial_{r'}) W(x, x') . \quad (4.33)$$

Calculando as derivadas radiais com respeito a r e r' na função de Wightman e subtraindo ambos os termos e tomando em seguida o limite de coincidência, irá aparecer um cancelamento entre esses termos. Portanto, concluímos também que não há densidade de corrente radial

$$\langle j_r(x) \rangle = 0. \quad (4.34)$$

4.2.2 Densidade de corrente azimuthal

O VEV da densidade de corrente azimuthal é dado por [71]

$$\langle j_\phi(x) \rangle = ie \lim_{x' \rightarrow x} \{ (\partial_\phi - \partial_{\phi'}) W(x, x') + 2ie A_\phi W(x, x') \} . \quad (4.35)$$

Substituindo a Eq. (4.22) na equação acima, encontramos a expressão formal para a densidade de corrente azimuthal, dada na seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle j_\phi(x) \rangle &= -\frac{qe}{L(2\pi)^{D-2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\alpha) \int d\vec{k} \int_0^\infty d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) \\ &\quad \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m^2 + \lambda^2 + \tilde{k}_l^2 + \vec{k}^2}} . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para desenvolver a soma na expressão acima sobre o número quântico l devemos

aplicar a fórmula de soma de Abel-Plana na forma [73], que é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l + \tilde{\beta}) f(|l + \tilde{\beta}|) &= \int_0^{\infty} du [g(u) + g(-u)] f(u) \\ &+ i \int_0^{\infty} du [f(iu) - f(-iu)] \sum_{\lambda=\pm 1} \frac{g(i\lambda u)}{e^{2\pi(u+i\lambda\tilde{\beta})} - 1} . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Considerando $g(u) = 1$ e

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi u/L)^2 + \lambda^2 + m^2 + \vec{k}^2}} . \quad (4.38)$$

Usando esta fórmula, é possível decompor a expressão para $\langle j_\phi \rangle$, Eq. (4.36), como a soma de duas contribuições da seguinte maneira

$$\langle j_\phi \rangle = \langle j_\phi \rangle_{cs} + \langle j_\phi \rangle_c , \quad (4.39)$$

onde o termo $\langle j_\phi \rangle_{cs}$ é a contribuição vinda da primeira integral do lado direito da Eq. (4.37) e corresponde a densidade de corrente azimutal na geometria do espaço-tempo com $(D + 1)$ dimensões de uma corda cósmica não compactificada. O termo $\langle j_\phi \rangle_c$, é induzido pela compactificação da corda ao longo de seu eixo e é proveniente da segunda integral do lado direito da Eq. (4.37). Mais adiante, veremos que este termo é zero considerando o limite $L \rightarrow \infty$.

Mencionamos na Introdução que o cálculo da densidade de corrente bosônica azimutal induzida por um fluxo magnético na geometria de uma corda cósmica idealizada foi desenvolvido em [74] e [75] para campos quânticos sem massa e massivos, respectivamente. Em [75] o cálculo da densidade de corrente azimutal no vácuo foi desenvolvido em um espaço-tempo de uma corda cósmica considerando dimensões extras para o caso em que $1 \leq q < 2$. Assim, nosso trabalho consiste em desenvolver uma expressão fechada para o caso massivo considerando valores gerais para q . Nesse sentido, generalizamos os resultados obtidos em [75] considerando valores gerais do parâmetro q , assim como, consideramos o caso em que existe um fluxo magnético atravessando o núcleo da corda onde o eixo é compactificado a um círculo. Assim, aqui, queremos investigar a densidade de corrente bosônica induzida mais geral possível, combinando todos os efeitos citados acima.

Usando a primeira integral do lado direito da Eq. (4.37), a Eq. (4.36) torna-se

$$\langle j_\phi(x) \rangle_{\text{cs}} = -\frac{2eq}{(2\pi)^{D-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\alpha) \int d\vec{k} \int_0^\infty d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \lambda^2 + \vec{k}^2 + m^2}}, \quad (4.40)$$

onde introduzimos uma nova variável $y = 2\pi u/L$.

Fazemos uso da identidade (A.22), que nos permite realizar a integração sobre a variável λ usando [72]. Temos também que a integral sobre o momentum nas dimensões extras é facilmente calculada. Por fim, escrevendo α na forma dada pela Eq. (4.25), obtemos

$$\langle j_\phi(x) \rangle_{\text{cs}} = -\frac{eq}{(2\pi)^{\frac{(D+1)}{2}} r^{D-1}} \int_0^\infty dw w^{\frac{(D-3)}{2}} e^{-w - \frac{m^2 r^2}{2w}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\alpha_0) I_{q|n+\alpha_0|}(w), \quad (4.41)$$

onde definimos $w = r^2/2s^2$.

No Apêndice A.2 mostramos que a soma acima envolvendo o número quântico n é dada pelas Eqs. (A.19) e (A.18). Substituindo este resultado na Eq. (4.41), encontramos

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_{\text{cs}} &= \frac{4em^{D+1}}{(2\pi)^{\frac{(D+1)}{2}}} \left[\sum_{k=1}^p \sin(2k\pi/q) \sin(2k\pi\alpha_0) f_{\frac{(D+1)}{2}} [2mr \sin(k\pi/q)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{g(q, \alpha_0, 2y) \sinh(2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} f_{\frac{(D+1)}{2}} [2mr \cosh(y)] \right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde definimos a notação

$$f_\nu(x) = \frac{K_\nu(x)}{x^\nu}, \quad (4.43)$$

sendo $K_\nu(x)$ a função de Bessel modificada. Podemos ver que $\langle j^\phi(x) \rangle_{\text{cs}}$ é nula para o caso em que $\alpha_0 = 0$. Para o caso em que $1 \leq q < 2$, o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.42) é nulo e esse resultado coincide com o que foi encontrado para a corrente bosônica azimutal induzida em [75]. A partir da Eq. (4.42), podemos ver que $\langle j^\phi(x) \rangle_{\text{cs}}$ é uma função ímpar em relação a α_0 , com período igual ao fluxo quântico Φ_0 . De modo a exibir de forma clara a dependência de $\langle j^\phi(x) \rangle_{\text{cs}}$ com o parâmetro que codifica a presença da corda, q , e também em α_0 , na Fig. 4.1 fizemos o gráfico do comportamento da densidade de corrente azimutal em função do parâmetro α_0 , no caso em que $D = 3$, considerando o produto $mr = 0.5$ para diferentes valores do parâmetro q . Notamos que o efeito do parâmetro q é aumentar a intensidade da densidade de corrente azimutal com respeito ao parâmetro α_0 .

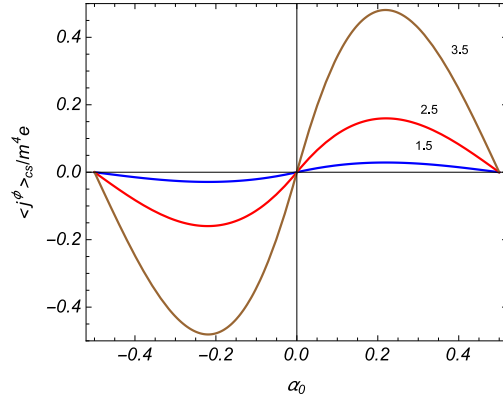


Figura 4.1: Densidade de corrente azimutal sem a presença da compactificação para $D = 3$ em unidades de “ $m^4 e$ ”, em termos de α_0 para $mr = 0.5$ e $q = 1.5, 2.5$ e 3.5 .

Considerando um campo sem massa, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_{cs} &= \frac{4e\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{(D+1)}{2}}(2r)^{D+1}} \left[\sum_{k=1}^p \frac{\cos(k\pi/q) \sin(2k\pi\alpha_0)}{\sin^D(k\pi/q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sinh(y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \frac{g(q, \alpha_0, 2y)}{\cosh^D(y)} \right], \end{aligned} \quad (4.44)$$

Esse resultado é obtido a partir da expansão da função de Bessel modificada, $K_\nu(x)$, para pequenos argumentos [76]. Considerando $D = 3$ na equação acima, temos que

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_{cs} &= \frac{e}{4\pi^2 r^4} \left[\sum_{k=1}^p \frac{\cot(k\pi/q) \sin(2k\pi\alpha_0)}{\sin^2(k\pi/q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\tanh(y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \frac{g(q, \alpha_0, 2y)}{\cosh^2(y)} \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Para o caso em que $D = 3$ e $q > 2$ o comportamento de $\langle j^\phi(x) \rangle_{cs}$ considerando grandes distâncias a partir da corda, $mr \gg 1$, é dominado pelo primeiro termo da Eq. (4.42) com $k = 1$. Logo, obtemos

$$\langle j^\phi(x) \rangle_{cs} \approx \frac{em}{(2\pi r)^2} \left(\frac{m}{\pi r \sin(\pi/q)} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi\alpha_0) \cot(\pi/q) e^{-2mr \sin(\pi/q)}, \quad (4.46)$$

o que demonstra um decaimento exponencial.

A partir de agora, desenvolveremos o cálculo da contribuição para o densidade de corrente azimutal devida a compactificação. Substituindo o segundo termo da Eq. (4.37) na

Eq. (4.36), encontramos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi(x) \rangle_c &= -\frac{2eq}{(2\pi)^{D-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\alpha) \int d\vec{k} \int_0^\infty d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) \\ &\times \int_{\sqrt{\lambda^2 + \vec{k}^2 + m^2}}^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \lambda^2 - \vec{k}^2 - m^2}} \sum_{\lambda=\pm 1} \frac{1}{e^{Ly-2\pi i \lambda \tilde{\beta}} - 1} . \end{aligned} \quad (4.47)$$

De modo a continuar a nossa análise, devemos usar a expansão

$$(e^u - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-lu}, \quad (4.48)$$

na equação acima, e com a ajuda de [72], obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi(x) \rangle_c &= -\frac{4eq}{(2\pi)^{D-1}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\alpha) \int d\vec{k} \int_0^\infty d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) \times \\ &\times K_0 \left(lL \sqrt{\lambda^2 + \vec{k}^2 + m^2} \right) . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Agora, usamos a representação integral dada abaixo para a função de Macdonald [72]

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \int_0^\infty dt \frac{e^{-t - \frac{x^2}{4t}}}{t^{\nu+1}} . \quad (4.50)$$

Fazendo uso desta representação, podemos realizar a integração sobre a variável λ e também sobre o momento ao longo das dimensões extras $\vec{k}$. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi(x) \rangle_c &= -\frac{eq}{2^{\frac{(D-3)}{2}} \pi^{\frac{(D+1)}{2}} r^{D-1}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^\infty dw w^{\frac{(D-3)}{2}} e^{-w \left[1 + \frac{l^2 L^2}{2r^2} \right] - \frac{r^2 m^2}{2w}} \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\alpha_0) I_{q|n+\alpha_0|}(w) , \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde usamos α na forma dada pela Eq. (4.25) e introduzimos uma nova variável $w = \frac{2r^2 t}{l^2 L^2}$.

A soma sobre o número quântico n na Eq. (4.51) pode ser desenvolvida usando o resultado compacto dado pela Eq. (A.19). Isto nos permite realizar a integral sobre w , e

encontramos a expressão final dada por

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_c &= \frac{8em^{D+1}}{(2\pi)^{\frac{(D+1)}{2}}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left\{ \sum_{k=1}^p{}' \sin(2k\pi/q) \sin(2k\pi\alpha_0) f_{\frac{(D+1)}{2}} \left[mL\sqrt{l^2 + \rho_k^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{g(q, \alpha_0, 2y) \sinh(2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} f_{\frac{(D+1)}{2}} \left[mL\sqrt{l^2 + \eta^2(y)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde definimos

$$\rho_k = \frac{2r \sin(k\pi/q)}{L}, \quad \eta(y) = \frac{2r \cosh(y)}{L}. \quad (4.53)$$

A partir da expressão acima, notamos que a contribuição devida a compactificação na densidade de corrente bosônica azimutal é uma função par em relação ao parâmetro $\tilde{\beta}$ e é uma função ímpar do fluxo magnético ao longo do núcleo da corda, com período igual a Φ_0 . Em particular, considerando uma campo bosônico *untwisted*, $\langle j^\phi(x) \rangle_c$ é uma função par do fluxo magnético. Notamos também que para o caso em que $\alpha_0 = 0$, a densidade de corrente induzida acima é nula. Além disso, $\langle j^\phi(x) \rangle_c = 0$ para $r = 0$. De modo a fornecer de forma mais clara o comportamento de $\langle j^\phi(x) \rangle_c$ com α_0 , na Fig. 4.2 esboçamos o gráfico do comportamento da densidade de corrente azimutal induzida pela compactificação em função de α_0 para $D = 3$, considerando $mr = 0.5$, $mL = 1$, $\tilde{\beta} = 0.1$ e 0.7 para diferentes valores do parâmetro q . A partir dos gráficos abaixo, percebemos que o efeito do parâmetro que garante a presença da corda cósmica, q , é aumentar a intensidade da densidade de corrente azimutal com respeito ao parâmetro α_0 enquanto que o efeito do parâmetro $\tilde{\beta}$ é mudar a direção de oscilação assim como diminuir o valor absoluto de $\langle j^\phi(x) \rangle_c$.

Considerando grandes valores para o comprimento da dimensão compacta, $mL \gg 1$, assumindo que o produto mr é fixo, e considerando $D = 3$, a contribuição dominante para a densidade de corrente azimutal induzida pela compactificação é proveniente do termo $l = 1$. Com isso, encontramos

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_c &\approx \frac{\sqrt{2}em^{\frac{3}{2}} \cos(2\pi\tilde{\beta})e^{-mL}}{\pi^{\frac{9}{2}}L^{\frac{5}{2}}} \left[\sum_{k=1}^p{}' \sin(2k\pi/q) \sin(2k\pi\alpha_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{g(q, \alpha_0, 2y) \sinh(2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde notamos a presença de um decaimento exponencial. Logo, neste limite, a contribuição para a densidade de corrente azimutal é dominada por $\langle j^\phi(x) \rangle_{cs}$.

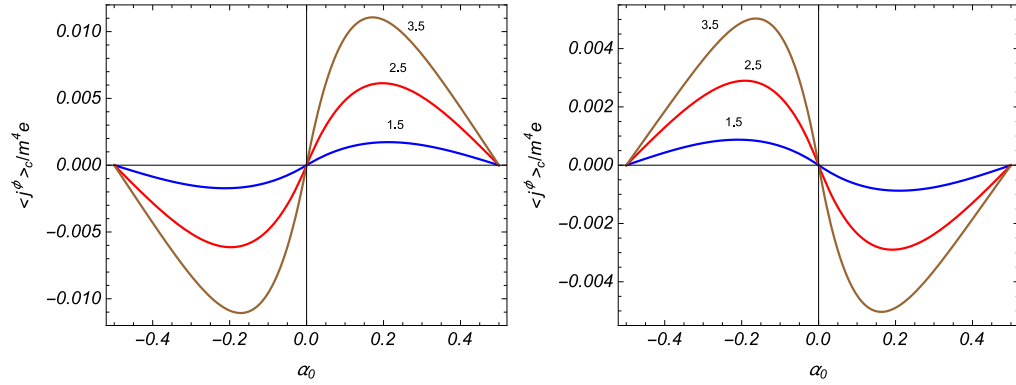


Figura 4.2: Densidade de corrente azimutal induzida pela compactificação para $D = 3$ é mostrada, em unidades de “ $m^4 e$ ”, em termos de α_0 para $mr = 0.5$, $mL = 1$ e $q = 1.5, 2.5$ e 3.5 . O gráfico da esquerda é para $\tilde{\beta} = 0.1$ enquanto que o da direita é para $\tilde{\beta} = 0.7$.

Para o caso de uma campo sem massa e $D = 3$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_c &= \frac{4e}{\pi^2 L^4} \left[\sum_{k=1}^p \sin(2k\pi/q) \sin(2k\pi\alpha_0) G_c(\tilde{\beta}, \rho_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{g(q, \alpha_0, 2y) \sinh(2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} G_c(\tilde{\beta}, \eta(y)) \right], \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde definimos

$$G_c(\tilde{\beta}, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi l \tilde{\beta})}{(l^2 + x^2)^2}. \quad (4.56)$$

A soma acima pode ser desenvolvida com a ajuda de [72]. Com isso, após alguns cálculos intermediários, encontramos

$$\begin{aligned} G_c(\tilde{\beta}, x) &= -\frac{1}{2x^4} + \frac{\pi^2 \cosh(2\pi \tilde{\beta} x)}{4x^2 \sinh^2(\pi x)} \\ &\quad + \pi \frac{\cosh[\pi(1 - 2\tilde{\beta})x] + 2\pi \tilde{\beta} x \sinh[\pi(1 - 2\tilde{\beta})x]}{4x^3 \sinh(\pi x)}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

para $0 \leq \tilde{\beta} \leq 1$.

Com a Eq. (4.57) também podemos obter o comportamento dominante de $\langle j^\phi(x) \rangle_c$

na região $r \ll L$ ($x \ll 1$), que é dado por

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_c &\approx -\frac{2e}{45L^4} [30\tilde{\beta}^2(1-\tilde{\beta})^2 - 1] \left[\sum_{k=1}^p \sin(2k\pi/q) \sin(2k\pi\alpha_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{g(q, \alpha_0, 2y) \sinh(2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Novamente usando a Eq. (4.57), é possível obter o comportamento dominante de $\langle j^\phi(x) \rangle_c$ na região $r \gg L$. Considerando $x \gg 1$ e $\tilde{\beta} = 0$ ou $\tilde{\beta} = 1$, $G_c(\tilde{\beta}, x) \approx \pi/(4x^3)$. Por outro lado, admitindo $x \gg 1$ e para $0 < \tilde{\beta} < 1$, $G_c(\tilde{\beta}, x) \approx -1/(2x^4)$. Então, concluímos que o comportamento dominante de $\langle j^\phi(x) \rangle_c$ depende do valor assumido para $\tilde{\beta}$.

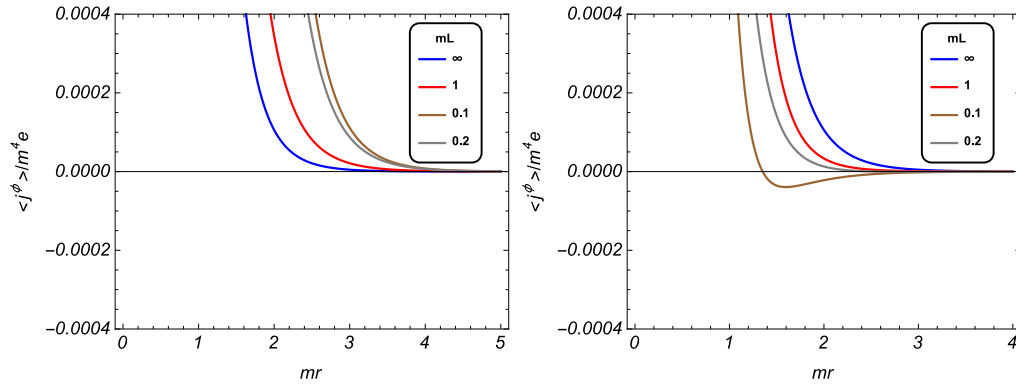


Figura 4.3: Densidade total de corrente azimutal para $D = 3$ em unidades de “ $m^4 e$ ”, em termos de mr para os valores $q = 2.5$, $\alpha_0 = 0.25$ e $mL = 0.1, 0.2, 1.0$. As curvas correspondentes aos valores finitos de mL são comparadas com as curvas sólidas para $mL \rightarrow \infty$. Para o gráfico da esquerda temos $\tilde{\beta} = 0$ enquanto que para o da direita $\tilde{\beta} = 0.5$.

Combinando as Eqs. (4.42) e (4.52) podemos escrever a densidade total de corrente azimutal como

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle &= \frac{8em^{D+1}}{(2\pi)^{\frac{(D+1)}{2}}} \sum_{l=0}^{\infty} \cos(2\pi l\tilde{\beta}) \left\{ \sum_{k=1}^p \sin(2k\pi/q) \sin(2k\pi\alpha_0) f_{\frac{(D+1)}{2}} \left[mL\sqrt{l^2 + \rho_k^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{g(q, \alpha_0, 2y) \sinh(2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} f_{\frac{(D+1)}{2}} \left[mL\sqrt{l^2 + \eta^2(y)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde o sinal ‘ $’$ no sinal da soma em l significa que o termo com $l = 0$ é considerado com o coeficiente $1/2$. Para exibir mais claramente o comportamento de $\langle j^\phi(x) \rangle$ com o produto mr , na Fig. 4.3 esboçamos o gráfico da densidade de corrente azimutal em função de mr para $D = 3$, considerando $q = 2.5$, $\alpha_0 = 0.25$ e diferentes valores de mL . Para o gráfico

da esquerda consideramos $\tilde{\beta} = 0$ enquanto que no da direita $\tilde{\beta} = 0.5$. Para $A_z = 0$, temos $\tilde{\beta} = \beta$, e os casos $\beta = 0$ e $\beta = 1/2$ são relacionados com os campos bosônicos são, *untwisted* e *twisted*, respectivamente. Notamos que o efeito do parâmetro $\tilde{\beta}$ é alterar as curvas para os valores finitos de mL em comparação com a curva sólida para $mL \rightarrow \infty$.

4.2.3 Densidade de corrente axial

Nesta seção, iremos analisar a densidade de corrente axial no eixo da corda cósmica. Veremos que devido a compactificação da direção ao longo do eixo da corda a densidade de corrente será não-nula.²

O VEV da corrente axial é dado por

$$\langle j_z(x) \rangle = ie \lim_{x' \rightarrow x} \{ (\partial_z - \partial_{z'}) W(x, x') + 2ie A_z W(x, x') \} . \quad (4.60)$$

Usando a Eq. (4.22) e o fato de que $A_z = -\Phi_z/L$, encontramos

$$\langle j_z(x) \rangle = -\frac{eq}{L(2\pi)^{D-2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\vec{k} \int_0^{\infty} \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{k}_l}{\sqrt{m^2 + \lambda^2 + \tilde{k}_l + \vec{k}}} , \quad (4.61)$$

onde $\tilde{k}_l$ é dado pela Eq. (4.14).

Para avaliar a soma sobre o número quântico l devemos usar a fórmula de soma de Abel-Plana generalizada dada pela Eq. (4.37). Para este caso, temos $g(u) = 2\pi u/L$ e $f(u)$ é dado pela Eq. (4.38). Levando estas expressões em consideração, notamos que o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.37) é nulo devido ao fato de $g(u)$ ser uma função ímpar. Assim, ficamos somente com a contribuição devido ao segundo termo do lado direito da Eq. (4.37). Esta contribuição é uma consequência da compactificação assumida ao longo do eixo z .

A densidade de corrente axial induzida pela compactificação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle j_z(x) \rangle_c &= -\frac{2ieq}{(2\pi)^{D-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\vec{k} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) \\ &\times \int_{\sqrt{\lambda^2 + \vec{k}^2 + m^2}}^{\infty} \frac{dy y}{\sqrt{y^2 - \lambda^2 - \vec{k}^2 - m^2}} \sum_{j=\pm 1} \frac{j}{e^{Ly - 2\pi i j \tilde{\beta}} - 1} . \end{aligned} \quad (4.62)$$

²No caso em que não há compactificação $\langle j_z(x) \rangle = 0$.

Usando novamente a expansão dada pela Eq. (4.48) para a soma em j presente na Eq. (4.62), encontramos

$$\begin{aligned} \langle j_z(x) \rangle_c &= \frac{4eq}{(2\pi)^{D-1}} \sum_{l=1}^{\infty} \sin(2\pi l \tilde{\beta}) \int d\vec{k} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) \\ &\times \int_{\sqrt{\lambda^2 + \vec{k}^2 + m^2}}^{\infty} dy \frac{y e^{-lLy}}{\sqrt{y^2 - \lambda^2 - \vec{k}^2 - m^2}}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

A integral em y pode ser avaliada com a ajuda de [72]. O resultado é dado em termos da função de Bessel modificada de primeira ordem, $K_1(z)$. Por outro lado, usando a representação integral dada pela Eq. (4.50) para esta função, e o fato de que $K_1(z) = K_{-1}(z)$ podemos mostrar que

$$\int_{\sqrt{\lambda^2 + \vec{k}^2 + m^2}}^{\infty} dy \frac{y e^{-lLy}}{\sqrt{y^2 - \lambda^2 - \vec{k}^2 - m^2}} = \frac{1}{lL} \int_0^{\infty} dt e^{-t} e^{-\frac{l^2 L^2 (\lambda^2 + \vec{k}^2 + m^2)}{4t}}. \quad (4.64)$$

Substituindo o lado direito da identidade acima na Eq. (4.63), é possível desenvolver a integral na variável λ e também sobre os momentos da dimensão extra. Além disso, definindo $w = 2tr^2/l^2 L^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_z(x) \rangle_c &= \frac{2qeL}{(2\pi)^{\frac{(D+1)}{2}} r^{D+1}} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} dw w^{\frac{(D-1)}{2}} e^{-w \left[1 + \frac{l^2 L^2}{2r^2} \right] - \frac{m^2 r^2}{2w}} \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\alpha|}(w). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Substituindo a expressão envolvendo a soma da função de Bessel modificada dada pela Eq. (A.8) na Eq. (4.65), obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_z(x) \rangle_c &= \frac{2qeL}{(2\pi)^{\frac{(D+1)}{2}} r^{D+1}} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} dw w^{\frac{(D-1)}{2}} e^{-w \left[1 + \frac{l^2 L^2}{2r^2} \right] - \frac{m^2 r^2}{2w}} \left[\frac{e^w}{q} \right. \\ &\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f(q, \alpha_0, y) e^{-w \cosh y}}{\cosh(qy) - \cos(q\pi)} + \frac{2}{q} \sum_{k=1}^p \cos(2k\pi \alpha_0) e^{w \cos(2k\pi/q)} \right], \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde usamos α na forma dada pela Eq. (4.25) e $f(q, |\alpha_0|, y)$ dada pela Eq. (A.7). Integrando

sobre a variável w , a expressão acima pode ser escrita como

$$\langle j_z(x) \rangle_c = \langle j_z(x) \rangle_c^{(0)} + \langle j_z(x) \rangle_c^{(q, \alpha_0)} \quad (4.67)$$

O primeiro termo dentro do colchete na Eq. (4.66), nos fornece a contribuição que não depende de α_0 and q . É um termo puramente topológico, consequência somente da compactificação. Para esta contribuição, temos

$$\langle j^z(x) \rangle_c^{(0)} = -\frac{2em^{\frac{(D+1)}{2}}}{(2L)^{\frac{(D-1)}{2}} \pi^{\frac{(D+1)}{2}}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi l \tilde{\beta})}{l^{\frac{(D-1)}{2}}} K_{\frac{(D+1)}{2}}(lmL) . \quad (4.68)$$

Note que este termo é independente da distância radial, r . Podemos dizer que a equação acima corresponde a densidade de corrente em um espaço-tempo de Minkowski com $(D+1)$ dimensões onde a seção espacial tem topologia $R^{D-1} \times S$. Além disso, a partir da Eq. (4.66) notamos que a densidade de corrente é nula para valores inteiros e semi-inteiros de $\tilde{\beta}$.

Para $D = 3$, a Eq. (4.68) é dada por

$$\langle j^z(x) \rangle_c^{(0)} = -\frac{em^2}{\pi^2 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi l \tilde{\beta})}{l} K_2(lmL) . \quad (4.69)$$

A segunda contribuição para a densidade de corrente axial é devida ao fluxo magnético e ao déficit de ângulo planar, e é dada por

$$\begin{aligned} \langle j^z(x) \rangle_c^{(q, \alpha_0)} &= -\frac{8em^{D+1}L}{(2\pi)^{\frac{(D+1)}{2}}} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l \tilde{\beta}) \left\{ \sum_{k=1}^p \cos(2k\pi\alpha_0) f_{\frac{(D+1)}{2}} \left[mL\sqrt{l^2 + \rho_k^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f(q, \alpha_0, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} f_{\frac{(D+1)}{2}} \left[mL\sqrt{l^2 + \eta^2(y)} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde ρ_k e $\eta(y)$ são dados pelas Eqs. (4.53). Notamos que a Eq. (4.70) é uma função ímpar do parâmetro $\tilde{\beta}$ e é uma função par de α_0 , com período igual ao fluxo quântico Φ_0 . Em particular, no caso de um campo bosônico *untwisted*, a Eq. (4.70) é uma função ímpar do fluxo magnético. Além disso, esta contribuição anula-se para $q = 1$ e $\alpha_0 = 0$. De modo a apresentar de forma mais clara o comportamento de $\langle j^z(x) \rangle_c^{(q, \alpha_0)}$ com relação aos parâmetros da teoria, na Fig. 4.4 esboçamos o gráfico de seu comportamento em função de $\tilde{\beta}$ e com $D = 3$, considerando $mr = 0.4$, $mL = 1$ e $q = 1.5, 2.5$ e 3.5 . O gráfico da esquerda é para $\alpha_0 = 0$ e o da direita é para $\alpha_0 = 0.25$. Nestes gráficos notamos que a amplitude da densidade

de corrente aumenta com q e o efeito de α_0 é mudar a orientação da corrente.

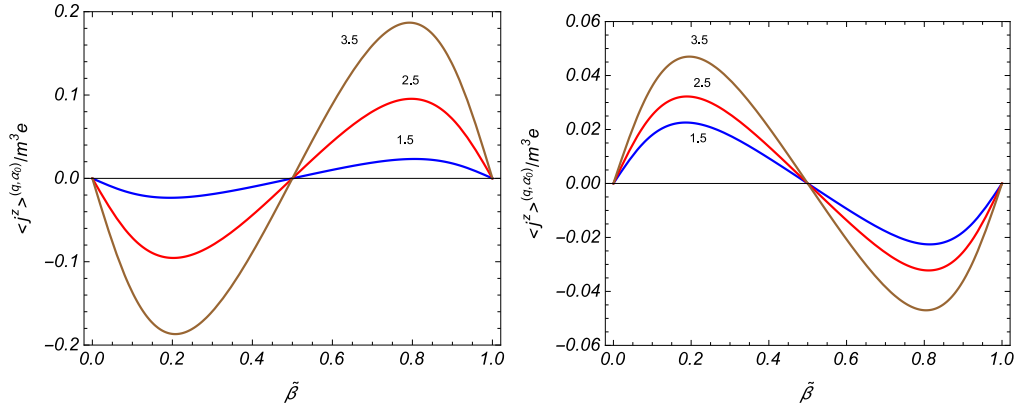


Figura 4.4: Densidade de corrente axial para $D = 3$ na Eq. (4.70) em unidades de “ $m^3 e$ ”, em termos de $\tilde{\beta}$ para os valores $mr = 0.4$, $mL = 1$ e $q = 1.5, 2.5, 3.5$. O gráfico da esquerda é para $\alpha_0 = 0$ enquanto para o da direita $\alpha_0 = 0.25$.

Para $r = 0$ e $D = 3$, a Eq. (4.70) torna-se

$$\begin{aligned} \langle j^z(x) \rangle_c^{(q, \alpha_0)} &= -\frac{2em^2}{\pi^2 L} \sum_{l=1}^p \frac{K_2(lmL) \sin(2l\pi\tilde{\beta})}{l} \left[\sum_{k=1}^p \cos(2k\pi\alpha_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \alpha_0, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde notamos que esta contribuição é finita.

Agora, considerando $mL \gg 1$ e mr fixo, a principal contribuição para a Eq. (4.70) vem do termo em que $l = 1$. Logo, para $D = 3$ temos

$$\begin{aligned} \langle j^z(x) \rangle_c^{(q, \alpha_0)} &\approx -\frac{8em^{\frac{3}{2}} \sin(2\pi\tilde{\beta}) e^{-mL}}{(2\pi L)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \sum_{k=1}^p \cos(2k\pi\alpha_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \alpha_0, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde notamos que aparece um decaimento exponencial.

Para um campo não massivo e $D = 3$, a Eq. (4.70) é dada por

$$\begin{aligned} \langle j^z(x) \rangle_c^{(q, \alpha_0)} = & -\frac{4e}{\pi L^3} \left[\sum_{k=1}^p \cos(2k\pi\alpha_0) V_c(\tilde{\beta}, \rho_k) \right. \\ & \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \alpha_0, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} V_c(\tilde{\beta}, \eta(y)) \right], \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde definimos

$$V_c(\tilde{\beta}, x) = \sum_{l=1}^\infty \frac{l \sin(2\pi l \tilde{\beta})}{(l^2 + x^2)^2}. \quad (4.74)$$

Mais uma vez, com a ajuda de [72], fomos capazes de desenvolver a somas na Eq. (4.74). Este resultado é dado por

$$V_c(\tilde{\beta}, x) = -\frac{\pi^2}{4x} \frac{[\sinh(2\pi\tilde{\beta}x) - 2\tilde{\beta} \sinh(\pi x) \cosh[\pi x(1 - 2\tilde{\beta})]]}{\sinh^2(\pi x)}, \quad (4.75)$$

para $0 \leq \tilde{\beta} \leq 1$. Claramente podemos ver que $V_c(\tilde{\beta}, x)$ é nulo para $\tilde{\beta} = 0, 1/2, 1$.

Com a Eq. (4.75) podemos obter o comportamento dominante de $\langle j_z(x) \rangle_c^{q \neq 1}$ para $r \ll L$, que é dado por

$$\begin{aligned} \langle j^z(x) \rangle_c^{(q, \alpha_0)} \approx & -\frac{4e}{L^3} \frac{\tilde{\beta}}{3} (1 - \tilde{\beta})(1 - 2\tilde{\beta}) \left[\sum_{k=1}^p \cos(2k\pi\alpha_0) \right. \\ & \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \alpha_0, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (4.76)$$

No limite oposto, podemos obter o comportamento de $\langle j^z(x) \rangle_c^{q \neq 1}$ para $r \gg L$. Considerando $x \gg 1$ na Eq. (4.75), podemos verificar que $V_c(\tilde{\beta}, x) \approx \pi^2 \tilde{\beta} / (2x) e^{-2\pi\tilde{\beta}x}$ para $0 < \tilde{\beta} < 1/2$, e $V_c(\tilde{\beta}, x) \approx -\pi^2 / (2x) e^{-2\pi(1-\tilde{\beta})x}$ para $1/2 < \tilde{\beta} < 1$. Em ambos os casos a densidade de corrente axial apresenta um decaimento exponencial, contudo com um sinal diferente.

4.3 Considerações a respeito dos resultados

Vimos neste capítulo a influência da compactificação e de um fluxo magnético nas flutuações do vácuo de um campo bosônico carregado. Calculamos os VEVs das densidades de corrente induzidas. Neste contexto, fomos aptos a mostrar que a densidade de carga e corrente

radial renormalizadas são nulas. Além disso, vimos que a compactificação induz à densidade de corrente azimutal uma decomposição com duas contribuições. A primeira corresponde a expressão na geometria de uma corda cósmica sem a presença da compactificação, Eq. (4.42); a segunda contribuição é devida a compactificação e é apresentada na Eq. (4.52). A última é uma função ímpar de α_0 , com período igual ao fluxo quântico Φ_0 , e seu comportamento é mostrado na figura 4.1. Nesta figura, podemos ver que a intensidade da corrente aumenta com o parâmetro q .

Além do mais, vimos que a densidade de corrente azimutal induzida pela compactificação é uma função par do parâmetro $\tilde{\beta}$, que depende do fluxo magnético na direção axial e da compactificação, e é uma função ímpar do fluxo magnético no núcleo da corda, com período igual a Φ_0 . Notamos que quando $\beta = 0$ (campo bosônico *untwisted*), a Eq. (4.52) torna-se uma função par do fluxo magnético. Também notamos que esta densidade de corrente induzida anula-se para o caso em que $\alpha_0 = 0$. Para um campo sem massa e considerando $D = 3$, a Eq. (4.52) é simplificada, e expressa pela Eq. (4.55). Neste caso, o comportamento dominante de $\langle j^\phi(x) \rangle_c$ depende dos valores assumidos do parâmetro $\tilde{\beta}$. Na Fig. 4.2, esboçamos o gráfico da Eq. (4.52) para $D = 3$, em unidades de “ $m^4 e$ ”, com respeito a α_0 . Também através da análise desta figura podemos ver que a intensidade da corrente aumenta com o parâmetro q , e o efeito do parâmetro $\tilde{\beta}$ desempenha um papel importante no sinal da direção.

Para a densidade de corrente azimutal, dada pela soma das Eqs. (4.42) e (4.52), vimos que ela é dominada por $\langle j^\phi(x) \rangle_{cs}$ para grandes valores do comprimento da dimensão compacta, $mL \gg 1$, assumindo $D = 3$ e mr fixo. O comportamento da densidade de corrente azimutal total, como função de mr é apresentado na Fig. 4.3 para $D = 3$ e para dois diferentes valores de $\tilde{\beta}$. A partir deste gráfico podemos ver que a relevância da parte compactificada na corrente depende do produto mL , diminuindo quando mL se torna muito grande. Além disso, a intensidade da corrente total, comparada com $\langle j^\phi(x) \rangle_{cs}$, depende de $\tilde{\beta}$.

Também mostramos que o VEV da densidade de corrente axial na Eq. (4.66) tem uma origem puramente topológica, a qual é nula quando $\tilde{\beta} = 0, 1/2$ e 1 . Este VEV é expresso em termos da soma de dois termos: o primeiro deles dado pela Eq. (4.68) é independente da distância radial r , do parâmetro que codifica a presença da corda cósmica q , e α_0 . Esta contribuição corresponde a densidade de corrente no espaço-tempo de Minkowski em $R^{D-1} \times S$. A outra contribuição é dada pela Eq. (4.70), e é devida ao fluxo magnético e ao déficit de ângulo planar. Verificamos que esta contribuição é uma função ímpar do parâmetro $\tilde{\beta}$ e uma função par de α_0 , com período igual ao fluxo quântico Φ_0 . Para o caso particular

quando $\beta = 0$, a Eq. (4.70) se torna uma função ímpar do fluxo magnético. Um gráfico da densidade de corrente azimutal como função de $\tilde{\beta}$ foi apresentado na Fig. 4.4 para dois valores diferentes de α_0 e considerando $D = 3$. Através deste gráfico vimos que a amplitude da densidade de corrente aumenta com o parâmetro q e o efeito de α_0 é mudar a orientação da corrente.

Condensado fermiônico e Correntes fermiônicas

Este capítulo contém a nossa segunda contribuição, que é a análise do condensado fermiônico e os valores esperados da densidade de carga e correntes para um campo fermiônico massivo em um espaço-tempo cônico com $(2+1)$ dimensões na presença de um fluxo magnético localizado no vértice do cone. Esta análise é realizada para ambas as representações irredutíveis da álgebra de Clifford. Iremos considerar aqui, um campo fermiônico $\psi(x)$ em um espaço tempo com $(2+1)$ dimensões assumindo que o campo esta em equilíbrio térmico à temperatura T [61].

5.1 Condensado Fermiônico

O condensado fermiônico é um conjunto de férmions colocados a temperaturas muito baixas e que, assim como o condensado de Bose-Einstein, pode ser considerado como mais um estado da matéria. Porém, em comparação ao condensado de Bose-Einstein, não podem formar agrupamentos muitos grandes, já que eles são formados por férmions obedecendo o princípio da exclusão de Pauli, que afirma que dois férmions não podem estar no mesmo estado quântico. O primeiro condensado fermiônico foi criado experimentalmente em 2003 [77], onde um gás, com aproximadamente meio milhão de átomos de potássio foram resfriados quase ao

zero absoluto.

O condensado fermiônico é definido como o valor esperado, utilizando a Eq. (3.85),

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\bar{\psi}\psi] \quad (5.1)$$

com $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ sendo o adjunto de Dirac e os colchetes denotam a média no ensemble grande canônico, com a matriz densidade de probabilidade, levando em conta a Eq. (3.95), dada por

$$\hat{\rho} = Z^{-1} e^{\beta(\hat{H} - \mu' \hat{Q})}, \quad (5.2)$$

onde $\beta = 1/T$. Aqui, $\hat{H}$ é o operador hamiltoniano, $\hat{Q}$ é a carga conservada com o potencial químico relacionado μ' e a função partição é dada por

$$Z = \text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H} - \mu' \hat{Q})}]. \quad (5.3)$$

O condensado fermiônico é uma das características mais importantes do sistema que estamos estudando. Em particular, desempenha uma papel importante na quebra dinâmica da simetria chiral.

Como falamos inicialmente, estaremos interessados em estudar a dinâmica de um campo fermiônico em um espaço-tempo cônico com (2+1) dimensões. Adotando o sistema de coordenadas cilíndricas, a geometria do sistema é descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2, \quad (5.4)$$

onde $0 \leq \phi \leq \phi_0 = 2\pi/q$, onde $q \geq 1$. Iremos discutir o caso de um espinor do campo com duas componentes compreendendo a representação irredutível da álgebra de Clifford. Assumimos a presença de campo eletromagnético externo definido através do potencial vetor A_μ . O operador de campo obedece a equação de Dirac abaixo:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - sm)\psi = 0, \quad D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu + ieA_\mu, \quad (5.5)$$

onde Γ_μ é a conexão espinorial e e é a constante de acoplamento mínimo. Aqui, $s = +1$ e $s = -1$ corresponde a representações irredutíveis inequivalentes da álgebra de Clifford em (2+1) dimensões. Com essas representações, o termo de massa quebra a invariância por paridade e reversão temporal [78]. Em (2+1) dimensões, por transformações de paridade e

inversão temporal, o campo se transforma como:

$$\mathcal{P}\psi(t, \vec{r})\mathcal{P}^{-1} = \sigma^1\psi(t, \vec{r}'), \quad (5.6)$$

com $\vec{r} = (x, y)$ e $\vec{r}' = (-x, y)$. De modo similar, por inversão temporal o campo se transforma como

$$\mathcal{T}\psi(t, \vec{r})\mathcal{T}^{-1} = \sigma^2\psi(-t, \vec{r}). \quad (5.7)$$

Nas equações acima, temos que σ^1 e σ^2 são as matrizes de Pauli no espaço plano.

No sistema de coordenadas correspondente a Eq. (5.4), as matrizes gama 2x2 podem ser escritas na seguinte representação:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^l = \frac{i^{2-l}}{r^{l-1}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ (-1)^{l-1}e^{iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

com $l = 1, 2$ e $q = 2\pi/\phi_0$.

Consideramos que na região $r > 0$, a presença do campo de gauge $A_\mu = (0, 0, A)$, onde $A_2 = A$ é a componente covariante do potencial vetor nas coordenadas (t, r, ϕ) . Para a componente física correspondente temos $A_\phi = -A/r$, que corresponde a um fluxo magnético infinitamente fino $\Phi = -\phi_0 A$ localizado em $r = 0$. Como veremos abaixo, nas expressões para os valores esperados, o parâmetro α será escrito como

$$\alpha = eA/q = -e\Phi/(2\pi). \quad (5.9)$$

Iremos decompor o parâmetro α de acordo com a Eq. (4.25), onde notamos que a parte fracionária deste parâmetro é a responsável pelos efeitos físicos no sistema em consideração.

Vamos denotar por $\{\psi_\sigma^{(+)}(x), \psi_\sigma^{(-)}(x)\}$ um conjunto completo ortonormal de soluções de energias positivas e negativas da Eq. (5.5). Estas soluções são rotuladas por um conjunto de números quânticos σ . Expandimos o operador de campo $\psi(x)$ em termos de $\psi_\sigma^{(\pm)}(x)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \sum_{\sigma} [a_{\sigma}\psi_{\sigma}^{(+)} + b_{\sigma}^{\dagger}\psi_{\sigma}^{(-)}] \\ \hat{\bar{\psi}} &= \sum_{\sigma} [a_{\sigma}^{\dagger}\bar{\psi}_{\sigma}^{(+)} + b_{\sigma}\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

De acordo com a Eq. (3.101), os valores médios térmicos são:

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{a}_{\sigma}^{\dagger}\hat{a}_{\sigma'}] &= \frac{\delta_{\sigma\sigma'}}{e^{\beta(E_{\sigma}^{(+)}-\bar{\mu})} + 1}, \\ \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{b}_{\sigma}^{\dagger}\hat{b}_{\sigma'}] &= \frac{\delta_{\sigma\sigma'}}{e^{\beta(E_{\sigma}^{(-)}+\bar{\mu})} + 1}.\end{aligned}\quad (5.11)$$

As expressões para $\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{a}_{\sigma'}\hat{a}_{\sigma}^{\dagger}]$ e $\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{b}_{\sigma'}\hat{b}_{\sigma}^{\dagger}]$, são obtidas a partir das relações de anti-comutação para os operadores de criação e aniquilação. Substituindo as expansões do campo fermiônico (5.10) na Eq. (5.1), encontramos a seguinte equação

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}\psi\rangle &= \sum_{\sigma}\sum_{\sigma'}\left\{\bar{\psi}_{\sigma}^{(+)}\psi_{\sigma'}^{(+)}\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{a}_{\sigma}^{\dagger}\hat{a}_{\sigma'}] + \bar{\psi}_{\sigma}^{(+)}\psi_{\sigma'}^{(-)}\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{a}_{\sigma}^{\dagger}\hat{b}_{\sigma'}^{\dagger}] \right. \\ &\quad \left. + \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}\psi_{\sigma'}^{(+)}\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{b}_{\sigma}\hat{a}_{\sigma'}] + \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}\psi_{\sigma'}^{(-)}\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{b}_{\sigma}\hat{b}_{\sigma'}^{\dagger}]\right\}.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Usando as relações de anti-comutação para os operadores de criação e aniquilação, vemos que o segundo e terceiro termos dentro das chaves são nulos, e a equação acima pode ser escrita como

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \sum_{\sigma}\sum_{\sigma'}\left\{\bar{\psi}_{\sigma}^{(+)}\psi_{\sigma'}^{(+)}\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{a}_{\sigma}^{\dagger}\hat{a}_{\sigma'}] + \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}\psi_{\sigma'}^{(-)}\delta_{\sigma\sigma'}\text{Tr}(\hat{\rho}) - \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}\psi_{\sigma'}^{(-)}\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{b}_{\sigma'}^{\dagger}\hat{b}_{\sigma}]\right\}.\quad (5.13)$$

Fazendo uso das Eqs. (3.84) e (5.11), obtemos a seguinte decomposição para o condensado

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \langle\bar{\psi}\psi\rangle_0 + \langle\bar{\psi}\psi\rangle_+ + \langle\bar{\psi}\psi\rangle_-.\quad (5.14)$$

Aqui,

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_0 = \sum_{\sigma}\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}(x)\psi_{\sigma}^{(-)}(x),\quad (5.15)$$

é o condensado fermiônico no estado de vácuo e $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_+$ e $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_-$ são as contribuições devidas às partículas e anti-partículas, respectivamente, e que são dadas pela expressão

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\pm} = \pm \sum_{\sigma}\frac{\bar{\psi}_{\sigma}^{(\pm)}(x)\psi_{\sigma}^{(\pm)}(x)}{e^{\beta(E_{\sigma}\mp\mu)} + 1},\quad (5.16)$$

onde $\mu = e\mu'$ e $\pm E_{\sigma}$ são as energias correspondentes aos modos $\psi_{\sigma}^{(\pm)}(x)$. Nas Eqs. (5.15) e (5.16), $\sum_{\sigma}$ inclui a soma sobre os números quânticos discretos e a integração com respeito

aos contínuos. Os modos são normalizados de acordo com a condição de normalização

$$\int d^2x \sqrt{\gamma} \psi_{\sigma}^{(\pm)\dagger}(x) \psi_{\sigma'}^{(\pm)}(x) = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (5.17)$$

com γ sendo o determinante do tensor métrico. A contribuição para o condensado correspondente ao valor esperado do vácuo, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_0$, foi investigada em [79] e aqui iremos nos preocupar somente com os efeitos da temperatura.

Para a avaliação do condensado de acordo com a Eq. (5.16), precisamos conhecer os modos fermiônicos. A solução geral para a equação radial para estas funções contém uma parte regular na origem e a parte que diverge em $r = 0$. Sob a condição

$$2|\alpha_0| \leq 1 - 1/q, \quad (5.18)$$

os modos irregulares são eliminados pela condição de normalização. No caso em que $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$, existem modos normalizáveis irregulares e para a identificação das funções uma condição de contorno adicional é necessária na origem. Na literatura já foi mostrado que o procedimento padrão para a extensão auto-adjunta da hamiltoniana de Dirac dá origem a uma família de um parâmetro, de condições de contorno, no contexto de um campo de gauge de Aharanov-Bohm [80–82].

Seguindo [79], para modos irregulares consideramos um caso especial de condições de contorno no vértice do cone, quando uma condição de contorno do tipo *sacola* do MIT é imposta em um raio finito, no qual é então levado a zero. Esta condição de contorno é dada por

$$(1 + in_{\mu}\gamma^{\mu}\psi)_{r=a} = 0, \quad (5.19)$$

onde n_{μ} é a normal orientada para fora (da região em consideração) em direção a fronteira. A condição de contorno do tipo *sacola* garante que não exista um fluxo de férmions e isto corresponde a um fluxo em um tubo impenetrável. As funções de modos correspondentes têm a forma

$$\psi_{\sigma}^{(\pm)}(x) = c_0^{(\pm)} e^{iqj\phi \mp iEt} \begin{pmatrix} J_{\beta_j}(\gamma r) e^{-iq\phi/2} \\ \epsilon_j \frac{\gamma e^{iq\phi/2}}{\pm E + sm} J_{\beta_j + \epsilon_j}(\gamma r) \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

onde $j = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$, $J_{\nu}(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie e

$$\beta_j = q|j + \alpha| - \epsilon_j/2, \quad (5.21)$$

com $\epsilon_j = 1$ para $j > -\alpha$ e $\epsilon_j = -1$ para $j < -\alpha$. Os espinores (5.20) são especificados pelo conjunto $\sigma = (\gamma, j)$ com $0 \leq \gamma < \infty$ e para a energia temos $E = E_\sigma = \sqrt{\gamma^2 + m^2}$. Os coeficientes de normalização são dados pela expressão

$$c_0^{(\pm)2} = \gamma \frac{E \pm sm}{2\phi_0 E}. \quad (5.22)$$

Os modos dados pela Eq. (5.20) são autofunções do operador momento angular

$$\hat{J} = -(i/q)(\partial_\phi + ieA) + \sigma_3/2, \quad \sigma_3 = \text{diag}(1, -1), \quad (5.23)$$

para os autovalores $j + \alpha$:

$$\hat{J}\psi_\sigma^{(\pm)}(x) = (j + \alpha)\psi_\sigma^{(\pm)}(x). \quad (5.24)$$

Nas Eqs. (5.15) e (5.16) temos $\sum_\sigma = \sum_j \int_0^\infty d\gamma$, com a soma em $j = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$. O parâmetro α é o fluxo magnético medido em unidades do fluxo quântico. No caso em que o parâmetro α é metade de um número inteiro ímpar $j = -\alpha$ deve ser considerado separadamente. A análise correspondente é calculada em [79]. De modo a não complicar nossas considerações, na discussão que segue iremos excluir este caso. Vemos que, sob a condição $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$, os modos irregulares correspondem a $j = -n_0 - \text{sgn}(\alpha_0)/2$. Os valores esperados para o caso geral de uma condição de contorno no vértice do cone são considerados de maneira similar ao descrito abaixo. Os resultados diferem somente por uma contribuição dos modos irregulares.

Usando as funções de modo dadas pela Eq. (5.20), a contribuição para o condensado fermiônico devido a partículas e anti-partículas são dadas na seguinte forma

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\pm = \frac{q}{4\pi} \sum_j \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1} \left\{ \frac{sm}{E} [J_{\beta_j}^2(\gamma r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\gamma r)] \pm [J_{\beta_j}^2(\gamma r) - J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\gamma r)] \right\}. \quad (5.25)$$

Nos cálculos a seguir usaremos a seguinte representação integral para a função de Bessel [83]

$$J_\nu^2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dt}{t} e^{t/2 - x^2/t} I_\nu(x^2/t), \quad (5.26)$$

onde c é uma constante positiva e $I_\nu(y)$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie. Substituindo na Eq. (5.25), contribuições separadas $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\pm$ são expressas em termos das

séries

$$\mathcal{I}(q, \alpha, z) = \sum_j I_{\beta_j}(z). \quad (5.27)$$

A função $\mathcal{I}(q, \alpha, z)$ é um função periódica com relação a α com período igual a 1. Se consideramos o parâmetro α na forma (4.10), então $\mathcal{I}(q, \alpha, z)$ não depende de n_0 e $\mathcal{I}(q, \alpha, z) = \mathcal{I}(q, \alpha_0, z)$. Para a segunda série, que aparece depois da aplicação da Eq. (5.26), temos $\sum_j I_{\beta_j + \epsilon_j}(z) = \mathcal{I}(q, -\alpha_0, z)$. Como resultado, a expressão do lado direito de (5.25) é escrita como

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\pm} = \frac{q}{4\pi} \int_0^{\infty} d\gamma \frac{\gamma}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dt}{t} e^{t/2 - \gamma^2 r^2/t} \sum_{\delta=\pm 1} (sm/E \pm \delta) \mathcal{I}(q, \delta\alpha_0, \gamma^2 r^2/t). \quad (5.28)$$

Para a série dada pela Eq. (5.27), temos a representação abaixo [84],

$$\mathcal{I}(q, \alpha_0, x) = \frac{2}{q} \sum_{l=0}^p {}'(-1)^l \cos(\pi l(2\alpha_0 - 1/q)) e^{x \cos(2\pi l/q)} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-x \cosh y} f(q, \alpha_0, y)}{\cosh(qy) - \cos(q\pi)}, \quad (5.29)$$

onde p a parte inteira de $q/2$, i.e, $p = [q/2]$, e

$$f(q, \alpha_0, y) = \sum_{\delta=\pm 1} \delta \cos(q\pi(1/2 - \delta\alpha_0)) \cosh((q\alpha_0 + \delta q/2 - 1/2)y). \quad (5.30)$$

O sinal $'$ no símbolo da soma na Eq. (5.29) significa que o termo $l = 0$ e o termo $l = q/2 = p$ para valores pares de q devem ser considerados com o coeficiente $1/2$. No caso em que $1 \leq q < 2$, a soma em l em (5.29) está ausente. Note que para q sendo um inteiro par, $q = 2p$, para a função dada pela Eq. (5.30) temos

$$f(q, \alpha_0, y) = 2(-1)^p \cos(\pi q \alpha_0) \sinh((q\alpha_0 - 1/2)y) \sinh(py), \quad (5.31)$$

e o integrando na Eq. (5.29) é irregular no limite de integração inferior.

Substituindo a representação (5.29) em na Eq. (5.28), a integral em t é avaliada com a ajuda da fórmula [85]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dt}{t} e^{t/2 - 2b^2/t} = J_0(2b). \quad (5.32)$$

Como resultado, a seguinte expressão é obtida

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\pm} &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\pm}^{(M)} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\gamma \frac{\gamma}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1} \\ &\times \left\{ \sum_{l=1}^p (-1)^l \left[\frac{sm}{E} c_l \cos(2\pi l \alpha_0) \pm s_l \sin(2\pi l \alpha_0) \right] J_0(2\gamma r s_l) \right. \\ &\left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{\frac{sm}{E} f_1(q, \alpha_0, y) \pm f_2(q, \alpha_0, y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} J_0(2\gamma r \cosh y) \right\}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

onde definimos a seguinte notação

$$c_l = \cos(\pi l/q), \quad s_l = \sin(\pi l/q), \quad (5.34)$$

e

$$\begin{aligned} f_1(q, \alpha_0, y) &= -\sinh y \sum_{\delta=\pm 1} \cos(q\pi(1/2 - \delta\alpha_0)) \sinh((1 + 2\delta\alpha_0)qy), \\ f_2(q, \alpha_0, y) &= \cosh y \sum_{\delta=\pm 1} \delta \cos(q\pi(1/2 - \delta\alpha_0)) \cosh((1 + 2\delta\alpha_0)qy). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Note que temos $f_l(q, \alpha_0, y) = \sum_{n=\pm 1} \delta^{n-1} f(q, n\alpha_0, 2y)/2$, $n = 1, 2$. Na Eq. (5.33), a parte

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\pm}^{(M)} = \frac{sm}{2\pi} \int_0^{\infty} d\gamma \frac{\gamma/E}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1}, \quad (5.36)$$

é a contribuição proveniente do termo $l = 0$ no lado direito da Eq. (5.29), e coincide com a quantidade correspondente no espaço-tempo de Minkowski em (2+1) dimensões ($q = 1$) e na ausência de fluxo magnético ($\alpha_0 = 0$).

Levando em consideração a energia, temos que o limite de integração inferior das integrais em γ nas equações acima, corresponde ao menor valor da energia possível, ou seja, a energia do estado fundamental ϵ_0 . Sendo assim, $\epsilon_0 = m$ e a seguir, faremos a análise da energia do estado fundamental comparada ao valor do potencial químico μ .

5.1.1 Análise do condensado para $|\mu| \leq m$

Voltando a considerar valores gerais de q e α_0 , primeiramente consideramos o caso em que $|\mu| \leq m$. Usando a relação $(e^u - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-lu}$ e após o cálculo das integrais em

γ , a seguinte representação é obtida

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\pm} &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\pm}^{(M)} - \frac{4m^2}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\pm n\beta\mu} \\ &\times \left\{ \sum_{l=1}^p (-1)^l [sc_l \cos(2\pi l\alpha_0) f_{1/2}(c_{nl}) \pm mn\beta s_l \sin(2\pi l\alpha_0) f_{3/2}(c_{nl})] \right. \\ &\left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \left[\frac{sf_1(q, \alpha_0, y) f_{1/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \pm mn\beta \frac{f_2(q, \alpha_0, y) f_{3/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde usamos a definição dada pela Eq. (4.43)

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\pm}^{(M)} = -\frac{sm}{2\pi\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{(\pm\mu-m)n\beta} = \frac{sm}{2\pi\beta} \ln(1 + e^{(\pm\mu-m)\beta}). \quad (5.38)$$

Na Eq. (5.37), introduzimos as notações

$$\begin{aligned} c_{nl} &= m\sqrt{n^2\beta^2 + 4r^2 \sin^2(\pi l/q)}, \\ c_n(y) &= m\sqrt{n^2\beta^2 + 4r^2 \cosh^2 y}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Para as funções $f_{\nu}(x)$ na Eq. (5.37) temos

$$f_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{x}, \quad f_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{x^3} (1+x). \quad (5.40)$$

Agora, somando todas as contribuições, obtemos para o condensado fermiônico

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 + \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)} - \frac{2^{3/2}m^2}{\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \cosh(n\beta\mu) \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l sc_l \cos(2\pi l\alpha_0) f_{1/2}(c_{nl}) \right. \right. \\ &- \frac{sq}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f_1(q, \alpha_0, y) f_{1/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \left. \right] + mn\beta \sinh(n\beta\mu) \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l s_l \sin(2\pi l\alpha_0) f_{3/2}(c_{nl}) \right. \\ &\left. \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) f_{3/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

com a contribuição de Minkowski dada por

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)} &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle_+^{(M)} + \langle \bar{\psi}\psi \rangle_-^{(M)} \\ &= \frac{sm}{2\pi\beta} [\ln(1 + e^{-\beta(m-\mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(m+\mu)})]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

A expressão para o condensado no estado de vácuo pode ser encontrada em [79]:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 = -\frac{sm}{2\pi r} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l \frac{c_l}{s_l} \cos(2\pi l \alpha_0) e^{-2mr s_l} - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_1(q, \alpha_0, y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \frac{e^{-2mr \cosh y}}{\cosh y} \right]. \quad (5.43)$$

Esta contribuição pode ser combinada com a soma em n na Eq. (5.41) contendo o fator $\cosh(n\beta\mu)$, escrevendo $\sum_{n=0}^{\infty'}$ em vez de $\sum_{n=1}^{\infty}$. O sinal ' no símbolo da soma significa que o termo $n = 0$ deve ser considerado com o coeficiente $1/2$. O condensado é uma função periódica do fluxo magnético com período igual ao fluxo quântico. Note que a paridade do condensado não é definida com respeito as reflexões $\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0$ e $\mu \rightarrow -\mu$. Este fato está relacionado com a não invariância do modelo sob transformações de paridade e temporal. Gostaríamos de chamar a atenção de que o condensado fermiônico do estado de vácuo é uma função par de α_0 .

A Eq. (5.41) pode ser simplificada para vários casos.

Para um campo sem massa, devido a condição, $|\mu| \leq m$, também devemos assumir que $\mu = 0$ e não há a formação do condensado. Nos casos especiais onde o fluxo magnético está ausente, temos $\alpha_0 = 0$, e a Eq. (5.41) torna-se

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)} - \frac{2sm^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty'} (-1)^n \cosh(n\beta\mu) \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l c_l \frac{e^{-c_{nl}}}{c_{nl}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2q}{\pi} \cos(q\pi/2) \int_0^\infty dy \frac{\sinh(2qy) \sinh y}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \frac{e^{-c_n(y)}}{c_n(y)} \right]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Neste caso o condensado fermiônico é uma função par do potencial químico.

Considerando o espaço-tempo de Minkowski, ($q = 1$), na presença de um fluxo magnético o condensado é dado por

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)} + \frac{2^{3/2}m^2}{\pi^{5/2}} \sin(\pi\alpha_0) \sum_{n=0}^{\infty'} (-1)^n \int_0^\infty dy \\ &\quad \times \left[-s \cosh(n\beta\mu) \tanh y \sinh(2\alpha_0 y) f_{1/2}(c_n(y)) \right. \\ &\quad \left. + mn\beta \sinh(n\beta\mu) \cosh(2\alpha_0 y) f_{3/2}(c_n(y)) \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Os termos com $n = 0$ nas Eqs. (5.44) e (5.45) são os valores esperados do vácuo.

Vamos considerar o comportamento do condensado em regiões limite dos parâmetros.

Para pontos próximos do vértice do cone, duas regiões separadas do parâmetro α_0 devem ser analisadas. Para $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$, a parte térmica é finita no vértice e a correspondente expressão é diretamente obtida a partir da Eq. (5.41) fazendo $r = 0$. Chamamos mais uma vez a atenção que, neste caso, todos os modos (5.20) são regulares no vértice. Para $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$ as integrais divergem no vértice. De modo a encontrar o termo dominante na expansão sobre a distância a partir da origem, notamos que para pontos próximos do vértice a contribuição dominante para as integrais na Eq. (5.41) vem de grande valores de y . Expandindo os integrandos, encontramos que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &\approx \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 + \frac{m^2 q \Gamma(1/2 - \rho)}{2^\rho \pi^{5/2} (mr)^{1-2\rho}} \cos(\pi\rho) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \\ &\times [\text{sgn}(\alpha_0) mn\beta \sinh(n\beta\mu) f_{\rho+1}(mn\beta) - s \cosh(n\beta\mu) f_\rho(mn\beta)], \end{aligned} \quad (5.46)$$

com a notação $\rho = q(1/2 - |\alpha_0|)$. Note que no caso em consideração, temos $\rho < 1/2$. Consequentemente, para $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$ a parte térmica diverge no vértice como $r^{2\rho-1}$. O valor esperado no vácuo $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_0$ se comporta como $1/r$ e é dominante considerando pequenos valores de r .

Agora, iremos considerar o comportamento do condensado para pequenas e altas temperaturas.

No limite de baixas temperaturas, a principal contribuição para a parte térmica é devida ao termo com $n = 1$ e para o termo dominante, encontramos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &\approx \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 + \frac{m}{\pi\beta} e^{-\beta(m-|\mu|)} \left[\sum_{l=0}^p (-1)^l \cos(\pi l (2s\alpha_0 \text{sgn}(\mu) - 1/q)) \right. \\ &\left. - \frac{qs}{\pi} \text{sgn}(\mu) \sum_{\delta=\pm 1} \delta \cos(q\pi(1/2 - \delta\alpha_0)) \int_0^\infty dy \frac{\cosh((q + 2\delta\alpha_0 q - s\delta \text{sgn}(\mu))y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Aqui, o termo com $l = 0$ é a contribuição devido ao espaço-tempo de Minkowski $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)}$. Com isso, para $|\mu| < m$, a baixas temperaturas, a contribuição térmica do condensado é suprimida pelo fator $e^{-\beta(m-|\mu|)}$.

Para considerarmos o limite de altas temperaturas, a representação dada pela a Eq. (5.41) não é conveniente. Uma representação alternativa é obtida usando as relações $(-1)^n \cosh(n\beta\mu) = \cos(nb)$ e $(-1)^n n \sinh(n\beta\mu) = \partial_\mu \cos(nb)/\beta$, com $b = \pi + i\beta\mu$, e em

seguida a equação [86, 87]

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nb) f_{\nu}(m\sqrt{\beta^2 n^2 + a^2}) &= \frac{(2\pi)^{1/2}}{2\beta m^{2\nu}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [(2\pi n + b)^2 \beta^{-2} + m^2]^{\nu-1/2} \\ &\times f_{\nu-1/2}\left(a\sqrt{(2\pi n + b)^2 \beta^{-2} + m^2}\right), \end{aligned} \quad (5.48)$$

para as séries em n na Eq. (5.41). Com essas modificações, o condensado é escrito como

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)} - \frac{2mT}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l s_{cl} \cos(2\pi l \alpha_0) K_0(2r s_l b_n) \right. \right. \\ &- \left. \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{s f_1(q, \alpha_0, y) K_0(2r b_n \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] + \frac{\mu - i\pi(2n+1)T}{m} \\ &\times \left. \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l s_l \sin(2\pi l \alpha_0) K_0(2r s_l b_n) - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) K_0(2r b_n \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde introduzimos a notação

$$b_n = \{[\pi(2n+1)T + i\mu]^2 + m^2\}^{1/2}. \quad (5.50)$$

No caso em que o potencial químico é nulo, $\mu = 0$, a Eq. (5.49) é simplificada para

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \frac{smT}{\pi} \left\{ \ln(1 + e^{-m\beta}) - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l c_l \cos(2\pi l \alpha_0) K_0(2r s_l b_n^{(0)}) \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f_1(q, \alpha_0, y) K_0(2r b_n^{(0)} \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

com $b_n^{(0)} = \sqrt{[\pi(2n+1)T]^2 + m^2}$.

No limite de altas temperaturas, $Tr \gg 1$, a contribuição dominante para as séries em n na Eq. (5.49) é devida aos termos $n = 0$ e $n = -1$ e da parte contendo o fator $\mu - i\pi(2n+1)T$. No caso em que $q > 2$ a contribuição dominante corresponde ao termo com $l = 1$ e obtemos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)} - 2\sqrt{s_1/r} \sin(2\pi \alpha_0) \sin(2r s_1 \mu) T^{3/2} e^{-2\pi s_1 Tr}. \quad (5.52)$$

Para $q < 2$ as somas em l estão ausentes. No limite de altas temperaturas a contribuição

dominante para as integrais na Eq. (5.49) vem da região próxima ao limite inferior de integração. Assumindo que $T \gg 1/[\pi r \sin^2(\pi q/2)]$ (q não sendo muito próximo a 2), encontramos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)} - \frac{q \sin(q\pi\alpha_0)}{\pi r \sin(\pi q/2)} \sin(2\mu r) T e^{-2\pi T r}, \quad (5.53)$$

e a supressão é mais forte. Para a parte devida ao espaço-tempo de Minkowski, considerando o limite de altas temperaturas, encontramos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)} \approx \frac{smT}{2\pi} \ln 2, \quad (5.54)$$

e, para altas temperaturas, o condensado fermiônico é dominado por esta parte. As contribuições induzidas pelo defeito cônico e pelo fluxo magnético são exponencialmente pequenas para pontos não próximos a origem.

Para a investigação do condensado considerando grandes distâncias da origem é conveniente utilizar a representação dada pela Eq. (5.49). O procedimento correspondente é similar ao feito para o caso de altas temperaturas e a contribuição dominante é devida aos termos com $n = 0$ e $n = -1$. Considerando a expressão assintótica para a função de Macdonald para grandes argumentos, para $q > 2$ obtemos,

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)} + 2\sqrt{\pi s_1/r} \sin(2\pi\alpha_0) T^2 \text{Im} \left(b_0^{-1/2} e^{-2rs_1 b_0} \right), \quad (5.55)$$

onde $b_0 = \sqrt{(\pi T + i\mu)^2 + m^2}$. No caso em que $q < 2$, assumindo que $\sin(\pi q/2) \gg q/r\sqrt{T^2 + m^2}$, a expressão assintótica é dada por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)} + \frac{qT \sin(q\pi\alpha_0)}{\pi r \sin(\pi q/2)} \text{Re} [(\mu - i\pi T) e^{-2rb_0}/b_0]. \quad (5.56)$$

Em ambos os casos, as partes para o condensado induzidas pelo defeito cônico e pelo fluxo magnético são exponencialmente pequenas e para a contribuição dominante temos $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx \langle \bar{\psi}\psi \rangle^{(M)}$.

5.1.2 Análise do condensado para $|\mu| > m$

Agora analisamos o caso em que $|\mu| > m$. Para $\mu > m$ ($\mu < -m$) a contribuição devido a anti-partículas (partículas) para o condensado é avaliada de maneira similar a descrita acima e a expressão correspondente é dada por pela Eq. (5.37) considerando $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_-$

$(\langle \bar{\psi}\psi \rangle_+)$. O condensado fermiônico total é expresso como

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 + \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\pm} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\gamma \frac{\gamma}{e^{\beta(E-|\mu|)} + 1} \\ &\times \left\{ \sum_{l=0}^p (-1)^l \left[\frac{sm}{E} c_l \cos(2\pi l \alpha_0) \mp s_l \sin(2\pi l \alpha_0) \right] J_0(2\gamma r s_l) \right. \\ &\left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{\frac{sm}{E} f_1(q, \alpha_0, y) \mp f_2(q, \alpha_0, y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} J_0(2\gamma r \cosh y) \right\}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

onde $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_+$ e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_-$ correspondem a $\mu < -m$ e $\mu > m$, respectivamente. Introduzindo o momento de Fermi $p_0 = \sqrt{\mu^2 - m^2}$, a integração em γ no último termo pode ser dividida em duas regiões, $\gamma < p_0$ e $\gamma > p_0$. A expansão (4.48) pode ser aplicada à integração para a segunda região. Para altas temperaturas, $T \gg |\mu|$, a contribuição dominante para o condensado é devida aos estados com energias $E \gg |\mu|$ e as estimativas assintóticas para $|\mu| < m$ ainda são válidas.

Comparada ao caso $|\mu| < m$, a situação no intervalo $|\mu| > m$ é completamente diferente considerando o limite de baixas temperaturas. No limite $T \rightarrow 0$, na parte devida a partículas ou anti-partículas, a contribuição dos estados com $E \leq |\mu|$ é a única que resta, e encontramos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{T=0} &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 + \frac{p_0^2}{\pi} \left\{ \sum_{l=0}^p (-1)^l [s c_l \cos(2\pi l \alpha_0) g_1(p_0 r s_l) + \text{sgn}(\mu) s_l \sin(2\pi l \alpha_0) g_2(p_0 r s_l)] \right. \\ &\left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{\sum_{l=1}^2 s^l (\text{sgn}(\mu))^{l-1} f_l(q, \alpha_0, y) g_l(p_0 r \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Onde adotamos a notação

$$g_1(u) = \frac{m}{p_0} \int_0^1 dx \frac{x J_0(2ux)}{\sqrt{x^2 + m^2/p_0^2}}, \quad g_2(u) = \frac{J_1(2u)}{2u}. \quad (5.59)$$

O segundo termo no lado direito da Eq. (5.58) é a contribuição de partículas (para $\mu > m$) ou anti-partículas (para $\mu < -m$) preenchendo os estados com energia $m \leq E \leq |\mu|$. Este termo é finito no vértice do cone para $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$ e diverge como $1/r^{1-2\rho}$ para $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$. A contribuição do vácuo próximo ao vértice se comporta como $1/r$ e, portanto, é dominante. Para grandes distâncias a partir do vértice, $p_0 r \gg 1$, as correções induzidas pelo defeito cônico e pelo fluxo magnético são dominadas pelas parte devidas as partículas ou anti-partículas (o segundo termo do lado direito da Eq. (5.58) com a contribuição $l = 0$ excluída). Esta

parte apresenta um decaimento oscilatório com amplitude decrescendo como $1/r^{3/2}$. Podemos observar que o decaimento da contribuição do vácuo para um campo massivo é exponencial. No caso de um campo sem massa, $m = 0$, a parte devida ao vácuo do condensado é zero e a Eq. (5.58) é simplificada para

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{T=0} &= \text{sgn}(\mu) \frac{\mu^2}{\pi} \left[\sum_{l=0}^p (-1)^l s_l \sin(2\pi l \alpha_0) g_2(|\mu| r s_l) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) g_2(|\mu| r \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Neste caso, a única contribuição diferente de zero é devida a partículas ou anti-partículas e o condensado é uma função ímpar do potencial químico e do fluxo magnético.

Na discussão acima, assumimos que o campo $\psi(x)$ é periódico ao longo da direção azimutal. Podemos considerar um caso mais geral onde o campo espinorial obedece a condição de quase-periodicidade

$$\psi(t, r, \phi + \phi_0) = e^{i\chi} \psi(t, r, \phi), \quad (5.61)$$

com uma fase constante χ . As expressões correspondentes para os valores esperados são obtidas a partir dos apresentados acima (e no que segue) com α dado pela equação

$$\alpha = \frac{\chi}{2\pi} + \frac{eA}{q}. \quad (5.62)$$

Note que χ e A são alterados por uma transformação de gauge enquanto suas combinações no lado direito da expressão acima são invariantes de gauge.

5.2 Densidade de carga

Nesta e nas seções seguintes, iremos investigar o valor esperado da densidade de corrente fermiônica, que é dada por

$$\langle j^\nu \rangle = e \text{Tr} [\hat{\rho} \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x)]. \quad (5.63)$$

Similarmente ao condensado fermiônico, a densidade de corrente pode ser decomposta como

$$\langle j^\nu \rangle = \langle j^\nu \rangle_0 + \langle j^\nu \rangle_+ + \langle j^\nu \rangle_-, \quad (5.64)$$

onde

$$\langle j^\nu \rangle_0 = e \sum_{\sigma} \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}(x) \gamma^{\nu} \psi_{\sigma}^{(-)}(x), \quad (5.65)$$

é o valor esperado do vácuo e

$$\langle j^\nu \rangle_{\pm} = \pm e \sum_{\sigma} \frac{\bar{\psi}_{\sigma}^{(\pm)} \gamma^{\nu} \psi_{\sigma}^{(\pm)}}{e^{\beta(E_{\sigma} \mp \mu)} + 1}. \quad (5.66)$$

Os termos $\langle j^\nu \rangle_+$ e $\langle j^\nu \rangle_-$ são as contribuições para a densidade de corrente devido as partículas e anti-partículas, respectivamente. O valor esperado no vácuo foi investigado em [79] e aqui iremos nos preocupar somente com os efeitos da temperatura finita. Os detalhes dos cálculos são similares aos realizados para o condensado fermiônico, assim, serão apresentados apenas os passos principais.

Iniciaremos com a densidade de carga que corresponde a componente $\nu = 0$ na Eq. (5.64). Fazendo uso da Eq. (5.20), para as contribuições de partículas e anti-partículas, obtemos a representação

$$\langle j^0 \rangle_{\pm} = \pm \frac{eq}{4\pi} \sum_j \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1} \left\{ J_{\beta_j}^2(\gamma r) + J_{\beta_j + \epsilon_{\beta_j}}^2(\gamma r) \pm \frac{sm}{E} \left[J_{\beta_j}^2(\gamma r) - J_{\beta_j + \epsilon_{\beta_j}}^2(\gamma r) \right] \right\}. \quad (5.67)$$

Assim como podemos esperar $\pm \langle j^0 \rangle_{\pm}/e > 0$. Utilizando transformações similares ao cálculo do condensado, encontramos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle_{\pm} &= \langle j^0 \rangle_{\pm}^{(M)} + \frac{e}{\pi} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1} \left\{ \sum_{l=1}^p (-1)^l \left[\frac{sm}{E} s_l \sin(2\pi l \alpha_0) \pm c_l \cos(2\pi l \alpha_0) \right] \right. \\ &\times \left. J_0(2\gamma r s_l) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\frac{sm}{E} f_2(q, \alpha_0, 2y) \pm f_1(q, \alpha_0, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} J_0(2\gamma r \cosh y) \right\}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

com a parte devida ao espaço-tempo de Minkowski dada por

$$\langle j^0 \rangle_{\pm}^{(M)} = \pm \frac{e}{2\pi} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1}. \quad (5.69)$$

Para um campo sem massa e considerando o caso em que $\mu = 0$, as contribuições de partículas e anti-partículas para a densidade de carga total se cancelam: $\langle j^0 \rangle_+ = -\langle j^0 \rangle_-$. Este não é o caso para campos massivos.

5.2.1 Análise da densidade de carga para $|\mu| \leq m$

No caso em que $|\mu| \leq m$, usando a relação (4.48), temos que

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle_{\pm} &= \langle j^0 \rangle_{\pm}^{(M)} - \frac{\sqrt{2}em^2}{\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\pm n\beta\mu} \left\{ \sum_{l=1}^p (-1)^l [s s_l \sin(2\pi l\alpha_0) f_{1/2}(c_{nl}) \right. \\ &\quad \pm mn\beta c_l \cos(2\pi l\alpha_0) f_{3/2}(c_{nl})] - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \left[\frac{s f_2(q, \alpha_0, y) f_{1/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right. \\ &\quad \left. \left. \pm \frac{mn\beta f_1(q, \alpha_0, y) f_{3/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.70)$$

com

$$\langle j^0 \rangle_{\pm}^{(M)} = \mp \frac{em^3\beta}{\sqrt{2}\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{\pm n\beta\mu} f_{3/2}(mn\beta). \quad (5.71)$$

O valor esperado no vácuo para a densidade de carga é dada pela Eq. [79]

$$\langle j^0 \rangle_0 = -\frac{sem}{2\pi r} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l \sin(2\pi l\alpha_0) e^{-2mrs_l} - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \frac{e^{-2mr \cosh y}}{\cosh y} \right]. \quad (5.72)$$

Para um campo sem massa, devido a condição $|\mu| \leq m$, na Eq. (5.70) também devemos assumir $\mu = 0$. Levando isso em consideração, e que $f_{\nu}(x) \approx 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) x^{-2\nu}$ para $x \rightarrow 0$, encontramos a expressão

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle_{\pm} &= \pm \frac{\pi e T^2}{24} \mp \frac{e}{\pi T} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left[\sum_{l=1}^p \frac{(-1)^l c_l \cos(2\pi l\alpha_0)}{(n^2 \beta^2 + 4r^2 s_l^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f_1(q, \alpha_0, y) (n^2 \beta^2 + 4r^2 \cosh^2 y)^{-3/2}}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (5.73)$$

onde o primeiro termo do lado direito é a contribuição de Minkowski. Neste caso a densidade de corrente no vácuo é nula. Notamos que para um campo sem massa a densidade de carga dada pela Eq. (5.73) não depende do parâmetro s . Elas são funções pares de α_0 .

Somando as contribuições do valor esperado no vácuo e de partículas e anti-partículas,

para a densidade carga total, no caso em que $|\mu| \leq m$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle &= \langle j^0 \rangle^{(M)} - \frac{2^{3/2}em^2}{\pi^{3/2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} ' (-1)^n s \cosh(n\beta\mu) \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l s_l \sin(2\pi l\alpha_0) f_{1/2}(c_{nl}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) f_{1/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] + m\beta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sinh(n\beta\mu) \right. \\ &\quad \left. \times \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l c_l \cos(2\pi l\alpha_0) f_{3/2}(c_{nl}) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_1(q, \alpha_0, y) f_{3/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] \right\}, \quad (5.74) \end{aligned}$$

com o termo de Minkowski

$$\langle j^0 \rangle^{(M)} = -\frac{\sqrt{2}em^3}{\pi^{3/2}T} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sinh(n\beta\mu) f_{3/2}(mn\beta). \quad (5.75)$$

Observamos que, para o caso em que o potencial químico é nulo, a parte de Minkowski na densidade de carga é nula, como consequência do cancelamento das contribuições de partículas e anti-partículas. O fluxo magnético age nestas contribuições de diferentes modos e não há o cancelamento para a parte topológica. O termo $n = 0$ na Eq. (5.74) corresponde ao valor esperado no vácuo da densidade de carga. No caso de um campo sem massa com potencial químico nulo a densidade de carga também é nula. Note que, para um campo massivo, a densidade de carga tem paridade indefinida com respeito a mudança de sinal para α_0 , $\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0$, e para μ , $\mu \rightarrow -\mu$. Isto é relacionado ao fato de que, na presença do termo de massa, o modelo em consideração não é invariante sob transformações de paridade e temporal.

A quantidade $\langle j^0 \rangle_t = \langle j^0 \rangle - \langle j^0 \rangle^{(M)}$ nos dá a contribuição para a densidade de carga devido ao déficit de ângulo planar e do fluxo magnético. Por uma questão de conveniência, chamaremos esta parte de parte topológica. De modo a mostrar de forma mais clara o comportamento da parte topológica em relação ao parâmetro α_0 , na Fig. 5.1 esboçamos o gráfico desta contribuição em termos do parâmetro α_0 . Relembre que a densidade de carga é uma função periódica de α_0 , com período igual a 1. As curvas cheias e tracejadas correspondem as representações irredutíveis com $s = 1$ e $s = -1$, respectivamente. Os números próximos as curvas são os valores de q . Esboçamos os gráficos para $\mu/m = 0.25$, $mr = 0.5$, $T/m = 0.5$. Para este exemplo, a contribuição dos termos na Eq. (5.74) contendo o fator s domina a expressão. Estes termos são ímpares com respeito a reflexão $\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0$. Note que para os mesmos valores de $\mu/m = 0.25$, $T/m = 0.5$, temos que a parte de Minkowski é $\langle j^0 \rangle^{(M)} \approx 0.015em^2$.

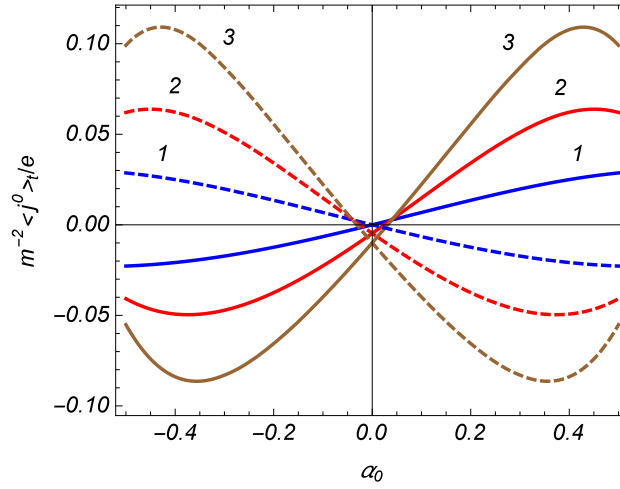


Figura 5.1: Parte topológica na densidade de carga como função do parâmetro α_0 considerando as representação irredutíveis com $s = 1$ (curvas cheias) e $s = -1$ (curvas tracejadas). Os números próximos as curvas correspondem aos valores de q . Os gráficos são plotados para $\mu/m = 0.25$, $mr = 0.5$, and $T/m = 0.5$.

A fórmula geral dada pela Eq. (5.74) pode ser simplificada para alguns casos especiais.

Na ausência do fluxo magnético e para valores gerais q , a densidade de carga é dada por

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle &= -\frac{em^3\beta}{(\pi/2)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sinh(n\beta\mu) \left[\sum_{l=0}^p (-1)^l c_l f_{3/2}(c_{nl}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2q}{\pi} \cos(q\pi/2) \int_0^{\infty} dy \frac{\sinh y \sinh(qy) f_{3/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (5.76)$$

e é uma função ímpar do potencial químico. Para a densidade de carga no espaço-tempo de Minkowski ($q = 1$) na presença do fluxo magnético obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle &= \langle j^0 \rangle^{(M)} + \frac{\sqrt{2}em^2}{\pi^{5/2}} \sin(\pi\alpha_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[s \cosh(n\beta\mu) \int_0^{\infty} dy \cosh(2\alpha_0 y) f_{1/2}(c_n(y)) \right. \\ &\quad \left. - nm\beta \sinh(n\beta\mu) \int_0^{\infty} dy \tanh y \sinh(2\alpha_0 y) f_{3/2}(c_n(y)) \right]. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Para $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$, a parte térmica da densidade de carga é finita no vértice do cone. Esta parte é dada pelo lado direito da Eq. (5.74), excluindo o termo $n = 0$. A expressão correspondente é obtida pela substituição direta $r = 0$. Para o caso em que $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$, a

análise é similar ao que foi realizada para o condensado fermiônico o que nos leva a seguinte expressão assintótica,

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle &\approx \langle j^0 \rangle_0 + \frac{em^2 q \Gamma(1/2 - \rho)}{2^\rho \pi^{5/2} (mr)^{1-2\rho}} \cos(\pi\rho) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\text{sgn}(\alpha_0) s \cosh(n\beta\mu) f_\rho(mn\beta) \\ &- m\beta n \sinh(n\beta\mu) f_{\rho+1}(mn\beta)], \end{aligned} \quad (5.78)$$

e a densidade de carga diverge com $1/r^{1-2\rho}$. O valor esperado no vácuo, $\langle j^0 \rangle_0$, diverge no limite $r \rightarrow 0$ como $1/r$ e próximo ao vértice, assim, este termo domina a densidade de carga total. Embora a densidade de carga seja divergente no vértice, esta divergência é integrável e a carga total induzida pelo déficit de ângulo planar e pelo fluxo magnético é finita. Na seção 5.3 apresentaremos uma discussão mais detalhada.

Agora, vamos analisar os limite de baixas e altas temperaturas. A baixas temperaturas, para valores fixos de mr , a principal contribuição para a parte térmica da densidade de carga é devida ao termo com $n = 1$ na Eq. (5.74). A mesma é dada por

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle &\approx \langle j^0 \rangle_0 + \frac{\text{sgn}(\mu) em e^{-\beta(m-|\mu|)}}{\pi\beta} \left[\sum_{l=0}^p (-1)^l \cos(\pi l(1/q - 2\text{sgn}(\mu)s\alpha_0)) \right. \\ &- \left. \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \text{sgn}(\mu)s\alpha_0, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (5.79)$$

onde o termo $l = 0$ corresponde a parte devido ao espaço-tempo de Minkowski. Neste limite temos uma supressão exponencial dos efeitos térmicos.

Para avaliar a densidade de carga a altas temperaturas, é conveniente usar outra representação que é obtida a partir da Eq. (5.74) de uma maneira similar ao que usamos para a Eq. (5.49). A nova representação tem a forma

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle &= \langle j^0 \rangle^{(M)} - \frac{2emT}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ s \sum_{l=1}^p (-1)^l s_l \sin(2\pi l\alpha_0) K_0(2rs_l b_n) \right. \\ &- \frac{sq}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) K_0(2rb_n \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} + \frac{\mu - i\pi(2n+1)T}{m} \\ &\times \left. \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l c_l \cos(2\pi l\alpha_0) K_0(2rs_l b_n) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_1(q, \alpha_0, y) K_0(2rb_n \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

onde b_n é dado pela Eq. (5.50). Para um campo com potencial químico nulo, obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle &= -\frac{4semT}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l s_l \sin(2\pi l \alpha_0) K_0(2r s_l b_n^{(0)}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) K_0(2r b_n^{(0)} \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (5.81)$$

com o mesmo $b_n^{(0)}$ dado por (5.51).

No limite de altas temperaturas, a contribuição dominante é devida aos termos com $n = 0$ e $n = -1$. Para o caso $q > 2$ o termo dominante corresponde a $l = 1$ e encontramos

$$\langle j^0 \rangle = \langle j^0 \rangle^{(M)} - \frac{2ec_1}{\sqrt{rs_1}} \cos(2\pi \alpha_0) \sin(2rs_1 \mu) T^{3/2} e^{-2\pi r s_1 T}. \quad (5.82)$$

Para $q < 2$ a soma em l na Eq. (5.80) está ausente e a contribuição dominante para as integrais em y é devida a região próxima ao limite inferior de integração. Neste caso os efeitos induzidos pelo defeito cônico e pelo fluxo magnético são suprimidos pelo fator $e^{-2\pi r T}$. Em todos os casos, para $\mu \neq 0$, a altas temperaturas a densidade de carga é dominada pela parte de Minkowski $\langle j^0 \rangle^{(M)}$ dada por

$$\langle j^0 \rangle^{(M)} \approx \frac{e\mu T}{\pi} \ln 2. \quad (5.83)$$

No caso em que o potencial químico é nulo, a parte de Minkowski também é nula. Para pontos não muito próximos do vértice do cone, as contribuições induzidas pelo defeito cônico e pelo fluxo magnético são exponencialmente pequenas.

Para fornecer de forma mais clara o comportamento da parte topológica da densidade de carga com a temperatura, esboçamos o seu gráfico, a Fig. 5.2. Onde as curvas cheias apresentam a dependência da parte topológica da densidade de carga na temperatura. As curvas tracejadas correspondem a densidade de carga no espaço-tempo de Minkowski na ausência do fluxo magnético, $m^{-2} \langle j^0 \rangle^{(M)} / e$. Os números próximos as curvas são os valores da razão μ/m . Os gráficos são plotados para $q = 1.5$, $\alpha_0 = 0.25$, $mr = 0.5$, e para a irredutível representação com $s = 1$.

Do mesmo modo que para o condensado fermiônico, a representação da pela Eq. (5.80) também é conveniente para a densidade de carga considerando grandes distâncias da origem. Como antes, o procedimento correspondente é similar ao limite assintótico de altas

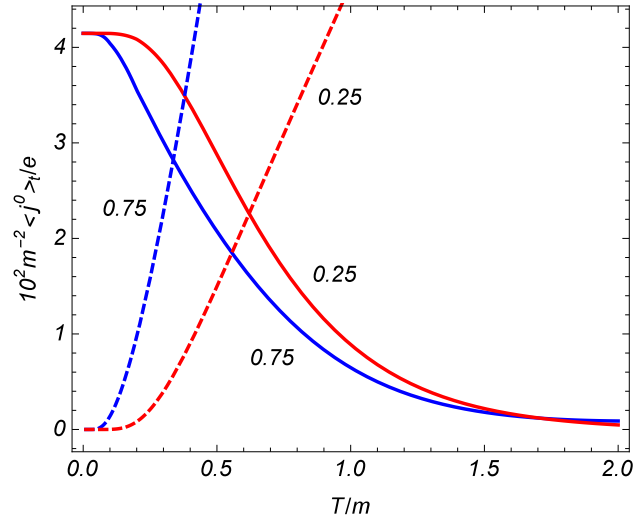


Figura 5.2: Parte topológica na densidade de corrente em função da temperatura para a representação irreductível com $s = 1$ (curvas cheias). Os gráficos são plotados para $q = 1.5$, $\alpha_0 = 0.25$ e $mr = 0.5$. As curvas tracejadas apresentam a densidade de corrente no espaço-tempo de Minkowski. Os números próximos as curvas indicam os valores de μ/m .

temperaturas. As principais contribuições são devidas aos termos com $n = 0$ e $n = -1$. Considerando $q > 2$, obtemos

$$\langle j^0 \rangle \approx \langle j^0 \rangle^{(M)} + \frac{2eT}{\sqrt{\pi r s_1}} \operatorname{Re} \left[\frac{s m s_1 \sin(2\pi \alpha_0) + (\mu - i\pi T) c_1 \cos(2\pi \alpha_0)}{b_0^{1/2} e^{2r s_1 b_0}} \right]. \quad (5.84)$$

Para $q < 2$, a expressão assintótica correspondente é dada por

$$\langle j^0 \rangle \approx \langle j^0 \rangle^{(M)} + \frac{e s q m T}{\pi r} \frac{\sin(q\pi \alpha_0)}{\sin(q\pi/2)} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-2rb_0}}{b_0} \right). \quad (5.85)$$

Em ambos os casos, as partes induzidas pelo defeito cônico e pelo fluxo magnético são exponencialmente pequenas e para o termo dominante temos $\langle j^0 \rangle \approx \langle j^0 \rangle^{(M)}$.

5.2.2 Análise da densidade de carga para $|\mu| > m$

Para $\mu < -m$ ($\mu > m$) a contribuição de partículas (anti-partículas) para a densidade de carga ainda é dada pela Eq. (5.70) utilizando $\langle j^0 \rangle_+$ ($\langle j^0 \rangle_-$). A densidade de carga total

é expressa como

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle &= \langle j^0 \rangle_0 + \langle j^0 \rangle_{\pm} + \frac{e}{\pi} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma}{e^{\beta(E-|\mu|)} + 1} \left\{ \sum_{l=0}^p (-1)^l \left[\frac{sm}{E} s_l \sin(2\pi l \alpha_0) \mp c_l \cos(2\pi l \alpha_0) \right] \right. \\ &\quad \times \left. J_0(2\gamma r s_l) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\frac{sm}{E} f_2(q, \alpha_0, 2y) \mp f_1(q, \alpha_0, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} J_0(2\gamma r \cosh y) \right\}, \end{aligned} \quad (5.86)$$

onde o sinal superior e inferior correspondem a $\mu < -m$ e $\mu > m$, respectivamente, e para $\langle j^0 \rangle_{\pm}$ temos a expressão (5.70). Considerando as regiões separadas $\gamma < p_0$ e $\gamma > p_0$, na integral correspondente a segunda região podemos usar novamente a expansão (4.48). Os termos dominantes para altas temperaturas são os mesmos para o caso $|\mu| \leq m$.

À temperatura zero e para o caso $|\mu| > m$, a única contribuição diferente de zero para a integral em γ na Eq. (5.86) é devida a região $\gamma < p_0$, e obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle_{T=0} &= \langle j^0 \rangle_0 + \frac{ep_0^2}{\pi} \left\{ \sum_{l=0}^p (-1)^l [s s_l \sin(2\pi l \alpha_0) g_1(p_0 r s_l) + \text{sgn}(\mu) c_l \cos(2\pi l \alpha_0) g_2(p_0 r s_l)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sum_{l=1}^2 s^{l-1} (\text{sgn}(\mu))^l f_l(q, \alpha_0, y) g_{3-l}(p_0 r \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

com as funções $g_1(u)$ e $g_2(u)$ dadas pela Eq. (5.59). O surgimento do segundo termo está relacionado com a presença de anti-partículas (para $\mu < -m$) ou partículas (para $\mu > m$) nos estados com energia $m \leq E \leq |\mu|$. Na ausência do déficit de ângulo planar e do fluxo magnético ($q = 1, \alpha = 0$), o termo $l = 0$ é o único que sobrevive e para a densidade de carga obtemos a expressão

$$\langle j^0 \rangle_{T=0}^{(M)} = \text{sgn}(\mu) e p_0^2 / (2\pi). \quad (5.88)$$

Subtraindo do lado direito da Eq. (5.87) o termo $l = 0$, obtemos a densidade de carga induzida pelo déficit de ângulo planar e pelo fluxo magnético. Para grandes distâncias a partir do vértice do cone, o decaimento desta parte na densidade de corrente é oscilatória com amplitude decrescente com $1/r^{3/2}$. Similar ao caso $|\mu| \leq m$, a densidade de carga é finita no vértice para $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$ e diverge para o caso $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$. A divergência no segundo caso é integrável, com $1/r^{1-2\rho}$. Para um campo sem massa a densidade de corrente

no vácuo, $\langle j^0 \rangle_0$, é zero e a partir da Eq. (5.89) obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle_{T=0} &= \text{sgn}(\mu) \frac{e\mu^2}{\pi} \left[\sum_{l=0}^p (-1)^l c_l \cos(2\pi l \alpha_0) g_2(|\mu| r s_l) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_1(q, \alpha_0, y) g_2(|\mu| r \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Neste caso a densidade de corrente à temperatura zero é a mesma para ambas as representações irredutíveis da álgebra de Clifford, $s = \pm 1$. Sendo uma função ímpar do potencial químico e uma função par do fluxo magnético.

De modo a tornar de forma mais clara o comportamento da densidade de carga com relação a distância do vértice, na Fig. (5.3) esboçamos o gráfico da densidade de carga em função distância a partir do vértice do cone para diferentes valores de q (números próximos as curvas). O gráfico da esquerda apresenta a parte topológica na densidade de corrente fazendo uso da representação irredutível com $s = 1$ e para $\mu/m = 0.25$, $\alpha_0 = 0.25$, $T/m = 0.5$. No gráfico da direita a razão $\langle j^0 \rangle / \langle j^0 \rangle^{(M)}$ é plotada à temperatura zero para um campo fermiônico sem massa. As curvas cheias e tracejadas correspondem a $\alpha_0 = 0.25$ e $\alpha_0 = 0$, respectivamente. Note que para $\alpha_0 = 0.25$ e $q = 2$ temos $\langle j^0 \rangle_{T=0} = \langle j^0 \rangle_{T=0}^{(M)}$.

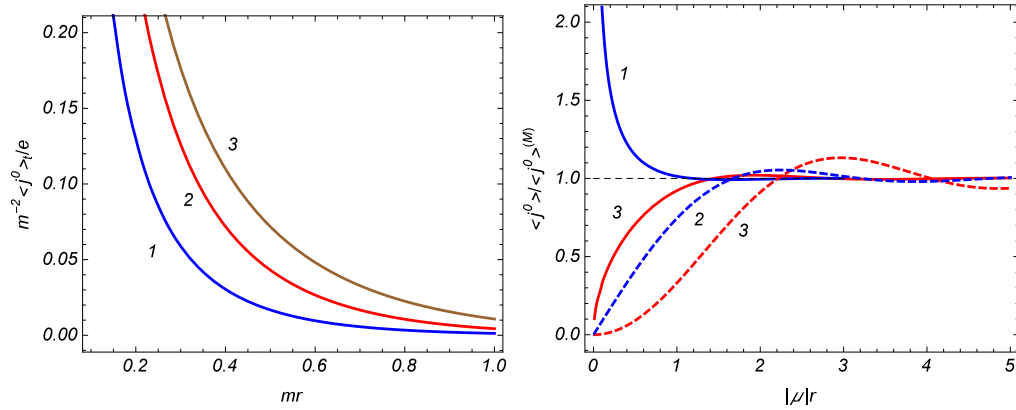


Figura 5.3: Densidade de carga como função da distância a partir do vértice do cone para diferentes valores do parâmetro q (números próximos as curvas). No gráfico da esquerda, a parte topológica é apresentada para a representação $s = 1$ e para $\mu/m = 0.25$, $\alpha_0 = 0.25$, $T/m = 0.5$. O gráfico da direita mostra a dependência da razão $\langle j^0 \rangle / \langle j^0 \rangle^{(M)}$ a temperatura zero. As curvas cheias e tracejadas nos gráficos acima correspondem a $\alpha_0 = 0.25$ e $\alpha_0 = 0$, respectivamente.

5.3 Carga induzida

Vamos denotar por ΔQ a carga total induzida pelo déficit de ângulo planar e pelo fluxo magnético

$$\Delta Q = \int_0^\infty dr r \int_0^{\phi_0} d\phi [\langle j^0 \rangle - \langle j^0 \rangle^{(M)}] . \quad (5.90)$$

No caso em que $|\mu| \leq m$ usamos a representação (5.74). A integração na coordenada radial é feita com a ajuda da fórmula

$$\int_0^\infty dr r f_\nu(\sqrt{a^2 + b^2 r^2}) = f_{\nu-1}(a)/b^2. \quad (5.91)$$

Depois de realizar a soma em n , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta Q_0 + \frac{e}{2} \sum_{\delta=\pm 1} \frac{\delta}{e^{\beta(m-\delta\mu)} + 1} \left[\frac{1}{q} \sum_{l=1}^p \frac{(-1)^l}{s_l^2} \cos(\pi l (1/q - 2s\delta\alpha_0)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, s\delta\alpha_0, 2y) \cosh^{-2} y}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (5.92)$$

onde

$$\Delta Q_0 = -\frac{se}{2q} \left[\sum_{l=1}^p \frac{(-1)^l}{s_l} \sin(2\pi l\alpha_0) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) \cosh^{-2} y}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \quad (5.93)$$

é a carga no vácuo e o segundo termo do lado direito representa a contribuição devido a partículas e anti-partículas. Essas expressões podem ser simplificadas usando as relações (B.4) e (B.6)

$$\Delta Q = \Delta Q_0 + \frac{e}{2q} \sum_{\delta=\pm 1} \frac{\delta}{e^{\beta(m-\delta\mu)} + 1} \left[\frac{1-q^2}{12} + q\alpha_0 (q\alpha_0 - s\delta) \right], \quad (5.94)$$

com $\Delta Q_0 = se\alpha_0/2$. Para $|\mu| < m$, no limite de temperatura zero temos $\lim_{T \rightarrow 0} \Delta Q = \Delta Q_0$ e a parte topológica da carga coincide com o estado de vácuo.

No caso $|\mu| > m$, a carga à temperatura zero difere da carga no vácuo ΔQ_0 . Podemos obtê-la pela integração do lado direito de (5.87), omitindo o termo $l = 0$ (a parte de Minkowski). Levando em consideração que

$$\int_0^\infty dy y g_l(ay) = \frac{1}{4a^2}, \quad \text{para } l = 1, 2, \quad (5.95)$$

e usando a relação (B.4), encontramos a seguinte expressão

$$\Delta Q_{T=0} = \Delta Q_0 + \text{sgn}(\mu) \frac{e}{2q} \left\{ \frac{1 - q^2}{12} + q\alpha_0 [q\alpha_0 - s\text{sgn}(\mu)] \right\}, \quad (5.96)$$

com o mesmo ΔQ_0 da Eq. (5.94). Para um dado sinal do potencial químico, a carga à temperatura zero é completamente determinada pelos parâmetros topológicos do modelo. Observamos que na avaliação da integral na Eq. (5.95) com a função $g_1(u)$ da Eq. (5.59) não podemos mudar a ordem de integração. A fim de contornar esta dificuldade, introduzimos no integrando a função e^{-by} , com $b > 0$. Com essa função, mudando a ordem de integração, a integral em y envolvendo a função de Bessel é avaliada utilizando [83]. Então, após a avaliação da integral em x , tomamos o limite $b \rightarrow 0$. Para $|\mu| = m$ a expressão (5.96) coincide com a obtida a partir da Eq. (5.94) no limite $T \rightarrow 0$.

5.4 Densidades de corrente

Nesta seção, consideramos os valores esperados das componentes espaciais para a densidade de corrente. Antes de tudo, podemos ver que a densidade de corrente ao longo da direção radial é zero, $\langle j^1 \rangle = 0$, e somente a contribuição ao longo da direção azimutal é diferente de zero. As contribuições para a corrente azimutal devido a partículas e anti-partículas são obtidas a partir da Eq. (5.66) usando a Eq. (5.20). Para a componente física $\langle j_\phi \rangle$, temos que ela é conectada com a contribuição contravariante pela relação $\langle j_\phi \rangle = r \langle j^2 \rangle$, com isso obtemos a seguinte expressão

$$\langle j_\phi \rangle_\pm = \pm \frac{qe}{2\pi} \sum_j \epsilon_j \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma^2}{E} \frac{J_{\beta_j}(\gamma r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\gamma r)}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1}. \quad (5.97)$$

Chamamos a atenção de que o valor esperado da densidade de corrente azimutal não depende do parâmetro s na Eq. (5.5) e é o mesmo para ambas as representações irredutíveis da álgebra de Clifford.

Fazendo uso da relação de recorrência para a função de Bessel podemos mostrar que

$$\epsilon_j J_{\beta_j}(x) J_{\beta_j + \epsilon_j}(x) = \frac{1}{x} \left(\epsilon_j \beta_j - \frac{1}{2} x \partial_x \right) J_{\beta_j}^2(x). \quad (5.98)$$

Substituindo na Eq. (5.97) e usando a representação dada pela Eq. (5.26), a contribuição

para a corrente azimutal de partículas e anti-partículas são representadas como

$$\langle j_\phi \rangle_\pm = \frac{eqr}{2\pi} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma^3/E}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dt}{t^2} e^{t/2 - \gamma^2 r^2/t} \sum_{\delta=\pm 1} \delta \mathcal{I}(q, \delta\alpha_0, \gamma^2 r^2/t). \quad (5.99)$$

Levando em consideração a Eq. (5.29), a integral na variável t é expressa em termos da função de Bessel de ordem 1, e obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_\pm &= \frac{e}{\pi} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma^2/E}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1} \left\{ \sum_{l=1}^p (-1)^l \sin(2\pi l \alpha_0) J_1(2\gamma r s_l) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) J_1(2\gamma r \cosh y)}{[\cosh(2qy) - \cos(q\pi)] \cosh y} \right\}. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Como podemos ver, a corrente azimutal é uma função ímpar do parâmetro α_0 . Note que na ausência de potencial químico, $\mu = 0$, as partículas e anti-partículas fornecem as mesmas contribuições para a densidade de corrente total. Como anteriormente, iremos considerar $|\mu| \leq m$ e $|\mu| > m$ separadamente.

5.4.1 Análise da densidade de corrente para $|\mu| \leq m$

Para $|\mu| \leq m$, usando a expansão dada pela Eq. (4.48), encontramos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_\pm &= -\frac{2^{3/2}em^3r}{\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^\infty (-1)^n e^{\pm n\beta\mu} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l s_l \sin(2\pi l \alpha_0) f_{3/2}(c_{nl}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) f_{3/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Para a densidade de corrente total, ficamos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= -\frac{2^{5/2}em^3r}{\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^\infty' (-1)^n \cosh(n\beta\mu) \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l f_{3/2}(c_{nl}) s_l \sin(2\pi l \alpha_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) f_{3/2}(c_n(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (5.102)$$

onde o termo $n = 0$ corresponde ao valor esperado no vácuo, o qual foi calculado em [84]

$$\langle j_\phi \rangle_0 = -\frac{2^{3/2}em^3r}{\pi^{3/2}} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l s_l \sin(2\pi l \alpha_0) f_{3/2}(2mr s_l) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) f_{3/2}(2mr \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right]. \quad (5.103)$$

Diferente do condensado fermiônico, a densidade de corrente azimutal tem paridade definida com respeito as mudanças $\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0$ and $\mu \rightarrow -\mu$, ou seja, ela é uma função ímpar de α_0 e uma função par do potencial químico.

Na Fig. 5.4, mostramos de forma mais clara o comportamento da densidade de corrente azimutal com relação ao parâmetro α_0 para $\mu/m = 0.25$, $mr = 0.5$, $T/m = 0.5$. Os números próximos as curva são os valores de q . Como mencionamos a densidade de corrente é uma função ímpar de α_0 .

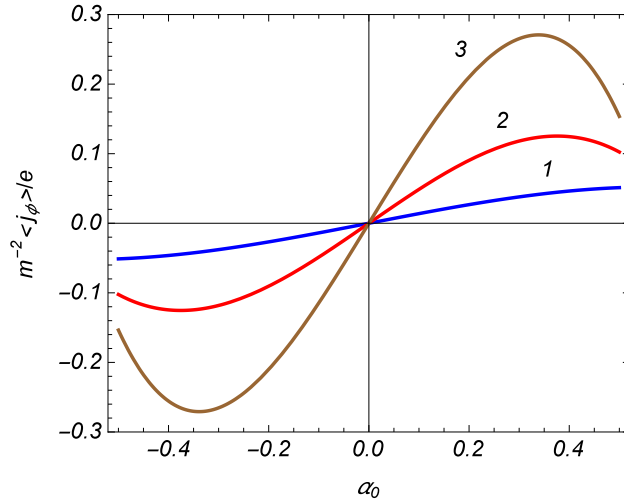


Figura 5.4: Densidade de corrente azimutal como função de α_0 para diferente valores do parâmetro q (valores próximos as curvas) e para $\mu/m = 0.25$, $mr = 0.5$, $T/m = 0.5$.

Para um campo sem massa, devido a condição $\mu \leq m$, também devemos considerar $\mu = 0$. Usando a expressão assintótica para a função de Macdonald para argumentos pequenos, encontramos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= -\frac{4er}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} ' (-1)^n \left[\sum_{l=1}^p \frac{(-1)^l s_l \sin(2\pi l \alpha_0)}{(n^2 \beta^2 + 4s_l^2 r^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{(n^2 \beta^2 + 4r^2 \cosh^2 y)^{-3/2}}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} f_2(q, \alpha_0, y) \right]. \end{aligned} \quad (5.104)$$

No caso do espaço-tempo de Minkowski com um fluxo magnético, a densidade de corrente é obtida a partir da Eq. (5.102) tomando $q = 1$:

$$\langle j_\phi \rangle = \frac{2^{5/2} e m^3 r}{\pi^{5/2}} \sin(\pi \alpha_0) \sum_{n=0}^{\infty} ' (-1)^n \cosh(n \beta \mu) \int_0^\infty dy \cosh(2\alpha_0 y) f_{3/2}(c_n(y)). \quad (5.105)$$

No vértice do cone, a parte térmica da densidade de corrente azimutal vai para zero com r para $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$, e com $r^{2\rho}$ para $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$. Para o primeiro caso o temos dominante é obtido diretamente a partir do termo $n \neq 0$ na Eq. (5.102) tomando $r = 0$. Isso se reduz as substituições $c_{nl} = c_n(y) = mn\beta$. No segundo caso, o termo dominante na expansão assintótica da parte térmica é encontrado de maneira similar ao que usamos para o condensado fermiônico, e tem a forma dada por,

$$\langle j_\phi \rangle \approx \langle j_\phi \rangle_0 + \frac{em^2q(mr)^{2\rho}}{2^{\rho-1}\pi^{5/2}}\Gamma(1/2 - \rho)\text{sgn}(\alpha_0)\cos(\pi\rho)\sum_{n=0}^{\infty}'(-1)^n\cosh(n\beta\mu)f_{\rho+1}(mn\beta). \quad (5.106)$$

O valor esperado no vácuo diverge com $1/r^2$ e, portanto, é dominante próximo ao vértice do cone.

Considerando o limite de baixas temperaturas para um valor fixo de mr , a principal contribuição para a parte térmica da densidade de corrente azimutal é proveniente do termo com $n = 1$ e encontramos,

$$\langle j_\phi \rangle \approx \langle j_\phi \rangle_0 + \frac{2emT^2re^{-\beta(m-|\mu|)}}{\pi} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l s_l \sin(2\pi l\alpha_0) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right]. \quad (5.107)$$

Neste limite a contribuição é finita e os efeitos da temperatura é suprimido pelo fator $e^{-\beta(m-|\mu|)}$.

Uma representação alternativa para a densidade de corrente no caso $|\mu| \leq m$, é obtida usando a fórmula dada pela Eq. (5.48)

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= -\frac{2eT}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left\{ \sum_{l=1}^p (-1)^l \sin(2\pi l\alpha_0) K_1(2rs_l b_n) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) K_1(2rb_n \cosh y)}{[\cosh(2qy) - \cos(q\pi)] \cosh y} \right\}, \end{aligned} \quad (5.108)$$

onde b_n é dado por (5.50).

A altas temperaturas, assumindo que $rT \gg 1$, a contribuição dominante na Eq. (5.108) é devida aos termos com $n = 0$ e $n = -1$. Para $q > 2$ encontramos

$$\langle j_\phi \rangle \approx \frac{2eT^{3/2}}{\sqrt{s_1 r}} \sin(2\pi\alpha_0) \frac{\cos(2rs_1\mu)}{e^{2\pi r s_1 T}}. \quad (5.109)$$

No caso $q < 2$, assumindo $T \gg 1/[\pi r \sin^2(q\pi/2)]$, o termo dominante é dado por

$$\langle j_\phi \rangle \approx \frac{eqT \sin(\pi q \alpha_0) \cos(2r\mu)}{\pi r \sin(\pi q/2) e^{2\pi r T}}. \quad (5.110)$$

A dependência da densidade de corrente na temperatura é mostrada na Fig. 5.5 considerando dois valores para μ/m (números próximos as curvas). Consideramos os valores $q = 1.5$, $\alpha_0 = 0.25$, $mr = 0.5$.

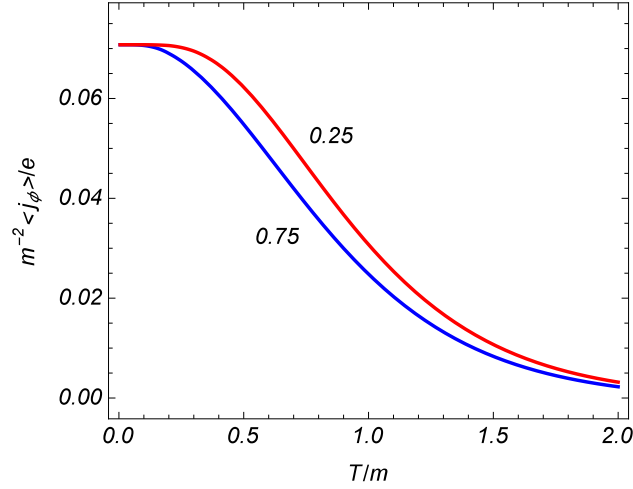


Figura 5.5: Densidade corrente em função da temperatura. Os números próximos as curvas são os valores da razão μ/m considerando os valores $q = 1.5$, $\alpha_0 = 0.25$, $mr = 0.5$.

Para a investigação da corrente azimutal assintótica para grandes distâncias a partir da origem, usamos novamente a representação (5.108). No caso $q > 2$, a dominante contribuição é devida ao termo com $l = 1$, $n = 0, 1$ e obtemos

$$\langle j_\phi \rangle \approx \frac{2eT \sin(2\pi\alpha_0)}{\sqrt{\pi s_1 r}} \text{Re} \left(b_0^{1/2} e^{-2rs_1 b_0} \right). \quad (5.111)$$

Para $q < 2$ e não muito próximo de 2, o termo dominante é dado pela expressão

$$\langle j_\phi \rangle \approx \frac{eq \sin(\pi q \alpha_0) T}{\pi \sin(\pi q/2) r} \text{Re} \left(e^{-2rb_0} \right). \quad (5.112)$$

5.4.2 Análise da densidade de corrente para $|\mu| > m$

Agora consideramos o densidade de corrente para o caso em que $|\mu| > m$. A expressão correspondente tem a forma

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= \langle j_\phi \rangle_0 + \langle j_\phi \rangle_\pm + \frac{e}{\pi} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma^2/E}{e^{\beta(E-|\mu|)} + 1} \left\{ \sum_{l=1}^p (-1)^l \sin(2\pi l \alpha_0) \right. \\ &\times \left. J_1(2\gamma r s_l) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) J_1(2\gamma r \cosh y)}{[\cosh(2qy) - \cos(q\pi)] \cosh y} \right\}, \end{aligned} \quad (5.113)$$

onde os sinais superior e inferior correspondem aos casos $\mu < -m$ e $\mu > m$, respectivamente. A expressão para $\langle j_\phi \rangle_\pm$ no lado direito é dado pela Eq. (5.101). A temperatura zero, $T \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_{T=0} &= \langle j_\phi \rangle_0 - \frac{ep_0^3}{2\pi m} \left\{ \sum_{l=1}^p (-1)^l \sin(2\pi l \alpha_0) g'_1(p_0 r s_l) \right. \\ &- \left. \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) g'_1(p_0 r \cosh y)}{[\cosh(2qy) - \cos(q\pi)] \cosh y} \right\}, \end{aligned} \quad (5.114)$$

com a função $g_1(u)$ dada pela Eq. (5.59) e $g'_1(u) = \partial_u g_1(u)$. O segundo termo no lado direito é a contribuição de anti-partículas para $\mu < -m$ e de partículas para $\mu > m$. No caso de um campo sem massa, obtemos

$$\langle j_\phi \rangle_{T=0} = \frac{e}{4\pi r^2} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{(-1)^l}{s_l^2} \sin(2\pi l \alpha_0) g_0(|\mu| r s_l) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y) g_0(|\mu| r \cosh y)}{[\cosh(2qy) - \cos(q\pi)] \cosh^3 y} \right\}, \quad (5.115)$$

com a função

$$g_0(u) = \int_0^{2u} dx x J_1(x) - 1. \quad (5.116)$$

A contribuição na Eq. (5.115) devida a -1 no lado direito da (5.116) corresponde a densidade de corrente no vácuo. Ela depende da coordenada radial com $1/r^2$.

A dependência da densidade de corrente azimutal na distância a partir da origem é mostrada na Fig. (5.6) para $\alpha_0 = 0.25$ e para diferentes valores de q (números próximos as curvas). O gráfico da esquerda é para $\mu/m = 0.25$, $T/m = 0.5$. As linhas cheias no gráfico da direita representa a densidade de corrente a temperatura zero para um campo fermiônico sem massa com potencial químico μ . As linhas tracejadas são as densidades de corrente no vácuo para o mesmo modelo

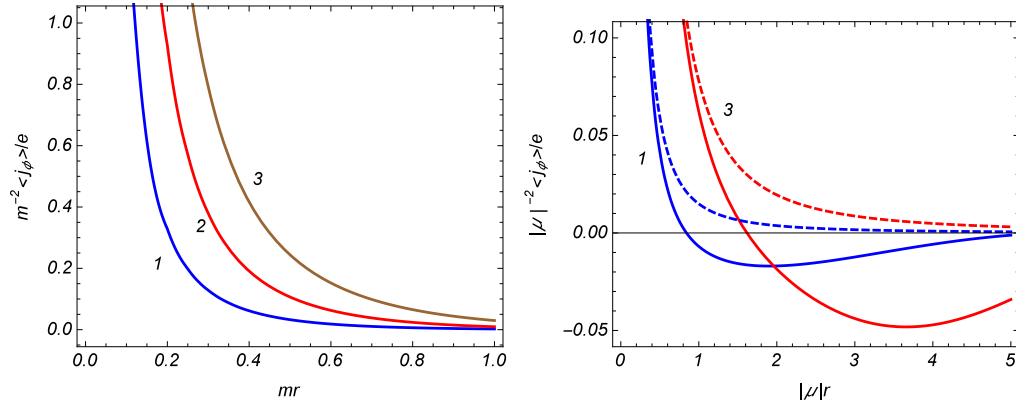


Figura 5.6: Densidade de corrente *versus* a distância a partir do vértice para $\alpha_0 = 0.25$ e para diferentes valores do parâmetro q (números próximos as curvas). O gráfico da esquerda é considerado para $\mu/m = 0.25$, $T/m = 0.5$. O gráfico da direita representa o limite de temperatura zero (linhas cheias) e as correntes no vácuo (linhas tracejadas) para um campo sem massa.

5.5 Considerações a respeito dos resultados

Neste capítulo, investigamos a influência da temperatura e de um fluxo magnético no condensado fermiônico e nas densidades de corrente, considerando um espaço-tempo de (2+1) dimensões e a presença de um potencial químico não-nulo. Nossos cálculos foram desenvolvidos considerando diferentes intervalos do potencial químico quando comparado com a energia do estado fundamental, $\epsilon_0 = m$.

No caso em que $|\mu| \leq m$, o condensado foi apresentado na forma dada pela Eq. (5.41), onde $s = 1$ e $s = -1$ correspondem as duas representações inequivalentes da álgebra de Clifford. Com estas representações, o termo de massa quebra as invariâncias P e T , e relacionado a este fato, o condensado tem paridade não definida em relação as reflexões $\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0$ e $\mu \rightarrow -\mu$. Para um campo sem massa, na ausência de um potencial químico, o condensado é nulo. Na ausência do fluxo magnético, o condensado é dado pela Eq. (5.44) e tem sinal oposto para as duas representações irreduzíveis com o mesmo módulo. Outro caso especial corresponde ao *bulk* de Minkowski ($q = 1$) na presença do fluxo magnético com o condensado sendo dado pela Eq. (5.45). De modo a tornar mais claro o comportamento do condensado, consideramos duas contribuições assintóticas da fórmula geral. A parte térmica do condensado é finita no vértice para $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$ e diverge com $1/r^{1-2\rho}$, com $\rho = q(1/2 - |\alpha_0|)$, no caso em que $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$. A divergência está relacionada com o modo irregular. Para um campo massivo, o condensado no vácuo diverge no vértice

com $1/r$ e esta parte é dominante para pontos próximos a origem. Considerando o limite de baixas temperaturas e para $|\mu| < m$ a parte térmica é suprimida pelo fator $e^{-(m-|\mu|)/T}$. De modo a investigar o limite assintótico de altas temperaturas, para o condensado fermiônico, fornecemos uma representação alternativa dada pela Eq. (5.49). Neste limite, para pontos não muito próximos a origem, o condensado é dominado pela parte de Minkowski. Os efeitos induzidos pelo déficit de ângulo planar e pelo fluxo magnético são suprimidos pelo fator $e^{-2\pi r T \sin(\pi/q)}$ para $q > 2$ e pelo fator $e^{-2\pi r T}$ para $q < 2$. O comportamento assintótico para grandes distâncias a partir do vértice do cone é dado pelas Eqs. (5.55) e (5.56) para os casos em que $q > 2$ e $q < 2$, respectivamente. A expressão para o condensado no caso $|\mu| > m$ assume a forma dada pela Eq. (5.57) com os sinais superiores e inferiores correspondendo a $\mu < -m$ e $\mu > m$, respectivamente. Neste caso, o condensado, no limite de temperatura zero, é dado pela Eq. (5.58), além disso, a parte devido ao vácuo contém uma contribuição devido a anti-partículas ($\mu < -m$) ou partículas ($\mu > m$) preenchendo os estados com energias $m \leq E \leq |\mu|$. Para pontos próximos ao vértice do cone, o condensado à temperatura zero é dominado pela parte devido ao vácuo, enquanto que a grandes distâncias a contribuição para partículas ou anti-partículas são dominantes.

As contribuições devido à partículas e anti-partículas para a densidade de carga são dadas pela Eq. (5.68), e são transformadas para a forma da Eq. (5.70) no caso $|\mu| \leq m$. Para a densidade de carga total temos a representação dada pela Eq. (5.74). No caso de um campo sem massa com um potencial químico não-nulo, como consequência do cancelamento das contribuições devido à partículas e anti-partículas, a densidade de carga é nula. Similarmente ao condensado, a densidade de carga tem paridade indefinida com respeito as mudanças de sinais α_0 e μ . Na ausência do fluxo magnético, a expressão geral é simplificada para a Eq. (5.76), e a densidade de carga é uma função ímpar do potencial químico. A densidade de carga para o *bulk* de Minkowski com fluxo magnético é dada pela Eq. (5.77). O comportamento da parte térmica da densidade de carga próxima ao vértice do cone é similar ao condensado. Nesta região a densidade de carga total se comporta com $1/r$ e é dominada pela parte devida ao vácuo. Para grandes distâncias da origem, o comportamento da parte topológica na densidade de carga é dada pelas Eqs. (5.84) e (5.85) para $q > 2$ e $q < 2$, respectivamente. Nesta região temos uma supressão exponencial da contribuição topológica. A baixas temperaturas e para $|\mu| < m$ a densidade de carga é dominada pela parte do vácuo e os efeitos da parte térmica são suprimidos pelo fator $e^{-(m-|\mu|)/T}$. Para altas temperaturas, a principal contribuição é devida a parte de Minkowski, e a parte topológica se comporta com $e^{-2\pi r T \sin(\pi/q)}$ e $e^{-2\pi r T}$ nos casos em que $q > 2$ e $q < 2$, respectivamente. Para os valores do

potencial químico $|\mu| > m$, a expressão para a densidade de carga assume a forma dada pela Eq. (5.86) com o sinal superior e inferior correspondendo a $\mu < -m$ e $\mu > m$. A contribuição de anti-partículas ou partículas para a densidade de carga a temperatura zero é dada pelo segundo termo no lado direito da Eq. (5.87). Para um campo sem massa este termo é o único presente e a expressão é simplificada a forma da Eq. (5.89).

A carga total induzida pelo déficit de ângulo planar e pelo fluxo magnético é finita. Para $|\mu| \leq m$ é dada pela Eq. (5.94) com ΔQ_0 sendo a carga no vácuo. No caso em que $|\mu| > m$, a carga a temperatura zero recebe uma contribuição adicional de partículas ou anti-partículas, dependendo do sinal do potencial químico. Esta contribuição é dada pelo segundo termo no lado direito da Eq. (5.96). Para um dado sinal do potencial químico a carga é completamente determinada pelos parâmetros topológicos do modelo, q e α_0 .

No problema em consideração, a única componente não-nula para a densidade de corrente é devida a contribuição ao longo da direção azimutal. Esta componente não depende da representação da álgebra de Clifford. Para o potencial químico na região $|\mu| \leq m$, o valor correspondente esperado é dado pela Eq. (5.102). A densidade de corrente tem paridade indefinida com respeito as mudanças $\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0$ e $\mu \rightarrow -\mu$, e é uma função ímpar de α_0 uma função par de μ . Em particular, a densidade de corrente é nula na ausência do fluxo magnético. Para um campo sem massa a expressão geral é simplificada para a Eq. (5.104), e no *bulk* de Minkowski na presença de um fluxo magnético temos a Eq. (5.105). A parte térmica da componente azimutal da densidade de corrente é nula no vértice do cone com r para $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$ e com $r^{2\rho}$ no caso $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$. A corrente no vácuo diverge com $1/r^2$ e é dominante para pontos próximos ao vértice do cone. À baixas temperaturas e para $|\mu| < m$ a contribuição devida a temperatura finita é dada pelo segundo termo no lado direito da Eq. (5.106) com uma supressão exponencial. À altas temperaturas a densidade de corrente é suprimida pelo fator $e^{-2\pi r T \sin(\pi/q)}$ no caso $q > 2$ e por $e^{-2\pi r T}$ para $q < 2$. Os comportamentos assintóticos a grandes distâncias são dados pelas Eqs. (5.111) e (5.112) nessas duas regiões de q . Para $|\mu| > m$, a expressão para a densidade de corrente tem a forma dada pela Eq. (5.113) e a densidade de corrente a temperatura zero é dada pela Eq. (5.114). A última consiste em duas partes: a corrente no vácuo a corrente devida a partículas ou anti-partículas preenchendo os estados com energias $m \leq E \leq |\mu|$.

CAPÍTULO 6

Considerações finais

Nesta tese, estudamos o efeito da topologia e da presença de campos magnéticos nas flutuações quânticas do vácuo associada à campos bosônicos e fermiônicos carregados. Nesse sentido, avaliamos os valores esperados das correntes de vácuo induzidas, e suas dependências com os parâmetros físicos relevantes do modelo em questão. No que se refere a campos quânticos bosônicos, estudamos o efeito da compactificação na variável unidimensional nos valores esperados da corrente induzida e com relação ao campo fermiônico, estudamos o efeito térmico, admitindo que o campo está em equilíbrio térmico à uma temperatura T , e um potencial químico, μ , não-nulo.

Investigamos as densidades de corrente bosônica no espaço-tempo compactificado de uma corda cósmica com $(D + 1)$ -dimensões, induzidas por um fluxo magnético ao longo do eixo axial. Admitimos também a presença de um fluxo magnético extra devido a presença de um potencial vetor ao longo da dimensão compacta. Os cálculos foram realizados pela imposição da condição de quasi-periodicidade, uma fase arbitrária β , nas soluções da Eq. de Klein-Gordon. A solução geral foi obtida considerando a presença de um potencial vetor na Eq. (4.5). De modo a desenvolver essas análises, calculamos a função de Wightman de frequências positivas, Eq. (4.22). A mesma é necessária para calcular os VEVs das densidades

de corrente bosônica apresentadas pela Eq. (4.24).

Gostaríamos de enfatizar que as correntes analisadas no capítulo 4 se referem a correntes induzidas no vácuo pela presença do fluxo magnético e pela compactificação. Como podemos notar, o déficit de ângulo planar associado com o espaço-tempo da corda cósmica aumenta a intensidade da densidade de corrente azimutal, e a compactificação introduz uma contribuição adicional para a corrente azimutal, e cria uma nova densidade de corrente axial.

Também investigamos os valores esperados do condensado fermiônico e das densidades de corrente para um campo fermiônico massivo com um potencial químico não-nulo, μ , em equilíbrio térmico à uma temperatura T , em um espaço-tempo cônico com $(2+1)$ dimensões na presença de um fluxo magnético localizado no vértice do cone. Para os espinores do campo realizando as duas representações inequivalentes da álgebra de Clifford, os valores esperados são decompostos em três contribuições: uma devido ao valor esperado no vácuo, e as duas outras devido às partículas e anti-partículas. Todas essas contribuições são funções periódicas do fluxo magnético com período igual ao fluxo quântico. A contribuição devida ao valor esperado no vácuo foi investigada em um trabalho anterior e nesta tese nos preocupamos somente com os efeitos da temperatura finita. Além disso, vimos que o termo de massa na equação de Dirac, quebra a invariância por paridade e reversão temporal, o que justifica os cálculos para as duas representações irredutíveis da álgebra de Clifford.

Uma extensão natural de nosso trabalho, para o caso bosônico, é o cálculo do Tensor energia-momento associado a este modelo. Já para o caso fermiônico, a perspectiva futura é calcular o condensado fermiônico e as densidades de corrente induzidas por uma fronteira, além dos respectivos Tensores energia-momento. Além disso, pretendemos estudar as cordas cósmicas em teorias alternativas da gravitação, como por exemplo, a teoria de Rastall e as teorias $f(R)$. Outro tópico que nos desperta interesse, é o estudo de cordas cósmicas no contexto de branas.

APÊNDICE A

Fórmulas de soma

Iremos desenvolver aqui as somas envolvendo as funções de Bessel modificadas nas Eqs. (4.31) e (4.41).

A.1 Fórmula de soma envolvendo a função de Bessel modificada $I_{\beta_n}(w)$

Iniciaremos, primeiro com a Eq. (4.31). Vamos considerar a soma

$$\mathcal{I}(w, \alpha, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\alpha|}(w) = I_{q|\alpha_0|}(w) + \sum_{n=1}^{\infty} [I_{q(n+\alpha_0)}(w) + I_{q(n-\alpha_0)}(w)]. \quad (\text{A.1})$$

Uma representação integral muito útil para $I_{\beta_n}(w)$ foi previamente considerada em [84] e será usada aqui. Esta representação é dada por

$$I_{\beta_n}(w) = \frac{\sin(\pi\beta_n)}{\pi\beta_n} e^{-w} + \frac{w}{\pi} \int_0^\pi dy \sin y \frac{\sin(y\beta_n)}{\beta_n} e^{w \cos y} - \frac{\sin(\pi\beta_n)}{\pi} \int_0^\infty dy e^{-w \cosh y - \beta_n y}, \quad (\text{A.2})$$

onde em nosso caso $\beta_n = q|n + \alpha_0|$. Com a substituição da Eq. (A.2) na Eq. (A.1), podemos trabalhar cada termo separadamente. Assim, usando a Eq. (06) (seção 5.4.3) de [88], a soma

em n do primeiro e segundo termos no lado direito da Eq. (A.2) é

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n \theta)}{\beta_n} = \frac{\pi}{q \sin(\pi \alpha_0)} \sin[(2k+1)\pi \alpha_0]. \quad (\text{A.3})$$

que é válida somente para $2k\pi/q < \theta < (2k+2)\pi/q$.

Agora, consideramos a soma em n do último termo do lado direito da Eq. (A.2). Esta soma pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\pi \beta_n) e^{-\beta_n y} &= \sin(\pi q \alpha_0) e^{-q \alpha_0 y} + \sum_{n=1}^{\infty} [\sin[(n + \alpha_0)q\pi] e^{-(n + \alpha_0)qy} \\ &+ \sin[(n - \alpha_0)q\pi] e^{-(n - \alpha_0)qy}]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Além disso, pode-se considerar a soma do lado direito da Eq. (A.4) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} e^{\mp \alpha_0 q y} \sum_{n=1}^{\infty} \sin[(n \pm \alpha_0)q\pi] e^{-nqy} &= e^{\mp \alpha_0 q y} \left[\cos(\alpha_0 \pi q) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi q) e^{-nqy} \right. \\ &\quad \left. \pm \sin(\alpha_0 \pi q) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi q) e^{-nqy} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Assim, podemos usar as Eqs. (01) e (02) (seção 5.4.12) de [88] para realizar as somas no lado direito da Eq. (A.5). Fazendo isso, e substituindo o resultado na Eq. (A.4), obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\pi \beta_n) e^{-\beta_n y} = \frac{f(q, \alpha_0, y)}{\cosh(qy) - \cos(\pi q)}, \quad (\text{A.6})$$

onde

$$f(q, \alpha_0, y) = \sin[(1 - |\alpha_0|)\pi q] \cosh(|\alpha_0|qy) + \sin(|\alpha_0|\pi q) \cosh[(1 - |\alpha_0|)qy]. \quad (\text{A.7})$$

Como pode ser visto na Eq. (A.7), estamos considerando somente o módulo de α_0 . de modo a fazer a Eq. (A.7) uma função par em α_0 e, portanto, compatível com a Eq. (A.1) que também é uma função par do mesmo parâmetro. Finalmente, combinando as Eqs. (A.1),

(A.2), (A.3) e (A.6), estamos aptos a mostrar que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(w, \alpha_0, q) &= \frac{e^w}{q} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{e^{-w \cosh y} f(q, \alpha_0, y)}{\cosh(qy) - \cos(\pi q)} \\ &+ \frac{2}{q} \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2k\pi\alpha_0) e^{w \cos(2k\pi/q)}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde $[q/2]$ representa a parte inteira de $q/2$, e o sinal $'$ na soma significa que no caso em que $q = 2p$ o termo $k = q/2$ deve ser considerado com o coeficiente $1/2$. Note que fazendo a soma em k de $-p$ a $+p$ na Eq. (A.3) nos fornece o último termo do lado direito da Eq. (A.8), após combinar as Eqs. (A.1), (A.2), (A.3) e (A.6). Podemos ver agora que a Eq. (A.8) está em perfeita concordância com a Eq. (A.1), ou seja, ambas são funções par de α_0 . Este fato somente é possível se considerarmos o módulo de α_0 em na Eq. (A.7).

Para valores inteiros de q e $\alpha_0 = 0$, temos

$$\mathcal{I}(w, q) = \frac{e^w}{q} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q-1} e^{w \cos(2k\pi/q)}. \quad (\text{A.9})$$

O caso especial em (A.9) foi considerado em outros contextos [26–30]).

A.2 A segunda soma envolvendo a função de Bessel modificada $I_{\beta_n}(z)$

Vamos agora provar a soma em n presente na Eq. (4.41), que é considerada aqui na seguinte forma

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n + \alpha_0) I_{q|n+\alpha_0|}(w) \\ &= \alpha_0 I_{q|\alpha_0|}(w) + \sum_{n \geq 1} [(n + \alpha_0) I_{q(n+\alpha_0)}(w) - (n - \alpha_0) I_{q(n-\alpha_0)}(w)], \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

que é uma função ímpar de α_0 . Assim, considerando primeiramente somente valores positivos de α_0 e usando as relações [72]:

$$\begin{aligned} (n + \alpha_0)I_{q(n+\alpha_0)}(w) &= -\frac{w}{q} \frac{d}{dw} I_{q(n+\alpha_0)}(w) + \frac{w}{q} I_{q(n+\alpha_0)-1}(w) , \\ (n - \alpha_0)I_{q(n-\alpha_0)}(w) &= \frac{w}{q} \frac{d}{dw} I_{q(n-\alpha_0)}(w) - \frac{w}{q} I_{q(n-\alpha_0)+1}(w) , \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

na Eq. (A.10), temos

$$\begin{aligned} S &= -\frac{w}{q} \frac{d}{dw} \left[I_{q|\alpha_0|}(w) + \sum_{n \geq 1} I_{q(n+\alpha_0)}(w) + \sum_{n \geq 1} I_{q(n-\alpha_0)}(w) \right] \\ &\quad + \frac{w}{q} \left[I_{q|\alpha_0|-1}(w) + \sum_{n \geq 1} I_{q(n+\alpha_0)-1}(w) + \sum_{n \geq 1} I_{q(n-\alpha_0)+1}(w) \right] . \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Com a definição, $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 - 1/q$, podemos reescrever a Eq. (A.12) como

$$S = -\frac{w}{q} \frac{d}{dw} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\alpha_0|}(w) + \frac{w}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\tilde{\alpha}_0|}(w). \quad (\text{A.13})$$

Por outro lado, podemos trocar os fatores $(n \pm \alpha)$ entre as relações apresentadas na Eq. (A.11). Isto fornece

$$S = \frac{w}{q} \frac{d}{dw} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\alpha_0|}(w) - \frac{w}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\tilde{\alpha}_0|}(w) , \quad (\text{A.14})$$

onde agora, $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 + 1/q$. A substituição da Eq. (A.8) na Eq. (A.14), pode ser separada em dois termos, ou seja

$$S = S_{\alpha_0} + S_{\tilde{\alpha}_0} \quad (\text{A.15})$$

O primeiro termo é dado por

$$\begin{aligned} S_{\alpha_0} &= -\frac{2w}{q^2} \sum_{k=0}^{[q/2]'} \cos(2k\pi/q) \cos(2k\pi\alpha_0) e^{w \cos(2k\pi/q)} \\ &\quad - \frac{w}{q\pi} \int_0^\infty dy \cosh y \frac{e^{-w \cosh y} f(q, \alpha_0, y)}{\cosh(qy) - \cos(\pi q)}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

e o segundo termo, $S_{\tilde{\alpha}_0}$, é dado em termos de S_{α_0} de acordo com

$$S_{\tilde{\alpha}_0} = -S_{\alpha_0} + \frac{2w}{q^2} \sum_{k=1}^{[q/2]'} \sin(2k\pi/q) \sin(2k\pi\alpha_0) e^{w \cos(2k\pi/q)} + \frac{w}{q\pi} \int_0^\infty dy \sinh y \frac{e^{-w \cosh y} g(q, \alpha_0, y)}{\cosh(qy) - \cos(\pi q)}, \quad (\text{A.17})$$

onde a função, $g(q, \alpha_0, y)$, é definida como

$$g(q, \alpha_0, y) = \sin(q\pi\alpha_0) \sinh[(1 - |\alpha_0|)qy] - \sinh(yq\alpha_0) \sin[(1 - |\alpha_0|)\pi q]. \quad (\text{A.18})$$

Como consideramos somente valores positivos de α_0 , a Eq. (A.18) não precisa depender de $|\alpha_0|$. Entretanto, se tomarmos valores negativos de α_0 na Eq. (A.10) obteríamos uma expressão similar, assim como na Eq. (A.18), porém com sinal contrário. Isto sugere que para satisfazer ambas as possibilidades, temos que incluir o módulo de α_0 como mostrado na Eq. (A.18).

Portanto, substituindo a Eq. (A.17) na Eq. (A.15) finalmente encontramos

$$S = \frac{2w}{q^2} \sum_{k=1}^{[q/2]'} \sin(2k\pi/q) \sin(2k\pi\alpha_0) e^{w \cos(2k\pi/q)} + \frac{w}{q\pi} \int_0^\infty dy \sinh y \frac{e^{-w \cosh y} g(q, \alpha_0, y)}{\cosh(qy) - \cos(\pi q)}. \quad (\text{A.19})$$

Note que ambas as Eqs. (A.10) e Eq. (A.19) são funções ímpar de α_0 , como deveriam ser. Isto somente é possível se considerarmos o módulo de α_0 como mostrado em na Eq. (A.18). Notemos também que usando a Eq. (A.13), em vez da Eq. (A.14), obteríamos a Eq. (A.19).

A.3 Análise da densidade de corrente induzida ao longo das dimensões extras

Os VEVs da densidade de corrente ao longo das dimensões extras, $\langle j^i(x) \rangle$ para $i = 4, \dots, D$, são dadas por

$$\langle j_i(x) \rangle = ie \lim_{x' \rightarrow x} (\partial_{x^i} - \partial_{x'^i}) W(x, x'), \quad (\text{A.20})$$

que podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \langle j_i(x) \rangle &= -\frac{eq}{L(2\pi)^{D-2}} \lim_{x' \rightarrow x} \sum_{\sigma} e^{iqn\Delta\phi} e^{i\vec{k} \cdot \Delta\vec{r}_{\parallel}} k^i \lambda J_{q|n+\alpha|}(\lambda r) J_{q|n+\alpha|}(\lambda r') \\ &\times \frac{e^{-i\omega_l \Delta t + ik_l \Delta z}}{\omega_l} . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

A integral em k^i pode ser avaliada usando a Eq. (4.13) e a identidade

$$\frac{1}{\sqrt{m^2 + \lambda^2 + \tilde{k}_l^2 + \vec{k}^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty ds e^{-(m^2 + \lambda^2 + \tilde{k}_l^2 + \vec{k}^2)s^2} . \quad (\text{A.22})$$

Então, a integral em k^i é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk^i k^i e^{-s^2(k^i)^2} e^{ik^i \Delta x_{\parallel}^i} = \frac{i\sqrt{\pi} \Delta x_{\parallel}^i}{2s^3} e^{-\frac{(\Delta x_{\parallel}^i)^2}{4s^2}} . \quad (\text{A.23})$$

Esta expressão tende a zero no limite $\Delta x_{\parallel}^i \rightarrow 0$. Além disso, no limite de coincidência, $r' \rightarrow r$, a integral em λ fornece um resultado equivalente a Eq. (4.28). Além do mais, as integrais nas outras componentes do momento ao longo das dimensões extras, k^r com $r \neq i$, fornecem resultados similares aos dados na Eq. (4.29). Usando novamente os resultados dados pelas Eqs. (A.8) e (A.7) para a soma envolvendo a função modificada de Bessel e identificando o primeiro termo como a contribuição do espaço-tempo de Minkowski na ausência do fluxo magnético, podemos renormalizar estas densidades de corrente somente desprezando este termo. Fazendo isso, podemos ver que os termos dentro da soma e da integral contêm fatores $e^{-r^2 \sin^2(\pi k/q)/s^2}$ e $e^{-r^2 \cosh^2(y/2)/s^2}$, respectivamente. Consequentemente, as integrais em s dos termos remanescentes são finitas. Então, nossa conclusão final é que, por conta da Eq. (A.23) ir para zero no limite de coincidência e valores renormalizados para as outras integrais são finitos neste limite, não haverá densidade de corrente induzida no vácuo ao longo das dimensões extras.

APÊNDICE B

Fórmulas usadas na simplificação da carga total

Neste apêndice derivamos as fórmulas usadas na Seção 5.3 para a simplificação das expressões da carga total. Vamos considerar a integral

$$\mathcal{P} = \int_0^\infty dx e^{-x} [\mathcal{I}(q, \alpha_0, x) - e^x/q], \quad (\text{B.1})$$

onde $\mathcal{I}(q, \alpha_0, x)$ é dado pela Eq. (5.27) com $\alpha = \alpha_0$. A partir da Eq. (5.29) segue que a integral é convergente. Iremos avaliá-la de duas maneiras distintas. Primeiro, usamos a Eq. (5.27). Substituindo na Eq. (B.1), notamos que as integrais separadas com o primeiro e segundo termo no colchete divergem. De modo a ter as integrações separadas corretas, escrevemos a integral como $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_0^\infty dx e^{-\lambda x} [\dots]$. Para $\lambda > 1$ ambas as integrais convergem separadamente. Usando o resultado padrão para a integral com a função de Bessel modificada [83], após a soma em j e fazendo $\lambda \rightarrow 1$ obtemos

$$\mathcal{P} = \frac{1 - q^2}{12q} + \alpha_0 (q\alpha_0 - 1). \quad (\text{B.2})$$

Na segunda abordagem para a avaliação da integral na Eq. (B.1) usamos a repre-

sentação dada pela Eq. (5.29). Após a integração elementar em x encontramos

$$\mathcal{P} = \frac{1}{q} \sum_{l=1}^p \frac{(-1)^l}{s_l^2} \cos(2\pi l(\alpha_0 - 1/2q)) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \alpha_0, 2y)/\cosh^2 y}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)}. \quad (\text{B.3})$$

A partir das Eqs. (B.2) e (B.3) segue que

$$\sum_{l=1}^p \frac{(-1)^l}{s_l^2} \cos(2\pi l(\alpha_0 - 1/2q)) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \alpha_0, 2y)/\cosh^2 y}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} = \frac{1 - q^2}{12} + q\alpha_0(q\alpha_0 - 1). \quad (\text{B.4})$$

No caso especial em que $\alpha_0 = 0$ a expressão acima nos dá

$$\sum_{l=1}^p \frac{(-1)^l}{s_l^2} c_l + \frac{2q}{\pi} \cos(q\pi/2) \int_0^\infty dy \frac{\sinh(qy) \sinh y \cosh^{-2} y}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} = \frac{1 - q^2}{12}. \quad (\text{B.5})$$

Como outra consequência da Eq. (B.4) temos

$$\sum_{l=1}^p \frac{(-1)^l}{s_l} \sin(2\pi l\alpha_0) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f_2(q, \alpha_0, y)/\cosh^2 y}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} = -q\alpha_0. \quad (\text{B.6})$$

Outras relações são obtidas a partir da Eq. (B.4) pela diferenciação com respeito a α_0 .

Referências Bibliográficas

- [1] T. W. Kibble, *Topology of cosmic domains and strings*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **9** (1976), no. 8 1387.
- [2] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, 1994.
- [3] R. A. Battye, J. Robinson, and A. Albrecht, *Structure formation by cosmic strings with a cosmological constant*, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4847–4850, [astro-ph/9711336].
- [4] P. P. Avelino, E. P. S. Shellard, J. H. P. Wu, and B. Allen, *Cosmic string seeded structure formation*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 2008–2011, [astro-ph/9712008].
- [5] **Planck** Collaboration, P. A. R. Ade et al., *Planck 2013 results. XXV. Searches for cosmic strings and other topological defects*, *Astron. Astrophys.* **571** (2014) A25, [astro-ph.C0/1303.5085].
- [6] V. Berezhinsky, B. Hnatyk, and A. Vilenkin, *Gamma-ray bursts from superconducting cosmic strings*, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 043004, [astro-ph/0102366].
- [7] T. Damour and A. Vilenkin, *Gravitational wave bursts from cosmic strings*, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3761–3764, [gr-qc/0004075].
- [8] P. Bhattacharjee and G. Sigl, *Origin and propagation of extremely high-energy cosmic rays*, *Phys. Rept.* **327** (2000) 109–247, [astro-ph/9811011].

- [9] S. Sarangi and S. H. H. Tye, *Cosmic string production towards the end of brane inflation*, *Phys. Lett. B* **536** (2002) 185–192, [[hep-th/0204074](#)].
- [10] G. Dvali and A. Vilenkin, *Formation and evolution of cosmic D strings*, *JCAP* **0403** (2004) 010, [[hep-th/0312007](#)].
- [11] A. Vilenkin, *Gravitational Field of Vacuum Domain Walls and Strings*, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 852–857.
- [12] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Vortex Line Models for Dual Strings*, *Nucl. Phys. B* **61** (1973) 45–61.
- [13] D. Garfinkle, *General Relativistic Strings*, *Phys. Rev. D* **32** (1985) 1323–1329.
- [14] B. Linet, *A Vortex Line Model for Infinite Straight Cosmic Strings*, *Phys. Lett. A* **124** (1987) 240–242.
- [15] B. Linet, *Quantum Field Theory in the Space-time of a Cosmic String*, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 536–539.
- [16] B. Allen and E. P. S. Shellard, *On the evolution of cosmic strings*, in *The formation and evolution of cosmic strings : proceedings of a workshop supported by the SERC and held in Cambridge, 3-7 July, 1989* (G. W. Gibbons, S. W. Hawking, and T. Vachaspati, eds.), (Cambridge), pp. 421–448, Cambridge University Press, 1990.
- [17] M. Guimaraes and B. Linet, *Selfinteraction and quantum effects near a point mass in three-dimensional gravitation*, *Class. Quant. Grav.* **10** (1993) 1665–1680.
- [18] P. Davies and V. Sahni, *Quantum gravitational effects near cosmic strings*, *Class. Quant. Grav.* **5** (1988) 1.
- [19] T. Souradeep and V. Sahni, *Quantum effects near a point mass in (2+1)-Dimensional gravity*, *Phys. Rev. D* **46** (1992) 1616–1633, [[hep-ph/9208219](#)].
- [20] V. P. Frolov and E. Serebryanyi, *Vacuum Polarization in the Gravitational Field of a Cosmic String*, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 3779–3782.
- [21] B. Linet, *Euclidean spinor Green’s functions in the space-time of a straight cosmic string*, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 3694–3703, [[gr-qc/9412050](#)].

- [22] E. S. Moreira Jr., *Massive quantum fields in a conical background*, *Nucl. Phys. B* **451** (1995) 365–378, [hep-th/9502016].
- [23] V. B. Bezerra and N. R. Khusnutdinov, *Vacuum expectation value of the spinor massive field in the cosmic string space-time*, *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 3449–3462, [hep-th/0602048].
- [24] J. Dowker, *Vacuum Averages for Arbitrary Spin Around a Cosmic String*, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 3742.
- [25] M. Guimaraes and B. Linet, *Scalar Green’s functions in an Euclidean space with a conical-type line singularity*, *Commun. Math. Phys.* **165** (1994) 297–310.
- [26] J. Spinelly and E. Bezerra de Mello, *Vacuum polarization of a charged massless scalar field on cosmic string space-time in the presence of a magnetic field*, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) 873–888, [hep-th/0301169].
- [27] J. Spinelly and E. Bezerra de Mello, *Vacuum polarization by a magnetic field in the cosmic string space-time*, *Int. J. Mod. Phys. A* **17** (2002) 4375–4384.
- [28] J. Spinelly and E. Bezerra de Mello, *Vacuum polarization of a charged massless fermionic field by a magnetic flux in the cosmic string space-time*, *Int. J. Mod. Phys. D* **13** (2004) 607–624, [hep-th/0306103].
- [29] J. Spinelly and E. Bezerra de Mello, *Vacuum polarization by a magnetic flux in a cosmic string background*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **127** (2004) 77–83, [hep-th/0305142].
- [30] J. Spinelly and E. Bezerra de Mello, *Spinor Green function in higher-dimensional cosmic string space-time in the presence of magnetic flux*, *JHEP* **0809** (2008) 005, [hep-th/0802.4401].
- [31] S. Bellucci, E. Bezerra de Mello, A. de Padua, and A. Saharian, *Fermionic vacuum polarization in compactified cosmic string spacetime*, *Eur. Phys. J. C* **74** (2014) 2688, [hep-th/1311.5484].
- [32] E. Bezerra de Mello and A. Saharian, *Fermionic current induced by magnetic flux in compactified cosmic string spacetime*, *Eur. Phys. J. C* **73** (2013) 2532, [hep-th/1305.6902].

- [33] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *The electronic properties of graphene*, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 109–162.
- [34] E. Fradkin, *Condensed matter theories.(book reviews: Field theories of condensed matter systems.)*, *Science* **254** (1991) 1235–1236.
- [35] G. Dunne, *Topological aspects of low dimensional systems*, 1999.
- [36] X. L. Qi and S. C. Zhang, *Topological insulators and superconductors*, *Rev. Mod. Phys.* **83** (2011), no. 4 1057–1110.
- [37] V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, and J. P. Carbotte, *AC conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics*, *Int. J. Mod. Phys. B* **21** (2007) 4611–4658, [cond-mat/0706.3016].
- [38] H. Meyer-Ortmanns and T. Reisz, *Principles of phase structures in particle physics*, vol. 77. World Scientific, 2006.
- [39] A. J. Niemi and G. W. Semenoff, *Axial Anomaly Induced Fermion Fractionization and Effective Gauge Theory Actions in Odd Dimensional Space-Times*, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 2077.
- [40] A. N. Redlich, *Parity Violation and Gauge Noninvariance of the Effective Gauge Field Action in Three-Dimensions*, *Phys. Rev. D* **29** (1984) 2366–2374.
- [41] R. Jackiw, *Fractional Charge and Zero Modes for Planar Systems in a Magnetic Field*, *Phys. Rev. D* **29** (1984) 2375. [Erratum: *Phys. Rev. D* 33, 2500 (1986)].
- [42] D. Boyanovsky and R. Blankenbecler, *Axial and Parity Anomalies and Vacuum Charge: A Direct Approach*, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 3234.
- [43] R. Blankenbecler and D. Boyanovsky, *Induced Quantum Numbers in (2+1)-dimensional QED*, *Phys. Rev. D* **34** (1986) 612.
- [44] A. P. Polychronakos, *Induced Vacuum Quantum Numbers in (2+1)-dimensions*, *Nucl. Phys. B* **278** (1986) 207–224.
- [45] Y. Hosotani, *Spontaneously broken Lorentz invariance in three-dimensional gauge theories*, *Phys. Lett. B* **319** (1993) 332–338, [hep-th/9308045].

- [46] Y. Hosotani, *Spontaneous breakdown of the Lorentz invariance*, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 2022–2025, [[hep-th/9402096](#)].
- [47] D. Cangemi, E. D'Hoker, and G. V. Dunne, *Derivative expansion of the effective action and vacuum instability for QED in (2+1)-dimensions*, *Phys. Rev. D* **51** (1995) R2513–R2516, [[hep-th/9409113](#)].
- [48] D. Wesolowski and Y. Hosotani, *Spontaneous magnetization in Lorentz invariant theories*, *Phys. Lett. B* **354** (1995) 396–402, [[hep-th/9505113](#)].
- [49] T. Itoh and T. Sato, *Charge condensation in QED in three-dimensions with a Chern-Simons term*, *Phys. Lett. B* **367** (1996) 290–298, [[hep-th/9508113](#)].
- [50] P. Cea, *Vacuum stability for Dirac fermions in three-dimensions*, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 7985–7988, [[hep-th/9606149](#)].
- [51] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, *Dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in (2+1)-dimensions*, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 4718–4735, [[hep-th/9407168](#)].
- [52] R. R. Parwani, *On chiral symmetry breaking by external magnetic fields in QED in three-dimensions*, *Phys. Lett. B* **358** (1995) 101–105, [[hep-th/9504020](#)].
- [53] G. V. Dunne and T. Hall, *Inhomogeneous condensates in planar QED*, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 2220–2226, [[hep-th/9511192](#)].
- [54] A. K. Das and M. B. Hott, *Thermal effects on the catalysis by a magnetic field*, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 2252–2255, [[hep-th/9504086](#)].
- [55] M. d. J. Anguiano-Galicia, A. Bashir, and A. Raya, *Anti-psi psi-condensate in constant magnetic fields*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 127702, [[hep-ph/0710.5139](#)].
- [56] A. Raya and E. Reyes, *Fermion Condensate and Vacuum Current Density Induced by Homogeneous and Inhomogeneous Magnetic Fields in (2+1)-Dimensions*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 016004, [[hep-ph/1006.2548](#)].
- [57] N. Dorey and N. E. Mavromatos, *QED in three-dimension and two-dimensional superconductivity without parity violation*, *Nucl. Phys. B* **386** (1992) 614–680.
- [58] K. Farakos and N. E. Mavromatos, *Hidden nonAbelian gauge symmetries in doped planar antiferromagnets*, *Phys. Rev. B* **57** (1998) 3017–3030, [[cond-mat/9611072](#)].

- [59] M. Franz, Z. Tesanovic, and O. Vafek, *QED(3) theory of pairing pseudogap in cuprates. 1. From D wave superconductor to antiferromagnet via 'algebraic' Fermi liquid*, *Phys. Rev. B* **66** (2002) 054535, [[cond-mat/0203333](#)].
- [60] E. A. F. Bragança, H. F. Santana Mota, and E. R. Bezerra de Mello, *Induced vacuum bosonic current by magnetic flux in a higher dimensional compactified cosmic string spacetime*, *Int. J. Mod. Phys. D* **24** (2015), no. 07 1550055, [[hep-th/1410.1511](#)].
- [61] S. Bellucci, E. R. Bezerra de Mello, E. Bragança, and A. A. Saharian, *Finite temperature fermion condensate, charge and current densities in a $(2+1)$ -dimensional conical space*, *Eur. Phys. J. C* **76** (2016), no. 6 350, [[hep-th/1603.05228](#)].
- [62] F. Gürsey, *Reformulation of general relativity in accordance with mach's principle*, *Annals of Physics* **24** (1963) 211–242.
- [63] L. P. Eisenhart, *Riemmanian Geometry*. Oxford Univ. Press, London, 1926.
- [64] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1964.
- [65] I. D. Soares, *Ii escola de cosmologia e gravitação*, Edited by M. Novello, CBPF, Rio de Janeiro, pg **479** (1980).
- [66] A. Grib, S. Mamaev, and V. Mostepanenko, *Quantum vacuum effects in strong fields*, *Friedmann Lab. Publishing, St. Petersburg* (1994) 24–25.
- [67] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*. Wiley, 2 ed., 2010.
- [68] L. E. Reichl, *A modern course in statistical physics*, 1999.
- [69] E. Merzbacher, *Quantum mechanics. 1970*, John Wiler & Sons, New York Zbl0102 **42701** (1977), no. 4.
- [70] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space*. Cambridge University Press, 1984.
- [71] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics*, vol. 3. Springer, 1990.
- [72] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, 1980.

- [73] S. Bellucci, A. Saharian, and V. Bardeghyan, *Induced fermionic current in toroidally compactified spacetimes with applications to cylindrical and toroidal nanotubes*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 065011, [[hep-th/1002.1391](#)].
- [74] L. Sriramkumar, *Fluctuations in the current and energy densities around a magnetic flux carrying cosmic string*, *Class.Quant.Grav.* **18** (2001) 1015–1025, [[gr-qc/0011074](#)].
- [75] Y. Sitenko and N. Vlasii, *Induced vacuum current and magnetic field in the background of a cosmic string*, *Class.Quant.Grav.* **26** (2009) 195009, [[hep-th/0909.0405](#)].
- [76] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55. Courier Corporation, 1964.
- [77] C. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, *Observation of resonance condensation of fermionic atom pairs*, *Physical Review Letters* **92** (2004), no. 4 040403.
- [78] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Topologically Massive Gauge Theories*, *Annals Phys.* **140** (1982) 372–411. [*Annals Phys.* 281,409(2000)].
- [79] S. Bellucci, E. R. Bezerra de Mello, and A. A. Saharian, *Fermionic condensate in a conical space with a circular boundary and magnetic flux*, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 085017, [[hep-th/1101.4130](#)].
- [80] P. de Sousa Gerbert and R. Jackiw, *Classical and Quantum Scattering on a Spinning Cone*, *Commun. Math. Phys.* **124** (1989) 229.
- [81] P. de Sousa Gerbert, *Fermions in an Aharonov-Bohm Field and Cosmic Strings*, *Phys. Rev. D* **40** (1989) 1346.
- [82] Y. A. Sitenko, *Selfadjointness of the two-dimensional massless Dirac Hamiltonian and vacuum polarization effects in the background of a singular magnetic vortex*, *Annals Phys.* **282** (2000) 167–217, [[hep-th/0101024](#)].
- [83] A. Prudnikov, I. Brychkov, and O. Marichev, *Integrals and Series*, vol. 02. Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
- [84] E. Bezerra de Mello, V. Bezerra, A. Saharian, and V. Bardeghyan, *Fermionic current densities induced by magnetic flux in a conical space with a circular boundary*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 085033, [[hep-th/1008.1743](#)].

-
- [85] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge university press, 1995.
- [86] S. Bellucci and A. A. Saharian, *Fermionic Casimir densities in toroidally compactified spacetimes with applications to nanotubes*, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 085019, [[hep-th/0902.3726](#)].
- [87] S. Bellucci, A. A. Saharian, and V. M. Bardeghyan, *Induced fermionic current in toroidally compactified spacetimes with applications to cylindrical and toroidal nanotubes*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 065011, [[hep-th/1002.1391](#)].
- [88] A. Prudnikov, I. Brychkov, and O. Marichev, *Integrals and Series: Elementary Functions*, vol. 01. Gordon and Breach Science Publishers, 1986.