



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

JÚLIO ELOÍSIO BRANDÃO DA SILVA

**EFEITOS GEOMÉTRICOS, INERCIAIS E TOPOLÓGICOS NA
CONDUTIVIDADE HALL**

TESE DE DOUTORADO

JOÃO PESSOA, PB
MARÇO, 2017

JÚLIO ELOÍSIO BRANDÃO DA SILVA

**EFEITOS GEOMÉTRICOS, INERCIAIS E TOPOLÓGICOS NA
CONDUTIVIDADE HALL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Mores

JOÃO PESSOA, PB

MARÇO, 2017

S586e Silva, Júlio Eloísio Brandão da.
Efeitos geométricos, inerciais e topológicos na
condutividade Hall / Júlio Eloísio Brandão da Silva. - João
Pessoa, 2017.
78 f.: il. -

Orientador: Fernando Jorge Sampaio Mores.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN

1. Física. 2. Efeito Hall Quântico Inteiro. 3. Níveis de
Landau. 4. Efeitos Inerciais. 5. Defeitos Topológicos. I. Título.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

JÚLIO ELOÍSIO BRANDÃO DA SILVA

**EFEITOS GEOMÉTRICOS, INERCIAIS E TOPOLÓGICOS NA
CONDUTIVIDADE HALL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Data de aprovação: ___ / ___ / _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Mores

UFPB

Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo

UFPB

Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas

UFPB

Prof. Dr. Anderson Barbosa

UFRPE

Prof. Dr. Fernando Antonio Nóbrega Santos

UFPE



CCEN

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Júlio Eloísio Brandão da Silva**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

1 Aos dezesseis dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete, às 14h00, no
2 Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da
5 Matéria Condensada, **Júlio Eloísio Brandão da Silva**. A comissão examinadora foi
6 composta pelos professores doutores: *Fernando Jorge Sampaio Moraes* (UFPB),
7 orientador e presidente da banca examinadora, *Sérgio André Fontes Azevedo* (UFPB),
8 *Alexandre da Silva Rosas* (UFPB), *Fernando Antônio Nóbrega* (UFPE) e *Anderson Luiz*
9 *da Rocha e Barbosa* (UFRPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Fernando Jorge
10 Sampaio Moraes comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a
11 palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de
12 tese intitulado “*Efeitos inerciais e topológicos na condutividade Hall*”. Concluída a
13 exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte
14 parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o
15 respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo
16 Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da
17 Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **16 de março de 2017**.

18

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes <i>Orientador - UFPB</i>	<u><i>Fernando Moraes</i></u>
Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo <i>UFPB</i>	<u><i>Sérgio Azevedo</i></u>
Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas <i>UFPB</i>	<u><i>Alexandre Rosas</i></u>
Prof. Dr. Fernando Antônio Nóbrega <i>UFPE</i>	<u><i>Fernando Antônio Nóbrega</i></u>
Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa <i>UFRPE</i>	<u><i>Anderson Luiz da Rocha e Barbosa</i></u>
Lic. Danilo Wilson Lemos Menezes <i>Técnico em Assuntos Educacionais</i>	<u><i>Danilo Wilson Lemos Menezes</i></u>

A meus pais.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus todo poderoso, por ter me dado permissão para realização desse trabalho. A meus amados pais (avós) João e Alaídes (in memoriam) que me permitiram começar toda essa jornada. A meus pais Júlio e Márcia que sempre se orgulharam e acreditaram em mim. Agradeço também a todos os meus amigos que me acompanharam e acompanham durante esse longo período. Não poderia deixar de agradecer também a Fernando Moraes por acreditar sempre no meu potencial e me ajudar a ser o profissional que sou. Por fim, à agência de fomento (CAPES) que me auxiliou financeiramente nesse período de permanência no programa de doutorado.

*A mente que se abre a uma nova idéia
jamais voltará ao seu tamanho original.*

—ALBERT EINSTEIN

Resumo

A atuação de campos eletromagnéticos em partículas têm sido extensivamente estudada em diferentes áreas da física. Em mecânica quântica por exemplo, efeitos como Aharonov-Bohm, níveis de Landau e condutividade Hall, têm sempre motivado novos trabalhos inclusive para modelos análogos inerciais. Os efeitos inerciais desempenham um papel importante na mecânica clássica, mas tem sido largamente ignorados em mecânica quântica. No entanto, a analogia entre forças inerciais sobre partículas de massa e forças eletromagnéticas sobre partículas carregadas não é nova. Um outro fator que pode influenciar no comportamento clássico e quântico de partículas é a geometria. Um elemento relacionado a geometria e que tem sido bastante estudado em diversas áreas, é o defeito topológico. Os defeitos topológicos representam uma interface entre áreas como cosmologia, gravitação e matéria condensada. Tais defeitos em matéria condensada podem ser desenvolvidos através da teoria clássica da elasticidade. Contudo, devido a interdisciplinaridade desse tema, abordagens provenientes da gravitação podem também descrevê-los. Com base nessa analogia, caracteriza-se o meio formado por um defeito topológico mediante um tensor métrico. A partir dessa abordagem, diversos problemas podem ser discutidos analisando a influência do defeito topológico na solução do problema.

Nesse trabalho, será discutido como campo magnético, rotação e defeitos topológicos, em especial a desclinação, influenciam os níveis de Landau e a condutividade Hall para um gás de elétrons bidimensional planar não interagente. Primeiramente discutiremos a influência de cada um desses elementos e em seguida a influência de todos simultaneamente. Será mostrado como a rotação quebra a degenerescência dos níveis de Landau aumentando conseqüentemente a condutividade Hall. Será mostrado também que acoplamento dos três elementos gera uma região para campos magnéticos fracos com sem estados ligados. Com um outro ponto de partida mostraremos também que a rotação pode ser utilizada para sintonizar a condutividade Hall.

Palavras-chave: Efeito Hall Quântico Inteiro, Níveis de Landau, Efeitos inerciais, defeitos topológicos.

Abstract

Electromagnetic fields acting on particles have been extensively studied in different areas of physics. In quantum mechanics for example, effects such as Aharonov-Bohm, Landau levels and Hall conductivity, have always motivated new papers including analogous inertial models. Inertial effects play an important role in classical mechanics, but have been largely ignored in quantum mechanics. However, the analogy between inertial forces on mass particles and electromagnetic forces on charged particles is not new. Another factor that may influence the classical and quantum behavior of particles is geometry. An element related to geometry that has been extensively studied in several areas is the topological defect. Topological defects represent an interface between areas such as cosmology, gravitation, and condensed matter. Such defects in condensed matter can be developed through the classical theory of elasticity. However, due to the interdisciplinarity of this theme, approaches from gravitation can also describe them. Based on this analogy, the medium formed by a topological defect is characterized by a metric tensor. From this approach, several problems can be discussed by analyzing the influence of the topological defect in the solution of the problem.

In this work, it will be discussed how magnetic field, rotation and topological defects, especially the disclination, influence in the Landau Levels and the Hall conductivity for a non-interacting planar two-dimensional electron gas. First we will discuss the influence of each of these elements and then the influence of all of them simultaneously.

Keywords: Integer Quantum Hall Effect, Landau Levels, Inertial Effects, topological defects.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	viii
1 Introdução Geral	1
2 Efeitos das interações eletromagnéticas	4
2.1 Introdução	4
2.2 Efeito Hall Clássico	4
2.3 Níveis de Landau	7
Solução para os níveis de Landau em coordenadas cilíndricas	10
2.4 Efeito Hall quântico inteiro	11
2.5 Efeito Aharonov-Bohm	15
3 Efeitos Inerciais	17
3.1 Introdução	17
3.2 Abordagem clássica	17
3.2.1 Definição de referenciais inerciais e não-inerciais	17
3.2.2 Referencial em rotação	18
3.2.3 Efeito Hall devido a forças inerciais	21
3.3 Estudos em mecânica quântica	22
3.3.1 Efeito Aharonov-Carmi	23
3.3.2 Análogo rotacional do efeito Hall quântico	24
3.3.3 Influência da rotação em nanoestruturas de carbono: fulereno e nanotubo girante	26
4 Defeitos topológicos	29
4.1 Processo de Volterra	30
4.2 Vetor e circuito de Burgers	30
4.3 Deslocações	32

4.4	Desclinação	33
4.4.1	Vetor e ângulo de Frank	34
4.5	Influência de defeitos topológicos em níveis de energia	36
5	Efeitos inerciais e topológicos na condutividade Hall	39
5.1	Transformações para os campos eletromagnéticos em um referencial girante . .	39
5.2	Níveis de energia	40
5.2.1	Influência da rotação	44
5.2.2	Influência da rotação na presença de campo magnético	44
5.2.3	Quantização Hall	46
5.2.4	Rotação, campo magnético e desclinação simultaneamente	50
5.3	Condutividade Hall	52
5.4	Sintonizando a condutividade Hall com rotação	54
	Resultados e publicações do doutorado	58
6	Conclusões e Perspectivas	59
	Referências	61

Lista de Figuras

- 2.1 Uma diferença de potencial ao longo do eixo x implica em uma corrente nessa direção. Ao aplicarmos um campo magnético na direção z haverá uma separação de cargas no eixo y e, conseqüentemente, surgirá nessa direção uma diferença de potencial que será chamada de potencial Hall. 5
- 2.2 Visualização do efeito Hall. As partículas representadas pelo número 1 são elétrons, a placa 2 é a amostra condutora, o número 3 indica os pólos magnéticos, 4 são as linhas de campo magnético e 5 é a fonte de alimentação. Na figura A observa-se que os elétrons são desviados para a direita da sua trajetória devido a força de Lorentz. Como o termo magnético da força de Lorentz é dado por $q\vec{v} \times \vec{B}$, nas figuras B, C e D, altera-se respectivamente o sentido da corrente, o campo magnético e ambos simultaneamente [36] 7
- 2.3 O primeiro diagrama, onde tem-se $B = 0$ representa a relação entre a densidade de estados e a energia para uma partícula livre em uma amostra. Observa-se que existe um contínuo de estados abaixo da energia de Fermi e que todos os estados estão ocupados pois o sistema se encontra a uma temperatura muito baixa. No gráfico, tem-se que ao aplicar campo magnético na amostra, os estados serão quantizados e nem todos os valores de energia serão possíveis. Na última figura, ilustra-se que ao haver impurezas no sistema, que irá causar espalhamento e desordem, os níveis deixaram de ser linhas para serem bandas que terão estados estendidos (que contribuem para a corrente de condução) e estados localizados. Fonte: [39] 12
- 2.4 A curva que consiste de degraus, representa a resistência Hall, enquanto a curva que nas regiões dos platôs Hall é nula, ilustra o comportamento da resistência longitudinal, que é por onde passa a corrente usual. Fonte: [39]. 14
- 2.5 Dois feixes de elétrons são direcionados a um solenoide. Em seguida, se separam e se recombina com uma fase que está relacionada ao potencial vetor. Fonte: [44]. 15

3.1	(a) Neste esquema podemos observar o referencial fixo (x', y') e o referencial girante (x, y) , que tem origem no centro do disco e velocidade angular $\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$. Na figura (b) estão expressos os vetores deslocamento \vec{r}' e \vec{r} nos referenciais fixo e girante respectivamente, e os mesmos vetores após um intervalo de tempo dt . O vetor em azul representa o deslocamento da partícula no intervalo dt . É importante deixar claro que nesta figura não está sendo considerado movimento de translação do referencial girante.	19
3.2	A amostra é colocada sobre um disco girante, que tem o eixo z como eixo de rotação.	22
3.3	Resultados de Johnson. (a) Para cada valor de ℓ foram calculados os 100 primeiros zeros da função de Bessel, que estão representado pelas três linhas verticais. A taxa de rotação utilizada foi 1MHz. Nota-se que as bandas são praticamente um contínuo. (b) A taxa de rotação utilizada agora foi de 100GHz e foram calculados os primeiros 1000 zeros da função de Bessel. No canto inferior direito a escala é ampliada para notar pequena diferença de energia entre 10 estados consecutivos para $\ell = 3$. Fonte: [14]	26
3.4	Fulereno e nanotubo girantes respectivamente. A velocidade angular $\vec{\omega}$ é considerada na direção z em ambos os casos. Fonte: [51, 52]	27
4.1	Formação de uma desclinação em cunha através do processo de Volterra. (a) Tem-se de início um toróide, onde faz-se um corte, (b) as duas faces do corte são separadas e (c) em seguida insere-se um cunha de material. Fonte: [24]. . .	30
4.2	(a) Circuito de Burgers com o defeito, (b) circuito sem o defeito e a representação do vetor de burgers retirado, (c) novamente o circuito de Burgers com o defeito e (d) é o circuito sem o defeito e a representação do vetor de Burgers, porém, o vetor de Burgers é ortogonal ao circuito sem defeito.	31
4.3	Na figura (a) e (b) tem-se duas deslocções laterais, enquanto a figura (c) representa uma deslocção parafuso, também conhecida como helicoidal. Fonte: [24].	32
4.4	As figuras (a) e (b) representam duas desclinações <i>twist</i> e a figura (c) é uma desclinação tipo cunha. Fonte: [24].	33
4.5	(a) Camada Plana de BN (boro e nitrogênio), (b) e (c) Desclinação positiva $0 < \alpha < 1$: retira-se uma cunha da camada de BN e depois junta-se as moléculas que foram rompidas, (d) e (e) desclinação negativa $\alpha > 1$: é inserido uma cunha no meio a mais no meio. Fonte: [25]	35

- 4.6 Para $\alpha < 1$, há uma redução da largura dos platôs Hall e um deslocamento dos degraus para a região com menores campos magnéticos. Para $\alpha > 1$, existem dois tipos de platôs: um com largura maior e outro com largura menor em comparação ao caso plano. O deslocamento dos degraus neste caso será para a região com maior campo magnético. Fonte: [71] 37
- 5.1 (a) Níveis de energia obtido através da equação (5.45) para $n = 1$. Todos os níveis com $\ell \geq 0$ são degenerados. (b) Níveis de energia obtidos através da equação (5.46) para $n = 1$. Os valores possíveis de energia são separados por $\hbar\omega_c/2$, como no oscilador harmônico. 46
- 5.2 Os níveis de energia obtidos do espectro de energia (5.48) para $\ell = -1$ (vermelho), $\ell = 0$ (verde) e $\ell = 1$ (azul) como uma função do parâmetro a . Cada linha representa um valor de n e a linha mais abaixo é $n = 0$. Quando a cresce, os níveis de energia com momento angular positivo são deslocado para cima, estados com momento angular negativo são deslocados para baixo e os níveis com momento angular nulos não são alterados. 47
- 5.3 Os degraus da quantização Hall como uma função do campo magnético com $\Omega = 0$ (linha pontilhada) e $\Omega = 50$ GHz (linha contínua). Foi considerado apenas estados com $\ell = -1, 0, 1$ e $E_F = 6.24$ meV. Cada degrau para o caso com $\Omega = 0$ se divide em três quando $\Omega \neq 0$ 48
- 5.4 Os degraus da quantização Hall como uma função da rotação para $B = 10$ T e $E_F = 6.24$ meV. Quando o módulo da rotação é menor que 100×10^{11} Hz a condutividade Hall oscila. Para valores muito maiores para taxa de rotação, esses resultados não são válidos. 49
- 5.5 Espectro de energia próximo do nível de Fermi de um disco girando (500 GHz) com uma desclinação: (a) $\alpha = 5/6$ (b) $\alpha = 1$ (c) $\alpha = 7/6$. As linhas vermelhas, verdes e azuis representam os níveis com $\ell = -1, 0, 1$, respectivamente. A linha preta representa o nível de Fermi. 51
- 5.6 O mesmo da figura 5.5 para uma região de campo magnético de 10 a 40 T. 52
- 5.7 Degraus Hall para disco girante (500GHz) com desclinação ($\alpha = 5/6$ e $7/6$) e degraus Hall para um disco sem rotação e desclinação. Quando $\alpha = 1$ o disco está sem desclinação. 53
- 5.8 Condutividade Hall para um gás de elétrons bidimensional girante. Para buracos (elétrons) a condutividade Hall é aumentada (reduzida) para velocidades de rotação positivas e reduzida (aumentada) no caso contrário. A rotação pode ser utilizada para sintonizar a condutividade Hall para um dado valor de campo magnético fixo, apenas fazendo variar a velocidade de rotação. 57

Introdução Geral

O eletromagnetismo é uma das áreas da física que tem papel fundamental no desenvolvimento tecnológico da humanidade, assim como outros campos de estudo tais como as mecânicas clássica e quântica. O eletromagnetismo consegue descrever diversos fenômenos do cotidiano, além de ser um dos responsáveis por parte de avanços tecnológicos expressivos ao longo da história. Uma das invenções presentes no cotidiano, já há algum tempo que pode ser citada, é a televisão. Inventada à base de um tubo que tinha em uma das extremidades um cátodo de onde partiam feixes de elétrons em direção à outra ponta do tubo, ânodo, e eram controlados por campos magnéticos gerado por bobinas.

Campos elétrico e magnético são tão fundamentais que tornam-se base para diversos efeitos em outras áreas como a mecânica quântica. Dentre os efeitos relacionados ao eletromagnetismo que têm grande expressão, está o efeito Hall clássico [1], que foi base para a descoberta do efeito Hall quântico inteiro e efeito Hall quântico fracionário; ambos receberam prêmio Nobel, em 1985 e 1998, respectivamente [2, 3, 4]. Outros efeitos quânticos relacionados a campo magnético, são os conhecidos níveis de Landau e o efeito Aharonov-Bohm [5, 6]. Alguns desses fenômenos são do século XIX e ainda despertam o interesse de muitos físicos que vêm estudando-os em diferentes sistemas, como por exemplo, materiais com defeitos topológicos [7].

Uma das linhas de estudos atuais, envolve fazer uma analogia entre interações eletromagnéticas e forças inerciais. Fenômenos clássicos e quânticos, que têm como fonte os campos elétrico e magnético, passam a ser gerados por uma rotação [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Em 1999, Johnson demonstrou que forças inerciais devido a rotação produzem um efeito similar ao efeito Hall em metais e semicondutores [14]. Ainda no mesmo trabalho, Johnson tentou mostrar um fenômeno análogo ao efeito Hall quântico. A similaridade com o efeito clássico foi bem esclarecida. Todavia, ao estudar o similar quântico, não se obteve uma analogia completa devido à falta de degenerescência e à dependência com o comprimento da amostra. Assim, Johnson conseguiu mostrar o caráter quantizado dos níveis de energia, contudo a degenerescência característica dos níveis de Landau não ocorre em seu estudo.

Em 1959, Yakir Aharonov e David Bohm [6], descobriram teoricamente que dois feixes de elétrons passando por lados opostos de um solenóide, adquirem uma fase relativa, que depende do fluxo de campo magnético que está no interior do solenóide. Após essa descoberta, muitos

outros efeitos que envolvem fase tipo Aharonov-Bohm, porém, com fontes diferentes, passaram a ser investigados [15, 16]. Entre esses, podemos citar o trabalho de Aharonov junto com Gideon Carmi [16]. A abordagem é análoga à do efeito Aharonov-Bohm. Todavia, ao invés da utilização de campo magnético no sistema, eles observaram uma interferência devido à rotação do mesmo. Recentemente, foram realizados estudos sobre o efeito Aharonov-Carmi no fulereno, já que o mesmo tem sido observado em rotação com frequências relativamente altas [17].

Diversas áreas da física teórica fazem uso de ferramentas geométricas para descrever uma variedade de fenômenos. Os defeitos topológicos, por exemplo, representam uma quebra de simetria e surgem em áreas como matéria condensada, teoria de campos, cosmologia e gravitação. Existe uma forte correlação entre esses defeitos tanto em sistemas da matéria condensada quanto em gravitação. Essa analogia permite a realização de experimentos em cristais líquidos e superflúidos de hélio, que possibilitam a compreensão de vários aspectos dos sistemas cosmológicos. Em ambas as áreas, a geometria de espaços curvos surge como uma ferramenta essencial para descrever esses sistemas [18].

Na Matéria Condensada, os defeitos topológicos surgem nos cristais. Sabe-se que se um material passa de uma fase para outra, por exemplo, da fase líquida para a sólida, sua estrutura muda, entretanto algumas regiões no cristal tendem a manter-se na organização da fase anterior. Esses trechos do material sem simetria geram um defeito na sua estrutura [19]. Entre esses defeitos, serão focados os lineares que podem ser as desclinações, deslocamentos e despirações [62].

Em Cosmologia, os defeitos topológicos aparecem devido a transições de fase que ocorreram no início do universo. Ao considerar que ele está em expansão, pode-se dizer que está em constante transição de fase. Em cada transição de fase pode existir uma quebra de simetria, que representa um defeito topológico. Entre os defeitos mais comuns estão as cordas cósmicas, paredes de domínio e monopólos [21, 22, 23].

Em 1992, Katanaev e Volovich mostraram a equivalência entre a gravidade tridimensional e a teoria de defeitos em sólidos [24]. Tal descrição pode ser utilizada tanto para os defeitos isolados quanto para as densidades de defeitos. Baseado nesse formalismo, efeitos clássicos e quânticos na presença de defeitos passaram a ser estudados usando técnicas da relatividade geral, tais como efeito Aharonov-Bohm¹, efeito Casimir², níveis de Landau³, cálculos de geodésicas⁴, além de estudar a dinâmica de elétrons e buracos na presença de uma desclinação [25, 26, 27, 28, 29].

¹Efeito quântico que fornece um significado físico para o potencial vetor eletromagnético.

²O efeito Casimir é uma manifestação do vácuo quântico através da atração entre duas placas paralelas perfeitamente condutoras e eletricamente neutras.

³Os níveis de Landau representam os estados quânticos possíveis para uma partícula carregada submetida a um campo magnético.

⁴Geodésica é a curva de menor distância entre dois pontos.

Ainda não existe uma teoria de defeitos fundamental, todavia, a que melhor descreve os defeitos em sólidos é baseada na geometria de Riemann-Cartan, que trata tanto de curvatura quanto de torção. Consequentemente, a métrica que descreverá o meio formado por esses defeitos será não-Euclidiana. Nessa abordagem utilizam-se técnicas de geometria diferencial para descrever a tensão e a deformação induzidas pelo defeito naquele meio.

Na mecânica clássica, uma maneira de estudar a influência da geometria em fenômenos físicos é o estudo de geodésicas ao redor de defeitos topológicos, assim como já tem sido feito com buracos negros⁵ [32], em alguns casos na presença de campo magnético [33, 34], o mesmo é feito para cordas cósmicas [35]. Para encontrar as trajetórias das partículas, com essas geometrias, são utilizados alguns métodos como Hamilton-Jacobi e a equação da geodésica. Em mecânica quântica, pode-se observar a influência desses defeitos em níveis de Landau, condutividade Hall, dentre outros.

Nessa tese, será analisada a influência de campos eletromagnéticos, rotação e defeitos topológicos no comportamento de um gás de elétrons. O foco desse estudo é nos níveis de energia e na condutividade Hall dependente desses três parâmetros. Será analisada a influência de cada um desses elementos separadamente, estudo já encontrado na literatura, bem como a presença de dois desses elementos simultaneamente e por fim, como o sistema se comporta na presença simultânea da rotação, do campo eletromagnético e do defeito topológico.

A tese esta dividida em seis capítulos, no primeiro fez-se uma introdução geral sobre os estudos relacionados a efeitos eletromagnéticos, inerciais e defeitos topológicos. No segundo, serão discutidos alguns efeitos clássicos e quânticos das interações eletromagnéticas. No terceiro, serão abordados alguns efeitos inerciais bem como suas analogias com efeitos apresentados no capítulo dois. No capítulo 4, os defeitos topológicos serão discutidos, bem como sua influência em alguns sistemas. Após descrever alguns estudos a respeito de campos eletromagnéticos, rotação e defeitos topológicos em diversos sistemas, no capítulo cinco discutiremos a influência desses elementos em nosso sistema. Por fim, no capítulo seis será apresentada a conclusão e as perspectivas para este trabalho.

⁵Os buracos negros têm como característica serem muito massivos, e segundo a Relatividade Geral, a existência de massa implica em uma curvatura do espaço-tempo

Efeitos das interações eletromagnéticas

2.1 Introdução

Campos eletromagnéticos são responsáveis por muitos efeitos na física clássica e quântica. Muitos desses são estudados nas mais diversas condições. Desde sistemas sofisticados ao ponto de ser de difícil experimentação, a experimentos que facilmente pode-se medir em um bom laboratório. Neste capítulo, estudaremos a influência de campo magnético em alguns sistemas físicos. Analisaremos efeitos clássicos como o efeito Hall e fenômenos quânticos como efeito Hall Quântico, níveis de Landau e efeito Aharonov-Bohm.

2.2 Efeito Hall Clássico

Em 1879, Edwin H. Hall no final do seu doutorado começou a investigar o efeito do campo magnético em um fio condutor. A origem da descoberta desse efeito foi quando Hall notou que ao aplicar campo magnético perpendicular a uma lâmina de ouro, por onde percorria uma corrente longitudinal, fazia surgir uma diferença de potencial entre as laterais da lâmina. Hall mostrou esse resultado ao seu orientador, professor Henry Augustus Rowland, que disse que a diferença de potencial era devida ao acúmulo de cargas elétricas de sinais contrários. Essa carga teriam sido afetadas pela força eletromagnética. Essa teoria contradizia um trecho do livro "Eletricidade e Magnetismo" de James Clerk Maxwell, no qual afirmava-se que a força devido a um campo magnético aplicado a um condutor por onde se passava uma corrente elétrica, apenas atuaria no condutor e não nas cargas que atravessam o mesmo. Obviamente, no início, o professor Rowland não pensava em questionar o que Maxwell havia escrito. Todavia, em seguida, não apresentou nenhuma objeção e ainda fez algumas sugestões para o experimento que Hall queria propor. A idéia de Hall era investigar se a força exercida em um fio condutor devido à presença de um campo magnético externo atuaria em todo o fio ou apenas nos portadores de carga que estivessem em movimento. O experimento baseava-se na seguinte reflexão [1]:

"Se a corrente de eletricidade em um fio condutor fixo é atraída por um ímã, a corrente deveria ser desviada para um dos lados do fio, e assim a resistência experimentada deveria ser acrescentada."¹

Como representado pela figura (2.1), o experimento consiste em um condutor submetido a um campo magnético uniforme em uma direção ortogonal à corrente. Os elétrons em movimento sentem a força de Lorentz ($\vec{F}_{Lor} = q\vec{v} \times \vec{B}$) e são deslocados em uma direção ortogonal ao campo e à corrente, já que o resultado do produto vetorial entre a velocidade das partículas carregadas \vec{v} e o campo magnético \vec{B} deve ser perpendicular a ambos. Assim, haverá uma separação das cargas positivas e negativas, o que implicará na geração de uma diferença de potencial, que é chamada tensão Hall. O acúmulo de cargas nos lados do condutor irá aumentar até o limite em que a força elétrica devido à tensão gerada equilibre-se com a força de Lorentz.

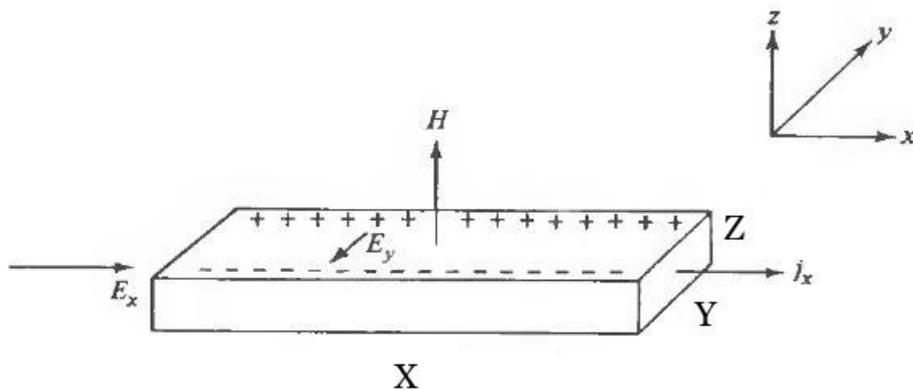


Figura 2.1: Uma diferença de potencial ao longo do eixo x implica em uma corrente nessa direção. Ao aplicarmos um campo magnético na direção z haverá uma separação de cargas no eixo y e, conseqüentemente, surgirá nessa direção uma diferença de potencial que será chamada de potencial Hall.

No equilíbrio, o campo elétrico gerado pelo acúmulo de cargas pode ser escrito como,

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{Lor} = 0, \quad (2.1)$$

$$q\vec{E} = -q\vec{v}_i \times \vec{B}, \quad (2.2)$$

$$\vec{E} = -\vec{v}_i \times \vec{B}, \quad (2.3)$$

que, em módulo, pode ser escrito como

$$E_y = v_x B_z. \quad (2.4)$$

¹"If the current of electricity in a fixed conductor is itself attracted by a magnet, the current should be drawn to one side of the wire, and therefore the resistance experienced should be increased"

O potencial elétrico devido às cargas separadas pode ser escrito como $V = -\int_0^Y E_y dy$, onde Y é a distância entre as cargas opostas acumuladas, v_i é a velocidade dos portadores de carga da corrente e v_x é sua componente na direção x . Assim, podemos escrever a diferença de potencial Hall, V_H , como,

$$V_H = v_x BY. \quad (2.5)$$

A velocidade dos portadores pode ser escrita em termos da densidade de cargas por volume n . Como o módulo da densidade de corrente é dado por $J = nqv$, e é definida como $J = i/A$ [37]. Usando as duas relações temos $v = \frac{i}{nqA}$, onde $A = YZ$ é a área da secção transversal por onde passa a corrente i . A expressão para o potencial Hall é dada por

$$V_H = \frac{iB}{nqZ}. \quad (2.6)$$

Como já era esperado, o potencial Hall depende diretamente do campo magnético, pois quanto maior for a força de Lorentz, mais portadores de cargas serão acumulados nas bordas da amostra e maior deverá ser a força elétrica para haver um equilíbrio e as cargas pararem de ser desviadas. Notemos que também existe uma dependência diretamente proporcional à corrente, já que maior sendo a corrente a força de Lorentz também aumentará. Consequentemente, o potencial Hall aumentará para haver o equilíbrio das forças. Dentre as dimensões da amostra, a única que terá importância é a espessura, logo, para que haja potenciais mensuráveis, devem ser utilizadas amostra mais finas da ordem de nanômetros.

Uma das principais utilidades do efeito Hall, é descobrir a concentração dos portadores de cargas, inclusive seu sinal. Da relação (2.6), sabemos que o número de cargas por unidade de volume é

$$n = \frac{i}{nqYZ} BY = \frac{iB}{V_H qZ}. \quad (2.7)$$

Em relação ao sinal das cargas, a figura (2.2) ilustra bem como as cargas se comportam e que através do potencial Hall medido, o sinal das cargas facilmente será identificado.

Na figura (2.2.A), notamos que as cargas em movimento são negativas, pois o produto externo entre a velocidade das partículas e o campo magnético implicaria em um desvio contrário. Observa-se também que na região superior da amostra haverá uma concentração de cargas negativas, representada pela cor azul, enquanto na parte inferior haverá um acúmulo de cargas positivas, representado pela cor vermelha. Na figura (2.2.B), foi invertido o sentido da corrente, consequentemente o desvio também foi invertido. Nas figuras (2.2.C) e (2.2.D), ao invés de inverter a direção do sentido da corrente, são invertidos os pólos magnéticos. Nas quatro figuras, as partículas da corrente possuem cargas negativas. Se acaso as cargas fossem positivas, todas as figuras seriam invertidas.

Ao observar a força de Lorentz, $\vec{F}_{lor} = q\vec{v} \times \vec{B}$, o comportamento mostrado nessas figuras

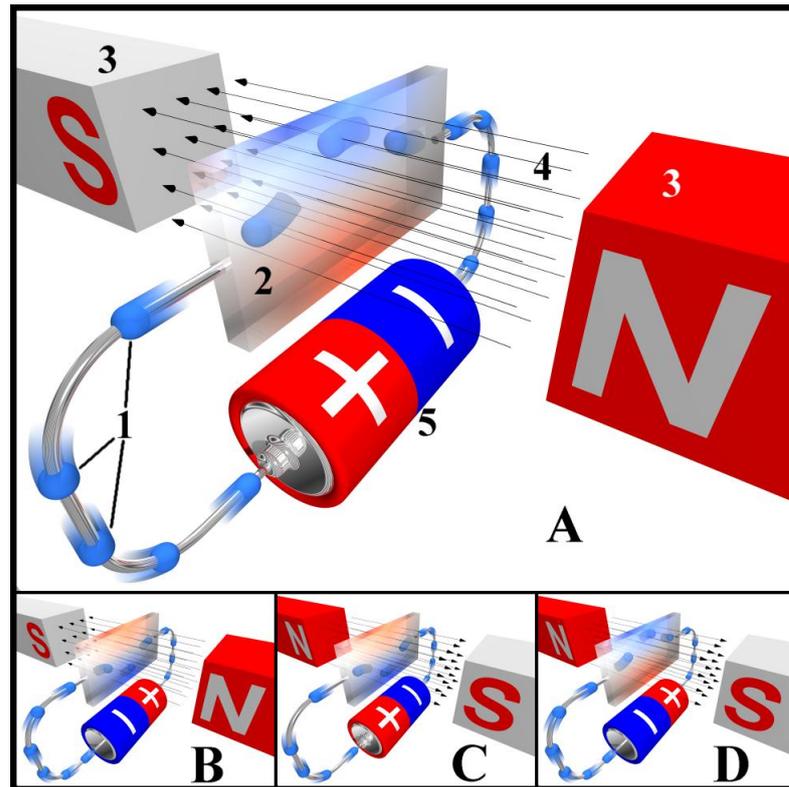


Figura 2.2: Visualização do efeito Hall. As partículas representadas pelo número 1 são elétrons, a placa 2 é a amostra condutora, o número 3 indica os pólos magnéticos, 4 são as linhas de campo magnético e 5 é a fonte de alimentação. Na figura A observa-se que os elétrons são desviados para a direita da sua trajetória devido a força de Lorentz. Como o termo magnético da força de Lorentz é dado por $q\vec{v} \times \vec{B}$, nas figuras B, C e D, altera-se respectivamente o sentido da corrente, o campo magnético e ambos simultaneamente [36]

fica bem claro. Note que ao inverter o sinal da carga, da velocidade da corrente ou do campo magnético, o sentido da força é invertido, conseqüentemente, a configuração do potencial Hall também será. Todavia, se ao invés de um, forem alterados dois desse elementos, essa configuração do sistema equivale a mesma caso não houvesse nenhuma alteração.

2.3 Níveis de Landau

O estudo de efeitos quânticos oriundos da presença de campo magnético através da equação de Schrödinger tem como ponto de partida o hamiltoniano do sistema. Supondo uma amostra planar submetida a um campo magnético uniforme e ortogonal ao plano, pode-se escrever o

hamiltoniano como [45]

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi. \quad (2.8)$$

onde q e m são nesta ordem a carga e massa da partícula, p representa o momento canônico generalizado, e \vec{A} e ϕ são os potenciais vetor e escalar, respectivamente. Esses potenciais eletromagnéticos contêm toda a informação dos campos \vec{E} e \vec{B} [37, 38]. A relação entre os potenciais e os campos é dada por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (2.9)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.10)$$

Para cada configuração de campo não existe apenas um par de potenciais eletromagnéticos. Os campos \vec{E} e \vec{B} são inalterados quando os potenciais se transformam pelas relações

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\xi, \quad \phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\xi}{\partial t} \quad (2.11)$$

onde $\xi(\vec{x}, t)$ é uma função escalar arbitrária. Essa mudança dos potenciais é chamada transformação de gauge, e não apresenta qualquer efeito físico. Classicamente, o potencial escalar é o potencial elétrico já conhecido do eletromagnetismo e o potencial vetor é apenas uma ferramenta matemática. Todavia, na última seção deste capítulo discutiremos o significado físico do potencial vetor na mecânica quântica.

A partir da equação (2.8) podemos escrever a equação de Schrödinger como

$$H\psi = E\psi, \\ \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}\psi + q\phi\psi = E\psi,$$

como o

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi + q\phi\psi = E\psi,$$

Se considerarmos o campo elétrico nulo, podemos considerar também um potencial elétrico nulo, assim essa equação pode ser reduzida a

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi = E\psi. \quad (2.12)$$

Consideremos agora um campo magnético uniforme na direção \hat{z} , que pode ser representado por várias escolhas do potencial vetor como por exemplo $\vec{A} = (-By, 0, 0)$, $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ ou

$\vec{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$. Utilizando a primeira opção tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left[(-i\hbar\partial_x + qBy)^2 + (-i\hbar\partial_y)^2 + (-i\hbar\partial_z)^2 \right] \psi &= E\psi, \\ \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(-i\partial_x + \frac{qBy}{\hbar} \right)^2 - (\partial_y)^2 - (\partial_z)^2 \right] \psi &= E\psi, \end{aligned} \quad (2.13)$$

assim, propõe-se a solução $\psi = e^{i(k_x x + k_z z)} f(y)$ para a equação (2.13) que resulta em

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dy} + \frac{q^2 B^2}{2m} \left(y + \frac{\hbar k_x}{qB} \right)^2 \right] f(y) = E' f(y), \quad (2.14)$$

onde $E' = E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$. Podemos ainda escrever a equação acima como

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dy} + \frac{m\omega_c^2}{2} (y - y_0)^2 - E' \right] f(y) = 0, \quad (2.15)$$

onde $y_0 = \frac{\hbar k_x}{q|B|}$ e $\omega_c = q|B|/m$ é a frequência de cíclotron. Sabe-se que classicamente a trajetória do movimento de uma partícula carregada submetida a um campo magnético é um círculo. A quantidade y_0 no caso quântico é conservada e corresponde à coordenada y do centro do círculo.

A equação (2.15) é similar a equação do oscilador harmônico,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dy} + \frac{m\omega_c^2}{2} (y - y_0)^2 - E \right] \psi = 0. \quad (2.16)$$

Dessa forma, podemos escrever que

$$E' = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

Assim, os auto-valores da para uma partícula carregada na presença de um campo magnético uniforme na direção z são dados por

$$E_{n,k_z} = \hbar \frac{q|B|}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}. \quad (2.18)$$

O primeiro termo do lado direito da equação representa valores discretos de energia correspondentes ao movimento no plano perpendicular ao campo magnético. Já que a expressão (2.18) não depende de k_x nem de k_y , que possuem uma sequência de valores contínuos, haverá níveis de energia continuamente degenerados. A separação dos níveis de energia é dada pela frequência de cíclotron ω_c , que é diretamente proporcional ao campo magnético. Esses são os chamados níveis de Landau.

A menos de uma constante de normalização, a função de onda para esse sistema é dada por

$$\psi(x, y, z) = \exp \{ ik_x x + k_z z \} H_n \left\{ \frac{y - y_0}{l_B} \right\} \exp \left\{ -\frac{(y - y_0)^2}{2l_B^2} \right\}, \quad (2.19)$$

onde H_n representa os polinômios de Hermite e a quantidade

$$l_B = \left(\frac{\hbar}{|q|B} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.20)$$

é definida como comprimento magnético.

Retomando a discussão sobre a degenerescência dos estados, ao considerar uma amostra retangular de dimensões L_X e L_Y , os valores possíveis de k_x serão $k_x = 2\pi n_x/L_x$ com $n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. No limite em que L_X e L_Y são muito grandes, não haverão problemas com órbitas próximas à borda e nesse limite o número de estados degenerados correspondente a um valor fixo de n será $L_X L_Y / 2\pi l_B^2$. Fazendo uma interpretação geométrica desse resultado, pode-se dizer que cada estado está relacionado com uma área de magnitude $2\pi l_B^2$ no plano perpendicular ao campo magnético. Pode-se dizer ainda que há uma unidade de fluxo magnético $\Phi_0 = 2\pi\hbar/q = h/q$ para cada área $2\pi l_B^2$. Dessa forma a degenerescência de Landau é dada pelo número de unidades de campo Φ_0 que atravessa o sistema. Logo, o número de estados em um nível de Landau preenchido correspondente a um dado valor de n é o tamanho do sistema dividido pela superfície da orbita de cíclotron. Dessa forma, o número de estados por unidade de área n_B é dado por

$$n_B = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{qB}{h}. \quad (2.21)$$

Solução para os níveis de Landau em coordenadas cilíndricas

A equação de Schrödinger do sistema discutido anteriormente em coordenadas cartesianas pode ser resolvida também em coordenadas cilíndricas. Os níveis de energia serão os mesmos. A função de onda no entanto será escrita de outra forma.

Reescrevendo a equação (2.13) em coordenadas cilíndricas tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + i \frac{qB}{2m} \hbar \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{q^2 B^2}{8m} r^2 \psi &= E \psi. \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + i \frac{qB}{2m} \hbar \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{q^2 B^2}{8m} r^2 \psi &= E \psi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Propondo uma solução na forma

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} R(r) e^{i\ell\phi} e^{ip_z z/\hbar}, \quad (2.23)$$

multiplicando por $\hbar^2/2m$ e fazendo $\omega = qB/m$, obtem-se a equação radial

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(R'' + \frac{R'}{r} - \frac{\ell^2 R}{r^2} \right) + \left[E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{8} r - \frac{\hbar\omega\ell}{2} \right] \psi = E \psi. \quad (2.24)$$

Definindo uma nova variável $\xi = (m\omega/2\hbar)r^2$, a equação 2.24 pode ser reescrita como

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi} \right) R = 0, \quad (2.25)$$

onde $\beta = \frac{1}{\hbar\omega} \left(E - \frac{p_z^2}{2m} \right) - \frac{m}{2}$. Ao analisar os limites assintóticos dessa equação, ou seja, $\xi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow \infty$, propõe-se uma solução como

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|\ell|}{2}} u(\xi), \quad (2.26)$$

resultando em uma equação em u que tem como solução a função hipergeométrica confluyente

$$u = F \left[-\left(\beta - \frac{1}{2}|\ell| - \frac{1}{2} \right), |\ell| + 1, \xi \right]. \quad (2.27)$$

Para que essa função seja finita, é necessário que $(\beta - \frac{1}{2}|\ell| - \frac{1}{2})$ seja um inteiro positivo n . A partir dessa condição pode-se concluir que os níveis de energia são dados por [5]

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{|\ell|}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (2.28)$$

2.4 Efeito Hall quântico inteiro

O efeito Hall quântico foi descoberto na noite do dia 5 de fevereiro de 1980, no Laboratório de Alto Campo Magnético, em Grenoble, na França, quando Klaus von Klitzing, Dorda e Pepper investigavam propriedades de transporte de um MOSFET² de silício a temperaturas muito baixas e campo magnético muito intenso. Apesar de outros pesquisadores já terem estudado esse sistema desde 1966, e inclusive observado os platôs Hall, apenas em 1980, a idéia de analisá-los em termos de um valor fundamental h/e^2 surgiu pela primeira vez. Depois de outras medidas confirmarem a relação fundamental de quantização para a resistência Hall $R_H = h/ie^2$, onde i é um inteiro, von Klitzing ganhou o prêmio Nobel em 1985 pela descoberta do efeito Hall quântico [39, 40].

Na noite da descoberta, von Klitzing e seus colaboradores Sir Michal Pepper e Gerhard Dorda, utilizaram um tipo especial de transistor de silício (Si), no qual pode-se conduzir elétrons em uma camada entre dois semicondutores. Eles aplicaram um campo magnético intenso obrigando os elétrons da camada do transistor, que possuía espessura de um nanômetro (10^{-9} m), a ocuparem bandas de energia separadas por intervalos finitos que contém apenas alguns níveis isolados, ver fig. (2.3). Esses estados isolados existem devido à presença de impurezas,

²MOSFET (metal oxide semiconductor field-effect transistor) é um transistor no qual os elétrons podem ser conduzidos em uma camada entre semicondutores. Este dispositivo pode ser usado para amplificar ou comutar sinais eletrônicos.

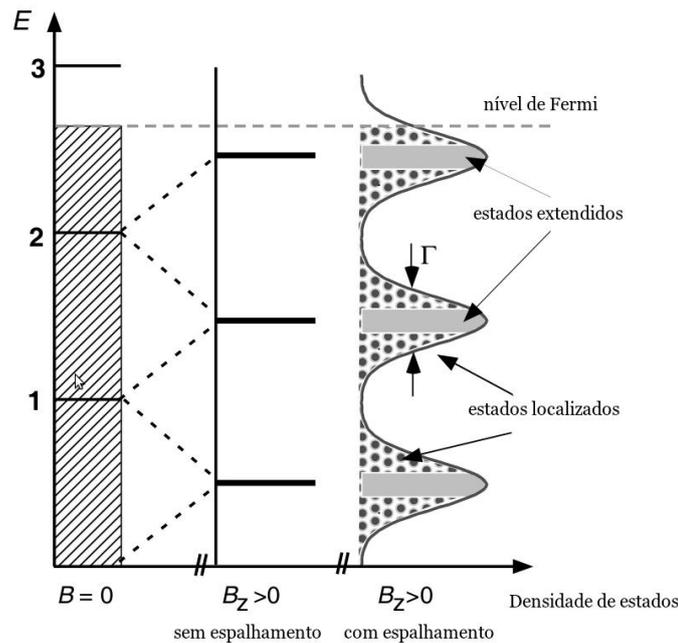


Figura 2.3: O primeiro diagrama, onde tem-se $B = 0$ representa a relação entre a densidade de estados e a energia para uma partícula livre em uma amostra. Observa-se que existe um contínuo de estados abaixo da energia de Fermi e que todos os estados estão ocupados pois o sistema se encontra a uma temperatura muito baixa. No gráfico, tem-se que ao aplicar campo magnético na amostra, os estados serão quantizados e nem todos os valores de energia serão possíveis. Na última figura, ilustra-se que ao haver impurezas no sistema, que irá causar espalhamento e desordem, os níveis deixaram de ser linhas para serem bandas que terão estados estendidos (que contribuem para a corrente de condução) e estados localizados. Fonte: [39]

o que faz com que os níveis de Landau deixem de ser níveis para serem bandas. Assim, os estados próximos do centro de cada banda são os estados estendidos, ou pode-se chamar essa região central de banda de estados de condução. Os elétrons que ocupam esses estados são os únicos que podem fazer parte da corrente de condução. Os chamados estados localizados são aqueles que estão na região que seria de "gap" caso não houvesse impureza. Ou seja, estão mais próximos das extremidades das bandas. Os elétrons que estão ocupando esses estados não contribuem para a corrente de condução. Isso significa que se começar a mudar o número de elétrons que ocupam os estados localizados, a corrente será inalterada. Entretanto, uma mudança no número de elétrons nos estados estendidos pode ser verificada pela corrente. Após realizar o experimento, von Klitzing e seus colaboradores observaram que a resistência Hall não variava linearmente com o campo magnético, de acordo com o resultado clássico.

Teoricamente, podemos demonstrar a origem da quantização Hall, recordando a discussão a respeito da degenerescência dos níveis de Landau. Vimos que o número de estados por unidade

de área em um nível de Landau preenchido é dado por

$$n_B = \frac{1}{2\pi a_m^2} = \frac{qB}{h}.$$

Podemos definir um fator de preenchimento ν que seria a degenerescência dos níveis como $\nu = n_s/n_B$ onde n_s é o número de elétrons por unidade de área. Quando um nível de Landau está preenchido tem-se $\nu = i$, onde i é um número inteiro. Assim pode-se dizer que o número quântico i indica as bandas de Landau preenchidas. Dessa forma, o número de elétrons por unidade de área será $n_s = in_B$, que ao substituir na relação para a resistência Hall, $R_H = B/qn_s$, obtem-se

$$R_H = \frac{B}{qn_s} = \frac{B}{qi\frac{qB}{h}} = \frac{h}{iq^2}. \quad (2.29)$$

Essa foi a descoberta sensacional de von Klitzing, Dorda e Pepper. Eles observaram que o gráfico da resistência Hall com o campo magnético não era uma reta e sim algo parecido com uma escada, em que cada degrau era separado de um tamanho, $\frac{h}{iq^2}$. O fato do número quântico i ser inteiro sugeriu o nome *Efeito Hall quântico inteiro*.

Para analisar os níveis de energia e os platôs Hall, três pontos são muito importantes:

1. Para sistemas com temperaturas muito baixas, todos os estados abaixo do nível de Fermi estão ocupados.
2. Devido às impurezas, os níveis de Landau deixam de ser uma linha e passam a ser bandas com estados de condução (centro da banda) e estados que não conduzem (extremidades da banda).
3. O número de estados está diretamente relacionado com o fluxo magnético que atravessa a amostra, como mostra a relação (2.21). Logo, quanto mais intenso for o campo, mais estados existirão.

Com base nesses tópicos e na figura (2.3), é plausível dizer que ao aumentar o campo magnético, o número de estados irá aumentar e, efetivamente, o nível de Fermi irá baixar, pois todos os estados abaixo dele devem ser preenchidos³.

Suponhamos que o nível de Fermi esteja em uma banda de estados localizados próximo do topo de uma banda de Landau. Com a criação dos novos estados, ele irá baixar permanecendo ainda na região de estados localizados com alta energia, o que significa que todos os estados estendidos da banda de Landau em que ela se encontra continuam preenchidos. Assim a corrente

³Na realidade, a separação entre os níveis de Landau aumenta, pois é diretamente proporcional ao campo magnético. Assim, os níveis sobem passando pela energia de Fermi e não o contrário.

que flui na amostra será a mesma.

Caso o nível de Fermi baixe e passe pela banda de estados estendidos, a corrente irá diminuir, aumentando a resistência Hall. Quando o nível de Fermi baixar e esvaziar a banda de estados estendidos por completo, o nível de Fermi vai entrar em uma sub-banda de estados localizados de baixa energia. Assim a corrente será reduzida em um banda de estados estendidos.

O fato do nível de Fermi esvaziar uma banda de estados estendidos, está relacionado ao fato de a resistência passar de um platô para outro, ver figura (2.4). A ocupação dos estados localizados não altera a resistência e resulta nos degraus, pois, se com o aumento do campo magnético aplicado o nível de Fermi esvaziar apenas estados localizados, a corrente que flui não altera, assim como a resistência, não se alteram. Isso é devido ao fato da corrente de condução ser formada apenas pelos estados estendidos [41].

Uma outra característica muito importante do efeito Hall quântico é que nos platôs a corrente longitudinal flui sem resistência. Lembrando que ao passar de um estado de maior energia para outro de energia menor, a diferença de energia dos níveis será transformada em calor ou vibração. O efeito Hall quântico permite a calibração de instrumentos com alta precisão, inclusive ajuda na medida de constantes físicas fundamentais.

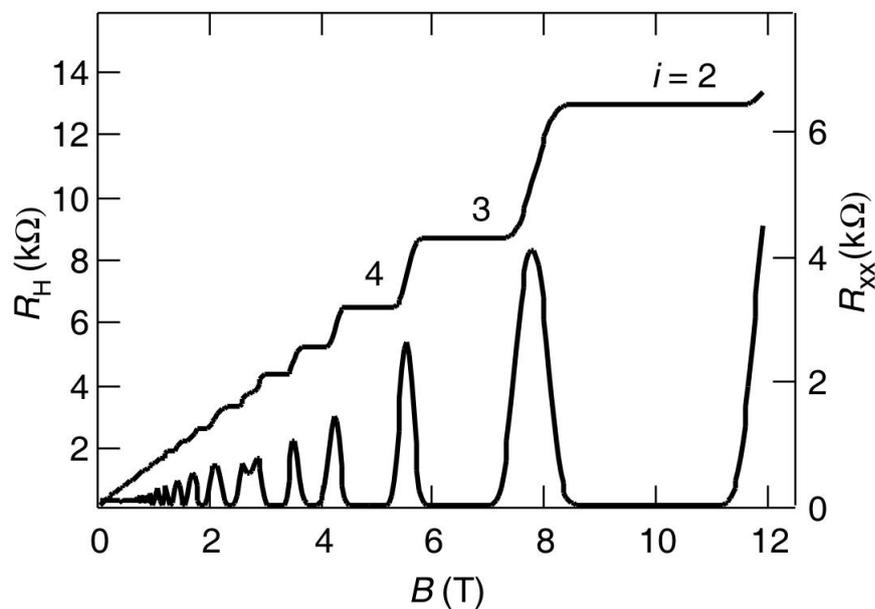


Figura 2.4: A curva que consiste de degraus, representa a resistência Hall, enquanto a curva que nas regiões dos platôs Hall é nula, ilustra o comportamento da resistência longitudinal, que é por onde passa a corrente usual. Fonte: [39].

2.5 Efeito Aharonov-Bohm

Em 1865, James Clerk Maxwell conceituou a idéia de potencial vetor que já havia sido apresentada e trabalhada analiticamente por outros físicos desde 1845. Entretanto, apenas em 1959, a importância física do potencial vetor foi discutida por Yakir Aharonov e David Bohm. Eles publicaram um artigo que tinha como proposta um experimento de Young de fenda dupla, onde incluíam a presença de um solenóide "infinito"⁴ entre as fendas e por trás delas [6]. Por consequência, haverá interferência entre as franjas obtidas pela passagem de elétrons nas fendas. É muito importante notar que os elétrons passam por uma região sem campo magnético, pois este está confinado no solenóide.

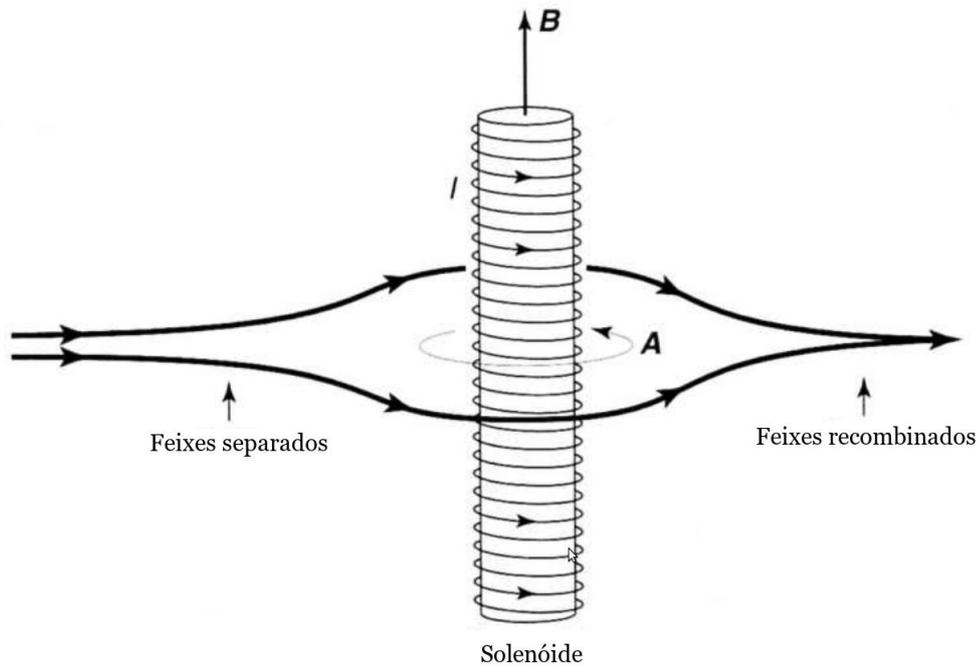


Figura 2.5: Dois feixes de elétrons são direcionados a um solenoide. Em seguida, se separam e se recombinam com uma fase que está relacionada ao potencial vetor. Fonte: [44].

O hamiltoniano para uma partícula que passa nas proximidades de um solenóide é o mesmo dado nas seções anteriores,

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}, \quad (2.30)$$

e a equação de Schrödinger é escrita como

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi = E\psi. \quad (2.31)$$

⁴O solenóide não é de fato infinito, porém suas dimensões transversais são microscópicas de tal forma que as linhas de campos estejam praticamente confinadas no solenóide

É fácil mostrar que a função de onda para esse problema pode ser escrita como $\psi = e^{ig}\psi'$, onde ψ' é a solução da equação de onda com potencial vetor nulo, e g representa a fase adquirida devido à presença do solenóide. O potencial vetor para uma região exterior a um solenóide de raio a é dado por

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (2.32)$$

onde o fluxo magnético no interior do solenóide é $\Phi = \pi a^2 B$. Dessa forma, se considerarmos dois feixes de elétrons que se separam e se recombinam após passarem por um solenóide, como mostra a figura (2.5), podemos obter que a fase adquirida por cada feixe será

$$g = \frac{q}{\hbar} \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} \hat{\phi} \right) \cdot (r\hat{\phi}d\phi) = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar}. \quad (2.33)$$

O sinal de mais é para o feixe que viaja na mesmo sentido que o campo vetorial \vec{A} , enquanto o sinal de menos é para o feixe que viaja no sentido contrário. Assim a diferença de fase obtida quando os feixes se recombinam será $\frac{q\Phi}{\hbar}$.

Outros efeitos análogos ao Aharonov-Bohm passaram a ser analisados posteriormente, tais como: Aharonov-Casher, Aharonov-Bohm elétrico e Aharonov-Carmi.[15, 16] O último é mais importante para nosso trabalho e será discutido no próximo capítulo.

Neste capítulo, discutimos como o campo magnético pode influenciar alguns sistemas clássicos e quânticos. Classicamente, a atuação desse campo em uma amostra por onde passa uma corrente elétrica, gera um potencial elétrico ortogonal ao campo e à corrente. Quanticamente, nesse mesmo sistema vimos que a partir do coeficiente Hall observa-se que as órbitas de cíclotron são quantizadas. Ou seja, nem todas as órbitas clássicas são possíveis. Ainda em mecânica quântica, discutimos a proposta para um significado físico do potencial vetor feita por Aharonov e Bohm. Durante todo o capítulo, analisamos diferentes efeitos físicos devido a campo magnético. No seguinte, abordaremos efeitos análogos oriundos de uma rotação aplicada ao sistema.

Efeitos Inerciais

3.1 Introdução

As forças inerciais apresentam efeitos muito interessantes na Física. Tais forças, principalmente devido à rotação, têm sido frequentemente objeto de estudo dos físicos teóricos e experimentais. Os efeitos inerciais são observados desde fenômenos clássicos como a influência da força de Coriolis na Terra, a análogos a efeitos magnéticos na mecânica quântica. Nesse capítulo, mostraremos algumas analogias entre efeitos inerciais e eletromagnéticos na dinâmica quântica de cargas livres, todos causados por rotação. Para um melhor entendimento desse assunto é necessário uma discussão introdutória sobre o conceito de referenciais inerciais e não inerciais, assim como, forças que aparecem em um referencial girante.

3.2 Abordagem clássica

3.2.1 Definição de referenciais inerciais e não-inerciais

Um referencial pode ser dito inercial, se e somente se, nele for válido a lei da inércia,

”Se um corpo estiver em repouso ou movimento retilíneo uniforme ele permanecerá no mesmo estado de movimento até que alguma força passe a atuar sobre ele.”

Também será um sistema inercial todo referencial que esteja em repouso ou em movimento translacional uniforme em relação a um outro sistema inercial. Dessa forma, pode-se definir como referencial não-inercial todo e qualquer referencial acelerado.

Suponha que um ônibus em movimento uniforme de repente freia bruscamente quando o motorista percebe a parada muito próxima. Uma pessoa que estiver em pé no veículo será arremessada para a frente. Porém, ao analisar as forças que atuam nessa pessoa obtém-se que o somatório das forças é zero. Dessa maneira a primeira lei de Newton estaria sendo violada, pois no referencial do ônibus a pessoa estava parada e na ausência de forças atuando sobre ela, a mesma foi acelerada. Por isso o referencial do ônibus sendo freiado é um referencial não-inercial.

No referencial de um observador na parada de ônibus, a lei da inércia não é violada, pois

quando o motorista freia o veículo, as pessoas que estão dentro estão em movimento retilíneo uniforme e continuam em movimento retilíneo uniforme, por isso são arremessadas.

A "força" que faz as pessoas serem arremessadas para frente, no referencial do ônibus, é denominada força de inércia. Ela tem dimensão de força, é proporcional à massa inercial, assim como outras forças conhecidas, todavia, é uma força medida apenas no referencial não-inercial e não representa interação entre partículas. Forças de inércia surgem apenas em sistemas de referencia não-inerciais.

3.2.2 Referencial em rotação

E a respeito de um sistema de referência em rotação, seria este um referencial inercial ou não-inercial? Esse sistema é bastante interessante, e estudando-o é possível mostrar que as forças de Coriolis e centrífuga são forças inerciais. Logo, o referencial de um disco girando é mais um exemplo de sistema de referencia não-inercial.

Suponha uma partícula que se encontra em um disco que está girando, como mostrado na figura (3.1). Dois referenciais podem ser escolhidos, um que está centralizado no disco que gira junto com o mesmo e um outro que está fixo no laboratório. A posição da partícula nos dois referenciais é representada por \vec{r} e \vec{r}' , respectivamente. Pode-se escrever então que

$$\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r} \quad (3.1)$$

onde, \vec{R} representa a posição da origem do referencial girante no sistema de referencia não girante [45]. Dessa forma, podemos escrever que a velocidade da partícula medida no referencial fixo é dada por

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\text{fixo}} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{\text{fixo}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{fixo}}. \quad (3.2)$$

Assim, vamos focar na variação temporal do vetor \vec{r} no referencial fixo, $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{fixo}}$.

Sabe-se que um deslocamento devido a uma rotação infinitesimal, no sistema de coordenadas polares, é representado simplesmente por $d\vec{s} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$. Dessa forma, a velocidade para esse deslocamento é dada por $d\vec{s}/dt = d\vec{\theta}/dt \times \vec{r}$ sendo que $\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$ é a velocidade angular, ou seja, $d\vec{s}/dt$ é velocidade da partícula devido apenas à rotação do disco. Caso a partícula possa se mover no disco, essa velocidade, $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{girante}}$, deve ser adicionada. Assim a velocidade da partícula no referencial fixo é dada pela velocidade da partícula no referencial girante mais o termo devido à rotação,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{fixo}} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{girante}} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.3)$$

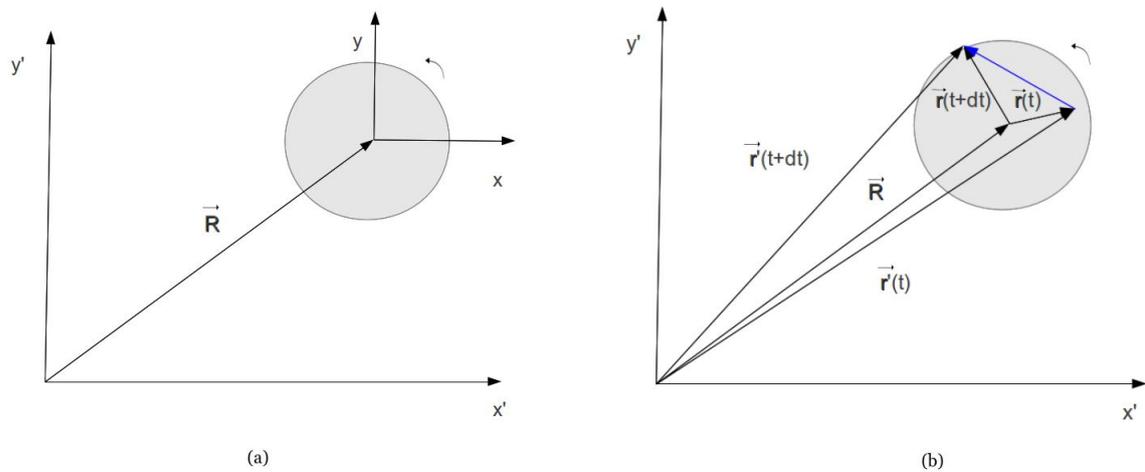


Figura 3.1: (a) Neste esquema podemos observar o referencial fixo (x', y') e o referencial girante (x, y) , que tem origem no centro do disco e velocidade angular $\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$. Na figura (b) estão expressos os vetores deslocamento \vec{r}' e \vec{r} nos referenciais fixo e girante respectivamente, e os mesmos vetores após um intervalo de tempo dt . O vetor em azul representa o deslocamento da partícula no intervalo dt . É importante deixar claro que nesta figura não está sendo considerado movimento de translação do referencial girante.

A equação 3.3 pode ser generalizada para relacionar vetores do referencial fixo para o sistema de referência que está girando [45],

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{\text{fixo}} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{\text{girante}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}. \quad (3.4)$$

Com esta equação pode se verificar que a aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ é a mesma nos dois referenciais.

Substituindo (3.3) em (3.2) pode-se encontrar a velocidade da partícula medida no referencial fixo

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\text{fixo}} &= \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\text{fixo}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fixo}} \\ &= \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\text{fixo}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{girante}} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

Assim, tem-se

$$\vec{v}_f = \vec{V} + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned}
\vec{v}_f &= \text{velocidade no referencial fixo} \\
\vec{V} &= \text{velocidade da origem do referencial girante} \\
\vec{v}_r &= \text{velocidade no referencial girante} \\
\vec{\omega} &= \text{velocidade angular no referencial girante} \\
\vec{\omega} \times \vec{r} &= \text{velocidade devido à rotação do referencial girante.}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Como a lei da inércia, a segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, só é válida em referenciais inerciais. Assim, no referencial fixo tem-se

$$\vec{F} = m\vec{a}_f = m \left(\frac{d\vec{v}_f}{dt} \right)_{\text{fixo}}. \tag{3.9}$$

Com base em (3.2) tem-se

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt} \right)_{\text{fixo}} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{\text{fixo}} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{\text{fixo}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{fixo}}. \tag{3.10}$$

Analisando cada termo, pode-se definir

$$\ddot{\vec{R}} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{\text{fixo}} \tag{3.11}$$

e utilizando a equação (3.4), tem-se

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{\text{fixo}} &= \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{\text{girante}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r \\
&= \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde \vec{a}_r é a aceleração no sistema de coordenadas girante. O último termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{fixo}} &= \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{girante}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ao combinar essas equações, obtém-se

$$\vec{F} = m\vec{a}_f = m\ddot{\vec{R}}_f + m\vec{a}_r + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \tag{3.14}$$

Essa é a força medida pelo observador no referencial fixo. A força efetiva medida pelo observador no referencial girante é dada por

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{eff} &= m\vec{a}_r \\
&= \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}_f - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde o primeiro termo, \vec{F} , é a força medida no referencial fixo, os dois seguintes, $-m\ddot{\vec{R}}_f - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$, representam o movimento acelerado do referencial não inercial, respectivamente, que estão relacionados às acelerações translacional e rotacional. Caso não exista aceleração do sistema de referência não-inercial, esse dois termos serão nulos, resultando em

$$\vec{F}_{eff} = m\vec{a}_f - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \quad (3.16)$$

Os dois últimos termos dessa expressão são as forças centrífuga e de Coriolis, respectivamente. O sinal de menos na força centrífuga significa que ela está direcionada para fora do centro de rotação. Um ponto muito importante a respeito da força de Coriolis é que ela só será não-nula se houver movimento da partícula no referencial não inercial. Ou seja, se uma partícula está livre e parada em um disco e esse disco começa a girar, a única força que a partícula irá sentir será a força centrífuga. É importante estar claro que a força centrípeta é uma força diferente das forças centrífugas e de Coriolis que são forças inerciais e que surgem devido à necessidade de escrever uma expressão como a segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}_f$, para o referencial não-inercial, já que esta só é válida para o referencial inercial.

Ao analisar a força de Coriolis no hemisfério norte obtém-se que o sentido da força é para a direita do movimento da partícula e tem módulo $2mv_r\omega$. Quando observa-se essa força no hemisfério sul, nota-se que a força tem o mesmo módulo e está direcionada para o lado esquerdo do movimento da partícula. Assim, dependendo da direção para a qual um objeto se move e em que hemisfério ela esteja, a força de Coriolis vai atuar curvando a trajetória do objeto, para um lado ou para o outro. Os efeitos mais notáveis dessas forças estão em fluidos. A força de Coriolis é responsável pelo surgimento de furacões e redemoinhos. Uma curiosidade é que o sentido do giro deles no hemisfério norte e no hemisfério sul são opostos [46].

3.2.3 Efeito Hall devido a forças inerciais

A influência das forças inerciais vai além da mecânica clássica. Essas forças podem ser utilizadas em estudos de efeitos análogos do eletromagnetismo e até da mecânica quântica, como veremos na próxima seção. A idéia principal para esses efeitos análogos é a substituição de campo magnético por rotação.

O efeito Hall está relacionado ao surgimento de um diferença de potencial em um dado condutor elétrico devido à aplicação de um campo magnético na direção perpendicular à corrente, como explicado no capítulo anterior. O campo magnético altera a condutividade da amostra e sua resistência elétrica poderá ser calculada em termos do campo magnético, massa de cíclotron e densidade de cargas. Jonhson propôs um experimento no qual a resistencia Hall será uma função da massa inercial, densidade de carga e da taxa de rotação [14]. O experimento consiste de uma amostra bidimensional em uma plataforma horizontal girante que tem o eixo de rotação

perpendicular à amostra, esboçados na fig. (3.2). Os elétrons saem do ponto S para o ponto D. Devido aos efeitos inerciais, a medida no referencial fixo do laboratório será diferente da medida no referencial girante. Na média, os elétrons terão trajetórias retilíneas no referencial do laboratório, entretanto elas serão deslocadas no referencial girante devido à atuação da força de Coriolis. Efeitos devido à força centrípeta também são detectados, já que ela será usada pra gerar uma corrente radial.

As cargas que têm suas trajetórias deslocadas vão induzir um campo elétrico transversal para balancear os efeitos da força que causou esse deslocamento. Então, o equilíbrio das forças $eE = 2m^*\Omega v$, juntamente com a expressão para a densidade de corrente, $j = nev$, fornecem uma expressão linear para a resistência Hall no referencial girante,

$$R_H = \frac{E}{j} = \frac{2m^*\Omega}{ne}, \quad (3.17)$$

onde E é o campo elétrico induzido, m^* é a massa efetiva dos portadores de carga e n é a densidade desses portadores. Dessa forma, Johnson mostrou que o efeito Hall pode ser utilizado não só para caracterizar portadores de carga e a densidade desses portadores, que tem sido feito por muitos anos em metais e supercondutores, mas também como uma prova das forças inerciais quando utiliza-se rotação ao invés de campo magnético.

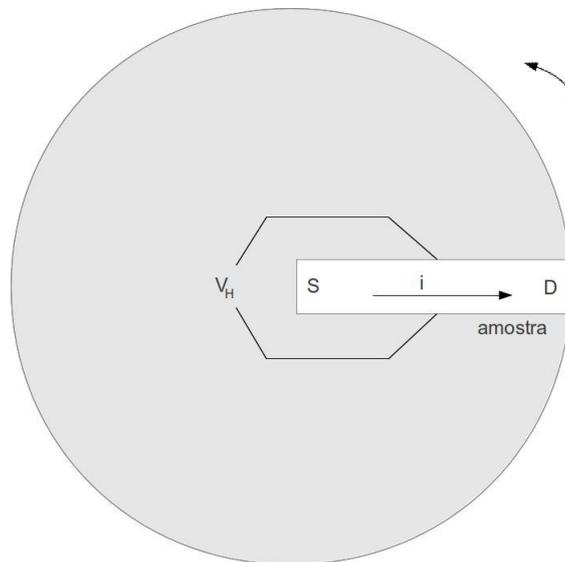


Figura 3.2: A amostra é colocada sobre um disco girante, que tem o eixo z como eixo de rotação.

3.3 Estudos em mecânica quântica

Efeitos inerciais devido à rotação podem ser detectados em experimentos de interferência, como o efeito Aharonov-Carmi, e em experimentos de visualização de espectro de energia. A

similaridade entre o hamiltoniano de um sistema submetido a um campo magnético e o de um sistema em um referencial girante, é a principal motivação para buscar um efeito semelhante ao efeito Hall tendo como fonte forças inerciais ao invés da força de Lorentz.

3.3.1 Efeito Aharonov-Carmi

Em 1973, Aharonov e Carmi, propuseram um experimento de interferência envolvendo rotação, que consistia de um anel girando na presença de campos elétrico e magnético [8, 12]. Assim como o efeito Aharonov-Bohm a idéia para esse experimento era estudar um efeito em uma região livre de campos. Dessa forma, os campos eletromagnéticos foram escolhidos para cancelar as forças inerciais na região do anel, $r_1 < r < r_2$. Sejam os campos,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= -(2m/q)\vec{\Omega} \\ \vec{E} &= (m/q)\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})\end{aligned}\quad (3.18)$$

onde $\vec{\Omega}$ é o campo de rotação que é "real" para o referencial girante assim como os campos \vec{E} e \vec{B} são para o observador no referencial inercial. Esse campo magnético pode ser obtido utilizando dois solenóides concêntricos. O campo elétrico pode em princípio ser criado com uma escolha apropriada de uma distribuição de cargas axialmente simétrica.

Sejam os raios internos e externos do anel representados por r_1 e r_2 , respectivamente. O hamiltoniano para a região $r_1 < r < r_2$, onde r é a coordenada radial do vetor posição da partícula, é dado por

$$H = \frac{(\vec{p} - 2m\vec{a})^2}{2m} \quad (3.19)$$

e \vec{a} é o potencial vetor inercial, que satisfaz

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{a}. \quad (3.20)$$

O hamiltoniano para uma partícula carregada submetida a um campo magnético é dado por

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}, \quad (3.21)$$

onde \vec{A} é o potencial vetor que dá origem ao efeito Aharonov-Bohm. Podemos notar que os hamiltonianos (3.19) e (3.21) são análogos, ou seja, a força de Coriolis, representada pelo potencial vetor inercial \vec{a} , substitui a força magnética denotada pelo potencial vetor \vec{A} . Dessa forma, é de se esperar um efeito de interferência tipo Aharonov-Bohm no sistema girante.

No efeito Aharonov-Bohm, a partícula carregada que está em uma região sem campo magnético, adquire uma fase em sua função de onda devido ao potencial vetor \vec{A} . Essa fase é dada pela integral do potencial vetor ao longo do caminho da partícula carregada,

$$\psi = \psi_0 \exp\left[\frac{iq}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}\right], \quad (3.22)$$

onde ψ_0 é a função de onda para uma partícula livre. Assim a fase será

$$\delta = (q/\hbar) \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (3.23)$$

Então, comparando (3.19) e (3.21) obtem-se que a fase de Aharonov-Carmi será

$$\delta = (2m/\hbar) \oint \vec{a} \cdot d\vec{l}. \quad (3.24)$$

No efeito Aharonov-Bohm, a partícula carregada passa nas proximidades do fluxo de campo magnético confinado em um solenóide. No efeito Aharonov-Carmi, a partícula move-se próximo ao fluxo de rotação que atravessa a região $r < r_1$. Ou seja, em ambos casos, a partícula está em uma região livre de campos e ainda assim adquire uma fase na função de onda. Além do efeito de interferência, o efeito Aharonov-Carmi pode ser responsável por um deslocamento no espectro de energia, [17, 47, 48]. Isso foi mostrado por Shen e Zhuang em seu artigo abordando uma molécula de fulereno, C_{60} .

3.3.2 Análogo rotacional do efeito Hall quântico

Além de mostrar teoricamente a ocorrência do efeito Hall clássico devido às forças inerciais que atuavam em uma amostra que estava em um referencial girante, B. L. Johnson fez um estudo no escopo da mecânica quântica de um disco girante. No referencial girante as forças de Coriolis e centrífuga estão presentes e implicam no seguinte hamiltoniano para o sistema

$$H = \frac{[\vec{p} - m(\vec{\Omega} \times \vec{r})]^2}{2m} - \frac{m(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2}. \quad (3.25)$$

A estrutura desse hamiltoniano é semelhante à do hamiltoniano de uma partícula carregada submetida a um campo eletromagnético,

$$H = \frac{[\vec{p} - q\vec{A}]^2}{2m} + qV. \quad (3.26)$$

Uma importante exceção na semelhança entre os dois operadores é que o acoplamento do potencial vetor no hamiltoniano do sistema girante não tem dependência com a carga elétrica, e sim com a massa.

A grande semelhança entre os hamiltonianos (3.25) e (3.26) leva a crer na existência de algum efeito análogo ao efeito Hall quântico. Então, simplificando (3.25),

$$H = \frac{p^2}{2m} - \vec{p} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (3.27)$$

e escrevendo a equação de Schrödinger, sabendo que $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ e $p_\phi = -\frac{i\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$, obtém-se

$$\hat{H}\psi = E\psi \implies -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + i\Omega\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = E\psi. \quad (3.28)$$

Levando em consideração a simetria azimutal da equação, pode-se utilizar a escolha $\psi = R(r)e^{-i\ell\phi}$, onde ℓ é inteiro. Dessa forma, obtém-se uma equação de Bessel para a parte radial da função de onda:

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \ell^2)R = 0, \quad (3.29)$$

com ℓ positivo e $\lambda^2 = (2m/\hbar^2)(E - \ell\hbar\Omega)$. Assim a função de onda e a energia do sistema são dadas por

$$\psi = J_\ell(|\lambda|r)e^{-i\ell\phi}, \quad (3.30)$$

$$E = \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m} + \ell\hbar\Omega, \quad (3.31)$$

A condição de contorno desse problema, de que a função de onda deve ser nula na borda, fará o parâmetro λ ter um papel fundamental na quantização dos níveis de energia, ele estará relacionado com os zeros da função de Bessel. Existirão n zeros para a função de Bessel de tal modo que a função de onda será nula na borda do disco. Logo, para uma amostra de raio R , a função de onda deve satisfazer a $J_\ell(\lambda R) = 0$, que resulta em $\lambda \rightarrow \lambda_{n\ell}/R$, onde $\lambda_{n\ell}$ é o n -ésimo zero da função de Bessel de ordem ℓ .

A semelhança entre os hamiltonianos do sistema girante e do sistema submetido ao campo magnético é muito grande, contudo, os resultados para a função de onda e os níveis de energia apresentam diferenças interessantes. Como já foi visto no capítulo anterior, para uma partícula submetida a um campo magnético uniforme, os níveis de energia são degenerados e o efeito Hall quântico é resultado da independência da energia com o comprimento da amostra. Para o caso girante, a degenerescência não existe devido à presença do parâmetro λ na expressão para a energia. Sendo esse parâmetro relacionado ao tamanho da amostra, o efeito Hall quântico também não pode ser medido. Fisicamente, a razão para haver essas diferenças é a presença da força centrífuga. Nota-se inclusive que a contribuição no hamiltoniano devido ao movimento centrífugo é estruturalmente semelhante à parte devida ao campo elétrico no hamiltoniano (3.26). Assim pode-se dizer que o movimento centrífugo é análogo ao movimento devido ao campo elétrico, que não está presente nos níveis de Landau pois implica num movimento de deriva nos elétrons.

Para ilustrar melhor o comportamento dos níveis de energia no referencial girante, Jonhson fez alguns gráficos, ver fig. (3.3), onde mostra que o espectro de energia será discreto mas o gap de energia entre ℓ 's diferentes será preenchido por estados com diferentes λ 's de um ℓ específico. Na figura (3.3.a), utilizando uma taxa de rotação de 1Mhz, estão expostos os 100 primeiros zeros da função de Bessel para cada valor de ℓ , ou seja, cada uma das linhas do gráfico são na verdade, 100 pontos muito próximos. Nota-se que existe uma superposição evidente entre as bandas de ℓ 's diferentes e a distribuição dos estados é praticamente um contínuo. Na figura (3.3.b), a taxa de rotação passou a ser 100Ghz e para cada valor de ℓ foram calculados

1000 zeros da função de Bessel. Agora a superposição dos estados é menor. Um trecho com 10 pontos do nível $\ell = 3$ é expandido para mostrar que a diferença de energia entre o primeiro e o décimo ponto é apenas 0.01meV. Vale destacar que o valor da taxa de rotação utilizada neste gráfico é meramente ilustrativa, pois é uma taxa muito alta.

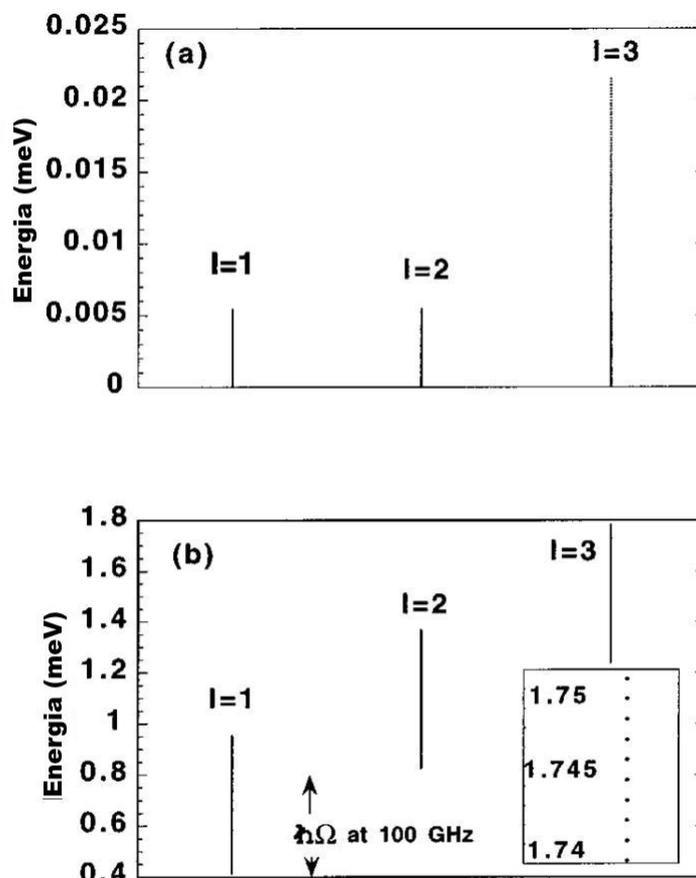


Figura 3.3: Resultados de Johnson. (a) Para cada valor de ℓ foram calculados os 100 primeiros zeros da função de Bessel, que estão representado pelas três linhas verticais. A taxa de rotação utilizada foi 1MHz. Nota-se que as bandas são praticamente um contínuo. (b) A taxa de rotação utilizada agora foi de 100GHz e foram calculados os primeiros 1000 zeros da função de Bessel. No canto inferior direito a escala é ampliada para notar pequena diferença de energia entre 10 estados consecutivos para $\ell = 3$. Fonte: [14]

3.3.3 Influência da rotação em nanoestruturas de carbono: fulereno e nanotubo girante

Materiais feitos de carbono, tais como grafeno, fulereno e nanotubos de carbono têm atraído uma enorme atenção recentemente devido à sua ampla gama de aplicações tecnológicas e várias propriedades físicas interessantes. Nanotubos de carbono por exemplo têm sido considerado um material promissor devido suas excelentes propriedades térmicas, elétricas, ópticas e mecânicas.

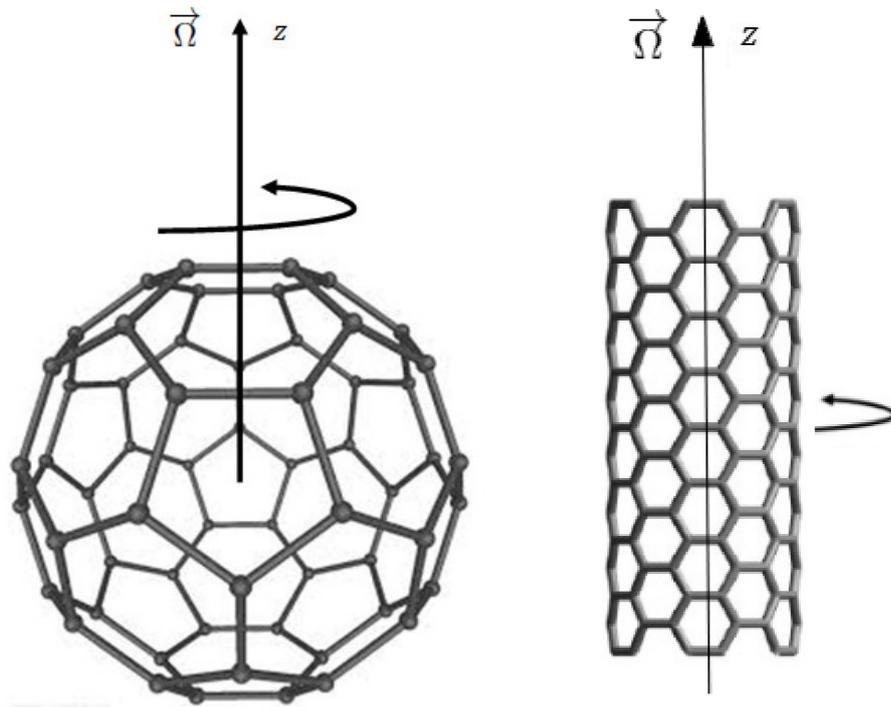


Figura 3.4: Fulereo e nanotubo girantes respectivamente. A velocidade angular $\vec{\omega}$ é considerada na direção z em ambos os casos. Fonte: [51, 52]

Nanotubos de carbono tem uma grande flexibilidade e não quebram facilmente sob a ação de forcas mecânicas. Imagina-se um nanotubo de carbono como uma folha de grafeno enrolada. O primeiro nanotubo de carbono foi obtido em 1991, por Ijima [50].

Motivados pela possibilidade de realização experimental, juntamente com Márcio Cunha, Jonas Lima e Fernando Moraes, estudamos os estados eletrônicos de baixa energia de um nanotubo de carbono girante, utilizando uma abordagem de modelo contínuo. Assim, escrevemos uma equação de Dirac efetiva em um referencial girante e obtivemos soluções analíticas exatas para as autofunções, bem como o espectro de energia. Uma separação tipo Zeeman resultou do acoplamento do momento angular total com a rotação. Os resultados desse trabalho foram conferidos com resultados para casos estáticos já encontrados na literatura. Detalhes desse trabalho podem ser encontrados na referência [51].

No mesmo período, motivados pela evidência experimental de moléculas de C_{60} de rápida rotação em fullerite, estudamos os estados eletrônicos com baixa energia de fulereo girante utilizando também uma abordagem de modelo contínuo. Nesse modelo, o espectro de energia é obtido através da equação de Dirac incluindo campos de gauge não-abelianos que simulam os anéis em forma de pentágonos da molécula. A rotação é incorporada dentro do modelo resolvendo-se a equação de Dirac em um referencial girante. A solução analítica exata para as autofunções e os espectro de energia é obtid e ao fazer o limite sem rotação obtemos os

resultados para o caso estático já apresentado na literatura. Devido ao acoplamento entre rotação e momentum angular total, que aparece naturalmente no referencial girante, os modos zero do C_{60} estático são deslocados e também sofrem uma separação de Zeeman sem a presença de um campo magnético. Detalhes desse trabalho podem ser encontrados na referência [52].

No capítulo anterior, discutimos alguns efeitos clássicos e quânticos baseados em interações eletromagnéticas, dentre eles os níveis de Landau e o efeito Hall quântico. Nesse capítulo, abordamos efeitos análogos aos do capítulo anterior, que utilizam rotação ao invés de campo magnético. Comentou-se ainda sobre o efeito da rotação no fulereno e no nanotubo de carbono. No capítulo seguinte, estudaremos o que são defeitos topológicos e como a presença dos mesmos pode interferir nos níveis de Landau e na condutividade Hall.

Defeitos topológicos

Diversos sólidos têm estrutura cristalina, que muitas vezes é descrita como um perfeito arranjo formado por repetição infinita e periódica de grupos idênticos de átomos [53]. Esta estrutura pode obedecer a operações de simetria como, por exemplo, de rotação ou translação. Estas consistem em mover um corpo de tal forma que a sua posição final, após o movimento, seja indistinguível da inicial, ou seja, a configuração geométrica é equivalente àquela anterior à aplicação de tal operação [54].

Todavia, sólidos com estrutura perfeita são chamados de ideais e não são encontrados na natureza. Cristais reais não são perfeitos, eles sempre apresentam falhas em sua estrutura [62]. Tais imperfeições são responsáveis por propriedades físicas e químicas, além de influenciarem também em processos de transição de fase [55].

Os defeitos de um meio podem representar uma quebra de simetria, porém tal defeito pode ser retirado e o meio volta a ser simétrico. Contudo, se for impossível remover esse defeito, sem alterar as propriedades e características do sistema em questão, então este defeito é denominado topológico. O termo topológico provém da mudança nas propriedades topológicas do meio. Que, por sua vez, é qualquer propriedade de uma figura geométrica que seja válida em qualquer outra que ela possa se transformar mediante uma transformação topológica¹. Um exemplo clássico seria como transformar uma xícara em uma rosquinha, ambas contem um furo, porém transformar uma xícara em uma bola não seria uma transformação topológica, pois a bola não teria o furo.

Não existe uma teoria fundamental que descreva os defeitos, porém Katanaev e Volovich publicaram um artigo em 1992, que relaciona a teoria geométrica de defeitos em sólidos com a gravitação tridimensional [24]. Dessa forma, a geometria de Riemann-Cartan, é utilizada e a existência de torção nesse meio é permitida. A teoria geométrica pode ser aplicada a distribuições contínuas ou discretas de defeitos. Um outro tratamento para os defeitos topológicos é dado pela teoria clássica da elasticidade, entretanto, com a teoria geométrica a abordagem torna-se mais simples.

As desclinações e as deslocações são os defeitos lineares mais importantes, eles estão relacionados à curvatura e torção de um meio, respectivamente. Existe um terceiro defeito que é

¹Uma transformação topológica pode ser definida por qualquer correspondência entre pontos de uma figura A e de uma figura B, na qual A foi transformada, de tal forma que a correspondência seja bijetora e contínua em ambas as direções

a despiração, este por sua vez representa a combinação dos outros dois [62]. Dessa forma, está ligado a curvatura e torção ao mesmo tempo.

Existe um mecanismo de construção de defeitos lineares, conhecido como processo de Volterra, que ilustra como o meio é deformado para ter um defeito desse tipo. Esse processo é muito importante, pois através dele é mais fácil observar características da geometria como a torção e a curvatura.

4.1 Processo de Volterra

Os defeitos lineares podem ser conceitualmente gerados por um processo de “cortar e colar” conhecido na literatura por processo de Volterra [55, 56]. Para tal processo, considera-se um toróide e faz-se um corte separando duas faces do objeto, em seguida, a depender de qual defeito se queira formar, pode-se inserir ou retirar material do objeto, ou apenas transladar ou rotacionar uma das faces com relação a algum eixo como pode ser visto na Fig.(4.1).

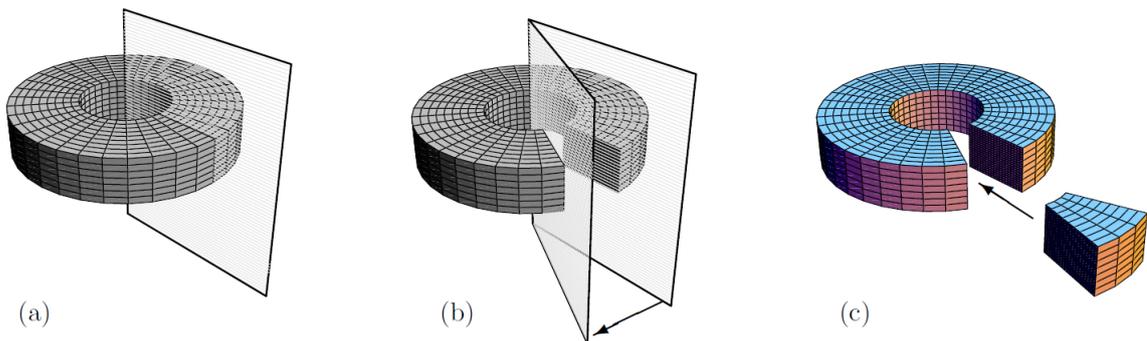


Figura 4.1: Formação de uma desclinação em cunha através do processo de Volterra. (a) Tem-se de início um toróide, onde faz-se um corte, (b) as duas faces do corte são separadas e (c) em seguida insere-se um cunha de material. Fonte: [24].

4.2 Vetor e circuito de Burgers

Além do processo de Volterra, uma outra técnica para classificar as deslocações foi desenvolvida pelo holandês J. M. Burgers. Tal processo pode ser ilustrado como uma “caminhada” de átomo a átomo de tal forma que o último passo seja para voltar ao ponto inicial, que ficou conhecido como circuito de Burgers. Após uma deslocação isso não acontece, então a falha nesse fechamento é dada por um vetor local $\vec{b}(\vec{x})$, que liga o ponto final ao inicial, chamado vetor de Burgers. Esse vetor dá a magnitude e a direção do deslocamento gerado pela deslocação

e matematicamente pode ser expresso como,

$$\sum_{B_0} \Delta u(\vec{x}_i) = b_i, \quad (4.1)$$

onde B_0 é o ponto inicial do circuito e $\Delta u(\vec{x}_i)$ são os incrementos do vetor deslocamento em cada passo.

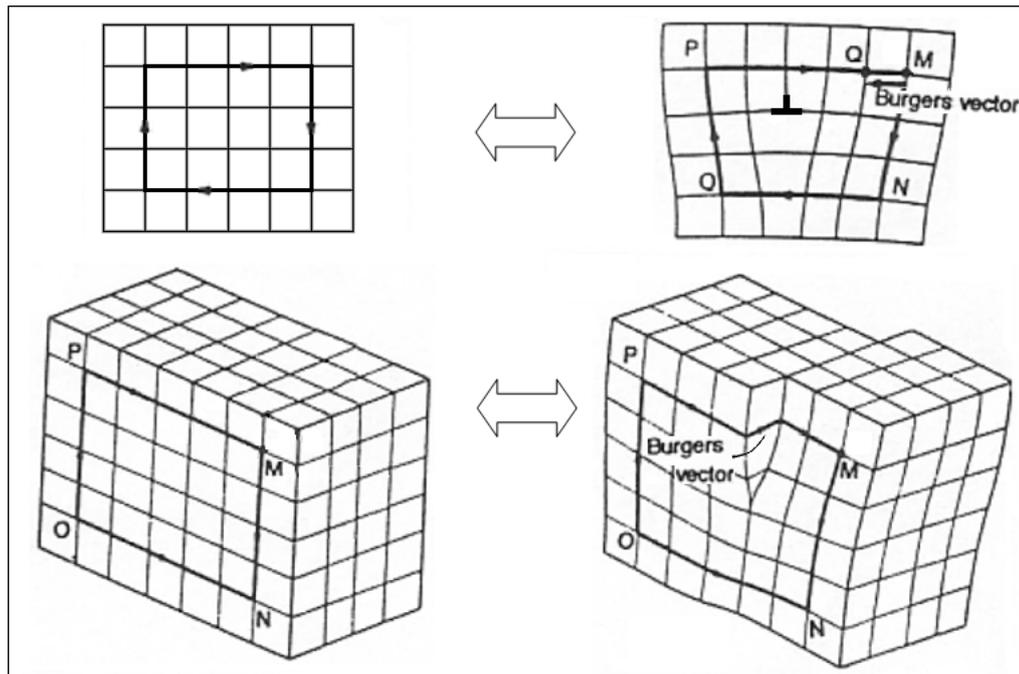


Figura 4.2: (a) Circuito de Burgers com o defeito, (b) circuito sem o defeito e a representação do vetor de burgers retirado, (c) novamente o circuito de Burgers com o defeito e (d) é o circuito sem o defeito e a representação do vetor de Burgers, porém, o vetor de Burgers é ortogonal ao circuito sem defeito.

O processo de Burgers está ilustrado na Fig. (4.2). Observa-se nos dois circuitos da parte superior da figura 4.2, que a diferença entre os pontos Q e M, no circuito da direita, representa o vetor, que caracteriza o meio com uma desclinação, que é justamente a ilustração da esquerda. A figura da direita, é o objeto da esquerda antes da inserção do defeito. O mesmo pode ser notado com as duas ilustrações da parte inferior da mesma figura, todavia, o vetor de Burgers terá direção perpendicular ao circuito do meio sem defeito, que é o da direita. Se o vetor tem direção paralela ou perpendicular ao circuito, implica em uma deslocação lateral ou uma deslocação parafuso, respectivamente. Tais deslocações serão melhor discutidas na próxima seção.

4.3 Deslocações

As deslocações são facilmente encontradas em cristais tridimensionais, e têm sido estudadas intensamente em metais e semicondutores. Esses defeitos lineares são responsáveis por uma quebra de simetria translacional. Mediante o processo de Volterra, uma deslocação pode ser gerada quando ao fazer o corte no toróide, translada-se uma das faces na direção do eixo de rotação principal do toróide, o que resulta em uma deslocação parafuso (*screw dislocation*). A geometria desse meio é representado por uma métrica, essa por sua vez é uma função não-negativa que descreve a distância entre dois pontos vizinhos. A métrica para a deslocação parafuso é dada, em coordenadas cilíndricas, pelo elemento de linha [55]

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + (\beta d\theta + dz)^2. \quad (4.2)$$

O vetor de Burgers só tem a componente b^z não-nula e a intensidade desse vetor está relacionada ao parâmetro β , que conecta o movimento ao longo do eixo z com a rotação em θ , via a relação $b^z = 2\pi\beta$. Como ilustrado na Fig. (4.3c), nota-se que é realizado o corte no toróide e apenas desloca-se o lado direito para cima, implicando em uma torção no meio.

Uma outra deslocação pode ser produzida se uma das faces for transladada na direção de um eixo perpendicular ao eixo principal, como está ilustrado nas Fig. (4.3a e 4.3b). Tal deslocação é chamada de deslocação lateral (*edge dislocation*). O elemento de linha para um meio com esse defeito é dado em coordenadas cilíndricas por

$$ds^2 = dz^2 + \left(1 - \frac{b \sin\phi}{\pi \rho}\right) (d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2), \quad (4.3)$$

onde b representa o vetor de Burgers, que dessa vez não tem componente não-nula na direção z .

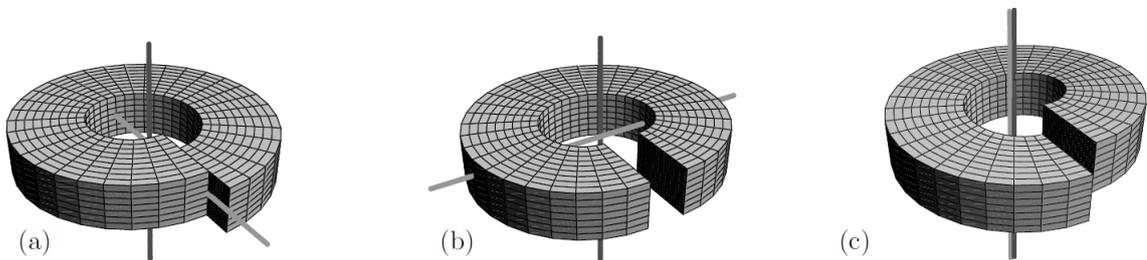


Figura 4.3: Na figura (a) e (b) tem-se duas deslocações laterais, enquanto a figura (c) representa uma deslocação parafuso, também conhecida como helicoidal. Fonte: [24].

4.4 Desclinação

As desclinações são defeitos lineares relacionados com a quebra da simetria rotacional de um meio. Desclinações ocorrem por exemplo em grafeno, material bidimensional à base de carbono. As desclinações também aparecem em cristais líquidos, que são uma classe de materiais que podem se apresentar em um estado da matéria entre o sólido e o líquido, que têm grande impacto na vida cotidiana dos cidadãos [57]. Estudos como o efeito causado na luz pelos defeitos topológicos desse material vêm ganhando espaço, assim como efeitos em tal material devido a um campo elétrico externo aplicado [58, 59]. As desclinações podem ser encontradas também, em padrões de impressões digitais, revestimentos de proteínas de vírus e em peles de animais listrados, tais como a zebra [62].

As desclinações podem ser geradas, mediante o processo de Volterra, através de rotações das faces do toróide, surgidas após o corte. A depender de como se rotaciona, tem-se um tipo de desclinação. Se as faces forem rotacionadas em torno de um eixo ortogonal ao eixo principal do toróide, então tem-se uma desclinação torção (*twist disclination*), como pode ser visto na figura (4.4). Se uma das faces do objeto for rotacionada em torno do eixo de rotação principal², adiciona-se uma cunha de material para completar o objeto, e tem-se uma desclinação em cunha (*wedge disclination*), este defeito também pode ser observado na figura (4.3). Esta por sua vez pode ser gerada com a inserção ou retirada de material do meio. No caso da inserção, o meio apresentará uma curvatura negativa, e representará o que é conhecido como desclinação negativa. De forma análoga, se for retirado material, então haverá uma curvatura positiva, o que caracteriza uma desclinação positiva.

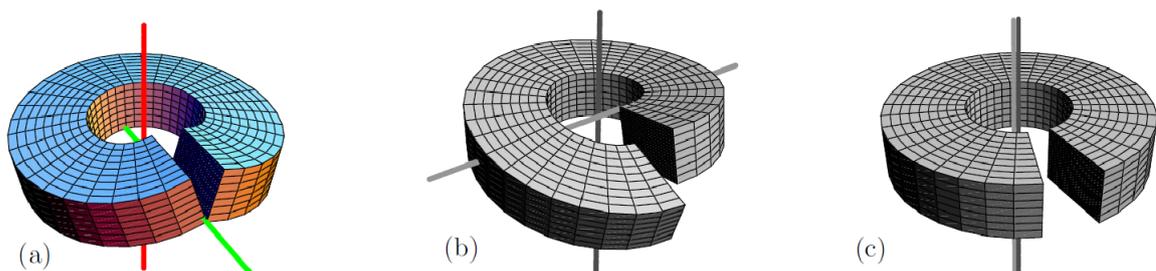


Figura 4.4: As figuras (a) e (b) representam duas desclinações *twist* e a figura (c) é uma desclinação tipo cunha. Fonte: [24].

Para visualizar a curvatura formada pela desclinação pode-se observar uma camada plana de BN (boro e nitrogênio) na figura (4.5a). Observa-se na formação de uma desclinação a

²O eixo de rotação principal é aquele de maior ordem, ou seja aquele que como um menor ângulo de rotação (diferente de zero) é possível retomar a uma configuração indistinguível da inicial

retirada de uma fatia de 60° e em seguida a junção das duas faces (fig. 4.5b), o que resulta em um cone (fig. 4.5c), ou ainda, ao invés de retirar, é possível fazer o corte e inserir uma fatia de 60° (fig. 4.5d), que resultará em um meio com formato de uma "sela" (fig. 4.5e). No artigo de Azevedo e colaboradores, de onde se retirou essa figura, inseriu-se defeitos em camadas de BN para investigar as propriedades eletrônicas das camadas de BN [60].

Como já foi dito anteriormente, a desclinação está relacionada com a curvatura do meio com defeito. O ângulo diedral λ , que corresponde ao ângulo da fatia inserida ou retirada, indica quão curvo o meio desclinado está. A geometria desse meio é representada pela métrica, que, para um meio com desclinação, é escrita em coordenadas cilíndricas como

$$ds^2 = dr^2 + \alpha^2 r^2 d\theta^2 + dz^2, \quad (4.4)$$

onde $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ e $-\infty < z < \infty$. O parâmetro α vai indicar a influência do defeito, $0 < \alpha < 1$ corresponde a uma desclinação positiva e $\alpha > 1$ corresponde a uma desclinação negativa. Nota-se, ao fazer $\alpha = 1$, que o espaço representado por essa métrica não é curvo, pois para este valor, tem-se a métrica do espaço plano em coordenadas cilíndricas, dessa maneira, $\alpha = 1$ representa o meio sem defeito (espaço euclidiano).

O ângulo diedral λ relaciona-se com o parâmetro α através da seguinte expressão

$$\lambda = 2\pi(\alpha - 1). \quad (4.5)$$

Resumidamente, o efeito de uma desclinação em cunha em um meio é o seguinte: ao invés de considerar o ângulo θ , considera-se um novo ângulo $\alpha\theta$, ou seja, $\theta' \rightarrow \alpha\theta$, onde θ' é o ângulo no meio com o defeito, assim como, θ é o ângulo do meio sem defeito. Nota-se, por exemplo, que uma volta completa em torno do eixo principal não corresponderia mais 2π , e sim $2\pi\alpha$.

4.4.1 Vetor e ângulo de Frank

Uma técnica similar à fornecida por Burgers para o estudo das deslocações, foi desenvolvida por Frank R. N. Nabarro. Para realizar tal processo, deve-se novamente selecionar um circuito, porém os números de passos não serão analisados, e sim, as orientações dos caminhos no circuito. Ou seja, ao invés de verificar a posição final e inicial da "caminhada" pelo circuito, verificar-se-á durante todo o circuito a contínua mudança da orientação, e a variação líquida dessa irá caracterizar esse defeito. Dessa maneira, pode ser atribuído um vetor axial $\vec{\lambda}$, conhecido como vetor de Frank, para indicar a curvatura do meio. O ângulo diedral também é conhecido como ângulo de Frank.

Dessa forma, tem-se a seguir uma tabela com os defeitos e seus respectivos elementos de linha, onde observa-se que a deslocação lateral é o único defeito da tabela que não apresenta

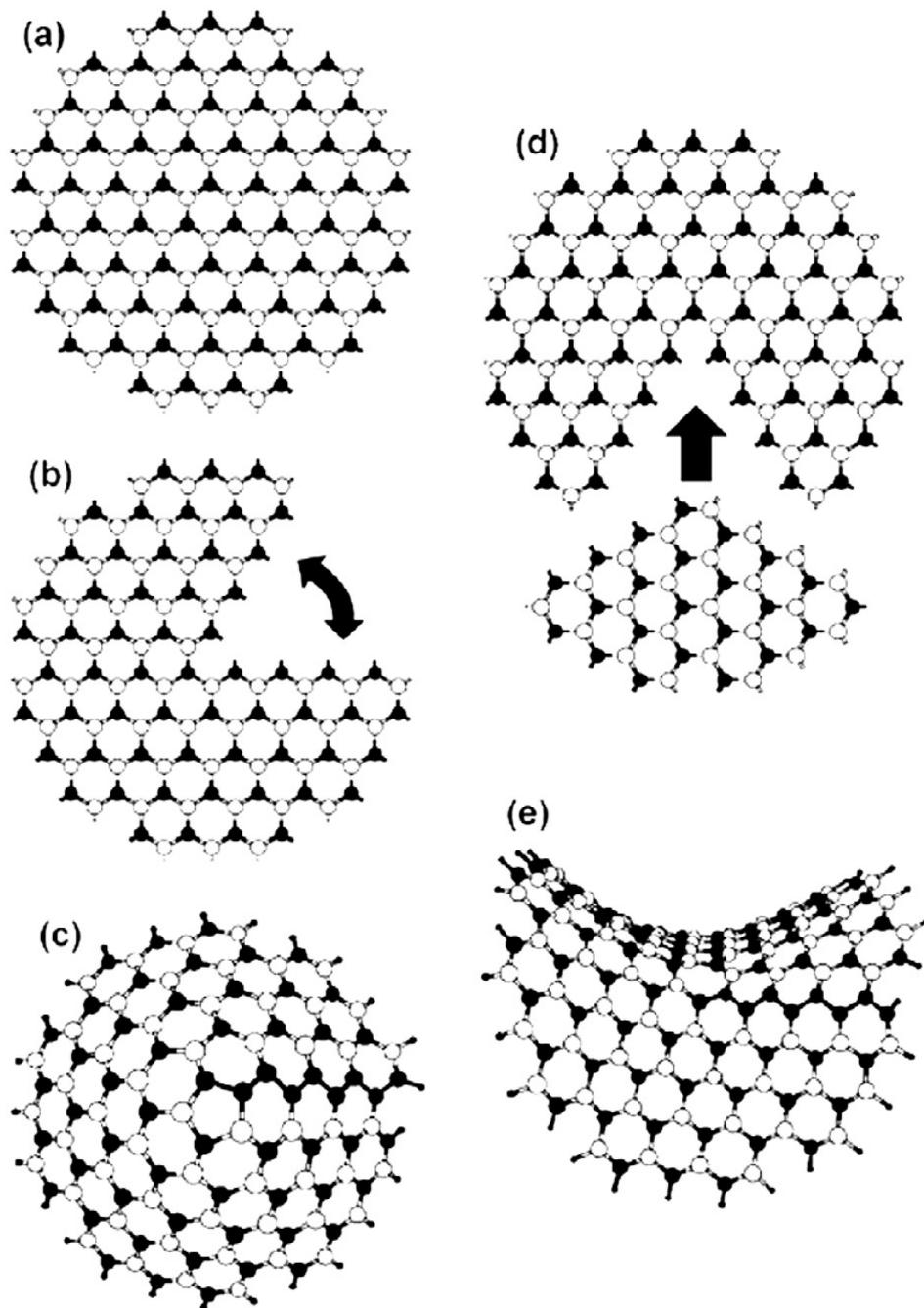


Figura 4.5: (a) Camada Plana de BN (boro e nitrogênio), (b) e (c) Desclinação positiva $0 < \alpha < 1$: retira-se uma cunha da camada de BN e depois junta-se as moléculas que foram rompidas, (d) e (e) desclinação negativa $\alpha > 1$: é inserido uma cunha no meio a mais no meio. Fonte: [25]

simetria axial e a desclinação é o único que tem quebrada apenas a simetria rotacional.

Deslocação parafuso	$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + (\beta d\theta + dz)^2$
Deslocação lateral	$ds^2 = dz^2 + \left(1 - \frac{b \operatorname{sen}\phi}{\rho}\right) (d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2)$
Desclinação em cunha	$ds^2 = dr^2 + \alpha^2 r^2 d\theta^2 + dz^2$

Tabela 4.1: Métricas para algumas deslocações e desclinações

4.5 Influência de defeitos topológicos em níveis de energia

Na década de 90, alguns estudos foram realizados a respeito de alguns fenômenos na presença de defeitos topológicos [25, 26, 29], inclusive os níveis de Landau [27, 30]. Analisou-se o comportamento dos elétrons na presença de um campo magnético movendo-se em torno de uma distribuição de desclinação, uma deslocação parafuso magnética e uma despiração. A representação desses defeitos como elementos geométricos foi através da teoria geométrica de defeitos em sólidos de Katanaev-Volovich. Como foi visto na seção anterior, em geral, os defeitos correspondem a uma curvatura singular ou torção (ou ambas) ao longo da linha do defeito. Esses elementos geométricos podem ser descritos através de uma métrica g_{ij} que irá conter informações sobre as deformações causadas no espaço devido ao defeito. Para obter os níveis de Landau é necessário resolver uma equação de Schrödinger que é fornecida através da atuação do operador hamiltoniano na função de onda. O hamiltoniano do sistema terá alterações de acordo a métrica, visto que os operadores diferenciais são escritos com base na geometria do espaço. O operador Laplaciano por exemplo, é dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (g^{ij} \sqrt{g} \partial_j) \quad (4.6)$$

onde $g = \det|g_{ij}|$ representa o determinante da métrica. Pode-se então escrever que o Hamiltoniano correspondente a uma partícula carregada submetida a um campo magnético e na geometria de um defeito como

$$H = \frac{1}{2m\sqrt{g}} (p_i - qA_i) [\sqrt{g} g^{ij} (p_j - qA_j)], \quad (4.7)$$

onde o acoplamento mínimo $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$ foi utilizado. Consideramos agora uma desclinação, que tem a métrica dada por

$$ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2, \quad (4.8)$$

onde $\alpha = 1 + \lambda/2\pi$ e λ representa a o ângulo que define a desclinação do meio. Os níveis de energia obtidos para um gás de elétrons nesse meio, são dados por

$$E = \frac{\hbar}{2\alpha} \left(2n + \frac{|\ell|}{\alpha} \pm \frac{\ell}{\alpha} + \frac{1}{2} \right), \quad (4.9)$$

onde o sinal positivo se refere a buracos e o sinal negativo a elétrons. Em um meio livre de defeitos, os níveis de Landau são infinitamente degenerados, porém na presença da desclinação, essa degenerescência é reduzida.

Em 2012, A. A. de Lima e C. Filgueiras investigaram o efeito Hall quântico inteiro na interface com desclinações. Eles encontraram que curvatura positiva ($\alpha < 1$) diminui a largura dos degraus Hall e os desloca em direção à região de menor campo magnético. Por sua vez, a curvatura negativa leva à existência de dois tipos de platôs, um platô com largura maior e outro com largura menor que o caso plano. Os degraus ficam alternados como pode ser visto na figura 4.6. Nesse caso também há o deslocamento dos degraus, porém em sentido contrário, para campos magnéticos mais fortes. A influência de outros defeitos em níveis de Landau pode ser vista com detalhes nas referências [30, 31].

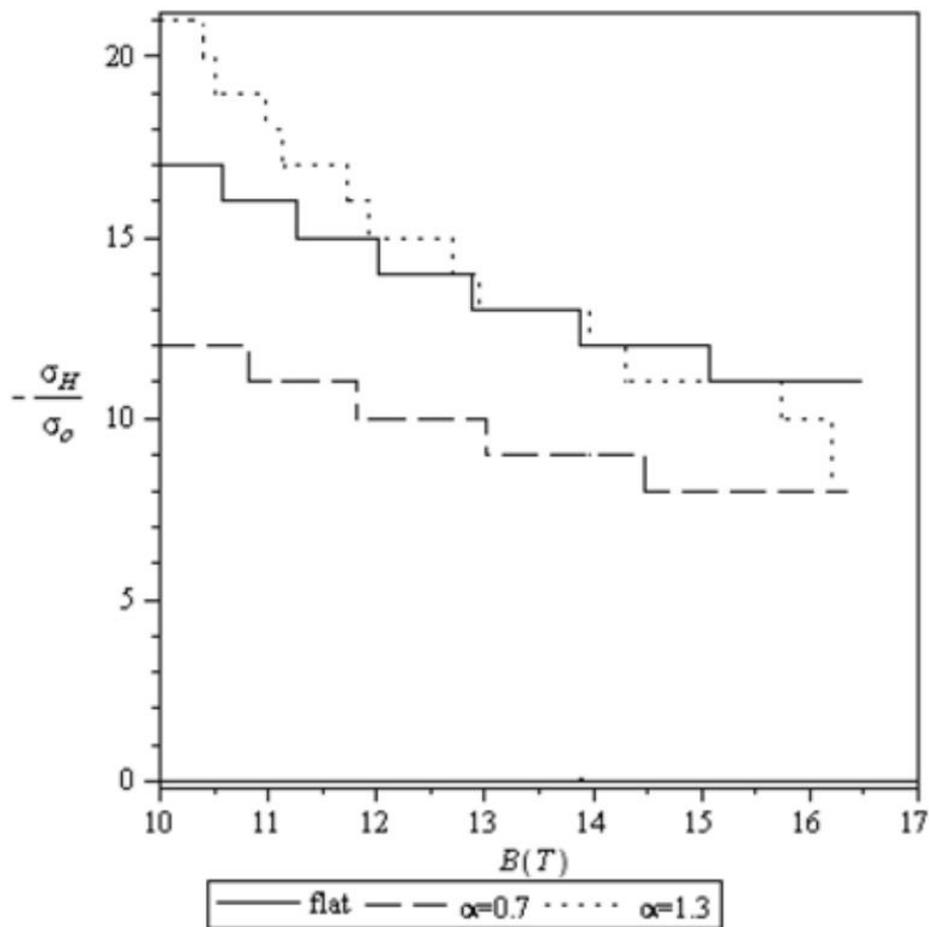


Figura 4.6: Para $\alpha < 1$, há uma redução da largura dos platôs Hall e um deslocamento dos degraus para a região com menores campos magnéticos. Para $\alpha > 1$, existem dois tipos de platôs: um com largura maior e outro com largura menor em comparação ao caso plano. O deslocamento dos degraus neste caso será para a região com maior campo magnético. Fonte: [71]

Neste capítulo, discutiu-se sobre o que são defeitos topológicos e como estão relacionados a geometria de um meio, podendo representar curvatura, torsão ou ambas. Algumas métricas características de alguns defeitos foram apresentadas. Nos capítulos dois, três e quatro estão os conceitos necessários para analisar no capítulo seguinte como os três elementos (campo magnético, rotação e defeito topológico) podem interagir e influenciar nos níveis de Landau e na condutividade Hall para um gás de elétrons bidimensional não interagente.

Efeitos inerciais e topológicos na condutividade Hall

Nos capítulos anteriores foram discutidos os diversos efeitos causados em vários sistemas devido a presença de campo magnético, desclinação ou rotação. Neste capítulo será abordado a presença simultânea dos três. Será analisada a sua influência nos níveis de energia, bem como na condutividade Hall. No fim do capítulo, os resultados mostrados aqui serão conferidos com os já contidos na literatura da área de pesquisa.

5.1 Transformações para os campos eletromagnéticos em um referencial girante

Nesse capítulo será feito um estudo no referencial girante, para onde os campos eletromagnéticos irão se transformar de acordo com [61]:

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{\gamma}{(\gamma+1)} (\vec{V} \cdot \vec{E}) \vec{V}, \\ \vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{V} \times \vec{E}) + \gamma^2 \vec{V} \times (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)} (\vec{V} \cdot \vec{B}) \vec{V}, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $\gamma = \sqrt{1/(1 - V^2/c^2)}$ e \vec{V} representa a velocidade de rotação. Os elementos \vec{E}' e \vec{B}' , são os campos no referencial girante e \vec{E} e \vec{B} são os campos no referencial do laboratório. A velocidade de rotação do referencial girante será muito menor que a velocidade da luz, então,

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}, \quad (5.2)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}. \quad (5.3)$$

Nota-se que, o campo magnético no referencial girante (\vec{B}') independe da rotação. Ou seja, será igual a \vec{B} , que é o campo magnético aplicado. Porém, o campo elétrico no referencial girante será o campo elétrico aplicado mais uma componente dependente da rotação e do campo magnético, $(\vec{V} \times \vec{B})$. Assim, mesmo que o disco não seja submetido a um campo elétrico, haverá uma componente devida ao campo magnético e à rotação. A velocidade na relação (5.2) é a velocidade de cada ponto do referencial girante, logo depende do raio, ou seja, $\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$.

Então, os campos eletromagnéticos no referencial girante serão dados por

$$\vec{E}' = (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}, \quad (5.4)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}, \quad (5.5)$$

se não houver campo elétrico aplicado no referencial fixo. Assim, pode-se concluir que a força total sentida pela partícula no referencial girante é

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= \vec{F}_{Cor} + \vec{F}_{Cen} + \vec{F}_{Lor} \\ &= 2m(\vec{v}' \times \vec{\Omega}) - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + q(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} + q\vec{v}' \times \vec{B} \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde \vec{v}' é a velocidade da partícula no referencial girante.

5.2 Níveis de energia

Vamos considerar uma partícula livre em um disco que está girando com um campo magnético perpendicular ao disco. As forças de Coriolis e centrífuga são dadas por

$$\vec{F}_{Cor} = 2m(\vec{v} \times \vec{\Omega}), \quad (5.7)$$

e

$$\vec{F}_{Cen} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \quad (5.8)$$

respectivamente. Essas forças entram no hamiltoniano e na equação de Schrödinger como potencial vetor e potencial escalar inercial dados por [62, 63]

$$\vec{A}_{ine} = \frac{1}{2}(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (5.9)$$

e

$$V_{ine} = -\frac{1}{2}(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2, \quad (5.10)$$

respectivamente, e o Hamiltoniano é escrito como

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - 2m\vec{A}_{ine})^2 + mV_{ine}. \quad (5.11)$$

Um campo magnético \vec{B} aplicado no laboratório será sentido pelas partículas carregadas no referencial girante como um campo elétrico e magnético dados por

$$\vec{E}' = (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} \quad (5.12)$$

e

$$\vec{B}' = \vec{B}. \quad (5.13)$$

Dessa forma, o hamiltoniano em coordenadas cilíndricas de uma partícula em um disco girante na presença de um campo magnético, com $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$ e $\vec{B} = B\hat{z}$, pode ser escrito como

$$H = \frac{[\vec{p} - q\vec{A} - m(\vec{\Omega} \times \vec{r})]^2}{2m} - \frac{m(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2} + qV, \quad (5.14)$$

onde V e \vec{A} são os potenciais eletromagnéticos escalar e vetorial, e são dados por

$$V = -\frac{\Omega Br^2}{2}, \quad (5.15)$$

$$\vec{A} = \left(0, \frac{Br}{2\alpha}, 0\right). \quad (5.16)$$

O α que aparece na equação (5.16) é devido à desclinação presente no sistema. O defeito topológico faz com que os operadores diferenciais sejam alterados de acordo com a métrica. Esse termo então aparece para que ao aplicarmos o rotacional no potencial vetor, tenhamos como resultante um campo magnético constante e uniforme na direção \hat{z} .

Assim, o Hamiltoniano pode ser resumido como

$$H = \frac{p^2}{2m} - \mu r p_\phi + \beta r^2, \quad (5.17)$$

com

$$\mu = \frac{qB}{2m\alpha} + \Omega \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

e

$$\beta = \frac{q^2 B^2}{8m\alpha^2} + \frac{qB\Omega}{2} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right). \quad (5.20)$$

O termo $\mu r p_\phi$ contém o acoplamento usual entre o campo magnético e o momento angular.

Sabendo que $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ e $p_\phi = -\hat{\phi}\frac{i\hbar}{\alpha r}\frac{\partial}{\partial\phi}$, a equação de Schrödinger para esse hamiltoniano pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + i\frac{\mu\hbar}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \beta r^2\psi = E\psi, \quad (5.21)$$

onde o operador Laplaciano (de fato o operador Laplace-Beltrami) é dado por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\alpha^2 r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \quad (5.22)$$

Ao utilizar o *ansatz* $\psi = R(r)e^{-il\phi}$, a Eq. (5.21) torna-se uma equação apenas em r ,

$$r^2 R'' + rR' + \left[-\sigma^2 r^4 + \gamma r^2 - \frac{\ell^2}{\alpha^2}\right] R = 0, \quad (5.23)$$

onde

$$\sigma^2 = \frac{m^2 \omega_c^2}{4\hbar^2 \alpha^2} + \frac{m^2 \omega_c \Omega}{\hbar^2} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \quad (5.24)$$

e

$$\gamma = \frac{2m}{\hbar} \left(\frac{E}{\hbar} - \frac{\omega_c \ell}{2\alpha^2} - \frac{\Omega \ell}{\alpha} \right). \quad (5.25)$$

Para resolver a equação (5.23) será realizada uma transformação de coordenadas de r para ξ , tal que $\sigma r^2 = \xi$. Assim, as derivadas em r serão substituídas por

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{d\xi} = 2\sigma r \frac{d}{d\xi} = 2\sigma \sqrt{\frac{\xi}{\sigma}} \frac{d}{d\xi} = 2\sqrt{\sigma \xi} \frac{d}{d\xi} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} &= 2\sqrt{\sigma \xi} \frac{d}{d\xi} \left(2\sqrt{\sigma \xi} \frac{d}{d\xi} \right) = (2\sqrt{\sigma \xi})(2\sqrt{\sigma \xi}) \frac{d^2}{d\xi^2} + (2\sqrt{\sigma \xi})(2\sqrt{\sigma}) \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \frac{d}{d\xi} \\ &= 4\sigma \xi \frac{d^2}{d\xi^2} + 2\sigma \frac{d}{d\xi} \end{aligned} \quad (5.27)$$

que juntamente com $r = \sqrt{\frac{\xi}{\sigma}}$ em (5.23), leva a

$$\xi \frac{dR}{d\xi} + \frac{dR}{d\xi} + \left(-\frac{l^2}{4\alpha^2 \xi} - \frac{\xi}{4} + \frac{\gamma}{4\sigma} \right) R = 0. \quad (5.28)$$

Ao analisar os limites assintóticos dessa equação, ou seja, $\xi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow \infty$, propõe-se uma solução como

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|\ell|}{2\alpha}} u(\xi), \quad (5.29)$$

na qual foi utilizado o módulo de ℓ para que essa solução não tenha uma divergência na origem. Dessa maneira, as primeira e segunda derivadas de R resultam em

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\xi} &= -\frac{1}{2}R + \frac{|\ell|}{2\alpha} \frac{R}{\xi} + \frac{u'}{u}R \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{|\ell|}{2\alpha} \frac{1}{\xi} + \frac{u'}{u} \right) R \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2R}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{|\ell|}{2\alpha} \frac{1}{\xi} + \frac{u'}{u} \right) R \right] \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{|\ell|}{2\alpha} \frac{1}{\xi} + \frac{u'}{u} \right)^2 R + \left[-\frac{|\ell|}{2\alpha} \frac{1}{\xi^2} + \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u} \right)^2 \right] R. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ao substituir em (5.28) e realizar as operações algébricas necessárias obtém-se,

$$\xi \frac{d^2u}{d\xi^2} + \left[1 + \frac{|\ell|}{\alpha} - \xi \right] \frac{du}{d\xi} + \left[\frac{\lambda}{4\sigma} - \frac{1}{2} \left(\frac{|\ell|}{\alpha} + 1 \right) \right] u = 0, \quad (5.32)$$

que é uma equação hipergeométrica confluyente [64]. Isto é, da forma

$$z \frac{dw}{dz} + (b-z) \frac{dw}{dz} - aw = 0, \quad (5.33)$$

cuja solução completa é

$$w = A.F(a, b, z) + B.U(a, b, z), \quad (5.34)$$

onde A e B são constantes. A função hipergeométrica $F(a, b, z)$ é definida pela série

$$F(a, b, z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!} + \dots + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} + \dots, \quad (5.35)$$

onde

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), (a)_0 = 1, \quad (5.36)$$

e a função hipergeométrica $U(a, b, z)$ é definida por

$$U(a, b, z) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left\{ \frac{F(a, b, z)}{\Gamma(1+a+b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{F(1+a-b, 2-b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right\}. \quad (5.37)$$

Então a equação (5.32) terá como solução

$$u = A.F\left(-\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|l|+1), 1+|l|, \xi\right) + B.U\left(-\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|l|+1), 1+|l|, \xi\right), \quad (5.38)$$

logo,

$$R(r) = e^{-\frac{\sigma r}{2}} (\sigma r)^{\frac{|l|}{2\alpha}} \left\{ A.F\left(-\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|l|+1), 1+|l|, \sigma r\right) + B.U\left(-\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|l|+1), 1+|l|, \sigma r\right) \right\}.$$

Todavia, pode-se observar que o coeficiente $b = 1 + |l|$ das funções F e U na função R , é inteiro e positivo, o que faz a função U divergir na origem, restando como uma solução fisicamente aceitável apenas a função F . Esta, por sua vez, para ser uma função polinomial finita¹ deve ter $a = -n$, condição que fornecerá a quantização dos níveis de energia. Sendo assim,

$$\begin{aligned} -n &= -\frac{\gamma}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|l|+1) \\ &= -\frac{\frac{2m}{\hbar} \left(\frac{E}{\hbar} - \frac{\omega_c \ell}{2\alpha^2} - \frac{\Omega \ell}{\alpha} \right)}{4\sqrt{\frac{m^2 \omega_c^2}{4\hbar^2 \alpha^2} + \frac{m^2 \omega_c \Omega}{\hbar^2} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)}} + \frac{1}{2}(|l|+1) \end{aligned}$$

logo, o espectro de energia para um disco girante com uma desclinação na presença de um campo magnético é dado pela seguinte expressão:

$$E_{n,\ell} = \frac{\hbar \omega_c \ell}{2\alpha^2} + \frac{\hbar \Omega \ell}{\alpha} + \hbar \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\alpha^2} + 4\omega_c \Omega \frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \left[n + \frac{|\ell|}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right]. \quad (5.39)$$

A função de onda será

$$\psi = A e^{-i\ell\phi - \frac{\sigma r}{2}} (\sigma r)^{\frac{|\ell|}{2\alpha}} F\left(-\frac{\gamma}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|\ell|+1), 1+|\ell|, \sigma r\right). \quad (5.40)$$

¹A função de onda deve satisfazer a condição de normalização $\int |\psi|^2 r dr d\phi = 1$, por isso a função polinomial deve ser finita.

5.2.1 Influência da rotação

Uma primeira análise dos níveis de energia será feita desconsiderando a presença do defeito topológico, ou seja, com $\alpha = 1$. Assim, o espectro de energia resulta em

$$E_{n,\ell} = \hbar\Omega\ell + \hbar\omega_c \left[n + \frac{|\ell|}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \right]. \quad (5.41)$$

Se não houver rotação no sistema, $\Omega = 0$, tem-se apenas a força magnética atuando e obtêm-se os níveis de Landau usuais [65]

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega_c \left[n + \frac{|\ell|}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \right] = \hbar\omega_c \left[m + \frac{1}{2} \right], \quad (5.42)$$

onde $m = n + \frac{|\ell|}{2} + \frac{\ell}{2}$ é um número inteiro. Se houvesse rotação, e o campo magnético fosse nulo, haveriam apenas forças inerciais no sistema. Isso foi feito em 1999 por Johnson [66], como descrito no capítulo três. Que mostrou que a solução para a função de onda é

$$\psi = J_\ell(|\lambda|r)e^{-i\ell\phi}, \quad (5.43)$$

e os níveis de energia são dados por

$$E = \frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + \ell\hbar\Omega, \quad (5.44)$$

onde J_ℓ é uma função de Bessel e o espectro de energia é obtido das condições de contorno do disco. Pode-se obter esse resultado calculando o limite da função de onda (5.40) quando $B \rightarrow 0$, e extraindo da nova função de onda (Bessel), a nova condição de energia. Vale destacar que não seria possível substituir $\vec{B} = \vec{0}$ na equação de energia (5.41) pois a mesma foi obtida a partir da solução de uma equação hipergeométrica. Se o valor nulo do campo magnético for substituído já na equação de Schrödinger, obtêm-se uma equação de Bessel. Nota-se que para $B \neq 0$, a equação resultante é uma hipergeométrica, que resulta em um espectro tipo Landau que é independente da borda da amostra. Isso é uma consequência do fato que um campo magnético fraco é suficiente para confinar a função de onda, tal que as bordas não são importantes. Todavia, com $B = 0$, existem níveis de energia quantizados não degenerados que são influenciados pela borda da amostra.

5.2.2 Influência da rotação na presença de campo magnético

Antes de analisar a solução geral, sem defeito ainda, serão discutidos dois casos particulares onde será especificada a relação entre o campo magnético e a taxa de rotação do sistema. O primeiro caso, $\Omega = -\frac{qB}{m}$, que representa um sistema que tem apenas as forças magnéticas e de Coriolis, isto é, as forças centrífuga e elétrica se cancelam. O segundo caso, $\Omega = -\frac{qB}{2m}$, representa o sistema inverso. Ou seja, as forças magnética e de Coriolis se cancelam permanecendo

apenas as forças elétrica e centrífuga. Então, substituindo essas escolhas na equação (5.41), obtém-se que os níveis de energia são dados por

$$E_{n'} = \hbar\omega_c \left(n' + \frac{1}{2} \right), \quad (5.45)$$

para o primeiro caso, e

$$E_{n''} = \hbar\omega_c \left(n'' + \frac{1}{2} \right), \quad (5.46)$$

para o segundo caso, onde $n' = n + \frac{|\ell|}{2} - \frac{\ell}{2}$ e $n'' = n + \frac{|\ell|}{2}$. Nota-se que no segundo caso, mesmo com o cancelamento da força magnética e sem o potencial vetor aparecer no hamiltoniano final, a quantização tipo Landau ainda existe.

Em ambos os casos os níveis de energia são degenerados, isto pode ser observado analisando os números n' e n'' nas equações (5.45) e (5.46). No primeiro caso, combinações diferentes dos valores de n e ℓ fornecem o mesmo valor para n' , ou seja, a mesma energia. Em particular, para um dado valor de n , todos os níveis com $\ell \geq 0$ têm o mesmo valor de energia. Isso é o que acontece nos níveis de Landau usuais, exceto que nestes para o mesmo valor de n , os estados são infinitamente degenerados com $\ell \leq 0$. Então, o resultado para o primeiro caso são os níveis de Landau com a carga ou campo magnético invertidos. É importante notar que o número n' é sempre inteiro para qualquer combinação entre n e ℓ . No segundo caso, diferentes combinações entre n e ℓ resultam em um mesmo valor para n'' . Nota-se que desta vez, n'' não é inteiro somente, mas meio inteiro também. O que significa que a separação entre os níveis de energia será $\hbar\omega/2$. Todos os níveis são degenerados também. Assim, tem-se que a os níveis de energia para o segundo caso são equivalentes aos do oscilador harmônico.

Para analisar o caso geral, relaciona-se o campo magnético com a rotação da seguinte maneira

$$\Omega = \frac{a q B}{2 m}, \quad (5.47)$$

onde a é um número real. Essa relação cobre todas as possíveis combinações entre B e Ω . Os dois casos discutidos anteriormente são representados por $a = -2$ e $a = -1$, respectivamente. Então, os níveis de energia podem ser escritos como

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega_c \left\{ \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \right) \ell + \frac{|\ell|}{2} + n + \frac{1}{2} \right\}, \quad (5.48)$$

o que permite ilustrar o espectro de energia como uma função de a , como pode ser visto na figura (5.2). As linhas vermelhas verdes e azuis representam estados com $\ell = -1, 0, 1$ respectivamente. Cada linha representa um valor de n , e a linha mais abaixo tem $n = 0$. Como pode ser visto, os níveis com momento angular positivo tem valor de energia aumentado na medida que a cresce, enquanto estados com momento angular negativo diminuem. Os níveis com o momento

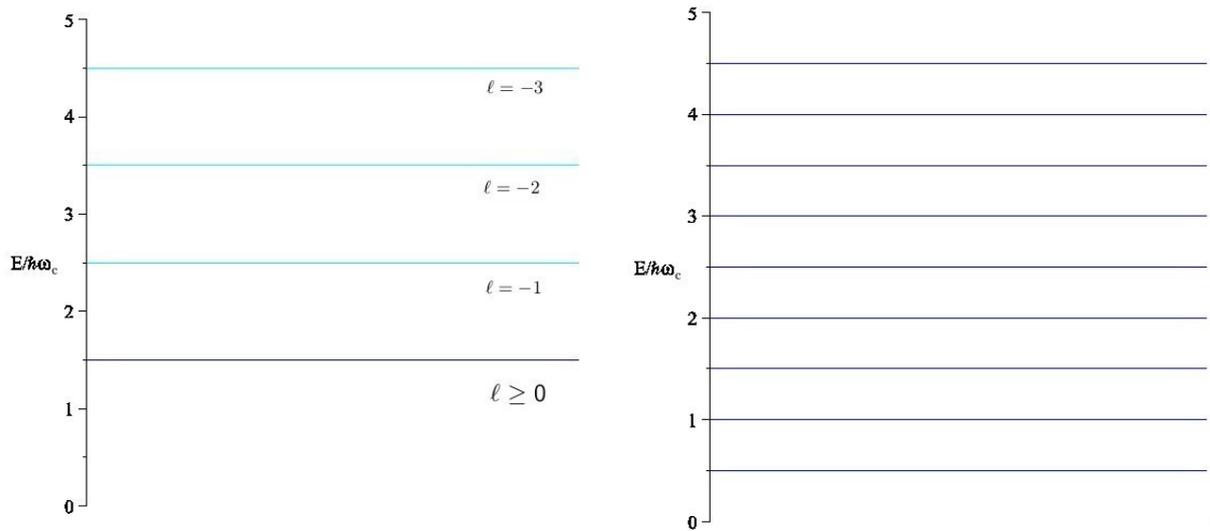


Figura 5.1: (a) Níveis de energia obtido através da equação (5.45) para $n = 1$. Todos os níveis com $\ell \geq 0$ são degenerados. (b) Níveis de energia obtidos através da equação (5.46) para $n = 1$. Os valores possíveis de energia são separados por $\hbar\omega_c/2$, como no oscilador harmônico.

angular nulo não sofrem qualquer alteração com a variação da a . Pode-se observar que os estados com $\ell = 1$ and $\ell = -1$ são simétricos com relação a $a = -1$, que explica o fato que o caso especial $a = -2$ é equivalente aos usuais níveis de Landau, ($a = 0$), com carga invertida. Em consequência dessa simetria, existem cruzamentos entre os estados com $\ell = 1$ e $\ell = -1$ para $a = -1$, que significa que esses estados são degenerados. O cruzamento permanece para valores inteiros de a , mas nesses casos a degenerescência é entre estados com diferentes valores de n . Quando a é um inteiro par, o níveis com $\ell = 0$ são degenerado para estados com $\ell = -1$ e $\ell = 1$, o qual não acontece para valores inteiros ímpares de a . Não há degenerescência entre esses estados quando a não é inteiro.

Dessa forma, como foi discutido acima, a rotação afeta diretamente os níveis de Landau, induzindo um deslocamento e uma separação dos estados. O deslocamento não tem consequências físicas importantes, todavia a separação dos níveis de energia afeta, por exemplo, o efeito Hall quântico.

5.2.3 Quantização Hall

Após obter o espectro energético, é possível investigar a influência da rotação na condutividade Hall para esse sistema. Quando a temperatura é zero e ao considerar que o nível de Fermi E_F

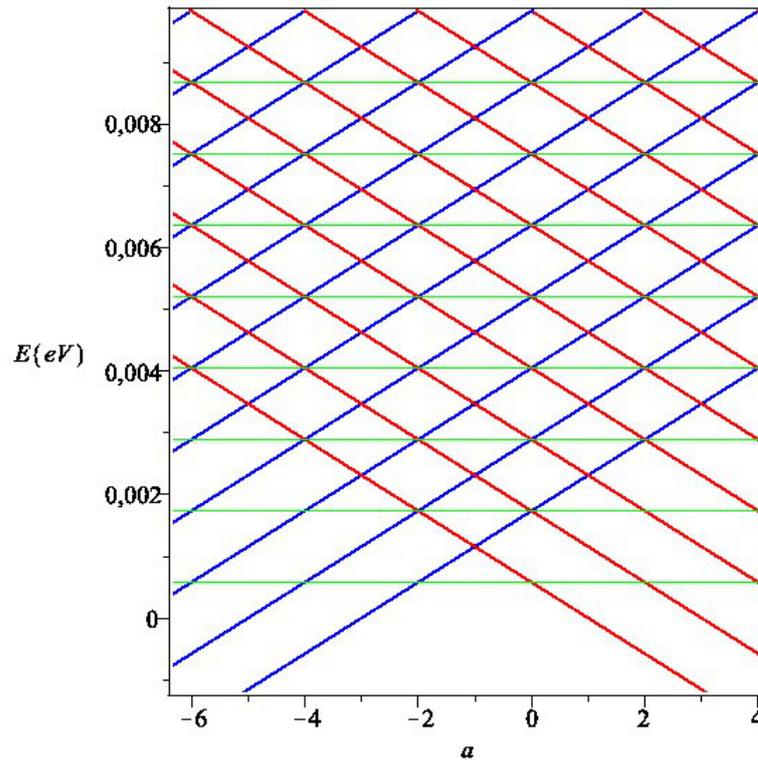


Figura 5.2: Os níveis de energia obtidos do espectro de energia (5.48) para $\ell = -1$ (vermelho), $\ell = 0$ (verde) e $\ell = 1$ (azul) como uma função do parâmetro a . Cada linha representa um valor de n e a linha mais abaixo é $n = 0$. Quando a cresce, os níveis de energia com momento angular positivo são deslocado para cima, estados com momento angular negativo são deslocados para baixo e os níveis com momento angular nulos não são alterados.

esteja em um "gap" de energia, a condutividade Hall pode ser escrita como [67]

$$\sigma_H(E_F, 0) = \frac{e}{S} \frac{\partial N}{\partial B}, \quad (5.49)$$

onde N é o número de estados abaixo do nível de Fermi e S é a área da superfície. A densidade de estados é dada por

$$n(E) = \frac{|eB|}{2\pi\hbar} \sum_{n,l} \delta(E - E_{n,l}). \quad (5.50)$$

Dessa forma, pode-se obter N como

$$N = S \int_{-\infty}^{E_F} n(E) dE = \frac{S|eB|}{h} \times n, \quad (5.51)$$

onde n é o número de níveis de Landau completamente ocupados abaixo do nível de Fermi, assim, a condutividade Hall é

$$\sigma_H = -\frac{e^2}{h} n. \quad (5.52)$$

Pode-se observar que a condutividade Hall obtida aqui tem a mesma forma que no caso sem rotação, de acordo com [68]. Mesmo assim, devido a quebra de degenerescência dos níveis de

Landau induzida pela rotação, o número de estado completamente ocupados abaixo do nível de Fermi podem ser alterados.

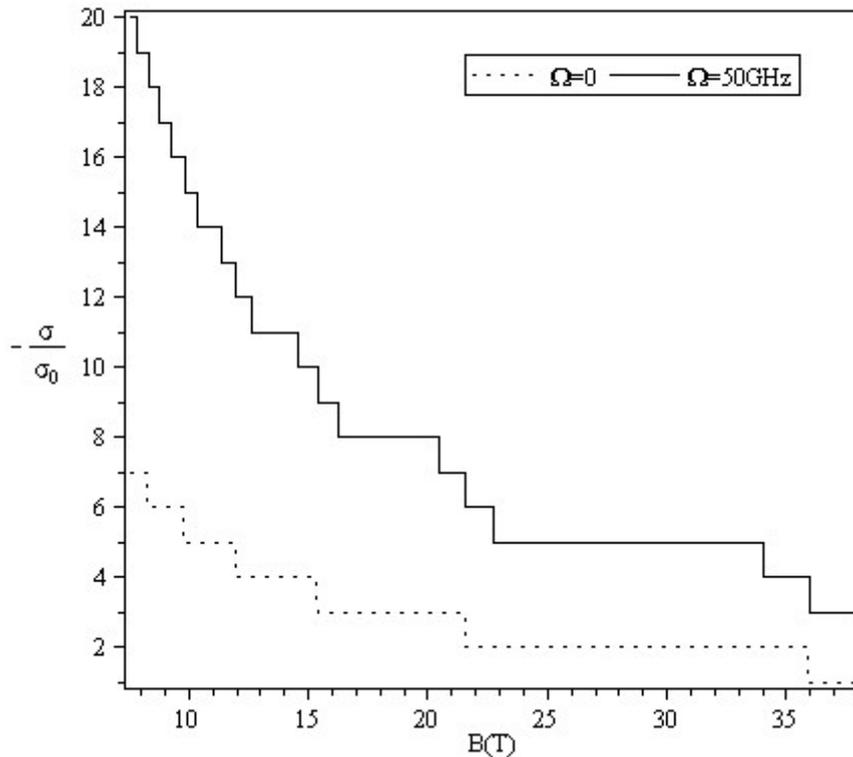


Figura 5.3: Os degraus da quantização Hall como uma função do campo magnético com $\Omega = 0$ (linha pontilhada) e $\Omega = 50$ GHz (linha contínua). Foi considerado apenas estados com $\ell = -1, 0, 1$ e $E_F = 6.24$ meV. Cada degrau para o caso com $\Omega = 0$ se divide em três quando $\Omega \neq 0$.

Na Figura 5.3 está ilustrada a condutividade Hall como uma função do campo magnético para $\Omega = 0$ e $\Omega = 50$ GHz. Na verdade, ilustra-se $-\sigma_H/\sigma_0$, que é o número de níveis de Landau completamente ocupados abaixo no nível de Fermi E_F , onde $\sigma_0 = e^2/h$ representa um quantum de condutividade. Quando o campo magnético aumenta, todos os estados aumentam suas energias e começam a cruzar o nível de Fermi, criando os degraus Hall. É importante mencionar que está sendo considerado aqui, apenas os estados com $\ell = -1, 0, 1$. No caso com $\Omega = 0$, quando o campo magnético aumenta, o próximo degrau é sempre mais largo que o anterior. Isso é uma consequência do fato que a distância entre dois níveis de Landau subsequentes aumentam juntamente com o aumento do campo magnético. Entretanto, para $\Omega \neq 0$, o próximo degrau não necessariamente tem largura maior que o anterior. Isso é devido à quebra de degenerescência entre estados com diferentes valores de ℓ introduzido pela rotação. Então, cada degrau, no caso com $\Omega = 0$, se torna três para $\Omega \neq 0$. Dessa forma, para $\Omega \neq 0$, cada degrau é maior que o terceiro anterior.

Na Figura 5.4 é ilustrado o comportamento da condutividade Hall em função da taxa de ro-

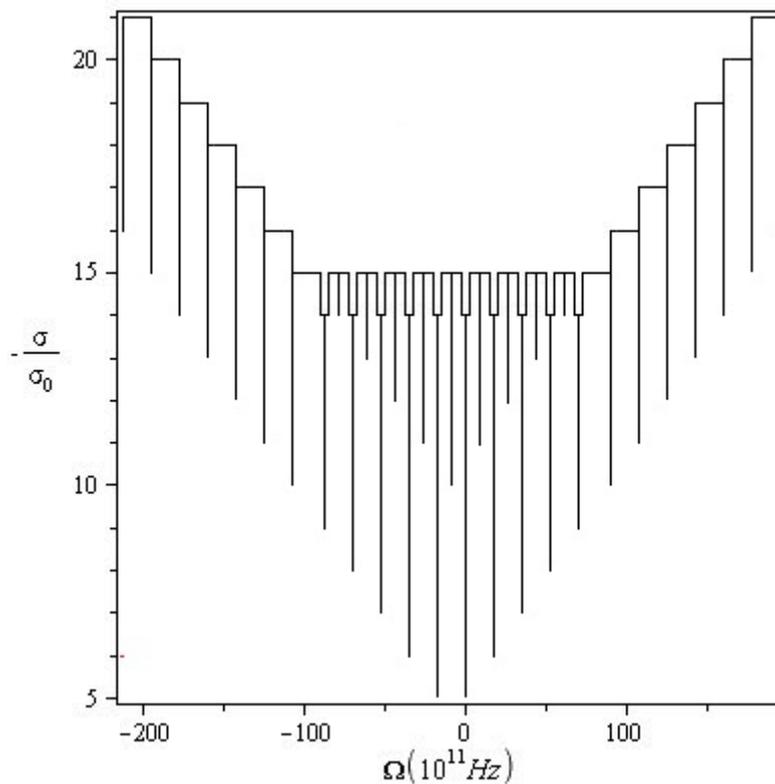


Figura 5.4: Os degraus da quantização Hall como uma função da rotação para $B = 10$ T e $E_F = 6.24$ meV. Quando o módulo da rotação é menor que 100×10^{11} Hz a condutividade Hall oscila. Para valores muito maiores para taxa de rotação, esses resultados não são válidos.

tação para um valor fixo de campo magnético. Olhando para o espectro de energia, eq. (5.41), observa-se que quando a taxa de rotação aumenta, estados com valores positivos de ℓ são deslocados para cima, enquanto estados com valores de ℓ negativos são deslocados para baixo. Níveis de energia para estados com momento angular nulo não são alterados pela rotação. Assim, alterando a taxa de rotação, haverão estados cruzando o nível de Fermi para cima e para baixo proporcionando diferentes comportamentos para a quantização Hall dos degraus. Na Figura 5.4 considerou-se apenas estados com $\ell = -1, 0, 1$, como no caso anterior. É possível ver que o número de estados completamente ocupados abaixo do nível de Fermi pode aumentar, diminuir ou oscilar quando a rotação muda continuamente. Os valores negativos de Ω na Figura 5.4 significam que a rotação está em sentido oposto com relação ao campo magnético.

Para valores específicos de Ω existem uma pontual e profunda baixa da condutividade, que são representadas pelas linhas verticais na Figura 5.4. Isso acontece por causa que, para esses valores de Ω , o parâmetro a é um inteiro e estados com $\ell = -1, 1$ são degenerados, como pode ser visto na figura 5.2, o que faz reduzir o número níveis de energia abaixo do nível de Fermi. Então, é possível entender a figura 5.4 olhando com atenção para a figura 5.2. Quando o módulo da velocidade de rotação aumenta para valores em torno de 100×10^{11} Hz, os degraus

Hall passam a ter um aspecto tipo dentes, independente do sentido da rotação, o que significa que depois que um nível de energia cruzar o nível de Fermi para cima (baixo), em seguida um nível cruzará para baixo (cima). Para valores maiores de módulo da taxa de rotação, o número de níveis completamente ocupados abaixo de E_F começa a aumentar, ao contrário da situação anterior, onde a condutividade diminui quando o campo magnético aumenta.

É importante dizer que para valores muito maiores da rotação, esses resultados não são válidos, pois aqui não foram considerados efeitos relativísticos. A velocidade v na borda da amostra é dada por $v = R\Omega$, onde R é o raio do disco. Assim, para não ter efeitos relativísticos de v , o raio do disco onde esses resultados são válidos diminuem à medida que Ω aumenta.

5.2.4 Rotação, campo magnético e desclinação simultaneamente

Na seção anterior foi discutida a solução dos níveis de energia com $\alpha = 1$, ou seja, sem a presença do defeito topológico. Nessa seção, o defeito topológico voltará a ser considerado, logo $a \neq 1$. Primeiramente, analisando a influência de cada grandeza, tem-se que a desclinação sozinha introduz uma conicidade que quebra a degenerescência infinita dos níveis de Landau [26]. A rotação sozinha quebra a degenerescência entre estados como momento angular oposto e introduz um deslocamento no espectro energético dependente da rotação, $\hbar\Omega\ell$, [69]. Mas, quando tem-se campo magnético, desclinação e rotação simultaneamente, existe um termo na energia, $4\omega_c\Omega\frac{(1-\alpha)}{\alpha}$, que representa o acoplamento desses três elementos, ou seja, se $\Omega = 0$, $\alpha = 1$ ou $B = 0$ esse termo some da expressão da energia.

Antes de finalmente analisar o problema com os três elementos simultaneamente, é válido observar o efeito da desclinação no problema de Johnson [66], ou seja, $B = 0$. Como já foi discutido aqui, na ausência do campo magnético, a equação (5.23) não mais será uma equação hipergeométrica, mas sim uma equação de Bessel alterando assim a solução da função de onda e conseqüentemente as condições de contorno para obtenção do espectro energético. Ao considerar $B = 0$, Eq. (5.23) resulta em

$$r^2 R'' + rR' + (\gamma^2 r^2 - \frac{\ell^2}{\alpha^2})R = 0, \quad (5.53)$$

que é uma equação de Bessel com $\gamma^2 = \frac{2m}{\hbar} (\frac{E}{\hbar} - \frac{\Omega\ell}{\alpha})$. Então o espectro energético pode ser escrito como

$$E = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m} + \frac{\hbar\Omega\ell}{\alpha}, \quad (5.54)$$

e a função de onda é

$$\Psi = J_{\ell/\alpha}(|\gamma|r) e^{-\frac{i\ell\theta}{\alpha}}, \quad (5.55)$$

onde γ é uma variável contínua se a amostra for infinita. Para uma amostra de tamanho finito, γ é discreto e é encontrado pela condição $J_{\ell/\alpha}(|\gamma|a) = 0$, onde a é o raio da amostra. Dessa forma, a

presença da desclinação modifica o resultado obtido por Johnson [66]. Efetivamente, obtém-se um redimensionamento do momento angular ℓ pelo parâmetro do defeito α como visto nas Eqs. (5.54-5.55). Esse redimensionamento apenas altera a separação entre as energia dos estados quânticos, os mesmos continuam não degenerados não sendo possível então haver efeito Hall quântico. Para $\alpha = 1$ recupera-se o resultado de Johnson [66].

Enfim, ao analisar os três elementos simultaneamente, tem-se que os níveis de energia para um disco girante com uma desclinação na presença de um campo magnético são dados pela equação (5.39), e são ilustrados na Figura 5.5. Foram utilizados os valores de $\alpha = 5/6$ e $\alpha = 7/6$, que correspondem a desclinações em redes hexagonais. As linhas vermelho, verde e azul na figura representam os níveis com $\ell = -1, 0, 1$ respectivamente. A linha preta representa o nível de Fermi. Como discutido na seção anterior, a presença da rotação separa os níveis. Quando existe também desclinação no sistema, aparece uma região de campo magnético sem estados de energia ligada (LL). Isso acontece quando a raiz quadrada na equação (5.39) se torna imaginária para $\frac{\omega_c^2}{\alpha^2} + 4\omega_c\Omega\frac{(1-\alpha)}{\alpha} < 0$, que pode ser obtido quando a rotação e o campo magnético tem sinais opostos e ($\alpha < 1$). Ou ainda, se a amostra com curvatura de desclinação positiva ($\alpha < 1$) for substituída por uma com desclinação negativa ($\alpha > 1$) mantendo a rotação e campo magnético com mesmo sinal, que está mostrado na figura 5.5.

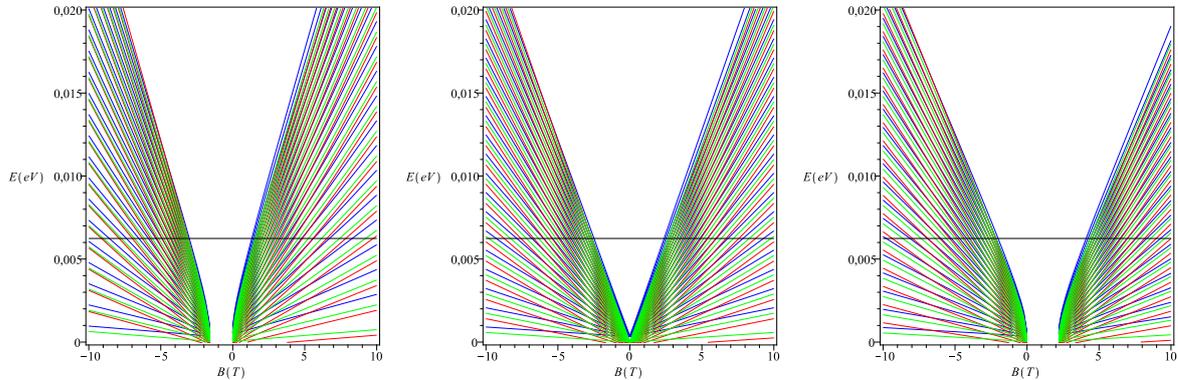


Figura 5.5: Espectro de energia próximo do nível de Fermi de um disco girando (500 GHz) com uma desclinação: (a) $\alpha = 5/6$ (b) $\alpha = 1$ (c) $\alpha = 7/6$. As linhas vermelhas, verdes e azuis representam os níveis com $\ell = -1, 0, 1$, respectivamente. A linha preta representa o nível de Fermi.

O termo $4\omega_c\Omega\frac{(1-\alpha)}{\alpha}$ existe apenas quando existem campo magnético, rotação e desclinação, ou seja, ele depende de B , Ω e α simultaneamente. Então, ele representa o acoplamento dos três elementos. A região sem estados ligados possíveis é explicada matematicamente através da análise do radicando presente na expressão da energia. Fisicamente, existe uma competição entre os três elementos (B , Ω and α) que afeta diretamente o espectro de energia. Classicamente, o campo magnético tende a confinar as partículas, a rotação tende a espalhar e a desclinação

pode espalhar ou confinar a depender da curvatura do defeito. Na região sem estados ligados possíveis, o campo magnético não é forte o suficiente para superar o efeito combinado da rotação com a desclinação e confinar as partículas. Por consequência, tem-se apenas estados espalhados.

Sem o termo $4\omega_c\Omega\frac{(1-\alpha)}{\alpha}$, a energia é linear em B como pode ser visto na equação (5.39). A presença desse termo altera essas linhas retas introduzindo uma característica parabólica como mostrado na figura 5.5. Também, na figura 5.6, é fácil ver a separação dos níveis de energia devido a presença da rotação e como a desclinação pode mediar esse efeito.

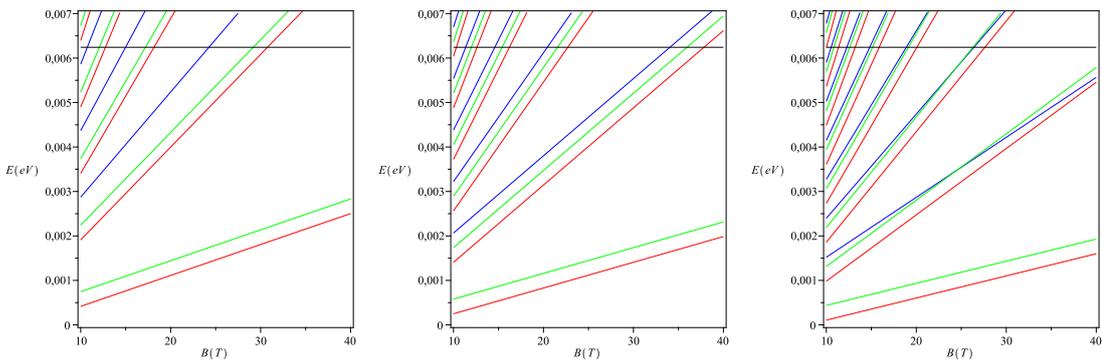


Figura 5.6: O mesmo da figura 5.5 para uma região de campo magnético de 10 a 40 T.

5.3 Condutividade Hall

Após a discussão do espectro energético, pode-se analisar a influência dos três elementos simultaneamente na condutividade Hall. Na temperatura zero e considerando que o nível de Fermi E_F está em um "gap" de energia, a condutividade pode ser escrita com [67]

$$\sigma_H(E_F, 0) = \frac{e}{S} \frac{\partial N}{\partial B}, \quad (5.56)$$

onde N é o número de estados abaixo do nível de Fermi e S é a área da superfície. A densidade de estados é dada por

$$n(E) = \frac{|eB|}{2\pi\hbar} \sum_{n,l} \delta(E - E_{n,l}). \quad (5.57)$$

Dessa forma, pode-se obter N que é dado por

$$N = S \int_{-\infty}^{E_F} n(E) dE = \frac{S|eB|}{h} \times n_0, \quad (5.58)$$

onde $n_0 = (n+1) \times n_\ell$ é o número de níveis de Landau completamente ocupados abaixo do nível de Fermi E_F . Aqui n_ℓ é o número de ℓ -estados ocupados. Assim, a condutividade Hall é dada por

$$\sigma_H(E_F, 0) = -\frac{e^2}{h} n_0. \quad (5.59)$$

Analisando a região entre 10 e 40 T (ver Fig. 5.6), é possível ver onde os níveis de energia cruzam o nível de Fermi, levando à redução da condutividade Hall. Quando uma linha colorida cruza a linha preta (nível de Fermi), isso corresponde a menos um quantum de condutividade dando origem aos degraus Hall. Na Fig. 5.7 está ilustrada a condutividade Hall como uma função do campo magnético para $\Omega = 500$ GHz e três valores do parâmetro de desclinação α : $5/6$, 1 e $7/6$. Esses são valores realísticos correspondendo a um pentágono e um heptágono, respectivamente, na rede hexagonal. O valor $\alpha = 1$ corresponde a ausência de defeito. Como pode ser visto na equação (5.39), quando $\alpha > 1$, o valor da energia de cada nível diminui, aumentando o número de níveis abaixo da energia de Fermi, consequentemente aumentando a condutividade Hall. Assim, em uma mesma região de B , a condutividade é maior para defeitos com $\alpha > 1$.

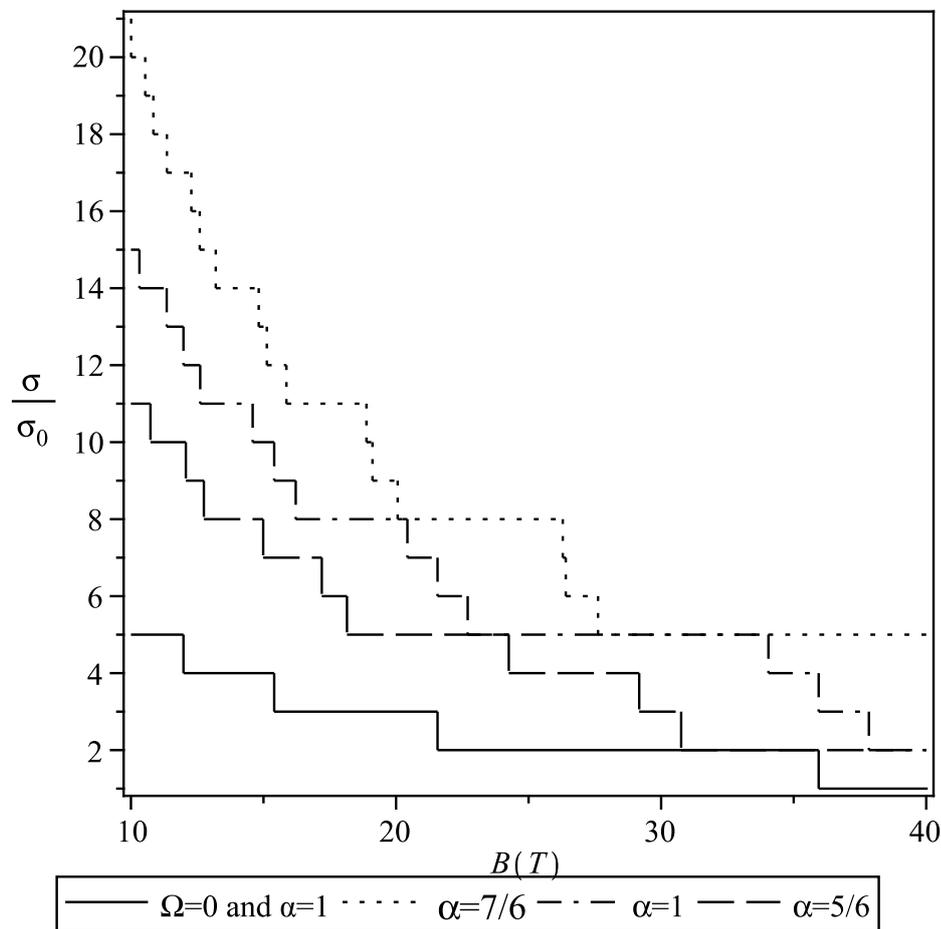


Figura 5.7: Degraus Hall para disco girante (500GHz) com desclinação ($\alpha = 5/6$ e $7/6$) e degraus Hall para um disco sem rotação e desclinação. Quando $\alpha = 1$ o disco está sem desclinação.

5.4 Sintonizando a condutividade Hall com rotação

Nesta seção, será discutida o estudo da influência da rotação na condutividade Hall com um outro ponto de partida.

Em um trabalho recente [70], Konno e Takahashi investigaram a influência de rotação nos níveis de Landau. Eles consideraram o movimento não relativístico de uma partícula quântica carregada na região polar de uma estrela girante sob a ação de um campo magnético uniforme .

Do limite não relativístico da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de uma estrela girante, Konno e Takahashi obtiveram a equação de Schrödinger para uma partícula carregada movendo-se na região polar sob a influência de um campo magnético uniforme \vec{B} paralelo ao eixo de rotação:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 - \frac{GMm}{\rho} - \left(\frac{qB}{2m} + \Omega - \frac{2GMa}{c\rho^3} \right) L_z + \left[\frac{q^2 B^2}{8m^*} + \frac{qB}{2} \left(\Omega - \frac{2GMa}{c\rho^3} \right) \right] (x^2 + y^2) \right] \Psi, \quad (5.60)$$

onde $\nabla^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, $L_z \equiv -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$, G é a constante gravitacional, M é a massa da estrela, a é o raio de Schwartzschild da estrela e Ω é sua velocidade angular. Para remover a influência do campo gravitacional faz-se a constante gravitacional $G \rightarrow 0$ e, com a transformação $z \rightarrow z + R$, onde R é o raio da estrela, move-se a origem do eixo z - para o polo norte. E ainda, considera-se que $x; y \ll R$ para a região polar e restringe o movimento para o plano x - y . Os estados quânticos na região polar plana podem ser obtidos de

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2}{2m^* r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + i\hbar \left(\pm \frac{eB}{2m^*} + \Omega \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{e^2 B^2}{8m^*} \pm \frac{eB}{2} \Omega \right) r^2 \right] \psi = E\psi, \quad (5.61)$$

onde foi reescrita a carga elementar $\pm e$ no lugar de q e a massa efetiva m^* ao invés da massa da partícula m já que o interesse é aplicar esse modelo em um gás de elétrons bidimensional em um semiconductor (o sinal \pm distingue buracos de elétrons). O objetivo então passa a ser resolver a equação (5.61) no plano xy . Ao considerar $\psi(r, \theta) \equiv e^{i\ell\theta} f(r)$ tem-se que a Eq. (5.61) torna-se a equação do oscilador harmônico bidimensional

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell^2}{r^2} - \beta^2 r^2 + \varepsilon \right] f = 0, \quad (5.62)$$

onde $\beta \equiv \left(\frac{e^2 B^2}{4\hbar^2} \pm \frac{m^* e B}{\hbar^2} \Omega \right)^{1/2}$ e $\varepsilon \equiv \frac{2m^*}{\hbar^2} E + \left(\pm \frac{eB}{\hbar} + \frac{2m^*}{\hbar} \Omega \right) \ell$. Ao multiplicar toda a equação por r^2 , tem-se

$$\left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - \beta^2 r^4 + \varepsilon r^2 - \ell^2 \right] f = 0, \quad (5.63)$$

que nítidamente tem a mesma estrutura que a equação (5.23). Mais uma vez obtém-se uma equação hipergeométrica e a solução dessa equação diferencial (5.63) é dada em termos da função hipergeométrica confluyente ${}_1F_1$ por

$$f(r) = r^{|\ell|} e^{-\frac{\beta}{2}r^2} {}_1F_1(\beta r^2). \quad (5.64)$$

A energia é obtida da condição

$$-n = -\frac{\epsilon}{4\beta} + \frac{1}{2}(|\ell| + 1). \quad (5.65)$$

Assim

$$-n = -\frac{\frac{2m^*}{\hbar^2}E + \left(\pm \frac{eB}{\hbar} + \frac{2m^*}{\hbar}\Omega\right)\ell}{4\left(\frac{e^2B^2}{4\hbar^2} \pm \frac{m^*eB}{\hbar^2}\Omega\right)^{1/2}} + \frac{1}{2}(|\ell| + 1), \quad (5.66)$$

e ao isolar a energia obtém-se

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{\hbar^2}{2m^*} \left\{ 4 \left(\frac{e^2B^2}{4\hbar^2} \pm \frac{m^*eB}{\hbar^2}\Omega \right)^{1/2} \left[n + \frac{1}{2}(|\ell| + 1) \right] - \left(\pm \frac{eB}{\hbar} + \frac{2m^*}{\hbar}\Omega \right) \ell \right\}. \\ &= \frac{\hbar^2}{2m^*} \left\{ 4 \left(\frac{(m^*\omega_c)^2}{4\hbar^2} \pm \frac{m^{*2}\omega_c}{\hbar^2}\Omega \right)^{1/2} \left[n + \frac{1}{2}(|\ell| + 1) \right] - \left(\pm \frac{m^*\omega_c}{\hbar} + \frac{2m^*}{\hbar}\Omega \right) \ell \right\}, \end{aligned}$$

onde $\omega_c \equiv \frac{qB}{m^*}$ é a frequência de ciclotron. Ao considerar a frequência de rotação muito menor que a frequência de ciclotron, $\Omega \ll \omega_c$, pode-se expandir a raiz quadrada presente na expressão da energia,

$$\begin{aligned} \left(\frac{(m^*\omega_c)^2}{4\hbar^2} \pm \frac{m^{*2}\omega_c}{\hbar^2}\Omega \right)^{1/2} &= \frac{m^*\omega_c}{2\hbar} \left(1 \pm \frac{4\Omega}{\omega_c} \right)^{1/2} \\ &\approx \frac{m^*\omega_c}{2\hbar} \left(1 \pm \frac{2\Omega}{\omega_c} \right) \\ &\approx \left(\frac{m^*\omega_c}{2\hbar} \pm \frac{m^*\Omega}{\hbar} \right). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Então, os autovalores são dados aproximadamente por [70]

$$E_n = \hbar(\omega_c \pm 2\Omega) \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (5.68)$$

em (5.68), $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. O sinal positivo corresponde a buracos enquanto o sinal negativo corresponde a elétrons. Note que a rotação sozinha não leva aos níveis de Landau, como já havia sido observado por [66]. Mais uma vez, fazer $B = 0$ torna a Eq. (5.68) não válida, visto que a Eq. (5.62) torna-se uma equação de Bessel, perdendo o termo do oscilador harmônico.

Conhecido o espectro energético, obtém-se a condutividade Hall de um gás de elétron bidimensional nesse referencial girante. Novamente será considerado o efeito Hall quântico inteiro

[Goerbig], que consiste da quantização da condutividade e aparição dos platôs em valores particulares de campo magnético, B , e que se manifesta apenas em baixas temperaturas. Por essa razão será considerado apenas o estado fundamental, $T=0$. Como já foi discutido, cada nível de Landau abaixo do nível de Fermi contribuirá com um quantum de condutividade, ou seja, se n_0 níveis de Landau estão completamente preenchidos, a condutividade Hall, σ_H , será dada por $\sigma_H = -n_0\sigma_o$, onde $\sigma_o \equiv e^2/h$ é o quantum de condutividade, e é a carga do elétron e h é a constante de Planck.

Para ilustrar os degraus da condutividade Hall, primeiro foi determinado n_0 para um valor específico de campo magnético. Isso é obtido contando quantos estados estão abaixo do nível de Fermi, E_F . Fazendo E_F igual ao maior nível de Landau preenchido, depois determina-se qual o valor necessário do campo magnético para que haja a mudança na condutividade de $-(n_0 + 1)\sigma_o$ para $-n_0\sigma_o$. Dessa maneira, determina-se o tamanho dos platôs a temperatura zero para um específico n_0 . Continuando esse processo e obtendo os valores de B em que a condutividade muda, pôde-se ilustrar a condutividade Hall na figura 5.8. Nota-se que o tamanho dos platôs não é modificado pela rotação Ω e eles são dados por

$$\Delta B = \frac{mE_F}{\hbar e} \frac{1}{n_o^2 - \frac{1}{4}}, \quad (5.69)$$

onde $n_o = n + 1 = 1, 2, 3, \dots$. Por outro lado, o fator de preenchimento mudará dependendo da rotação Ω . De (5.68), tem-se que

$$n_o = \frac{m^*E_F}{\hbar e (B \pm \frac{2\Omega m^*}{e})} - \frac{1}{2}. \quad (5.70)$$

Isso é claramente uma verificação da referência [68] que diz que o fator de preenchimento surge da quantização de um fluxo de campo de gauge generalizado que inclui tanto contribuições do campo magnético quanto da rotação. Note que inverter entre elétrons e buracos na equação (5.70) é equivalente a inverter o sentido da rotação.

A ilustração da condutividade Hall, Fig. 5.8, foi obtida através das Eqs. (5.69) e (5.70). Diferentes valores da velocidade angular Ω foram utilizados nos dois sentidos, podendo assim considerar o resultado tanto para elétrons quanto para buracos. Ao considerar os níveis de Landau modificados, observa-se que os degraus da condutividade Hall sofrem um deslocamento para um maior ou menor campo magnético com conseqüente crescimento ou redução da condutividade Hall dependendo do produto do sinal da carga com o sinal da velocidade de rotação. Ou seja, conclui-se que a rotação pode ser usada para sintonizar a condutividade Hall.

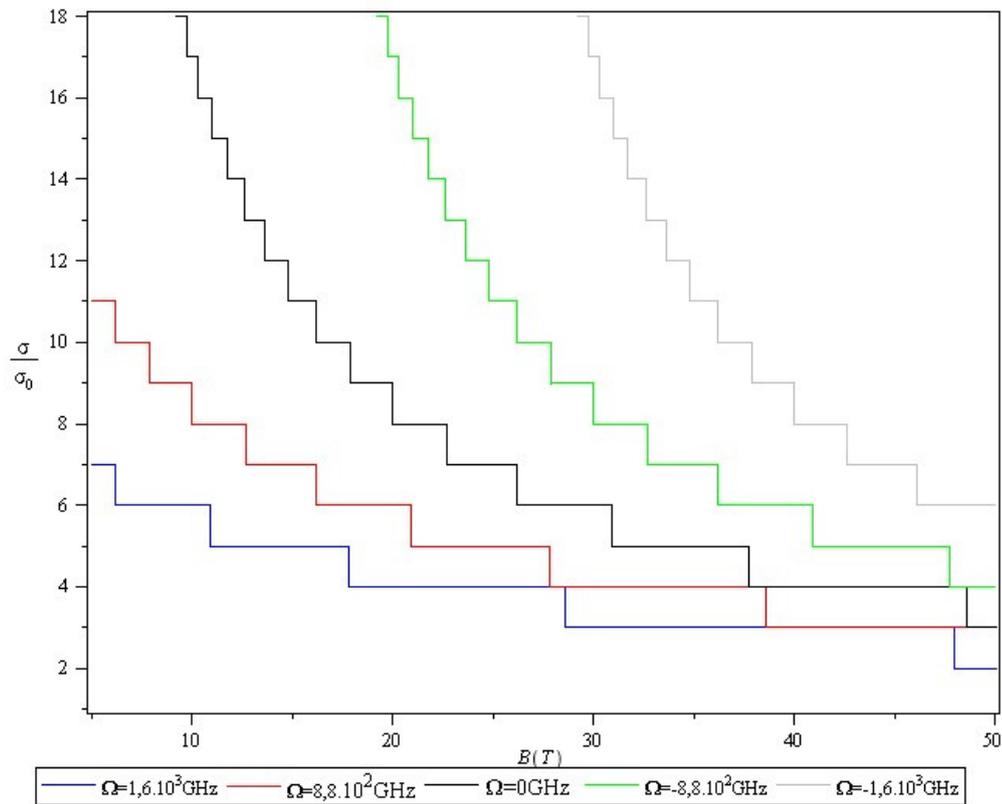


Figura 5.8: Condutividade Hall para um gás de elétrons bidimensional girante. Para buracos (elétrons) a condutividade Hall é aumentada (reduzida) para velocidades de rotação positivas e reduzida (aumentada) no caso contrário. A rotação pode ser utilizada para sintonizar a condutividade Hall para um dado valor de campo magnético fixo, apenas fazendo variar a velocidade de rotação.

Resultados e publicações do doutorado

A contribuição dessa tese para o meio científico está no estudo do acoplamento entre os três elementos abordados (campo magnético, rotação e desclinação) e a influência dos mesmos na condutividade Hall. Parte dessa pesquisa, onde utilizamos apenas campo magnético e rotação, já está publicada:

- Julio E. Brandão, F. Moraes, M.M. Cunha, Jonas R.F. Lima, C. Filgueiras, *Inertial-Hall effect: the influence of rotation on the Hall conductivity*, Results in Physics, **5**, 55 (2015).

Um outro artigo que discute realmente os três elementos atuando juntos no sistema está em processo de submissão: *Inertial and topological effects on a 2D electron gas*.

A outra abordagem a partir dos artigos de Konno e colaboradores, em que obtivemos a rotação como um meio de sintonizar a condutividade Hall, também já está publicada:

- Filgueiras C., Brandão J., Moraes F., *Tuning the Hall conductivity with rotation*, EPL (Europhysics Letters), 110, 27003 (2015).

Outros dois artigos citados nessa tese também foram desenvolvidos no período do doutorado, juntamente com Jonas R. F. Lima e M.M. Cunha, porém não entram como objeto da tese. Esses foram os trabalhos usando rotação em nanotubos de carbono e em fulereno:

- Márcio M. Cunha, Júlio Brandão, Jonas R. F. Lima and Fernando Moraes, *Spin splitting at the Fermi level in carbon nanotubes in the absence of a magnetic field*, The European Physical Journal B, 88, 288 (2015).
- Jonas R. F. Lima, Júlio Brandão, Márcio M. Cunha and Fernando Moraes, *Effects of rotation in the energy spectrum of C₆₀*, The European Physical Journal D, 68 94 (2014)

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese, discutiu-se influência da rotação e desclinação na condutividade Hall quantizada. Para esse propósito considerou-se um gás de elétrons bidimensional não interagente com um campo magnético uniforme. A presença de cada um desses elementos foi analisada separadamente e em seguida, de forma simultânea. Inicialmente resolveu-se um problema geral onde constavam os parâmetros α , B e Ω para valores aleatórios, em seguida discutiu-se o problema com $\alpha = 1$, ou seja, sem defeito topológico.

Verificou-se que a rotação quebra a degenerescência dos níveis de Landau. Todavia, quando a relação $\Omega = \frac{a q B}{2 m}$ é satisfeita e a é um inteiro, existem estados degenerados. A estrutura eletrônica foi analisada para todos os valores possíveis do parâmetro a e enfatizado dois casos especiais, $a = -2$ e $a = -1$. Foi mostrado que para $a = -2$ a estrutura eletrônica é equivalente aos níveis de Landau usuais, mas com inversão de carga ou campo. E ainda, para $a = -1$ os níveis de energia são equivalentes aos de um oscilador harmônico simples. Obteve-se que a condutividade Hall, que é a mesma do caso sem rotação, todavia, devido à separação introduzida pela presença da rotação, a contagem dos níveis completamente preenchidos abaixo do nível de Fermi muda. Fixando a velocidade de rotação e construindo o gráfico da condutividade Hall como uma função do campo magnético para estados com $\ell = -1, 0, 1$, obteve-se que cada degrau Hall para o caso sem rotação se torna três quando $\Omega \neq 0$, aumentando a altura da escada de quantização Hall. Em seguida, construiu-se um gráfico da condutividade Hall com um campo magnético fixo e variando a taxa de rotação. Assim verificou-se que a condutividade Hall oscila quando a rotação tem valores em torno de 100×10^{11} Hz, para os valores de parâmetros escolhidos aqui. Isso acontece porque estados com momento angular positivo (negativo) são deslocados para cima (baixo) quando a taxa de rotação aumenta. Ao fazer $\Omega = 0$, os resultados já conhecidos da literatura foram recuperados.

Em seguida, considerou-se $\alpha \neq 1$, mas ainda sem campo magnético. Verificou-se que o defeito topológico interfere na estrutura eletrônica obtida por Johnson [66]. Obtem-se um re-dimensionamento do momento angular ℓ pelo parâmetro α que altera a separação dos estados obtidos por Johnson. Porém o defeito topológico não muda o fato de não haver degenerescência sem campo magnético, não permitindo então, haver condutividade Hall.

Finalmente, considerou-se um gás bidimensional planar não interagente girando na presença da desclinação e de um campo magnético perpendicular uniforme. Observou-se então que além

dos efeitos conjuntos dos pares campo magnético e rotação, campo magnético e desclinação, e rotação e desclinação, existe um acoplamento simultâneo entre rotação, campo magnético e desclinação. Essa interação dá origem a uma região de valores de campo magnético que não possui estados ligados que os elétrons possam ocupar. O tamanho dessa região depende da desclinação e/ou da taxa de rotação. A característica mais importante desse efeito é que ele só existe na presença dos três elementos simultaneamente, como foi visto, a ausência de qualquer um dos três remove essa região. Se tratando das regiões do espectro com níveis de Landau, verificou-se que a desclinação pode potencializar separação dos estados degenerados devido a rotação. Obteve-se a condutividade Hall com os três elementos, o resultado foi similar ao obtido anteriormente. Porém, devido à separação dos níveis causada pela rotação e potencializada pelo defeito, o número de estados preenchidos abaixo do nível de Fermi cresceu, o que aumenta a condutividade Hall.

Por fim, seguindo como ponto de partida o trabalho do Konno e Takahashi que estudaram níveis de Landau em um referencial girante, adaptou-se seus resultados, removendo a contribuição para o hamiltoniano do campo gravitacional da estrela. Assim obteve-se a condutividade Hall como função do campo magnético aplicado para uma amostra plana girante. Observou-se que, como previsto por Fischer e Schopohl, o fluxo de campo de gauge completo é quantizado e que o tamanho dos platôs quânticos Hall não são alterados pela rotação [68]. Além disso, foi mostrado que uma vez estabelecido o efeito Hall quântico com o campo magnético, a rotação pode ser utilizada para ajustar os platôs de condutividade Hall [71].

Como perspectivas, se propõe analisar a influência de outros defeitos topológicos como a deslocação e despiração juntamente com o campo magnético e a rotação. Bem como analisar a influência desses elementos em outros fenômenos como efeito de Haas-van Alphen. E ainda estender esse estudo para sistemas com spin, incluindo então os termos de interação Zeeman (campo magnético) e tipo-Zeeman (rotação) no hamiltoniano. Dentre as perspectivas também está estudar a influência desses elementos em sistemas com pontos quânticos.

Referências Bibliográficas

- [1] E. H. Hall, *On a New Action of the Magnet on Electric Currents*, American Journal of Mathematics vol **2**, 287, (1879).
- [2] R. B. Laughlin, *Quantized Hall conductivity in two dimensions*, Physical Review B **23**, 5632 (1981).
- [3] K. v. Klitzing, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Physical Review Letters **45**, 494 (1980).
- [4] D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard, *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*, Physical Review Letters **48**, 1559 (1982).
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz *Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, (1977).
- [6] Y. Aharonov, and D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, The Physical Review, **115**, 485 (1959).
- [7] A. L. Silva Netto, Claudio Furtado. *Elastic Landau Levels*, Journal Physical: Condensed Matter, **20**, 125209, (2008).
- [8] Harris, JonathanH. and Semon, MarkD., *A review of the Aharonov-Carmi thought experiment concerning the inertial and electromagnetic vector potentials*, Foundations of Physics **10**, 151 (1980).
- [9] B. J. Ahmedov, M. J. Ermamatov, *Rotational analog of the Hall effect: Coriolis contribution to electric current*, Foundations of Physics Letters **15**, 305 (2002).
- [10] U. R. Fischer, N. Schopohl, *Hall state quantization in a rotating frame* Europhysics Letters **54**, 502 (2001).
- [11] G.Dattoli, M. Quattromini, *A note on Coriolis quantum states*, arxiv.org/pdf/1009.3788 (2010).
- [12] Y. Carmi, G. Carmi, *Quantum Aspects of the Equivalence Principle*. Foundations of Physics **3**, 493 (1956).

- [13] Tsai, Chien-Hua and Neilson, D., *New quantum interference effect in rotating systems*, Physical Review A **37**, 619 (1988).
- [14] B. L. Johnson, *Inertial forces and the Hall effect*, American Journal of Physics **68**, 649 (2000).
- [15] Y. Aharonov; A. Casher (1984). "Topological quantum effects for neutral particles". Phys. Rev. Lett. 53 (4): 319–321
- [16] Y. Aharonov, G. Carmi, *Quantum aspects of the equivalence principle*, Foundations of Physics, 3 (4): 493-498 (1973).
- [17] J. Q. Shen, S. He, F. Zhuang, *Aharonov-Carmi effect and energy shift of valence electrons in rotating C60 molecules*, The European Physical Journal D **33**, 35 (2005).
- [18] Moraes, F. *Condensed Matter Physics as a Laboratory for Gravitation and Cosmology*, Brazilian J. Phys. 30, 304 (2000).
- [19] Chaikin, P. M.; Lubensky, T. C., *Principles of Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press (1995).
- [20] Harris, W., *Disclinations*, Scientific American, December (1977) 130.
- [21] Kibble, T.W.B., *Topology of Cosmic Domains and Strings*, J. Phys A. vol.9, 1387 (1976).
- [22] Vilenkin, A., *Gravitational Field of Vacuum Domain Walls and Strings*, Phys. Rev. D, vol.23, 852 (1981).
- [23] Brandenberg, R. H., *Topological Defects and Cosmology*, Hep-ph/9806473, 24 Jun 1998.
- [24] Katanaev, M. O.; Volovich, I. V., *Theory of Defects in Solids and Three-Dimensional Gravity*, Annals of Physics 216,1 (1992).
- [25] Azevedo, S.; Moraes, F., *Topological Aharonov-Bohm effect around a disclination*, Phys. Lett. A 246, 374-376(1998).
- [26] Furtado, C.; Moraes, F., *On the Binding of Electrons and Holes to Disclinations*, Phys. Lett. A 188, 394(1994).
- [27] Furtado, C.; Cunha B. G.; Moraes, F.; Melo, E. R. B.; Bezerra, V. B., *Landau Levels in the Presence of Disclinations*, Phys. Lett. A 195, 90(1994).
- [28] Azevedo, S.; Pereira, J., *Double Aharonov-Bohm effect in a medium with a disclination*. Phys. Lett. A 275, 463-466, 2000.

- [29] Moraes, F. , *Casimir Effect Around Disclinations*, Phys. Lett. A 204, 399 (1995); Pontual, I. e Moraes, F., *Casimir Effect Around A Screw Dislocation*, Phil. Mag. B 78, 1073, (1998); Moraes, F., *Enhancement of the Magnetic Moment of the Electron due to a Topological Defect*, Mod. Phys. Lett. A, 10, 2335 (1995).
- [30] C. Furtado and F. Moraes, *Landau levels in the presence of a screw dislocation*, Europhys. Lett. **45**, (1999)279.
- [31] Marques G. de A., Furtado C., Bezerra V. B., Moraes F., *Landau levels in the presence of topological defects*, Journal of Physics A: Mathematical and General **34** (30), 5945 (2001)
- [32] Farina, C.; Gamboa, J.; Seguí-Santonja, A. J. *Motion and trajectories of particles around three-dimensional black holes*. Class. Quantum Grav. 10, L193-L199, (1993).
- [33] Seguntpta, S. *Charged particle trajetories in toroidal magnetic and rotation-induced electric field around a black hole*. International Journal of Modern Physics D, Vol. 6, No. 5, 591-606, (1997).
- [34] Prasanna, A.R.; Varma, R. K. *Charged particle trajetories in a magnetic field on a curved space-time*. Pramana Journal of physics, Vol 8, No. 3, 229-244, (2010).
- [35] Hartmann, B.; Sirimachan, P. *Geodesic motion in the space-time of a cosmic string*. <http://arxiv.org/abs/1007.0863>, (2010).
- [36] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Efeito-Hall>
- [37] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley and Sons, 2nd edition.
- [38] K. D. Machado, *Teoria do Eletromagnetismo*, vol. II, editora UEPG, (2003).
- [39] Jeckelmann B., Jeanneret B., *The Quantum Hall Effect as an Eletrical Resistence Satandard*, Birkhäuser Verlag, Basel, 55 (2005).
- [40] Bassalo J. M., <http://www.seara.ufc.br/folclore/folclore206.htm>.
- [41] Bes D. R., *Mechanics: A Modern and Concise Introductory Course*, Springer 2^a edição, (2007).
- [42] Girvin S. M., *Introduction to Quantum Hall Fractional Effect*, Birkhäuser Verlag, Basel, 133 (2005).
- [43] Ezawa Z. F., *Quantum Hall Effects - Field Theoretical Approach and Related Topics*. World Scientific, Singapore 2008

- [44] Griffiths D. J., *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall 1995).
- [45] Marion J. B., *Mechanics Classical - Dynamics of particles and systems*, Thomson Brooks/Cole, New York,(1995).
- [46] <http://stratus.ssec.wisc.edu/courses/gg101/coriolis/coriolis.html>
- [47] A. W. Overhauser and R. Colella , *Experimental Test of Gravitationally Induced Quantum Interference*, Physical Review Letters **33**, 1237 (1974).
- [48] S. A. Werner and J. -L. Staudenmann , *Effect of Earth's Rotation on the Quantum Mechanical Phase of the Neutron*, Physical Review Letters **42**, 1103 (1979).
- [49] M. Matsuo, J. Ieda, E. Saitoh, S. Maekawa, *Spin-dependent inertial force and spin current in accelerating systems*, Physical Review B **84**, 104410 (2011).
- [50] S. Iijima, *Helical microtubules of graphitic carbon*, Nature 354, **56** (1991)
- [51] Márcio M. Cunha, Júlio Brandão, Jonas R. F. Lima and Fernando Moraes, *Spin splitting at the Fermi level in carbon nanotubes in the absence of a magnetic field*, The European Physical Journal B, **88**, 288 (2015).
- [52] Jonas R. F. Lima, Júlio Brandão, Márcio M. Cunha and Fernando Moraes, *Effects of rotation in the energy spectrum of C₆₀*, The European Physical Journal D, **68** 94 (2014).
- [53] Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, John Willey & Sons, (1986).
- [54] Fazzio, A.; Watari, K., *Introdução à teoria de grupos aplicada em moléculas e sólidos* Editora da UFSM, Santa Maria, (2009).
- [55] Pádua, A.;Parísio-Filho, F.;Moraes, F. *Geodesics around line defects in elastic solids*. Phys. Lett. A238, 153 (1998)
- [56] Puntigam, R. A.;Soleng, H. H., *Volterra Distorsions, Spinning Strings, and Cosmic Defects*. Clas. Quantum Grav. 14, 1129 (1997).
- [57] Gennes, P.G.; Prost, J., *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford University Press (1993).
- [58] Sátiro, C.; Moraes, F., *Lensing effects in a nematic liquid with topological defects*, Europe Physics Journal E, 20, 173-178, (2006).
- [59] Oliveira, B. F.; Avelino, P.P.; Moraes, F.; Oliveira, J.C.R.E., *Nematic liquid crystal dynamics under applied electric fields* Physical Review E, 82, 041707, (2010)

- [60] Azevedo, S.; Kaschny, J.; Moraes, F., *Metal-free spin channels in graphitic boron-nitrogen nanostructures* Physics Letters A 372, 5492-5497.(2008).
- [61] C. T. Ridgely, *Applying relativistic electrodynamics to a rotating material medium*, American Journal of Physics, 66 114, (1998)
- [62] Harris, J. and Semon, M., *A review of the Aharonov-Carmi thought experiment concerning the inertial and electromagnetic vector potentials*, Foundations of Physics, 10, 151-162 (1980)
- [63] Aharonov, Y. and Carmi, G., *Quantum aspects of the equivalence principle*, Foundations of Physics, 3, 493-498 (1973).
- [64] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* , 9ed (Dover Publications 1965).
- [65] L. D. Landau, *Paramagnetism of Metals*, Z. Phys. **64**, 629 (1930).
- [66] B. L. Johnson, *Inertial forces and the Hall effect*, American Journal of Physics **68** (7) 649–653 (2000).
- [67] Streda, P, *Theory of quantised Hall conductivity in two dimensions*, volume 15, 22, L717 (1982).
- [68] Fischer U. R. and Schopohl N., *Hall state quantization in a rotating frame*, Europhys. Lett.,**54**, 502 (2001).
- [69] Julio E. Brandão, F. Moraes, M.M. Cunha, Jonas R.F. Lima, C. Filgueiras, *Inertial-Hall effect: the influence of rotation on the Hall conductivity*, Results in Physics, **5**, 55 (2015).
- [70] Konno, Kohkichi and Takahashi, Rohta, *Spacetime rotation-induced Landau quantization*, Physical Review D, **85**, 061502 (2012)
- [71] Filgueiras C., Brandão J., Moraes F., *Tuning the Hall conductivity with rotation*, EPL (Europhysics Letters), **110**, 27003(2015).