



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Flutuações quânticas fermiônicas induzidas por um tubo magnético
no espaço-tempo de uma corda cósmica
Mikael Souto Maior de Sousa**

JOÃO PESSOA - PB

julho - 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Flutuações quânticas fermiônicas induzidas por um tubo magnético
no espaço-tempo de uma corda cósmica**

Mikael Souto Maior de Sousa

Tese realizada sob a orientação do Prof.
Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello,
apresentada ao Departamento de Física em
complementação aos requisitos para ob-
tenção do título de Doutor em Física.

JOÃO PESSOA - PB

julho - 2017

S725f Sousa, Mikael Souto Maior de.
 Flutuações quânticas fermiônicas induzidas por um tubo
 magnético no espaço-tempo de uma corda cósmica / Mikael
 Souto Maior de Sousa. - João Pessoa, 2017.
 138 f. : il. -

 Orientador: Eugênio Ramos Bezerra de Mello.
 Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN

 1. Física. 2. Cordas Cósmicas. 3. Gravitação e Teoria de
 Partículas. 4. Teoria Quântica de Campos. 5. Teoria de
 Campos no Espaço Curvo. I. Título.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



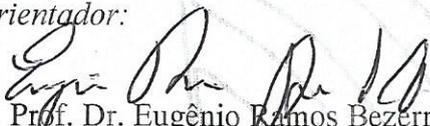
Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Doutorado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 19 de julho de 2017, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **APROVA Mikael Souto Maior de Sousa** na defesa de sua tese intitulada "*Flutuações quânticas fermiônicas induzidas por um tubo magnético no espaço-tempo de uma corda cósmica*".

João Pessoa, 19 de julho de 2017.

Orientador:


Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de
Mello
(DF/UFPB)

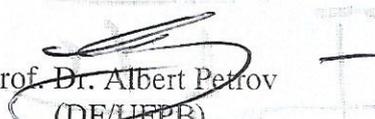
1º Examinador:


Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
(DF/UFPB)

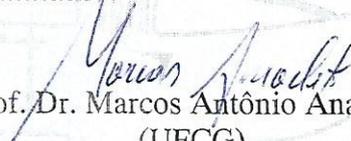
2º Examinador:


Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos
Passos
(UFCG)

3º Examinador:


Prof. Dr. Albert Petrov
(DF/UFPB)

4º Examinador:


Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
(UFCG)

*Dedico esse trabalho aos meus pais,
assim como tudo em minha vida,
e a Cássia de Souza Simões, minha
amada esposa.*

AGRADECIMENTOS

Agradecimento é algo de cunho pessoal e vem como gratidão por todas aquelas pessoas que contribuíram diretamente ou indiretamente com a realização de mais uma etapa.

Quanto a parte acadêmica gostaria de deixar minha eterna gratidão ao Prof. Dr. Eugênio Ramos B. Mello, conhecido como o Divo, que foi não só meu orientador durante esta jornada como também um exemplo de profissional e pessoa a ser seguido. Juntamente com ele quero agradecer também ao Prof. Dr. Rubens Freire que, extra oficialmente, foi meu coorientador e também tutor de grande importância, a Enciclopédia Humana.

Agradeço aos membros da banca examinadora por reservarem uma parte de seu tempo e dedicá-lo a examinarem esta tese. Dando assim, contribuições úteis para a formação de minha carreira acadêmica.

Agradeço também ao corpo docente do departamento de física da UFPB pelo apoio, juntamente com a coordenação do curso de Pós-Graduação em física. Deixo também meu obrigado a CAPES pelo fomento de minha bolsa de doutorado.

Obrigado também aos meus colegas de curso e de sala, pelas conversas produtivas na hora do cafezinho, saibam que vocês também contribuíram muito com a minha formação.

Agradeço também ao professor Jean Spinelly pela amizade e disposição para discussões desde a época de minha graduação.

Quanto aos agradecimentos por parte pessoal. Agradeço primeiramente à Deus pelo dom da vida dado a todos nós. Meus pais, muito obrigado por toda dedicação que

tiveram comigo, vocês formam, e sempre serão, os dois pilares essenciais na minha vida. Aos meus irmãos obrigado por todo companheirismo. Agradeço a minha esposa Cássia, a quem amo muito, que esteve comigo durante todo processo de minha formação, por sempre me apoiar, me dando forças para prosseguir. Aos meus avós, por me apoiarem e incentivarem.

Quero deixar meu agradecimento e carinho eterno pela minha avó Maria de França que não está mais entre nós, que foi a pessoa que sempre, desde quando eu era pequeno, acreditou que seu neto seria um “cientista”. Vó, eu consegui, espero que onde quer que a senhora esteja possa ver.

Quero agradecer aos meus tios e tias, em especial a minha tia Magnólia não só pelo acolhimento em sua casa em João Pessoa, onde passei a morar durante meu Doutorado.

Quero deixar meu agradecimento também aos meus amigos Júlio César, pelo apoio desde o início do meu doutoramento e, Anderson Alves pelas horas produtivas de discussão e estudo ao longo do curso.

Aos meus amigos de longa data, só digo uma coisa, “*Um brinde ao cabuloso*”. Que as nossas sextas a noite se perpetuem, muito obrigado.

*Volta teu rosto
na direção do sol,
e então,
as sombras sempre ficarão para traz.
(Sabedoria oriental)*

RESUMO

Nesta Tese, consideramos um campo fermiônico massivo e carregado no espaço-tempo de uma corda cósmica ideal na presença de um campo magnético confinado em um tubo cilíndrico de raio finito a . Levamos em conta três configurações para o campo magnético: (i) uma casca cilíndrica de raio a , (ii) um campo magnético proporcional a $1/r$ e (iii) um campo magnético constante. Nos três casos, o eixo de simetria da corda cósmica coincide com o eixo de simetria do tubo cilíndrico de campo magnético, dispostos ao longo do eixo z . Nossos principais objetivos nesta Tese são analisar os valores esperados no vácuo (VEV) da densidade de corrente, j^μ , do condensado fermiônico (FC) e o VEV do tensor energia-momento (TEM), T_ν^μ . Para isto, construímos um conjunto completo de funções de onda de Dirac normalizadas para cada configuração de campo magnético e mostramos que na região fora do tubo, a densidade de corrente, o CF e o VEV do TEM são decompostos como a soma de duas partes. A primeira corresponde a contribuição da linha de fluxo magnético que corre ao longo da corda cósmica ideal, e a segunda contribuição é induzida devido a estrutura não trivial de campo magnético. Mostramos também que o VEV do tensor energia-momento é diagonal, obedece a condição de conservação e que seu traço é expresso em termos do condensado fermiônico.

Palavra-chave: Cordas cósmicas, gravitação e teoria de partículas, teoria quântica de campos, teoria de campos no espaço curvo.

ABSTRACT

In this work, we consider a charged massive fermionic quantum field in the idealized cosmic string spacetime and in the presence of a magnetic field confined in a cylindrical tube of finite radius. Three distinct configurations for the magnetic fields are taken into account: (i) a cylindrical shell of radius a , (ii) a magnetic field proportional to $1/r$ and (iii) a constant magnetic field. In these three cases, the axis of the infinitely long tube of radius a coincides with the cosmic string. Our main objectives in this paper are to analyze vacuum expected values (VEVs) of the current density, j^μ , fermionic condensate (FC) $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ and the VEV of the fermionic energy-momentum tensor, T_ν^μ . In order to do that, we explicitly construct the complete set of normalized wave-functions for each configuration of magnetic field. We show that in the region outside the tube, the current density, the FC and the VEV of the energy-momentum tensor are decomposed into two parts: the first ones correspond to the zero-thickness magnetic flux contributions, and the seconds are induced by the non-trivial structure of the magnetic field, named core-induced contributions. The latter present specific forms depending on the magnetic field configuration considered. We also show that the VEV of the energy-momentum tensor is diagonal, obeys the conservation condition and its trace is expressed in terms of the fermionic condensate.

Keywords: Cosmic string, gravitation and particle theory, quantum field theory, quantum field in curved space.

CONTEÚDO

1. <i>Introdução</i>	1
2. <i>Modelo de Higgs Abeliano</i>	7
2.1 Teoria de gauge abeliana	7
2.2 Quebra espontânea de simetria	12
2.2.1 O modelo $\lambda\varphi^4$	12
2.2.2 O mecanismo de Higgs-Kibble	17
3. <i>A corda cósmica</i>	20
3.1 Relatividade Geral e o espaço-tempo	20
3.2 Corda cósmica	23
3.3 Vórtices Abelianos	24
4. <i>O campo fermiônico</i>	27
4.1 Equação de Dirac no espaço plano	27
4.2 Equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético	28
4.3 Equação de Dirac na presença de um campo gravitacional	29
4.3.1 Bases tétradas	30
4.3.2 Equação de Dirac no espaço-tempo curvo	32
4.4 Campo Fermiônico na presença de campos eletromagnético e gravitacional	37
5. <i>Teoria Quântica de Campos no espaço curvo</i>	39
5.1 Quantização do campo bosônico	39
5.1.1 Quantização do campo escalar real	41

5.1.2	Quantização do campo escalar complexo	45
5.1.3	O propagador de bósons	47
5.2	Quantização do campo fermiônico no espaço plano	50
5.2.1	Segunda quantização	52
5.2.2	O propagador de férmios	55
5.3	TQC no espaço-tempo curvo	56
5.3.1	Quantização do campo no espaço-tempo curvo	56
5.3.2	Criação de partículas e polarização do vácuo	59
6.	<i>A corrente fermiônica induzida por um tubo de campo magnético no espaço-tempo da corda cósmica</i>	63
6.1	A geometria da variedade e a obtenção das funções de onda	64
6.2	A corrente fermiônica induzida	73
6.2.1	Densidade de carga e a densidade de corrente radial e axial	74
6.2.2	Densidade de corrente azimutal	76
7.	<i>O $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ e o $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$ induzidos por um tubo magnético no espaço-tempo de uma corda cósmica</i>	88
7.1	O condensado fermiônico	88
7.1.1	O condensado fermiônico induzido pela estrutura	90
7.2	Tensor energia-momento	95
7.2.1	A densidade de energia $\langle T_0^0 \rangle$	96
7.2.2	A tensão radial $\langle T_r^r \rangle$	97
7.2.3	A tensão azimutal $\langle T_\phi^\phi \rangle$	98
7.2.4	A tensão axial $\langle T_z^z \rangle$	99
7.3	As propriedades do vácuo e o tensor energia-momento	100
8.	<i>Conclusões</i>	105

<i>Apêndice</i>	110
<i>A. Relações de Recorrência</i>	111
A.1 O campo magnético na casca cilíndrica	111
A.2 O campo magnético proporcional a $1/r$	112
A.3 O campo magnético homogêneo	114
<i>B. Análise do coeficiente $\mathcal{V}_j^{(i)}$</i>	116
<i>C. Funções especiais</i>	118
C.1 Funções de Bessel	118
C.2 Funções de Whittaker	119

LISTA DE FIGURAS

2.1	$\lambda < 0, \mu^2 > 0$	13
2.2	$\lambda > 0, \mu^2 > 0$	13
2.3	$\lambda > 0, \mu^2 < 0$	13
2.4	Aqui definimos um gráfico de maneira geral, que define a forma do potencial $V(\varphi^* \varphi)$, consideramos $\mu^2 = -10$ e $\lambda = 20$	15
5.1	Contornos de integração sobre o plano complexo em k_0 onde, C_S é o semicírculo de integração superior que inclui o polo $-\omega_k$ e exclui o polo $+\omega_k$. E C_I é o contorno inferior que inclui o polo $+\omega_k$ e exclui o polo $-\omega_k$	49
6.1	Ilustração da estrutura cilíndrica de campo magnético com raio fixo a coaxial à distribuição da corda cósmica.	65
6.2	A densidade de corrente induzida azimutal devido a estrutura foi formada, em unidades de “ $m^4 e$ ”, como função de mr para os valores de $q = 1.5$ e $ma = 1$. Do lado esquerdo consideramos a corrente induzida pelo modelo 1, tomando $\alpha = 2.1$ e $\alpha = -2.1$. Do lado esquerdo comparamos a intensidade da densidade de corrente induzida para os três modelos de campo magnético considerando $\alpha = 2.1$	86
6.3	A densidade de corrente azimutal induzida pela estrutura, em unidades de “ $m^4 e$ ”, para o primeiro modelo, foi escrita em função de mr considerando três valores diferentes de q . Neste caso adotamos o valor $\alpha = 1.2$	86

- 6.4 A densidade de corrente induzida pela estrutura de campo magnético está montada, em unidades de “ m^4e ”, como função de α fixando $ma = 1$ e $mr = 2$. Do lado esquerdo, vemos a densidade de corrente apenas para o primeiro modelo com diferentes valores de q . No lado direito, apresentamos a densidade de corrente induzida pelos três modelos de campo magnético diferentes, considerando $q = 1.5$ 87
- 7.1 O condensado fermiônico induzido pela estrutura foi mostrado, em unidades de “ m^3 ”, como função de mr para os valores de $q = 2.0$ e $ma = 1$. Do lado esquerdo, consideramos o CF induzido para o primeiro modelo assumindo $\alpha = \pm 1.2$. Do lado direito, comparamos a intensidade do CF induzido para os três modelos distintos considerando $\alpha = 1.2$ 94
- 7.2 O CF induzido pela estrutura foi mostrado, em unidades de “ m^3 ”, como função de mr considerando $ma = 1$. Do lado esquerdo, consideramos o CF induzido para o primeiro modelo, com $\alpha = 1.2$ e $q = 1, 1.5$ e 2.5 . Do lado direito, consideramos, também para o primeiro modelo, o CF induzido, tomando $q = 1.5$ e $\alpha = 1.0, 1.5$ e 2.0 . Vemos que para os dois caso quando aumentamos α ou q o condensado fermiônico também aumenta em intensidade. 95
- 7.3 A densidade de energia induzida pela estrutura está mostrada, em unidades de “ m^4 ”, como uma função de mr para o valor $ma = 1$. No gráfico da esquerda, foi considerado a configuração de campo magnético do modelo 1, para $\alpha = \pm 1.2$ e $q = 2$. No gráfico da direita, foi considerado os três modelos de campo magnéticos diferentes, para $\alpha = 1.2$ e $q = 2$. . . 103

- 7.4 A densidade de energia induzida pela estrutura está mostrada, em unidades de “ m^4 ”, como função de mr para o valor de $ma = 1$. No gráfico da esquerda consideramos a densidade de energia induzida pela estrutura tomando $q = 1, 1.5$ e 2.5 fixando $\alpha = 1.2$. No gráfico da direita consideramos três intensidades de fluxo magnético diferentes, sendo elas $\alpha = 1, 1.5$ e 2.0 , fixando $q = 2$. Ambos os gráficos foram construídos para o modelo 1. 104

1. INTRODUÇÃO

De acordo com a teoria do Big Bang, o universo está se expandindo e resfriando-se. Durante sua expansão, as quebras espontâneas das simetrias fundamentais levaram o universo a sofrer uma série de transições de fase. Nos modelos de física de altas energias, a formação dos defeitos topológicos, causados por essas transições, tais como paredes de domínio, monopolos e cordas cósmicas, entre outras, estão previstas a ocorrerem segundo a referência [1][2].

A corda cósmica está entre os tipos de defeitos topológicos mais estudados, embora recentes observações da radiação cósmica de fundo tenham descartado-a como fonte primária para as perturbações da densidade primordial. Tal defeito serve também como uma possível fonte para explicar um número considerável de efeitos astrofísicos tais como rajadas de raios gama, onde a escala de energia da corda onde a simetria é quebrada, em uma escala de energia da ordem de 10^{14} GeV , explica a taxa, duração e fluência das rajadas de raios gama, [3], emissões de ondas gravitacionais de alta frequência, que como consequência dessas emissões o conjunto estocástico de ondas gravitacionais geradas por uma rede cosmológica de loops é não gaussiana [4], e a geração de raios cósmicos de altas energias [5], onde os raios cósmicos de partículas de altas energias podem ter se originadas durante o processo de colapso e/ou aniquilação de defeitos topológicos associados com as teorias de grande unificação.

À grandes distâncias, o espaço-tempo gerado por uma corda cósmica possui uma topologia cônica, no plano ortogonal a disposição deste objeto, com um déficit de ângulo planar proporcional a densidade linear de massa desta corda cósmica. Na teoria quântica de campos, a topologia não trivial induz valores esperados no vácuo

(VEVs) não nulos para os observáveis físicos. Estes efeitos de polarização do vácuo, na teoria quântica de campo, induzidos por uma estrutura cônica foram alvos de muitos trabalhos publicados. Na análise específica para o VEV do tensor energia-momento, $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$, por exemplo, tem sido investigado para os casos campos escalares, fermiônicos e vetoriais [6]-[26].

Na física da matéria condensada é bem conhecido que supercondutores excluem quase que completamente qualquer campo magnético externo se este for menor que um valor crítico (efeito Meissner) [27]. Contudo, para supercondutores do tipo 2, que são formados por materiais em que a transição para o estado supercondutor é gradual, com a presença de um estado intermediário, se o campo externo for aumentado à um certo valor maior que valor crítico, tal campo externo atravessa este supercondutor em uma forma de tubo de fluxo magnético. A estes fenômenos damos o nome de vórtices de fluxo magnético que, por sua vez, são quantizados.

A possibilidade da existência teórica de tais vórtices foi primeiramente demonstrada por Abrikosov [28]. Ele mostrou que estes ocorrem naturalmente como soluções para a teoria de Ginsburg-Landau de supercondutividade na presença de um campo magnético externo. Seguindo esta teoria, a existência de tais objetos foi verificada experimentalmente, e muitas de suas propriedades foram rigorosamente investigadas em [27].

Alguns anos depois, Nielsen e Olesen [29] mostraram, partindo do modelo de teoria de campo relativístico com quebra espontânea de simetria, mais especificamente do modelo de Higgs abeliano interagindo com um campo de calibre, que este sistema apresenta soluções com simetria cilíndrica carregando um fluxo magnético. Estas configurações correspondem as soluções de vórtices.

A análise da influência deste sistema na geometria do espaço tempo foi analisada por Garfinkle [30] e Laguna [31] à tempos atrás. Em seus trabalhos os autores acoplaram o tensor energia-momento, associado ao modelo de Nielsen-Olesen, às equações de

campo de Einstein. Nesse sentido, eles mostraram que o vórtice possui uma estrutura interna caracterizada pelo fluxo magnético não-nulo que corre ao longo da mesma, cuja extensão é determinada pela escala de energia na qual a simetria é quebrada. Dois comprimentos de escala aparecem naturalmente, um relacionado com a extensão do fluxo magnético que, por sua vez, é proporcional ao inverso da massa do campo vetorial, m_v , campo este, que adquire massa devido ao mecanismo de Higgs. E o outro associado com o inverso da massa do campo escalar, m_s , este último, como sendo uma medida do ponto onde o campo escalar decai para o seu valor de vácuo. Além do mais, os autores também analisaram a geometria do espaço-tempo e verificaram que assintoticamente a superfície perpendicular ao vórtice corresponde ao espaço-tempo de Minkowski menos uma fatia, o que acarreta num espaço com um déficit angular.

Uma solução de vórtex especial que satisfaz o limite BPS (Bogomolny-Prasad-Sommerfield) [32][33], apresenta as massas do campo escalar e do campo de calibre iguais, isto é, $m_s = m_v$. Para este caso, Linet [34] foi capaz de encontrar uma solução exata para o tensor métrico, que é determinada em termos da densidade de energia da corda cósmica. Neste limite, a superfície perpendicular à linha da solução de vórtice tem uma estrutura cônica e, o espaço-tempo a sua volta corresponde ao espaço-tempo de uma corda cósmica idealizada.

O objetivo principal desta Tese, consiste em explorar os efeitos quânticos associados ao vácuo do campo fermiônico carregado e massivo no espaço-tempo gerado por uma corda cósmica ideal na presença de um tubo magnético cilíndrico de raio fixo a coaxial à esta corda cósmica. Vamos explorar os valores esperados do vácuo (VEV) da densidade de corrente, $\langle j^\mu \rangle$, na vizinhança do defeito topológico [35], onde veremos que os efeitos produzidos por tal configuração induzirão uma densidade de corrente não nula apenas na direção azimutal, $\langle j^\phi \rangle$. Além do mais, vamos explorar os VEVs do condensado fermiônico (CF), $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$ e do tensor energia-momento (TEM), $\langle T_\nu^\mu \rangle$ [36], mostrando que, além do TEM ser conservado ele obedecerá a relação do traço em todos

os limites assintóticos tomados. Para desenvolvermos nossa análise vamos considerar o nosso sistema em questão da seguinte maneira: Dispomos de uma corda cósmica ideal disposta ao longo do eixo z , preservando a simetria de boost ao longo desta direção. Tal defeito será cercado por uma certa estrutura cilíndrica de campo magnético com um raio fixo a co-axial. Esta estrutura irá se apresentar em três modelos diferentes a considerar: (i) Um campo magnético distribuído sobre uma superfície cilíndrica, (ii) um campo magnético decaindo com $1/r$ e (iii) um campo magnético homogêneo. Uma análise semelhante pode ser vista em [37]-[41], contudo os autores consideraram o caso de campos escalares e fermiônicos sem massa para analisar os VEVs da densidade de corrente induzida e do tensor energia-momento.

Esta tese está organizada da seguinte maneira: No capítulo 2, revisaremos os conceitos fundamentais associados ao formalismo teoria de campos, denotando as bases para a construção de uma teoria invariante por transformações de calibre do grupo $U(1)$ abeliano. Demonstraremos, ainda nesta seção, o mecanismo de Higgs. Que aparece como uma consequência da quebra espontânea de simetria. No capítulo 3 faremos uma breve revisão sobre a TRG e como tratamos a geometria do espaço-tempo segundo esta teoria. Em seguida apresentaremos as soluções de vórtices desenvolvidas nos trabalhos de Nielsen e Olesen que aparecem como soluções assintóticas das equações de movimento a partir de um *Ansatz* com simetria cilíndrica. Neste capítulo também apresentaremos como as soluções de vórtices se apresentam no âmbito da gravitação.

No capítulo 4, faremos um breve revisão sobre teoria clássica de campos em um espaço-tempo curvo. Neste capítulo, mostraremos quais são as modificações que devem ser efetuadas para que possamos incluir os efeitos gravitacional e eletromagnético na equação de Dirac. No capítulo 5 faremos uma breve revisão sobre o processo de quantização dos campos de matéria no espaço-tempo plano e estenderemos nossas considerações para o espaço-tempo curvo considerando nosso objeto de interesse que consiste no campo fermiônico.

No capítulo 6, analisaremos o comportamento quântico do campo fermiônico, na presença do modelo teórico aproximado proposto em nossos trabalhos, que simula o vórtice abeliano gravitacional. Este capítulo por sua vez, apresentará nosso trabalho publicado a respeito dos cálculos que envolvem os VEVs da densidade de corrente induzida [35], para isso, construímos inicialmente as funções de onda com frequência positiva e com frequência negativa. Neste modelo consideramos que a geometria em todo espaço-tempo é cônica, com um fluxo magnético confinado em tubo de raio finito, co-axial a corda cósmica. Analisaremos também os limites em que $r \approx a$, ou seja, em pontos próximos a estrutura cilíndrica de campo magnético e $r \gg a$, ou seja, em pontos a grandes distâncias da estrutura, este último limite adotaremos dois casos. O caso em que o campo fermiônico é massivo, e o caso de campo fermiônico não massivo. Por fim, neste capítulo, apresentaremos nossos cálculos numéricos afim de preencher de forma completa nossa análise a respeito do comportamento dese observável físico induzido pela topologia não trivial do vácuo quântico.

No capítulo 7, especificamente, analisaremos o fenômeno de polarização do vácuo fermiônico, isto é, calcularemos o valor do condensado fermiônico e o VEV do tensor energia-momento. Mostraremos que, além do tensor energia-momento ser conservado irá obedecer também a relação do traço, que diz que a soma das componentes da diagonal principal da matriz do TEM deve ser igual a massa da teoria multiplicada pelo condensado fermiônico. Entretanto, para observarmos esta última propriedade iremos, assim como faremos no Capítulo 6, analisar os limites assintóticos em que $r \approx a$ e $r \gg a$, este último considerando o caso de campos massivos e não massivos. Finalizamos esta seção apresentando nossas análises numéricas de modo a fornecer uma compreensão mais abrangente a respeito destes observáveis.

Nesses dois capítulos, 6 e 7, mostraremos também que as contribuições da densidade de corrente, $\langle j^\mu \rangle$, do condensado fermiônico, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$, e do tensor energia-momento, $\langle T_\nu^\mu \rangle$, poderão ser expressas como a soma de duas contribuições, primeira que independe da

dimensão do tubo de fluxo magnético, e a segunda que depende explicitamente da dimensão deste tubo, e anula-se no limite que o raio do tubo vai a zero e que, em geral, não é uma função periódica do fluxo magnético.

Por fim, no capítulo 8, apresentaremos nossas conclusões. Ademais, no apêndice A, mostramos como resolver as equações diferenciais parciais de segunda ordem que aparecem no desenvolvimento algébrico. E, portanto, um desenvolvimento novo quanto a relações de recorrência para as funções de Whittaker. No apêndice B, mostramos uma análise do coeficiente $\mathcal{V}_j^{(i)}$ que carrega a informação do modelo específico de campo magnético que adotamos. No apêndice C nós apresentamos um pouco da álgebra que envolve as funções especiais que trabalhamos nesta Tese, que consiste nas funções de Bessel e de Whittaker. Trabalhamos nesta Tese em unidades naturais, isto é, $G = \hbar = c = 1$.

2. MODELO DE HIGGS ABELIANO

De modo geral, na física, não existe nenhuma razão que justifique que uma simetria encontrada em um sistema físico num dado estado, se mantenha também em seu estado fundamental. Quando o grupo de simetria do estado de vácuo corresponder a um subgrupo do grupo de simetria da lagrangiana, dizemos que a simetria deste sistema é espontaneamente quebrada. Como um bom exemplo simples temos o ferromagnetismo de Heisenberg [42], que descreve um arranjo infinito de dipolos magnéticos de spin $1/2$, contendo um termo de interação spin-spin entre os mais vizinhos próximos. Muito embora o Hamiltoniano deste sistema seja rotacionalmente invariante, seu estado fundamental não é, pois apresenta um estado com todos os dipolos alinhados em uma determinada direção, e é infinitamente degenerado.

Em teorias relativísticas contendo um número infinito de graus de liberdade, temos fenômenos onde também ocorre quebra espontânea de simetria. De fato, este processo tem sido útil para justificar a existência de mésons vetoriais massivos na formulação de interação eletro-fracas proposta por Weinberg-Salam-Glashow [43].

2.1 Teoria de gauge abeliana

Vamos introduzir, primeiramente, alguns conceitos úteis na formulação de teorias de campos. Começemos com a grandeza denominada densidade lagrangiana, indicada pela letra \mathcal{L} , onde para campos de matéria representados por funções $\varphi(\vec{x}, t) \equiv \varphi(x)$, é dada por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$, isto é, esta densidade é um funcional dos campos e suas respectivas derivadas.

A lagrangiana associada à esta teoria pode ser obtida a partir da integração espacial

da densidade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$. Assim temos,

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}. \quad (2.1.1)$$

A ação S pode ser obtida pela integração da lagrangiana com respeito ao tempo que, por sua vez, leva a integração da densidade de lagrangiana no espaço-tempo $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$

$$S = \int dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (2.1.2)$$

Determinamos as equações dinâmicas de movimento, ou simplesmente equações de Euler-Lagrange, através do princípio variacional da ação mínima, ou seja, $\delta S = 0$, logo temos

$$\int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right] = 0. \quad (2.1.3)$$

Fazendo uma integração por partes na equação acima encontramos que

$$\int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \right] \delta \varphi = 0, \quad (2.1.4)$$

como $\delta \varphi$ é uma variação arbitrária não nula a Eq.(2.1.4) é satisfeita se o seu integrando for nulo, ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0, \quad (2.1.5)$$

onde vemos, de acordo com a equação acima, a conhecida equação de movimento de Euler-Lagrange para campos.

Esta formulação de densidade lagrangiana para campos é construída de tal forma que seja invariante por transformações de Lorentz. Além disso, admitiremos deste ponto em diante que esta densidade também será invariante perante outros tipos de transformações, ditas transformações de gauge (ou também chamadas de transformações de calibre).

Vamos supor a seguinte transformação sobre os campos de matéria

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha} \varphi(x), \quad (2.1.6)$$

onde α é uma constante arbitrária real. Deste modo a derivada dos campos se transforma da seguinte maneira

$$\partial_\mu \varphi(x) \longrightarrow \partial_\mu \varphi'(x) = e^{i\alpha} \partial_\mu \varphi(x). \quad (2.1.7)$$

Tais transformações nos campos e nas suas derivadas são ditas como sendo transformações gauge de primeira espécie (ou global). Isto é necessário para a construção de uma lagrangiana, para esses campos, invariante por estas transformações. A transformação da densidade de lagrangiana dar-se-á da seguinte maneira,

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \longrightarrow \mathcal{L}'(\varphi'(x), \partial_\mu \varphi'(x)) = \mathcal{L}(e^{i\alpha} \varphi(x), e^{i\alpha} \partial_\mu \varphi(x)). \quad (2.1.8)$$

Neste caso dizemos que o grupo de simetria da teoria é o grupo Abeliano $U(1)$, que caracteriza as transformações unitárias nos campos, geradas por um único parâmetro. O grupo $U(1)$ pode ser interpretado como o grupo de rotações ao longo do círculo de raio unitário. Neste caso o grupo apresenta apenas um único gerador, e os elementos deste grupo podem ser genericamente representados por $g = \exp(i\epsilon\alpha)$, sendo “ e ” o gerador do grupo e α um parâmetro que pode ou não depender do ponto x^μ .

Além do mais, escolhendo o parâmetro α infinitesimal tal que a Eq.(2.1.6) possa ser reescrita aproximadamente como

$$\varphi'(x) \approx (1 + i\epsilon\alpha)\varphi(x) \longrightarrow \delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x), \quad (2.1.9)$$

onde identificamos $i\epsilon\alpha\varphi(x) = \delta\varphi(x)$.

Como \mathcal{L} é invariante para uma transformação qualquer de gauge global, ou seja, $\delta\mathcal{L} = 0$, teremos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi) = 0. \quad (2.1.10)$$

Do fato de que $\delta(\partial_\mu\varphi) = \partial_\mu(\delta\varphi)$ e usando a Eq.(2.1.5) e a Eq.(2.1.9) na Eq.(2.1.10) encontramos que

$$\partial_\mu \left(i\epsilon\alpha\varphi(x) \frac{\partial\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))} \right) = 0. \quad (2.1.11)$$

Assim, podemos dizer que existe uma corrente de Noether, ou seja, uma corrente conservada, $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$, associada a esta invariância, onde

$$J^\mu(x) = ie\varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))}{\partial(\partial_\mu \varphi(x))}. \quad (2.1.12)$$

Podemos definir uma carga conservada da seguinte forma

$$Q = \int d^3x J^0(x). \quad (2.1.13)$$

Vamos supor agora que na transformação do campo segundo a Eq.(2.1.6) o parâmetro α dependa do ponto x^μ , ou seja

$$\varphi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\varphi(x) = U(x)\varphi(x). \quad (2.1.14)$$

A este tipo de transformação damos o nome de transformação de gauge local. Então, os termos envolvendo derivadas na densidade lagrangiana irão se transformar da seguinte forma

$$\partial_\mu \varphi(x) \rightarrow \partial_\mu \varphi'(x) = \partial_\mu (U(x)\varphi(x)) = U(x)\partial_\mu \varphi(x) + \varphi(x)\partial_\mu U(x), \quad (2.1.15)$$

ou seja, a derivada do campo $\varphi(x)$ não se transforma como o próprio campo. Portanto o segundo termo que aparece na Eq.(2.1.15) faz com que a densidade lagrangiana não seja mais invariante por transformações locais. Por outro lado, na obtenção de uma teoria que seja invariante por transformações deste tipo, faz-se necessário a introdução de novos campos de gauge em que generalizamos o conceito de derivada. Seja $A_\mu(x)$ o campo de gauge, definiremos então a derivada D_μ da seguinte forma

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x). \quad (2.1.16)$$

Sob uma transformação de gauge local, a nova definição de derivada, também conhecida como derivada covariante, irá se transformar da seguinte forma:

$$D'_\mu \varphi'(x) = U(x)\partial_\mu \varphi(x) + (\partial_\mu U(x))\varphi(x) + ieA'_\mu(x)U(x)\varphi(x). \quad (2.1.17)$$

O significado de uma transformação de calibre local está associada a transmissão da informação ponto a ponto através do campo de calibre.

Admitindo que o campo de gauge se transforme como

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{i}{e}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x), \quad (2.1.18)$$

segue da Eq.(2.1.17) que a derivada covariante irá se transformar

$$D'_\mu\varphi'(x) = U(x)D_\mu\varphi(x), \quad (2.1.19)$$

ou seja, a derivada covariante do campo $\varphi(x)$ irá se transformar da mesma maneira que o próprio campo, neste ponto, então, a densidade lagrangiana total do sistema deverá ser modificada para

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}(\varphi, D_\mu\varphi) + \mathcal{L}(A_\mu). \quad (2.1.20)$$

Onde esse o termo $\mathcal{L}(A_\mu)$ deverá levar em consideração apenas a dinâmica do campo de gauge. Sendo, agora, \mathcal{L}_T a densidade lagrangiana invariante não só frente as transformações de Lorentz como também invariante perante quaisquer transformações de gauge.

Analisando a teoria de Maxwell do eletromagnetismo vemos que o tensor de intensidade de campo $F_{\mu\nu}$, que é antissimétrico, pode ser escrito como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \quad (2.1.21)$$

Verificamos que tal tensor é invariante perante a transformação de gauge definida pela Eq.(2.1.18), ou seja, $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Com isso podemos inferir que o campo de gauge, $A_\mu(x)$, é de fato o quadri-potencial vetor do eletromagnetismo. Onde $\mathcal{L}(A_\mu)$ é a densidade lagrangiana de Maxwell, a qual é escrita como

$$\mathcal{L}(A_\mu) = \mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (2.1.22)$$

Portanto, identificando o fator “ e ”, que aparece como gerador das transformações locais de gauge, como sendo a magnitude da carga elementar, concluímos que esta

teoria é invariante de gauge por transformações do grupo $U(1)$, acopla fótons com a matéria carregada, que é denominada de eletrodinâmica quântica.

2.2 Quebra espontânea de simetria

Nesta seção iremos analisar a dinâmica de sistemas no qual o estado fundamental não possui as mesmas propriedades de simetria da lagrangiana que descreve o sistema. Quando este fenômeno ocorre, veremos que inevitavelmente aparecem bósons escalares sem massa na teoria, chamados bósons de Goldstone. Contudo, quando associamos a essa teoria uma invariância local de gauge, onde os campos de gauge não possuem massa, os bósons de Goldstone são absorvidos como sendo uma componente longitudinal destes campos de gauge, ou seja, os campos de gauge que absorvem os bósons de Goldstone adquirem massa como ocorre na fenomenologia das interações fracas.

2.2.1 O modelo $\lambda\varphi^4$

Vamos considerar inicialmente o modelo mais simples, que trata desta teoria com um grau de liberdade, que é o modelo onde consideramos apenas um campo escalar real. Seja esta lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - V(\varphi) . \quad (2.2.23)$$

Para estudarmos este modelo com quebra espontânea de simetria vamos considerar que o potencial $V(\varphi)$ seja dado por

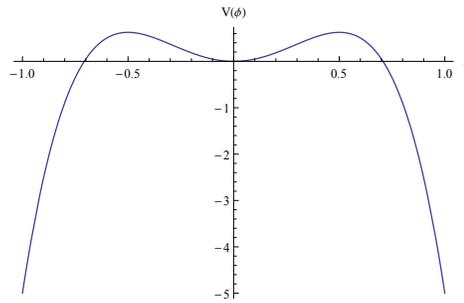
$$V(\varphi) = \mu^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4 + cte , \quad (2.2.24)$$

onde λ é uma constante de auto-acoplamento.

Este potencial é invariante por $Z(2)$ ¹, ou seja, é invariante por transformações de paridade. Dependendo dos sinais de μ^2 e λ , podemos ter diferentes formas de $V(\varphi)$.

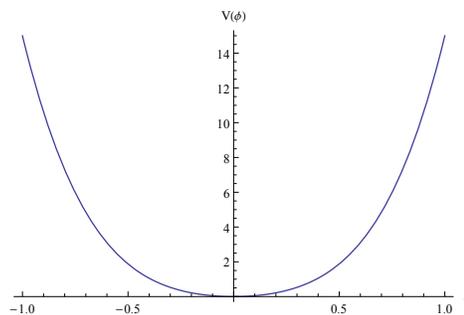
Abaixo listamos alguns casos, considerando a constante nula em (2.2.24). Neste caso,

¹ Chamamos atenção para o fato de que, neste caso, a lagrangiana é invariante sobre $Z(2)$, que representa o grupo de transformação especular, isto é, $\varphi \rightarrow -\varphi$, sendo esta uma transformação discreta.

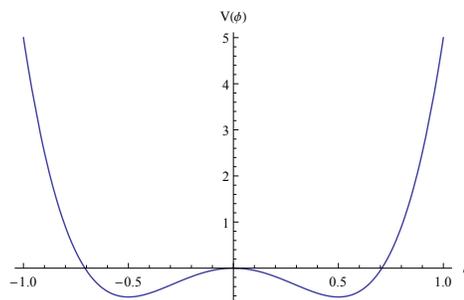
Fig. 2.1: $\lambda < 0, \mu^2 > 0$

descrito pela Fig.2.1, onde consideramos $\lambda < 0$ e $\mu^2 > 0$, o sistema não corresponde a um modelo físico aceitável, pois fica claro que o hamiltoniano não possui um limite inferior

Por outro lado, se $\lambda > 0$, teremos duas situações distintas, como veremos a seguir: Considerando $\mu^2 > 0$, como vemos na Fig.2.2, o estado de mínimo potencial ocorre

Fig. 2.2: $\lambda > 0, \mu^2 > 0$

para $\varphi = 0$, e neste caso, não há quebra espontânea de simetria. Por fim, na Fig.2.3,

Fig. 2.3: $\lambda > 0, \mu^2 < 0$

vemos que, para $\mu^2 < 0$, o estado mínimo do potencial ocorre para dois valores de $\varphi_0 = \pm\sqrt{\frac{|\mu|^2}{2\lambda}} = \pm C \neq 0$, e, neste caso, ocorre uma quebra espontânea de simetria.

De fato, este modelo com quebra espontânea de simetria é de grande interesse na física [43]. Para estudarmos a física deste sistema na vizinhança de um dos vácuos, devemos definir um novo campo φ' tal que, escolhendo o vácuo positivo por exemplo, $\varphi' = \varphi - C$. Feito isto, reescrevemos o potencial em termos deste novo campo de modo que

$$V(\varphi') = \lambda\varphi'^4 + 4\lambda\varphi'^3C + 4\lambda\varphi'^2C^2 - \frac{|\mu^2|^2}{4\lambda} . \quad (2.2.25)$$

Como vemos da expressão acima para $V(\varphi')$, o termo de massa para o novo campo, $4\lambda\varphi'^2C^2$, indica que este campo apresenta uma massa positiva $m = 2C\sqrt{2\lambda}$, onde notamos também que a simetria original, $Z(2)$, é quebrada.

A seguir, ainda a respeito deste modelo com quebra espontânea de simetria, vamos tomar φ como sendo um campo complexo, agora com dois graus de liberdade. Considerando a lagrangiana deste modelo com campo complexo dada por

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)^* - V(|\varphi|) . \quad (2.2.26)$$

onde $|\varphi| = (\varphi\varphi^*)^{1/2}$. Seja $V(|\varphi|)$ uma função polinomial, vamos escolher esta de modo que

$$V(|\varphi|) = \mu^2\varphi\varphi^* + \lambda(\varphi\varphi^*)^2 + cte , \quad (2.2.27)$$

onde λ é uma constante de acoplamento. Usando as equações de Euler-Lagrange, podemos mostrar que a equação de movimento para esta teoria é:

$$(\eta^{\beta\nu}\partial_\nu\partial_\beta - \mu^2)\varphi = 2\lambda\varphi(\varphi\varphi^*) . \quad (2.2.28)$$

Reescrevemos assim, a lagrangiana para o campo complexo da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)^* - \mu^2\varphi\varphi^* - \lambda(\varphi\varphi^*)^2 + cte . \quad (2.2.29)$$

Vemos que esta lagrangiana é invariante frente a uma transformação global de gauge, definida por (2.1.6). O termo cinético em \mathcal{L} se anulará caso $\varphi = constante$. Deste modo o estado fundamental será dado pelo mínimo do potencial $V(|\varphi|)$. Considerando o caso em que $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$, a forma do potencial $V(\varphi^*\varphi)$ para o campo

escalar complexo é dada pela Fig.5.1 e o estado de mais baixa energia é infinitamente degenerado, de modo que $\varphi_0 = C e^{i\Lambda}$, onde $C = \sqrt{\frac{|\mu^2|}{2\lambda}}$ e Λ é um número real arbitrário.

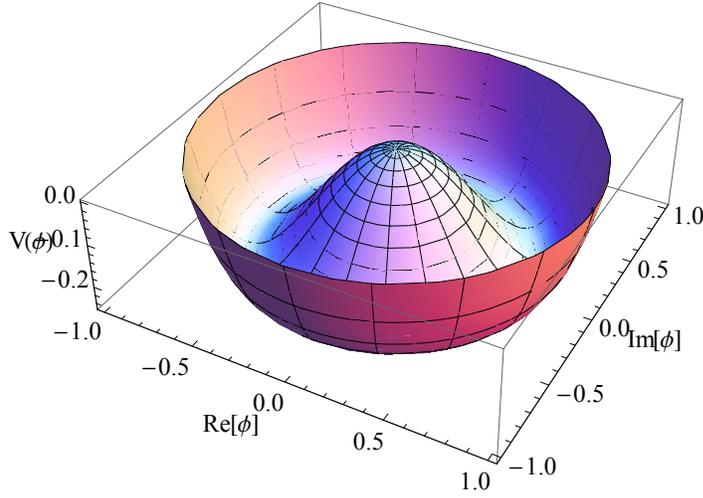


Fig. 2.4: Aqui definimos um gráfico de maneira geral, que define a forma do potencial $V(\varphi^*\varphi)$, consideramos $\mu^2 = -10$ e $\lambda = 20$.

Vamos analisar agora as vizinhanças do sistema no estado fundamental, por exemplo, tomemos $\varphi_0 = C$ ($\Lambda = 0$). Escolhendo, então,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x) + i\xi(x)] , \quad (2.2.30)$$

onde $\eta(x)$ e $\xi(x)$ são campos reais, com $v = \sqrt{\frac{|\mu^2|}{\lambda}}$. Substituindo (2.2.30) em (2.2.29) obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 - \lambda v \eta(\eta^2 - \xi^2)^2 - \lambda v^2 \eta^2 + cte. . \quad (2.2.31)$$

Da expressão acima podemos identificar que o campo $\eta(x)$ adquire uma massa dada por $m_\eta^2 = 2|\mu^2|$, sendo o campo $\xi(x)$ não massivo, ou seja, um bóson de Goldstone².

Comparando os resultados obtidos para o casos em que consideramos o campo φ real e, posteriormente, complexo, vemos que os bósons de Goldstone surgem apenas quando a simetria de gauge quebrada for contínua.

Note que, recaímos para o caso livre tomando $\lambda = 0$ e $\mu^2 > 0$.

² Neste caso a lagrangiana não apresenta mais uma invariância por $U(1)$.

A densidade hamiltoniana, associada a este sistema é escrita da seguinte forma

$$\mathcal{H} = \pi^* \pi + |\vec{\nabla} \varphi|^2 + V(\varphi) , \quad (2.2.32)$$

onde $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \partial_0 \varphi$.

Podemos generalizar o modelo com campo complexo de modo a incluir “ n ” campos escalares reais. Seja a lagrangiana descrita por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^j)(\partial^\mu \varphi^j) - \frac{1}{2}\mu^2 \varphi^j \varphi^j - \lambda(\varphi^j \varphi^j)^2 . \quad (2.2.33)$$

Vemos que \mathcal{L} é invariante perante o grupo ortogonal n -dimensional $O(n)$, que mistura as componentes entre si e possuem $n(n-1)/2$ geradores. Considerando o espaço interno de isospin, que contém as n -componentes do campo, o mesmo se transforma da seguinte maneira:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \rightarrow \Theta \varphi(x) . \quad (2.2.34)$$

Assim, $\varphi^j \varphi^j = \varphi^T \varphi \rightarrow \varphi^T \Theta^T \Theta \varphi = \varphi^T \varphi$. Logo vemos que Θ é um elemento do grupo $O(n)$.

Novamente podemos ver que existe um “anel”, que é definido agora por $\varphi^j \varphi^j = |\mu^2|/2\lambda$, que, para $\mu^2 > 0$, representa os estados de mais baixa energia³. Podemos escolher o vácuo desta teoria como sendo o estado representado por uma dada componente $\varphi^j = cte \neq 0$, e as demais componentes nulas, ou seja,

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (2.2.35)$$

onde $u = \sqrt{|\mu^2|/2\lambda}$. Desta maneira podemos ver que o vácuo desta teoria é invariante por transformações que misturam todas as suas componentes nulas. Então, o grupo

³ Por analogia, podemos imaginar que φ^j é uma componente de um vetor φ que está em uma direção arbitrária, cujo o módulo desse vetor é $\sqrt{|\mu^2|/2\lambda}$ que representa o vácuo da teoria.

de simetria deste vácuo agora passa a ser $O(n - 1)$ com $(n - 1)(n - 2)/2$ geradores. Notamos então que a diferença entre o número de geradores inicial e final é de $n - 1$. E portanto, dizemos que $n - 1$ geradores foram quebrados. Deste modo, procedendo com o estudo da física nas vizinhanças de um dos n vácuos da teoria, percebe-se que apenas uma única componente adquire massa. As $n - 1$ componentes que permanecem sem massa são chamadas de bósons de Goldstone. De maneira sucinta podemos enunciar o teorema de Goldstone da seguinte forma: “Para cada gerador quebrado, num processo de quebra espontânea de simetria, aparece um bóson escalar sem massa” [44].

2.2.2 O mecanismo de Higgs-Kibble

De maneira geral, o mecanismo de Higgs-Kibble é um processo que gera, espontaneamente, massa para os campos de gauge [45]. A seguir, discutiremos este fenômeno considerando o caso Abeliano, isto é, consideraremos a lagrangiana de um campo escalar complexo com acoplamento mínimo com um campo de gauge, A_μ , Abeliano. Seja a lagrangiana desta teoria dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi][(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi^*] - \mu^2\varphi\varphi^* - \lambda(\varphi\varphi^*)^2. \quad (2.2.36)$$

Onde sabemos que esta lagrangiana é invariante frente a transformações de gauge local, definidas segundo (2.1.14) onde

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (2.2.37)$$

Restringindo ao caso em que esta teoria apresenta uma quebra espontânea de simetria de gauge, isto é, tomando $\lambda > 0$ e $\mu^2 < 0$. Onde, neste caso, sabemos que existe um “anel” de estados de vácuo degenerados. Procedendo de maneira semelhante ao que foi proposto para o campo escalar complexo, o estudo das vizinhanças de um estado de vácuo é feito tomando o campo complexo expresso na forma dada por (2.2.30), e por conseguinte $\varphi_0 = C$. Deste modo a lagrangiana desta teoria é expressa

da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{e^2v^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 - \lambda v^2\eta^2 - evA_\mu\partial^\mu\xi + \dots \quad (2.2.38)$$

O termo $A_\mu A^\mu$ que aparece, mostra que o campo de gauge, A_μ , adquire massa. Podemos ver também da lagrangiana acima a presença de um campo bosônico massivo, η , cuja massa é $m_\eta^2 = 2\lambda v^2$, e um campo bosônico de Goldstone, ξ .

Um resultado menos evidente está diretamente relacionado com os graus de liberdade da teoria. Inicialmente partimos de uma teoria que apresenta um campo complexo acoplado com um campo de gauge não massivo, de modo que tínhamos quatro graus de liberdade, dois do campo escalar complexo e dois do campo vetorial sem massa. Por fim temos dois campos escalares reais, e portanto dois graus de liberdade, sendo um de cada campos escalar real, e um campo vetorial massivo, agora com três graus de liberdade, dois transversos e um longitudinal (no sentido da massa), totalizando por fim cinco graus de liberdade.

Entretanto o grau de liberdade associado ao bóson de Goldstone é não físico, de modo que este pode ser eliminado através de uma redefinição do campo de gauge. Para absorvermos este grau de liberdade não físico redefinimos o campo de gauge da seguinte maneira

$$B_\mu = A_\mu - e\partial_\mu\xi, \quad (2.2.39)$$

onde (2.2.38) poderá ser escrita na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{e^2v^2}{2}B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \lambda v^2\eta^2 + \dots, \quad (2.2.40)$$

onde agora

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.2.41)$$

O campo B_μ apresenta massa $m_B = ev$.

O mecanismo de Higgs-Kibble também ocorre no caso onde o grupo de simetria de gauge do sistema é não Abeliano, por exemplo, o grupo $O(n)$ para $n \geq 3$. Em [46], por

exemplo, os autores mostraram que em uma teoria de campos não comutativa em $2+1$ há quebra espontânea de simetria do grupo de rotação $O(n)$ através da combinação de auto-acoplamento quártico ou sêxtuplo nos campos.

3. A CORDA CÓSMICA

As cordas cósmicas correspondem a defeitos topológicos lineares que podem ter sido formados nas transições de fases que ocorreram nos momentos iniciais da história do universo [1]-[30]. Geometricamente, esse defeito topológico pode ser caracterizado por um espaço-tempo cuja métrica a ele associada é tal que o tensor de Riemann-Christoffel correspondente é nulo em todos os pontos, menos no defeito, isto é, o espaço-tempo possui uma singularidade cônica.

3.1 *Relatividade Geral e o espaço-tempo*

Uma das revoluções na física moderna ocorreu devido as ideias de Albert Einstein, em 1915, a respeito de como a estrutura do espaço e do tempo eram afetadas devido a presença de matéria e de energia. Para formular matematicamente estas ideias, Einstein dotou o espaço de uma métrica. Toda informação geométrica a respeito do espaço-tempo estaria contida no objeto matemático chamado tensor métrico, $g_{\mu\nu}$. Em outras palavras, a distribuição de matéria e energia diz como deve ser a geometria do espaço-tempo. A equação proposta por Einstein para a teoria da relatividade geral é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (3.1.1)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci obtido a partir do tensor de Riemann, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura, G é a constante da gravitação universal de Newton e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento. De modo a introduzir a ideia da estrutura métrica do espaço-tempo, iremos revisar brevemente os conceitos básicos necessários, como referencial inercial e intervalo de eventos [47].

Num referencial inercial S , um intervalo de tempo próprio (evento) infinitesimal ds , também chamado de elemento de linha, é dado, usando as coordenadas (t, x, y, z) , por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 , \quad (3.1.2)$$

que é um invariante por transformações de Lorentz.

Mas se considerarmos um sistema de referência não-inercial, o elemento de linha não será dado, em geral, pela soma dos quadrados das diferenciais das coordenadas. Neste caso, para um melhor entendimento, vamos considerar um evento em um referencial girante, em torno do eixo z , cuja frequência angular de rotação seja ω . Seja (t', x', y', z') as coordenadas desse novo referencial S' , as transformações gerais de coordenadas entre os referenciais S e S' são dadas da seguinte forma

$$x = x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \quad (3.1.3)$$

$$y = x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t)$$

$$z = z' .$$

Desta forma o elemento de linha tomará a forma expressa pela equação

$$ds^2 = [1 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 + 2\omega dt(y'dx' - x'dy') - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) . \quad (3.1.4)$$

Vemos, portanto, que o elemento de linha não é somente a soma ou a diferença dos quadrados das coordenadas diferenciais. A equação (3.1.2) pode ser colocada na forma

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (3.1.5)$$

onde definimos o quadri-vetor posição por $x^\mu = (t, -\vec{r})$, e o tensor métrico, $\eta_{\mu\nu}$, por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Em geral, quando o sistema de coordenadas não-inerciais são usados, o elemento de linha incluirá termos que são produtos das diferenciais de coordenadas diferentes. Deste modo podemos escrever o elemento de linha da seguinte forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu , \quad (3.1.6)$$

onde $g_{\mu\nu}(x)$ representa um conjunto de dez funções das coordenadas de espaço e tempo, sendo este tensor simétrico, ou seja, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. O sistema descrito por (3.1.6) é chamado de curvilíneo e corresponde a um sistema de referência acelerado. As funções $g_{\mu\nu}$ contém todas as propriedades geométricas do espaço-tempo. Para o caso em que tratamos de referenciais inerciais apenas temos que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Einstein mostrou que referenciais acelerados são equivalentes a campos gravitacionais, de modo que os efeitos gravitacionais serão descritos pelo tensor métrico, $g_{\mu\nu}(x)$. Neste caso, a gravitação pode ser entendida como um desvio na métrica do espaço-tempo plano. Além do mais, esta métrica não é fixada arbitrariamente, mas dependerá da distribuição de matéria local.

De fato, esta equivalência é verificada apenas localmente. Em um sistema não-inercial, dada uma métrica $g_{\mu\nu}(x)$, podemos sempre reduzi-la globalmente a forma de Galileu, (3.1.5), por meio de uma transformação adequada de coordenadas. Por outro lado, um campo gravitacional não pode ser eliminado globalmente por uma transformação de coordenadas, e a métrica só pode ser reduzida a forma plana (Minkowski) apenas numa região finita muito pequena do espaço, ou seja, localmente. Quando tal situação ocorre, o espaço-tempo é chamado de espaço tempo pseudo-Riemanniano¹.

Num espaço-tempo pseudo-Riemanniano o tensor métrico é um tensor covariante e simétrico de ordem 2. Além deste, podemos também definir um tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}(x)$, definido como o inverso do tensor métrico covariante. Então $g^{\mu\nu}$ é dado por

$$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}, \quad (3.1.7)$$

onde g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e $\Delta^{\mu\nu}$ é o co-fator de $g_{\mu\nu}$. Consequentemente, temos que a relação $g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu} = \delta_{\mu}^{\alpha}$ deve ser satisfeita, onde δ_{μ}^{α} é a delta de Kronecker. Mediado pelos tensores métrico $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$, podemos levantar ou abaixar os

¹ Uma variedade pseudo-Riemanniana é uma variedade diferenciável equipada com um tensor métrico de ordem(0, 2)-diferenciável, simétrico, que é não degenerado em cada ponto da variedade não sendo obrigado a ser um tensor positivo definido. As variedades pseudo-Riemannianas generalizam o conceito de variedade Riemanniana neste sentido.

índices de tensores ordinários.

A lei de transformação de tensores depende da transformação associada aos sistemas de coordenadas distintos, e uma identidade tensorial deve ser preservada sob transformações gerais de coordenadas. Assim, de modo a representar as leis físicas que preservam a forma sob tais transformações, devemos expressá-las matematicamente na forma tensorial. Esta exigência implica, como visto na seção anterior, no surgimento do conceito de derivada covariante.

3.2 Corda cósmica

Uma corda cósmica é um objeto que pode ser obtido a partir de uma distribuição infinitamente concentrada de matéria, com densidade linear de massa μ . No caso de uma certa distribuição estar localizada sobre o eixo z , o tensor energia-momento, em coordenadas cilíndricas, é dada por

$$T^\mu{}_\nu = \mu \operatorname{diag}(1, 0, 0, 1) \delta^{(2)}(\vec{r}) , \quad (3.2.8)$$

onde $\delta^{(2)}(\vec{r})$ é a função delta de Dirac em duas dimensões.

Queremos que a distribuição (3.2.8) gere uma geometria com simetria cilíndrica. Desta forma, o elemento de linha mais geral, em coordenadas cilíndricas, que apresenta tal simetria e mantém invariância por transformações de “boosts” ao longo do eixo z , é dada por

$$ds^2 = A^2(r)dt^2 - dr^2 - B^2(r)d\phi^2 - A^2(r)dz^2 . \quad (3.2.9)$$

Seja a equação de Einstein da relatividade geral dada por

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}g^\mu{}_\nu R = 8\pi G T^\mu{}_\nu , \quad (3.2.10)$$

substituindo (3.2.8) em (3.2.10), obtemos um conjunto de equações diferenciais, não lineares, cuja solução fornece o seguinte elemento de linha [2] [7]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(1 - 4G\mu)d\phi^2 - dz^2 , \quad (3.2.11)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton. Redefinindo o termo angular do elemento de linha, dada por (3.2.11), de tal forma que tomamos $\phi' = \phi/q$, onde tomamos $q^{-1} = (1 - 4G\mu)$ recaímos numa métrica de Minkowski dada por

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi'^2 - dz^2, \quad (3.2.12)$$

onde a coordenada angular varia no intervalo de $[0, 2\pi/q]$, de modo que o espaço-tempo agora é localmente plano exceto em $r = 0$. Este elemento de linha, do ponto de vista global, corresponde ao espaço-tempo de Minkowski menos um pedaço subtendido pelo ângulo $8\pi G\mu$. A quantidade $G\mu$ tem grande importância na teoria de cordas, pois, ela caracteriza a intensidade da interação gravitacional e seu valor, obtido a partir de Teorias de Grande Unificação, é compreendida da ordem de 10^{-6} conforme exibido em [12][13].

A geometria acima descrita apresenta muitas características interessantes, tais como:

- Ausência de potencial gravitacional newtoniano, embora, isto não implique na ausência de efeitos gravitacionais [48];
- Déficit de ângulo planar igual a $\Delta\phi = 8\pi G\mu$ [48];
- Pode atuar como lente gravitacional [2];
- Análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm [49];
- Auto-interação eletrostática [34].

3.3 Vórtices Abelianos

Nesta seção apresentaremos o modelo proposto por Nielsen e Olesen para vórtices Abelianos que, no contexto da relatividade geral, gera uma estrutura geométrica semelhante a de uma corda cósmica, sendo assim um forte candidato para descrevê-las.

Nielsen e Olesen, partindo de uma teoria relativística de campos, em 1973, mostraram que é possível obter soluções de vórtices [29]. Para tal feito, eles partiram da lagrangiana do modelo de Higgs abeliano, equação (2.2.36). As configurações de vórtices podem ser obtidas a partir do seguinte *ansatz* [29]

$$A_0 = 0, \quad \vec{A} = A(r)\hat{\theta}, \quad \Phi(r, \theta) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} f(r) e^{in\theta}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (3.3.13)$$

o qual representa um fluxo de campo magnético ao longo do eixo- z . O número inteiro n é chamado de vorticidade.

Analisando as equações de Euler-Lagrange, verificamos que as funções $A(r)$ e $f(r)$ admitem as seguintes formas assintóticas

$$A(r) \rightarrow -\frac{n}{r}, \quad f(r) \rightarrow 1, \quad (3.3.14)$$

para grandes valores de r . Estas condições são requeridas para a obtenção de soluções de vácuo no infinito. Para $r \rightarrow 0$ as condições abaixo

$$A(r) \rightarrow -r^{2|n|+1}, \quad f(r) \rightarrow f_0 r^{|n|}, \quad (3.3.15)$$

evitam singularidades na origem, isto é, sobre o defeito [29].

Garfinkle, em 1985, estudou os efeitos gravitacionais associados aos vórtices de Nielsen e Olesen [30]. Com esta finalidade, ele usou o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, obtido a partir da lagrangiana do modelo de Higgs abeliano, no contexto da relatividade geral, como fonte das equações de Einstein. Admitindo que a variedade apresenta simetria cilíndrica, ele escreveu o elemento de linha como se segue

$$ds^2 = e^a dt^2 - dr^2 - e^c d\theta^2 - e^b dz^2, \quad (3.3.16)$$

onde os parâmetros a , b e c são funções de r satisfazendo as seguintes condições de contorno:

$$a(0) = b(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^c}{r^2} = 1. \quad (3.3.17)$$

Posteriormente em 1986, Linet [34], tomando o limite em que os parâmetros $e, \lambda \rightarrow \infty$ mantendo a razão $e^2/8\lambda = cte$, mostrou que o tensor energia-momento utilizado

por Garfinkle fornece a mesma distribuição da expressão (3.2.8). Desta forma, vemos que a estrutura gerada por tais vórtices é análogo a estrutura de uma corda cósmica.

4. O CAMPO FERMIONICO

Neste capítulo procuramos estender o formalismo de teoria de campos para os espaços curvos. Este procedimento é padrão e, de maneira geral, propõe deixar a ação de um sistema físico invariante por transformações gerais de coordenadas. Mostraremos como a teoria fermiônica deve ser generalizada de modo a se tornar invariante por tais transformações.

4.1 Equação de Dirac no espaço plano

A descrição quântica de um partícula de spin 1/2 é feita através de um espinor $\psi(x)$, que obedece a equação de Dirac no espaço de Minkowski, como se segue

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 . \quad (4.1.1)$$

Esta equação é de primeira ordem na derivada do campo, onde γ^μ são as matrizes de Dirac usuais, que possuem várias representações neste espaço [43][50][51][52]. Aplicando o operador $i\gamma^\nu \partial_\nu$ na equação acima obtemos

$$(-\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu - m(\gamma^\nu \partial_\nu))\psi(x) = 0 , \quad (4.1.2)$$

onde usando (4.1.1) mais uma vez obtemos

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi(x) = 0 . \quad (4.1.3)$$

Como $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$, então $\gamma^\mu \gamma^\nu$ pode ser substituída peça combinação simétrica

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \equiv \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} , \quad (4.1.4)$$

sendo $\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \}$ o anticomutador entre as matrizes de Dirac. Assim podemos escrever

$$\left(\frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right) \psi(x) = 0 . \quad (4.1.5)$$

A teoria da relatividade restrita exige que a relação energia-momento-massa seja satisfeita e portanto, cada componente de $\psi(x)$ deve satisfazer a equação de Klein-Gordon. Assim as matrizes de Dirac devem obedecer à seguinte relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} . \quad (4.1.6)$$

Na sua formulação Dirac propôs um campo espinorial de quatro componentes, o qual levava em consideração dois possíveis estados de energia e de spin. A equação então proposta é matricial com derivadas lineares no espaço e no tempo.

4.2 Equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético

interação de um campo espinorial carregado, $\psi(x)$, com um campo eletromagnético, A_μ é descrita pela troca da derivada usual, ∂_μ , pela derivada covariante, D_μ , como se segue:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu , \quad (4.2.7)$$

onde, A_μ é o quadri-vetor potencial eletromagnético e e é a carga do elétron. Esta maneira de introduzir a interação com o campo eletromagnético nos garante a invariância de gauge da teoria. Deste modo podemos expressar a lagrangiana desta teoria da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu \psi(x) - (D_\mu^* \bar{\psi}(x))\gamma^\mu \psi(x)] - m\bar{\psi}(x)\psi(x) . \quad (4.2.8)$$

Aqui, $\psi(x)$ é um espinor de quatro componentes e, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é o espinor adjunto.

Nesta tese, no espaço plano, usaremos a representação das matrizes de Dirac na qual a matriz γ^0 é diagonal, ou seja,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^a \\ -\sigma^a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = 1, 2, 3... \quad (4.2.9)$$

onde I é a matriz identidade 2×2 e σ^a são as matrizes de Pauli [52].

Notemos que, variando (4.2.8) com respeito a $\bar{\psi}$, obtemos a equação de Dirac acoplada minimamente com o campo de gauge eletromagnético.

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = 0 . \quad (4.2.10)$$

A expressão para o tensor energia-momento do campo de Dirac na presença de campo eletromagnético externo é dada por [51][52]

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma_{(\mu}D_{\nu)}\psi - (D_{(\mu}^*\bar{\psi})\gamma_{\nu)}\psi] , \quad (4.2.11)$$

que satisfaz a condição $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ ¹.

4.3 Equação de Dirac na presença de um campo gravitacional

Vamos considerar, nesta seção, a interação do campo fermiônico com um campo gravitacional clássico. Para que tal efeito, é necessário uma generalização do conceito de covariância da equação de Dirac, pois esta generalização requer uma extensão para a noção de espinor quando tratamos da teoria de Dirac no espaço pseudo-Riemanniano. De acordo com as referências [51][52] tem-se que, a equação de Dirac, no caso plano, é covariante por transformações de Lorentz, ou seja, preserva sua forma se, junto com as transformações de grupo de Lorentz, o espinor se transformar de acordo com a representação desse grupo.

Na geometria pseudo-Riemanniana sabemos que, localmente, o espaço-tempo é plano portanto, a exigência de uma covariância de Lorentz da equação de Dirac pode ser imposta localmente. Para isto, em um ponto qualquer x , sobre a variedade M , podemos introduzir um espaço tangente pseudo-Euclidiano, onde neste espaço a covariância local de Lorentz é preservada. Como uma base de vetores para descrever esse espaço tangente, podemos escolher as chamadas bases tétradas $e^{(a)}{}_\mu$, com $a = 0, 1, 2, 3$.

¹ Em (4.2.11), devido a esta simetria, estamos usando a seguinte notação para tensores simétricos: $\gamma_{(\mu}D_{\nu)} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu D_\nu + \gamma_\nu D_\mu)$.

4.3.1 Bases tétradas

Uma das quantidades mais importantes na relatividade geral é o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, do qual podemos descrever a geometria do espaço. Em termos deste tensor podemos definir o elemento de linha ds^2 e o produto interno entre dois vetores da seguinte forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (4.3.12)$$

$$V \cdot W = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu , \quad (4.3.13)$$

onde V e W são dois vetores quaisquer definidos sobre a variedade.

A métrica é covariante, simétrica e não singular. Sua inversa $g^{\mu\nu}$ é definida por

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = g_{\nu\mu} g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\rho . \quad (4.3.14)$$

A assinatura que estamos usando é $(+ - - -)$. Isto significa que g pode ser diagonalizado por uma transformação

$$g_{\mu\nu} = O_{\mu a} D_{ab} (O^{-1})_{\nu b} , \quad (4.3.15)$$

onde $(O^{-1})_{b\nu} = O_{\nu b}$ tal que

$$D_{ab} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix} . \quad (4.3.16)$$

A não singularidade implica que $\lambda^{(a)} \neq 0$, e a assinatura da métrica significa que $\lambda^{(a)} > 0$, para todo $a = 0, 1, 2, 3$.

Segundo [53], o caráter Lorentziano do espaço-tempo da Relatividade Geral permite definir referenciais locais, associados a uma escolha de tétradas, $e_\mu^{(a)}$, tal que localmente a métrica assumia valores constantes da Relatividade Restrita.

Definindo as bases tétradas como

$$e_\mu^{(a)} = \sqrt{\lambda^{(a)}} O_{\mu a} , \quad (4.3.17)$$

onde o índice a que aparece em $O_{\mu a}$ não é um índice de soma. Desse modo $g_{\mu\nu}$ pode ser expresso por

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^{(a)} e_{\nu}^{(b)} \eta_{ab} , \quad (4.3.18)$$

onde η_{ab} é o tensor métrico de Minkowski. Admitindo que $e_{\mu}^{(a)}$ possua uma inversa, $e_{(a)}^{\mu}$, que satisfaça as relações

$$e_{(a)}^{\mu} e_{\mu}^{(b)} = \delta_a^b \quad (4.3.19)$$

e

$$e_{(a)}^{\mu} e_{\nu}^{(a)} = \delta_{\nu}^{\mu} , \quad (4.3.20)$$

nós podemos mostrar diretamente que

$$e_{(a)}^{\mu} = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e_{\nu}^{(b)} \quad (4.3.21)$$

e

$$\eta_{ab} = g^{\mu\nu} e_{(a)}^{\mu} e_{\nu}^{(b)} \quad (4.3.22)$$

A equação acima, (4.3.22), permite uma interpretação geométrica associada as tétradas, onde vemos que esta base está associada a uma transformação local do sistema de coordenadas, x^{α} , para coordenadas locais, x^a , tal que, no ponto considerado, a métrica assume a forma de Minkowski, η_{ab} . De (4.3.21), vemos que os índices latinos, associados ao espaço tangente ao ponto, são levantados, abaixados e contraídos com a métrica de Minkowski. Podemos observar ainda que os índices gregos são abaixados, levantados e contraídos com o tensor métrico referente a variedade.

Segundo as equações acima, as tétradas $e_{\mu}^{(a)}$ formam um conjunto completo de vetores ortonormais no espaço tangente ao espaço Riemanniano, num ponto x . Então, para qualquer vetor, ou tensor, temos que

$$V^{\mu} = e_{(a)}^{\mu} V^a, \quad V^a = e_{\mu}^{(a)} V^{\mu} , \quad (4.3.23)$$

onde V^{μ} e V^a são, respectivamente, as componentes de um vetor V nas bases de coordenadas sobre a variedade e sobre o espaço tangente local. Deste modo, em

termos das tetradas, escrevemos o elemento de linha por

$$ds^2 = \eta_{ab} e_{\mu}^{(a)} e_{\nu}^{(b)} dx^{\mu} dx^{\nu} . \quad (4.3.24)$$

Dada a métrica $g_{\mu\nu}(x)$, as bases tetradas não são unicamente determinadas. Desta maneira, para uma transformação de Lorentz local qualquer

$$e'_{\mu}{}^{(a)} = \Lambda^a{}_b e_{\mu}^{(b)}, \quad (4.3.25)$$

onde

$$\Lambda^a{}_c \Lambda_b{}^c = \delta_b^a \quad (4.3.26)$$

deve ser satisfeita, as equações (4.3.18) e (4.3.22) permanecem inalteradas. Com isso, necessitamos estender o princípio da covariância geral, exigindo que as equações da teoria gravitacional sejam covariantes sob mudanças de bases de coordenadas no espaço tangente da variedade Riemanniana e sob transformações de Lorentz locais das bases ortonormais da variedade.

4.3.2 Equação de Dirac no espaço-tempo curvo

Em cada ponto da variedade, independentemente, vamos tomar uma estrutura espinorial local de Dirac. Esses espinores de Dirac são objetos de quatro componentes que, sob o grupo de transformações de Lorentz locais (4.3.15), se transformam como um espinor no espaço plano, ou seja,

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda(x))\psi(x) \quad (4.3.27)$$

e o seu conjugado correspondente

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda(x)) , \quad (4.3.28)$$

sendo $S(\Lambda(x))$ uma matriz 4×4 , que opera sobre os vetores coluna de quatro componentes, que depende da transformação de Lorentz, $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(x)$. Esta matriz deve satisfazer a restrição de possuir o seu determinante unitário e positivo, ou seja, $\det(S) = 1$.

Em termos das componentes, podemos escrever (4.3.27) e (4.3.28) como

$$\psi^a(x) \rightarrow \psi'^a(x) = S^a_b(x)\psi^b(x) , \quad (4.3.29)$$

$$\psi_a(x) \rightarrow \psi'_a(x) = \psi_b(x)S^{-1b}_a(x) . \quad (4.3.30)$$

Sob transformações de coordenadas na variedade, $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x'^\alpha(x)$, os espinores se transformam como escalares, ou seja, $\psi'(x') = \psi(x)$. Neste caso não existe uma relação entre o grupo de transformações gerais de coordenadas sobre a variedade e o grupo local de Lorentz, pois no espaço-tempo curvo a estrutura invariante de Lorentz local existe independentemente em cada ponto e estas transformações locais não podem constituir uma representação das transformações gerais da variedade. Diferentemente da variedade plana da relatividade restrita, onde o grupo de transformações (4.3.27) e (4.3.28) pode constituir uma representação de grupo de transformações lineares e homogêneas sobre a variedade.

A generalização da equação de Dirac para o espaço tempo curvo, especificado pelo tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, pode ser obtida usando o princípio da covariância geral, o que nos permite definir sobre a variedade um campo de matrizes de Dirac local, $\gamma^\mu(x)^2$, correlacionadas com as matrizes de Dirac γ^a constantes, que satisfazem a relação de anticomutação (4.1.6), através das bases tétradas da seguinte maneira

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_a(x)\gamma^a , \quad (4.3.31)$$

onde esta relação, devido as equações (4.1.6), (4.3.19) e (4.3.20), satisfaz a seguinte relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} \equiv \gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x)\gamma^\mu(x) = 2g^{\mu\nu} , \quad (4.3.32)$$

constituindo assim, uma álgebra de Clifford associada a esse campo de matrizes sobre a variedade.

² Como estamos correlacionando o campo de matrizes de Dirac sobre a variedade com as matrizes constantes no espaço tangente (plano) local, designamos os índices *Gregos* para as matrizes γ sobre a variedade, e os índices *Latinos* para as matrizes γ (constantes) definidas no espaço plano

Sob o grupo de transformações (4.3.29) e (4.3.30) as matrizes de Dirac $\gamma^\mu(x)$ se transformam da seguinte maneira

$$(\gamma'^\mu)^a_b = S^a_c(S^{-1})^d_b(\gamma^\mu)^c_d = (S(x)\gamma^\mu(x)S^{-1}(x))^a_b . \quad (4.3.33)$$

Usando o formalismo das tetradas, obtemos

$$(\Lambda^{-1}(x))^a_b \gamma^b = S(x)\gamma^a S^{-1}(x) . \quad (4.3.34)$$

Esta é uma expressão conhecida quando tratamos com espinores de Dirac no espaço plano, mostrando que as matrizes constantes de Dirac devem preservar sua forma sob transformações de Lorentz [52][51].

Sob transformações gerais de coordenadas, as matrizes locais de Dirac, $\gamma^\mu(x)$, se transformam como um quadri-vetor contravariante

$$\gamma^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \gamma^\nu(x) . \quad (4.3.35)$$

Pelo fato de que as matrizes do grupo de transformação (4.3.27) e (4.3.28) são funções de ponto, a derivada de um espinor não se transformará como um espinor. Assim, devemos definir o conceito de derivada covariante de um espinor por

$$\nabla_\alpha \psi^a(x) = \partial_\alpha \psi^a + \Gamma_{\alpha b}^a \psi^b , \quad (4.3.36)$$

de tal forma que, sobre o grupo (4.3.29), se transforme como um espinor, ou seja,

$$\nabla_\alpha \psi'^a(x) = S^a_b(x) \nabla_\alpha \psi^b . \quad (4.3.37)$$

Deste modo da lei de transformação dada pela equação acima segue que a quantidade Γ_α deve se transforma como se segue

$$\Gamma'^a_{\alpha b} = S^a_b \Gamma^d_{\alpha f} (S^{-1})^f_b - (\partial_\alpha S^a)_d (S^{-1})^d_b , \quad (4.3.38)$$

ou ainda

$$\Gamma'_\alpha = S \Gamma_\alpha S^{-1} - (\partial_\alpha S) S^{-1} . \quad (4.3.39)$$

A lei de transformação para Γ_α , dada pela equação acima, garante que a derivada covariante de um espinor se transforme como um espinor, frente a uma transformação de Lorentz local. Sob transformações gerais de coordenadas Γ_α se transforma como um vetor covariante. As quantidades Γ_α introduzidas para manter a invariância de Lorentz local do espaço espinorial são denominadas conexões espinoriais.

A expressão $\psi_a \psi^a = \bar{\psi} \psi$ é um escalar sob as transformações (4.3.27) e (4.3.28), deste modo temos $\nabla_\alpha(\psi_a \psi^a)$ deve ser tal que

$$\nabla_\alpha(\psi_a \psi^a) = \nabla_\alpha(\psi_a) \psi^a + \psi_a \nabla_\alpha \psi^a = \partial_\alpha(\psi_a \psi^a) . \quad (4.3.40)$$

Desse modo definimos que a derivada covariante atuando sobre o espinor adjunto, $\bar{\psi}$, opera da seguinte forma:

$$\nabla_\alpha \psi_a(x) = \partial_\alpha \psi_a - \Gamma_{\alpha a}^b \psi_b . \quad (4.3.41)$$

Para um objeto com leis bem definidas, sob transformações gerais de coordenadas sobre a variedade e sob rotações dos referenciais locais, a derivada covariante é dada por

$$\mathcal{D}_\alpha F^{\lambda a}{}_b = \partial_\alpha F^{\lambda a}{}_b \Gamma_{\alpha \beta}^\lambda F^{\beta a}{}_b + \Gamma_{\alpha d}^a F^{\lambda d}{}_b - \Gamma_{\alpha b}^d F^{\lambda a}{}_d , \quad (4.3.42)$$

que generaliza a derivada covariante usual.

Como sabemos o espaço-tempo da relatividade geral é pseudo-Riemanniano e, neste caso, temos $\mathcal{D}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Então, a partir de (4.3.32) temos que

$$2\mathcal{D}_\alpha g_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\alpha(\gamma_\mu(x)\gamma_\nu(x) + \gamma_\nu(x)\gamma_\mu(x)) = 0 . \quad (4.3.43)$$

Uma condição suficiente para (4.3.43) é que

$$\mathcal{D}_\alpha \gamma_\mu = \partial_\alpha \gamma_\mu - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \gamma_\lambda - \gamma_\mu \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha \gamma_\mu . \quad (4.3.44)$$

Usando (4.3.31) e as propriedades da álgebra de Dirac gerada pelas matrizes constantes γ^a , podemos mostrar que a conexão espinorial é dada por

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{8} \left[\gamma^\mu (\partial_\alpha \gamma_\mu) - (\partial_\alpha \gamma_\mu) \gamma^\mu - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho (\gamma^\mu \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma^\mu) \right] . \quad (4.3.45)$$

Podemos ainda mostrar também que

$$\Gamma_\alpha = \frac{1}{2}\omega_{\alpha ab}\Sigma^{ab}, \quad (4.3.46)$$

onde

$$\omega_{\alpha ab} = -e_{b\mu}(\partial_\alpha e_a^\mu) - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho e_a^\mu e_{b\rho}, \quad (4.3.47)$$

e

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b], \quad (4.3.48)$$

sendo $[\gamma^a, \gamma^b] = \gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a$ o anticomutador das matrizes de Dirac no espaço plano.

A imposição (4.3.44) é suficiente para garantir que $\mathcal{D}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, mas não é única. Segundo [53] existe outra imposição que também garante $\mathcal{D}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. De fato, tomando

$$\mathcal{D}_\alpha \gamma_\nu = [V_\alpha, \gamma_\nu], \quad (4.3.49)$$

para qualquer V_α pertencendo a álgebra de Pauli das matrizes $\gamma^\mu(x)$, a condição de termos a afinidade métrica ($\mathcal{D}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$) é preservada.

Entretanto, vamos optar pela imposição (4.3.44), pois, neste caso, o tensor energia-momento do campo de Dirac interagindo com a gravitação tem à sua forma da relatividade restrita preservada, a menos da substituição $\partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$. Onde a conexão espinorial é dada segundo a equação (4.3.45), denominadas coeficientes de Fock-Ivanenko.

Deste modo podemos agora generalizar a equação de Dirac para incluirmos os efeitos causados pela gravitação, obedecendo as noções de transformações locais de Lorentz e de transformações gerais de coordenadas, pela prescrição $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$. Assim, reescrevemos a equação de Dirac no espaço curvo da seguinte forma:

$$(i\gamma^\mu(x)\nabla_\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (4.3.50)$$

A equação de Dirac generalizada, é obtida da equação de Euler-Lagrange para a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x)\nabla_\mu\psi(x) - (\nabla_\mu\bar{\psi}(x))\gamma^\mu(x)\psi(x)] - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \right\}. \quad (4.3.51)$$

Da ação para a lagrangiana acima, obtemos também o tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma_{(\mu}\nabla_{\nu)}\psi - (\nabla_{(\mu}^*\bar{\psi})\gamma_{\nu)}\psi] . \quad (4.3.52)$$

4.4 Campo Fermiônico na presença de campos eletromagnético e gravitacional

Nesta seção, finalizamos nosso capítulo de revisão, a respeito da equação de Dirac, considerando o caso em que o campo fermiônico esteja interagindo diretamente com os campos eletromagnético e gravitacional simultaneamente. Como vimos anteriormente, a interação com o campo eletromagnético é descrita pela troca da derivada ordinária, ∂_μ , pela derivada estendida, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, garantindo, desta maneira, que a equação de Dirac seja invariante por transformações de gauge. No caso em que o campo ψ está interagindo com o campo gravitacional, devemos introduzir o conceito de derivada covariante pela troca $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$, garantindo assim que a derivada de um espinor se transforme como um espinor frente a transformações de Lorentz locais. Tal troca, para incluir os efeitos da gravitação, faz com que a equação de Dirac, como já foi dito, seja invariante por transformações locais de Lorentz e por transformações gerais de coordenadas.

Baseando-nos na discussão acima, podemos escrever a equação de Dirac, para um campo espinorial $\psi(x)$, interagindo com campos eletromagnético e gravitacional, da seguinte maneira:

$$[i\gamma^\mu(x)(\nabla_\mu + ieA_\mu) - m]\psi(x) = 0 . \quad (4.4.53)$$

A equação de Dirac escrita desta forma, é invariante de gauge e covariante por transformações de Lorentz locais e transformações gerais de coordenadas.

A expressão para o tensor energia-momento, dada por (4.3.52), deverá contemplar também, agora, a interação simultânea com o campo de gauge, logo deverá ser reescrita como

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma_{(\mu}\mathcal{D}_{\nu)}\psi - (\mathcal{D}_{(\mu}^*\bar{\psi})\gamma_{\nu)}\psi] , \quad (4.4.54)$$

onde usamos a notação $\mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu$.

5. TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS NO ESPAÇO CURVO

Neste capítulo temos como objetivo fazer uma breve revisão a quantização dos campos bosônico e fermiônico. Trataremos de campos, em cada ponto do espaço, como variáveis dinâmicas e quantizaremos os mesmo usando o formalismo canônico. Deste modo, tal formalismo generaliza a mecânica clássica de um sistema de partículas e sua quantização, para um sistema contínuo, ou seja, para campos.

Sabe-se que, as equações de campo são obtidas através da lagrangiana, por meio do princípio de Hamilton. De posse dessa lagrangiana, quantizaremos os campos impondo relações de comutação canônica aos campos e seus momentos conjugados. Este procedimento nos leva a obtenção de uma teoria quântica bosônica. Por outro lado, para quantizar o campo fermiônico, necessitamos de uma outra prescrição. Na verdade teremos que impor relações de anticomutação aos campos e momentos conjugados [50][43].

Nossas discussões, ao longo deste capítulo, serão feitas no espaço-tempo plano e por simplicidade trataremos campos livres. Em seguida faremos uma extensão desse formalismo no espaço-tempo curvo para o caso da quantização do campo fermiônico.

5.1 *Quantização do campo bosônico*

Vamos considerar um sistema descrito por vários campos $\varphi_r(x)$, $r = 1, 2, \dots, N$. O índice r pode rotular componentes do mesmo campos ou se referir a campos independentes. Vamos admitir que as equações do campo $\varphi_r(x)$ são obtidas pelo princípio variacional de uma ação integral envolvendo a lagrangiana

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\alpha \varphi_r(x)) . \quad (5.1.1)$$

A lagrangiana (5.1.1), dependendo dos campos e de suas primeiras derivadas apenas, não é o caso mais geral, mas cobre as teorias que discutiremos nesse trabalho e simplifica o formalismo.

A quantização desta teoria clássica pelo formalismo canônico deve seguir o seguinte procedimento: (i) Definimos as variáveis canonicamente conjugadas e (ii) promovemos tais variáveis à operadores impondo relações de comutação. Como sabemos, estamos tratando com um sistema com um número infinito de graus de liberdade, correspondendo aos valores do campo $\varphi_r(x)$ em cada ponto do espaço. Deste maneira, podemos aproximar este sistema por um sistema com graus de liberdade enumeráveis e depois tomarmos o limite do contínuo.

Vamos considerar o sistema em um dado instante de tempo t e decompor o espaço tridimensional em células de volume igual, $\delta\vec{x}_i$, rotuladas pelos índices $i = 1, 2, \dots$. Aproximaremos os valores dos campos de cada célula pelos seus valores nos centros das células ($\vec{x} = \vec{x}_i$). Agora, o sistema é descrito pelo conjunto de coordenadas generalizadas

$$q_{ri} \equiv \varphi_r(i, t) \equiv \varphi_r(\vec{x}_i, t), \quad r = 1, \dots, N \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.1.2)$$

Se reescrevermos as derivadas espaciais dos campos pelas diferenciais dos campos localizados em sítios vizinhos, rotulados pelos índices i e i' , podemos escrever o lagrangiano do sistema como

$$L(t) = \sum_i \delta x_i \mathcal{L}_i(\varphi_i(i, t), \dot{\varphi}_r(i, t), \varphi_r(i', t)) , \quad (5.1.3)$$

onde $\dot{\varphi}_r(i, t) \equiv \partial\varphi_r(i, t)/\partial t$. O momento conjugado a q_{ri} é definido por

$$p_{ri} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ri}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_r(i, t)} \equiv \pi_t(i, t) \delta\vec{x}_i , \quad \text{onde} \quad \pi_r(i, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_r} . \quad (5.1.4)$$

No limite do contínuo ($\delta\vec{x}_i \rightarrow 0$) temos então a definição do momento conjugado ao campo φ_r que é dado por

$$\pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_r} . \quad (5.1.5)$$

Neste limite o Lagrangiano do sistema será escrito por

$$L(t) = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\alpha \varphi_r(x)) . \quad (5.1.6)$$

Para irmos da teoria clássica de campos para a teoria quântica de campos, devemos interpretar as equações (5.1.2) e (5.1.5) como operadores de Heisenberg sujeitos às relações de comutação canônica

$$[\varphi_r(j, t), \pi_s(j', t)] = i \frac{\delta_{rs} \delta_{j'j}}{\delta \vec{x}_j} \quad (5.1.7)$$

e

$$[\varphi_r(j, t), \varphi_s(j', t)] = [\pi_r(j, t), \varphi_s(j', t)] = 0 . \quad (5.1.8)$$

Novamente, no limite do contínuo¹, as equações (5.1.7) e (5.1.8) tornam-se as relações de comutação para os campos:

$$[\varphi_r(x), \pi_s(x)] = i \delta_{rs} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (5.1.9)$$

$$[\varphi_r(x), \varphi_s(x)] = [\pi_r(x), \varphi_s(x)] = 0 , \quad (5.1.10)$$

5.1.1 Quantização do campo escalar real

Sabemos que, um campo escalar real possui apenas momento angular orbital e não possui momento angular de spin, ou seja, ele representa partículas de spin nulo [50]. Este campo que descreve partículas eletricamente neutras satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$(\square - m^2)\varphi(x) = 0 . \quad (5.1.11)$$

Segue-se também que, a equação acima pode ser obtida da lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi(x)) . \quad (5.1.12)$$

Assim, de acordo com a definição (5.1.5), o momento conjugado a φ é

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(x) . \quad (5.1.13)$$

¹ Lembremos que, no limite de $\delta \vec{x}_j \rightarrow 0$, $\delta_{jj'}/\delta \vec{x}_j$ torna-se a função delta de Dirac tridimensional, $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, estando os pontos \vec{x} e \vec{x}' respectivamente nas células j e j'

Deste modo, na quantização do campo escalar real, o campo $\varphi(x)$ torna-se um operador Hermitiano que satisfaz as relações de comutação (5.1.9) e (5.1.10):

$$[\varphi(x), \dot{\varphi}(x)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') , \quad (5.1.14)$$

$$[\varphi(x), \varphi(x)] = [\dot{\varphi}(x), \dot{\varphi}(x)] = 0 . \quad (5.1.15)$$

Para estabelecermos uma relação com partículas, vamos expandir $\varphi(x)$ em um conjunto completo de soluções da equação de Klein-Gordon como se segue

$$\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x) \quad (5.1.16)$$

com

$$\varphi_+ = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} a(\vec{k}) e^{-ikx} \quad (5.1.17)$$

e

$$\varphi_- = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} , \quad (5.1.18)$$

onde V e ω_k serão especificados mais abaixo. Nos desenvolvimentos acima, $a(\vec{k})$ e $a^\dagger(\vec{k})$ são os coeficientes da expansão que são identificados respectivamente como os operadores de aniquilação e de criação de bósons, os quais satisfazem a uma relação de comutação.

Sabemos que o campo $\varphi(x)$ possui infinitos graus de liberdade. De modo a simplificar o problema, vamos considerar que o campo escalar esteja dentro de um cubo de lado L e, portanto, de volume $V = L^3$, e que o mesmo satisfaz condições de contorno periódicas. Então, $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\hat{n}$, com $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$, sendo os mesmos interiores. Desta maneira, o campo $\varphi(x)$ pode ser representado como uma série de Fourier como foi feito acima, isto é, ele pode ser especificado por um conjunto enumerável de coeficientes de Fourier e, com isso, obtemos a descrição do campo em termos de infinitos, mas enumeráveis, graus de liberdade. A relação de dispersão obtida é $k^0 \equiv \omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$.

Utilizando a equação (5.1.16) nas relações de comutação definidas por (5.1.14) e (5.1.15), obtemos as relações de comutação para os operadores $a(\vec{k})$ e $a^\dagger(\vec{k})$, dadas por

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (5.1.19)$$

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0 . \quad (5.1.20)$$

Estas são as mesmas relações de comutação obedecidas pelos operadores escadas do oscilador harmônico simples na mecânica quântica não-relativística. Desse modo, todos os resultados obtidos anteriormente para o oscilador harmônico quântico podem ser aplicadas aqui. O espaço de Hilbert associado, passa a ser o espaço de Fock, ou de número de ocupação, que pode ser construído definindo-se o estado de vácuo, isto é, o de nenhuma partícula, $|0\rangle$, o qual é normalizado e satisfaz a relação

$$a(\vec{k}) |0\rangle = 0, \quad \forall \vec{k} . \quad (5.1.21)$$

Sendo assim, o estado de n -partícula no nível quântico k , pode ser construído a partir de sucessivas aplicações do operador $a^\dagger(\vec{k})$, cujo estado normalizado de n -partículas é tal que

$$|n(\vec{k})\rangle = \frac{[a^\dagger(\vec{k})]^{n(\vec{k})}}{\sqrt{n(\vec{k})!}} |0\rangle . \quad (5.1.22)$$

O operador número de partículas no estado k é

$$N(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) , \quad (5.1.23)$$

cuja equação de autovalor fornece

$$N |n(\vec{k})\rangle = n(\vec{k}) |n(\vec{k})\rangle , \quad n(\vec{k}) = 0, 1, 2, 3, \dots . \quad (5.1.24)$$

De fato, numa generalização direta do oscilador harmônico, podemos interpretar que $a(\vec{k})$ e $a^\dagger(\vec{k})$ são, respectivamente, operadores de aniquilação e criação de partículas no modo \vec{k} .

Os operadores Hamiltoniano e momento do campo, são obtidos respectivamente a partir das integrais espaciais das componentes T_{00} e T_{0i} do tensor energia-momento, os quais são:

$$H = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} [\dot{\varphi} + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2] \quad (5.1.25)$$

$$P = - \int d^3\vec{x} \dot{\varphi} \nabla\varphi . \quad (5.1.26)$$

Substituindo as equações (5.1.16), (5.1.17) e (5.1.18) nas equações acima, obtemos

$$H = \sum_k \omega_k \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (5.1.27)$$

e

$$P = \sum_k \vec{k} \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) . \quad (5.1.28)$$

As equações acima confirmam a nossa interpretação de $N(\vec{k})$ como o operador número de partículas.

As autofunções do operador Hamiltoniano (5.1.27) são dadas por

$$\left| \dots n(\vec{k}) \dots \right\rangle = \prod_k \left| n(\vec{k}) \right\rangle \quad (5.1.29)$$

e os autovalores são

$$\sum_k \omega_k \left(n(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) . \quad (5.1.30)$$

Da equação (5.1.30), vemos que o estado de mais baixa energia do campo de Klein-Gordon, é o estado de vácuo $|0\rangle$, que possui energia infinita igual à $\frac{1}{2} \sum_k \omega_k$. Todavia, como sabemos [50], este valor de energia não faz sentido físico, pois na física, o que medimos são as diferenças de energia. Isto significa que devemos subtrair dos valores de energia, associados a um estado físico, o valor da energia do vácuo, isto é, $E_n - E_0$. Chamamos este procedimento de renormalização.

Um procedimento formal de renormalização, o qual é chamado de ordenamento normal, consiste em ordenar os operadores de aniquilação à direita dos operadores de criação, como exemplificamos abaixo

$$: a(\vec{k}_1)a(\vec{k}_2)a^\dagger(\vec{k}_3) := a^\dagger(\vec{k}_3)a(\vec{k}_1)a(\vec{k}_2), \quad (5.1.31)$$

onde o símbolo “:” representa a ordenação normal dos operadores.

Redefinindo os observáveis como produtos normais, seus valores esperados no vácuo são nulos. Em particular, as equações (5.1.27) e (5.1.28) tornam-se, em uma forma compacta,

$$P^\alpha = (H, P) = \sum_k k^\alpha a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) , \text{ onde } k^\alpha = (\omega_k, \vec{k}) . \quad (5.1.32)$$

Vimos que o número de ocupação das partículas do campo de Klein-Gordon $n(\vec{k})$ pode assumir todos os valores $0, 1, 2, \dots$. Então, estas partículas satisfazem a estatística de Bose-Einstein [54], ou seja, tais partículas são denominadas bósons. Outro fato observado é que os estados de bósons, dados por (5.1.29), são simétricos sob a mudança de rótulos das partículas.

5.1.2 Quantização do campo escalar complexo

O campo real de Klein-Gordon descreve partículas idênticas com spin 0 sem carga. É fácil generalizar isto para partículas que tem um grau de liberdade interno. A generalização mais simples é um dubleto de partículas que pode ser descrito por um campo complexo $\varphi \neq \varphi^*$ (consequentemente os operadores de campo são não-hermitianos: $\varphi \neq \varphi^\dagger$).

Para o campo complexo de Klein-Gordon, a lagrangiana ordenada normalmente é dada por

$$\mathcal{L} =: (\partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi) : , \quad (5.1.33)$$

onde φ^\dagger e φ são tratados como campo independentes. Os dois momentos canonicamente conjugados a φ e φ^\dagger são:

$$\pi(x) = \dot{\varphi}^\dagger(x) , \quad \pi^\dagger(x) = \dot{\varphi}(x) \quad (5.1.34)$$

e as relações de comutação (5.1.7) e (5.1.8) tornam-se

$$[\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}^\dagger(\vec{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (5.1.35)$$

$$[\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] = [\varphi(\vec{x}, t), \varphi^\dagger(\vec{x}', t)] = [\dot{\varphi}(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}', t)] \quad (5.1.36)$$

$$= [\dot{\varphi}(\vec{x}, t), \dot{\varphi}^\dagger(\vec{x}', t)] = [\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}', t)] = 0 .$$

De maneira análoga a (5.1.16), escrevemos as expansões de Fourier dos campos como

$$\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} [a(\vec{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k})e^{ikx}] \quad (5.1.37)$$

$$\varphi^\dagger(x) = \varphi_+^\dagger(x) + \varphi_-^\dagger(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} [b(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}] . \quad (5.1.38)$$

Segue então das equações (5.1.35) e (5.1.36) as seguintes relações de comutação:

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (5.1.39)$$

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [a(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = 0 . \quad (5.1.40)$$

Das relações acima, podemos interpretar $a(\vec{k})$, $a^\dagger(\vec{k})$, $b(\vec{k})$ e $b^\dagger(\vec{k})$, como operadores de aniquilação e criação de dois tipos de partículas, as quais chamamos de partículas do tipo a e do tipo b . Os operadores

$$N_a(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}), \quad N_b(\vec{k}) = b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \quad (5.1.41)$$

são os operadores de número, respectivamente de partículas do tipo a e do tipo b , cujos autovalores são $0, 1, 2, \dots$. Novamente, o espaço de Fock associado pode ser construído, a partir do estado de vácuo $|0\rangle$, o qual, por definição, não contém nenhuma partícula e pode ser representado por

$$a(\vec{k})|0\rangle = b(\vec{k})|0\rangle = 0, \forall \vec{k} . \quad (5.1.42)$$

Em termos dos operadores de criação e aniquilação, o operador energia-momento assume a seguinte forma:

$$P^\alpha(H, \vec{P}) = \sum_k k^\alpha [N_a(\vec{k}) + N_b(\vec{k})] . \quad (5.1.43)$$

Da invariância da lagrangiana (5.1.33) sob transformações globais de fase, isto é, $\varphi \rightarrow e^{-iq\alpha}\varphi$ e $\varphi^\dagger \rightarrow e^{iq\alpha}\varphi^\dagger$, segue o operador conservação de carga Q , pode ser reescrito, usando as equações (2.1.12) e (2.1.13) como

$$Q = -iq \int d^3\vec{x} : [\dot{\varphi}^\dagger(x)\varphi(x) - \dot{\varphi}(x)\varphi^\dagger(x)] : , \quad (5.1.44)$$

que em termos do operador número de partículas fica

$$Q = q \sum_k (N_a(\vec{k}) - N_b(\vec{k})) . \quad (5.1.45)$$

De acordo com a equação acima, devemos associar as cargas $+q$ e $-q$ com as partículas a e b respectivamente. De fato, se trocarmos a por b mudaremos o sinal do operador de carga Q . A carga é a única propriedade que difere as partículas a e b . Essas partículas são interpretadas respectivamente como partícula e antipartícula. No caso do campo escalar real de Klein-Gordon a carga Q é nula, e isto significa que tais campos correspondem a bósons neutros.

Esta noção de carga não é restrita apenas a carga elétrica. Na verdade, a invariância da lagrangiana (5.1.33) por transformações de fase globais pode levar a conservação de outras quantidades, genericamente chamadas de cargas.

5.1.3 O propagador de bósons

O propagador de Feynman associado aos campos de Klein-Gordon, é definido como o valor esperado no vácuo (VEV) do produto ordenado temporalmente dos operadores de campo. Assim,

$$i\Delta_F(x - x') = \langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} | 0 \rangle , \quad (5.1.46)$$

onde

$$T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} = \Theta(t - t') \varphi(x) \varphi(x') + \Theta(t' - t) \varphi(x') \varphi(x) , \quad (5.1.47)$$

sendo $\Theta(x)$ a função de Heaviside [55].

Como exemplo dos propagadores de Feynman iremos tratar com o campo real. Neste caso, podemos mostrar que [50]

$$i\Delta^+(x - x') = -i\Delta^-(x - x') = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(x') | 0 \rangle , \quad (5.1.48)$$

onde

$$\Delta^+(x - x') = -\Delta^-(x - x') = -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{e^{-ik(x-x')}}{\omega_k} . \quad (5.1.49)$$

Desse modo, o propagador de Feynman pode ser escrito da seguinte maneira:

$$i\Delta_F(x - x') = \Theta(t - t') \Delta^+(x - x') + \Theta(t' - t) \Delta^-(x - x') . \quad (5.1.50)$$

A função de Green associada a equação de Klein-Gordon (5.1.11) deve satisfazer, por definição, a seguinte equação diferencial não-homogênea

$$(\square - m^2)G(x, x') = -\delta^{(4)}(x - x') . \quad (5.1.51)$$

Escrevendo a função de Green no espaço dos momentos, através de uma transformação de Fourier temos

$$G(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k G(k) e^{-ik(x-x')} . \quad (5.1.52)$$

Substituindo (5.1.52) em (5.1.51), levando em consideração que $\vec{k}^2 = \omega_k^2 - m^2$, encontramos que

$$G(k) = -\frac{1}{(k^0)^2 - (\omega_k)^2} , \quad (5.1.53)$$

sendo assim, a função de Green dada em (5.1.52) pode ser expressa por

$$G(x, x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \int dk^0 \frac{e^{-ik^0(x-x')}}{(k^0)^2 - (\omega_k)^2} . \quad (5.1.54)$$

A integral em k^0 pode ser calculada através de uma integral de contorno fechado no plano complexo. Como vemos, esta integral apresenta polos em $k^0 = \pm\omega_k$, ou seja, existem dois polos sobre o eixo $Re(k^0)$. Então, para obtermos a equivalência entre a função de Green e o propagador de Feynman, adotaremos a seguinte prescrição: Fechando um contorno no semiplano superior, $+Im(k^0)$, incluiremos o polo $-\omega_k$. Fechando um contorno no semiplano inferior, $-Im(k^0)$, incluiremos o polo $+\omega_k$.

Este procedimento é equivalente a fazer a mudança $\omega_k \rightarrow \omega_k - i\eta$ na equação (5.1.54), onde η é uma quantidade positiva e infinitesimal [50]. Conseqüentemente, podemos escrever a integral em k^0 da seguinte maneira

$$\int dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - (\omega_k - i\eta)^2} = \oint_{Inf} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - (\omega_k - i\eta)^2} - \int_{CI} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - (\omega_k - i\eta)^2} , \quad (5.1.55)$$

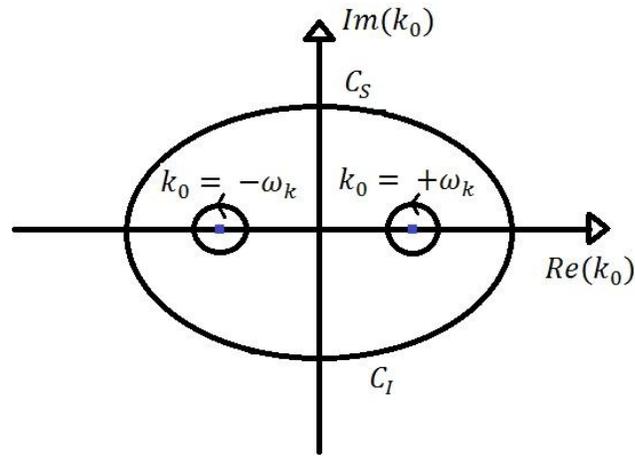


Fig. 5.1: Contornos de integração sobre o plano complexo em k_0 onde, C_S é o semicírculo de integração superior que inclui o polo $-\omega_k$ e exclui o polo $+\omega_k$. E C_I é o contorno inferior que inclui o polo $+\omega_k$ e exclui o polo $-\omega_k$.

ou

$$\int dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - (\omega_k - i\eta)^2} = \oint_{C_{sup}} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - (\omega_k - i\eta)^2} - \int_{C_S} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - (\omega_k - i\eta)^2}, \quad (5.1.56)$$

onde C_S e C_I são os caminhos semicirculares que fecham o contorno nos semiplanos superior e inferior respectivamente, cujos raios são R .

O caminho C_I deve ser escolhido quando $t > t'$, pois, caso $t < t'$, a segunda integral do lado direito da equação (5.1.55) irá divergir. Além disso, a escolha desse contorno está associada a propagação de partículas com energia positiva. Para $t < t'$, o contorno de integração deverá ser fechado no semiplano superior, pelos mesmos motivos acima. Neste caso, este contorno nos permite obter a função de Green associada à propagação de partículas com energia negativa².

De acordo com (5.1.54), a integral em k^0 se estende por todo eixo real, dessa forma teremos que tomar $R \rightarrow \infty$, onde $R = k_0$. Podemos observar que as integrais nos

² Outro contorno de integração diferente do escolhido pode ser feito, porém levaria a funções de Green não causais[50]

caminhos C_I e C_S são nulas. Sendo assim, obtemos

$$\int dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - (\omega_k - i\eta)^2} = \Theta(t-t') \oint_{Inf} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - (\omega_k - i\eta)^2} \quad (5.1.57)$$

$$+ \Theta(t'-t) \oint_{Sup} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - (\omega_k - i\eta)^2} .$$

Do teorema do resíduo, tomando $\eta \rightarrow 0$, obtemos

$$\int dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - (\omega_k - i\eta)^2} = \Theta(t-t') \frac{ie^{-i\omega_k(x^0-x'^0)}}{\omega_k} - \Theta(t'-t) \frac{ie^{i\omega_k(x^0-x'^0)}}{\omega_k} . \quad (5.1.58)$$

Finalmente, substituindo a equação acima em (5.1.54), podemos escrever a função de Green como

$$G(x-x') = \Theta(t-t')\Delta^+(x-x') - \Theta(t'-t)\Delta^-(x-x') . \quad (5.1.59)$$

Comparando (5.1.50) e (5.1.59), vemos que o propagador de Feynman para bósons coincide com a função de Green associada a equação de Klein-Gordon. Além disso, vemos que é possível calcular uma quantidade quântica, como por exemplo $\langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} | 0 \rangle$, a partir da função de Green.

Apesar de desenvolvermos nossas deduções partirem do campo escalar real livre, quando tratamos do campo escalar complexo, interagindo com outros campos de gauge, todos os resultados obtidos, neste caso, permanecem válidos.

5.2 Quantização do campo fermiônico no espaço plano

Como vimos nas relações de comutação (5.1.14) e (5.1.15) para campos escalares os operadores de aniquilação e criação satisfazem um álgebra de Bose-Einstein.... anteriormente que o procedimento de quantização canônica leva a obtenção de bósons. Neste formalismo, os coeficientes da expansão de Fourier satisfazem uma álgebra de comutação semelhante a álgebra obedecida pelos operadores de levantamento e abaixamento do oscilador harmônico quântico não-relativístico.

Na quantização do campo de Dirac, vamos impor que as relações de comutação deverão ser trocadas por relações de anticomutação. De fato, veremos que este formalismo leva à obtenção de férmios.

Supondo que os operadores $a_r, a_r^\dagger \forall r = 1, 2, \dots$, satisfaçam às relações de anticomutação

$$\{a_r, a_s^\dagger\} = \delta_{r,s} , \quad \{a_r, a_s\} = \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0 \quad (5.2.60)$$

e, em particular

$$(a_r)^2 = (a_r^\dagger)^2 = 0 . \quad (5.2.61)$$

Definindo o operador N_r tal que

$$N_r = a_r^\dagger a_r \quad (5.2.62)$$

e usando as relações de anticomutação (5.2.60), mostramos diretamente que

$$[N_r, a_s] = -\delta_{rs} a_s , \quad [N_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs} a_s^\dagger . \quad (5.2.63)$$

Isto nos permite interpretar a_r, a_r^\dagger e N_r como operadores de aniquilação, criação e número de partículas, respectivamente. Além do mais, ainda das relações (5.2.60), chegamos ao seguinte resultado

$$N_r^2 = a_r^\dagger a_r a_r^\dagger a_r = a_r^\dagger (1 - a_r^\dagger a_r) a_r = N_r , \quad (5.2.64)$$

isto é,

$$N_r(N_r - 1) = 0 . \quad (5.2.65)$$

O que significa que, se os operadores de criação e aniquilação anticomutam, o operador número de partículas adquire autovalores $n_r = 0$ e $n_r = 1$. O que significa dizer que estamos tratando com partículas que obedecem a estatística de Fermi-Dirac.

O estado de vácuo é definido, mais uma vez, por

$$a_r |0\rangle = 0 . \quad (5.2.66)$$

O estado r de uma partícula é tal que

$$a_r^\dagger |0\rangle . \quad (5.2.67)$$

Para o estado de duas partículas, temos de (5.2.60) que

$$|1_r, 1_s\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger |0\rangle = -a_s^\dagger a_r^\dagger |0\rangle = -|1_s, 1_r\rangle , \quad (5.2.68)$$

ou seja, os estados são antissimétricos sob troca de partículas. Para $r = s$, temos $|2_r\rangle = (a_r^\dagger)^2 |0\rangle = 0$, estando de acordo com o princípio da exclusão de Pauli.

5.2.1 Segunda quantização

O campo de Dirac descreve partículas elementares carregadas de spin 1/2, a exemplo dos elétrons. Este campo é, na verdade, um campo espinorial de 4 componentes. A equação que governa este campo é a equação de Dirac, que corresponde a uma equação matricial diferencial de primeira ordem. No caso do elétron livre, esta equação é dada por [50][52][51]

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 , \quad (5.2.69)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac, as quais satisfazem as relações de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (5.2.70)$$

e as condições de hermiticidade $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ e $\vec{\gamma}^\dagger = -\vec{\gamma}$ para $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$.

O campo adjunto $\bar{\psi}(x)$ é definido por

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 , \quad (5.2.71)$$

que satisfaz a equação de Dirac adjunta

$$\bar{\psi}(x)(i\partial_\mu \gamma^\mu + m) = 0 . \quad (5.2.72)$$

As equações (5.2.69) e (5.2.72) podem ser derivadas da seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - (\partial_\mu \bar{\psi}(x))\gamma^\mu \psi(x)] - m\bar{\psi}(x)\psi(x) . \quad (5.2.73)$$

Ainda a respeito da equação de Dirac, podemos mencionar que esta prevê a existência de antipartículas, tais como o pósitron que é uma partícula de spin 1/2, cuja massa é igual à do elétron porém possui carga elétrica positiva.

Para quantização do campo de Dirac, vamos expandir o mesmo num conjunto completo de soluções da equação de Dirac e, em seguida, promovê-lo a operador impondo relações de anticomutação apropriadas aos coeficientes da expansão. Um conjunto de completo ortonormal de soluções da equação de Dirac, para cada momento \vec{p} e energia positiva

$$E_p = (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2} \quad (5.2.74)$$

é dada por

$$u_r(\vec{p}) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} , \quad v_r(\vec{p}) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} \quad \forall \quad r = 1, 2 . \quad (5.2.75)$$

Nas expressões acima, $u_r(\vec{p})$ e $v_r(\vec{p})$ são espinores constantes que satisfazem as equações

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)u_r(\vec{p}) = 0, \quad (\gamma^\mu p_\mu - m)v_r(\vec{p}) = 0, \quad r = 1, 2 . \quad (5.2.76)$$

Cujas relações de ortonormalidade são tais que

$$\begin{aligned} u_r^\dagger(\vec{p})u_s(\vec{p}) &= v_r^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \frac{E_p}{m}\delta_{rs} \\ u_r^\dagger(\vec{p})v_s(-\vec{p}) &= 0 . \end{aligned} \quad (5.2.77)$$

De maneira análoga às expansões (5.1.37) e (5.1.38), o operador de campo $\psi(x)$ pode ser expandido em termos do conjunto (5.2.75) onde

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_+(x) + \psi_-(x) \\ &= \sum_{r,\vec{p}} \left(\frac{m}{VE_p} \right)^{1/2} [c_r(\vec{p})u_r(\vec{p})e^{-ipx} + d_r^\dagger(\vec{p})v_r(\vec{p})e^{ipx}] \end{aligned} \quad (5.2.78)$$

e o operador de campo adjunto é dado por

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}_+(x) + \bar{\psi}_-(x) \\ &= \sum_{r,\vec{p}} \left(\frac{m}{VE_p} \right)^{1/2} [d_r(\vec{p})\bar{v}_r(\vec{p})e^{-ipx} + c_r^\dagger(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p})e^{ipx}] , \end{aligned} \quad (5.2.79)$$

onde $\bar{u}_r = u_r^\dagger \gamma^0$ e $\bar{v}_r = v_r^\dagger \gamma^0$.

Sabendo que a equação de Dirac descreve partículas de spin 1/2, as quais obedecem o princípio de Pauli e a estatística de Fermi-Dirac, devemos impor as seguintes relações

de anticomutação aos coeficientes da expansão

$$\{c_r(\vec{p}), c_s^\dagger(\vec{p})\} = \{d_r(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p})\} = \delta_{rs}\delta_{\vec{p}\vec{p}'} \quad (5.2.80)$$

e, para qualquer outra combinação envolvendo os coeficientes c_r , c_r^\dagger , d_r e d_r^\dagger tal relação de anticomutação deve ser nula.

Se definirmos os operadores

$$N_r^{(c)}(\vec{p}) = c_r^\dagger(\vec{p})c_r(\vec{p}), \quad N_r^{(d)}(\vec{p}) = d_r^\dagger(\vec{p})d_r(\vec{p}), \quad (5.2.81)$$

Então interpretamos c_r , c_r^\dagger , $N_r^{(c)}$ como os operadores de aniquilação, criação e número de partículas do tipo c e, d_r , d_r^\dagger , $N_r^{(d)}$ como os operadores de aniquilação, criação e número de partículas do tipo d .

De maneira análoga ao caso bosônico, podemos construir o espaço de Fock associado à férmios, definindo o vácuo como

$$c_r(\vec{p})|0\rangle = d_r(\vec{p})|0\rangle = 0, \quad \text{para todo } \vec{p} \text{ e } r = 1, 2. \quad (5.2.82)$$

Os estados que contém partículas são gerados do vácuo através dos operadores de criação. Os estados do operador número de ocupação, $N(\vec{k})$, são $|\dots n(\vec{k}) \dots\rangle$, onde $n(\vec{k}) = 0, 1$.

O operador Hamiltoniano do campo de Dirac é obtido a partir da componente T_{00} do tensor energia-momento, juntamente com a equação de movimento, o que resulta em [50]

$$H = \int d^3\vec{x} : \{ \bar{\psi}(x)[-i\gamma^j\partial_j + m]\psi(x) \} : , \quad (5.2.83)$$

onde o ordenamento normal foi introduzido pelos mesmo motivos discutidos no tratamento do campo de Klein-Gordon. Desta maneira, substituindo as expansões (5.2.78) e (5.2.79) na equação acima, e usando as relações de ortonormalidade (5.2.77), podemos expressar o operador Hamiltoniano da seguinte forma

$$H = \sum_{r,\vec{p}} E_p [N_r^{(c)}(\vec{p}) + N_r^{(d)}(\vec{p})] . \quad (5.2.84)$$

Frente a uma transformação global de gauge, a lagrangiana (5.2.73) é invariante. Logo existe uma densidade de corrente de Noether conservada, $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, o que implica em uma carga conservada

$$\begin{aligned} Q &= q \int d^3\vec{x} : \psi^\dagger(x)\psi(x) : \\ &= q \sum_{r,\vec{p}} [N_r^{(c)}(\vec{p}) + N_r^{(d)}(\vec{p})] , \end{aligned} \quad (5.2.85)$$

onde na segunda igualdade acima, usamos as expansões dos operadores de campo de Dirac, e suas relações de ortonormalidade.

Se admitirmos que o parâmetro q , na equação anterior, seja a carga do elétron ($q = -e$) e identificarmos m , na equação de Dirac, como a massa do elétron, podemos interpretar as partículas associadas com os operadores c e d como elétrons e pósitrons, respectivamente.

5.2.2 O propagador de férmios

O propagador de Feynman para férmios é definido como uma matriz dada por

$$iS_F(x, x') = \langle 0 | T \{ \psi(x)\bar{\psi}(x') \} | 0 \rangle , \quad (5.2.86)$$

onde definimos o produto de ordenamento temporal como³

$$T \{ \psi(x)\bar{\psi}(x') \} = \Theta(t - t')\psi(x) \otimes \bar{\psi}(x') - \Theta(t' - t)\bar{\psi}(x') \otimes \psi(x) . \quad (5.2.87)$$

Esta definição difere por um fator (-1) , no termo $t' > t$, da definição correspondente ao caso bosônico. Esta mudança de sinal reflete a propriedade de anticomutação do campo fermiônico [50].

Usando as relações de ortonormalidade (5.2.75), podemos mostrar que

$$iS^+(x - x') = \langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \{ \psi_+(x), \bar{\psi}_-(x') \} | 0 \rangle \quad (5.2.88)$$

e

$$iS^-(x - x') = \langle 0 | \bar{\psi}(x')\psi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \{ \psi_-(x'), \bar{\psi}_+(x) \} | 0 \rangle , \quad (5.2.89)$$

³ O símbolo \otimes representa um produto direto

Onde identificamos

$$S^\pm(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta^\pm(x) . \quad (5.2.90)$$

Combinando as equações acima, podemos expressar o propagador de Feynman para férmios da seguinte maneira:

$$S_F(x-x') = \Theta(t-t')S^+(x-x') - \Theta(t'-t)S^-(x-x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta_F(x-x') , \quad (5.2.91)$$

onde $\Delta_F(x-x')$ é o propagador de bósons, definido pela equação (5.1.50).

Para o caso que tratamos de um campo livre, ocorre uma correspondência muito simples entre os propagadores de bósons e de férmios. De fato, se conhecermos a expressão $\Delta_F(x-x')$ podemos calcular o propagador $S_F(x-x')$ usando a equação (5.2.91). O que não ocorre quando tratamos de um campo com interação. Na verdade, quando tratamos de um campo interagindo com um campo de gauge, devemos generalizar o conceito da derivada que aparece em (5.2.91) de modo a incluir essa interação, ou seja, devemos fazer $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$, onde D_μ é a derivada generalizada, assim asseguramos que $S_F(x-x') = (i\gamma^\mu D_\mu + m)\Delta_F(x-x')$ para o caso de interação.

5.3 TQC no espaço-tempo curvo

Nesta seção apresentaremos um breve estudo da teoria quântica de campos no espaço tempo curvo [56][57][58]. Neste formalismo, o espaço-tempo é descrito por um tensor métrico clássico, $g_{\mu\nu}(x)$. Algumas vezes este estudo é chamado de teoria semiclássica, pois quantiza apenas os campos de matéria. Veremos, no decorrer desta breve análise, que considerar um espaço-tempo curvo, ou seja, não Minkowskiano, irá produzir alguns efeitos quânticos novos, tais como criação e aniquilação de partículas e a polarização do vácuo.

5.3.1 Quantização do campo no espaço-tempo curvo

De fato, para realizarmos uma quantização dos campos de matéria no espaço curvo, devemos utilizar de quatro ingredientes básicos para tal construção, são eles:

- A lagrangiana ou, equivalentemente, a equação de movimento da teoria clássica.
- Uma prescrição ou escolha da quantização, por exemplo a quantização canônica.
- A caracterização dos estados.
- A interpretação física de estados observáveis.

No espaço-tempo plano, a invariância de Lorentz nos permite identificar um único estado de vácuo para a teoria. Em um espaço-tempo curvo, não há simetria de Lorentz. Mas a ausência desta simetria não é um problema crucial nos dois primeiros passos listados acima. De fato, as diferenças reais entre os procedimentos de quantização nos espaços plano e curvo aparecem nos dois últimos passos. Em geral, não existe um único estado de vácuo num espaço-tempo curvo. Como resultado, o conceito de partículas torna-se ambíguo, e o problema da interpretação das quantidades físicas torna-se mais difícil.

A maneira de discutir esta questão em mais detalhes é a análise de um modelo em particular. Vamos considerar um campo escalar real e massivo, cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(\partial_\alpha\varphi\partial^\alpha\varphi + m^2\varphi^2 + \xi R\varphi^2) . \quad (5.3.92)$$

A equação de onda correspondente é

$$(\square - m^2 - \xi R)\varphi(x) = 0 , \quad (5.3.93)$$

onde $g = \text{Det}(g_{\mu\nu})$ e $\square = \nabla_\mu\nabla^\mu$ é o operador d'Alembertiano generalizado, R é o escalar de curvatura e ξ é uma nova constante de acoplamento entre o campo escalar e a geometria. O caso em que $\xi = 0$ é conhecido como acoplamento mínimo, e a equação resultante é chamada de Klein-Gordon. Se o termo de massa for nulo, isto é, $m = 0$, a teoria torna-se invariante conforme para $\xi = 1/6$.

Um conceito útil para este sistema é o produto interno de um par de soluções da

equação de Klein-Gordon, o qual é definido por [56]

$$(f_1, f_2) = -i \int_{\Sigma} (f_1 \partial_{\mu} f_2^* - f_2^* \partial_{\mu} f_1) d\Sigma^{\mu} , \quad (5.3.94)$$

onde $d\Sigma^{\mu} \equiv d\Sigma n^{\mu}$, sendo $d\Sigma$ o elemento de volume em uma hipersuperfície tipo-espaço, isto é, uma superfície na qual o intervalo entre dois pontos da mesma é negativo, n^{μ} é o vetor unitário tipo-tempo, ou seja, $|n| = 1$, e normal a hipersuperfície. Um fato interessante é que este produto interno independe da escolha desta hipersuperfície [56] uma vez que as funções anulam-se no infinito.

A quantização de um campo escalar, no espaço curvo, pode ser feita seguindo o procedimento canônico. Inicialmente, devemos escolher uma forma de folhear o espaço-tempo em hipersuperfícies tipo-espaço. Sendo Σ uma hipersuperfície particular com o vetor n^{μ} rotulado por um valor constante da coordenada tempo t , isto é, escolhendo $n^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, a derivada de φ na direção normal é $\dot{\varphi} = n^{\mu} \partial_{\mu} \varphi$, e o momento canônico é definido por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} . \quad (5.3.95)$$

Seguindo o procedimento discutido nas seções anteriores, devemos impor a relação de comutação canônica

$$[\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x}, \vec{x}') , \quad (5.3.96)$$

onde $\delta(\vec{x}, \vec{x}')$ é a função delta na hipersuperfície com a propriedade

$$\int \delta(\vec{x}, \vec{x}') d\Sigma = 1 . \quad (5.3.97)$$

Considerando que $\{f_j\}$ é um conjunto completo de soluções da equação (5.3.93), $\{f_j^*\}$ será um conjunto de soluções com norma negativa e $\{f_j, f_j^*\}$ formará um conjunto completo de soluções da equação de onda, em termos do qual podemos expandir uma solução arbitrária. Desse modo, seguindo o mesmo procedimento visto nas seções anteriores, devemos escrever o operador de campo φ como uma soma de operadores de criação e aniquilação, como segue:

$$\varphi = \sum_j (a_j f_j + a_j^{\dagger} f_j^*) , \quad (5.3.98)$$

onde $[a_j, a_j^\dagger] = \delta_{jj'}$. Esta expansão define o estado de vácuo $|0\rangle$ por $a_j|0\rangle = 0$. No espaço-tempo plano, escolhemos as soluções de norma positiva como soluções de frequência positiva, $f_j \propto e^{-i\omega t}$. Indiferente ao referencial de Lorentz escolhido, no qual t é a coordenada temporal, este procedimento define um único estado de vácuo de Minkowski. Em outras palavras, podemos dizer que, no espaço plano, a escolha de $\{f_j\}$ é única.

No espaço-tempo curvo, a situação é completamente diferente. Não existe, em geral, uma única escolha de $\{f_j\}$ e, logo, não existe um único estado de vácuo. Isto significa que não podemos identificar um estado de vácuo univocamente, e a noção de partícula torna-se ambígua. Esta não unicidade é responsável por algumas consequências físicas, tais como o fenômeno de criação de partículas.

5.3.2 Criação de partículas e polarização do vácuo

Criação de partículas

Vamos considerar um espaço-tempo que assintoticamente seja plano no passado e no futuro, e curvo na região intermediária. Seja $\{f_j\}$ as soluções com frequências positivas no passado (região-*in*), e seja $\{F_j\}$ as soluções com frequências positivas no futuro (região-*out*). Admitindo que estes conjuntos de soluções são ortonormais, segundo as equações (5.3.94) e (5.3.96), temos

$$\begin{aligned} (f_j, f_{j'}) &= (F_j, F_{j'}) = \delta_{jj'} \\ (f_j^*, f_{j'}^*) &= (F_j^*, F_{j'}^*) = -\delta_{jj'} \\ (f_j, f_{j'}^*) &= (F_j, F_{j'}^*) = 0. \end{aligned} \tag{5.3.99}$$

Como os conjuntos são completos, podemos escrever um em termo do outro. Como exemplo, podemos expandir os modos *in* em termos dos modos *out*, ou seja,

$$f_j = \sum_k (\alpha_{jk} F_k + \beta_{jk} F_k^*). \tag{5.3.100}$$

Utilizando as relações (5.3.99) na equação anterior obtemos as seguintes condições:

$$\sum_k (\alpha_{jk} \alpha_{j'k}^* - \beta_{jk} \beta_{j'k}^*) = \delta_{jj'} \quad (5.3.101)$$

e

$$\sum_k (\alpha_{jk} \alpha_{j'k} - \beta_{jk} \beta_{j'k}) = 0. \quad (5.3.102)$$

A expansão inversa é

$$F_k = \sum_j (\alpha_{jk} f_j + \beta_{jk} f_j^*). \quad (5.3.103)$$

Assim, o operador de campo φ pode ser escrito em termos de ambos os conjuntos, isto é,

$$\varphi = \sum_j (b_j F_j + b_j F_j^*) = \sum_j (a_j f_j + a_j f_j^*). \quad (5.3.104)$$

Os operadores a_j e a_j^\dagger são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação na região *in*, enquanto que b_j e b_j^\dagger são os operadores correspondentes na região *out*. O estado de vácuo é definido então como $a_j |0\rangle = 0 \forall j$, e descreve a situação em que nenhuma partícula está presente inicialmente. O estado de vácuo na região *out* é definido por $b_j |0\rangle = 0 \forall j$, descrevendo assim a situação em que nenhuma partícula está presente em um tempo futuro. Tomando em nota que $a_j = (\varphi, f_j)$ e $b_j = (\varphi, F_j)$, podemos expandir um conjunto de operadores em termos do outro, ou seja,

$$a_j = \sum_k (\alpha_{jk}^* b_k - \beta_{jk}^* b_k^\dagger) \quad \text{e} \quad b_k = \sum_j (\alpha_{jk}^* a_j - \beta_{jk}^* a_j^\dagger). \quad (5.3.105)$$

Esta transformação é chamada de transformação de Bogoliubov, e os coeficientes α_{jk} e β_{jk} são chamados de coeficientes de Bogoliubov [58].

Agora podemos descrever o fenômeno físico de criação de partículas por um campo gravitacional dependente do tempo. Vamos admitir que nenhuma partícula está presente antes do campo gravitacional ser “ligado”. Se adotarmos a descrição de Heisenberg, o estado $|0\rangle_{in}$ será o estado do sistema em qualquer instante de tempo. No entanto, o operador número, que conta partículas na região *out* é $N_k^b = b_k^\dagger b_k$. Desta

forma, o número médio de partículas criadas no modo k será

$$\langle N_k^b \rangle_{in} = \langle 0 | b_k^\dagger b_k | 0 \rangle_{in} = \sum_j |\beta_{jk}|^2 . \quad (5.3.106)$$

Então podemos observar que, se os coeficientes β_{jk} são diferentes de zero, ocorrerá o fenômeno de criação de partículas. Uma aplicação direta dos conceitos discutidos acima é a criação de partículas por um universo em expansão [59].

Polarização do vácuo

A ideia de vácuo em uma teoria quântica de campos, difere essencialmente da noção de vazio da física clássica. O estado de vácuo, como vimos, corresponde ao estado do operador número de partículas cujo autovalor do mesmo é nulo. De acordo com a ideia de Dirac para férmios, o estado de vácuo quântico é um estado cujos níveis de energia negativa estão ocupados, de acordo com o princípio de exclusão de Pauli, e todos os níveis de energia positiva estão vazios [52][51]. Todavia, o estado de vácuo depende de campos externos, e este fenômeno se manifesta no cálculo dos VEVs de operadores bilineares nos campos:

$$\langle A(x) \rangle = \sum_k A \left\{ \varphi_k^{(-)}(x), \varphi_k^{(+)}(x) \right\} , \quad (5.3.107)$$

onde $A(f, g)$ pode ser um operador diferencial bilinear.

O efeito da polarização do vácuo é mais comumente associado às flutuações do vácuo de campos de matéria na presença de interações eletromagnéticas externas, como vemos na QED [50]. Estas flutuações surgem da interação do campo eletromagnético com as partículas que constituem o “mar de Dirac”. Em particular, o cálculo da função de Green associada ao campo eletromagnético,

$$\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle = G_{\mu\nu}(x, x') , \quad (5.3.108)$$

apresenta um resultado formalmente divergente em teoria de perturbação. Para obtermos assim, um resultado finito para esta função, devemos renormalizá-la, que neste

caso tal processo de renormalização consiste numa redefinição da carga elétrica do elétron [52].

As flutuações quânticas de campos de matéria na presença de campos de fundo gravitacionais (clássicos), são também denominadas de polarização do vácuo. Neste caso, o cálculo do VEV do operador energia-momento $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ também é formalmente divergente. Mais uma vez, de modo a obtermos um resultado finito bem definido, devemos realizar um processo de renormalização. Fazendo isto, as contribuições espúrias são absorvidas nas redefinições da constante gravitacional e cosmológica. Além do mais, surgem termo quadráticos nos tensores de Riemann, Ricci e no escalar de curvatura, dos quais estão ausentes na teoria clássica de Einstein [58]. Este formalismo torna-se evidente quando consideramos o VEV do tensor energia-momento como fonte no lado direito da equação semiclássica de Einstein, ou seja,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle . \quad (5.3.109)$$

Contudo, o VEV do tensor energia-momento renormalizado, deve satisfazer ainda restrições de modo a manter o princípio de covariância geral e ser conservado.

6. A CORRENTE FERMIONICA INDUZIDA POR UM TUBO DE CAMPO MAGNÉTICO NO ESPAÇO-TEMPO DA CORDA CÓSMICA

Neste capítulo temos como objetivo estudar a corrente fermiônica induzida, $\langle j^\mu \rangle$, devido à um tubo de fluxo magnético de extensão finita a no espaço-tempo gerado por uma corda cósmica ideal. Para esse fim consideramos três configurações distintas de campo magnético: (i) Na forma de uma casca cilíndrica de raio a , (ii) um campo magnético que decai com $1/r$ e (iii) um campo magnético homogêneo constante [35].

Nielsen e Olesen [29] mostraram, partindo do modelo abeliano com quebra espontânea de simetria, que este sistema apresenta soluções com simetria cilíndrica carregando um fluxo magnético ao longo do eixo de simetria. Estas configurações correspondem as soluções de vórtices encontradas por Abrikosov [28]. A análise da influência deste sistema na geometria do espaço tempo foi analisada por Garfinkle [30] e Laguna [31]. E, em seus trabalhos, os autores acoplaram o tensor energia-momento, associado ao modelo de Nielsen-Olesen, às equações de campo de Einstein. Assim, mostraram que o vórtice possui um estrutura interna caracterizada pelo fluxo magnético não-nulo que corre ao longo da mesma, cuja extensão é determinada pela escala de energia na qual a simetria é quebrada.

Dois comprimentos de escala aparecem naturalmente, um relacionado com a extensão do fluxo magnético que, por sua vez, é proporcional ao inverso da massa do campo vetorial, m_v , que adquire massa devido ao mecanismo de Higgs. E o outro associado com o inverso da massa do campo escalar, m_s , este último, como sendo uma medida do ponto onde o campo escalar decai para o seu valor de vácuo. Além do mais, os autores também analisaram a geometria do espaço-tempo e verificaram que

assintoticamente a superfície perpendicular ao vórtice corresponde ao espaço-tempo de Minkowski menos uma fatia, o que acarreta num espaço com um déficit angular.

Nosso modelo baseia-se na aproximação onde tomamos, $m_s \gg m_v$, e que as energias associadas aos férmios sejam menores que a massa do campo escalar. Sendo assim, o comprimento de escala que delimita a estrutura interna da corda cósmica, proporcional ao inverso de m_s , se torna muito menor que o comprimento de escala que delimita a extensão do fluxo magnético, que é proporcional ao inverso de m_v . Logo, podemos desprezar a estrutura interna da corda cósmica tratando-a como uma corda cósmica ideal, que será circundada por uma estrutura de campo magnético em forma tubo cilíndrico de alcance a , coaxial a corda cósmica ideal.

6.1 *A geometria da variedade e a obtenção das funções de onda*

O arcabouço geométrico associado com uma corda cósmica ideal disposta ao longo do eixo z pode ser estudada, em coordenadas cilíndricas, através do seguinte elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2 , \quad (6.1.1)$$

onde, $(t, z) \in [-\infty, +\infty]$, $r \geq 0$ e $\phi \in [0, 2\pi/q]$. Como vimos, o parâmetro q , associado com o déficit de ângulo planar, é relacionado com a densidade linear de massa da corda, μ , através das seguintes equação

$$q^{-1} = 1 - 4\mu . \quad (6.1.2)$$

Por outro lado, visto que, a dinâmica quântica de uma campo espinorial com massa, acoplado com um campo de gauge A^μ no espaço-tempo curvo, é regida pela equação de Dirac na forma

$$[i\gamma^\mu(\nabla_\mu + ieA_\mu) - m]\psi(x) = 0 , \quad (6.1.3)$$

sendo $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$. Onde Γ_μ é a conexão espinorial e γ^μ são as matrizes de Dirac no espaço-tempo curvo, ambas relacionadas com as matrizes de Dirac $\gamma^{(a)}$ no espaço-

tempo de Minkowski através das seguintes equações.

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\gamma^{(a)}\gamma^{(b)}e_{(a)}^\nu e_{(b)\nu;\mu}, \quad \gamma^\mu = e_{(a)}^\mu\gamma^{(a)}. \quad (6.1.4)$$

Nas expressões acima, $e_{(a)}^\mu$ representa as bases tétradas que satisfazem a relação $e_{(a)}^\mu e_{(b)\nu} \eta^{ab} = g^{\mu\nu}$, visto que, η^{ab} e $g^{\mu\nu}$ são os tensores métricos no espaço-tempo de Minkowski e no espaço-tempo curvo, respectivamente.

Especificamente, estaremos interessados no espaço-tempo gerado por uma corda cósmica ideal, cujo tensor métrico é dado por (6.1.1).

O sistema que vamos analisar leva em consideração três configurações de campo magnético diferentes. São eles: (i) Um campo magnético na forma de uma casca cilíndrica de raio a , isto é, um campo magnético que está distribuído sobre uma superfície cilíndrica de raio finito, (ii) um campo magnético que decai com $1/r$ e, por fim, (iii) um campo magnético cilíndrico constante de raio a . Nesses três casos, o eixo de simetria do campo magnético coincide com o eixo da corda cósmica. A estrutura de campo magnética coaxial a distribuição da corda cósmica ideal pode ser ilustradas segundo a figura abaixo.

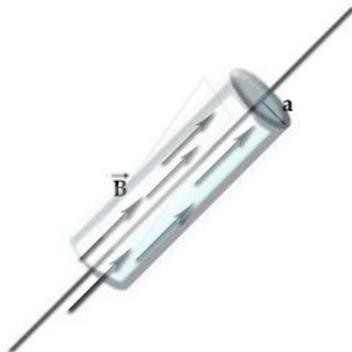


Fig. 6.1: Ilustração da estrutura cilíndrica de campo magnético com raio fixo a coaxial à distribuição da corda cósmica.

O quadri-potencial vetor, capaz de gerar tais modelos aproximados, é especificada como se segue:

$$A_\mu = (0, 0, A_\phi(r), 0), \quad (6.1.5)$$

com

$$A_\phi(r) = -\frac{q\Phi}{2\pi}a(r) . \quad (6.1.6)$$

Deste modo, para o primeiro modelo temos

$$a(r) = \Theta(r - a) . \quad (6.1.7)$$

Como dizemos anteriormente, a configuração acima representa um campo magnético proporcional à $\delta(r - a)$. Obviamente isto é um modelo aproximado para descrever um campo magnético altamente concentrado em um cilindro de raio a . E, para o segundo e terceiro modelo temos

$$a(r) = f(r)\Theta(a - r) + f(r)\Theta(r - a) , \quad (6.1.8)$$

em que

$$f(r) = \begin{cases} r/a, & \text{para o segundo modelo ,} \\ r^2/a^2, & \text{para o terceiro modelo .} \end{cases} \quad (6.1.9)$$

Nas expressões acima, $\Theta(z)$ é a função de Heaviside [55], e Φ é o fluxo magnético.

Com o objetivo de obter um conjunto completo de funções de onda de Dirac adotaremos a seguinte base tétrada:

$$e^\mu_{(a)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q\phi) & -\sin(q\phi)/r & 0 \\ 0 & \sin(q\phi) & \cos(q\phi)/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (6.1.10)$$

Desta maneira, utilizando a relação (6.1.4) e as formas explícitas das matrizes de Dirac no espaço plano, (4.2.9), podemos expressar as matrizes de Dirac no sistema de coordenadas cilíndricas, adequado ao problema proposto, da seguinte forma

$$\gamma^0 = \gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^l = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^l \\ -\sigma^l & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.1.11)$$

onde introduzimos, em coordenadas cilíndricas, as matrizes de Pauli 2×2 , σ^l para $l = (r, \phi, z)$:

$$\sigma^r = \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ e^{iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\phi = -\frac{i}{r} \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ -e^{iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.1.12)$$

Sendo assim, para a conexão espinorial e o termo que a acopla com as matrizes de Dirac, podemos escrever

$$\Gamma_\mu = \frac{1-q}{2} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \delta_\mu^\phi, \quad \gamma^\mu \Gamma_\mu = \frac{1-q}{2r} \gamma^r. \quad (6.1.13)$$

Então, a equação de Dirac toma a seguinte forma

$$\left(\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + \frac{1-q}{2r} \gamma^r + im \right) \psi = 0. \quad (6.1.14)$$

Para obtermos as soluções de energia positiva da equação de Dirac, assumindo que a dependência temporal das autofunções sejam da forma e^{-iEt} e decomposmos o espinor $\psi(x)$ em dois espinores menores de duas componentes, sendo $\varphi(x)$ a componente superior e $\chi(x)$ a componente inferior.

$$\psi(x) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (6.1.15)$$

Este procedimento para resolvermos a equação de Dirac é bem conhecido na literatura, e pode ser visto na referência [52], tratado para o caso mais simples, que consiste na solução da equação de Dirac para um férmio livre.

Fazendo isto, para as soluções de energia positiva encontramos as seguintes equações,

$$(E - m)\varphi(x) + i \left[\sigma^l (\partial_l + ieA_l) + \frac{1-q}{2r} \sigma^r \right] \chi(x) = 0, \quad (6.1.16)$$

$$(E + m)\chi(x) + i \left[\sigma^l (\partial_l + ieA_l) + \frac{1-q}{2r} \sigma^r \right] \varphi(x) = 0. \quad (6.1.17)$$

De (6.1.17), escrevemos a função $\chi(x)$ em termos de $\varphi(x)$ e, em seguida, substituímos o resultado em (6.1.16). Com isso, obtemos uma equação diferencial de segunda ordem para o espinor $\varphi(x)$:

$$\left[r^2 \partial_r^2 + r \partial_r + \left(\partial_\phi + ieA_\phi - i \frac{1-q}{2} \sigma^z \right)^2 + r^2 (\partial_z^2 + E^2 - m^2) - \frac{e}{r} \sigma^z \partial_r A_\phi \right] \varphi(x) = 0. \quad (6.1.18)$$

Notemos que, em (6.1.16) poderíamos explicitar $\varphi(x)$ em termos de $\chi(x)$, e substituir o resultado em (6.1.17), ainda assim obteríamos a mesma equação acima, trocando

apenas $\varphi(x)$ por $\chi(x)$. Então, podemos expressar uma solução geral para $\varphi(x)$ e $\chi(x)$ em termos do seguinte ansatz,

$$\varphi(x) = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} R_1(r)e^{iqn_1\phi} \\ R_2(r)e^{iqn_2\phi} \end{pmatrix}, \quad (6.1.19)$$

$$\chi(x) = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} R_3(r)e^{iqn_1\phi} \\ R_4(r)e^{iqn_2\phi} \end{pmatrix}, \quad (6.1.20)$$

onde usamos $p \cdot x = Et - kz$, sendo k o momento ao longo do eixo z . Desta forma, este ansatz preserva a simetria cilíndrica da teoria.

Além disso, impomos que nossas soluções sejam autofunções do operador momento angular total na direção z , isto é,

$$\hat{J}_z \psi = \left(-i\partial_\phi + i\frac{q}{2}\gamma^{(1)}\gamma^{(2)} \right) \psi = qj\psi, \quad (6.1.21)$$

onde

$$j = n + 1/2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6.1.22)$$

com isso obtemos que $n_2 = n_1 + 1$ ¹.

Para construirmos o conjunto completo de funções de onda da equação de Dirac, devemos considerar, separadamente, a equação (6.1.18) nas regiões em que $r < a$ (região-*in*) e $r > a$ (região-*ext*). Para a região-*in* temos três configurações distintas de campo magnético especificadas pelo potencial vetor de acordo com as equações (6.1.6) a (6.1.8). Tais configurações de campo magnético foram usadas em [60] para analisar, no background da mecânica quântica não relativística, o movimento de uma partícula carregada de spin 1/2 com uma razão giromagnética $g \neq 2$ interagindo com um campo magnético e considerando a presença de uma interação de dipolo magnético. Entretanto, no âmbito da mecânica quântica relativística, uma análise dessa interação foi desenvolvida em [61], onde o autor considerou apenas duas configurações de campo magnético, que foi a configuração de um campo homogêneo e de uma casca cilíndrica com um distribuição tipo delta de Dirac.

¹ A partir daqui usaremos a seguinte notação: $n_1 = n$ and $n_2 = n + 1$.

Para a região-*ext*, isto é, $r > a$, O potencial vetor toma seguinte forma segundo (6.1.7) e (6.1.8):

$$A_\phi = -\frac{q\Phi}{2\pi}, \quad (6.1.23)$$

sendo Φ o fluxo de campo magnético. Então, a equação (6.1.18) pode ser escrita como

$$\left[r^2 \partial_r^2 + r \partial_r + \left(\partial_\phi + ieA_\phi - i \frac{1-q}{2} \sigma^z \right)^2 + r^2 (\partial_z^2 + E^2 - m^2) \right] \varphi(x) = 0. \quad (6.1.24)$$

Substituindo (6.1.23) em (6.1.24) encontramos a solução externa para a função de onda de Dirac, com energia positiva, dada em termos das funções de Bessel, $J_\mu(z)$, e de Neumann, $Y_\mu(z)$:

$$\varphi(x) = e^{-ip \cdot x} e^{iqn\phi} \left(\begin{array}{c} C_1 J_{\beta_j}(\lambda r) + D_1 Y_{\beta_j}(\lambda r) \\ [C_2 J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) + D_2 Y_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r)] e^{iq\phi} \end{array} \right). \quad (6.1.25)$$

Procedendo de maneira similar para a componente inferior encontramos que

$$\chi(x) = e^{-ip \cdot x} e^{iqn\phi} \left(\begin{array}{c} A_1 J_{\beta_j}(\lambda r) + B_1 Y_{\beta_j}(\lambda r) \\ [A_2 J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) + D_2 Y_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r)] e^{iq\phi} \end{array} \right), \quad (6.1.26)$$

onde λ é o momento associado ao plano ortogonal à corda cósmica, com $n = j - 1/2$ sendo um número inteiro. Assim, definimos a seguinte quantidade: $\epsilon_j = 1$ para $j \geq -\alpha$ e $\epsilon_j = -1$ para $j < -\alpha$. Sendo $\alpha = eA_\phi/q = -\Phi/\Phi_0$, com $\Phi_0 = 2\pi/e$ definindo o fluxo quântico e

$$\beta_j = q|j + \alpha| - \frac{\epsilon_j}{2}. \quad (6.1.27)$$

Como podemos ver, foi introduzido um conjunto de oito constantes arbitrárias C_i , D_i , A_i e B_i com $i = 1, 2$ para a solução geral acima.

A energia é expressa em termos de λ , k e m pela relação

$$E = \sqrt{\lambda^2 + k^2 + m^2}. \quad (6.1.28)$$

Nós podemos encontrar uma relação entre as constantes das componentes superior e inferior do espinor de Dirac utilizando (6.1.16) e (6.1.17). Tais relações são dadas por

$$A_1 = \frac{kC_1 - i\epsilon_j \lambda C_2}{E + m}, \quad A_2 = -\frac{kC_2 - i\epsilon_j \lambda C_1}{E + m} \quad (6.1.29)$$

$$B_1 = \frac{kD_1 - i\epsilon_j\lambda D_2}{E + m}, \quad B_2 = -\frac{kD_2 - i\epsilon_j\lambda D_1}{E + m}. \quad (6.1.30)$$

Além do mais, para uma caracterização futura mais específica das autofunções, impondo uma condição extra que relaciona as constantes supracitadas. Como tal condição, seguindo [62], requeremos que a seguinte relação entre as componentes superior e inferior seja tal que:

$$R_3(r) = \rho_s R_1(r), \quad R_4(r) = -\frac{R_2(r)}{\rho_s}, \quad (6.1.31)$$

com

$$\rho_s = \frac{E + s\sqrt{\lambda^2 + m^2}}{k}, \quad s = \pm 1. \quad (6.1.32)$$

Fazendo isto, é possível obter as seguintes relações

$$A_1 = \rho_s C_1, \quad A_2 = -C_2/\rho_s, \quad (6.1.33)$$

$$B_1 = \rho_s D_1, \quad B_2 = -D_2/\rho_s. \quad (6.1.34)$$

Desta forma, as soluções com energia positiva, na região-*ext*, para a equação de Dirac, especificadas pelo conjunto de números quânticos $\sigma = (\lambda, j, k, s)$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\psi_{\sigma(ext)}^{(+)}(x) = e^{-ip \cdot x} e^{iqn\phi} \begin{pmatrix} C_1 J_{\beta_j}(\lambda r) + D_1 Y_{\beta_j}(\lambda r) \\ i\epsilon_j \rho_s b_s^{(+)} [C_1 J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) + D_1 Y_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r)] e^{iq\phi} \\ \rho_s [C_1 J_{\beta_j}(\lambda r) + D_1 Y_{\beta_j}(\lambda r)] \\ -i\epsilon_j b_s^{(+)} [C_1 J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) + D_1 Y_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r)] e^{iq\phi} \end{pmatrix}, \quad (6.1.35)$$

onde introduzimos

$$b_s^{(\pm)} = \frac{\pm m + s\sqrt{\lambda^2 + m^2}}{\lambda}. \quad (6.1.36)$$

Para a região-*in*, isto é, $r < a$, temos três configurações de campo magnético diferentes, como mencionamos anteriormente. Desta maneira, obteremos três soluções gerais diferentes para a região interna a partir de (6.1.18). Primeiramente, vamos nomear cada uma dessas funções radiais por $R_l^{(i)}$, onde $i = 1, 2, 3$, é o índice associado com o modelo e, $l = 1, 2, 3, 4$ o índice que especifica a componente do espinor. Usando a expressão geral para a componente azimutal do quadri-potencial (6.1.5), é

possível mostrar que as relações (6.1.31) e (6.1.32) se preservam. Então, usando as relações (6.1.16) e (6.1.17) entre as componentes superior e inferior do campo espinorial, podemos escrever o campo espinorial com energia positiva, na região-*in*, na forma geral, como se segue:

$$\psi_{i(in)}^{(+)}(x) = C^{(i)} e^{-ip \cdot x} e^{iqn\phi} \begin{pmatrix} R_1^{(i)}(\lambda, r) \\ i\rho_s b_s^{(+)} R_2^{(i)}(\lambda, r) e^{iq\phi} \\ \rho_s R_1^{(i)}(\lambda, r) \\ -ib_s^{(+)} R_2^{(i)}(\lambda, r) e^{iq\phi} \end{pmatrix}. \quad (6.1.37)$$

Os coeficiente C_1 e D_1 em (6.1.35) e, $C^{(i)}$ em (6.1.37) são determinados partindo da condição de continuidade da função de onda fermiônica em $r = a$. Após alguns cálculos algébricos intermediários, escrevemos

$$C_1 = -\frac{\pi}{2}(\lambda a) C^{(i)} R_1^{(i)}(\lambda, a) \tilde{Y}_{\beta_j}(\lambda a), \quad (6.1.38)$$

$$D_1 = \frac{\pi}{2}(\lambda a) C^{(i)} R_1^{(i)}(\lambda, a) \tilde{J}_{\beta_j}(\lambda a), \quad (6.1.39)$$

onde

$$\tilde{Z}_{\beta_j}(z) = \epsilon_j Z_{\beta_j + \epsilon_j}(z) - \mathcal{V}_j^{(i)}(\lambda, a) Z_{\beta_j}(z), \quad \text{with } \mathcal{V}_j^{(i)}(\lambda, a) = \frac{R_2^{(i)}(\lambda, a)}{R_1^{(i)}(\lambda, a)}. \quad (6.1.40)$$

Em (6.1.40) Z_μ representa as funções de Bessel J_μ ou Y_μ . Com esta notação, toda informação a respeito da estrutura interna, delimitada pela forma do campo magnético, fica contida no coeficiente $\mathcal{V}_j^{(i)}$.

Finalmente, a constante $C^{(i)}$ pode ser obtida partindo da condição de normalização da função de onda

$$\int d^3x \sqrt{g^{(3)}} (\psi_\sigma^{(+)})^\dagger \psi_{\sigma'}^{(+)} = \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (6.1.41)$$

onde $\delta_{\sigma, \sigma'}$, do lado direito da igualdade, pode ser compreendido como a função delta de Dirac para os números quânticos contínuos λ e k , e como uma delta de Kronecker para os índices discretos n e s , onde $g^{(3)}$ é o determinante da parte espacial do tensor métrico. A integral sobre a coordenada radial deve ser feita sobre o intervalo $[0, \infty)$.

Devido a simetria cilíndrica do sistema podemos escrever o campo espinorial em uma

forma geral, como segue-se abaixo:

$$\psi_{\sigma}^{(+)}(x) = e^{-ip \cdot x} e^{iqn\phi} \begin{pmatrix} F_1(\lambda, r) \\ i\rho_s b_s^{(+)} F_2(\lambda, r) e^{iq\phi} \\ \rho_s F_1(\lambda, r) \\ -ib_s^{(+)} F_2(\lambda, r) e^{iq\phi} \end{pmatrix}. \quad (6.1.42)$$

Consequentemente de (6.1.41) obtemos,

$$(1 + \rho_s^2) \left[\int_0^{\infty} dr r F_1^*(\lambda, r) F_1(\lambda', r) + (b_s^{(+)})^2 \int_0^{\infty} dr r F_2^*(\lambda, r) F_2(\lambda', r) \right] = \frac{q}{(2\pi)^2} \delta(\lambda - \lambda') \quad (6.1.43)$$

A integral sobre a região interior é finita, consequentemente, a contribuição dominante em (6.1.43) para $\lambda' = \lambda$ vem da integração na região exterior à estrutura de campo magnético. Utilizando as integrais padrão envolvendo as funções de Bessel, com simetria cilíndrica, encontramos

$$(2\pi)^2 [|C_1|^2 + |D_1|^2] = \frac{q\lambda}{(1 + \rho_s^2)(1 + (b_s^{(+)})^2)}. \quad (6.1.44)$$

Substituindo (6.1.38) e (6.1.39) na expressão acima chegamos na relação:

$$C^{(i)} R_1^{(i)}(\lambda, a) = \Xi(\lambda, a), \quad (6.1.45)$$

com

$$\Xi(\lambda, a) = \frac{1}{a\pi^2} \left[\frac{q}{\lambda} \frac{1}{(1 + \rho_s^2)} \frac{1}{(1 + (b_s^{(+)})^2)} \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{(\tilde{Y}_{\beta_j}(\lambda a))^2 + (\tilde{J}_{\beta_j}(\lambda a))^2}}. \quad (6.1.46)$$

Esta relação determina a constante de normalização para função de onda interior, região-*in*. Com esta normalização construímos o espinor de função de onda para a região-*ext*, $r > a$:

$$\psi_{\sigma(ext)}^{(+)}(x) = C^{(+)} e^{-ip \cdot x} e^{iqn\phi} \begin{pmatrix} g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) \\ i\epsilon_j \rho_s b_s^{(+)} g_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda a, \lambda r) e^{iq\phi} \\ \rho_s g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) \\ -i\epsilon_j b_s^{(+)} g_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda a, \lambda r) e^{iq\phi} \end{pmatrix}, \quad (6.1.47)$$

onde introduzimos a notação,

$$C^{(+)} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{q\lambda}{(1 + \rho_s^2)(1 + (b_s^{(+)})^2)} \right]^{1/2}, \quad (6.1.48)$$

$$g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) = \frac{\tilde{Y}_{\beta_j}(\lambda a)J_{\beta_j}(\lambda r) - \tilde{J}_{\beta_j}(\lambda a)Y_{\beta_j}(\lambda r)}{\sqrt{(\tilde{Y}_{\beta_j}(\lambda a))^2 + (\tilde{J}_{\beta_j}(\lambda a))^2}} \quad (6.1.49)$$

e

$$g_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda a, \lambda r) = \frac{\tilde{Y}_{\beta_j}(\lambda a)J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) - \tilde{J}_{\beta_j}(\lambda a)Y_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r)}{\sqrt{(\tilde{Y}_{\beta_j}(\lambda a))^2 + (\tilde{J}_{\beta_j}(\lambda a))^2}}. \quad (6.1.50)$$

Seguindo o mesmo procedimento, podemos encontrar as soluções com energia negativa tanto para a região-*in* como para a região-*ext*. Uma vez que, os VEVs calculados nesse trabalho serão desenvolvidos utilizando o método de soma sobre os modos normalizados da função de onda fermiônica, podemos escrever as soluções com energia positiva e energia negativa, na região-*ext*, para a equação de Dirac, da seguinte forma

$$\psi_{\sigma(ext)}^{(\pm)}(x) = C^{(\pm)} e^{\mp i p \cdot x} e^{i q(j-1/2)\phi} \begin{pmatrix} g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) , \\ \pm i \epsilon_j \rho_s b_s^{(\pm)} g_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda a, \lambda r) e^{i q \phi} \\ \rho_s g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) \\ \mp i \epsilon_j b_s^{(\pm)} g_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda a, \lambda r) e^{i q \phi} \end{pmatrix}, \quad (6.1.51)$$

onde $C^{(-)} = (C^{(+)})^\dagger b_s^{(+)}$, logo de forma compacta temos

$$C^{(\pm)} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{q\lambda}{(1 + \rho_s^2) (1 + (b_s^{(\pm)})^2)} \right]^{1/2}. \quad (6.1.52)$$

De posse das funções de onda com energia negativa na região-*ext*, isto é, para $r > a$, podemos então investigar as propriedades do vácuo fermiônico interagindo com um campo eletromagnético externo no espaço tempo curvo, neste caso, numa topologia cônica devido a presença da corda cósmica.

6.2 A corrente fermiônica induzida

Nosso objetivo principal nesta seção, é investigar a densidade de corrente induzida no vácuo fermiônico devido a topologia do espaço-tempo e da interação com o campo de gauge abeliano, neste caso um campo eletromagnético externo com simetria cilíndrica.

Na seção anterior construímos um conjunto completo de funções de onda com energia positiva e energia negativa nas regiões em que $r \leq a$ e $r > a$, uma vez que vamos expandir o operador de campo segundo (5.2.78). Feito isto, nesta seção

desenvolveremos o VEV do operador densidade de corrente fermiônica, $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, utilizando o método da soma dos modos normalizados da função de onda,

$$\langle 0|j^\mu(x)|0\rangle = \langle j^\mu(x)\rangle = e \sum_{\sigma} \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}(x)\gamma^\mu\psi_{\sigma}^{(-)}(x) , \quad (6.2.53)$$

aqui, usamos a notação compacta definida por

$$\sum_{\sigma} = \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk \sum_{j=\pm 1/2, \dots} \sum_{s=\pm 1} . \quad (6.2.54)$$

Nas subseções a seguir, iremos calcular separadamente todas as componentes do VEV do operador densidade de corrente. Como veremos no decorrer destas subseções, desenvolveremos nossa análise mostrando que a corrente induzida no vácuo poderá ser decomposta em duas partes: A primeira devido a presença de uma corda cósmica ideal e a segunda parte referente as contribuições da estrutura de campo magnético escolhida.

6.2.1 Densidade de carga e a densidade de corrente radial e axial

Nosso objetivo nesta subseção consiste em provar que as componentes $\langle j^0 \rangle$ (densidade de carga), $\langle j^r \rangle$ (corrente radial) e $\langle j^z \rangle$ (corrente axial) são nulas. Vamos começar então pela densidade de carga,

$$\rho(x) = \langle j^0(x)\rangle = e \sum_{\sigma} (\psi_{\sigma}^{(-)}(x))^{\dagger} \psi_{\sigma}^{(-)}(x) . \quad (6.2.55)$$

Substituindo (6.1.51) e (6.1.52) em (6.2.55) obtemos que

$$\rho(x) = \frac{eq}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \sum_{j=\pm 1/2, \dots} [(g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r))^2 + (g_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda a, \lambda r))^2] . \quad (6.2.56)$$

Além do mais, substituindo (6.1.49) e (6.1.50) na expressão acima observamos que a densidade de carga pode ser escrita da seguinte maneira

$$\rho(r) = \rho_s(r) + \rho_c(r) , \quad (6.2.57)$$

onde

$$\rho_s(r) = \frac{eq}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{j=\pm 1/2, \dots} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \left(J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r) \right) \quad (6.2.58)$$

representa a densidade de carga devido a presença de uma linha de fluxo magnético ao longo de uma corda cósmica ideal² e,

$$\rho_c(r) = -\frac{eq}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_j \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \tilde{J}_{\beta_j}(\lambda a) \sum_{l=1}^2 \frac{(H_{\beta_j}^{(l)}(\lambda r))^2 + (H_{\beta_j + \epsilon_j}^{(l)}(\lambda r))^2}{\tilde{H}_{\beta_j}^{(l)}(\lambda a)}, \quad (6.2.59)$$

representa a densidade de carga induzida devido a presença de um tubo de fluxo magnético que circunda a corda. Em (6.2.59) $H_{\nu}^{(l)}(x)$ com $l = 1, 2$ são as funções de Hankel [55][63].

De acordo com [65], na densidade de carga, ρ_s , as integrações sobre λ e k em (6.2.58) são divergentes. Como devemos obter uma solução finita e bem definida foi introduzido um cutoff. Com este cutoff, as integrais puderam ser desenvolvidas. Por uma subtração de uma parte Minkowskiana, que corresponde a subtrair o termo que contribui com $\alpha_0 = 0$ e $q = 1$ no resultado, o cutoff pode ser removido, e como resultado mostrou-se que esta contribuição renormalizada para a densidade de carga era nula. Ainda de acordo com [65], foi considerado que

$$\alpha = eA_{\phi}/q = -\Phi/\Phi_0 = n_0 + \alpha_0, \quad (6.2.60)$$

onde n_0 é um número inteiro e $\alpha_0 \in (-1/2, 1/2)$.

Por outro lado, para ρ_c , em princípio, tal contribuição é finita e não necessita de nenhum método de renormalização. Para calcular sua contribuição procedemos da seguinte maneira: no plano complexo λ rotacionamos o contorno de integração por um ângulo de $\pi/2$ para $l = 1$ e por um ângulo de $-\pi/2$ para $l = 2$. É visto no Apêndice A que o coeficiente $\mathcal{V}_j^{(i)}(\lambda, a)$, em (6.1.40), satisfaz a relação abaixo³

$$\mathcal{V}_j^{(i)}(\pm i\lambda, a) = \pm i \text{Im}\{\mathcal{V}_j^{(i)}(i\lambda, a)\}. \quad (6.2.61)$$

Então, usando (6.2.61) e as bem conhecidas relações envolvendo as funções de Bessel e Hankel [55] de argumentos imaginários com as funções de Bessel modificadas

² Ao longo desta Tese, quando escrevemos o termo “presença da corda cósmica ideal”, estamos nos referindo especificamente a dependência que tais quantidades irão apresentar devido apenas linha de fluxo magnético que corre ao longo de uma corda cósmica ideal.

³ De fato, a relação (6.2.61) é satisfeita para todas as funções radiais associadas com as três configurações de campo magnético.

[63], vemos que o integrando da primeira contribuição, isto é, ($l = 1$), se cancela com a contribuição para ($l = 2$), provando deste modo que a contribuição ρ_c em (6.2.59), que carrega a informação da estrutura de campo magnético também é nula. Sendo assim, concluímos que a densidade de carga do sistema é nula.

Para analisar o VEV da densidade de corrente radial e axial, usaremos os seguintes modos de soma,

$$\langle j^r(x) \rangle = e \sum_{\sigma} (\psi_{\sigma}^{(-)}(x))^{\dagger} \gamma^0 \gamma^r \psi_{\sigma}^{(-)}(x) \quad (6.2.62)$$

e

$$\langle j^z(x) \rangle = e \sum_{\sigma} (\psi_{\sigma}^{(-)}(x))^{\dagger} \gamma^0 \gamma^z \psi_{\sigma}^{(-)}(x) . \quad (6.2.63)$$

Substituindo (6.1.51) e (6.1.52) nas expressões acima observamos que: Para a componente radial da densidade de corrente ocorrerá cancelamentos diretos entre todos os termos envolvidos. Todavia, para a componente axial da densidade de corrente, obteremos uma função ímpar em k integrada num intervalo simétrico, conseqüentemente a integração sobre essa variável será nula. Este último resultado está em concordância com a simetria do sistema por transformação de boost ao longo da direção z . O que implica no VEV de j^z igual a densidade de carga, ρ .

Deste modo, concluímos que não há densidade de carga induzida no vácuo, bem como não há densidade de corrente induzida nas direções radial e axial no sistema.

6.2.2 Densidade de corrente azimutal

O VEV da densidade de corrente azimutal é dado por,

$$\langle j^{\phi}(x) \rangle = e \sum_{\sigma} (\psi_{\sigma}^{(-)}(x))^{\dagger} \gamma^0 \gamma^{\phi} \psi_{\sigma}^{(-)}(x) . \quad (6.2.64)$$

Utilizando (6.1.51), (6.1.52) e a forma explícita das matrizes de Dirac dadas por (6.1.11) e (6.1.12) obtemos a seguinte expressão:

$$\langle j^{\phi} \rangle = -\frac{eq}{2\pi^2 r} \sum_{\sigma} \frac{\epsilon_j b_s^{(-)} (\rho_s^2 - 1) \lambda}{(1 + (b_s^{(-)})^2) (1 + \rho_s^2)} g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) g_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda a, \lambda r) . \quad (6.2.65)$$

podemos ver facilmente que

$$\frac{b_s^{(-)}(\rho_s^2 - 1)}{(1 + (b_s^{(-)})^2)(1 + \rho_s^2)} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 + k^2 + m^2}} . \quad (6.2.66)$$

Assim, substituindo esta expressão em (6.2.65), vemos que a soma sobre s fornece um fator 2. Logo, chegamos na expressão para a densidade de corrente azimutal dada por

$$\langle j^\phi \rangle = -\frac{eq}{2\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2 + m^2}} \sum_j \epsilon_j [g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) g_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda a, \lambda r)] \quad (6.2.67)$$

Desenvolvendo o produto $g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) g_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda a, \lambda r)$ de uma forma conveniente, isto é, separando a contribuição que não depende da estrutura de campo magnético daquela que depende, podemos escrever o resultado acima como a soma de duas contribuições, como mostramos a seguir:

$$\langle j^\phi(x) \rangle = \langle j^\phi(x) \rangle_s + \langle j^\phi(x) \rangle_c . \quad (6.2.68)$$

O primeiro termo, $\langle j^\phi(x) \rangle_s$, corresponde a densidade de corrente azimutal na geometria de uma corda cósmica ideal cujo campo magnético flui ao longo da linha correspondente a direção em que a corda está disposta, esta contribuição já foi extensamente calculada e pode ser revisitada, por exemplo, em [65]. A segunda contribuição, $\langle j^\phi(x) \rangle_c$, é a componente induzida pela estrutura de campo magnético de raio a , introduzida neste trabalho.

Vemos que $\langle j^\phi(x) \rangle_c$, pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_c &= \frac{eq}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} \frac{d\lambda \lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 + k^2 + m^2}} \\ &\times \sum_j \epsilon_j \tilde{J}_{\beta_j}(\lambda a) \sum_{l=1}^2 \frac{H_{\beta_j}^{(l)}(\lambda r) H_{\beta_j + \epsilon_j}^{(l)}(\lambda r)}{\tilde{H}_{\beta_j}^{(l)}(\lambda a)} . \end{aligned} \quad (6.2.69)$$

Com o objetivo de desenvolvermos nossos cálculos, levamos a integração λ para o plano complexo através de uma rotação, como feito quando calculamos na seção anterior para a densidade de carga: Rotacionamos por $\pi/2$ para $l = 1$ e $-\pi/2$ para $l = 2$. Usando a propriedade (6.2.61), vemos que a integral sobre os segmentos $(0, i\sqrt{m^2 + k^2})$ e

$(0, -i\sqrt{m^2 + k^2})$ se cancelam. Na integral remanescente sobre o eixo imaginário, introduzimos as funções de Bessel modificadas [55], cujas relações são dadas abaixo:

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(e^{i\pi/2}x) \\ K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^1(ix) . \end{aligned} \quad (6.2.70)$$

Que é o correspondente a fazer à substituição $\lambda = \pm iz$. Assim, a densidade de corrente azimutal induzida pela estrutura leva a,

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_c &= -\frac{eq}{\pi^3 r} \int_0^\infty dk \int_{\sqrt{k^2+m^2}}^\infty \frac{dz z^2}{\sqrt{z^2 - k^2 - m^2}} \\ &\quad \sum_j K_{\beta_j}(zr) K_{\beta_j+\epsilon_j}(zr) F_j^{(i)}(za) , \end{aligned} \quad (6.2.71)$$

onde foi introduzido a notação

$$F_j^{(i)}(y) = \frac{I_{\beta_j+\epsilon_j}(y) - \text{Im}[\mathcal{V}_j^{(i)}(iy/a, a)] I_{\beta_j}(y)}{K_{\beta_j+\epsilon_j}(y) + \text{Im}[\mathcal{V}_j^{(i)}(iy/a, a)] K_{\beta_j}(y)} . \quad (6.2.72)$$

Após uma série de transformações de coordenadas podemos escrever (6.2.71) como se segue⁴:

$$\langle j^\phi(x) \rangle_c = -\frac{eq}{\pi^2 r^4} \int_{mr}^\infty z^2 dz \sum_j K_{\beta_j}(z) K_{\beta_j+\epsilon_j}(z) F_j^{(i)}(z(a/r)) . \quad (6.2.73)$$

Desenvolvendo até este ponto, a expressão fechada que fornece a densidade de corrente azimutal induzida no vácuo pela estrutura, como a única componente não nula, podemos agora investigar o comportamento desta componente nos seus limites assintóticos.

Análise assintótica

Vamos começar esta análise de comportamento tomando o limite de grandes distâncias em relação a estrutura. Primeiramente, vamos considerar o caso massivo, isto é, o limite em que $mr \gg 1$. Para fazer esta análise, assumimos que o produto $K_{\beta_j}(z) K_{\beta_j+\epsilon_j}(z)$

⁴ Em (6.2.71) primeiro tomamos a substituição simples $x = \sqrt{z^2 - k^2 - m^2}$, em seguida fazemos uma substituição polar onde $\rho^2 = x^2 + k^2$. Por fim tomamos mais duas substituições simples nesta ordem: $y = \sqrt{\rho^2 + m^2}$ seguida pela transformação $y = z/r$.

pode ser expresso em termos de suas formas assintóticas correspondentes. Assim, temos que a densidade de corrente induzida é dada como

$$\langle j^\phi \rangle_c \approx -\frac{eq}{2\pi r^4} \int_{mr}^{\infty} dz z e^{-2z} \sum_j F_j^{(i)}(z(a/r)) . \quad (6.2.74)$$

A contribuição dominante é dada próximo do limite inferior de integração. Então o termo de ordem que lidera a contribuição é,

$$\langle j^\phi(r) \rangle_c \approx -\frac{eqm^4}{4\pi(mr)^3} e^{-2mr} \sum_j F_j^{(i)}(ma) . \quad (6.2.75)$$

Podemos ver que para campos massivos à grandes distâncias da estrutura, a densidade de corrente induzida decai com $e^{-2mr}/(mr)^3$. Comparando este comportamento com o correspondente comportamento para o caso de uma corda cósmica ideal [65], observa-se que para $q > 2$ tal componente decai com $e^{-2mr \sin(\pi/q)}/(mr)^{5/2}$. Consequentemente a contribuição dominante é devido a corda cósmica ideal. Para $q \leq 2$, a contribuição de $\langle j_\phi \rangle_s$ e $\langle j_\phi \rangle_c$ para a corrente azimutal total, em largas distâncias, são de mesma ordem.

Nossa próxima análise será desenvolver a densidade de corrente azimutal induzida pela estrutura tomando o limite de grandes distâncias, considerando o caso de campos fermiônicos não massivos. Essa análise pode ser desenvolvida a partir do uso da forma explícita das funções radiais, na região-*in*. No Apêndice A desenvolvemos as soluções exatas para $R_1(r)$ e $R_2(r)$ com os três modelos adotados de campo magnético. São eles:

1. Para a casca cilíndrica:

$$\begin{aligned} R_1^{(1)}(r) &= J_{\nu_j}(\lambda r) \\ R_2^{(1)}(r) &= \end{aligned} \quad (6.2.76)$$

$$\tilde{\epsilon}_j J_{\nu_j + \tilde{\epsilon}_j}(\lambda r) , \quad (6.2.77)$$

onde $\nu_j = q|j| - \frac{\tilde{\epsilon}_j}{2}$, com $\tilde{\epsilon}_j = 1$ para $j > 0$ e $\tilde{\epsilon}_j = -1$ para $j < 0$.

2. Para o campo magnético proporcional a $1/r$:

$$\begin{aligned} R_1^{(2)}(r) &= \frac{M_{\kappa, \nu_j}(\xi r)}{\sqrt{r}} \\ R_2^{(2)}(r) &= C_j^{(2)} \frac{M_{\kappa, \nu_j + \hat{\epsilon}_j}(\xi r)}{\sqrt{r}}, \end{aligned} \quad (6.2.78)$$

onde

$$\xi = \frac{2}{a} \sqrt{q^2 \alpha^2 - \lambda^2 a^2}, \quad \kappa = -\frac{2q^2 j \alpha}{\xi a} \quad (6.2.79)$$

e

$$C_j^{(2)} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\xi} \frac{1}{(2q|j|+1)}, & j > 0. \\ -\frac{\xi}{\lambda} (2q|j| + 1), & j < 0. \end{cases} \quad (6.2.80)$$

3. Para o campo magnético homogêneo:

$$\begin{aligned} R_1^{(3)}(r) &= \frac{M_{\kappa - \frac{1}{4}, \frac{\nu_j}{2}}(\tau r^2)}{r} \\ R_2^{(3)}(r) &= C_j^{(3)} \frac{M_{\kappa + \frac{1}{4}, \frac{\nu_j + \hat{\epsilon}_j}{2}}(\tau r^2)}{r}, \end{aligned} \quad (6.2.81)$$

onde τ e κ são dados por

$$\tau = q\alpha/a^2, \quad \kappa = \frac{\lambda^2}{4\tau} - \frac{qj}{2}, \quad (6.2.82)$$

com

$$C_j^{(3)} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{2q|j|+1} & j > 0. \\ -\frac{\sqrt{\tau}}{\lambda} (2q|j| + 1), & j < 0. \end{cases} \quad (6.2.83)$$

Para o segundo e terceiro modelo, as funções radiais são dadas em termos das funções de Whittaker, $M_{\kappa, \nu}(z)$ [63][64].

Para o caso de campos fermiônicos sem massa à grandes distâncias da estrutura, o comportamento da componente induzida pela estrutura de campo magnético pode ser desenvolvida como se segue: Em vez de usar a soma sobre o momento angular j em (6.2.73), usamos $n = j - 1/2$. Sendo assim, uma nova notação pode ser introduzida para o termo que carrega a informação do modelo específico de campo magnético,

$F_n^{(i)} \equiv F_j^{(i)}$. Além disso, trocando n por $n - n_0$, sendo n_0 dado em (6.2.60). Então, de (6.2.73) podemos escrever,

$$\langle j^\phi(x) \rangle_c = -\frac{eq}{\pi^2 r^4} \int_0^\infty dz z^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_\beta(z) K_{\tilde{\beta}}(z) F_{n-n_0}^{(i)}(z(a/r)) . \quad (6.2.84)$$

Na expressão acima, utilizamos a notação:

$$F_{n-n_0}^{(i)}(z(a/r)) = \frac{I_{\tilde{\beta}}(z(a/r)) - \text{Im}[\mathcal{V}_{n-n_0}^{(i)}(iz, (a/r))] I_\beta(z(a/r))}{K_{\tilde{\beta}}(z(a/r)) + \text{Im}[\mathcal{V}_{n-n_0}^{(i)}(iz, (a/r))] K_\beta(z(a/r))} . \quad (6.2.85)$$

Em (6.2.85) as ordens das funções de Bessel são dadas por

$$\begin{aligned} \beta &= q|n + 1/2 + \alpha_0| - \frac{1}{2} \frac{|n + 1/2 + n_0|}{n + 1/2 + \alpha_0} , \\ \tilde{\beta} &= q|n + 1/2 + \alpha_0| + \frac{1}{2} \frac{|n + 1/2 + n_0|}{n + 1/2 + \alpha_0} . \end{aligned} \quad (6.2.86)$$

Expandindo o integrando de (6.2.84) em potências de a/r , o termo dominante é dado pela menor potência desta razão. Logo, temos duas possibilidades: Para $\alpha_0 > 0$ ($0 \leq \alpha_0 < 1/2$) este termo é dados por $n = -1$, e para $\alpha_0 < 0$ ($-1/2 < \alpha_0 \leq 0$) este termo é dado por $n = 0$.

Agora, usando a expansão para as funções de Bessel modificadas para argumentos pequenos [63], os termos de contribuição dominantes são:

- Para $\alpha_0 > 0$:

$$F_{-1-n_0}^{(i)}\left(z\frac{a}{r}\right) \approx \frac{2}{\Gamma^2(\beta)} \frac{1 + i\mathcal{V}_{-1-n_0}^{(i)}(iz, a/r) \left(z\frac{a}{r}\right) \left(\frac{az}{2r\beta}\right)}{\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)} - i\mathcal{V}_{-1-n_0}^{(i)}(iz, a/r) \left(z\frac{a}{r}\right) \left(\frac{az}{2r}\right) \left(\frac{2r}{az}\right)^{2\beta}} . \quad (6.2.87)$$

- Para $\alpha_0 < 0$

$$F_{-n_0}^{(i)}\left(z\frac{a}{r}\right) \approx -\frac{2}{\beta\Gamma^2(\beta)} \frac{1 + i\mathcal{V}_{-n_0}^{(i)}(iz, a/r) \left(z\frac{a}{r}\right) \left(\frac{2r\beta}{az}\right)}{\left(\frac{2r}{az}\right)^{2\beta} - i\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)} \mathcal{V}_{-n_0}^{(i)}(iz, a/r) \left(z\frac{a}{r}\right) \left(\frac{az}{2r}\right)} . \quad (6.2.88)$$

Nosso próximo passo é desenvolver o cálculo dos termos dominantes para o coeficiente que contém toda informação sobre a estrutura, $\mathcal{V}_{-1-n_0}^{(i)}(iz, a/r)$ e $\mathcal{V}_{-n_0}^{(i)}(iz, a/r)$, para os três modelos. Isto pode ser feito por uma substituição explícita das funções

radiais, $R_1^{(i)}(iz, a/r)$ e $R_2^{(i)}(iz, a/r)$, em (6.1.40). Deste modo, para campos sem massa, encontramos:

$$\langle j^\phi(r) \rangle_c \approx 2 \frac{|\alpha_0|}{\alpha_0} \frac{eq}{\pi^2 r^4} \frac{\beta - \chi^{(l)}}{\left(\frac{2r}{a}\right)^{2\beta} \chi^{(l)}} \frac{\beta}{2\beta + 1}, \quad (6.2.89)$$

onde

$$\beta = q \left(\frac{1}{2} - |\alpha_0| \right) + \frac{1}{2} \quad (6.2.90)$$

e $\chi^{(l)}$ é o parâmetro dependente do modelo de campo magnético específico, dado por:

$$\chi^{(l)} = \begin{cases} \nu = q|n_0 - \frac{1}{2} \frac{|\alpha_0|}{\alpha_0}| - \frac{1}{2} \frac{|\alpha_0|}{\alpha_0}, & \text{Para o modelo (i)} \\ q\alpha(q+1) \frac{M \frac{q}{2} \frac{|\alpha_0|}{\alpha_0}, \nu}{(2q\alpha)}, & \text{Para o modelo (ii)} \\ \frac{\sqrt{q\alpha}}{2} (q+1) \frac{M \frac{-\frac{1}{2} \frac{|\alpha_0|}{\alpha_0} \frac{q+1}{2}, \frac{q}{2}}{(\tau R^2)}}{M \frac{-\frac{1}{2} \frac{|\alpha_0|}{\alpha_0} \frac{q+1}{2}, \frac{q}{2}}{(\tau R^2)}}, & \text{Para o modelo (iii)}. \end{cases} \quad (6.2.91)$$

De posse destes resultados podemos dizer que, para os três modelos considerados, a densidade de corrente induzida devido a estrutura não trivial de campo magnético decai com $\frac{1}{r^4(a/r)^{2\beta}}$, para grandes distâncias do tubo de campo magnético. Foi mostrado em [65] que no limite de massa nula, para o caso de uma corda cósmica ideal apenas, que esta contribuição decai como $1/r^4$. Assim, concluímos que para grandes distâncias da estrutura, no caso de campos sem massa, a contribuição dominante para a densidade de corrente azimutal total, vem do termo que considera apenas a presença da corda cósmica ideal em (6.2.68).

Agora vamos investigar o comportamento da densidade de corrente azimutal induzida pela estrutura, $\langle j^\phi \rangle$, no limite de pontos próximos a esta estrutura, ou seja, em pontos onde $r \geq a$, novamente para os três modelos. Em geral esta densidade de corrente diverge próximo a essa região. A contribuição dominante em (6.2.73) advêm dos valores de $|j|$ muito grande. Para encontrar estas contribuições dominantes é conveniente introduzir uma nova variável a qual chamamos de $z = \beta_j x$, e usar a expansão uniforme para grandes ordens das funções de Bessel modificadas [63]. Contudo, antes de fazermos isto, gostaríamos de notar que, trocando $n \rightarrow -n-1$ a soma sobre j não se altera, mas os parâmetros ν_j modificam-se, $\nu_j \rightarrow \tilde{\nu}_j$ e $\tilde{\nu}_j \rightarrow \nu_j$. Se, com isso, também

trocamos $\alpha \rightarrow -\alpha$, segue que $\beta_j \rightarrow \tilde{\beta}_j$ e $\tilde{\beta}_j \rightarrow \beta_j$. Isto significa que, quando fazemos $n \rightarrow -n - 1$ e $\alpha \rightarrow -\alpha$ temos $F_j^{(i)}(y) \rightarrow -F_j^{(i)}(y)$. Com base nisso, e considerando $\alpha > 0$, o comportamento da densidade de corrente induzida pela estrutura próxima à fronteira é dada por

$$\langle j^\phi(x) \rangle_c \approx 2 \frac{eq}{\pi^2 r^4} \sum_{n>0} \beta_j^3 \int_{\frac{mr}{\beta_j}}^{\infty} dx x^2 F_j^{(i)}(\beta_j x(a/r)) K_{\beta_j}(\beta_j x) K_{\beta_j + \epsilon_j}(\beta_j x) . \quad (6.2.92)$$

Como consideramos $n \gg 1$, de agora em diante, nesta análise usamos a aproximação, $\beta_j \approx \nu_j \approx qn$.

Para os três modelos de campo magnético, é necessário encontrar o termo de liderança em $F_j^{(i)}$ para grandes valores de j . Para os dois primeiro modelos, este termo é obtido utilizando a expansão uniforme para grandes ordens das funções de Bessel modificadas para o primeiro modelo, e a expansão assintótica correspondente para as funções de Whittaker no segundo modelo. Após alguns cálculos algébricos intermediários, encontramos que ambos os termos dominantes coincidem para os dois modelos e são dados por,

$$F_j^{(1,2)}(qn x(a/r)) \approx \frac{1}{4q^2 \pi n^2} \frac{e^{2qn\tilde{\eta}}}{(1 + e^{2\tilde{\eta}})} , \quad (6.2.93)$$

onde $\tilde{\eta} = \sqrt{1 + x^2(a/r)^2}$.

O terceiro modelo converge para o mesmo resultado. Para verificarmos isto, basta expressar as funções de Whittaker em termos das funções hipergeométricas confluentes [63], $M_{\kappa,\mu}(z) = e^{-z/2} z^{1/2+\mu} M(1/2 + \mu - \kappa, 1 + 2\mu; z)$, e usar a expansão abaixo,

$$M(a, b; z) = \Gamma(b) e^{zx} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k (-az)^{\frac{1}{2}(1-b-k)} J_{b-1+k}(2\sqrt{-az}) . \quad (6.2.94)$$

Usando as expansões uniformes para as funções de Bessel com grandes ordens segue que para os três modelos que a densidade de corrente induzida devido a estrutura de campo magnético é dada por

$$\langle j^\phi(x) \rangle_c \approx \frac{eq}{4\pi^2 r^4} \sum_{n>0} \int_{\frac{mr}{qn}}^{\infty} dz z^2 \frac{e^{-2qn(\eta-\tilde{\eta})}}{(1 + e^{2\tilde{\eta}}) \sqrt{1 + z^2}} , \quad (6.2.95)$$

onde $\eta = \sqrt{1+x^2}$. Usando a aproximação $\eta - \tilde{\eta} \approx z(1 - a/r)$, e observando que o denominador do integrando em (6.2.95) pode ser aproximado para a unidade, para os três modelos, temos:

$$\langle j^\phi(x) \rangle_c \approx \frac{eq}{4\pi^2 r^4} \sum_{n>0} \int_{\frac{mr}{qn}}^{\infty} dz z^2 e^{-2qn(1-a/r)}. \quad (6.2.96)$$

Resolvendo a integral acima temos

$$\langle j^\phi(r) \rangle_c \approx \frac{e}{(4\pi q)^2} \frac{1}{r} \frac{1}{(r-a)^3}. \quad (6.2.97)$$

Onde, devemos notar que a densidade de corrente azimutal, $\langle j^\phi \rangle$, diverge próximo ao tubo de campo magnético.

Como a densidade de corrente azimutal, $\langle j^\phi(r) \rangle_s$, apresenta um valor finito próximo a fronteira, podemos concluir que, neste limite, a densidade de corrente azimutal total, (6.2.68) é dominada pela contribuição da densidade de corrente que carrega a informação da estrutura de campo magnético.

Uma maneira alternativa para mostrar que os três modelos conduzem ao mesmo resultado próximo a fronteira, pode ser visto analisando a equação diferencial radial (A.1) e (A.2) dado no Apêndice A para grandes valores de j . Trocando o parâmetro λ por $i\nu_j z$, especificamente para (A.1), encontramos:⁵

$$r^2 R_1''(r) + r R_1'(r) - r^2 \nu_j^2 z^2 R_1(r) - \nu_j^2 \left(1 + \frac{2eA_\phi(r)}{\nu_j} \right) R_1(r) \approx 0. \quad (6.2.98)$$

Substituindo a forma explícita do potencial vetor, $A_\phi(r)$, dada por (6.1.6), e utilizando as equações (6.1.7) e (6.1.8) na equação acima, que especificam qual das três configurações de campo magnético estamos utilizando, é possível ver que as soluções podem ser escritas, para as três configurações diferentes, em uma forma geral mostrada abaixo:

$$R_1(r) = I_{\nu_j}(\nu_j z r) f(r), \quad (6.2.99)$$

⁵ Para $R_2(r)$ a equação é similar à (6.2.98) trocando ν_j por $\nu_j + \frac{\tilde{\epsilon}_j}{2}$.

onde $f(r)$ é igual a unidade para o primeiro modelo, e para o segundo e terceiro modelos, é tal que,

$$f(r) \approx 1 - \frac{rq\alpha}{a} + \frac{q\alpha z}{2} \left(\frac{q\alpha}{az} + 1 \right) \frac{r^2}{a} + O(\nu_j^{-1}) \quad (6.2.100)$$

e

$$f(r) \approx e^{-\frac{rq\alpha}{a^2 z}} \left(1 + \frac{rq\alpha}{a^2 z} - \frac{q\alpha}{2} \left(1 - \frac{q\alpha}{z^2 a^2} \right) \frac{r^2}{a^2} + O(\nu_j^{-1}) \right), \quad (6.2.101)$$

respectivamente.

Como o coeficiente $\mathcal{V}_j^{(i)}$ depende da razão entre as duas funções radiais, $R_2(r)$ e $R_1(r)$, para grandes valores de j , o termo dominante desta razão é:

$$\frac{R_2(r)}{R_1(r)} \approx \frac{I_{\nu_j + \tilde{\epsilon}_j/2}((\nu_j + \tilde{\epsilon}_j/2)zr)}{I_{\nu_j}(\nu_j zr)}. \quad (6.2.102)$$

Consequentemente o comportamento dos três modelos, neste limite, são similares.

Análise numérica

Após nossas discussões, a respeito da corrente induzida no vácuo, de maneira analítica, podemos mostrar uma análise numérica a respeito da densidade de corrente azimutal induzida no vácuo de maneira à agregar mais informações das quais não é tão fácil de notar-se analiticamente.

Na Fig.6.2 mostramos a dependência da densidade de corrente azimutal induzida pela estrutura, $\langle j^\phi(r) \rangle_c$, como função de mr considerando $q = 1.5$ e $ma = 1$. No gráfico da esquerda, apresentamos o comportamento da densidade de corrente induzida para o primeiro caso, que consiste na casca cilíndrica de campo magnético, levando em conta valores positivo e negativos do parâmetro α . De modo a fornecer um melhor entendimento sobre esta densidade de corrente, do lado direito do gráfico exibimos seu comportamento como função de mr , para os três modelos de campo magnético considerando $\alpha = 2.1$. Desta maneira podemos inferir que para um dado ponto fora do tubo, a intensidade de corrente azimutal induzida no vácuo é maior para o primeiro modelo

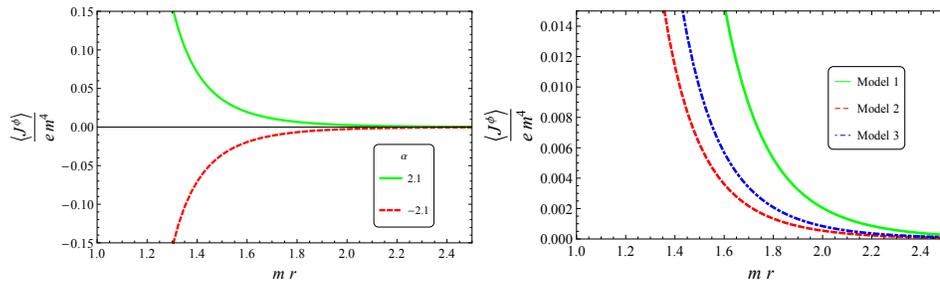


Fig. 6.2: A densidade de corrente induzida azimutal devido a estrutura foi formada, em unidades de “ $m^4 e$ ”, como função de mr para os valores de $q = 1.5$ e $ma = 1$. Do lado esquerdo consideramos a corrente induzida pelo modelo 1, tomando $\alpha = 2.1$ e $\alpha = -2.1$. Do lado esquerdo comparamos a intensidade da densidade de corrente induzida para os três modelos de campo magnético considerando $\alpha = 2.1$.

Outra análise que desenvolvemos está relacionada a dependência da densidade de corrente induzida com o parâmetro q definindo assim, sua dependência à presença da corda cósmica. Então, na Fig.6.3, mostramos, para o campo magnético disposto pelo modelo 1, o comportamento de $\langle j^\phi(r) \rangle_c$ como função de mr para $q = 1.5, 2.5, 3.5$. Como podemos ver, a intensidade da densidade de corrente aumenta quando o parâmetro q também aumenta. Para este gráfico consideramos $\alpha = 1.2$ e $ma = 1$. Finalmente na Fig.6.4, exibimos o comportamento da densidade de corrente

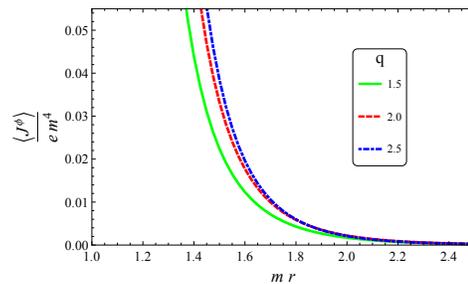


Fig. 6.3: A densidade de corrente azimutal induzida pela estrutura, em unidades de “ $m^4 e$ ”, para o primeiro modelo, foi escrita em função de mr considerando três valores diferentes de q . Neste caso adotamos o valor $\alpha = 1.2$.

devido a presença de uma estrutura de campo magnético como função de α , considerando $ma = 1$ e $mr = 2$. No gráfico da esquerda, mostramos a densidade de corrente induzida pelo primeiro modelo de campo magnético com diferentes valores de q . Estes valores são para $q = 1.5, 2.0, 3.5$. No gráfico da direita, mostramos as densidades de

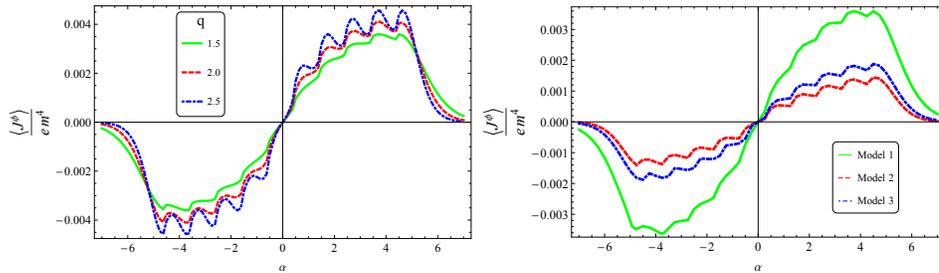


Fig. 6.4: A densidade de corrente induzida pela estrutura de campo magnético está montada, em unidades de “ $m^4 e$ ”, como função de α fixando $ma = 1$ e $mr = 2$. Do lado esquerdo, vemos a densidade de corrente apenas para o primeiro modelo com diferentes valores de q . No lado direito, apresentamos a densidade de corrente induzida pelos três modelos de campo magnético diferentes, considerando $q = 1.5$.

corrente induzidas pelos três diferentes modelos de campo magnético, adotando o valor de $q = 1.5$. Para ambos os gráficos, assumimos que α varia no intervalo de $[-7.0, 7.0]$. Nos dois casos podemos ver diretamente que, mais uma vez, a intensidade da densidade de corrente aumente de acordo com o aumento de q (Imagem da esquerda) e que o primeiro modelo provê a densidade de corrente mais forte (Imagem da direita).

7. O $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ E O $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$ INDUZIDOS POR UM TUBO MAGNÉTICO NO ESPAÇO-TEMPO DE UMA CORDA CÓSMICA

Neste capítulo temos como objetivo estudar o condensado fermiônico (CF), $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$, e o VEV do tensor energia-momento (TEM), $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$, devido os efeitos no espaço-tempo gerado por uma corda cósmica, acoplando minimamente o campo de Dirac com o campo de gauge eletromagnético. Consideraremos os mesmos modelos de campo magnético apresentados no Capítulo 6, que se apresentará em três configurações distintas: (i) Na forma de uma casca cilíndrica de raio a , (ii) um campo magnético que decai com $1/r$ e (iii) um campo magnético homogêneo constante [35][36]. Tal aproximação, como já explicamos anteriormente, reside no fato de considerarmos o limite em que $m_s \gg m_v$. Desta forma, consideramos apenas a estrutura interna do campo de gauge como sendo relevante.

7.1 O condensado fermiônico

Nesta seção vamos desenvolver o VEV do condensado fermiônico. Vamos mostrar que o mesmo pode ser escrito como a soma de duas partes sendo a primeira devido a presença da corda cósmica ideal, e a segunda devido a presença de uma estrutura de campo magnético, análogo ao que fizemos no Capítulo 6, para o caso da densidade de corrente $\langle j^{\mu} \rangle$.

Novamente, pelo uso do método de soma dos modos da função de onda normalizada temos

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = \sum_{\sigma} \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}(x) \psi_{\sigma}^{(-)}(x) , \quad (7.1.1)$$

onde a soma sobre σ corresponde a (6.2.54).

Usando a expressão explícita para a função de onda com energia negativa definida

por (6.1.51) e (6.1.52), pode-se mostrar que as contribuições para $s = 1$ e $s = -1$ fornecem o mesmo resultado, conseqüentemente, o condensado fermiônico toma a seguinte forma:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -\frac{qm}{(2\pi)^2} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda}{E} \left(g_{\tilde{\beta}_j}^2(\lambda a, \lambda r) + g_{\beta_j}^2(\lambda a, \lambda r) \right), \quad (7.1.2)$$

onde, usamos a notação $\tilde{\beta}_j = \beta_j + \epsilon_j$.

Levando em conta (6.1.40) e usando as relações entre as funções de Bessel [63], encontramos que,

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_s + \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c. \quad (7.1.3)$$

Onde mostramos que o condensado fermiônico pode ser expresso como a soma de duas contribuições distintas: A primeira, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_s$, corresponde a contribuição devido a linha de fluxo magnético através da corda cósmica idealizada, e a segunda, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c$, leva em consideração a estrutura de campo magnético não nula. Esta última, apresenta, como já especificamos anteriormente, três modelos distintos de campo magnético. Após alguns cálculos intermediários essas duas contribuições são expressas da seguinte forma:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_s = -\frac{qm}{(2\pi)^2} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda}{E} \left(J_{\tilde{\beta}_j}^2(\lambda a, \lambda r) + J_{\beta_j}^2(\lambda a, \lambda r) \right) \quad (7.1.4)$$

e

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c = \frac{qm}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_j \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda}{E} \tilde{J}_{\beta_j}(\lambda a) \sum_{l=1}^2 \frac{(H_{\beta_j}^{(l)}(\lambda r))^2 + (H_{\tilde{\beta}_j}^{(l)}(\lambda r))^2}{\tilde{H}_{\beta_j}^{(l)}(\lambda a)}, \quad (7.1.5)$$

onde $H_{\nu}^{(l)}(x)$ com $l = 1, 2$ representa as funções de Hankel [55][63].

O termo que representa a dependência apenas da presença da corda cósmica idealizada, equação (7.1.4), foi investigada em [66], e necessita de um processo de renormalização para que possamos obter um resultado finito do condensado fermiônico, tal processo, no espaço localmente plano, consiste em subtrair a contribuição tipo espaço-tempo de Minkowski. Por outro lado, o termo que apresenta a dependência da estrutura de campo magnético, equação (7.1.5) é finita e, portanto, não necessita de uma renormalização.

7.1.1 O condensado fermiônico induzido pela estrutura

Para desenvolvermos o cálculo do CF induzido pelo tubo de fluxo magnético, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c$, procedemos de modo análogo ao que foi feito para a densidade de carga e de corrente azimutal. No plano complexo λ rotacionamos a integral de contorno por um ângulo $\pi/2$ para $l = 1$ e por um ângulo de $-\pi/2$ para $l = 2$. Como já vimos no Capítulo 6, utilizando o Apêndice B, mostramos que o coeficiente $\mathcal{V}_j^{(i)}(\lambda, a)$ em (6.1.40) satisfaz (6.2.61)¹. Desta forma, utilizando (6.2.61) e as relações entre as funções de Hankel e Bessel [63], obtêm-se que a integral sobre os segmentos $(0, \pm i\sqrt{m^2 + k^2})$ se cancelam, o que nos leva a forma do condensado fermiônico induzido dado por

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c = \frac{qm}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{\sqrt{k^2+m^2}}^{\infty} dz \frac{z}{\sqrt{z^2 - k^2 - m^2}} \sum_j \left(K_{\beta_j}^2(zr) - K_{\beta_j}^2(zr) \right) F_j^{(i)}(za), \quad (7.1.6)$$

onde, $F_j^{(i)}(za)$ é dado por (6.2.72). Notemos que, desligando o campo magnético, isto é, tomando $\alpha = 0$, $F_j^{(i)}(za)$ se anula.

Novamente, seguindo a mesma sequência de transformações de coordenadas utilizada no cálculo da densidade de corrente fermiônica azimutal induzida pelo tubo de campo magnético, podemos escrever (7.1.6) como se segue:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c = \frac{qm}{2\pi^2 r^2} \int_{mr}^{\infty} dz z \sum_j \left(K_{\beta_j}^2(z) - K_{\beta_j}^2(z) \right) F_j^{(i)}\left(z \frac{a}{r}\right). \quad (7.1.7)$$

Análise assintótica

A respeito do CF (condensado fermiônico), vamos analisar o seu comportamento para alguns limites específicos, assim como foi feito para o caso da densidade de corrente azimutal induzida. O primeiro caso que vamos analisar será no limite de $mr \gg ma$.

Com o intuito de desenvolver nossa análise, reescrevemos as funções de Bessel modificadas em (7.1.7) em termos de suas formas assintóticas². Então, podemos aproximar

¹ De fato, a relação (6.2.61) é satisfeita para todas as funções radiais associadas com as três configurações de campo magnético.

² É visto que, para obtermos um resultado não nulo para o integrando de (7.1.7) tivemos que usar as expansões assintóticas das funções de Bessel modificadas até segunda ordem.

o integrando de (7.1.7) e conseqüentemente, obter uma expressão aproximada para o CF:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c \approx \frac{q^2 m}{4\pi r^2} \int_{mr}^{\infty} dz \frac{e^{-2x}}{x} \sum_j \epsilon_j |j + \alpha| F_j^{(i)} \left(z \frac{a}{r} \right) . \quad (7.1.8)$$

Devido a supressão da exponencial no integrando, as contribuições dominantes estão dadas na região do limite inferior da integração. Logo, o termo dominante é para,

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c \approx \frac{q^2}{4\pi r^3} e^{-2mr} \sum_j \epsilon_j |j + \alpha| F_j^{(i)}(ma) . \quad (7.1.9)$$

Nós podemos ver que no limite de campos massivos à grandes distâncias da estrutura, O CF induzido decai exponencialmente com mr . O termo $F_j^{(i)}(ma)$ dependerá apenas do modelo específico de campo magnético que estamos trabalhando.

Também podemos obter a contribuição do termo dominante para a expressão no limite de $ma \ll 1$. Para fazer isto, precisamos analisar, para cada modelo específico de campo magnético, o comportamento do fator $F_j^{(i)}(ma)$ para pequenos argumentos.

No limite $ma \ll 1$, o comportamento do CF induzido pode ser desenvolvido da seguinte maneira: Primeiro trocamos a soma em j , em (7.1.9), por $n = j - 1/2$. Sendo assim, podemos usar a notação, $F_n^{(i)} \equiv F_j^{(i)}$. Também trocamos n por $n - n_0$, sendo n_0 dado em (6.2.60). Então de (7.1.9) escrevemos,

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c \approx \frac{q^2}{4\pi^2 r^3} e^{-2mr} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_n |n + 1/2 + \alpha_0| F_{n-n_0}^{(i)}(ma) . \quad (7.1.10)$$

Onde escrevemos $F_{n-n_0}^{(i)}(ma)$ segundo (6.2.85), cujas ordens das funções de Bessel modificadas são dadas por (6.2.86).

Expandindo as funções de Bessel em (6.2.85) como potências de ma , o termo dominante é dado pela menor potência. Logo, temos duas possibilidades: para $0 \leq \alpha_0 < 1/2$ esse termo é dado para $n = -1$, e para $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$ este termo é dado para $n = 0$. Do mesmo modo como desenvolvemos para a densidade de corrente fermiônica azimutal induzida. Sendo assim, para $0 \leq \alpha_0 < 1/2$ e $n = -1$, $F_{n-n_0}^{(i)}(ma)$ é dado por (6.2.87) e, para $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$ com $n = 0$, $F_{n-n_0}^{(i)}(ma)$ é dado por (6.2.88).

O próximo passo consiste nos cálculos das contribuições dominantes para o coeficiente que contém toda informação sobre a estrutura cilíndrica de campo magnético, $\mathcal{V}_{-1-n_0}^{(i)}(im, a)$ e $\mathcal{V}_{-n_0}^{(i)}(im, a)$, para os três modelos. Isso pode ser feito por uma substituição direta das funções radiais, $R_1^{(i)}(im, a)$ e $R_2^{(i)}(im, a)$, em (6.1.40). Logo, para $ma \ll 1$, encontramos:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c \approx \frac{q^2}{2\pi^2 r^3 \Gamma^2(\beta)} e^{-2mr} |1/2 - |\alpha_0|| \left(\frac{ma}{2}\right)^{2\beta} \frac{\beta - \chi^{(l)}}{\beta \chi^{(l)}}, \quad (7.1.11)$$

onde β é dado por (6.2.90), e o parâmetro $\chi^{(l)}$, que especifica os modelos os três modelos de campo magnético, é dado por (6.2.91).

Nossa última análise a respeito do CF consiste em investigar o comportamento de $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c$ próximo da estrutura, isto é, $r \geq a$, para as três configurações de campo magnético diferentes. Em geral, o condensado fermiônico diverge próximo dessa região daí, as contribuições dominantes em (7.1.7) vem dos maiores valores possíveis de $|j|$. Para encontrarmos o termo dominante, é conveniente introduzir uma nova variável $z = \beta_j x$ e usar as expansões das funções de Bessel modificadas para grandes ordens, de modo igual quando tratamos da corrente azimutal induzida.

Para tornar nosso desenvolvimento mais simples, notando-se que (7.1.7) é uma função par em α , que pode ser verificada observando ao trocarmos $\alpha \rightarrow -\alpha$ e $j \rightarrow -j$. As ordens das funções de Bessel trocam da seguinte maneira: $\beta_j \rightarrow \tilde{\beta}_j$ e vice-versa. Analogamente, obtemos que $\nu_j \rightarrow \tilde{\nu}_j$ e vice-versa. Sendo assim, $F_j^{(i)}(y) \rightarrow -F_j^{(i)}(y)$ e o integrando de (7.1.7) não muda. Portanto, consideramos $\alpha > 0$ em nossa análise. Na soma sobre j procedemos da seguinte maneira: Para valores positivos de j , temos $\tilde{\beta}_j = \beta_j + 1$ e para valores negativos de j , fazendo a troca $j \rightarrow -j$, então, $\tilde{\beta}_j = \beta_j - 1$; todavia, o fator $F_j^{(i)}$ muda seu sinal. Como consequência podemos considerar apenas a soma sobre os valores positivos de j e dobrar o resultado obtido.

Assim, após introduzir a nova variável e utilizar a expansão para grandes ordens das funções de Bessel modificadas, o termo dominante no integrando de (7.1.7) é

$$K_{\tilde{\beta}_j}^2(\beta_j x) - K_{\beta_j}^2(\beta_j x) \approx \frac{\pi}{2\beta_j} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{-2\beta_j \eta} (e^{-2\eta} - 1), \quad (7.1.12)$$

onde $\eta = \sqrt{1+x^2}$.

Para os três modelos de campo magnético, é necessário encontrar o termo dominante de $F_j^{(i)}(\beta_j x \frac{a}{r})$ para grandes valores de j , porém isto já foi feito, no Capítulo 6, especificamente, na seção que tratamos da densidade de corrente azimutal, onde mostramos anteriormente que, para os três modelos, recaímos na mesma expressão dada por (6.2.93). Como $j = n + 1/2$, para grandes valores de j tomamos a aproximação $\beta_j \approx qn$. Assim o CF induzido pela estrutura pode ser aproximado para a seguinte forma:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c \approx \frac{m}{8\pi^2 r^2} \sum_{n>1} \frac{1}{n} \int_{\frac{mr}{qn}}^{\infty} dx \frac{e^{-2\eta} - 1}{1 + e^{2\tilde{\eta}}} \frac{e^{-2qn(\eta-\tilde{\eta})}}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (7.1.13)$$

Ainda mais, podemos também tomar a aproximação $\eta - \tilde{\eta} \approx x(1 - a/r)$, que é válida para $x \gg 1$. Observando que a seguinte razão pode ser aproximada para

$$\frac{e^{2\eta} - 1}{1 + e^{2\tilde{\eta}}} \approx -2x \left(1 - \frac{a}{r}\right) e^{-2\eta}, \quad (7.1.14)$$

assim, temos que a integral em (7.1.13) pode ser aproximada para

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c \approx -\frac{m(1-a/r)}{4\pi^2 r^2} \sum_{n>1} \frac{1}{n} \int_{\frac{mr}{qn}}^{\infty} dx x^2 e^{-2qnx(1-a/r)}. \quad (7.1.15)$$

Por fim, resolvendo a integração acima temos que

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c \approx -\frac{m}{16\pi^2 q^3 r^2} \frac{e^{-2mr(1-a/r)}}{(1-a/r)^2} \sum_{n>1} \frac{1}{n^4}. \quad (7.1.16)$$

Significando que o CF induzido pela estrutura diverge próximo à fronteira³, e sua divergência é proporcional a

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c \approx -\frac{m}{1440q^3 r^2} \frac{\pi^2}{(1-a/r)^2}. \quad (7.1.17)$$

Como a parcela do CF que depende apenas da presença da corda cósmica ideal, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_s^{ren}$, é finita nessa região, vemos que o condensado fermiônico total, (7.1.3), é dominado pelo termo que envolve a estrutura cilíndrica de campo magnético.

³ Lembramos aqui que, quando nos referimos a fronteira, estamos nos referindo a estrutura de campo magnético cilíndrica que envolve a corda cósmica.

Análise numérica

Como podemos ver, na Fig.7.1, mostramos a dependência do condensado fermiônico induzido, $\langle \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \rangle_c$, como função de mr , considerando $q = 2$ e $ma = 1$. No gráfico da esquerda, mostramos seu do condensado fermiônico induzido pela estrutura apenas para o modelo 1, levando em conta valores positivos e negativos de α . Com o intuito de prover um melhor entendimento a respeito do condensado, no gráfico da direita exibimos seu comportamento, também como função de mr , para os três modelos diferentes de campo magnético, considerando $\alpha = 1.2$. Por esses gráficos podemos inferir que num dado ponto fora do tubo cilíndrico, a intensidade do condensado fermiônico associado com o primeiro modelo apresenta o maior valor.

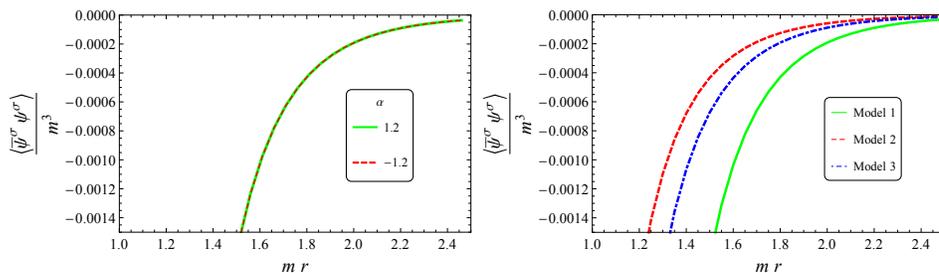


Fig. 7.1: O condensado fermiônico induzido pela estrutura foi mostrado, em unidades de “ m^3 ”, como função de mr para os valores de $q = 2.0$ e $ma = 1$. Do lado esquerdo, consideramos o CF induzido para o primeiro modelo assumindo $\alpha = \pm 1.2$. Do lado direito, comparamos a intensidade do CF induzido para os três modelos distintos considerando $\alpha = 1.2$.

Outras duas análises numéricas que desenvolvemos estão relacionadas com a dependência do CF induzido com os parâmetros que traduzem a presença da corda cósmica, q , e a intensidade do campo magnético, α . Então, do lado esquerdo da Fig.7.2, mostramos o comportamento do condensado fermiônico, para o modelo 1, $\langle \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \rangle_c$, como função de mr para $q = 1, 1.5$ e 2.5 com $\alpha = 1.2$ e $ma = 1$. Como podemos ver a intensidade do condensado fermiônico induzido aumenta de acordo com o aumento de q . Do lado direito, para o mesmo modelo, mostramos o comportamento do termo $\langle \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \rangle_c$, também como função de mr para $\alpha = 1.0, 1.5$ e 2.0 considerando $q = 1.5$ e $ma = 1$. Vemos também que tal termo aumenta quando a intensidade

do campo magnético aumenta, ou seja, quando α aumenta.

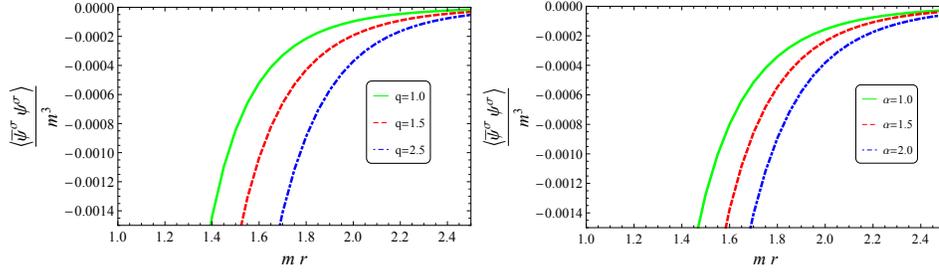


Fig. 7.2: O CF induzido pela estrutura foi mostrado, em unidades de “ m^3 ”, como função de mr considerando $ma = 1$. Do lado esquerdo, consideramos o CF induzido para o primeiro modelo, com $\alpha = 1.2$ e $q = 1, 1.5$ e 2.5 . Do lado direito, consideramos, também para o primeiro modelo, o CF induzido, tomando $q = 1.5$ e $\alpha = 1.0, 1.5$ e 2.0 . Vemos que para os dois caso quando aumentamos α ou q o condensado fermiônico também aumenta em intensidade.

7.2 Tensor energia-momento

Outra característica importante do vácuo fermiônico está associado com VEV do operador tensor energia-momento (TEM). Para um campo fermiônico carregado e massivo, na presença de um campo eletromagnético externo, tal operador é expresso por

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma_{(\mu} \mathcal{D}_{\nu)} \psi - (\mathcal{D}_{(\mu} \bar{\psi}) \gamma_{\nu)} \psi] , \quad (7.2.18)$$

onde, $\mathcal{D}_{\mu} \bar{\psi} = \partial_{\mu} \bar{\psi} - ie A_{\mu} \bar{\psi} - \bar{\psi} \Gamma_{\mu}$. Os parênteses nos índices da expressão acima significam que o tensor é simétrico sobre os mesmos. Similarmente, seguindo os mesmo passos desenvolvido para a densidade de corrente e de carga, como também para o condensado fermiônico, o VEV do tensor energia-momento, $\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle \equiv \langle T_{\mu\nu} \rangle$, pode ser desenvolvido pelo método da soma dos modos normalizados da função de onda fermiônica, isto é,

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{i}{2} \sum_{\sigma} [\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \gamma_{(\mu} \mathcal{D}_{\nu)} \psi_{\sigma}^{(-)} - (\mathcal{D}_{(\mu} \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}) \gamma_{\nu)} \psi_{\sigma}^{(-)}] . \quad (7.2.19)$$

Sendo assim, devemos desenvolver aqui todas as componentes do tensor energia-momento.

No sistema que estamos considerando, o TEM pode ser decomposto como se segue

$$\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle = \langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_s + \langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_c , \quad (7.2.20)$$

onde $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_s$ é a contribuição devido a presença apenas da corda cósmica ideal, e $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_c$ é a contribuição induzida pela estrutura não trivial de campo magnético.

No que se segue, apresentaremos, nesta Tese, as expressões para todas as componentes não nulas para o termo que carrega a dependência da estrutura de campo magnético não trivial do TEM, $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_c$. Pois o desenvolvimento para as componentes do termo $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_s$ foram analisadas em [66][67]. Não queremos nos prolongar, nesta Tese, com a repetição de cálculos matemáticos que já foram feitos tanto na densidade de corrente azimutal e densidade de carga, quanto feitos no condensado fermiônico que, por sua vez, são idênticos aos cálculos do TEM, que mostramos nesta seção. Deste modo, vamos apenas comentá-los partindo então, para a análise física das expressões obtidas.

Em [68] os autores calcularam, para o caso de um campo escalar massivo e carregado, na topologia de uma corda cósmica em dimensões maiores, o VEV do tensor energia-momento. Entretanto, mesmo sendo para o caso de um campo escalar, os cálculos desenvolvidos neste trabalho mostram resultados similares aqueles calculados para o caso de campos fermiônicos apresentados em [67].

7.2.1 A densidade de energia $\langle T_0^0 \rangle$

Vamos partir da componente densidade de energia do TEM, $\langle T_0^0 \rangle$. Daí, levando em conta que A_0 e Γ_0 são nulos, sendo $\partial_t \psi_{\sigma}^{(-)} = iE\psi_{\sigma}^{(-)}$, podemos escrever a densidade de energia como

$$\langle T_0^0 \rangle = - \sum_{\sigma} E \psi_{\sigma}^{(-)\dagger} \psi_{\sigma}^{(-)} . \quad (7.2.21)$$

Utilizando a forma explícita da função de onda de Dirac de energia negativa, dada por (6.1.51), e a equação (6.1.52), ao realizar a soma sobre s , encontramos a seguinte expressão

$$\langle T_0^0 \rangle = - \frac{q}{4\pi^2} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \lambda E [g_{\beta_j}^2(\lambda a, \lambda r) + g_{\beta_j}^2(\lambda a, \lambda r)] . \quad (7.2.22)$$

Logo, desenvolvendo a expressão acima, de acordo com (7.2.20), podemos mostrar que

$$\langle T_0^0 \rangle_s = -\frac{q}{4\pi^2} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \lambda E [J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\tilde{\beta}_j}^2(\lambda r)] \quad (7.2.23)$$

e

$$\langle T_0^0 \rangle_c = -\frac{q}{4\pi^2 r^2} \int_{mr}^{\infty} dz z \left(\frac{z^2}{r^2} - m^2 \right) \sum_j [K_{\beta_j}^2(z) - K_{\tilde{\beta}_j}^2(z)] F_j^{(i)} \left(z \frac{a}{r} \right), \quad (7.2.24)$$

onde $F_j^{(i)}$ é dado por (6.2.85).

7.2.2 A tensão radial $\langle T_r^r \rangle$

Nosso próximo passo é desenvolver a componente radial do TEM, $\langle T_r^r \rangle$. Neste caso temos: $A_r = \Gamma_r = 0$. Logo a expressão da componente radial do tensor energia-momento, em sua forma covariante mais geral, é dada por

$$\langle T_r^r \rangle = \frac{i}{2} \sum_{\sigma} [\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \gamma^r \partial_r \psi_{\sigma}^{(-)} - (\partial_r \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}) \gamma^r \psi_{\sigma}^{(-)}]. \quad (7.2.25)$$

Substituindo a função de onda fermiônica de energia negativa na expressão acima temos

$$\langle T_r^r \rangle = -\frac{q}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^3}{E} \sum_j \left[g'_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) g_{\tilde{\beta}_j}(\lambda a, \lambda r) - g'_{\tilde{\beta}_j}(\lambda a, \lambda r) g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) \right], \quad (7.2.26)$$

onde o apóstrofo significa a derivada com relação ao argumento λr das funções de Bessel contidas dentro da definição das funções g_{β} vistas em (6.1.49) e (6.1.50). Sendo assim, podemos mostra que $\langle T_r^r \rangle$ pode ser expressa como a soma de duas contribuições.

A primeira contribuição, que depende apenas da presença da corda cósmica ideal, é dada por

$$\langle T_r^r \rangle_s = \frac{q}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^3}{E} \sum_j S_j(\lambda r), \quad (7.2.27)$$

onde introduzimos a notação

$$S_j(z) = J_{\beta_j}^2(z) + J_{\tilde{\beta}_j}^2(z) - \frac{2\beta_j + \epsilon_j}{z} J_{\tilde{\beta}_j}(z) J_{\beta_j}(z). \quad (7.2.28)$$

E a segunda, que consiste no termo induzido pela estrutura cilíndrica não trivial, é,

$$\langle T_r^r \rangle_c = \frac{q}{2\pi^2 r^4} \int_{mr}^{\infty} dz z^3 \sum_j W_j(z) F_j^{(i)} \left(z \frac{a}{r} \right), \quad (7.2.29)$$

onde introduzimos outra função, $W_j(z)$, como se segue

$$W_j(z) = K_{\tilde{\beta}_j}^2(z) - K_{\beta_j}^2(z) - \frac{2\beta_j + \epsilon_j}{z} \epsilon_j K_{\tilde{\beta}_j}(z) K_{\beta_j}(z). \quad (7.2.30)$$

7.2.3 A tensão azimutal $\langle T_\phi^\phi \rangle$

Para desenvolvermos a componente azimutal do TEM, $\langle T_\phi^\phi \rangle$, devemos levar em consideração que,

$$A_\phi = -\frac{q\Phi}{2\pi}, \quad (7.2.31)$$

sendo Φ o fluxo magnético, e

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi &= -\frac{i}{2}(1-q)\Sigma^{(3)}, \\ \Sigma^{(3)} &= \text{diag}(\sigma_3, \sigma_3), \end{aligned} \quad (7.2.32)$$

com σ_3 sendo a matriz de Pauli no espaço-tempo plano. Então, esta componente é escrita como

$$\langle T_\phi^\phi \rangle = \frac{i}{2} \sum_\sigma [\bar{\psi}_\sigma^{(-)} \gamma^\phi \mathcal{D}_\phi \psi_\sigma^{(-)} - (\mathcal{D}_\phi \bar{\psi}_\sigma^{(-)}) \gamma^\phi \psi_\sigma^{(-)}]. \quad (7.2.33)$$

Para facilitar nosso desenvolvimento, podemos expressar a derivada, ∂_ϕ , em termos do momento angular na direção z : $\partial_\phi = i\hat{J} - i\frac{q}{2}\Sigma^{(3)}$. Então temos $\mathcal{D}_\phi = i(\hat{J} + eA_\phi - \frac{1}{2}\Sigma^{(3)})$. Logo, o operador momento angular atuando na função de onda com energia negativa, nos dá o seguinte resultado $\hat{J}\psi_\sigma^{(-)}(x) = qj\psi_\sigma^{(-)}$. Além do mais, podemos observar que o anticomutador, $\{\gamma^\phi, \Sigma^{(3)}\}$, que aparece no desenvolvimento, é nulo. Seguidamente, após alguns passos algébricos, temos

$$\langle T_\phi^\phi \rangle = -q \sum_\sigma (j + \alpha) \bar{\psi}_\sigma^{(-)} \gamma^\phi \psi_\sigma^{(-)}. \quad (7.2.34)$$

Agora, substituindo a matriz de Dirac γ^ϕ , dada por (6.1.11) e a expressão da função de onda com energia negativa, obtemos

$$\langle T_\phi^\phi \rangle = \frac{q^2}{2\pi^2 r} \sum_j \epsilon_j(j + \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2}{E} g_{\beta_j}(\lambda a, \lambda r) g_{\tilde{\beta}_j}(\lambda a, \lambda r) . \quad (7.2.35)$$

Onde a soma sobre s fornece um fator extra multiplicativo 2. Assim, obtemos para a componente azimutal do tensor energia-momento, como referido em (7.2.20), a seguinte expressão

$$\langle T_\phi^\phi \rangle_s = \frac{q^2}{2\pi^2 r} \sum_j \epsilon_j(j + \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2}{E} J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\tilde{\beta}_j}(\lambda r) , \quad (7.2.36)$$

que corresponde a contribuição da corda cósmica ideal, e

$$\langle T_\phi^\phi \rangle_c = \frac{q^2}{\pi^2 r^4} \sum_j \epsilon_j(j + \alpha) \int_{mr}^{\infty} dz z^2 K_{\beta_j}(z) K_{\tilde{\beta}_j}(z) F_j^{(i)}\left(z \frac{a}{r}\right) , \quad (7.2.37)$$

que corresponde a contribuição induzida pela estrutura cilíndrica de campo magnético.

7.2.4 A tensão axial $\langle T_z^z \rangle$

Para o desenvolvimento da componente axial do TEM, tomamos $A_z = \Gamma_z = 0$ na derivada covariante do operador de campo, desta maneira temos $\mathcal{D}_z \psi_\sigma^{(-)} = -ik \psi_\sigma^{(-)}$. Além do mais, a matriz γ^z coincide com a matriz de Dirac padrão no espaço-tempo plano [52]. Para esta componente, temos então que

$$\langle T_z^z \rangle = \sum_\sigma k \bar{\psi}_\sigma^{(-)} \gamma^z \psi_\sigma^{(-)} . \quad (7.2.38)$$

Substituindo a solução de função de onda com energia negativa, (6.1.51), e a matriz γ^z na expressão acima podemos mostrar que

$$\langle T_z^z \rangle_s = \frac{q}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda}{E} \sum_j \left[J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\tilde{\beta}_j}^2(\lambda r) \right] , \quad (7.2.39)$$

para a parte que depende apenas da presença da corda cósmica, e

$$\langle T_z^z \rangle_c = -\frac{q}{4\pi^2 r^2} \int_{mr}^{\infty} dz z \left(\frac{z^2}{r^2} - m^2 \right) \sum_j \left[K_{\tilde{\beta}_j}^2(z) - K_{\beta_j}^2(z) \right] F_j^{(i)}\left(z \frac{a}{r}\right) , \quad (7.2.40)$$

para o termo induzido pela estrutura de campo magnético.

Em [67] vemos que, por uma transformação conveniente, as expressões renormalizadas para o termo que corresponde apenas na presença de uma corda cósmica ideal, a densidade de energia coincide com o termo axial do tensor energia-momento, isto é, $\langle T_0^0 \rangle_s^{ren} = \langle T_z^z \rangle_s^{ren}$. Aqui, também podemos observar este mesmo comportamento para as contribuições dessas mesmas componentes devido a estrutura não trivial de campo magnético, ou seja, vemos que (7.2.24) coincide com (7.2.40), revelando que, para este termo, a invariância de boost ao longo da direção z é preservada.

7.3 As propriedades do vácuo e o tensor energia-momento

Nesta seção iremos investigar as propriedades e o comportamento assintótico dos VEVs encontrados na seção anterior. Estamos interessados em mostrar que o TEM obedece a condição de conservação,

$$\nabla_\mu \langle T_\nu^\mu \rangle = 0 , \quad (7.3.41)$$

que, para o sistema em consideração é reduzido a uma única equação diferencial,

$$\partial_r (r \langle T_r^r \rangle) = \langle T_\phi^\phi \rangle , \quad (7.3.42)$$

e a relação do traço,

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = m \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle . \quad (7.3.43)$$

Tais condições já foram provadas em [67], onde os autores mostraram que o VEV renormalizado associado com o caso idealizado, $\langle T_\nu^\mu \rangle_s$, obedece as duas propriedades citadas acima. Para a contribuição oriunda da estrutura não trivial, a equação (7.3.42) é automaticamente satisfeita por uma substituição direta das equações (7.2.29), (7.2.30) e (7.2.37) na mesma. Também, a relação do traço, (7.3.43), pode ser verificada facilmente pela soma direta das componentes da diagonal principal do tensor energia-momento induzido pela estrutura cilíndrica de campo magnético, isto é, somando (7.2.24), (7.2.29), (7.2.37) e (7.2.40), e comparando com o CF dado em (7.1.7).

Agora, prosseguindo nesta seção, vamos investigar o comportamento das componentes do VEV induzido pela estrutura do tensor energia-momento na região próxima da estrutura, $r \approx a$, e na região muito longe da estrutura, $r \gg a$. Nesta última região consideramos os casos de campo massivo e não massivo. De fato, é visto que a densidade energia coincide com a componente axial, assim, a soma da parte espacial consistirá apenas na soma das componentes radial e azimutal do tensor energia-momento. Neste sentido, podemos usar a notação $\langle T_i^i \rangle = \langle T_r^r \rangle + \langle T_\phi^\phi \rangle$. Consequentemente $\langle T_\mu^\mu \rangle = 2\langle T_0^0 \rangle + \langle T_i^i \rangle$.

Os procedimentos para desenvolvermos estas duas análises assintóticas são muito similares aquelas desenvolvidas para a densidade de corrente azimutal induzida [35] e para o condensado fermiônico [36]. Então, podemos apresentar de forma direta os resultados obtidos e fazer nossas discussões encima deles.

- Para $mr \gg ma$,

$$\langle T_0^0 \rangle_c \approx -\frac{q^2}{8\pi r^4} e^{-2mr} \sum_j \epsilon_j |j + \alpha| F_j^{(i)}(ma), \quad (7.3.44)$$

$$\langle T_i^i \rangle_c \approx \frac{q^2 m}{4\pi r^3} e^{-2mr} \sum_j \epsilon_j |j + \alpha| F_j^{(i)}(ma), \quad (7.3.45)$$

onde vemos que para grandes distâncias as componentes acima do tensor energia momento decaem exponencialmente, como no caso do CF.

- Para $r \approx a$,

$$\begin{aligned} \langle T_0^0 \rangle_c \approx & -\frac{3}{2880q^3} \frac{\pi^2}{r^4 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^4} - \frac{3m}{1440q^3} \frac{\pi^2}{r^3 (1 - a/r)^3} \\ & - \frac{5m^2}{2880q^3} \frac{\pi^2}{r^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2} + O\left(\frac{1}{1 - a/r}\right), \end{aligned} \quad (7.3.46)$$

$$\begin{aligned} \langle T_i^i \rangle_c \approx & \frac{3}{1440q^3} \frac{\pi^2}{r^4 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^4} + \frac{3m}{720q^3} \frac{\pi^2}{r^3 (1 - a/r)^3} \\ & + \frac{m^2}{360q^3} \frac{\pi^2}{r^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2} + O\left(\frac{1}{1 - a/r}\right). \end{aligned} \quad (7.3.47)$$

Nas duas expressões acima mantivemos todos os termos relevantes divergentes, com o intuito de obter a relação do traço de maneira correta, (7.3.43).

Em nossa próxima análise, vamos considerar o VEV do TEM no limite $r \gg a$ para o caso de campos não massivos. Como o sistema apresenta uma invariância de boost ao longo da direção z , para o caso de campos sem massa temos que a relação do traço é resumida à $\langle T_i^i \rangle_c = -2\langle T_0^0 \rangle_c$. Assim, precisamos apenas calcular o termo $\langle T_0^0 \rangle_c$, neste limite:

$$\langle T_0^0 \rangle_c = \frac{q}{4\pi^2 r^4} \sum_j \int_0^\infty dz z^3 \left(K_{\beta_j}^2(z) - K_{\beta_j}^2(z) \right) F_j^{(i)} \left(z \frac{a}{r} \right). \quad (7.3.48)$$

Para explorar o comportamento da densidade de energia neste limite, precisamos apenas tomar a aproximação assintótica do termo $F_j^{(i)} \left(z \frac{a}{r} \right)$ para $a/r \ll 1$. De fato, já fizemos isto tanto para o caso da densidade de corrente quanto para o condensado fermiônico, onde obtivemos as expressões correspondentes dadas por (6.2.87) e (6.2.88). Sendo assim, para este caso devemos apenas mudar o argumento ma para za/r . Os resultados que obtivemos são dados então por:

- Para $\alpha_0 > 0$

$$F_{-1+n_0}^{(i)}(za/r) \approx \frac{2}{\beta \Gamma^2(\beta)} \frac{\beta + i \mathcal{V}_{-1-n_0}^{(i)}(iz, a/r) \left(\frac{za}{2r\beta} \right)}{\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)} - i \mathcal{V}_{-1-n_0}^{(i)}(iz, a/r) \left(\frac{za}{2r} \right)^{-2\beta+1}}. \quad (7.3.49)$$

- Para $\alpha_0 < 0$

$$F_{-n_0}^{(i)}(za/r) \approx \frac{2}{\beta \Gamma^2(\beta)} \left(\frac{za}{2r} \right)^{2\beta} \frac{1 + i \mathcal{V}_{-n_0}^{(i)}(iz, a/r) \left(\frac{2r\beta}{za} \right)}{1 - i \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\beta)} \mathcal{V}_{-n_0}^{(i)}(iz, a/r) \left(\frac{za}{2r} \right)}. \quad (7.3.50)$$

Substituindo as expressões acima em (7.3.48) levando em conta as funções radiais, $R_l^{(i)}(iz, a/r)$, neste limite, para os três diferentes modelos, após alguns passos algébricos intermediários, encontramos que:

$$\langle T_0^0 \rangle \approx -\frac{q}{2^{4\beta} \pi^2 r^4} \frac{\beta - \chi^l}{\left(\frac{r}{a} \right)^{2\beta} \beta \chi^l} \frac{\Gamma(2 + \beta)}{\Gamma^2(\beta) \Gamma(4 + 2\beta)} \quad (7.3.51)$$

$$(2\Gamma(2 + \beta)\Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(2 + 2\beta)) ,$$

onde β e $\chi^{(l)}$ são dados por (6.2.90) e (6.2.91), respectivamente.

Então, concluímos que no limite de campos não massivos para $r \gg a$, o tensor energia-momento decai com $r^4 \left(\frac{r}{a}\right)^{2\beta}$. Percebamos que, em todos os limites tomados a relação do traço deste tensor é preservada.

Análise numérica

Após nossas considerações analíticas a respeito do TEM induzido pela estrutura, gostaríamos de prover algumas informações adicionais que não são fáceis de observarmos através das expressões analíticas. Então, com o objetivo de preencher esta lacuna, no que resta deste capítulo vamos desenvolver algumas análises numéricas.

Na Fig.7.3, mostramos a dependência do VEV induzido do TEM, $\langle T_0^0 \rangle_c$, como função de mr tomando $q = 2$ e $ma = 1$. Na imagem da esquerda, apresentamos seu comportamento considerando o modelo da casca cilíndrica de campo magnético, modelo 1, tomando em conta valores positivos e negativos para α . Na imagem da direita, para um melhor entendimento a respeito da densidade de energia, mostramos seu comportamento, para os três modelos de campo magnético, considerando $\alpha = 1.2$. Assim, do gráfico da direita, podemos inferir que em um dado ponto fora do tubo, o primeiro modelo apresenta maior intensidade.

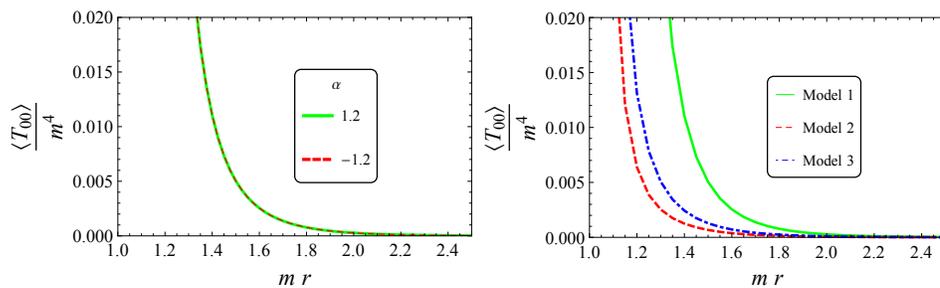


Fig. 7.3: A densidade de energia induzida pela estrutura está mostrada, em unidades de “ m^4 ”, como uma função de mr para o valor $ma = 1$. No gráfico da esquerda, foi considerado a configuração de campo magnético do modelo 1, para $\alpha = \pm 1.2$ e $q = 2$. No gráfico da direita, foi considerado os três modelos de campo magnéticos diferentes, para $\alpha = 1.2$ e $q = 2$.

Outra análise que devemos desenvolver está relacionada com a dependência da den-

sidade de energia induzida com a variação do parâmetro q , que codifica a intensidade do déficit de ângulo planar, e o parâmetro α , relacionado com a intensidade do campo magnético. Para as duas análises, utilizamos especificamente o modelo 1. Então, na Fig.7.4 mostramos o comportamento da densidade de energia induzida pela estrutura como função de mr .

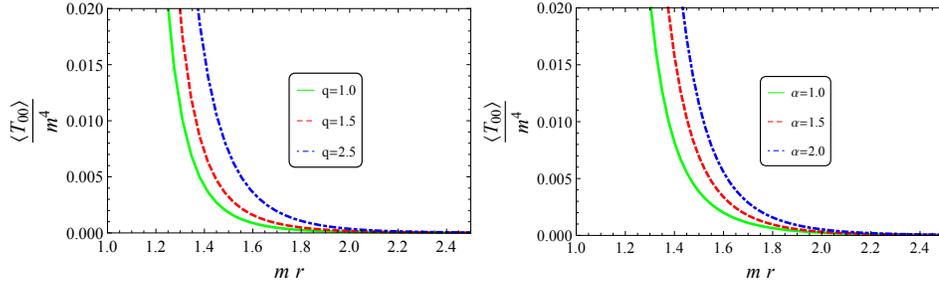


Fig. 7.4: A densidade de energia induzida pela estrutura está mostrada, em unidades de “ m^4 ”, como função de mr para o valor de $ma = 1$. No gráfico da esquerda consideramos a densidade de energia induzida pela estrutura tomando $q = 1, 1.5$ e 2.5 fixando $\alpha = 1.2$. No gráfico da direita consideramos três intensidades de fluxo magnético diferentes, sendo elas $\alpha = 1, 1.5$ e 2.0 , fixando $q = 2$. Ambos os gráficos foram construídos para o modelo 1.

No gráfico da esquerda exibimos o comportamento da densidade de energia induzida para um valor fixo do fluxo de campo magnético, $\alpha = 1.2$, tomando três valores diferentes de déficit de ângulo planar, $q = 1, 1.5$ e 2.5 . No gráfico da direita mostramos o comportamento da densidade de energia fixando um valor de déficit de ângulo planar, $q = 2$, tomando em conta três diferentes valores do fluxo de campo magnético, $\alpha = 1, 1.5$ e 2 . No dois casos, podemos ver que quanto maior for o parâmetro q ou o parâmetro α mais intenso será a densidade de energia induzida pela estrutura de campo magnético.

8. CONCLUSÕES

Nesta Tese investigamos a influência da topologia cônica do espaço-tempo gerado por uma corda cósmica ideal, e a presença de um campo magnético de extensão finita, sobre o vácuo associado ao campo fermiônico massivo. Especificamente calculamos os VEVs associados com a densidade de corrente e de carga, $\langle j^\mu \rangle$, apresentado no capítulo 6, com o condensado fermiônico, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$, e com o tensor energia-momento, $\langle T_\nu^\mu \rangle$, apresentado no capítulo 7, na região fora da estrutura cilíndrica de campo magnético. Salientamos que, os capítulos 6 e 7 representam as nossas contribuições originais para esta Tese.

Em nossa análise, adotamos que a geometria do espaço-tempo corresponde a de uma corda cósmica ideal em todo o espaço, cercada por um tubo cilíndrico de campo magnético de raio fixo a que se apresenta em três modelos diferentes. O primeiro modelo se apresenta como uma casca cilíndrica de campo magnético, o segundo se refere a um campo magnético, com simetria cilíndrica, que decai com um fator de $1/r$ e o terceiro consiste em um campo magnético homogêneo. Tal escolha para os modelos de campo magnético surge devido a simetria cilíndrica do problema, que permite encontrarmos não só soluções numéricas, como também soluções analíticas.

Com o objetivo de desenvolver nossas análises, tivemos que construir a função de onda normalizada para a região fora do tubo cilíndrico de campo magnético e calcular a densidade de corrente induzida, o condensado fermiônico e o tensor energia-momento utilizando o método da soma dos modos normalizados da função de onda de Dirac, como podemos ver em (6.2.53), (6.2.54), (7.1.1), e (7.2.19). O conjunto completo das funções de onda fermiônicas foi construída pela imposição de continuidade da função

de onda entre as regiões de dentro (região-*in*) e de fora (região-*ext*) da estrutura cilíndrica, isto é, na fronteira em $r = a$. Após isso, conseguimos construir os modos da função de onda com energia negativa e energia positiva, dados por (6.1.51)-(6.1.36).

Adotando a método da soma, mostramos que as expressões encontradas para os VEVs da densidade de corrente apresentam apenas a componente azimutal não nula. Além disso, mostramos também que as expressões encontradas para a densidade de corrente, $\langle j^\mu \rangle$, para o condensado fermiônico, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$, e para o tensor energia momento, $\langle T_\nu^\mu \rangle$, podem ser decompostas como a soma de duas contribuições distintas, como vemos em (6.2.57), (6.2.68), (7.1.3) e (7.2.20). Os primeiros termos, $\langle j^\mu \rangle_s$, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_s$ e $\langle T_\nu^\mu \rangle_s$, dependem apenas da parte fracionária da razão do fluxo magnético pelo fluxo quântico, que é uma consequência do efeito tipo Aharonov-Bohm. A segunda contribuição, representada por $\langle j^\mu \rangle_c$, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_c$ e $\langle T_\nu^\mu \rangle_c$, em geral não são funções periódicas do fluxo magnético e dependem do fluxo magnético total dentro da estrutura.

Também, nesta Tese, apresentamos análises a respeito do comportamento da densidade de corrente azimutal, do condensado fermiônico e do VEV do tensor energia-momento induzidos pela estrutura cilíndrica de campo magnético. Observamos que, considerando campos fermiônicos massivos a grandes distâncias do tubo cilíndrico, isto é, $mr \gg ma$, a componente azimutal da densidade de corrente induzida pela estrutura, o condensado fermiônico induzido e o VEV do tensor energia-momento decaem exponencialmente. Para a densidade de corrente azimutal induzida temos que o decaimento exponencial ocorre com $e^{-2mr}/(mr)^3$, para o condensado fermiônico encontramos $\frac{e^{-2mr}}{r^3}$ e no mesmo limite para a densidade de energia temos $\frac{e^{-2mr}}{r^4}$.

Em seguida, analisamos a densidade de corrente induzida, o CF induzido e o VEV do tensor energia-momento para duas outras regiões assintóticas, que consistem no limite de pontos próximos da estrutura, isto é, em $r \geq a$, e no limite de pontos a largas distâncias da estrutura de campo magnético, isto é, em $r \gg a$. Este último considerando o caso de campos fermiônicos não massivos. Contudo, para fazermos isso,

tivemos que considerar as soluções explícitas para as funções radiais na região-*in*, para as três configurações diferentes de campo magnético. Considerando pontos próximos da estrutura cilíndrica, mostramos que a densidade de corrente azimutal induzida diverge com $\frac{1}{r^4(1-a/r)^3}$, enquanto que o CF induzido e o VEV do TEM apresentam uma divergência em $\frac{1}{r^2(1-a/r)^2}$ e em $\frac{1}{r^4(1-a/r)^4}$, respectivamente. Como a contribuição do termo que depende apenas da presença da corda cósmica ideal neste limite, em geral, é finita, tanto para a densidade de corrente azimutal induzida como para o CF e o VEV do tensor energia-momento induzido, concluimos que para essas três quantidades dadas por (6.2.68), (7.1.3) e (7.2.20), respectivamente, são dominadas pelas contribuições induzidas pela estrutura cilíndrica de campo magnético.

Para campos fermiônicos não massivos e a grandes distâncias do tubo, i.e., em $r \gg a$ encontramos que a densidade de corrente induzida e a densidade de energia induzida pela estrutura cilíndrica decaem com o mesmo fator, $\frac{1}{r^4(r/a)^{2\beta}}$. Neste limite de campo não massivo e a grande distância da estrutura foi mostrado que a contribuição do termo que carrega dependência apenas da presença da corda cósmica ideal decai com $\frac{1}{r^4}$ [67], ou seja, neste limite tanto o termo $\langle j^\phi \rangle_s$ quanto o termo $\langle T_0^0 \rangle_s$ dominam, quando comparados com suas respectivas contribuições da estrutura, $\langle j^\phi \rangle_c$ e $\langle T_0^0 \rangle_c$. Com relação as propriedades que o tensor energia-momento obedece, para todos os limites observados, vemos necessariamente que nossos resultados satisfazem a relação do traço, (7.3.43), e é conservado, (7.3.42).

Para fim, em nossas conclusões, fechamos com algumas observações numéricas a respeito dos observáveis estudados nesta Tese, como função de várias quantidades físicas. Nas Fig.6.2, Fig.7.1 e Fig.7.3 mostramos dois gráficos. Nos gráficos à esquerda, consideramos apenas o modelo 1, e como esperado, mostramos que a densidade de corrente azimutal induzida pela estrutura é uma função ímpar do parâmetro α , ou seja, como esperado, ao mudarmos o sentido do campo magnético a corrente muda de sentido. Por outro lado, para o CF e o VEV da densidade de energia induzidas pela

estrutura vemos que ambos são funções pares de α . Nos gráficos à direita, Nas Fig.6.2, Fig.7.1 e Fig.7.3, apresentamos o comportamento da densidade de corrente azimutal, do CF e do VEV da densidade de energia induzidos pela estrutura como função de mr , para as três configurações de campo magnético, onde concluimos que o modelo 1, que representa a configuração de campo magnético em forma de casca cilíndrica, apresenta a maior intensidade, para os três observáveis físicos citados.

Nas Fig.6.4, Fig.7.2 e Fig.7.4, mostramos a densidade de corrente azimutal, o CF e a densidade de energia, respectivamente, induzidos pela estrutura como função de mr . Nos gráficos à esquerda mostramos, considerando apenas o modelo 1, que esses três observáveis induzidos pela estrutura cilíndrica de campo magnético aumentam em intensidade à medida que o parâmetro q aumenta, tomando um valor fixo do parâmetro α . Nos gráficos à direita, considerando as três configurações de campo magnético adotados nesta Tese, mostramos que, fixando um valor para o parâmetro q , a intensidade da densidade de corrente azimutal, Fig.6.4, do CF, Fig.7.2, e da densidade de energia, Fig.7.4, todos induzidos pela estrutura não trivial de campo magnético, aumentam de intensidade à medida que o parâmetro α aumenta. Notemos ainda que, na Fig.6.4 mostramos a densidade de corrente azimutal induzida como função de α , mostrando também que o termo $\langle j^\phi \rangle_c$ não é uma função periódica do fluxo magnético.

Como foi mencionado na *Introdução*, não há evidências fortes da existência de vórtices abelianos no cosmos. Todavia, se admitirmos sua existência, a interação desses objetos topológicos com o vácuo poderia fornecer grandes fenômenos como correntes induzidas e VEVs não nulos do tensor energia-momento induzidos. Estes são os principais objetivos desta Tese. Contudo, para obtermos uma informação completa a respeito destes VEVs, é necessário ter conhecimento sobre a estrutura interna das cordas cósmicas, e infelizmente não existe uma forma matemática fechada que reproduza tal comportamento, tanto da estrutura interna da mesma, quanto do fluxo de campo magnético que permeia tal estrutura. Então, a relevância deste modelo adotado nesta

Tese, considerando um campo magnético abeliano de alcance finito num espaço-tempo cônico, é uma possibilidade de como podemos aproximar a análise para o caso mais real possível para observar os VEVs induzidos por tais objetos. É claro que para uma análise mais precisa é necessário também levar em consideração a interação do campo com a estrutura da corda como foi feito em [69]. Sendo assim, este refinamento pode ser colocado para um trabalho futuro em outra publicação.

Finalizando esta seção, gostaríamos de ressaltar que a análise de um campo quântico na presença de um campo magnético confinado em um tubo cilíndrico de raio finito a , foi desenvolvido em [37] cujo VEV do tensor energia-momento foi associado ao campo escalar, e em [37] associado a um campo fermiônico [39], ambos sem massa. Logo, esta Tese, fundada nos nossos trabalhos publicados [35] e [36], onde consideramos campos fermiônicos massivos e carregados, junto com os trabalhos das referências [37] e [39] formam uma análise completa associada a campos quânticos de matéria.

APÊNDICE

A. RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Neste apêndice nós iremos desenvolver explicitamente as equações diferenciais radiais, que são satisfeitas pelas funções $R_1(r)$ e $R_2(r)$, considerando as três configurações de campo magnético, dados pelo ansatz (6.1.16) em (6.1.17):

$$\left[r^2 \lambda^2 - \left(qj + eA_\phi^{(i)} - \frac{1}{2} \right)^2 - er^2 B^{(i)}(r) \right] R_1(r) + r^2 R_1''(r) + r R_1'(r) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\left[r^2 \lambda^2 - \left(qj + eA_\phi^{(i)} + \frac{1}{2} \right)^2 + er^2 B^{(i)}(r) \right] R_2(r) + r^2 R_2''(r) + r R_2'(r) = 0, \quad (\text{A.2})$$

onde o índice superior $i = 1, 2, 3$ caracteriza qual modelo nós estamos tratando.

Agora nós temos o sistema de equações diferenciais mais geral que envolve os três modelos, que fornecerá, logicamente, três soluções distintas para $R^{(i)}(r)$.

A.1 O campo magnético na casca cilíndrica

Para este caso o potencial vetor é da forma

$$A_\phi^{(1)} = -q \frac{\Phi}{2\pi} \Theta(r - a). \quad (\text{A.3})$$

Na região $r < a$, tanto o potencial vetor quanto o campo magnético são nulos. Então as equações (A.1) e (A.2) nos levam a

$$\left[r^2 \lambda^2 - \left(qj - \frac{1}{2} \right)^2 \right] R_1(r) + r^2 R_1''(r) + r R_1'(r) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\left[r^2 \lambda^2 - \left(qj + \frac{1}{2} \right)^2 \right] R_2(r) + r^2 R_2''(r) + r R_2'(r) = 0. \quad (\text{A.5})$$

As soluções para este sistema de equações que é regular na origem, $r = 0$, são as funções de Bessel de primeiro tipo. Então, para a componente superior da função de

onda fermiônica nós temos

$$\psi_+ = e^{ikz} e^{iqn\phi} \begin{pmatrix} aJ_{\nu_j}(\lambda r) \\ bJ_{\nu_j+\tilde{\epsilon}_j}(\lambda r)e^{iq\phi} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

onde $\nu_j = q|j| - \frac{\tilde{\epsilon}_j}{2}$, com $\tilde{\epsilon}_j = 1$ for $j > 0$ e $\tilde{\epsilon}_j = -1$ for $j < 0$. A componente inferior é encontrada quando substituimos a solução acima em (6.1.17), assim temos

$$\psi_- = \frac{-ie^{ikz} e^{iqn\phi}}{(E+m)} \begin{pmatrix} \lambda b[J'_{\nu_j+\tilde{\epsilon}_j}(\lambda r) + \frac{\nu_j+\epsilon_j}{\lambda r} J_{\nu_j+\tilde{\epsilon}_j}(\lambda r)] + ikaJ_{\nu_j}(\lambda r) \\ \{\lambda a[J'_{\nu_j}(\lambda r) - \frac{\nu_j}{\lambda r} J_{\nu_j}(\lambda r)] - ikbJ_{\nu_j+\tilde{\epsilon}_j}(\lambda r)\}e^{iq\phi} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Utilizando as relações de recorrência envolvendo as funções de Bessel[55][63], podemos escrever:

$$\psi_- = e^{ikz} e^{iqn\phi} \begin{pmatrix} cJ_{\nu_j}(\lambda r) \\ dJ_{\nu_j+\tilde{\epsilon}_j}(\lambda r)e^{iq\phi} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

sendo c e d os novos coeficientes que são dados por,

$$c = \frac{ka - i\epsilon_j \lambda b}{E+m} \quad (\text{A.9})$$

$$d = -\frac{kb - i\epsilon_j \lambda a}{E+m} \quad (\text{A.10})$$

A.2 O campo magnético proporcional a $1/r$

Para este caso o potencial vetor é dado por

$$A_\phi^{(2)} = -q \frac{\Phi r}{2\pi a}. \quad (\text{A.11})$$

O campo magnético é $B^{(2)} = -q \frac{\Phi}{2\pi ar}$. Daí por (A.1) e (A.2) segue que,

$$\left[r^2 \lambda^2 - \left(qj + q\alpha \frac{r}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{q\alpha r}{a} \right] R_1(r) + r^2 R_1''(r) + r R_1'(r) = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\left[r^2 \lambda^2 - \left(qj + q\alpha \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{q\alpha r}{a} \right] R_2(r) + r^2 R_2''(r) + r R_2'(r) = 0. \quad (\text{A.13})$$

As soluções regulares na origem que satisfazem o sistema acima são as funções de Whittaker $M_{\kappa,\lambda}(z)$. Para a componente superior temos

$$\psi_+ = \frac{e^{ikz} e^{iqn\phi}}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} c_1 M_{\kappa,\nu_j}(\xi r) \\ c_2 M_{\kappa,\nu_j+\tilde{\epsilon}_j}(\xi r)e^{iq\phi} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

onde os parâmetros κ e ξ são dados segundo (6.2.79). A componente inferior é determinada quando substituimos a solução acima em (6.1.17). Assim temos:

$$\psi_- = \frac{-ie^{ikz} e^{iqn\phi}}{(E+m)\sqrt{r}} \left(\begin{array}{l} \xi c_2 [M'_{\kappa, \nu_j + \tilde{\epsilon}_j}(\xi r) + \frac{qj + \alpha r/a}{\xi r} M_{\kappa, \nu_j + \tilde{\epsilon}_j}(\xi r)] + ikc_1 M_{\kappa, \nu_j}(\xi r) \\ \{\xi c_1 [M'_{\kappa, \nu_j}(\xi r) - \frac{qj + \alpha r/a}{\xi r} M_{\kappa, \nu_j}(\xi r)] - ikc_2 M_{\kappa, \nu_j + \tilde{\epsilon}_j}(\xi r)\} e^{iq\phi} \end{array} \right) \quad (\text{A.15})$$

Infelizmente, nós não encontramos na literatura nenhuma relação de recorrência deste tipo que envolva as funções de Whittaker, que conecta as soluções da componente superior com a componente inferior em uma forma simples. Então, expressando tais funções em termos das funções hipergeométricas concludentes, e utilizando da álgebra computacional, nós podemos construir as seguintes relações:

- Para $j > 0$, nós temos,

$$M'_{\kappa, \nu_j + 1}(z) + \left(\frac{\nu_j + 1/2}{z} - \frac{\kappa}{2\nu_j + 1} \right) M_{\kappa, \nu_j + 1}(z) = c_j^{(+)} M_{\kappa, \nu_j}(z), \quad (\text{A.16})$$

$$M'_{\kappa, \nu_j}(z) - \left(\frac{\nu_j + 1/2}{z} - \frac{\kappa}{2\nu_j + 1} \right) M_{\kappa, \nu_j}(z) = c_j^{(-)} M_{\kappa, \nu_j + 1}(z). \quad (\text{A.17})$$

- Para $j < 0$, nós temos:

$$M'_{\kappa, \nu_j - 1}(z) - \left(\frac{\nu_j - 1/2}{z} - \frac{\kappa}{2\nu_j - 1} \right) M_{\kappa, \nu_j - 1}(z) = c_j^{(+)} M_{\kappa, \nu_j}(z), \quad (\text{A.18})$$

$$M'_{\kappa, \nu_j}(z) + \left(\frac{\nu_j - 1/2}{z} - \frac{\kappa}{2\nu_j - 1} \right) M_{\kappa, \nu_j}(z) = c_j^{(-)} M_{\kappa, \nu_j - 1}(z). \quad (\text{A.19})$$

Nas expressões acima os coeficientes $c_j^{(\pm)}$ são dados da seguinte forma:

$$c_j^{(+)} = \begin{cases} 2(\nu_j + 1), & j > 0. \\ \frac{1}{8\nu_j} \left[1 - \left(\frac{2\kappa}{2\nu_j + 1} \right)^2 \right], & j < 0. \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$c_j^{(-)} = \begin{cases} -\frac{1}{8(\nu_j + 1)} \left[1 - \left(\frac{2\kappa}{2\nu_j + 1} \right)^2 \right], & j > 0. \\ 2\nu_j, & j < 0. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Finalmente, nós podemos escrever a função de onda de Dirac com energia positiva na seguinte forma abaixo

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{e^{-ipx} e^{iqn\phi}}{\sqrt{r}} \left(\begin{array}{l} c_1 M_{\kappa, \nu_j}(\xi r) \\ c_2 M_{\kappa, \nu_j + \tilde{\epsilon}_j}(\xi r) e^{iq\phi} \\ \tilde{c}_1 M_{\kappa, \nu_j}(\xi r) \\ \tilde{c}_2 M_{\kappa, \nu_j + \tilde{\epsilon}_j}(\xi r) e^{iq\phi} \end{array} \right), \quad (\text{A.22})$$

onde

$$\tilde{c}_1 = \frac{kc_1 - ic_2c_j^{(+)}}{E + m} \quad \tilde{c}_2 = -\frac{kc_2 + ic_1c_j^{(-)}}{E + m} . \quad (\text{A.23})$$

A.3 O campo magnético homogêneo

Nossa última análise é para o campo magnético homogêneo. Neste caso, a componente azimutal do potencial vetor é,

$$A_\phi^{(3)}(r) = -\frac{q\Phi}{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^2 . \quad (\text{A.24})$$

O campo magnético é $B^{(3)} = -\frac{2q\Phi}{2\pi a^2}$. Seguindo os mesmos passos algébricos feitos para o campo magnético que decai em $1/r$, as soluções serão as funções de Whittaker regulares na origem. Para a componente superior temos

$$\psi_+ = \frac{e^{ikz} e^{iqn\phi}}{r} \begin{pmatrix} c_1 M_{\kappa-\frac{1}{4}, \frac{\nu_j}{2}}(\tau r^2) \\ c_2 M_{\kappa+\frac{1}{4}, \frac{\nu_j+\tilde{\epsilon}_j}{2}}(\tau r^2) e^{iq\phi} \end{pmatrix} , \quad (\text{A.25})$$

onde τ e κ são dados por

$$\tau = q\alpha/a^2, \quad \kappa = \frac{\lambda^2}{4\tau} - \frac{qj}{2} . \quad (\text{A.26})$$

Substituindo (A.25) em (6.1.17) nós temos que a componente inferior é dada por

$$\psi_- = \frac{-ie^{ikz} e^{iqn\phi}}{(E + m)r} \begin{pmatrix} c_2 \left(\frac{qj-\frac{1}{2}}{r} + \tau r + \partial_r\right) M_{\kappa^+, \frac{\tilde{\nu}_j}{2}}(\tau r) + ikc_1 M_{\kappa^-, \frac{\nu_j}{2}}(\tau r) \\ \{c_1 \left(\partial_r - \frac{qj-\frac{1}{2}+\tau r^2}{r}\right) M_{\kappa^-, \frac{\nu_j}{2}}(\tau r) - ikc_2 M_{\kappa^+, \frac{\tilde{\nu}_j}{2}}(\tau r)\} e^{iq\phi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Também não encontramos na literatura relações de recorrência envolvendo as funções de Whittaker necessárias para expressar (A.27) de uma forma simples. Usando o mesmo procedimento desenvolvido para o caso do campo decaindo com $1/r$, nós conseguimos desenvolver as seguintes relações de recorrência:

- Para $j > 0$:

$$\left(\frac{\nu_j}{2\tau} + \frac{1}{2} + \frac{d}{dz}\right) M_{\kappa+\frac{1}{4}, \frac{\nu_{j+1}}{2}}(z) = \frac{c_j^{(+)}}{2\sqrt{z}} M_{\kappa-\frac{1}{4}, \frac{\nu_j}{2}}(z) , \quad (\text{A.28})$$

$$\left(-\frac{\nu_j}{2\tau} + \frac{1}{2} + \frac{d}{dz}\right) M_{\kappa-\frac{1}{4}, \frac{\nu_j}{2}}(z) = \frac{c_j^{(-)}}{2\sqrt{z}} M_{\kappa+\frac{1}{4}, \frac{\nu_{j+1}}{2}}(z) . \quad (\text{A.29})$$

- Para $j < 0$

$$\left(-\frac{\nu_j + 1}{2\tau} + \frac{1}{2} + \frac{d}{dz}\right) M_{\kappa + \frac{1}{4}, \frac{\nu_j - 1}{2}}(z) = \frac{c_j^{(+)}}{2\sqrt{z}} M_{\kappa - \frac{1}{4}, \frac{\nu_j}{2}}(z), \quad (\text{A.30})$$

$$\left(\frac{\nu_j + 1}{2\tau} + \frac{1}{2} + \frac{d}{dz}\right) M_{\kappa - \frac{1}{4}, \frac{\nu_j}{2}}(z) = \frac{c_j^{(-)}}{2\sqrt{z}} M_{\kappa + \frac{1}{4}, \frac{\nu_j - 1}{2}}(z). \quad (\text{A.31})$$

Nas expressões acima, $c_j^{(\pm)}$ são dados por,

$$c_j^{(+)} = \begin{cases} 2(\nu_j + 1), & j > 0 \\ \left(1 - \frac{4\kappa + 1}{2(\nu_j + 1)}\right), & j < 0 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

$$c_j^{(-)} = \begin{cases} -\left(1 + \frac{4\kappa - 1}{2\nu_j}\right), & j > 0 \\ 2\nu_j, & j < 0 \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

Finalmente para o terceiro modelo nós temos a função de onda com energia positiva escrita como

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{e^{-ipx} e^{iqn\phi}}{r} \begin{pmatrix} c_1 M_{\kappa^-, \frac{\nu_j}{2}}(\tau r^2) \\ c_2 M_{\kappa^+, \frac{\tilde{\nu}_j}{2}}(\tau r^2) e^{iq\phi} \\ \tilde{c}_1 M_{\kappa^-, \frac{\nu_j}{2}}(\tau r^2) \\ \tilde{c}_2 M_{\kappa^+, \frac{\tilde{\nu}_j}{2}}(\tau r^2) e^{iq\phi} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.34})$$

onde $\tilde{c}_{1,2}$ também são dados segundo (A.23).

B. ANÁLISE DO COEFICIENTE $\mathcal{V}_j^{(I)}$

Para provar (6.2.61) nós devemos usar a sua forma explícita dada abaixo:

$$\mathcal{V}_j^{(i)}(\pm i\lambda, a) = \frac{R_2^{(i)}(r)}{R_1^{(i)}(r)}. \quad (\text{B.1})$$

Para o modelo 1, que consiste na casca de campo magnético temos

$$\mathcal{V}_j^{(1)}(\pm i\lambda, a) = \tilde{\epsilon}_j \frac{J_{\tilde{\nu}_j}(i\lambda a)}{J_{\nu_j}(i\lambda a)}. \quad (\text{B.2})$$

Usando as bem conhecidas relações de recorrência envolvendo as funções de Bessel com argumento imaginário e as funções de Bessel modificadas [63], a equação acima se torna

$$\mathcal{V}_j^{(1)}(\pm i\lambda, a) = \tilde{\epsilon}_j(\pm i)^{\tilde{\epsilon}_j} \frac{I_{\tilde{\nu}_j}(\lambda a)}{I_{\nu_j}(\lambda a)}. \quad (\text{B.3})$$

Notemos que, para valores positivos ou negativos de j , $\tilde{\epsilon}_j = \pm 1$, conseqüentemente $\tilde{\epsilon}_j(\pm i)^{\tilde{\epsilon}_j} = \pm i$. Desta maneira nós temos:

$$\mathcal{V}_j^{(1)}(\pm i\lambda, a) = \pm i \text{Im}[\mathcal{V}_j^{(1)}(i\lambda, a)]. \quad (\text{B.4})$$

Para os outros dois modelos, o procedimento para mostrar que (6.2.61) é o mesmo, pois ambos os casos tratam da mesma função especial. Especificamente para o segundo modelo, nós podemos usar (6.2.78)-(6.2.80). Então, nós temos

$$\mathcal{V}_j^{(2)}(\pm i\lambda, a) = c_j^{(2)} \frac{M_{\kappa, \tilde{\nu}_j}(\xi a)}{M_{\kappa, \nu_j}(\xi a)}. \quad (\text{B.5})$$

Tomando $\lambda \rightarrow \pm i\lambda$ nós obtemos:

- Para valores positivos de j

$$c_j^{(2)} = \frac{(\pm i\lambda)}{\xi} \frac{1}{2q|j| + 1} = \pm i \text{Im}[c_j^{(2)}] \quad (\text{B.6})$$

- Para valores negativos j

$$c_j^{(2)} = -\frac{\xi}{\pm i\lambda}(2q|j| + 1) = \pm i\text{Im}[c_j^{(2)}] . \quad (\text{B.7})$$

Consequentemente, para o segundo modelo

$$\mathcal{V}_j^{(2)}(\pm i\lambda, a) = c_j^{(2)} \frac{M_{\kappa, \bar{\nu}_j}(\xi a)}{M_{\kappa, \nu_j}(\xi a)} = \pm i\text{Im}[\mathcal{V}_j^{(2)}(i\lambda, a)] . \quad (\text{B.8})$$

C. FUNÇÕES ESPECIAIS

Neste apêndice nós iremos apresentar algumas das propriedades obedecidas pelas funções de Bessel e Whittaker, as quais foram usadas para calcularmos os observáveis físicos e desenvolver explicitamente as equações diferenciais radiais, que são satisfeitas pelas funções $R_1(r)$ e $R_2(r)$, considerando as três configurações de campo magnético.

C.1 Funções de Bessel

A equação de Bessel é dada por

$$z^2 \frac{d^2 Z_\nu}{dz^2} + z \frac{dZ_\nu}{dz} + (z^2 - \nu^2) Z_\nu = 0 . \quad (\text{C.1})$$

Cujas soluções linearmente independentes (LI) são

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \quad (\text{C.2})$$

e

$$N_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} . \quad (\text{C.3})$$

As funções $N_\nu(z)$ são as chamadas funções de Neumann ou Bessel de segundo tipo.

Se $\nu \in \mathbb{Z}$ inteiro, $J_\nu(z) = (-1)^\nu J_{-\nu}(z)$ e portanto

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial (-1)^n J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} . \quad (\text{C.4})$$

Outro conjunto de funções, $H_\nu^{(1)}(z)$ e $H_\nu^{(2)}(z)$, chamadas de Hankel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, são utilizadas para apresentar as soluções LI de (C.1):

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z) \quad (\text{C.5})$$

e

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z) . \quad (\text{C.6})$$

As funções de Bessel modificadas, $I_\nu(z)$ e $K_\nu(z)$, são soluções da equação diferencial

$$z^2 \frac{d^2 Z_\nu}{dz^2} + z \frac{dZ_\nu}{dz} - (z^2 + \nu^2) Z_\nu = 0 . \quad (\text{C.7})$$

Estas funções são definidas por:

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) = \left(\frac{3}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)^{2k}}{k!(k+\nu)!} \quad (\text{C.8})$$

e

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)} . \quad (\text{C.9})$$

As funções $I_\nu(z)$ são regulares na origem e as funções $K_\nu(z)$ anulam-se exponencialmente para $z \rightarrow \infty$.

C.2 Funções de Whittaker

A equação de Whittaker é dada por

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} \right) w = 0 . \quad (\text{C.10})$$

Cujas soluções linearmente independentes são

$$M_{\kappa,\nu}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\mu} M\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu; z\right) \quad (\text{C.11})$$

e

$$W_{\kappa,\nu}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\mu} U\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu; z\right) , \quad (\text{C.12})$$

onde $M(a, b; z)$ e $U(a, b; z)$ são as funções de Kummer, definidas por

$$M(a, b; z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (\text{C.13})$$

e

$$U(a, b; z) = \frac{\pi}{\sin(\pi b)} \left[\frac{M(a, b; z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{M(a+1-b, 2-b; z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right] , \quad (\text{C.14})$$

sendo $b \neq 0, -1, -2, \dots$

Apenas as funções $M_{\kappa,\nu}(z)$ são regulares na origem ($z \approx 0$).

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. W. B. Kibble, *J. Phys.* A9, 1387 (1976).
- [2] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic String and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, England, 1994)
- [3] V. Berezhinski, B. Hnatyk, and A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **64**, 043004 (2001).
- [4] T. Damour and A. Vilenkin, *Phys Rev. Lett* **85**, 3761 (2000).
- [5] P. Bahttacharjee and G. Sigl, *Phys. Rep.* **327**, 109 (2000)
- [6] T. M. Helliwell and D. A. Konkowski, *Phys. Rev. D* 34, 1918 (1986).
- [7] B. Linet, *Phys. Lett. A* 124, 240 (1987).
- [8] V. P. Frolov and E. M. Serebriany, *Phys. Rev. D* 35, 3779 (1987).
- [9] J. S. Dowker, *Phys. Rev. D* 36, 3095 (1987).
- [10] J. S. Dowker, *Phys. Rev. D* 36, 3742 (1987).
- [11] P. C.W. Davies and V. Sahni, *Classical Quantum Gravity* 5, 1 (1988).
- [12] G. B. Hobbs et. all, *Publications of the Astronomical Society os Australia* **26**, 103-109 (2009).
- [13] A. G. Smith, in *The Formation and Evolution of Cosmic Strings*, edited by G.W. Gibbons, S.W. Hawking, and T. Vachaspati, *Proceedings of the CambridgeWorkshop*, Cambridge, England, 1989 (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990).

-
- [14] B. Allen and A. C. Ottewill, *Phys. Rev. D* **42**, 2669 (1990).
- [15] B. Allen, J. G. Mc Laughlin, and A. C. Ottewill, *Phys. Rev. D* **45**, 4486 (1992).
- [16] B. Allen, B. S. Kay, and A. C. Ottewill, *Phys. Rev. D* **53**, 6829 (1996).
- [17] T. Souradeep and V. Sahni, *Phys. Rev. D* **46**, 1616 (1992).
- [18] K. Shiraishi and S. Hirenzaki, *Classical Quantum Gravity* **9**, 2277 (1992).
- [19] V. B. Bezerra and E. R. Bezerra de Mello, *Classical Quantum Gravity* **11**, 457 (1994).
- [20] E. R. Bezerra de Mello, *Classical Quantum Gravity* **11**, 1415 (1994).
- [21] G. Cognola, K. Kirsten, and L. Vanzo, *Phys. Rev. D* **49**, 1029 (1994).
- [22] E. S. Moreira, Jr., *Nucl. Phys. B* **451**, 365 (1995).
- [23] D. Iellici, *Classical Quantum Gravity* **14**, 3287 (1997).
- [24] N. R. Khusnutdinov and M. Bordag, *Phys. Rev. D* **59**, 064017 (1999).
- [25] V. B. Bezerra and N. R. Khusnutdinov, *Classical Quantum Gravity* **23**, 3449 (2006).
- [26] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, A. A. Saharian, and A. S. Tarloyan, *Phys. Rev. D* **78**, 105007 (2008).
- [27] Superconductivity, Vol I and II. Ed. R. D. Parks (Dekker, New York, 1969); J. R. Schrieffer, *Superconductivity* (Benjamin, New York, 1964)
- [28] A. A. Abrikosov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32**, 1442 (1957) [*Sov. Phys. JETP* **5**, 1174 (1957)].
- [29] N. B. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys.* **B61**, 45 (1973).

-
- [30] D. Garfinkle, Phys. Rev. D **32**, 1323 (1985).
- [31] P. Laguna-Castillo and R. A. Matzner, Phys. Rev. D **35**, 2933 (1987).
- [32] E. B. Bogomolny, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 861 (1976).
- [33] M. K. Prasad, and C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. 35, 760 (1975).
- [34] B. Linet, Phys. Rev. D 33, 1833 (1986);
- [35] M. S. Maior de Sousa, R. F. Ribeiro, and E. R. Bezerra de Mello, Phys. Rev. D 93, 043545 (2016).
- [36] M. S. Maior de Sousa, R. F. Ribeiro, and E. R. Bezerra de Mello, Phys. Rev. D 95, 045005 (2017).
- [37] J. Spinelly, E. R. Bezerra de Mello, Class. Quantum Grav. 20, 874 (2003)
- [38] J. Spinelly, E. R. Bezerra de Mello, Int. J. Mod. Phys. A 17, 4375 (2002)
- [39] J. Spinelly, E. R. Bezerra de Mello, Int. J. Mod. Phys. D 13, 607 (2004)
- [40] J. Spinelly, E. R. Bezerra de Mello, Nucl Phys. B (Proc. Suppl.) 127, 77 (2004)
- [41] J. Spinelly, E. R. Bezerra de Mello, JHEP 09, 005 (2008)
- [42] D. A. Bromley and W. Greiner, Thermodynamics and Statistical Mechanics, Springer (1995)
- [43] M. Kaku. QUANTUM FIELD THEORY: *A Mordern Introduction*. New York, Oxford, Oxford University Press (1993).
- [44] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg Phys. Rev. **127**, 965 (1962)
- [45] P. W. Higgs. Phys. Rev. Lett. 13, 508 (1964); P. W. Higgs. Phys. Let. 12(2), 132 (1964).

-
- [46] M. Gomes, A. Yu. Petrov, V. O. Rivelles and A. J. Silva, Phys. Rev. D **67**, 125003 (2003).
- [47] M. Carmeli, Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory, John Wiley and Sons, N.Y. (1982).
- [48] G. Hooft, Commun. Math. Phys. 117, 685 (1988).
- [49] J. S. Dowker, Nuovo Cim. 52 (1967), 129; L. H. Ford e A. Vilenkin, J. Phys. A 41 (1981), 2353; V. B. Bezerra, Phys. Rev. D 35 (1987), 2031; V. B. Bezerra, Phys. Rev. D 38, 506 (1988).
- [50] F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory, John Wiley and Sons, N.Y. (1993).
- [51] D. A. Bromley and W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics, Springer (1990).
- [52] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill (1964).
- [53] I. D. Soares, in *II Escola de Cosmologia e Gravitação do Centro Brasileiro de Pesquisas Física*, edited by M. Novelo, J. Sasson e Cia. Ltda., Rio de Janeiro, Brazil (1980).
- [54] R. K. Pathria, Statistical Mechanics, Oxford Univ. Press, London (1972).
- [55] G. B. Arfken and H. J. Weber, Mathematical methods for physicists. San Diego Academic Press, 4th (1995).
- [56] L. H. Ford, In **Campos do Jordao 1997, Particles and fields** 345-388 [gr-qc/9707062].
- [57] S. Holland and R. M. Wald, Phys. Rep 574, 1-53 (2015).

-
- [58] N. D. Birrell e P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press. Cambridge. England. (1982).
- [59] E. Schrodinger, *Physica* **6**, 899 (1939).
- [60] M. Bordag and S. Voropaev, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 7637 (1993).
- [61] M. Bordag and S. Voropaev, *Phys. Lett. B* **333**, 238 (1994).
- [62] M. Bordag and N. Khusnutdinov, *Classical Quantum Gravity* **13**, L41 (1996).
- [63] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (National Bureau of Standards, Washington DC, 1964).
- [64] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [65] E .R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, *Eur. Phys. J. C.* **73**, 2532 (2013).
- [66] E. R. Bezerra de Mello, A. A. Saharian, S. V. Abajyan, *Class. Quantum Grav.* **30**, 015002 (2013).
- [67] S. Belluci, E. R. Bezera de Mello, A. de Padua, A. A. Saharian, *Eur. Phys. J. C* **74**, 2688 (2014).
- [68] Yu. A Sitenko, N.D. Vlasii, *Class. Quantum Grav.* **29**, 095002 (2012).
- [69] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, A. A. Saharian, and H. H. Harutyunyan, *Phys. Rev. D* **91**, 064034 (2015).