

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Dissertação de Mestrado

O modelo de Gross-Neveu em um ponto de Lifshitz

Ricardo Andrés Martinez von Dossow

JOÃO PESSOA- PB
-FEVEREIRO DE 2016-

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Dissertação de Mestrado

**O modelo de Gross-Neveu em um ponto de
Lifshitz**

Ricardo Andrés Martinez von Dossow

Dissertação apresentada à Coordenação
do Programa de Pós-Graduação em
Física da Universidade Federal da
Paraíba, sob orientação do professor Dr.
José Roberto Soares do Nascimento,
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Física

JOÃO PESSOA- PB
-FEVEREIRO DE 2016-

D724m Dossow, Ricardo Andrés Martinez von.
 O modelo de Gross-Neveu em um ponto de Lifshitz /
 Ricardo Andrés Martinez von Dossow.- João Pessoa, 2016.
 52f. : il.
 Orientador: José Roberto Soares do Nascimento
 Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
 1. Física. 2. Modelo de Gross-Neveu. 3. Expansão 1 N.
 4. Equação de gap. 5. Tensor de polarização.
 6. Escalonamento anisotrópico.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno **Ricardo
Andres Martínez Von Dossow**, candidato ao
Título de Mestre em Física na Área de
Concentração Física das Partículas
Elementares e Campos.

Aos dezenove dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e seis, às 10h00, na sala de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física das Partículas Elementares e Campos, **Ricardo Andres Martínez Von Dossow**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: José Roberto Soares Nascimento (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Albert Petrov (DF/UFPB) e Tiago Mariz (UFAL). Dando início aos trabalhos, o Prof. José Roberto Soares Nascimento comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado "*O modelo de Gross-Neveu em um ponto de lifshitz*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, lavrei a presente ata que vai assinada por mim mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, 19 de fevereiro de 2016.

Prof. Dr. José Roberto Soares Nascimento
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Albert Petrov
UFPB

Prof. Dr. Tiago Mariz
UFAL

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário



Aos meus Pais e Avós

*“There is pleasure in recognising
old things from a new viewpoint”*

Richard Feynman

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer aos meus pais, porque sempre me deram as facilidades para desenvolver minhas capacidades, sempre me apoiaram e deram tudo o que precisei para chegar até aqui, por seu amor, cuidado, compreensão e por me ensinar os valores para ser a pessoa que hoje eu sou.

Desejo agradecer aos meus irmãos pelo carinho e apoio incondicional, e também aos meus avós por todo o amor e apoio. A todos meus familiares que sempre me apoiaram e expressaram carinho à distância durante minha estadia no Brasil.

Agradecer a todos meus amigos, em especial Adriano e Ruy, por sua grande ajuda quando cheguei ao Brasil, tanto em questões acadêmicas e burocráticas, assim como na adaptação à vida no Brasil.

Ao professor José Roberto Soares do Nascimento, por aceitar ser meu orientador e confiar em minha pessoa, pelas dicas e ajudas na preparação desta dissertação.

Ao professor Rubens Freire, por sua grande ajuda no desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores do Departamento de Física, pelas aulas ministradas.

A todas as pessoas que fizeram parte da minha vida nesta bela etapa, contribuindo para que eu tivesse uma melhor passagem nesta maravilhosa terra, com as quais vivi momentos importantes que guardarei para sempre no meu coração.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação trabalhamos com o modelo de Gross-Neveu em $(2+1)$ dimensões na expansão $1/N$ no contexto de Horava-Lifshitz. Primeiro, faremos uma revisão do artigo [6], onde se mostra que o Modelo de Gross-Neveu na expansão $1/N$ apresenta uma geração dinâmica de massa mediante a introdução de um campo auxiliar, o que traz como consequência a quebra dinâmica da simetria de paridade. Calculamos a equação de gap, onde veremos a dependência da massa gerada com a constante de acoplamento. Após isso, acoplaremos um campo de gauge ao modelo, e estudamos o tensor de polarização, o qual vai gerar um termo induzido de tipo Chern-Simons na lagrangiana efetiva. Como novidade, trabalhamos com o Modelo de Gross-Neveu no contexto de Horava-Lifshitz, onde se faz um escalonamento anisotrópico, quebrando, assim, a invariância de Lorentz. Introduzimos um campo auxiliar e estudamos os casos em que o valor do expoente dinâmico crítico z é par e quando é ímpar. No caso em que z é par, não há geração dinâmica de massa pelo que a simetria de paridade é conservada e também não teremos o termo induzido de Chern-Simons. No caso em que z é ímpar, vamos ter a geração dinâmica de massa e vai ocorrer a quebra dinâmica de simetria de paridade. Finalmente, acoplamos um campo de gauge no modelo e encontramos o termo tipo Chern-Simons, o qual mostra claramente a anisotropia do espaço tempo para valores de $z > 1$.

Palavras chave: Modelo de Gross-Neveu, Expansão $1/N$, Equação de gap, Tensor de Polarização, Chern-Simons, Escalonamento Anisotrópico, Horava-Lifshitz

Abstract

In this dissertation we work with the Horava-Lifshitz-like Gross-Neveu model in $(2+1)$ dimensions in the Large N expansion. Firstly we make an article revision [6] where it is shown that the Gross-Neveu Model in the $1/N$ expansion presents a dynamic mass generation by means of the introduction of an auxiliary field, which results in the dynamical parity broken. We calculate the gap equation where we will see the generated mass dependence with the coupling constant. After that, we will put a gauge field to the model and study the polarization tensor which will generate an induced Chern-Simons term in the Effective Lagrangian. As a novelty, we work with the Gross-Neveu Model in the context of Horava-Lifshitz, where anisotropic scaling is done, thus breaking the Lorentz invariance. We introduce an auxiliary field and we study the cases which the value of the critical dynamic exponent Z is even and when it is odd. In the case where z is even, there is no dynamic mass generation so the parity symmetry is conserved and we will not have the term induced of Chern-Simons either. In the case where z is odd, we will have the dynamic mass generation and the dynamic parity symmetry will occur. Finally we couple a gauge field in the model and find the Chern-Simons term, which clearly shows the anisotropy of space and time for values of $z > 1$

keywords: Gross-Neveu model, Large N expansion, gap equation, polarization tensor, Chern-Simons, lifshitz scaling, Horava-Lifshitz

Sumário

1	Introdução	1
2	Expansão $1/N$	4
2.1	Modelo φ^4	4
2.2	Contagem de Potências	7
2.3	Regularização Dimensional	11
3	Modelo de Gross-Neveu na expansão $1/N$	14
3.1	Modelo de Gross-Neveu em $(2+1)$ dimensões	14
3.2	Equação de Gap	16
3.3	Termo de Chern-Simons	18
4	O modelo de Gross-Neveu em um ponto de Lifshitz	21
4.1	Escalonamento de Lifshitz	21
4.2	O modelo de Gross-Neveu em um ponto de Lifshitz	22
4.3	Equação de gap	24
4.3.1	Equação de gap para z par	24
4.3.2	Equação de gap para z ímpar	25
4.4	Termo de Chern-Simons	28
4.4.1	Termo de Chern-Simons para z ímpar	28
5	Conclusão	33
A	Notação	35
B	Matrizes Gama	37
C	Função gama	39

Capítulo 1

Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é uma aplicação conjunta da Relatividade Restrita e da Mecânica Quântica. Ela surgiu da descrição quântica da interação eletromagnética através da Eletrodinâmica Quântica (QED). Devido ao sucesso da QED, pensou-se em aplicar o formalismo da TQC as outras forças da natureza: forças fraca, forte e gravitacional, fracassando nesta última.

Apesar do fracasso gravitacional, a TQC obteve vários sucessos empíricos, sendo a QED uma das teorias mais precisas da Física. Porém, desde seu surgimento, encontrou-se um problema sério, que é o problema dos infinitos: em muitas situações, a teoria prevê valores infinitos para determinadas quantidades que devem ser observáveis e, portanto, finitas, como por exemplo, correções de carga e massa do elétron.

Para resolver o problema dos infinitos, foram desenvolvidas as técnicas de Renormalização, as quais se baseiam nas ideias de que a massa efetiva de um elétron, por exemplo, é composta por uma massa nua (sem fótons virtuais) que se pressupõe ser infinita, e por uma outra massa levando em conta os fótons virtuais, que pode ser calculada na teoria e fornece um valor infinito, e de que uma quantidade infinita “cancela” a outra, de forma que a massa observada experimentalmente seja uma massa efetiva finita. Assim, a renormalização pode ser entendida como o processo no qual as divergências são eliminadas, absorvendo-as em novas definições dos parâmetros físicos, como nesse caso particular, a massa.

A renormalização conseguiu resolver os problemas da QED e corroborar resultados empíricos, pelo que gerou grande expectativa em poder descrever as outras interações da natureza por meio de TQC's renormalizáveis, tal como a QED. No decorrer dos anos, e não isento de problemas, logrou-se descrever as interações fortes e fracas, conseguiu-se unificar a força eletromagnética com a força fraca dando origem à Teoria Eletrofraca e teve o desenvolvimento da QCD (siglas em inglês de Cromodinâmica Quântica), mas a interação gravitacional resistiu-se até os dias de hoje.

No ano 2009, Horava propôs uma teoria gravitacional renormalizável [2,3], baseando-se nas ideias de escalonamento anisotrópico (escalonamento de Lifshitz) que Lifshitz propôs no ano 1941 [1], para descrever o fenômeno dos pontos tri-críticos da matéria condensada, onde sugere um escalonamento do tipo

$$t \rightarrow b^z t, \quad x^i \rightarrow b x^i \quad (i = 1, \dots, d).$$

onde o inteiro z é o expoente dinâmico crítico que indica o grau de anisotropia entre o espaço e o tempo. Devido a esse escalonamento anisotrópico, a simetria de Lorentz é explicitamente quebrada para $z \neq 1$. No caso da gravitação, em (3+1) dimensões, a teoria torna-se renormalizável para $z = 3$.

Nos últimos anos, a ideia da gravitação de Horava-Lifshitz foi o ponto de partida para o estudo de outras teorias de campos com um escalonamento de Lifshitz.

No ano 1971, D. Gross e A. Neveu propuseram um modelo de campos fermiônicos sem massa de duas dimensões com uma interação quártica [4], descrito pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{g^2}{2} (\bar{\psi} \psi)^2.$$

Os autores analisaram a teoria utilizando a expansão $1/N$ e obtiveram dois importantes resultados: a teoria é assintoticamente livre e ocorre uma quebra espontânea de simetria chiral. É por isso que o modelo de Gross-Neveu é considerado um “Toy Model” da QCD, já que compartilham algumas características dinâmicas.

O modelo de Gross-Neveu corresponde a uma versão em (1+1)-dimensões renormalizável do modelo em (3+1)-dimensões de Nambu-Jona-Lasinio [5] que é não renormalizável.

No decorrer dos anos, o modelo de Gross-Neveu também tem sido estudado no contexto de Temperatura Finita, sendo motivado pela prestação do modelo a prover informações como modelo efetivo tanto da QCD, como de sistemas fermiônicos na matéria condensada, onde tem aplicações, por exemplo, em supercondutividade e em grafeno [22-35].

No ano 1990, M. Gomes, V. O. Rivelles e A. J. da Silva publicaram um artigo no qual trabalham com o modelo de Gross-Neveu em (2+1)-dimensões na expansão $1/N$ [6], onde o modelo torna-se renormalizável, estudando entre outras coisas, a equação de gap e a geração de um termo induzido de Chern-Simons quando o modelo é acoplado a um campo de gauge A_μ .

Nesta dissertação, vamos fazer uma revisão do artigo [6] e, como novidade, vamos fazer os cálculos da equação de gap e do termo induzido do Chern-Simons no contexto de Horava-Lifshitz para o modelo de Gross-Neveu em (2+1) dimensões.

Assim, esta dissertação fica organizada da seguinte maneira: No capítulo 2 faremos uma revisão do método da expansão $1/N$ utilizando como exemplo o modelo

$\lambda\varphi^4$, também revisaremos o argumento de contagem de potências e a regularização dimensional. No capítulo 3, trabalharemos com o modelo de Gross-Neveu em (2+1) dimensões na expansão $1/N$ e faremos uma revisão dos cálculos feitos em [6] para a equação de gap e o termo induzido de Chern-Simons. No capítulo 4, trabalharemos com o modelo de Gross-Neveu em (2+1) dimensões no contexto de Horava-Lifshitz e faremos os cálculos para a equação de gap e o termo induzido de Chern-Simons. Finalmente, serão apresentadas as conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Expansão $1/N$

A expansão $1/N$ é um método que ajuda a simplificar o estudo de TQC's com um grupo de simetria interna $O(N)$ ou $SU(N)$. Consiste em redefinir a constante de acoplamento como função do termo $1/N$ e logo fazer uma expansão em série de potências da constante de acoplamento para obter as propriedades físicas do sistema. Ao considerar $N \rightarrow \infty$ vão ficar só os termos de ordem mais baixa da expansão, os quais vão prover a informação dominante e mais importante da teoria.

O primeiro que aplicou o método da expansão $1/N$ em TQC no estudo de teorias com interações quárticas de campos escalares $\lambda\varphi^4$ e em teorias com interações de quatro fermions $g(\bar{\psi}\psi)^2$ foi Wilson [37].

No ano 1974, 't Hooft [38,39] propôs aplicar o método da expansão $1/N$ na QCD, com o que se conseguiu ter grandes simplificações no modelo obtendo resultados que são consistentes com os dados experimentais.

Uma compilação de trabalhos na expansão $1/N$ pode ser revisado em [40].

2.1 Modelo φ^4

Como exemplo, vamos considerar um modelo de N campos escalares φ^a ($a = 1, \dots, N$), com uma interação quártica, cuja dinâmica é definida pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^a - \frac{1}{2} m^2 \varphi^a \varphi^a - \frac{1}{8} \lambda (\varphi^a \varphi^a)^2. \quad (2.1.1)$$

Assim, temos as seguintes regras de Feynman

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 a & \longrightarrow & b \\
 & & \\
 & &
 \end{array}
 = \frac{i \delta_{ab}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 a & & c \\
 & \searrow \nearrow & \\
 b & & d
 \end{array}
 = -i\lambda \delta_{ab} \delta_{cd}
 \end{array}$$

Figura 2.1.1: Regras de Feynman para o propagador do campo φ e para o vértice, respectivamente

Num processo de espalhamento de dois mésons do tipo “a” com dois mésons do tipo “b”, teremos os seguintes diagramas:

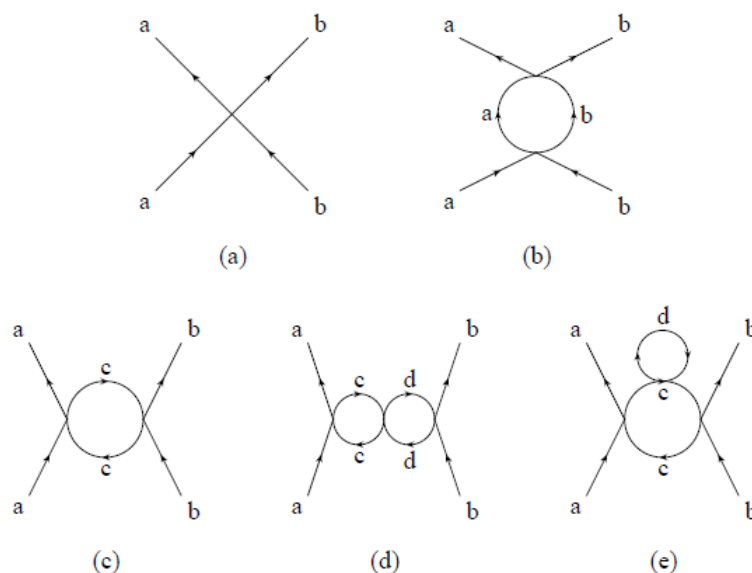


Figura 2.1.2: Diagramas do ordem mais baixo do espalhamento $a + \bar{a} \rightarrow b + \bar{b}$ com $a \neq b$.

Na figura 2.1.2 podemos ver que o diagrama (a) é da ordem de λ ; o diagrama (b), onde os campos intermediários são fixos, é da ordem de λ^2 ; no diagrama (c), o campo intermediário c não é fixo pelo que temos que somar todas as possibilidades, o que faz o diagrama ser da ordem de $N\lambda^2$; por último, os diagramas (d) e (e) são da ordem de $N^2\lambda^3$.

Como podemos ver, a série não é bem definida no limite em que $N \rightarrow \infty$, já que as correções são proporcionais a potências de N . Para solucionar este problema, vamos reescalar a constante de acoplamento λ . Fazendo $\lambda = g/N$ no limite em que $N \rightarrow \infty$ com g fixo, λ vai ser da ordem de $\frac{1}{N}$. Dessa forma, o diagrama (a) vai ser da ordem de $\frac{g}{N}$; o diagrama (c) vai ser da ordem de $\frac{g^2}{N}$; os diagramas (d) e (e) são da ordem de $\frac{g^3}{N}$. O diagrama (b) é da ordem $\frac{g^2}{N^2}$ pelo que é desprezível.

A nova lagrangiana vai ficar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^a - \frac{1}{2} m^2 \varphi^a \varphi^a - \frac{g}{8N} (\varphi^a \varphi^a)^2. \quad (2.1.2)$$

A fim de simplificar nosso modelo, vamos introduzir um campo auxiliar σ , o qual podemos pensar como o mediador da interação entre os campos φ . Para implementar o campo auxiliar, vamos adicionar na lagrangiana o termo

$$\frac{1}{2} \frac{N}{g} \left(\sigma - \frac{g}{2N} \varphi^a \varphi^a \right)^2. \quad (2.1.3)$$

Dessa forma, somando (2.1.3) em (2.1.2) e com um pouco de álgebra básica, obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^a - \frac{1}{2} m^2 \varphi^a \varphi^a + \frac{1}{2} \frac{N}{g} \sigma^2 - \frac{1}{2} \sigma \varphi^a \varphi^a. \quad (2.1.4)$$

A equação de Euler-Lagrange para o campo σ é

$$\sigma = \frac{g}{2N} \varphi^a \varphi^a, \quad (2.1.5)$$

sendo uma equação de vínculo que permite reobter a lagrangiana (2.1.2) ao substituir (2.1.5) em (2.1.4).

A introdução do campo auxiliar, traz consigo a possibilidade de ter um valor esperado no vácuo não nulo, ou seja,

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = \sigma_0,$$

onde σ_0 pode assumir qualquer valor constante. Para resolver este problema, vamos definir o campo deslocado $\sigma' = \sigma - \langle \sigma \rangle = \sigma - \sigma_0$, o qual tem um valor esperado no vácuo nulo

$$\langle 0 | \sigma' | 0 \rangle = 0.$$

Por simplicidade, vamos voltar à notação sem linha para o campo auxiliar, tal que a lagrangiana (2.1.4) vai ficar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^a - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^a \varphi^a - \frac{1}{2} \sigma \varphi^a \varphi^a + \frac{1}{2} \frac{N}{g} \sigma^2 + \frac{N}{g} \sigma_0 \sigma + \frac{1}{2} \frac{N}{g} \sigma_0^2, \quad (2.1.6)$$

onde $\mu^2 \equiv m^2 + \sigma_0$ é a nova massa do campo escalar φ .

A introdução do novo campo auxiliar deslocado na nossa lagrangiana acarreta em novas regras de Feynman, dadas nas figuras abaixo

$$\begin{aligned} \overline{a} \longrightarrow b &= \frac{i \delta_{ab}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ \text{---} \longrightarrow &= i \frac{g}{N} \\ \text{---} \longrightarrow \begin{array}{l} \nearrow a \\ \searrow b \end{array} &= -i \delta_{ab} \end{aligned}$$

Figura 2.1.3: Regras de Feynman do modelo com o campo auxiliar

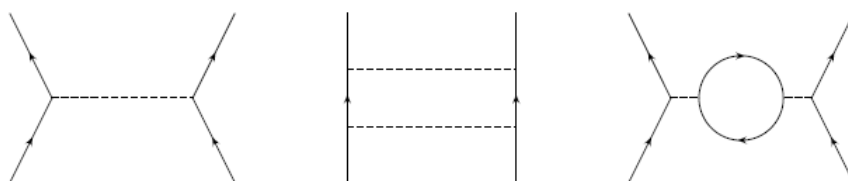


Figura 2.1.4: Diagramas a.b e c da fig. 2.1.2 com o campo auxiliar

2.2 Contagem de Potências

Vamos considerar o gráfico (c) da figura (2.1.2), o qual, em um espaço-tempo quadridimensional, corresponde à integral

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2}.$$

No limite em que $k \rightarrow \infty$, a integral comporta-se como

$$c \int \frac{d^4 k}{(k^2)^2} \approx \int \frac{dk}{k},$$

ou seja, é logaritmicamente divergente.

De modo geral, para um gráfico com L momentos internos, em um espaço-tempo D -dimensional, vamos ter uma integral do tipo

$$\int \frac{d^{DL} k}{k^\sigma}.$$

Esta integral é dita ser superficialmente convergente se $DL - \sigma < 0$. Caso contrário, a integral é superficialmente divergente.

Se $DL - \sigma = 0$, o gráfico vai ser logaritmicamente divergente; se $DL - \sigma = 1$, o gráfico vai ser linearmente divergente; se $DL - \sigma = 2$, o gráfico vai ser quadraticamente divergente, etc.

Seja G um gráfico genérico, se define o grau de divergência superficial $d(G)$ como

$$d(G) = DL - 2n + \sum_a D_a, \quad (2.2.1)$$

onde

- D_a é o número de derivadas no termo de interação
- $\sum_a$ representa a soma sobre os vértices, V_a de G
- n é o número de linhas internas de G

Da relação de Euler, temos que

$$L = n - V + 1, \quad (2.2.2)$$

onde V é o número total de vértices de G . Da relação topológica, temos que

$$2n = \sum_a \nu_a - N_G, \quad (2.2.3)$$

onde

- N_G é o número de linhas externas de G
- ν_a número de linhas juntando-se em V_a

Insertando (2.2.2) em (2.2.1), obtemos que

$$d(G) = Dn - DV + D - 2n + \sum_a D_a,$$

agora utilizando (2.2.3), obtemos

$$d(G) = D - \left(\frac{D-2}{2}\right)N_G - \sum_a \left(D - \left(\frac{D-2}{2}\right)\nu_a - D_a\right), \quad (2.2.4)$$

a eq (2.2.4) corresponde ao grau de divergência superficial para teorias que contêm somente campos bosônicos. Para campos fermiônicos o procedimento é análogo. A fórmula final para uma teoria que contém bósons e férmions vem dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} d(G) = & D - \left(\frac{D-2}{2}\right)N_B - \left(\frac{D-1}{2}\right)N_F \\ & - \sum_a \left[D - D_a - \left(\frac{D-2}{2}\right)\nu_a^B - \left(\frac{D-1}{2}\right)\nu_a^F \right], \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

sendo

- $N_{B(F)}$ o número de linhas externas de G do tipo bosônicas (fermiônicas).
- $\nu_a^{B(F)}$ o número de linhas do tipo bosônicas (fermiônicas) que se juntam em V_a .

Assim, a dimensão do vértice V_a no caso mais geral, vem dada por

$$d_a = D_a + \left(\frac{D-2}{2}\right)\nu_a^B + \left(\frac{D-1}{2}\right)\nu_a^F,$$

segundo o valor de d_a , o vértice V_a pode ser classificado da seguinte maneira

- Super-renormalizável se $d_a < D$.
- Renormalizável se $d_a = D$.
- Não renormalizável se $d_a > D$.

A dimensão do vértice V_a , representa a dimensão resultante do produto dos campos e suas derivadas no termo de interação $\mathcal{L}_{int}^a$ da densidade lagrangiana da teoria, pelo que

$$[\mathcal{L}_{int}^a] = [\lambda_a] [m]^{d_a},$$

onde λ_a é a constante de acoplamento.

Por outro lado, sabemos que $[S] = 1$ e

$$S = \int d^D x \left(\mathcal{L}_0 + \sum_a \mathcal{L}_{int}^a \right),$$

daqui é fácil ver que

$$1 = [m]^{-D} [\mathcal{L}_{int}^a],$$

$$\Rightarrow 1 = [m]^{-D} [m]^{d_a} [\lambda_a],$$

pelo que se $d_a < D$ vamos ter que a dimensão em unidades de massa da constante de acoplamento é $[\lambda_a] > 0$, se $d_a = D \Rightarrow [\lambda_a] = 0$ e se $d_a > D \Rightarrow [\lambda_a] < 0$ pelo que podemos classificar o vértice segundo a dimensão da constante de acoplamento da seguinte maneira

- Super-renormalizável se $[\lambda_a] > 0$.
- Renormalizável se $[\lambda_a] = 0$.
- Não renormalizável se $[\lambda_a] < 0$.

A presença de vértices super-renormalizáveis tende a melhorar as propriedades de convergência, caso oposto acontece com vértices não renormalizáveis, os quais pioram o comportamento ultravioleta. Nesse caso, todas as funções de Green são, em princípio, divergentes.

Teorias cuja lagrangiana contém pelo menos um vértice não renormalizável, são ditas não renormalizáveis. Se uma teoria não contém vértices não renormalizáveis, mas tem pelo menos um vértice renormalizável, a teoria é dita renormalizável. Nesse caso, somente os gráficos com um número pequeno de linhas externas serão divergentes. Finalmente, uma teoria contendo só vértices super-renormalizáveis é dita super-renormalizável, sendo divergentes só os gráficos de ordem mais baixa.

A modo de exemplo, vamos submeter à análise dimensional o modelo φ^4 e decidir segundo o argumento de contagem de potências se é ou não renormalizável. De (2.1.1) temos que

$$S = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^a - \frac{1}{2} m^2 \varphi^a \varphi^a - \frac{1}{8} \lambda (\varphi^a \varphi^a)^2 \right\}.$$

Do primeiro termo da ação podemos ver que

$$[\varphi] = [m]^{\frac{D-2}{2}},$$

e do último termo vemos que

$$[\lambda] = [m]^{4-D},$$

pelo que se $D > 4$ a teoria é não renormalizável, se $D = 4$ a teoria é renormalizável e se $D < 4$ a teoria é super-renormalizável.

¹

2.3 Regularização Dimensional

A ideia básica por trás da Regularização Dimensional é, quando temos uma integral do tipo

$$I = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\varepsilon)^n}, \quad (2.3.1)$$

fazemos uma rotação de Wick para ir do espaço de Minkowski ao espaço Euclídeo, a qual vem dada por

$$k_0 \rightarrow ik_{E0},$$

$$dk_0 \rightarrow idk_{E0},$$

$$\Rightarrow k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \rightarrow -k_{0E}^2 - k_E^2 = -\mathbf{k}_E^2,$$

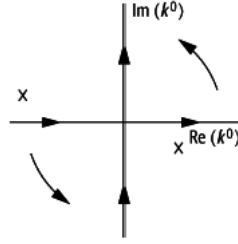


Figura 2.3.1: Rotação de Wick

e generalizamos a integral para D dimensões

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D},$$

¹Obs: No contexto de Horava-Lifshitz, o grau de divergência superficial é modificado.

$$I = (-1)^{n_i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + c^2)^n}. \quad (2.3.2)$$

Como o integrando de (2.3.2) depende só da magnitude de k , podemos escrever, em coordenadas esféricas

$$d^D k = k^{D-1} dk d\Omega_D,$$

onde Ω_D é o ângulo sólido d -dimensional, tal que

$$\int \Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})},$$

em que $\Gamma(\frac{D}{2})$ é a função gama de $D/2$. Assim (2.3.2) vai ficar

$$I = (-1)^{n_i} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \frac{k^{D-1}}{(k^2 + c^2)^n}. \quad (2.3.3)$$

Fazendo a mudança de variável

$$k = c\sqrt{y} \Rightarrow dk = \frac{c}{2\sqrt{y}} dy,$$

a eq. (2.3.3) vai ficar

$$I = (-1)^{n_i} \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D \Gamma(\frac{D}{2})} c^{D-2n} \int dy \frac{y^{\frac{D}{2}-1}}{(y+1)^n}. \quad (2.3.4)$$

A integral em (2.3.4) corresponde a uma função beta, a qual é definida como

$$B(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty dy y^{\alpha-1} (y+1)^{-\alpha-\gamma}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \text{Re}(\gamma) > 0, \quad (2.3.5)$$

$$B(\alpha, \gamma) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \gamma)},$$

É fácil ver que na integral (2.3.4) $\alpha = \frac{D}{2}$ e $\gamma = n - \frac{D}{2}$, pelo que obtemos

$$I = (-1)^{n_i} \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D \Gamma(\frac{D}{2})} c^{D-2n} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)}.$$

Finalmente, fazemos $D = 4$ para obter o resultado

$$I = \frac{(-1)^{n_i}}{2^4 \pi^2} c^{4-2n} \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)}.$$

Um fato importante é que em teorias em dimensões ímpar, a regularização dimensional elimina os infinitos da integral sempre que trabalhemos em um laço.

Capítulo 3

Modelo de Gross-Neveu na expansão $1/N$

O Modelo de Gross-Neveu consiste em N campos espinoriais sem massa com uma interação quártica em $(1+1)$ dimensões, o qual foi originalmente estudado na expansão $1/N$ em [4], sendo um dos modelos mais simples de interação de 4 férmions. Este estudo mostrou que a teoria é assintoticamente livre, o qual é uma propriedade da QCD, além disso o modelo apresenta uma quebra dinâmica da simetria quiral, o que também é observado na QCD. Assim, o modelo de Gross-Neveu surgiu como uma teoria efetiva mais simples para a QCD. Posteriormente, o modelo também tem sido estudado em dimensões maiores, tanto como teoria efetiva da QCD, quanto de sistemas fermiônicos da Matéria Condensada.

3.1 Modelo de Gross-Neveu em $(2+1)$ dimensões

A ação do modelo é dada por

$$S = \int d^D x \left(\bar{\psi} i \gamma^\mu \psi_\mu - \frac{g}{2} (\bar{\psi} \psi)^2 \right). \quad (3.1.1)$$

Fazendo a análise dimensional, obtemos para a constante de acoplamento que

$$[g] = [M]^{2-D}. \quad (3.1.2)$$

Em nosso caso em $(2+1)$ dimensões, temos que $D = 3$, assim

$$[g] = [M]^{2-3} = [M]^{-1},$$

ou seja,

$$[g] = -1,$$

pelo que estamos no caso em que a constante de acoplamento tem dimensão menor que 0 em unidades de massa. Segundo o argumento de contagem de potências, a nossa teoria é não renormalizável.

A expansão $1/N$ foi abordada na seção (1.2) para o caso de bósons. No caso de férmions, o procedimento é análogo e torna nosso modelo renormalizável. Assim, o modelo de Gross-Neveu na expansão $1/N$ é descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{g}{2N} (\bar{\psi} \psi)^2. \quad (3.1.3)$$

A lagrangiana (3.1.3) possui simetria por transformação de paridade, a que corresponde a inversão com relação à origem de um dos eixos espaciais, por exemplo, x_1 , assim temos

$$\psi(x_0, x_1, x_2) \rightarrow \gamma^1 \psi(x_0, -x_1, x_2),$$

$$\bar{\psi}(x_0, x_1, x_2) \rightarrow \bar{\psi}(x_0, -x_1, x_2) \gamma^1,$$

então

$$\bar{\psi}(x) \psi(x) \rightarrow -\bar{\psi}(x_p) \psi(x_p),$$

$$(\bar{\psi} i \not{\partial} \psi)(x) \rightarrow (\bar{\psi} i \not{\partial} \psi)(x_p),$$

com $x = (x_0, x_1, x_2)$ e $x_p = (x_0, -x_1, x_2)$.

Assim como no modelo φ^4 , é conveniente introduzir na lagrangiana um campo auxiliar σ , adicionando na lagrangiana (3.1.3) o termo

$$\frac{N}{2g} \left(\sigma - \frac{g}{N} (\bar{\psi} \psi) \right)^2. \quad (3.1.4)$$

Desenvolvendo a álgebra, a densidade de lagrangiana do modelo torna-se

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \sigma (\bar{\psi} \psi) + \frac{N}{2g} \sigma^2. \quad (3.1.5)$$

O campo auxiliar pode ter um valor esperado no vácuo não nulo, ou seja,

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = \sigma_0,$$

pelo que, com o fim de ter um valor esperado no vácuo nulo, vamos redefinir o campo auxiliar como

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma + \sigma_0, \quad (3.1.6)$$

assim, substituindo (3.1.6) em (3.1.5), vamos obter

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - \sigma_0)\psi - \sigma(\bar{\psi}\psi) + \frac{N}{g}\sigma_0\sigma + \frac{N}{2g}\sigma^2 + \frac{N}{2g}\sigma_0, \quad (3.1.7)$$

a introdução do campo auxiliar deslocado gera uma massa σ_0 nos fêrmios, o que implica uma quebra dinâmica da simetria de paridade.

O modelo apresenta as seguintes regras de Feynman descritas pelas figuras abaixo

$$\begin{aligned} \overline{a} \longrightarrow b &= \frac{i\delta_{ab}}{\not{k} - \sigma_0} \\ \text{-----} &= i\frac{g}{N} \\ \text{-----} \begin{array}{l} \nearrow a \\ \searrow b \end{array} &= -i\delta_{ab} \end{aligned}$$

Figura 3.1.1: Regras de Feynman do modelo de Gross-Neveu como o campo auxiliar

3.2 Equação de Gap

Como sabemos, o valor esperado no vácuo do campo σ é nulo, isto é, $\langle 0|\sigma|0 \rangle = 0$, o qual diagramaticamente é representado por

$$\text{-----}^* + \text{-----} \bigcirc = 0$$

Figura 3.2.1: Forma diagramática da equação de gap

que é equivalente à expressão

$$\frac{\sigma_0}{g} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{k} - \sigma_0} \right] = 0, \quad (3.2.1)$$

com $\frac{i}{\not{k}-\sigma_0} = \frac{\not{k}+\sigma_0}{k^2-\sigma_0^2}$ e $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$, então temos

$$\frac{\sigma_0}{g} + i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left[\frac{\gamma^\mu k_\mu + \sigma_0}{k^2 - \sigma_0^2} \right] = 0. \quad (3.2.2)$$

Como $Tr[\gamma^\mu k_\mu] = 0$ a eq. (3.2.2) vai ficar

$$\frac{\sigma_0}{g} + i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left[\frac{\sigma_0}{k^2 - \sigma_0^2} \right] = 0. \quad (3.2.3)$$

Usando que $Tr \left[\frac{\sigma_0}{k^2 - \sigma_0^2} \right] = Tr[\sigma_0] \frac{1}{k^2 - \sigma_0^2} = \sigma_0 Tr[I] \frac{1}{k^2 - \sigma_0^2} = \frac{2\sigma_0}{k^2 - \sigma_0^2}$, vamos ter

$$\frac{\sigma_0}{g} + i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2\sigma_0}{k^2 - \sigma_0^2} = 0. \quad (3.2.4)$$

É fácil ver que a integral (3.2.4) é divergente, pelo que vamos utilizar a regularização dimensional para resolvê-la.

Vamos primeiramente fazer uma rotação de Wick, onde

$$k_0 \rightarrow ik_{0E},$$

$$dk_0 \rightarrow idk_{0E},$$

$\Rightarrow k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = (ik_{0E})^2 - \mathbf{k}_E^2 = -k_{0E}^2 - \mathbf{k}_E^2 = -k_E^2$ e assim (3.2.4) vai ficar

$$\frac{\sigma_0}{g} + \int \frac{d^3k_E}{(2\pi)^3} \frac{2\sigma_0}{k_E^2 + \sigma_0^2} = 0. \quad (3.2.5)$$

Por simplicidade, vamos escrever $k_E \rightarrow k$. Assim, generalizando a integral para D dimensões, temos

$$\frac{\sigma_0}{g} = -2\sigma_0 \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \sigma_0^2}.$$

Como $d^Dk = k^{D-1}dkd\Omega$, com $\int d\Omega = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})}$, a integral acima toma a forma

$$\frac{\sigma_0}{g} = -2\sigma_0 \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \frac{k^{D-1}}{k^2 + \sigma_0^2}.$$

Agora, vamos fazer a mudança de variável

$$k = (\sigma_0^2 y)^{1/2} \implies dk = \frac{\sigma_0^2}{2(\sigma_0^2 y)^{1/2}} dy,$$

pelo que a integral fica

$$\frac{1}{g} = -\frac{2\pi^{D/2}(\sigma_0^2)^{\frac{D}{2}-1}}{\Gamma(\frac{D}{2})(2\pi)^D} \int dy \frac{y^{\frac{D}{2}-1}}{(y+1)}. \quad (3.2.6)$$

A integral em (3.2.6) corresponde à função beta com $\alpha = \frac{D}{2}$ e $\gamma = 1 - \frac{D}{2}$. Assim, temos que

$$\frac{1}{g} = -\frac{2\pi^{D/2}(\sigma_0^2)^{\frac{D}{2}-1}}{\Gamma(\frac{D}{2})(2\pi)^D} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(1)}.$$

Em nosso caso, temos que $D = 3$, pelo que finalmente obtemos

$$\frac{1}{g} = \frac{|\sigma_0|}{2\pi}. \quad (3.2.7)$$

A equação (3.2.7) mostra a dependência da constante de acoplamento com a massa gerada pela introdução do campo auxiliar deslocado. Vemos também como o método da regularização dimensional eliminou, de fato, os infinitos.

3.3 Termo de Chern-Simons

Nesta seção vamos acoplar um campo de gauge a nossa teoria mediante a adição na lagrangiana do termo de interação

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{e}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu, \quad (3.3.1)$$

pelo que a nossa lagrangiana vai ficar

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - \sigma_0)\psi - \sigma(\bar{\psi}\psi) + \frac{N}{g}\sigma_0\sigma + \frac{N}{2g}\sigma^2 + \frac{e}{\sqrt{N}}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu, \quad (3.3.2)$$

mais um termo constante que desprezamos.

É fácil ver que não temos propagador para o campo de gauge, pois não temos um termo quadrático do campo na lagrangiana, mas podemos encontrar as correções do propagador, as quais são não nulas. Diagramaticamente, vamos ter

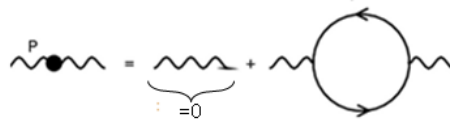


Figura 3.3.1: Correção do propagador do fóton a 1-loop

Vamos agora, então, calcular o tensor de polarização $\pi^{\mu\nu}$, dado por

$$\pi^{\mu\nu}(p) = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} + \not{p} - \sigma_0} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} - \sigma_0} \right), \quad (3.3.3)$$

o qual podemos rescrevê-lo como

$$\pi^{\mu\nu}(p) = -e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{(\gamma^\beta k_\beta + \gamma^\rho p_\rho + \sigma_0)}{(k+p)^2 - \sigma_0^2} \gamma^\nu \frac{(\gamma^\alpha k_\alpha + \sigma_0)}{k^2 - \sigma_0^2} \right). \quad (3.3.4)$$

Estamos interessados em encontrar um termo de Chern-Simons, pelo que procuramos uma parcela do tensor de polarização que seja proporcional ao momentum p e ao tensor de Levi-Civita, o que vai aparecer no traço do produto de três matrizes gama. Assim, o termo que procuramos é

$$-e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{\gamma^\rho p_\rho}{(k+p)^2 - \sigma_0^2} \gamma^\nu \frac{\sigma_0}{k^2 - \sigma_0^2} \right). \quad (3.3.5)$$

Usando que $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho p_\rho \gamma^\nu \sigma_0) = \sigma_0 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu) p_\rho$ e $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu) = -2i\varepsilon^{\mu\rho\nu}$, a eq. (3.3.5) vai ficar

$$2ie^2 \sigma_0 \varepsilon^{\mu\rho\nu} p_\rho F(p^2), \quad (3.3.6)$$

onde

$$F(p^2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k+p)^2 - \sigma_0^2} \frac{1}{k^2 - \sigma_0^2}.$$

Para momentos externos muito pequenos vamos ter

$$F(p^2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - \sigma_0^2)^2},$$

tal que ao fazermos uma rotação de Wick, temos

$$F(p^2) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + \sigma_0^2)^2}, \quad (3.3.7)$$

em coordenadas cilíndricas temos que $d^3k = k^2 \sin\theta dk d\theta d\phi$, com $0 \leq k \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Integrando em θ e ϕ vamos ter:

$$F = i \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k^2}{(k^2 + \sigma_0^2)^2}. \quad (3.3.8)$$

Introduzindo o cutoff Λ temos

$$F = i \int_0^\Lambda \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k^2}{(k^2 + \sigma_0^2)^2}, \quad (3.3.9)$$

agora definimos $k = \sigma_0 \tan \theta \Rightarrow dk = \sqrt{\sigma_0^2} \sec^2 \theta d\theta = |\sigma_0| \sec^2 \theta d\theta$, então (3.3.9) vai ficar

$$\begin{aligned} F &= i4\pi \int \frac{d\theta |\sigma_0| \sec^2 \theta}{(2\pi)^3} \frac{\sigma_0^2 \tan^2 \theta}{(\sigma_0^2 \tan^2 \theta + \sigma_0^2)^2}, \\ &= i4\pi \int \frac{d\theta}{(2\pi)^3} \frac{|\sigma_0| \sigma_0^2 \tan^2 \theta}{(\sigma_0^2)^2 \sec^2 \theta} = -i4\pi \frac{|\sigma_0| \sigma_0^2}{(\sigma_0^2)^2} \int \frac{d\theta}{(2\pi)^3} \sin^2 \theta, \\ &= i \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{|\sigma_0| \sigma_0^2}{(\sigma_0^2)^2} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right], \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

mas $\theta = \arctan(k/\sigma_0)$, então

$$F = i \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{|\sigma_0| \sigma_0^2}{(\sigma_0^2)^2} \left[\frac{\arctan(k/\sigma_0)}{2} - \frac{1}{4} \sin(2 \arctan(k/\sigma_0)) \right] \Big|_{k=0}^{k=\Lambda},$$

utilizando que quando $\Lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \arctan(\Lambda/\sigma_0) = \frac{\pi}{2}$ e que $\arctan(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} F &= i \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{|\sigma_0| \sigma_0^2}{(\sigma_0^2)^2} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin(\pi) \right], \\ F &= \frac{i}{8\pi} \frac{|\sigma_0| \sigma_0^2}{(\sigma_0^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Substituindo (3.3.11) em (3.3.6) temos

$$\begin{aligned} &2ie^2 \sigma_0 \varepsilon^{\mu\rho\nu} p_\rho \left[\frac{i}{8\pi} \frac{|\sigma_0| \sigma_0^2}{(\sigma_0^2)^2} \right], \\ &-\frac{e^2}{4\pi} \sigma_0 \frac{|\sigma_0| \sigma_0^2}{(\sigma_0^2)^2} \varepsilon^{\mu\rho\nu} p_\rho, \\ &-\frac{e^2}{4\pi} (\text{sgn} \sigma_0) \varepsilon^{\mu\rho\nu} p_\rho, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Esse termo corresponde a um termo de Chern-Simons induzido na lagrangiana efectiva do tipo

$$\frac{e^2}{8\pi} (\text{sgn} \sigma_0) \varepsilon^{\mu\rho\nu} A_\mu \partial_\rho A_\nu,$$

O termo de Chern-Simons pode ser obtido graças a geração dinâmica de massa e é finito no ultravioleta.

Capítulo 4

O modelo de Gross-Neveu em um ponto de Lifshitz

4.1 Escalonamento de Lifshitz

O escalonamento de Lifshitz nas coordenadas espaço-temporais é definido por

$$[t] = [M]^{-z}, \quad (4.1.1)$$

$$[x_i] = [M]^{-1}, \quad (4.1.2)$$

onde z é um inteiro positivo. A anisotropia do espaço tempo para $z \neq 1$ implica na quebra da simetria de Lorentz.

A ação dada por

$$S = \int dt d^D x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} \phi (-\Delta)^z \phi \right\}, \quad (4.1.3)$$

onde $\Delta = \partial_i^2$, é um dos exemplos mas simples de uma teoria com o escalonamento de Lifshitz, onde temos que a dimensão em unidades de massa do campo ϕ é

$$[\phi] = \frac{D - z}{2}. \quad (4.1.4)$$

Como podemos ver, segundo o valor de z , a dimensão do campo ϕ pode mudar, o que para teorias com interação vai acarretar uma mudança na dimensão da constante de acoplamento, o que é interessante pensando no argumento de contagem de potências, já que para um z dado, podemos converter uma teoria não renormalizável em uma teoria renormalizável.

Agora, vamos fazer a análise dimensional para o modelo de Gross-Neveu com o escalamento de Lifshitz, o qual é definido por (4.1.1) e (4.1.2). Como consequência

CAPÍTULO 4. O MODELO DE GROSS-NEVEU EM UM PONTO DE LIFSHITZ 22

de (4.1.2) e (4.1.3), e para não ter contradições na dimensão do campo ψ , vamos ter que modificar a derivada do seguinte modo

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \rightarrow i\gamma^t \partial_t + (i\gamma^i \partial_i)^z, \quad (4.1.5)$$

assim a ação (3.1.1) vai tornar-se

$$S = \int dt d^d x \left(\bar{\psi} [i\gamma^0 \partial_0 + (i\gamma^i \partial_i)^z] \psi - \frac{g}{2} (\bar{\psi} \psi)^2 \right), \quad (4.1.6)$$

onde $d = D - 1$. Vamos calcular a dimensão do campo ψ , a qual podemos calcular do primeiro ou do segundo termo da ação, pois (4.1.5) garante que vamos obter o mesmo resultado. Assim, obtemos que

$$[\psi] = [M]^{d/2}, \quad (4.1.7)$$

conhecendo a dimensão do campo ψ . Fazemos o análise dimensional no último termo para encontrar a dimensão da constante de acoplamento g , obtendo

$$[g] = [M]^{z-d},$$

mas como $d = D - 1$, vamos ter que

$$[g] = [M]^{z+1-D}. \quad (4.1.8)$$

Como estamos trabalhando com $D = 3$, temos que a dimensão da constante de acoplamento em unidades de massa é

$$[g] = z - 2,$$

pelo que, para valores de $z = 2$, vamos ter uma teoria renormalizável, e para $z \geq 2$ uma teoria super-renormalizável, porém, por construção, a teoria vai quebrar a invariância de Lorentz.

4.2 O modelo de Gross-Neveu em um ponto de Lifshitz

Com a mudança da derivada, a lagrangiana do modelo de Gross-Neveu, para N campos espinoriais, vai tornar-se

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^0 \partial_0 + (i\gamma^i \partial_i)^z] \psi - \frac{g}{2N} (\bar{\psi} \psi)^2,$$

com o fim de simplificar nosso modelo, vamos introduzir o campo auxiliar σ , tal como foi feito anteriormente. Assim, vamos definir a nova lagrangiana

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{N}{2g} \left(\sigma - \frac{g}{N} (\bar{\psi}\psi) \right)^2,$$

de onde vamos obter

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}([i\gamma^0\partial_0 + (i\gamma^i\partial_i)^z])\psi - \sigma(\bar{\psi}\psi) + \frac{N}{2g}\sigma^2.$$

O campo auxiliar pode ter um valor esperado no vácuo não nulo, pelo que faremos um deslocamento no campo $\sigma \rightarrow \sigma + m^z$ para garantir que o valor esperado no vácuo seja nulo, tal como se fez na seção 2.1, pelo que a lagrangiana vai ficar

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}([i\gamma^t\partial_t + (i\gamma^i\partial_i)^z] - m^z)\psi - \sigma(\bar{\psi}\psi) + \frac{N}{g}m^z\sigma + \frac{N}{2g}\sigma^2, \quad (4.2.1)$$

a mudança no termo derivativo espacial na lagrangiana acarreta uma mudança das regras de Feynman, em particular, no propagador do campo ψ , o qual fica

$$S_{ij}(k) = \langle \bar{\psi}_i(k)\psi_j(-k) \rangle = i \frac{\delta_{ij}}{\gamma^0 k_0 + (\gamma^i k_i)^z - m^z} \equiv \delta_{ij} S(k),$$

Vão existir diferenças no propagador para valores pares e ímpares de z , pelo que vamos analisar cada caso por separado.

Para valores pares, podemos reescrever z como $z = 2k$, então

$$S(k) = \frac{i}{\gamma^0 k_0 + (\gamma^i k_i)^{2k} - m^z}$$

onde $(\gamma^i k_i)^{2k} = (\gamma^1 k_1 + \gamma^2 k_2)^{2k} = (-k_1^2 - k_2^2)^k = (-\mathbf{k}^2)^k$, pelo que

$$S(k) = \frac{i}{\gamma^0 k_0 + (-\mathbf{k}^2)^k - m^z},$$

o que pode ser reescrito como

$$S(k) = i \frac{\gamma^0 k_0 - [(-\mathbf{k}^2)^k - m^z]}{k_0^2 - [(-\mathbf{k}^2)^k - m^z]^2}. \quad (4.2.2)$$

Para valores ímpares, podemos reescrever z como $z = 2k + 1$, então

$$S(k) = \frac{i}{\gamma^0 k_0 + (\gamma^i k_i)^{2k+1} - m^z},$$

onde $(\gamma^i k_i)^{2k+1} = (\gamma^i k_i) (\gamma^i k_i)^{2k} = \gamma^i k_i (-\mathbf{k}^2)^k$

$$S_F = \frac{i}{\gamma^0 k_0 + \gamma^i k_i (-\mathbf{k}^2)^k - m^z},$$

o que pode ser reescrito como

$$S_F = i \frac{\gamma^0 k_0 + \gamma^i k_i (-\mathbf{k}^2)^k + m^z}{k_0^2 - (\mathbf{k}^2)^{2z} - m^{2z}}. \quad (4.2.3)$$

4.3 Equação de gap

A imposição de que o valor de esperado no vácuo seja nulo ($\langle \sigma \rangle = 0$), nos leva a ter a seguinte equação de gap,

$$\frac{m^z}{g} + \text{tr} [S(k)] = 0, \quad (4.3.1)$$

representada diagramaticamente pela figura (3.2.1).

Como a equação depende diretamente do propagador do campo fermiônico, ela vai mudar para cada valor de z , pelo que a calcularemos para valores pares e ímpares.

4.3.1 Equação de gap para z par

A equação de gap para valores par de z é obtida ao colocar o propagador (4.2.2) na eq. (4.3.1), resultando

$$\frac{m^z}{g} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[i \frac{\gamma^0 k_0 - [(-\mathbf{k}^2)^k - m^z]}{k_0^2 - [(-\mathbf{k}^2)^k - m^z]^2} \right] = 0. \quad (4.3.2)$$

Utilizando que $\text{Tr}[\gamma^0] = 0$ e $\text{Tr}[(-\mathbf{k}^2)^k - m^z] = 2((- \mathbf{k}^2)^k - m^z)$, a eq. (4.3.2) vai ficar

$$\frac{m^z}{g} - \int \frac{dk_0 d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{2i [(-\mathbf{k}^2)^k - m^z]}{k_0^2 - [(-\mathbf{k}^2)^k - m^z]^2} = 0, \quad (4.3.3)$$

o que após uma rotação de Wick vai ficar

$$\frac{m^z}{g} = 2 \int \frac{dk_0 d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{[(-\mathbf{k}^2)^k - m^z]}{k_0^2 + [(-\mathbf{k}^2)^k - m^z]^2}. \quad (4.3.4)$$

Vamos resolver, primeiramente, a integral em k_0 , a qual é dada por

$$I_1 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{[(-\mathbf{k}^2)^k - m^z]}{k_0^2 + [(-\mathbf{k}^2)^k - m^z]^2}, \quad (4.3.5)$$

e definimos $\Omega(\mathbf{k}) = (-\mathbf{k}^2)^k - m^z$ pelo que a eq. (4.3.5) vai tomar a forma

$$I_1 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{\Omega(\mathbf{k})}{k_0^2 + \Omega^2(\mathbf{k})}.$$

A integral I_1 é divergente, pelo que ao integrar diretamente obtemos

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \arctan \left[\frac{k_0}{\Omega(\mathbf{k})} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2},$$

assim, a eq. (4.3.4) vai ficar

$$\frac{m^z}{g} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}. \quad (4.3.6)$$

A integral em (4.3.6) é nula por regularização dimensional, como é mostrado em Ref.[12], assim

$$\frac{m^z}{g} = 0,$$

onde $\frac{1}{g}$ não pode ser nulo, pois se for, não existiria o acoplamento de 4 fermions e teríamos uma teoria livre. Assim, podemos afirmar que

$m^z = 0$	$(4.3.7)$
-----------	-----------

Como podemos ver, fazendo um escalonamento de Lifshitz no modelo de Gross-Neveu, para todo valor de z par, não vamos ter uma geração dinâmica de massa e a simetria de paridade vai ser conservada.

4.3.2 Equação de gap para z ímpar

A equação de gap para um z ímpar é obtida ao colocar o propagador (4.2.3) na eq (4.3.1), e vem dada pela expressão

$$\frac{m^z}{g} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[i \frac{\gamma^0 k_0 + \gamma^i k_i (-\mathbf{k}^2)^k + m^z}{k_0^2 - (\mathbf{k})^{2z} - m^{2z}} \right] = 0. \quad (4.3.8)$$

Temos que $Tr[\gamma^0] = Tr[\gamma^i] = 0$ e $Tr[m^z] = 2m^z$, então (4.3.8) é rescrita como

$$\frac{1}{g} = -2i \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 - [(\mathbf{k})^{2z} + m^{2z}]},$$

e, após uma rotação de Wick, vamos obter

$$\frac{1}{g} = -2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 + [(\mathbf{k})^{2z} + m^{2z}]}. \quad (4.3.9)$$

Definimos $\Pi^2(\mathbf{k}) = (\mathbf{k})^{2z} + m^{2z}$. Assim, a integral em k_0 vai ficar

$$I_1 = \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{2}{k_0^2 + \Pi^2(\mathbf{k})}.$$

A integral I_1 é convergente, pelo que podemos integrar diretamente, obtendo

$$I_1 = 2 \frac{1}{2\pi \Pi(\mathbf{k})} \arctan \left[\frac{k_0}{\Pi(\mathbf{k})} \right]_{-\infty}^{\infty},$$

$$I_1 = \frac{1}{\Pi(\mathbf{k})}, \quad (4.3.10)$$

pelo que (4.3.9) vai ficar

$$\frac{1}{g} = - \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\Pi(\mathbf{k})},$$

o qual é equivalente a

$$\frac{1}{g} = - \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(\mathbf{k})^{2z} + m^{2z}]^{1/2}}. \quad (4.3.11)$$

Para resolver a integral em $\mathbf{k}$ vamos utilizar o método da regularização dimensional, pelo que a integral em (4.3.11) vai ficar

$$I_2 = \int \frac{d^D\mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(\mathbf{k})^{2z} + m^{2z}]^{1/2}}.$$

Como $d^D\mathbf{k} = \mathbf{k}^{D-1} d\mathbf{k} d\Omega$, com $\int d\Omega = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})}$, temos que

$$I_2 = \frac{2\pi^{D/2}}{(2\pi)^D \Gamma(\frac{D}{2})} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}^{D-1}}{[(\mathbf{k})^{2z} + m^{2z}]^{1/2}}. \quad (4.3.12)$$

Com o objeto de deixar a integral em (4.3.12) com a estrutura da função beta (2.3.5), vamos fazer a mudança de variável

$$\mathbf{k} = my^{1/2z} \implies d\mathbf{k} = \frac{m}{2z} y^{\frac{1}{2z}-1} dy,$$

fazendo a substituição em (4.3.12), vamos ter que

$$I_2 = \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D \Gamma(\frac{D}{2})} \frac{m^D}{z|m|^z} \int_0^\infty dy y^{\frac{D}{2z}-1} (y+1)^{-1/2}, \quad (4.3.13)$$

agora a integral tem a forma de uma função Beta com $\alpha = \frac{D}{2z}$ e $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{D}{2z}$, assim

$$I_2 = \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D \Gamma(\frac{D}{2})} \frac{m^D}{z|m|^z} \frac{\Gamma(\frac{D}{2z}) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{D}{2z})}{\Gamma(\frac{1}{2})}. \quad (4.3.14)$$

Em nosso caso, temos que $D = 2$, pelo que vai ficar

$$I_2 = \frac{1}{4\pi \Gamma(1)} \frac{m^2}{z|m|^z} \frac{\Gamma(\frac{1}{z}) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{z})}{\Gamma(\frac{1}{2})}, \quad (4.3.15)$$

o que é equivalente a

$$I_2 = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{m^2}{|m|^z} \Gamma(\frac{1}{z} + 1) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{z}),$$

pelo que, finalmente, a eq (4.3.11) vai ficar

$$\frac{1}{g} = -\frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{m^2}{|m|^z} \Gamma(\frac{1}{z} + 1) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{z}),$$

$$\boxed{|m|^{z-2} = -\frac{g}{4\pi^{3/2}} \Gamma(\frac{1}{z} + 1) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{z})}. \quad (4.3.16)$$

A eq.(4.3.16) fornece o valor da massa para valores ímpares de z . Pode-se observar que ao contrário do que acontece quando z é par, a massa não é nula, produzindo, assim, uma quebra na simetria de paridade. Além disso, a equação acima implica que $g < 0$ para qualquer $z > 1$.

Para testar nossa expressão, vamos ver o caso $z = 1$, onde temos que obter um resultado equivalente ao obtido em (3.2.7).

Substituindo $z = 1$ na eq. (4.3.16), temos

$$|m|^{-1} = -\frac{g}{4\pi^{3/2}} \Gamma(2) \Gamma(-\frac{1}{2}),$$

onde $\Gamma(2) = 1$ e $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\pi^{1/2}$,

$$|m| = \frac{2\pi}{g},$$

o resultado é equivalente a (3.2.7), pelo que podemos assumir que a expressão (4.3.16) é válida para todo z ímpar.

4.4 Termo de Chern-Simons

Acoplaremos um campo de gauge a nossa teoria mediante a adição na lagrangiana do termo de interação

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{e}{\sqrt{N}} \bar{\psi}_j \gamma_\mu \psi_j A^\mu, \quad (4.4.1)$$

e vamos calcular o tensor de polarização, que é dado pela expressão

$$\pi^{\mu\nu}(p) = e^2 \int \frac{dk_0 d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^3} Tr(\gamma^\mu S(k+p) \gamma^\nu S(k)). \quad (4.4.2)$$

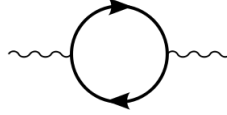


Figura 4.4.1: Tensor de polarização

Vamos fazer o cálculo só no caso em que z é ímpar, dado que no caso em que z é par, $m = 0$, pelo que não vai se gerar o termo do tipo Chern-Simons.

4.4.1 Termo de Chern-Simons para z ímpar

Para z ímpar, vamos utilizar o propagador (4.2.3), pelo que (4.4.2) vai ficar

$$\pi^{\mu\nu}(p) = e^2 \int \frac{dk_0 d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^3} Tr \left(\gamma^\mu i \frac{\gamma^0(k_0+p_0) + \gamma^i(k_i+p_i)(-\mathbf{k}+\mathbf{p})^2)^k + m^z}{(k_0+p_0)^2 - (\mathbf{k}+\mathbf{p})^{2z} - m^{2z}} \gamma^\nu i \frac{\gamma^0 k_0 + \gamma^i k_i (-\mathbf{k})^k + m^z}{k_0^2 - (\mathbf{k})^{2z} - m^{2z}} \right).$$

Como estamos interessados em encontrar um termo do tipo Chern-Simons, vamos selecionar os termos que sejam proporcionais ao momentum p e ao tensor de Levi-Civita que aparece no traço de três matrizes gama. Assim, encontramos que o termo de interesse é

$$\pi_{CS}^{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{dk_0 d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^3} Tr \left(\frac{\gamma^\mu \gamma^0 p_0 \gamma^\nu m^z + \gamma^\mu \gamma^i p_i \gamma^\nu (-\mathbf{k})^k m^z}{((k_0+p_0)^2 - (\mathbf{k}+\mathbf{p})^{2z} - m^{2z})(k_0^2 - (\mathbf{k})^{2z} - m^{2z})} \right),$$

utilizando no primeiro termo que

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^0 p_0 \gamma^\nu m^z) = m^z Tr(\gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu) p_0 = m^z (-2i \varepsilon^{\mu 0 \nu}) p_0 = -2i m^z \varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0,$$

e no segundo que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^i p_i \gamma^\nu (-\mathbf{k}^2)^k m^z) &= m^z \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^i \gamma^\nu) p_i (-\mathbf{k}^2)^k \\ &= m^z (-2i\varepsilon^{\mu i \nu}) p_i (-\mathbf{k}^2)^k = -2im^z \varepsilon^{\mu i \nu} p_i (-\mathbf{k}^2)^k, \end{aligned}$$

obtemos

$$2im^z e^2 \int \frac{dk_0 d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0 + \varepsilon^{\mu i \nu} p_i (-\mathbf{k}^2)^k}{((k_0 + p_0)^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{p})^{2z} - m^{2z}) (k_0^2 - (\mathbf{k})^{2z} - m^{2z})} \right).$$

Para momentos externos muito pequenos, vamos ter

$$2im^z e^2 \int \frac{dk_0 d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0 + \varepsilon^{\mu i \nu} p_i (-\mathbf{k}^2)^k}{(k_0^2 - (\mathbf{k})^{2z} - m^{2z})^2} \right),$$

o qual, após uma rotação de Wick, vai ficar

$$-2m^z e^2 \int \frac{dk_0 d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0 + \varepsilon^{\mu i \nu} p_i (-\mathbf{k}^2)^k}{(k_0^2 + (\mathbf{k})^{2z} + m^{2z})^2} \right), \quad (4.4.3)$$

vamos reescrever $(-\mathbf{k}^2)^k$ como $(i\mathbf{k})^{2k}$ e vamos definir a função

$$\Pi^2(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^{2z} + m^{2z},$$

assim, as integrais em (4.4.3) vão ser

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0 \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{(k_0^2 + \Pi^2(\mathbf{k}))^2}, \\ I_2 &= i^{2k} \varepsilon^{\mu i \nu} p_i \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{\mathbf{k}^{2k}}{(k_0^2 + \Pi^2(\mathbf{k}))^2}. \end{aligned}$$

Nas duas integrais, a integral em k_0 é convergente, pelo que integrando diretamente, obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0 \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\Pi^3(\mathbf{k})}, \\ I_2 &= i^{2k} \varepsilon^{\mu i \nu} p_i \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{k}^{2k}}{4\Pi^3(\mathbf{k})}, \end{aligned}$$

mas como $\Pi^2(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^{2z} + m^{2z} \Rightarrow \Pi^3(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}^{2z} + m^{2z})^{3/2}$ as integrais vão ficar

$$I_1 = \frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0}{4} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\mathbf{k}^{2z} + m^{2z})^{3/2}},$$

$$I_2 = \frac{i^{2k} \varepsilon^{\mu i \nu} p_i}{4} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{k}^{2k}}{(\mathbf{k}^{2z} + m^{2z})^{3/2}},$$

Agora, vamos resolver as integrais em $\mathbf{k}$ pelo método da regularização dimensional, assim

$$I_1 = \frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0}{4} \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\mathbf{k}^{2z} + m^{2z})^{3/2}},$$

$$I_2 = \frac{i^{2k} \varepsilon^{\mu i \nu} p_i}{4} \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{\mathbf{k}^{2k}}{(\mathbf{k}^{2z} + m^{2z})^{3/2}},$$

o qual é equivalente a

$$I_1 = \frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0}{4} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{\mathbf{k}^{D-1}}{(\mathbf{k}^{2z} + m^{2z})^{3/2}},$$

$$I_2 = \frac{i^{2k} \varepsilon^{\mu i \nu} p_i}{4} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{\mathbf{k}^{D+2k-1}}{(\mathbf{k}^{2z} + m^{2z})^{3/2}}.$$

Vamos agora fazer uma mudança de variável definida por $\mathbf{k} = m y^{1/2z} \Rightarrow d\mathbf{k} = \frac{m}{2z} y^{\frac{1}{2z}-1} dy$, pelo que vamos ter

$$I_1 = \frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0}{4(2\pi)^D} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty dy \frac{m}{2z} y^{\frac{1}{2z}-1} \frac{m^{D-1} y^{\frac{D}{2z}-\frac{1}{2z}}}{(ym^{2z} + m^{2z})^{3/2}},$$

$$I_2 = \frac{i^{2k} \varepsilon^{\mu i \nu} p_i}{4(2\pi)^D} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty dy \frac{m}{2z} y^{\frac{1}{2z}-1} \frac{m^{D+2k-1} y^{\frac{D}{2z} + \frac{k}{z} - \frac{1}{2z}}}{(ym^{2z} + m^{2z})^{3/2}},$$

no denominador temos $(ym^{2z} + m^{2z})^{3/2}$, o qual pode ser escrito como $|m|^{3z}(y+1)^{3/2}$, assim vamos ter

$$I_1 = \frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0}{4(2\pi)^D} \frac{\pi^{D/2}}{z\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{m^D}{|m|^{3z}} \int_0^\infty dy y^{\frac{D}{2z}-1} (y+1)^{-3/2}, \quad (4.4.4)$$

$$I_2 = \frac{i^{2k} \varepsilon^{\mu i \nu} p_i}{4(2\pi)^D} \frac{\pi^{D/2}}{z\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{m^{D+2k}}{|m|^{3z}} \int_0^\infty dy y^{\frac{D}{2z} + \frac{k}{z} - 1} (y+1)^{-3/2}, \quad (4.4.5)$$

daqui vemos que a integral em (4.4.4) é uma função Beta com $\alpha = \frac{D}{2z}$ e $\gamma = \frac{3}{2} - \frac{D}{2z}$ e a integral em (4.4.5) é uma função Beta com $\alpha = \frac{D}{2z} + \frac{k}{z}$ e $\gamma = \frac{3}{2} - \frac{D}{2z} - \frac{k}{z}$. Assim, no caso $D = 2$ e considerando que $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\pi^{1/2}$, vamos obter

$$I_1 = \frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0}{4(2\pi)^2} \frac{\pi}{z} \frac{m^2}{|m|^{3z}} \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{z}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{z}\right)}{\pi^{1/2}},$$

$$I_2 = \frac{i^{2k}\varepsilon^{\mu i \nu} p_i}{4(2\pi)^2} \frac{\pi}{z} \frac{m^{2+2k}}{|m|^{3z}} \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{z} + \frac{k}{z}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{z} - \frac{k}{z}\right)}{\pi^{1/2}},$$

pelo que o termo (4.4.3) vai ficar

$$-e^2 \left(\frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{z} \frac{m^{2+z}}{|m|^{3z}} \Gamma\left(\frac{1}{z}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{z}\right) + \frac{i^{2k}\varepsilon^{\mu i \nu} p_i}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{z} \frac{m^{2+2k+z}}{|m|^{3z}} \Gamma\left(\frac{1+k}{z}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{z} - \frac{k}{z}\right) \right),$$

utilizando as propriedades da função gama, temos

$$-e^2 \left(\frac{\varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0}{4\pi^{3/2}} \frac{m^{2+z}}{|m|^{3z}} \Gamma\left(\frac{1}{z} + 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{z}\right) + \frac{i^{2k}\varepsilon^{\mu i \nu} p_i}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{1+k} \frac{m^{2+2k+z}}{|m|^{3z}} \Gamma\left(\frac{1+k}{z} + 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{z} - \frac{k}{z}\right) \right),$$

o qual vamos reescrever como

$$-\frac{e^2}{4\pi^{3/2}} \text{sgn}(m) (c_1 \varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0 + c_2 \varepsilon^{\mu i \nu} p_i), \quad (4.4.6)$$

sendo

$$c_1 = \frac{m^2}{|m|^{2z}} \Gamma\left(\frac{1}{z} + 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{z}\right),$$

e

$$c_2 = \frac{i^{2k}}{1+k} \frac{m^{2+2k}}{|m|^{2z}} \Gamma\left(\frac{1+k}{z} + 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{z} - \frac{k}{z}\right),$$

com $z = 2k + 1$ e $k = 0, 1, 2, \dots$

A eq.(4.4.6) representa o termo que vai induzir o termo de Chern-Simons na lagrangiana efetiva no modelo de Gross-Neveu com o escalonamento de Lifshitz para todo z ímpar. É fácil ver que para $z \neq 1 (k \neq 0)$ vamos ter que $c_1 \neq c_2$, deixando em evidência a anisotropia do espaço-tempo.

Para testar a expressão, vamos verificar o caso em que $z = 1 (k = 0)$, onde devemos reobter o resultado obtido em (3.3.12). Assim, fazendo $z = 1$, vamos ter que

$$c_1 = \frac{m^2}{|m|^2} \Gamma(2) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$c_2 = \frac{m^2}{|m|^2} \Gamma(2) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

pelo que $c_1 = c_2 = c$. Como $\Gamma(2) = 1$ e $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{1/2}$, temos que $c = \pi^{1/2}$. Assim, (4.4.6) vai ficar

$$-\frac{e^2}{4\pi^{3/2}} \operatorname{sgn}(m) \left(\pi^{1/2} \varepsilon^{\mu 0 \nu} p_0 + \pi^{1/2} \varepsilon^{\mu i \nu} p_i \right),$$

o que pode ser rescrito como

$$-\frac{e^2}{4\pi} \operatorname{sgn}(m) \varepsilon^{\mu \rho \nu} p_\rho. \quad (4.4.7)$$

A expressão (4.4.7) é equivalente com (3.3.12), pelo que podemos assumir que a expressão (4.4.6) é válida para todo valor ímpar de z . Além disso, verificamos que para $z = 1$, a invariância de Lorentz é recuperada.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação trabalhamos com o modelo de Gross-Neveu em $(2+1)$ -dimensões, o qual não é renormalizável, e aplicamos as técnicas da expansão $1/N$ (que já foi trabalhado em Ref.[6]) e do escalonamento de Lifshitz para tornar o modelo renormalizável.

Na expansão $1/N$ vemos que ocorre uma geração dinâmica de massa nos férmions, que acarreta uma quebra espontânea de simetria. Após isso, calculamos a equação de gap, que mostra a relação entre a constante de acoplamento e a massa gerada. Acoplamos um campo de gauge ao modelo e calculamos o tensor de polarização, o que vem da correção do propagador do fóton, e que produto da massa gerada fornece um termo induzido de Chern-Simons.

Como novidade, apresentamos as mesmas contas, mas desta vez utilizando um escalonamento de Lifshitz. Este escalonamento traz como consequência uma mudança no propagador do campo fermiônico, o que vai ser diferente para valores par e ímpar do expoente crítico z . Assim, estudamos o caso para z par e para z ímpar, obtendo os seguintes resultados:

- Para z par: Ao calcular a equação de gap, obtemos que a massa gerada é nula, pelo que não temos a quebra espontânea de simetria e não teremos o termo induzido de Chern-Simons ao acoplar o campo de gauge na lagrangiana.
- Para z ímpar: Ao calcular a equação de gap, obtemos o valor da massa como uma função de z e da constante de acoplamento g , o qual em nenhum caso é nulo, pelo que vamos ter a quebra espontânea de simetria para qualquer z ímpar. Acoplamos um campo de gauge na lagrangiana e calculamos o tensor de polarização de onde obtemos um termo induzido de Chern-Simons dependente do valor de z . Para $z = 1$, obtemos resultados equivalentes aos obtidos utilizando a expansão $1/N$, e para valores maiores, vemos, claramente, como a simetria de Lorentz é explicitamente quebrada.

Uma possível continuação deste trabalho é o estudo da equação de gap a temperatura finita e discutir a possibilidade de ter transições de fase na teoria. Também seria interessante estudar possíveis aplicações na matéria condensada.

Apêndice A

Notação

Nesta dissertação adotamos o sistema de unidades natural $\hbar = c = 1$ e a métrica de Minkowski com a signos $(+, -, -)$.

Coordenadas espaço-temporais x^μ são etiquetadas por índices gregos ($\mu = 0, 1, 2$), onde x^0 é a coordenada temporal. Coordenadas espaciais x^i são etiquetadas por índices latinos ($i = 1, 2$). Adotamos a convenção somatória de Einstein.

- Tri-vetor covariante

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2) \equiv (x^0, \vec{x}) \text{ com } \mu, \nu = 0, 1, 2.$$

- Tensor métrico

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ com } \mu, \nu = 0, 1, 2.$$

- Vetor contravariante

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2) = (x_0, -\vec{x}),$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico contravariante, o qual satisfaz a seguinte relação

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu \neq \lambda \\ 1 & \text{se } \mu = \lambda \end{cases}.$$

- Produto escalar de dois tri-vetores a e b

$$ab = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu}a^\nu b^\mu = a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 = a^0b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

- Generalização do gradiente e D'Alambertiano em (2+1) dimensões

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right), \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla} \right),$$

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \nabla^2.$$

Apêndice B

Matrizes Gama

Em (2+1) dimensões existem duas representações inequivalentes para as matrizes Gama γ^μ de 2x2 com $\mu = 0, 1, 2$, nesta dissertação adotaremos

$$\gamma^0 = \sigma^3, \gamma^i = i\sigma^1 \text{ e } \gamma^2 = i\sigma^2,$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A outra representação, inequivalente a esta, tem um representante típico, o qual difere somente pelo sinal de uma.

As matrizes gama satisfazem a seguinte regra de anti-comutação

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu}.$$

O campo de Dirac adjunto é definido por

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0.$$

Identidades algebraicas

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 3.$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -\gamma^\nu.$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda} - \gamma^\nu \gamma^\lambda.$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\mu = -2\gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho.$$

Outras relações úteis são os traços de produtos de matrizes gama seguintes

$$Tr [\gamma^\mu] = 0.$$

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu}.$$

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda] = -2i\varepsilon^{\mu\nu\lambda}.$$

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho] = 2(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}).$$

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta] = -2ig^{\mu\nu}\varepsilon^{\lambda\alpha\beta} - 2ig^{\lambda\alpha}\varepsilon^{\mu\nu\beta} - 2ig^{\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\lambda} + 2ig^{\lambda\beta}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}.$$

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma] = g^{\sigma\beta}Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\alpha] - g^{\sigma\alpha}Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\beta] + g^{\sigma\lambda}Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] .$$

$$-g^{\sigma\nu}Tr [\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta] + g^{\sigma\mu}Tr [\gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta] .$$

O tensor completamente antissimétrico, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$, igual a $+/-1$, segundo se tenha uma permutação par ou ímpar de $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2$.

Para um número par de matrizes gama se cumpre

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\alpha \gamma^\beta] = Tr [\gamma^\beta \gamma^\alpha \dots \gamma^\nu \gamma^\mu] ,$$

identidade que não se cumpre para um número ímpar de matrizes gama, já que, por exemplo

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] = -Tr [\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu] .$$

Apêndice C

Função gama

A função gama é definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

a qual diverge sempre que $Re(z) > 0$. A função gama pode ser estendida a todo o plano complexo, sempre que $Re(z) \neq 0$ e $\neq$ de inteiros negativos, valores nos quais $\Gamma(z) \rightarrow \infty$.

Se n for um inteiro positivo, temos que

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Uma das propriedades mais importantes da função gama, e que é empregada no desenvolvimento desta dissertação, é

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

Alguns valores da função gama são

- ▶ $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.
- ▶ $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$.
- ▶ $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.
- ▶ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
- ▶ $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.
- ▶ $\Gamma(3) = 2$.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Lifshitz, On the theory of Second-Order Phase transitions I II Zh. Eksp. Teor. Fiz. **11** 255, 269 (1941).
- [2] P. Horava, Phys. Rev. **D79**, 084008 (2009) [arXiv:0901.3775 [hep-th]].
- [3] P. Horava, JHEP **0903**, 020 (2009) [arXiv:0812.3775 [hep-th]].
- [4] D.J Gross and A. Neveu, Phys. Rev. **D10**, 3235 (1974)
- [5] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961)Q
- [6] M. Gomes, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, Phys. Rev. **D41**, 1363 (1990).
- [7] T. Fujimori, T. Inami, K. Izumi and T. Kitamura, Phys. Rev. **D91**, 125007 (2015) [arXiv:1502.01820 [hep-th]]
- [8] Aneesh V. Manohar, arXiv:hep-ph/9802419, Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 68: Probing the Standard Model of Particle Interactions, Les Houches, France, 28 Jul - 5 Sep 1997 F. David and R. Gupta eds.
- [9] S. Coleman: “Aspects of Symmetry: Selected Erice lectures of Sidney Coleman.”- Cambridge University Press (1985).
- [10] M. Gomes: “Teoria Quântica dos Campos”- edusp (2002).
- [11] V.A. Bezerra, Racionalidade, consistência, reticulação e coerência: O caso da renormalização na teoria quântica do campo, Scientiae Studia Vol.1 (nº2):151-181 (2003)
- [12] G. Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. **74**, 849 (1975)
- [13] A. Zee: “Quantum Field Theory in a Nutshell” Second Edition - Princeton University Press (2010)

- [14] Lewis H. Rayder: “Quantum Field Theory” Second Edition- Cambridge University Press (1996)
- [15] Mark Srednicki: “Quantum Field Theory” - Cambridge University Press (2007)
- [16] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder: “An introduction to Quantum Field Theory” Perseus Book (1995)
- [17] Thomas Banks: “Modern Quantum Field Theory. A concise introduction” Cambridge University Press (2008)
- [18] Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber: “Quantum Field Theory” McGraw-Hill (1980)
- [19] Sidney Coleman, R. Jackiw and H. D. Politzer, Phys. Rev. **D10**, 2491 (1974)
- [20] M. Kobayashi and T. Kugo, Prog. Theor. Phys. **54**, 1537 (1975)
- [21] Kenneth G. Wilson, Phys. Rev. **D7**, 2911 (1973)
- [22] A. Barducci, R. Casalbuoni, M. Modugno, G. Pettini, and R. Gatto, Phys. Rev. **D51**, 3042 (1995)
- [23] M. Thies, J. Phys. **A3**, 12707-12734 (2006)
- [24] D. Scherer, H. Gies, Phys. Rev. **B85**, 195417 (2012) [arXiv:1201.3746v2 [cond-mat.str-el]]
- [25] D. Scherer, J. Braun, H. Gies, J. Phys. A: Math. Theor. **46** 285002 (2013) [arXiv:1212.4624v1 [hep-ph]]
- [26] S.J. Handsa, J.B. Kogutb, C.G. Strouthosa, Phys. Rev. **B515**, 407 (2001)
- [27] H. R. Christiansen, A. C. Petkou, M. B. Silva Neto , N. D. Vlachos, Phys. Rev. **D62**, 025018 (2000)
- [28] C. Boehmer, U. Fritsch, S. Kraus and M. Thies, Phys. Rev. **D78**, 065043 (2008)
- [29] H. Kohyama, Phys. Rev. **D77**, 045016 (2008)
- [30] S.J. Hands, J.B. Kogut, C.G. Strouthos, Phys.Lett. **B515**, 407 (2001)
- [31] J.L. Kneur, M. Benghi Pinto, Rudnei O. Ramos, and E. Staudt Phys. Rev. **D76**, 045020 (2007)

- [32] I. V. Krive, S. A. Naftulin, Phys. Rev. **D46**, 2737–2740 (1992)
- [33] Vladimir Juričić, Igor F. Herbut, and Gordon W. Semenoff, Phys. Rev. **B80**, 081405(R) (2009)
- [34] K.G. Klimenko , R.N. Zhokhov Phys. Rev. **D88** 105015 (2013) [arXiv:1307.7265v3 [hep-ph]]
- [35] P.B.Kolmakov, Magnetization in (2+1)-dimensional Gross-Neveu Model with application to Carbon Nanotubes, XVII Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics August 25, 2015
- [36] H. Sazdjian, The $1/N$ expansion method in Quantum Field Theory, III International School Symmetry in Integrable Systems and Nuclear Physics, Tsakhkadzor, Armenia, 3-13 July 2013
- [37] K. Wilson, Phys. Rev. **D7**, 2911 (1973)
- [38] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B72**, 461 (1974)
- [39] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B75**, 461 (1974)
- [40] E. Brezin and S.R. Wadia (editores), The large N expansion in quantum field theory and statistical physics: from spin systems to two-dimensional gravity, World Scientific, Singapore, (1993)