

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**ESTRUTURAS DE FASE GERADAS POR
ÓRBITAS COMPLEXAS VARIANDO
PARÂMETROS REAIS**

JOSÉ RODOLFO BEZERRA MESQUITA ARAÚJO

ORIENTADOR: DR. JASON ALFREDO CARLSON GALLAS

João Pessoa – PB

Agosto – 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**ESTRUTURAS DE FASE GERADAS POR
ÓRBITAS COMPLEXAS VARIANDO
PARÂMETROS REAIS**

JOSÉ RODOLFO BEZERRA MESQUITA ARAÚJO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física, área de concentração: Dinâmica Não-Linear

João Pessoa – PB

Agosto – 2016

A663e Araújo, José Rodolfo Bezerra Mesquita.
 Estruturas de fase geradas por órbitas complexas variando
 parâmetros reais / José Rodolfo Bezerra Mesquita Araújo.-
 João Pessoa, 2016.
 73f. : il.
 Orientador: Jason Alfredo Carlson Gallas
 Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
 1. Física. 2. Sistemas não-lineares. 3. Mapa de Hénon.
 4. Mapa cúbico.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno **José
Rodolfo Bezerra Mesquita Araújo**,
candidato ao Título de Mestre em Física na
Área de Concentração Física da Matéria
Condensada.

1 Aos doze dias do mês de agosto do ano de dois mil e dezesseis, às 14h00, na sala de
2 reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física da
5 Matéria Condensada, **José Rodolfo Bezerra Mesquita Araújo**. A comissão
6 examinadora composta pelos professores doutores: Jason Gallas (DF/UFPB), orientador
7 e presidente da banca examinadora, Paulo César de Oliveira (DF/UFPB) e Adriano
8 Batista (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jason Gallas comunicou aos
9 presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o candidato para que o
10 mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado "*Estrutura
11 de fases geradas por órbitas complexas variando parâmetros reais*". Concluída a
12 exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte
13 parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o
14 respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo
15 Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, lavrei a presente ata que vai assinada
16 por mim mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **12 de agosto**
17 **de 2016**.

18

Prof. Dr. Jason Gallas
Orientador - UFPB
Prof. Dr. Paulo César de Oliveira
UFPB
Prof. Dr. Adriano Batista
UFCG
Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário

The block contains four handwritten signatures in blue ink, each written over a horizontal line. From top to bottom, the signatures correspond to: Prof. Dr. Jason Gallas, Prof. Dr. Paulo César de Oliveira, Prof. Dr. Adriano Batista, and Danilo Wilson Lemos Menezes. The signature of Danilo Wilson Lemos Menezes is crossed out with a large 'X'.

Ao meu avô, Espedito.

AGRADECIMENTOS

Sempre que chego à conclusão de algo, percebo que apesar de todo o meu esforço, seria impossível terminar meus intentos sem a presença de um verdadeiro time de pessoas que se mantém ao meu lado, que riem e choram comigo. Por isso, em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus pais, Maria Helena B. C. Mesquita e Arioaldo A. Júnior, e à minha família, por todo o incentivo e apoio ao longo dos anos, os quais são essenciais para o meu desenvolvimento pessoal e profissional. Agradeço também aos meus amigos e colegas de trabalho por toda a ajuda, e aos meus professores por sempre se mostrarem solícitos e acreditarem em meu potencial.

Em particular, deixo registrado meu muito obrigado à minha irmã, Maria Júlia B. M. Araújo, e a Letícia Cavalcante pelos computadores, à Virgínia Campos (tia Vivi) pelo suporte técnico, e ao Prof. Laércio Losano pelos conselhos. Por último, e mais importante, deixo um agradecimento especial ao Prof. Jason Gallas por toda a paciência, atenção e orientação. Ele certamente é uma peça chave não apenas na realização desse trabalho, mas no meu desenvolvimento como pesquisador.

“Os físicos gostam de pensar que tudo o que você tem que fazer é dizer:
‘Essas são as condições, e agora, o que acontece depois?’ ”

Richard P. Feynman

RESUMO

Este trabalho lida com o mapeamento computacional do espaço de fase de mapas iterativos. Inicialmente é feita uma revisão sobre o mapa de Hénon real, tendo por objetivo a identificação de padrões nas regiões de estabilidade de seu espaço de parâmetros. Em seguida, o algoritmo desenvolvido para tal intento é estendido para o caso em que as variáveis da transformação são considerados como números complexos. Os parâmetros, contudo, serão mantidos no domínio dos reais durante esse processo. Esse procedimento permitirá a observação de áreas estáveis antes não encontradas no espaço de fase. Por fim, as ferramentas e observações feitas serão utilizadas para o estudo do mapa generalizado de Hénon de ordem cúbica.

Palavras-chave: Sistemas não-lineares, mapa de Hénon, mapa cúbico.

ABSTRACT

This work is a computational mapping of the phase space of iterated maps. Initially, a review of the real Hénon map is presented, aiming at the identification of patterns in the stability regions of the parameter space. Then, the algorithm developed is extended to allow complex variables, while still requiring parameters to be real. This procedure permits the observation of different stable *loci* in phase space. Finally, developed tools and observations are applied in a comparative study of the generalized cubic Hénon map.

Keywords: Nonlinear systems, Hénon map, cubic map.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Diagrama de bifurcação do mapa logístico.	14
1.2	Conjunto de Mandelbrot.	15
1.3	Conjuntos de Julia preenchidos.	17
2.1	Efeito das transformações propostas por Hénon em uma região elíptica	19
2.2	Bacias de atração dos parâmetros $(a, b) = (1, -0.5)$	23
2.3	Espaço de configurações dos parâmetros $(a, b) = (1, -0.5)$. Detalhe da diferença entre duas órbitas no regime caótico e do respectivo atrator estranho.	25
2.4	Espaço de parâmetros do mapa de Hénon.	28
2.5	Atratores periódicos de três pares de parâmetros diferentes do mapa de Hénon, e suas respectivas bacias.	29
2.6	Ampliações dos arcos do espaço de parâmetros do mapa de Hénon	30
2.7	Números de rotação das estruturas do mapa de Hénon.	31
2.8	Bacias de atração e órbitas cíclicas demonstrando a dinâmica associada aos números de rotação do mapa de Hénon.	32
2.9	Detalhe do arco $1/3$ e do processo de rota para o caos via dobramento de período.	33
2.10	Bacias de atração e atratores de dois parâmetros com dinâmica caótica.	35
3.1	Visão geral de estruturas em forma de cacto do espaço de parâmetros do mapa de Hénon.	39
3.2	Cacto de período seis.	40
3.3	Ampliações próximas à base do cacto de período seis.	42
3.4	Cacto de período sete.	45

3.5	Cactos de período oito e dez.	46
3.6	Cúspides dos cactos de período oito e dez.	47
3.7	Bulbos do cacto 10-periódico.	48
3.8	Ampliações mostrando sobreposições de bulbos e uma estrutura pentacuspidal.	49
3.9	Cacto de período quarenta e oito.	50
3.10	Estruturas da região $b < 0$	52
3.11	Órbitas de diferentes pontos iniciais para os parâmetros $(a, b) = (-0.94, -0.93)$ do mapa de Hénon com variáveis complexas.	54
3.12	Órbitas de diferentes pontos iniciais para os parâmetros $(a, b) = (-1.1036, -0.947)$ do mapa de Hénon com variáveis complexas.	56
3.13	Detalhes dos <i>loci</i> de diferentes pontos iniciais para o mesmo par de parâmetros do mapa de Hénon.	57
3.14	Órbitas coexistentes para os parâmetros $(a, b) = (-0.955, -0.95)$	57
4.1	Espaço de parâmetros do mapa cúbico para $c = 0$	60
4.2	Exemplo de conjunto de Julia preenchido do mapa cúbico com $c = 0$	61
4.3	Espaço de parâmetros para $c > 0$	62
4.4	Ponto de acumulação dos bulbos para $c > 0$	63
4.5	Espaço de parâmetros para $c < 0$	64
4.6	Detalhe da região não-divergente do espaço de parâmetros do mapa cúbico para $c < 0$	65
4.7	Tricórnios.	66

LISTA DE TABELAS

2.1	Órbitas dos parâmetros $(a, b) = (1, -0.5)$	23
2.2	Pontos pertencentes aos ciclos periódicos dos pontos F - K	32
3.1	Influência dos pontos iniciais complexos sobre as órbitas do mapa de Hénon para três parâmetros distintos.	38
3.2	Autovalores do mapa de Hénon para os pontos de conexão dos cactos 6 e 8 à linha $b=1$	43
3.3	Pontos de nascimento dos cactos de período par.	44
3.4	Parâmetros para os quais se verifica multi-estabilidade na região próxima a $b = 1$	51
3.5	Parâmetros para os quais se verifica multi-estabilidade na região próxima a $b = -1$	53
3.6	Pontos das órbitas observadas para o parâmetro $(a, b) = (-0.955, -0.95)$	57
4.1	Parâmetros para os quais se verifica multi-estabilidade no mapa cúbico.	65

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	12
CAPÍTULO 2 – O MAPA DE HÉNON	19
2.1 Introdução	19
2.2 Atratores e Bacias de Atração	21
2.3 Espaço de Parâmetros	26
2.4 Dobramento de Período Revisitado	33
CAPÍTULO 3 – MAPA DE HÉNON COM VARIÁVEIS COMPLEXAS	36
3.1 Efeito das Variáveis Complexas Sobre os Atratores Encontrados no Caso Real .	37
3.2 Nas Proximidades de $b = 1$	38
3.2.1 Cactos: Características Gerais	38
3.2.2 Nascimento dos Cactos	41
3.2.2.1 Cactos Pares	41
3.2.2.2 Cactos Ímpares	44
3.2.3 Explorando Estruturas Diversas	45
3.2.3.1 Cactos de Período 8 e 10	45
3.2.3.2 Bulbos do Cacto de Período 10	47
3.2.3.3 Cacto de período 48	50
3.3 Nas Proximidades de $b = -1$	52
3.3.1 Regiões Periódicas	52

3.3.2 Nova Região Caótica	53
CAPÍTULO 4 – MAPA CÚBICO COMPLEXO	58
4.1 Caso $c = 0$	59
4.2 Caso $c > 0$	61
4.3 Caso $c < 0$	63
CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	68
REFERÊNCIAS	70

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

De maneira geral, denomina-se *dinâmico* todo sistema que evolui com o tempo, que se modifica com o passar dele. Apesar de sistemas dinâmicos serem hoje objeto de estudo de várias áreas do conhecimento, como a matemática, a química e a biologia, coube à física realizar os primeiros avanços substanciais nesse ramo de pesquisa. A mecânica newtoniana, a termodinâmica, e a dinâmica dos fluídos estão entre os exemplos mais conhecidos de disciplinas onde tais sistemas são estudados, traçando suas histórias desde o século XIV, até os dias atuais.

Já pelo final do século XIX e início do século XX, acreditava-se que a física estava completa, visão que só seria modificada com o entendimento dos fenômenos quânticos e relativísticos. Mesmo após essas descobertas, algo ainda parecia certo e definitivo: todas as dificuldades que sistemas dinâmicos clássicos poderiam oferecer eram já conhecidas.

A partir dos anos 1950, entretanto, o desenvolvimento da computação permitiu que experimentos numéricos fossem realizados de uma maneira até então impraticável. Tais técnicas levaram o meteorologista e matemático americano Edward Lorenz à descoberta, em 1963, do que hoje se conhece por *caos determinístico*¹, uma revolução no estudo de sistemas dinâmicos clássicos (Ref. [31]).

Baseando-se em modelos de simulação para a movimentação do ar na atmosfera, Lorenz propôs para o estudo desse fenômeno um conjunto de três equações diferenciais de primeira

¹Essa nomenclatura possui uma história curiosa. Atribui-se a sua primeira utilização à Ref. [30], estudo realizado nos anos 70, durante a Guerra Fria. Em termos gerais, esse trabalho não trata do que se conhece hoje como *caos*, mas é responsável pela popularização do termo.

Anos mais tarde, após a reabertura das comunicações entre Rússia e Estados Unidos, o estudo realizado na Ref. [30] se mostrou um caso especial do *teorema de Sharkovsky*, assim nomeado em homenagem ao matemático ucraniano Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky, que o publicou em 1964.

ordem não-lineares e acopladas, dadas por

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(x - y), \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde σ , ρ e β são parâmetros reais.

O que ele observou ao calcular numericamente as possíveis soluções dessas equações foi que, enquanto para determinados valores de parâmetros o sistema apresentava comportamentos já esperados, para outros ele evoluía para um estado completamente desconhecido. Colocando-se $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$, verifica-se que as soluções da Eq. (1.1) oscilam de maneira irregular e não-periódica, nunca divergindo, mas também nunca repetindo o mesmo trajeto. Além disso, não importa quão próximas duas condições iniciais estejam, a menos que elas sejam *exatamente iguais*, suas trajetórias se tornarão completamente diferentes em um tempo finito.

Atualmente, regimes caóticos mostram-se presentes em sistemas clássicos com bastante frequência. Sistemas com essa característica são particularmente difíceis de serem estudados, pois pequenos erros, inevitáveis a todo experimento, levam a previsões que podem se apresentar em completo desacordo com o resultado observado. Isso os torna imprevisíveis na prática, como é o caso do fenômeno da turbulência.

Apesar de tudo, Lorenz mostrou que existe uma organização em meio ao comportamento caótico. Ao exibir graficamente suas soluções em três dimensões, observa-se o aparecimento de uma estrutura em forma de asas de borboleta, um exemplo do que hoje se conhece por *fractal*². Mesmo sendo inovador e interessante, o trabalho de Lorenz só começou a chamar atenção a partir da década de 1970, quando o estudo de sistemas caóticos despontou.

Em várias ocasiões, especialmente em casos de interesse prático, sistemas dinâmicos são modelados por equações diferenciais que dependem continuamente do tempo, como acontece nas equações de Newton, Bernoulli, e do próprio Lorenz. Em algumas situações, entretanto, a dependência temporal do sistema pode ser tomada como discreta. Isso acontece, por exemplo, no estudo da evolução populacional de certas espécies de animais, de sistemas financeiros e de sistemas eletrônicos digitais.

Outro uso importante de mapas discretos está na análise de soluções de equações diferenciais. Para encontrar *ordem em meio ao caos*, como já mencionado, Lorenz utilizou uma equação

²Estruturas matemáticas que possuem dimensão fracionária.

iterativa, atualmente conhecida como *mapa de Lorenz*.

Por fim, mapas discretos são por si mesmos exemplos de sistemas que apresentam dinâmica caótica. Este é o caso do *mapa logístico*, utilizado em 1976, pelo pesquisador australiano Robert M. May, como exemplo de um “*sistema simples capaz de apresentar uma dinâmica extremamente complexa*” [33].

O mapa logístico recebe esse nome por ser o sistema discreto análogo à *equação logística*. Trata-se de uma equação iterativa cuja não-linearidade se apresenta na forma de um simples termo quadrático, e é dada por:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (1.2)$$

onde r é um parâmetro conhecido como *taxa de crescimento*.

A Fig. 1.1 é um exemplo bastante conhecido de *diagrama de bifurcação*. Nele se vê como a variação do parâmetro r (abscissa) afeta o comportamento dinâmico do sistema: quando $r \leq 3$, o sistema apresenta um ponto fixo estável. À medida que o parâmetro é aumentado, esse ciclo de período 1 perde estabilidade, dando lugar a um ciclo 2-periódico. Diz-se então que houve um *dobramento de período*.

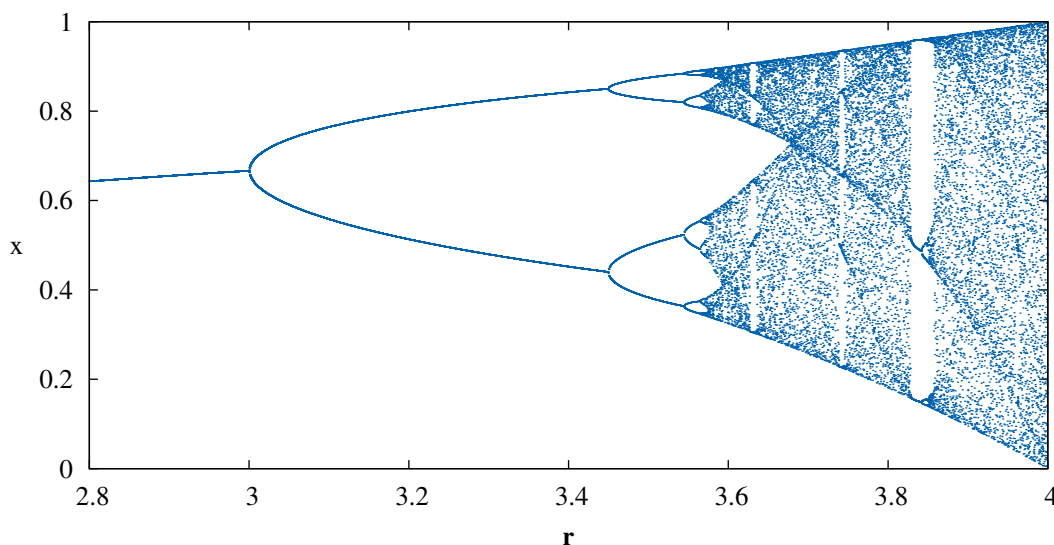


Figura 1.1: Diagrama de bifurcação do mapa logístico.

Em determinado ponto, esse ciclo também se torna instável, e surge um ciclo 4-periódico. Esse processo continua até ser atingida a região caótica, localizada mais à direita na figura. Ele é conhecido como *rota para o caos via dobramento de período*. A literatura sobre esse assunto é extremamente vasta, e o leitor interessado pode encontrar maiores detalhes nas Refs. [40, 44].

Em 1980, Benoit B. Mandelbrot, um dos grandes nomes no estudo de sistemas dinâmicos, apresentou o resultado de suas pesquisas numéricas com o mapa logístico complexo (Ref. [32]).

O espaço de parâmetros do mapa quadrático complexo possui várias propriedades interessantes e extensa literatura. Contudo, será útil citar aqui a relação existente entre a organização do conjunto de Mandelbrot e a dinâmica do sistema.

Na Fig. 1.2 vê-se que $\mathcal{M}$ é formado por uma região em forma de cardioide, à qual se ligam vários discos. Os discos conectados diretamente ao cardioide são chamados de *primários*, ou de *ordem 1*; os que se ligam diretamente aos primários são *secundários*, ou de *ordem 2*, e assim por diante. O conjunto formado por um disco primário e por todos os discos de ordem mais elevada a ele relacionados, (i.e. os de ordem 2 a ele ligados, os de ordem 3 ligados a estes últimos, etc.), serão chamados aqui de *bulbos*.

Para todos os parâmetros pertencentes a um mesmo disco, o sistema possui ciclos atrativos de períodos iguais. Na Fig. 1.2, o período de cada um deles é associado à uma cor, como indicado na tabela no lado direito da imagem. Logo, todos os pontos do cardioide possuem período 1, os pertencentes ao disco amarelo no lado esquerdo, período 2, e assim sucessivamente.

Para se encontrar o período de um determinado disco, pode-se utilizar a seguinte regra: considerando a fronteira superior do cardioide, o maior disco entre a cúspide e o disco de período dois, é o disco de período $3 = 2 + 1$. Da mesma forma, o maior disco entre os de período três e dois é o de período $5 = 3 + 2$. Essa regra, que será chamada aqui de *regra da soma dos períodos*, é válida também para os bulbos da parte inferior da imagem, não importando também se são primários, secundários, ou de ordem mais elevada.

Uma informação mais completa da dinâmica do sistema nessas regiões pode ser obtida através dos *números de rotação* k , que são exatamente as frações mostradas na Fig. 1.2. Seu significado é o seguinte: os pontos do bulbo $1/3$, como por exemplo o ponto c_1 , dão lugar a ciclos atrativos que executam $1/3$ de volta a cada iteração, no sentido anti-horário, em torno do ponto fixo instável w_{c_1} mostrado na Fig. 1.3(a). Assim, a iteração do ponto A resulta no ponto B , ($1/3$ de volta), a iteração deste, no ponto C , ($2/3$ de volta), e em seguida retorna-se ao ponto A , tendo sido executada uma volta completa.

Esse mesmo comportamento é “herdado” pelos demais discos do bulbo. A Fig. 1.3(b) mostra o ciclo atrativo do ponto c_2 , pertencente ao disco secundário de período seis do bulbo $1/3$. Note que a cada iteração, o sistema executa $1/3$ de volta, apesar de possuir período 6.

Assim como a regra da soma periódica permite a obtenção do período de qualquer disco, para descobrir o número de rotação de um bulbo, inicia-se por designar ao ponto de cúspide dois números: $1/1$ e $0/1$. O bulbo maior a esquerda é o de número $1/2$. Para encontrar o número

variáveis. Expresso dessa maneira, o mapa quadrático possui $x = 0$ como ponto crítico, o que torna mais comum a sua utilização para estudos computacionais de $\mathcal{M}$, em vez da forma logística da Eq. (1.2).

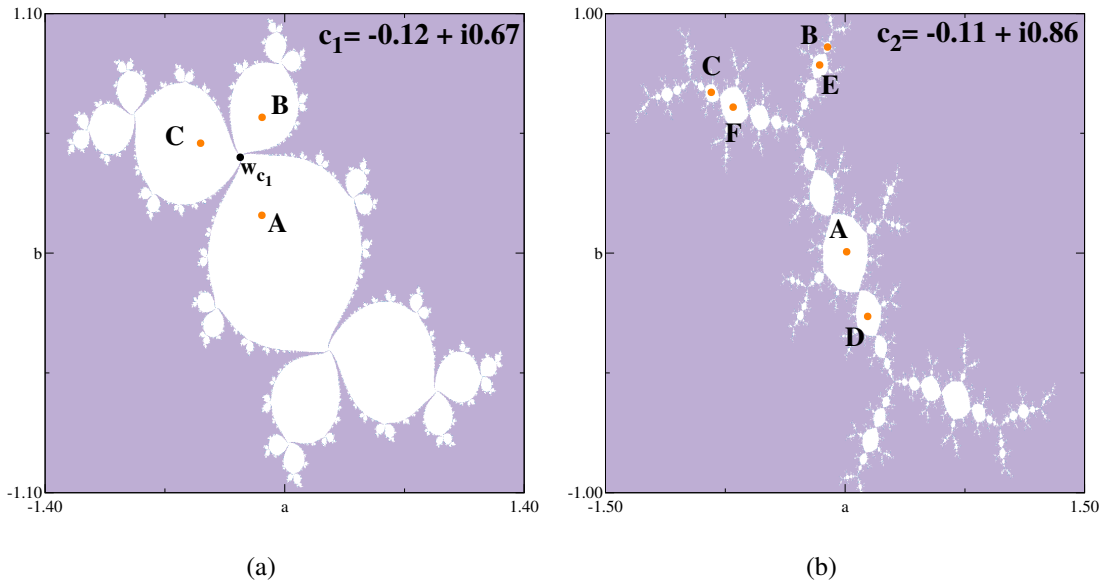


Figura 1.3: Conjunto de Julia preenchido e ciclos de período três e seis correspondentes aos parâmetros **(a)** $c_1 = -0.12 + i0.67$ **(b)** $c_2 = -0.11 + i0.86$, do mapa $x \mapsto x^2 + c$, respectivamente. A cada iteração, o ponto A é levado em B, este em C e assim por diante.

de rotação do maior bulbo entre eles na região superior, realiza-se a *soma de Farey*⁶ entre $0/1$ e $1/2$, que resulta em $0/1 \oplus 1/2 = 1/3$.

O número de rotação do maior bulbo superior entre o de número $1/3$ e a cúspide é dado por $1/3 \oplus 0/1 = 1/4$. Já o maior entre os de número $1/2$ e $1/3$ possui número de rotação $1/5 = 1/2 \oplus 1/3$. Para os bulbos inferiores, é utilizado o número $1/1$ no lugar de $0/1$, o que resulta em $2/3 = 1/2 \oplus 1/1$ para o número de rotação do bulbo 3-periódico inferior, e assim sucessivamente.

Maiores detalhes sobre essas relações, provas matemáticas de suas existências e vários outros aspectos podem ser encontradas nas Ref. [9–12, 40].

O presente trabalho tem como tema central o espaço de fase de mapas bidimensionais, em particular o mapa cúbico e o mapa de Hénon, que de certa forma pode ser considerado como uma extensão do mapa quadrático para duas dimensões.

Indo muito além do interesse puramente matemático e da sua utilização como ferramenta de estudo, o mapa de Hénon possui ligações com alguns sistemas físicos reais. Em 1989, por exemplo, Biham e Wenzel [2], mostraram que o mapa de Hénon pode ser usado para descrever uma cadeia infinita de átomos interagindo entre si e com um potencial externo. Em 1992, J.

⁶Dadas duas frações, p/q e r/s , sua soma de Farey é dada pela soma direta de seus numeradores e denominadores:

$$\frac{r}{s} \oplus \frac{p}{q} = \frac{r+p}{s+q} \quad (1.4)$$

F. Heagy mostrou que um oscilador harmônico na presença de uma força externa não-linear representando *chutes* ao longo do tempo recai exatamente no mapa de Hénon [25]. Já no século XXI, Bonnato, Garreau e Gallas [3], fazem referencia à um laser de CO_2 com perdas moduladas, onde se encontra uma grande semelhança entre o espaço de parâmetros desse sistema e o espaço de parâmetros de Hénon. Esse trabalho sugere a existência de um possível isomorfia entre o espaço de parâmetros de alguns tipos de laser e o de certas classes de mapas discretos. Maiores detalhes e outros exemplos podem ser encontrados nas Refs. [24, 45].

No Cap. 2 será feita uma apresentação geral desse mapa com o objetivo não apenas de familiarização ou recordação, mas também como método de apresentação do algoritmo desenvolvido. No Cap. 3, será realizada uma extensão do mapa para variáveis complexas, mantendo-se contudo, os parâmetros reais. Esse procedimento não apenas mantém o espaço de fase bidimensional, e dessa forma representável em figuras, mas permite uma interpretação física aos parâmetros, preservando assim sua utilidade prática.

No Cap. 4 é feita uma rápida introdução aos *mapas generalizados de Hénon*, dando-se ênfase, em seguida, ao mapa cúbico com variáveis complexas. No Cap. 5 são apresentadas as conclusões gerais do estudo feito, bem como discussões sobre a extensão e utilidade do método para outros sistemas.

Capítulo 2

O MAPA DE HÉNON

2.1 Introdução

O mapa de Hénon, $H_{a,b}(x_t, y_t)$, foi proposto em 1976 por Michel Hénon, um astrônomo e matemático francês nascido em 1913. Seu intuito era estudar um sistema que apresentasse uma dinâmica semelhante à encontrada no sistema proposto por Lorenz, mas que fosse mais simples de ser explorado analítica e numericamente do que um conjunto de equações diferenciais [26].

Ele é resultado da composição de três transformações, indicadas na Eq. (2.1). Tomando como região inicial os pontos da elipse mostrada na Fig. 2.1(a), vê-se que o efeito da primeira transformação é levar as coordenadas y desses pontos na parábola $y + 1 - ax^2$, resultando na Fig. 2.1(b). Já a segunda, caso $|b| < 1$, acarreta em uma contração na direção x , como mostrado na Fig. 2.1(c). Por fim, a última transformação coloca a figura na direção horizontal novamente (Fig. 2.1(d)).

$$(x, y) \rightarrow (x' = x, y' = y + 1 - ax^2) \rightarrow (x'' = bx', y'' = y') \rightarrow (x''' = y'', y''' = x'') \quad (2.1)$$

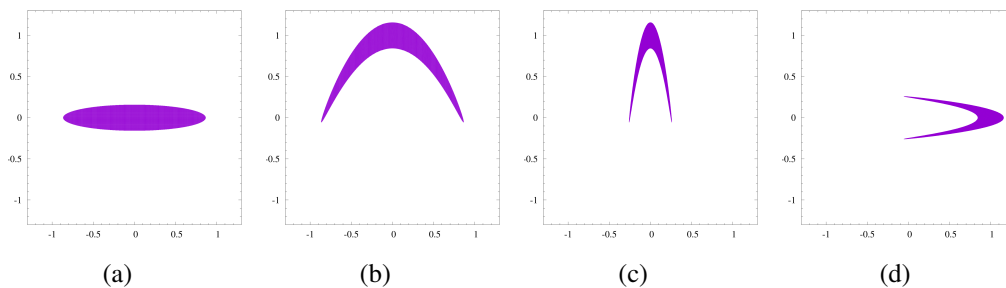


Figura 2.1: Efeito das transformações da Eq. (2.1) sobre uma área elíptica. Observe que a área da imagem resultante (d) já parece ser visualmente menor que a da elipse original (a).

Juntas, essas transformações são expressas pelo mapa

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (2.2)$$

Trata-se portanto de uma equação iterativa bidimensional de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dependente de dois parâmetros, (a, b) . Seu Jacobiano é constante, dado por $J = -b$, mimetizando a divergência constante e negativa do sistema de Lorenz.

Desse modo, quando $|b| > 1$, o mapa amplia áreas do $\mathbb{R}^2$, e as órbitas encontradas são em geral divergentes¹. Para $|b| = 1$ a transformação preserva áreas, sendo esse caso dito *conservativo* ou *hamiltoniano*. Quando $|b| < 1$, tem-se o caso *dissipativo*, onde a transformação passa a contrair regiões do $\mathbb{R}^2$, dando lugar a atratores de medida nula com comportamentos dinâmicos variados.

O alongamento e subsequente contração de áreas mostrados nas imagens é uma característica presente no sistema lorenziano², sendo apontada como essencial na obtenção de uma dinâmica caótica. Além disso, nesse sistema, cada ponto pertence à uma única trajetória, propriedade representada aqui pelo fato do mapa de Hénon ser uma transformação bijetiva, cuja inversa é dada por

$$\begin{cases} x_n = b^{-1}y_{n+1} \\ y_n = x_{n+1} - 1 + ab^{-2}y_{n+1}^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Ao contrário do que ocorre com o sistema lorenziano no entanto, fixado um par (a, b) , pontos obtidos através de repetidas iterações do mapa (2.2) podem se tornar arbitrariamente grandes, devido ao termo quadrático. É possível demonstrar, contudo, a existência de uma *região de aprisionamento*, assim chamada porque todos os pontos localizados nela são mapeados para o interior dela mesma. Caso uma órbita qualquer adentre esse conjunto, não conseguirá escapar para o infinito, sendo classificada como *não-divergente*.

Qualquer mapa quadrático bidimensional com Jacobiano constante pode ser colocado na forma da Eq. (2.2), através de uma mudança adequada de variáveis. Dada essa pluralidade de formas possíveis para o mapa de Hénon, durante todo esse trabalho, optou-se por utilizá-lo como

$$\begin{cases} x_{t+1} = a - x_t^2 + by_t \\ y_{t+1} = x_t \end{cases} \quad (2.4)$$

¹Órbitas cíclicas continuam existindo, mas são instáveis.

²Nesse caso, contração de volumes.

Assim escrito, cria-se uma dependência direta entre os valores de x_t e y_{t+1} . Por exemplo, supondo que o ponto (x_1, y_1) seja um ponto fixo da Eq.(2.4), então após uma iteração, teremos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

A primeira igualdade acima vem da Eq. (2.4), onde $y_{n+1} = x_n$, e a segunda da hipótese de que (x_1, y_1) é um ponto fixo. Conclui-se daí que qualquer órbita de período 1 desse mapa possui apenas uma coordenada independente, e pode ser representada por (x_1, x_1) .

Pela mesma razão, uma órbita de período 2 possui apenas dois valores diferentes de coordenadas, que podem ser indicados por x_1 e x_2 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Já uma órbita de período três apresenta três quantidades diferentes, x_1 , x_2 e x_3 ,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \quad (2.7)$$

e assim por diante. Isso será útil quando variáveis complexas forem introduzidas no Cap. 3.

2.2 Atratores e Bacias de Atração

A conceituação precisa de um *atrator* é tema de extenso debate na literatura [35, 36]. Essas definições muitas vezes sobrepõem-se uma às outras, e são feitas com vistas em determinadas características de interesse do objeto a ser estudado. Jorge Buescu [5] argumenta em seu livro que: “ Não há contradição entre os vários conceitos distintos de atrator - todos eles são úteis na medida em que revelam propriedades sutilmente diferentes.”

Para fins computacionais, será adotada portanto uma definição simples e informal:

Definição 2.2.1. *O atrator de um mapa iterativo é o conjunto de pontos para o qual órbitas do sistema são levadas ao serem iteradas um número suficientemente grande de vezes.*

Os exemplos mais simples de atratores são as órbitas cíclicas n -periódicas, como pontos fixos ($n = 1$), e o chamado *ponto no infinito*³, conjunto para o qual as órbitas divergentes são atraídas.

³Essa nomenclatura advém da identificação do plano complexo com a esfera de Riemann, e é utilizada para mapas de maneira geral.

Do ponto de vista matemático, a Def. 2.2.1 apresenta algumas falhas, como por exemplo a não conceituação do que seja a *estabilidade* de um conjunto atrator. Um ponto fixo instável, por exemplo, ao ser iterado um número arbitrário de vezes permanece sempre o mesmo, e apesar disso não deve ser classificado como atrator por ser instável.

Contudo, dada a precisão finita dos computadores modernos, é extremamente improvável que uma órbita instável seja “confundida” com um atrator durante um experimento numérico. Além de não possuírem uma representação finita em linguagem de máquina, desvios do valor exato tendem a afastar as órbitas calculadas de tais pontos⁴.

O conjunto de pontos que ao serem iterados são levados a um determinado atrator T , formam a sua *bacia de atração* $B(T)$. Assim, se T for um ciclo n -periódico estável, $B(T)$ será o conjunto formado pelos n pontos desse ciclo, unido ao conjunto de todos os pontos que são “atraídos” por ele.

O uso de computadores torna possível não apenas a obtenção dos valores numéricos dos pontos de um atrator, mas também a visualização de sua bacia de atração. Para tanto, é necessário primeiro fixar os parâmetros (a, b) na Eq. (2.4), e dividir o espaço de configurações em um grid de $N \times N$ quadrados. Quanto maior for o valor de N , melhor será a resolução da imagem.

Para cada um desses quadriláteros, itera-se o seu ponto central um número K de vezes, e após esse procedimento, o comportamento da órbita é analisado. É necessário que o transiente K seja suficientemente grande para garantir a convergência da órbita em direção ao atrator. Valores típicos utilizados neste trabalho foram $N = 1024$ e $K = 2^{20} = 1048576$.

Considera-se que a órbita divergiu se for constatado que x_n excedeu um valor limite x_{max} . Para o caso do conjunto de Mandelbrot, pode-se provar que esse valor é dado por $x_{max} = \max(|c|, 2)$, onde $c \in \mathbb{C}$ é o parâmetro do mapa quadrático complexo, na forma: $x_{n+1} = x_n^2 + c$.

Para o mapa de Hénon, contudo, tal valor deve ser “colocado à mão”, levando-se em conta apenas a presença do termo quadrático. Os experimentos aqui relatados foram realizados com $x_{max} = 16$, uma escolha que constitui uma margem segura, e permite que os cálculos não sejam demasiado longos.

Se após o transiente for constatada a presença de um ciclo periódico, assinala-se ao quadri-

⁴Órbitas instáveis podem ser computadas quando os valores envolvidos possuem uma representação finita em linguagem de máquina. Como exemplo, considere o mapa logístico,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

É fácil perceber que $x = 0$ é um ponto fixo do sistema para qualquer valor de r . Pode-se mostrar ainda que ele é instável para $r \geq 1$. Não obstante, tomando-se $r = 4$ e $x_0 = 1/2$, observa-se *computacionalmente* que após duas iterações, a órbita é levada em $x_2 = 0$, permanecendo nesse ponto para qualquer valor subsequente de n .

lâtero a cor correspondente ao seu período, seguindo-se uma tabela de cores como a encontrada no Fig. 1.2, pág. 15. Observe que tanto essa quanto as demais tabelas apresentadas ao longo desse trabalho vão até o período treze. Períodos $m \geq 13$ são então assinalados segundo o resultado da operação $(m \bmod 13)$. Assim, ciclos de período treze, por exemplo, ou de múltiplos desse número, são marcados com a cor do número 0 (zero) da tabela. Órbitas 14-periódicas com a cor 1, e assim sucessivamente.

A órbita de um ponto (x_0, y_0) é considerada cíclica de período m se, após o transiente, for constatado que m é o menor inteiro para o qual

$$|(x_{p+m} - x_p, y_{p+m} - y_p)| \leq \text{erro}$$

Obviamente, mais uma vez, dada a precisão finita do computador, não se pode esperar que $\text{erro} = 0$. Para efeitos práticos, toma-se então $\text{erro} = 10^{-10}$, um valor condizente para variáveis de dupla precisão.

A Fig. 2.2 mostra o resultado obtido para os parâmetros $(a, b) = (1, -0.5)$. Esse exemplo ilustra um aspecto interessante do mapa de Hénon que não é encontrado no caso do mapa quadrático de uma única variável: a possibilidade de coexistência de mais de um estado de equilíbrio estável para um mesmo par de parâmetros, ou *multi-estabilidade*.

Ponto	x	y
A'	0.5	0.5
A	-0.136945277482109	-0.688601426986479
B	1.32554670446859	-0.136945277482109
C	-0.688601426986479	1.32554670446859

Tabela 2.1: Pontos das órbitas de período 1 e 3, que coexistem para $(a, b) = (1, -0.5)$.

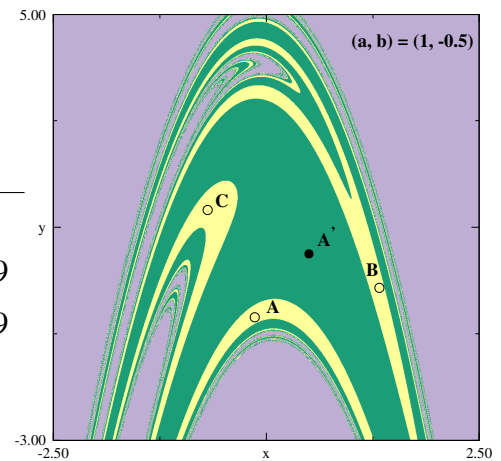


Figura 2.2: Bacias de atração para os parâmetros $(a, b) = (1, -0.5)$. Os pontos em verde-escuro são atraídos para o ponto fixo A' , e os verde-claros para a órbita de período 3. Pontos em lilás divergem.

As regiões em verde-escuro compõem a bacia de atração da órbita de período 1, assinalada na figura pelo ponto A' , enquanto as áreas em verde-claro constituem a bacia de atração da órbita de período três, mostrada na imagem pelos pontos A, B e C. Já a área lilás é a bacia de

atração do infinito⁵.

Perceba que a cada iteração da Eq. (2.4), a órbita “gira” $1/3$ de volta no sentido anti-horário em torno do ponto A' , indo do ponto A para o ponto B , do ponto B para o C e assim sucessivamente. Esse resultado será discutido com maiores detalhes na Sec. 2.3.

Além dos atratores discutidos, existe ainda outro tipo de atrator, conhecido como *atrator estranho*, presente tanto nas equações de Lorenz quanto no mapa de Hénon, para determinadas escolhas de parâmetros. Discussões sobre uma definição matemática definitiva do que seja um atrator estranho ainda é motivo de debate dentro da comunidade científica. Apesar disso, vê-se na Ref. [40] a seguinte caracterização:

Definição 2.2.2. *Seja $F(x,y)$ uma transformação de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Um subconjunto limitado $T \subset \mathbb{R}^2$ é dito um atrator estranho para a transformação F , se existir um conjunto R com as seguintes propriedades:*

1. R é uma região de aprisionamento e constitui uma vizinhança de T . Isto significa que, para cada ponto $p \in T$, existe um disco centrado em p totalmente contido em R . Isso permite classificar T como um atrator, pois significa que órbitas próximas a T permanecem sempre próximas a ele a medida que F é iterada.
2. Órbitas que começam em R apresentam *dependência sensível às condições iniciais*.
3. O atrator T possui estrutura fractal.
4. As órbitas de pontos iniciais pertencentes a R se tornam arbitrariamente próximas de qualquer ponto do atrator T .

Nos experimentos realizados, considera-se que um ponto converge para um atrator estranho se, mesmo após o transiente, for detectado que o período da órbita é superior a $m = 2^{15} = 32768$.

A Fig. 2.3(a) foi produzida utilizando-se $(a,b) = (1.63, 0.1)$ como parâmetros⁶. A curva preta representa o atrator estranho, e a região branca uma parte de sua bacia de atração.

Vê-se então que:

1. A área branca pode desempenhar o papel de uma região de aprisionamento⁷, R .

⁵Obviamente, apesar de ser chamado de atrator, o ponto no infinito não é levado em consideração quando se fala em multi-estabilidade.

⁶Em seu trabalho original, Hénon propõe os parâmetros $(a,b) = (1.4, 0.3)$ para o estudo do fenômeno caótico. Os parâmetros aqui propostos foram escolhidos apenas por conveniência.

⁷Apesar de ser possível determinar formalmente uma região de aprisionamento para um dado par (a,b) [26], esse procedimento não foi adotado aqui, tendo-se em vista que tal região varia conforme os parâmetros escolhidos.

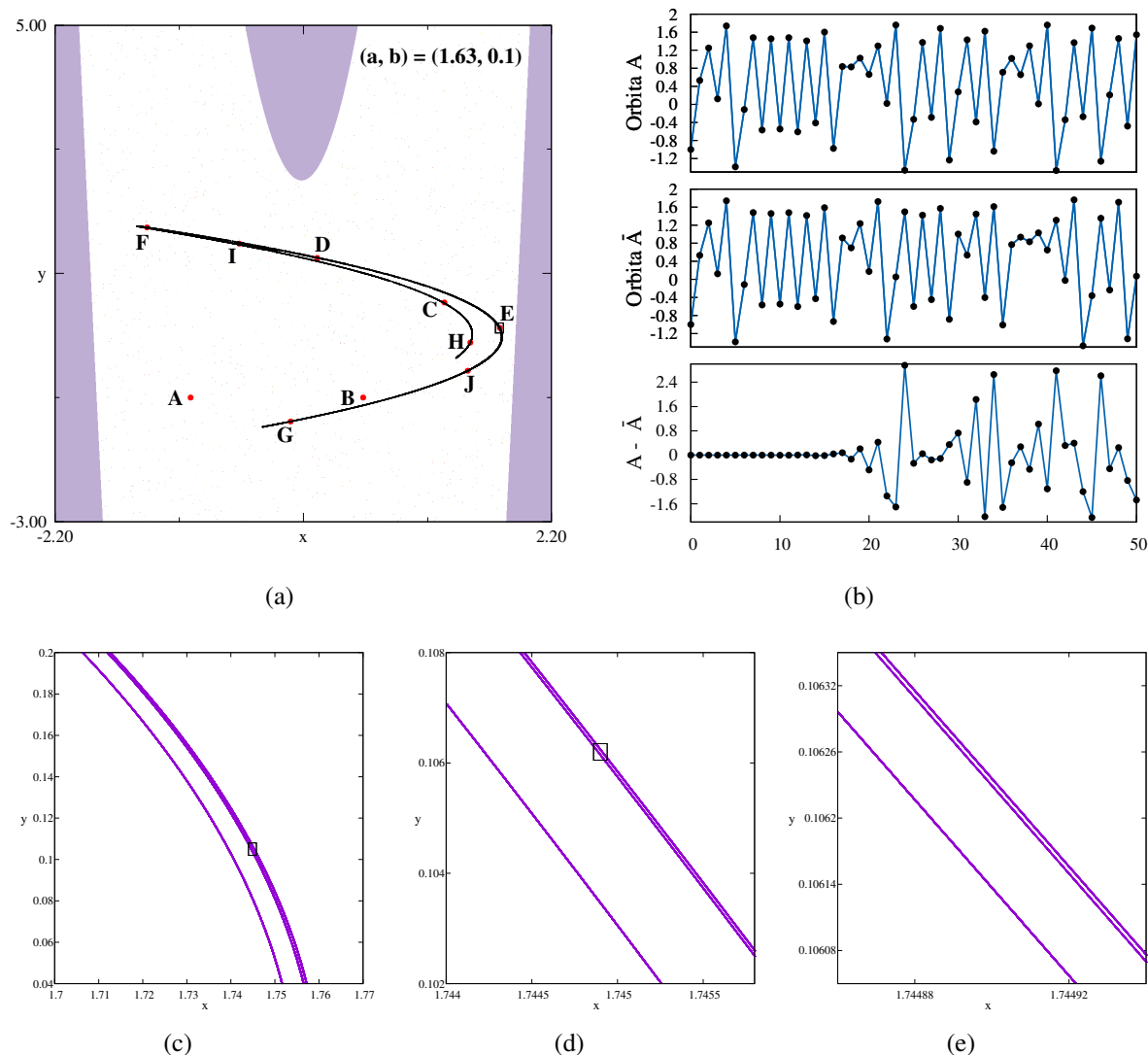


Figura 2.3: (a) Atrator caótico e sua respectiva bacia de atração, encontrados para os parâmetros $(a, b) = (1, -0.5)$. Os pontos assinalados indicam a órbita de $A = (-1, -1)$. (b) No gráfico superior, coordenada x_n dos pontos da órbita de A contra n . No meio, coordenadas $\bar{x}_n$ da órbita do ponto $\bar{A} = (-1, -1.001)$ (não mostrado na imagem) contra n . Embaixo, a diferença $(x_n - \bar{x}_n)$ entre essas coordenadas. (c)-(e) Sucessivas ampliações de parte do atrator, começando pelo quadrilátero em torno do ponto E , visto na imagem (a).

2. O sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais, ilustrada na Fig. 2.3(b). O gráfico superior apresenta a evolução na coordenada x da órbita do ponto $A = (-1, -1)$ contra o número de iterações n . O gráfico logo abaixo mostra a órbita da coordenada x do ponto inicial $\bar{A} = (-1, -1.001)$.

Apesar dessas órbitas serem muito semelhantes no começo do experimento, a evolução da diferença entre elas, mostrada no gráfico inferior da Fig. 2.3(b), evidencia que aproximadamente a partir da vigésima iteração elas se tornam cada vez mais desiguais⁸.

⁸Uma forma quantitativa de caracterizar a divergência entre duas órbitas é o cálculo do *expoente de Lyapunov* λ do sistema. De maneira simplificada, quando $\lambda > 0$, órbitas próximas divergem exponencialmente, sendo esta uma característica marcante de um sistema caótico.

3. A estrutura fractal do atrator é mostrada nas Figs. 2.3(c)-2.3(e), onde sucessivas ampliações do quadrilátero desenhado ao redor do ponto E da Fig. 2.3(a) são feitas.
4. Para desenhar o atrator T , utilizou-se a propriedade 4 da Def. 2.2.2: tomando A como ponto inicial, foram realizadas $2^{14} = 16.384$ iterações do mapa de Hénon, marcando-se todos os pontos assim encontrados com a cor preta. Apenas os dez primeiros pontos, ordenados de $A - J$, aparecem destacados na imagem, dando mostra da forma rápida e aparentemente aleatória com que a trajetória caminha por toda a extensão do conjunto T . Apesar do procedimento acima ter utilizado o ponto A como ponto inicial, qualquer outro ponto pertencente a bacia de atração teria levado à mesma imagem do atrator T .

2.3 Espaço de Parâmetros

Como já mencionado no Cap. 1, o espaço de parâmetros do mapa quadrático complexo de uma única variável pode ser facilmente estudado graças à dicotomia estrutural. Para o estudo do espaço de fase do mapa de Hénon, no entanto, não se dispõe de tais propriedades. Contudo, um método que tem se mostrado bastante útil em tal intento é a utilização dos chamados *isodiagramas* (Ref. [23]).

Essa ferramenta se baseia nos *diagramas de bifurcação*, como o mostrado na Fig. 1.1, pág. 14. Para o caso do mapa de Hénon, tal gráfico necessitaria de duas dimensões a mais por causa da variável y e do parâmetro b^9 .

Para contornar essa dificuldade, e tendo em vista que o interesse principal é a análise dos períodos das órbitas associadas a cada par (a, b) , a proposta dos isodiagramas é codificar essa informação por meio de cores. O resultado são imagens que revelam várias estruturas e padrões diferentes, alguns dos quais serão discutidos mais adiante, e que permitem uma melhor compreensão da dinâmica do mapa.

Assim sendo, e tendo-se em mente a possibilidade de multi-estabilidade, foram adotados os seguintes critérios para se mapear o espaço de parâmetros:

Dado um ponto (a, b) pertencente ao espaço de parâmetros do mapa de Hénon, pode-se classificá-lo como:

1. Divergente, caso a órbita de *todos* os pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sejam divergentes;

⁹Considerando-se a dependência entre y_{n+1} e x_n , mostrada na Eq. (2.4), o número de dimensões poderia ser reduzido para três.

2. n -periódico, caso existam pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que suas órbitas tendam à um ciclo de período n . Caso existam mais de um ciclo periódico estável (multi-estabilidade), associa-se ao ponto (a, b) o período do ciclo de maior n ;
3. Caótico, caso não se verifique periodicidade para nenhum dos pontos iniciais não-divergentes.

As definições acima são obviamente impossíveis de serem implementadas com precisão absoluta em um computador devido a fatores como o número infinito de pontos existentes em $\mathbb{R}^2$. Porém, usando-as como guias, é possível chegar a um algoritmo com resultados satisfatórios.

Para se obter as imagens do espaço de parâmetros mostradas em todo o trabalho, utilizou-se uma extensão das ideias apresentadas na Sec. 2.2, que serão chamadas aqui de *algoritmo núcleo*. Em vez de fixar apenas um par (a, b) , o próprio espaço de parâmetros foi dividido em uma malha quadrada $M \times M$. Para cada um desses quadriláteros, foram tomados como seus representantes os pontos centrais, que são utilizados em seguida como parâmetros para o algoritmo núcleo.

Os pontos da malha de parâmetros foram então coloridos de acordo com os mesmos critérios de cores já apresentados, somando-se a eles os itens acima. A Fig. 2.4 mostra o resultado desses experimentos. Os parâmetros $(a, b) = (1, -0.5)$ e $(a, b) = (1.63, 0.1)$, analisados na Sec. 2.2, são identificados na figura pelos pontos E e D , respectivamente.

Uma das características desse mapa que pode ser observada através da figura, é o processo de dobramento de período. Para tanto, pode-se começar seguindo a linha $b = 0.1$ da esquerda para a direita. Após a região de divergência, chega-se à área verde-escuro de período 1, onde se vê o ponto A . Continuando, observa-se uma região arqueada em verde-claro, de período dois, onde se situa o ponto B . Já o ponto C está localizado no arco azul, cujo período é o dobro do da região verde-claro.

O período da região seguinte continua sempre dobrando em relação ao da região imediatamente anterior, mas suas áreas diminuem cada vez mais, de modo que a faixa amarela de período oito é pouco visível, e os arcos de período mais alto são indistinguíveis na Fig. 2.4. Esse é exatamente o tipo de informação que se esperaria encontrar em um diagrama de bifurcação.

A Fig. 2.5, onde se vê as bacias de atração e os respectivos ciclos periódicos dos pontos $A - C$, mostra em detalhes o que ocorre com os atratores no processo de dobramento. Na região verde escuro, eles são compostos apenas por pontos fixos, como o ponto a_1 , que perdem estabilidade (ponto a_2 na Fig. 2.5(b)), dando origem a um ciclo de período dois (pontos b_1 e b_2).

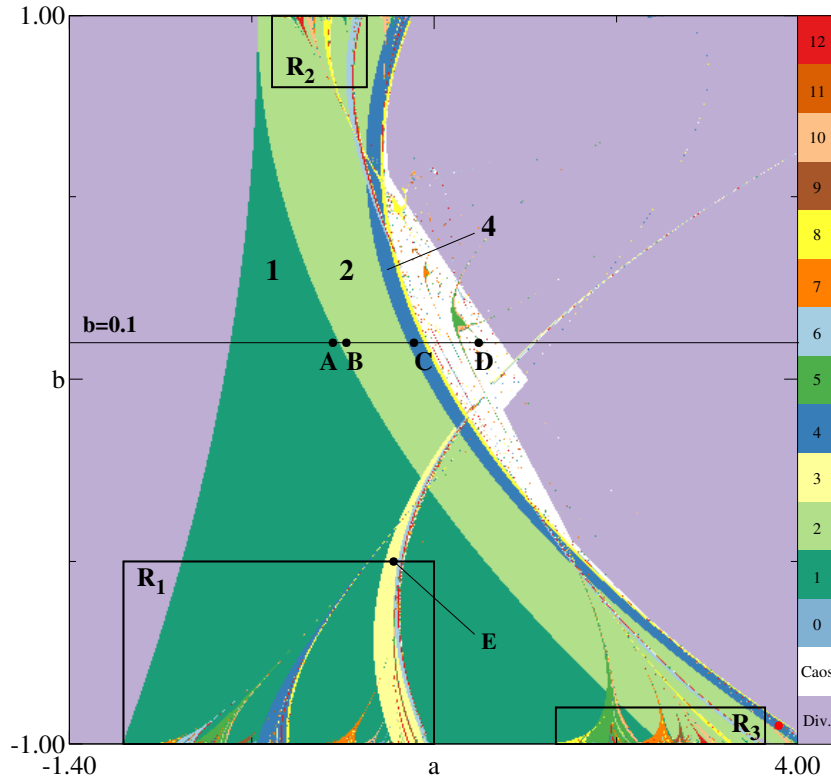


Figura 2.4: Espaço de parâmetros do mapa de Hénon. A tabela de cores no lado direito indica o período associado a cada ponto. Períodos $n \geq 13$ foram marcados conforme $(n \bmod 13)$. Lembre-se que para $|b| > 1$, o mapa não é dissipativo, de modo que todos os pontos calculados numericamente divergem.

Em seguida, cada um dos pontos desse ciclo sofre um dobramento, dando origem a um ciclo estável de período quatro (Fig. 2.5(c)). Perceba nessas imagens que tanto um ponto fixo quanto um ciclo 2-periódico continuam a existir após o dobramento, tornando-se contudo, instáveis.¹⁰

Continuando na linha $b = 0.1$, após a cascata de dobramento de período, chega-se à área branca, composta por pontos onde se verifica a presença de dinâmica caótica.

Na Fig. 2.4, também estão presentes vários arcos de cores variadas, quase todos envergando-se em direção ao lado direito da imagem. Para facilitar o estudo que será desenvolvido mais adiante neste trabalho, a área verde-escuro de período 1 será denominada de *região principal*. Por *estruturas de ordem 1*, ou *arcos primários*, entende-se todos aqueles que “nascem” da estrutura principal, isto é, cuja base localiza-se sobreposta à estrutura principal (Fig. 2.6(a)).

¹⁰Os ciclos instáveis mostrados nessas imagens foram calculados analiticamente, e não por meio de experimentos numéricos. Eles são dados pela solução das equações:

$$\begin{cases} (x, y) = H_{a,b}(x, y) \\ (x, y) = H_{a,b}^2(x, y), \end{cases}$$

onde H^n representa a n -ésima composição do mapa consigo mesmo. Maiores detalhes e aprofundamentos sobre investigações aritméticas do mapa de Hénon podem ser encontradas nas Refs. [15, 19]

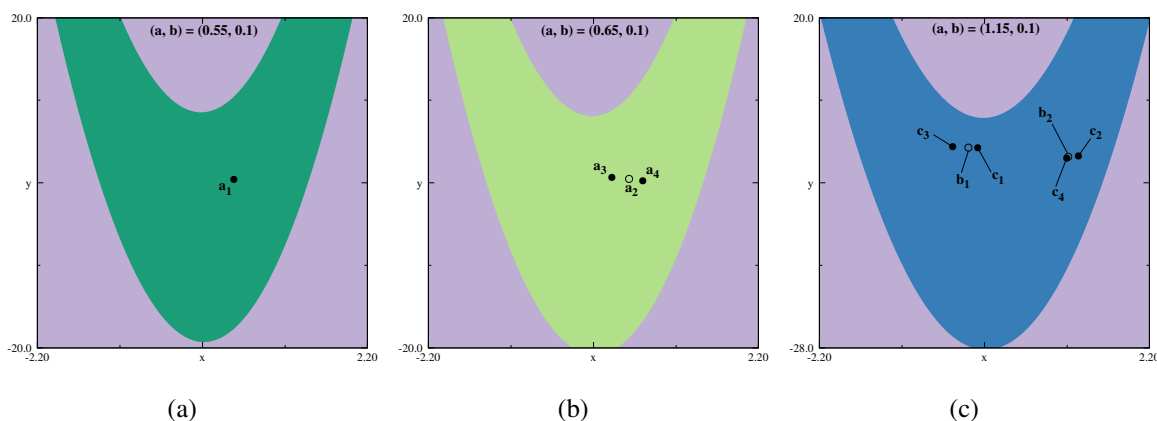


Figura 2.5: Atratores periódicos, e suas respectivas bacias, para os parâmetros **(a)** $(a, b) = (0.55, 0.1)$, **(b)** $(a, b) = (0.65, 0.1)$ e **(c)** $(a, b) = (1.15, 0.1)$. Os pontos pretos indicam órbitas estáveis e foram calculados numericamente. Já os pontos a_2 , b_1 e b_2 , por serem instáveis, precisam ser calculados analiticamente. Observe, contudo a proximidade entre os pontos a_1 e a_2 , bem como a semelhança das bacias de atração em todas as imagens. O reconhecimento desse fato ajuda no processo de experimentação numérica pois torna desnecessário o cálculo da bacia de atração total para cada par de parâmetros. Além disso, a comparação dessas bacias com as dos pontos D e E , discutidas na Sec. 2.2, mostra ainda que a concavidade da bacia guarda relação com o sinal do parâmetro b : para $b > 0$, a concavidade é para cima (Figs. 2.5(a)-2.5(c) e Fig. 2.3), e para baixo quando $b < 0$, (Fig. 2.2).

O arco verde-claro de período 2, na Fig. 2.4, que está diretamente “em contato” com a região principal, também será um arco primário.

Todas as estruturas que surgem sobrepostas aos arcos primários são secundárias, como os da região R_2 , mostrada em detalhes na Fig. 2.6(b), e assim por diante. Note portanto que na Fig. 2.6(c), os arcos localizados mais à esquerda são primários, enquanto os situados no lado direito são secundários.

Observando atentamente as Figs. 2.4 e 2.6, nota-se a existência de um padrão nos períodos associados a cada arco: o maior arco primário, cuja base está localizada entre o começo da região principal e o começo do arco primário de período 2 (lado esquerdo de ambos), é o arco de período $3 = 1 + 2$. Da mesma forma, entre a estrutura principal e o arco 3, localizam-se vários arcos, o maior dos quais tem período $4 = 1 + 3$. Entre os arcos e 4 e 3, está o de período 7 e assim por diante.

Essa é exatamente a regra da soma dos períodos encontrada no conjunto de Mandelbrot, e se mostrou válida para estruturas de qualquer ordem em todos os casos analisados. Na Fig. 2.6(c), por exemplo, o arco secundário de período 15 é o maior entre a extremidade esquerda do arco 5 e a do arco 10.

De tal verificação, surge um questionamento quanto à possibilidade de associação de números de rotação aos arcos, a exemplo do que ocorre com o conjunto $\mathcal{M}$ (veja o Cap. 1, pag. 16). Para isso, é necessária uma investigação mais profunda do comportamento dinâmico do sistema

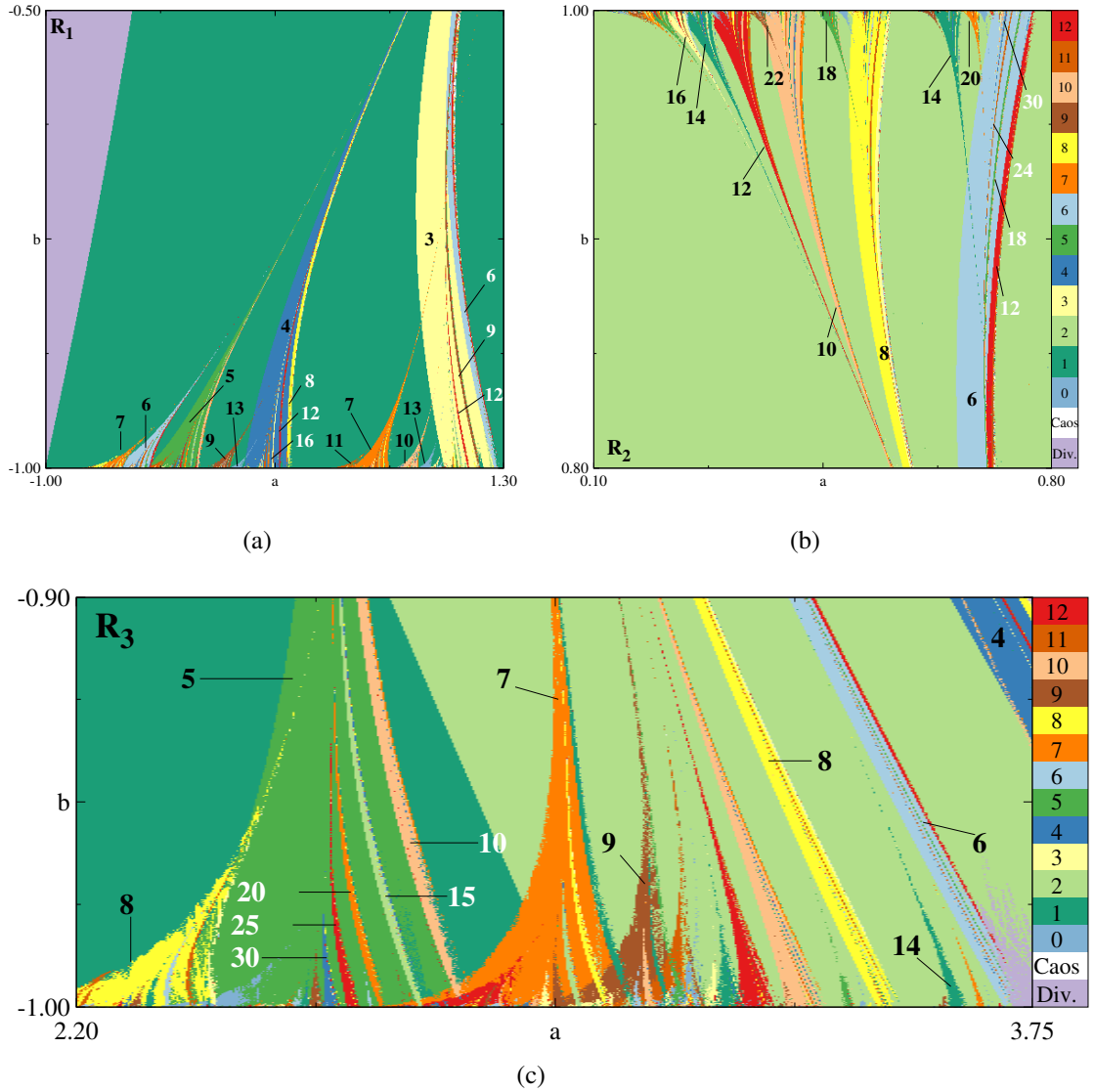


Figura 2.6: Ampliações das regiões R_1 , R_2 e R_3 da Fig. 2.4, mostrando em detalhes arcs do espaço de parâmetros do mapa de Hénon. Os números indicam o período da maior órbita encontrada. **(a)** Os arcs cujo período está escrito na cor preta são primários, pois suas bases se sobrepõem à estrutura principal, enquanto os arcs menores, cujo número de período é branco, são secundários. Isso se justifica pelo fato de suas bases estarem sobrepostas ao arco primário de período três. **(b)** Números periódicos pretos assinalam estruturas secundárias, e os brancos, terciárias. **(c)** Um pouco mais de cautela se faz necessária: os arcs mais à esquerda são primários, enquanto que os mais à direita são secundários.

para parâmetros pertencentes a essas estruturas.

Inicialmente, assim como ao cardioide em $\mathcal{M}$, será dado à região principal o número de rotação $r = 0/1$, e $r = 1/2$ ao arco 2-periódico, a exemplo do bulbo 2-periódico na Fig. 1.2, p. 15. Seguindo a regra da *soma de Farey*, tem-se que o maior arco primário entre essas estruturas é aquele cujo número de rotação será

$$r = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad (2.8)$$

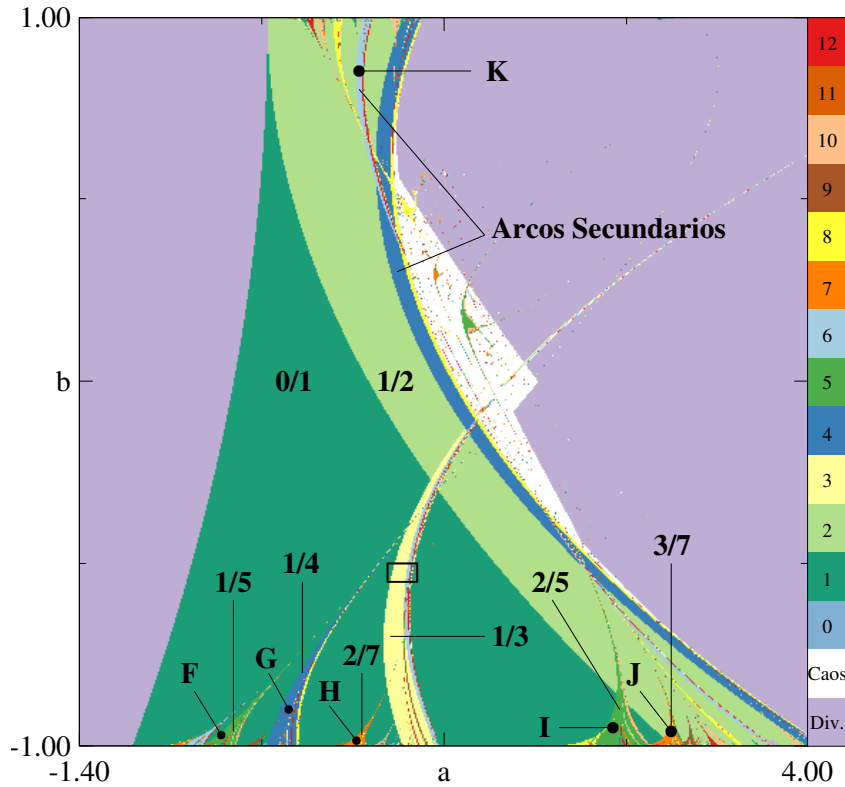


Figura 2.7: Números de rotação do mapa de Hénon.

Da mesma maneira, entre os arcos 0/1 e 1/3, aparece como maior arco primário, o de número $r = 0/1 \oplus 1/3 = 1/4$; entre os arcos 1/3 e 1/4 tem-se o de número 2/7, e assim sucessivamente. Esses números são mostrados na Fig. 2.7.

A justificativa para a utilização deles é observada nas Figs 2.8(a)-2.8(e). Nelas, percebe-se que a cada iteração, um ponto pertencente ao ciclo periódico executa um giro no sentido anti-horário condizente com o número de rotação do arco ao qual pertence. Como exemplo, o ciclo 5-periódico, presente no ponto *F* da Fig. 2.7, gira 1/5 de volta no sentido anti-horário a cada iteração, enquanto no ciclo de mesmo período, presente no ponto *I*, o giro é de 2/5 de volta. Os valores desses pontos são mostrados na tabela 2.2

Note ainda que enquanto os pontos *F-I* estão sobrepostos à região principal, o ponto *J* está sobreposto ao arco 1/2, possuindo, além da órbita 7-periódica, uma órbita 2-periódica estável. No entanto, por pertencer ao arco 3/7, sua órbita 7-periódica gira de acordo com seu número de rotação, indicando que utilizar a posição da base para a determinação de tais números é um procedimento adequado.

A Fig. 2.8(f) mostra a bacia de atração do ponto *K*, localizado no arco de período 6, região superior da Fig. 2.7. Note que por ser esse um arco secundário, seu número de rotação é o

mesmo que o do arco primário ao qual pertence: o arco $1/2$. De fato, a cada iteração, os pontos tanto do ciclo de período 2, como os do ciclo de período 6, executam $1/2$ de volta, isto é, transitam de uma determinada área da bacia para outra, indo de noroeste a sudeste na imagem.

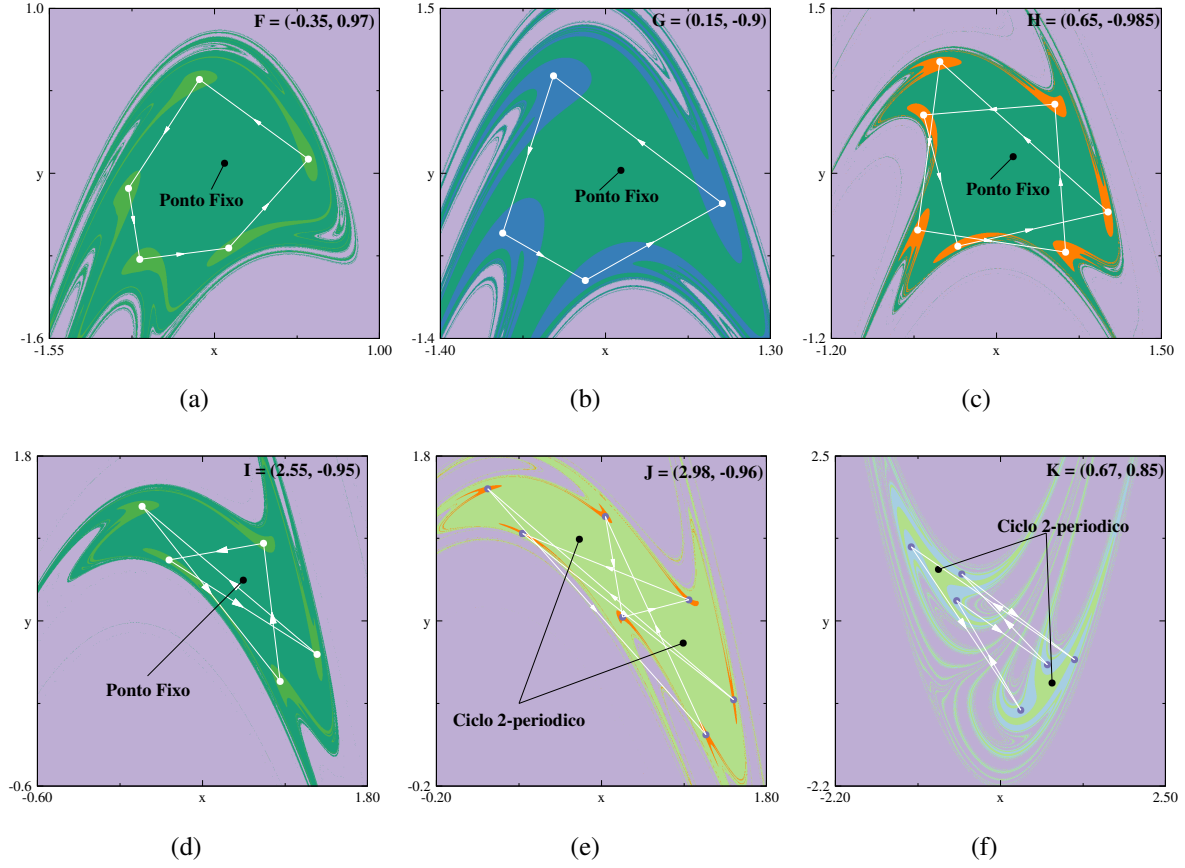


Figura 2.8: Bacias de atração e órbitas cíclicas dos pontos F - K . Tomando um ponto qualquer do ciclo, e considerando o sentido anti-horário, nota-se que a cada iteração acontece um giro de (a) $1/5$, (b) $1/4$, (c) $2/7$, (d) $2/5$, e (e) $3/7$. (f) O ciclo 6-periódico do ponto $K = (0.67, 0.85)$ faz parte de um arco secundário, possuindo o mesmo número de rotação do arco primário a ele associado: $1/2$.

Tabela 2.2: A tabela apresenta, para cada ponto F - K da Fig. 2.7, um ponto (x, y) pertencente à órbita cíclica de período indicado.

Ponto	Ciclo	x	y
$F = (-0.35, 0.97)$	Período 1	-0.1974563504	-0.1974563504
	Período 5	-0.3915432746	0.4493465838
$G = (0.15, -0.9)$	Período 1	0.0759142264	0.0759142264
	Período 4	-0.2155294513	-0.8907477978
$H = (0.65, -0.985)$	Período 1	0.2861931805	0.2861931805
	Período 7	-0.1665666909	-0.4464642613
$I = (2.55, -0.95)$	Período 1	0.8959957242	0.8959957242
	Período 5	1.1637689893	0.1606311924
$J = (2.98, -0.96)$	Período 2	1.2943246729	0.6656753270
	Período 7	1.5998345096	0.3225771333
$K = (0.67, 0.85)$	Período 2	-0.7331614937	0.8831614937
	Período 6	0.4382450015	-1.1202211890

2.4 Dobramento de Período Revisitado

Uma observação rápida do espaço de parâmetros mostrado nas Figs. 2.4 pode levar à suposição de que o processo de dobramento de período que culmina na região caótica acontece apenas a partir do arco $1/2$. Observe, no entanto, a Fig. 2.9, que apresenta em sua parte superior uma ampliação de um pedaço do arco $1/3$, indicado na Fig. 2.7 pelo quadrilátero preto.

É perceptível nessa imagem a existência de mais duas rotas para o caos via dobramento de período. A primeira ocorre a partir do arco $1/3$: passando-se sucessivamente da região de período 3 para as de períodos 6, 12, 24, etc, chega-se a região caótica onde se localiza o ponto M . Esse processo é mostrado em maiores detalhes no diagrama de bifurcação da parte inferior na imagem, que foi feito seguindo-se a linha $b = -0.525$.

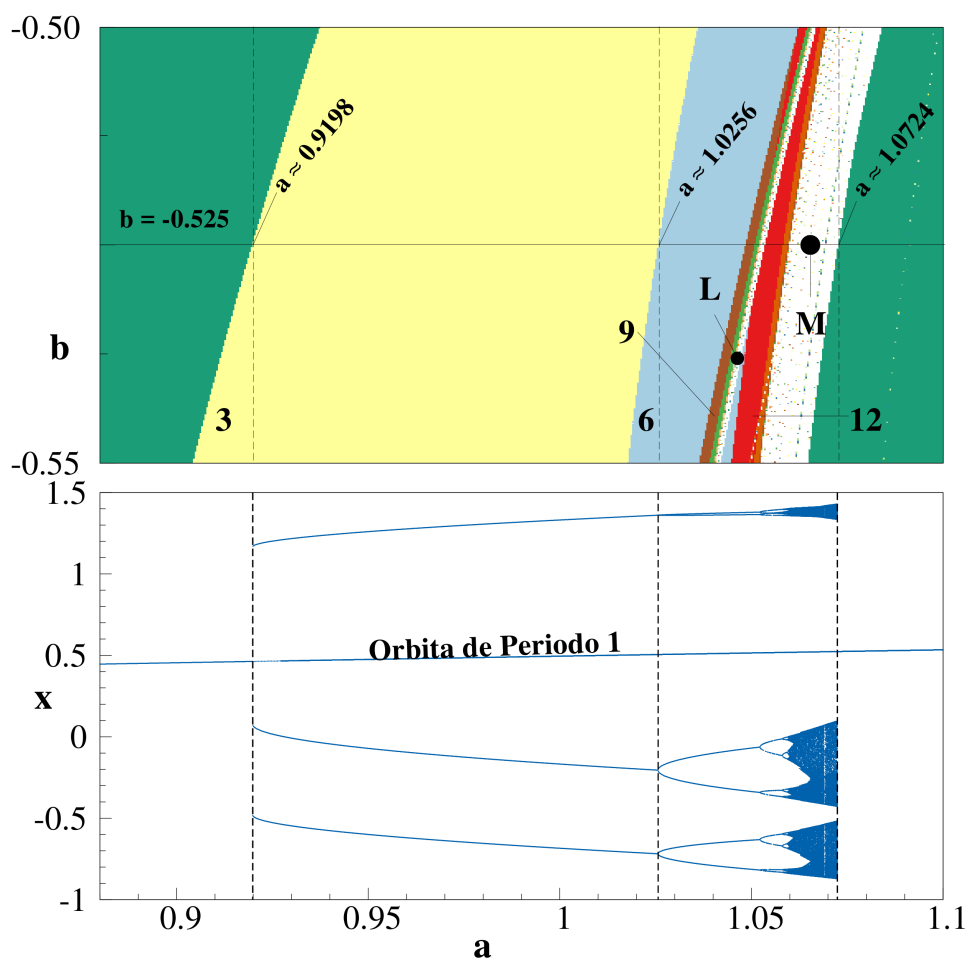


Figura 2.9: Em cima, ampliação de uma parte do arco $1/3$, e do arco secundário de período 9. Em ambos, é possível perceber a rota para o caos (região branca) que ocorre em cada um. Em baixo, o dobramento de período do arco $1/3$ é mostrado em maiores detalhes, seguindo-se a linha $b = -0.525$. Para desenhar esse gráfico, foram tomados dois pontos iniciais, um sempre pertencente à bacia do ciclo 1-periódico, e outro sempre pertencente à do ciclo 3-periódico. São eles $(x_{ini1}, y_{ini1}) = (0.15, 0.15)$ e $(x_{ini2}, y_{ini2}) = (-0.65, 1.3)$, respectivamente. Note que órbita de período 1 não sofre dobramento de período à medida que o parâmetro a é variado; apenas o ciclo 3-periódico, que surge próximo a $a = 0.92$, passa por tal processo.

O segundo processo surge a partir do arco de segunda ordem de período 9, colorido em marrom, o qual se bifurca em períodos 18, 36, e assim por diante, até atingir a região caótica onde se localiza o ponto L . As bacias de atração dos pontos $M = (1.065, -0.525)$ e $L = (1.046, -0.538)$ são mostradas na Fig. 2.10.

Em ambas estão assinaladas os pontos fixos, cujas bacias correspondem à porção verde das imagens, e os atratores estranhos, cujas bacias estão na cor branca. No caso específico da Fig. 2.10(b), tem-se ainda a coexistência de um ciclo 6-periódico, o que era esperado, dada a sobreposição entre os arcos.

Perceba que enquanto o atrator estranho do arco $1/3$ está separado em três regiões distintas, e a cada iteração do mapa seus pontos executam $1/3$ de volta, o atrator estranho do arco 9-periódico divide-se em nove regiões distintas, executando também $1/3$ de volta. Esse é um comportamento esperado: o arco de período 9 tem sua base sobreposta à base do arco três (veja Fig. 2.6(a)).

Logo, assim como no caso da órbita do ponto K da Fig. 2.7, que “herda” a dinâmica do arco primário $1/2$, os pontos sobre o arco secundário 9 herdam a dinâmica do arco $1/3$. Isso justifica portanto a utilização de números de rotação para indicar apenas a região principal e os arcos primários.

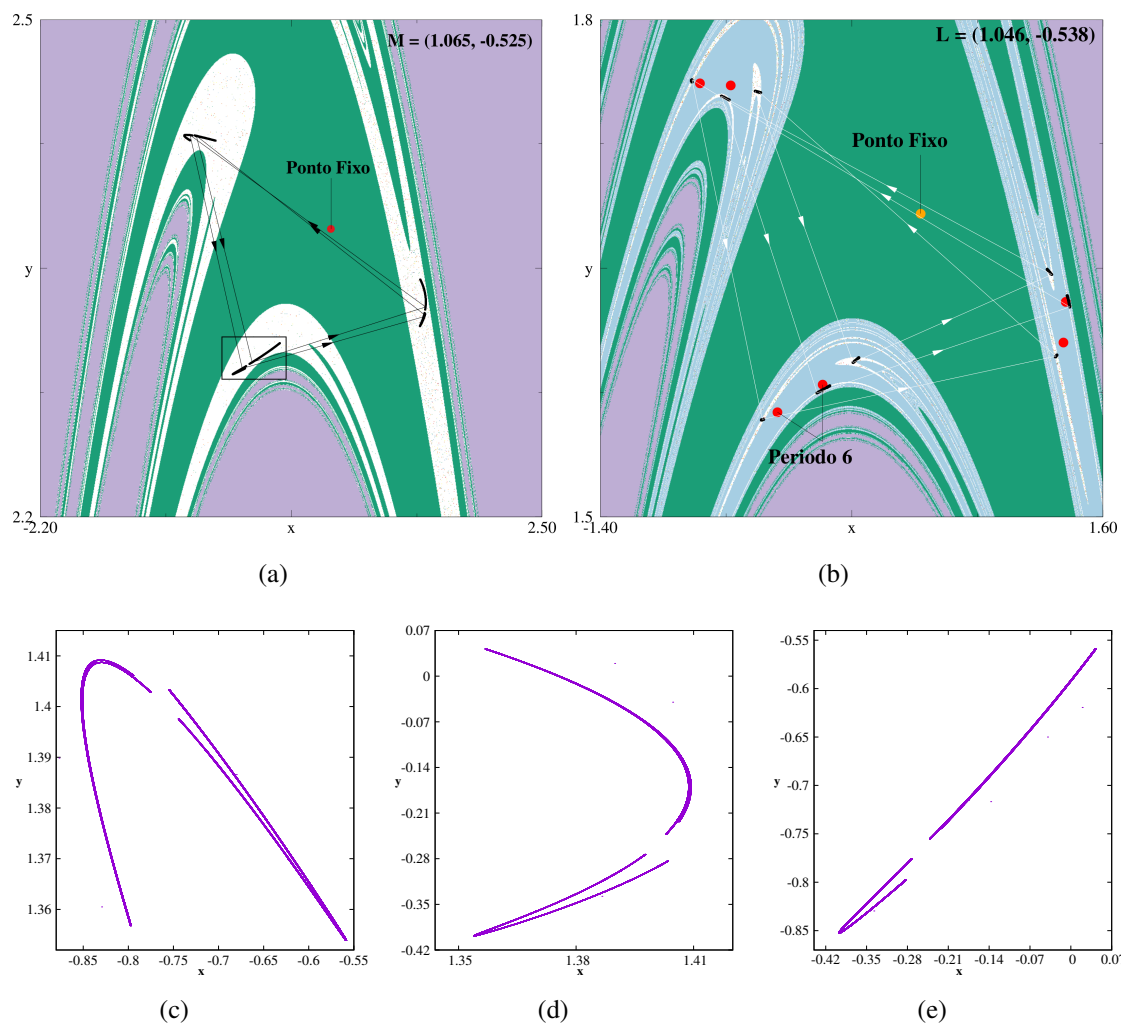


Figura 2.10: Bacias de atração e atratores dos pontos (a) $M = (1.065, -0.525)$ e (b) $L = (1.046, -0.538)$. Os pontos fixos estão assinalados em laranja, e a órbita de período seis do ponto M em vermelho. (c) Detalhe das três partes do atrator estranho do ponto M . Em ambos os casos, a dinâmica dos atratores é herdada do arco primário $1/3$: a cada iteração, pontos do ciclo 6-periódico e do atrator estranho executam $1/3$ de volta.

Capítulo 3

MAPA DE HÉNON COM VARIÁVEIS COMPLEXAS

Neste capítulo, seguindo o exemplo da Ref. [16], será estudada a generalização do mapa de Hénon para variáveis complexas, mantendo-se, contudo, os parâmetros (a, b) reais. Esse procedimento traz novas possibilidades para a dinâmica do sistema, e permite a observação de novas zonas periódicas estáveis em algumas regiões do espaço de fase.

Na Ref. [18] é reportada, por exemplo, o aparecimento de estruturas próximas à singularidades cuspidais e não-cuspidais no espaço de parâmetros real do mapa de Hénon, cuja organização se assemelha à observada no conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$. Contudo, muitas outras foram encontradas em diversas regiões, e serão apresentadas neste capítulo.

Ao considerar variáveis complexas, é necessário ter em mente os novos tipos de órbitas passíveis de serem encontradas. A partir de uma análise da Eq. (2.4), encontra-se que

$$\begin{cases} \bar{x}_{n+1} = a - (\bar{x}_n)^2 + b\bar{y}_n, \\ \bar{y}_{n+1} = \bar{x}_n, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\bar{x}_n$ e $\bar{y}_n$ indicam os conjugados de x_n e y_n . Isto significa que se $x_1, x_2, \dots, x_m$ são pontos de uma órbita m -periódica, também o são seus conjugados $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$.

Tem-se assim três possibilidades para a natureza dos ciclos periódicos, que podem ser:

1. Puramente reais.
2. Complexos, mas invariantes sob conjugação.
3. Diferentes do ciclo conjugado.

Para o caso de órbitas complexas, portanto, tem-se a possibilidade de multi-estabilidade por órbitas conjugadas, ou *multi-estabilidade tipo-1*, ou multi-estabilidade por órbitas diferentes,

ou do *tipo-2*. Observe que um par de parâmetros que apresenta multi-estabilidade do tipo-2, não necessariamente apresenta também a do tipo-1, pois é possível a coexistência de órbitas invariantes sob operação de conjugação. Ao longo deste capítulo, serão discutidos exemplos de todos os três casos enunciados acima.

3.1 Efeito das Variáveis Complexas Sobre os Atratores Encontrados no Caso Real

Quando um parâmetro possui uma órbita real associada, observa-se que a extensão das variáveis para o domínio complexo não as afeta: pontos complexos pertencentes à bacia de atração são levados à mesma órbita periódica do caso real.

Isso significa que a aparência geral da Fig. 2.4, com seus arcos e a organização descrita, permanece inalterada frente a essa modificação. A Tab. 3.1 mostra o resultado do seguinte experimento numérico, realizado com os pontos mostrados nessa figura, e que serve como evidência para essa afirmação.

Para o parâmetro $A = (0.55, 0.1)$, utiliza-se primeiro os pontos iniciais puramente reais $x_0 = (-0.65, 0.0)$ e $y_0 = (1.3, 0.0)$. Após computar tal órbita, faz-se agora uma pequena modificação na parte imaginária de x_0 : $x_0 = (-0.65, 0.1)$ e $y_0 = (1.3, 0.0)$. Comparando-as, é possível constatar que ambas tendem ao mesmo ponto fixo.

Utilizando-se agora o parâmetro $B = (1.05, 0.1)$, vê-se no continuar da Tab. 3.1 que a órbita dos pontos $x_0 = (-0.65, 0.1)$ e $y_0 = (1.3, 0.0)$ torna-se divergente. Porém, reduzindo-se um pouco mais a parte imaginária de x_0 , obtém-se uma órbita que converge para um ciclo real 4-periódico.

Portanto, é observado numericamente que à medida que se passa de uma região periódica para outra, em direção à região branca na Fig. 2.4, a interferência da parte imaginária sobre a órbita torna-se cada vez maior. Ao atingir-se a região caótica, caso $\text{Im}(x_0) \neq 0$ ou $\text{Im}(y_0) \neq 0$, a órbita divergirá rapidamente.

Saliente-se aqui que essas duas últimas condições são necessárias apenas do ponto de vista computacional. Existe ainda a possibilidade de que, caso a parte imaginária considerada seja muito pequena, menor do que o limite de precisão da máquina, órbitas caóticas continuem a convergir para atratores estranhos reais.

$A = (0.55, 0.1); y_0 = (1.3, 0.0)$		
x_n	x_n	n
$(-0.65, 0.0)$	$(0.65, 0.1)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(0.41747, 0.0)$	$(0.41747, 0.0)$	577
$(0.41747, 0.0)$	$(0.41747, 0.0)$	578
$B = (1.15, 0.1); y_0 = (1.3, 0.0)$		
x_n	x_n	n
$(-0.65, 0.1)$	$(-0.65, 0.01)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(1.25117, 0.0)$	137
<i>Diverge</i>	$\vdots$	$\vdots$
	$(1.25117, 0.0)$	141
$C = (1.63, 0.1); y_0 = (1.3, 0.0)$		
x_n	x_n	n
$(-0.65, 0.0)$	$(-0.65, 0.000000001)$	0
$(1.33750, 0.0)$	$(1.33750, 0.0)$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(1.42024, 0.0)$	<i>Diverge</i>	999

Tabela 3.1: Para cada um dos três pares de parâmetros A , B e C mostrados acima, tem-se os valores de alguns pontos da órbita dos pontos (x_0, y_0) indicados. **Parte superior:** No lado esquerdo, órbita de um ponto inicial real. Observe que uma pequena variação na parte imaginária de x_0 (lado direito) leva a órbita ao mesmo ponto fixo do caso puramente real. **Parte intermediária:** À esquerda, o mesmo ponto inicial complexo, não-divergente para o ponto A , passa a divergir no ponto C . Para que haja convergência, é necessário que se diminua a parte imaginária do ponto inicial x_0 , como visto à direita. **Parte inferior:** Para o par de parâmetros C , pequenas variações na parte imaginária dos pontos iniciais (lado direito) levam à órbitas divergentes. Pontos puramente reais (lado esquerdo), não divergem, caso pertençam à bacia de atração do atrator estranho.

3.2 Nas Proximidades de $b = 1$

Tendo em mente o que foi exposto nas seções anteriores sobre as órbitas complexas, inicia-se aqui a apresentação dos objetos que são o tema central desse trabalho: as estruturas no espaço de fase real onde foram encontrados ciclos complexos estáveis para os parâmetros a elas pertencentes.

Todas essas estruturas foram encontradas próximas às linhas $b = 1$ e $b = -1$, para $a < 0$, e quase sempre em regiões onde antes da mudança, observava-se apenas divergência.

3.2.1 Cactos: Características Gerais

Voltando a atenção para o caso em que $b > 0$, a presente investigação inicia-se com a Fig. 3.1. Nela aparecem várias estruturas compridas, semelhantes a *cactos* invertidos, cuja base está localizada sobre a linha $b = 1$. Elas possuem tamanhos, formas e períodos diferentes, mas

à medida que $a \rightarrow 0$ elas adquirem uma aparência cada vez mais semelhante, como ilustra a Fig. 3.1(b).

Ainda é possível, porém, fazer uma distinção entre as estruturas de período par e ímpar. Enquanto essas últimas parecem ter uma base mais larga, aquelas possuem bases que se afunilam, formando pontas. Mais detalhes sobre essa diferença serão mostrados adiante.

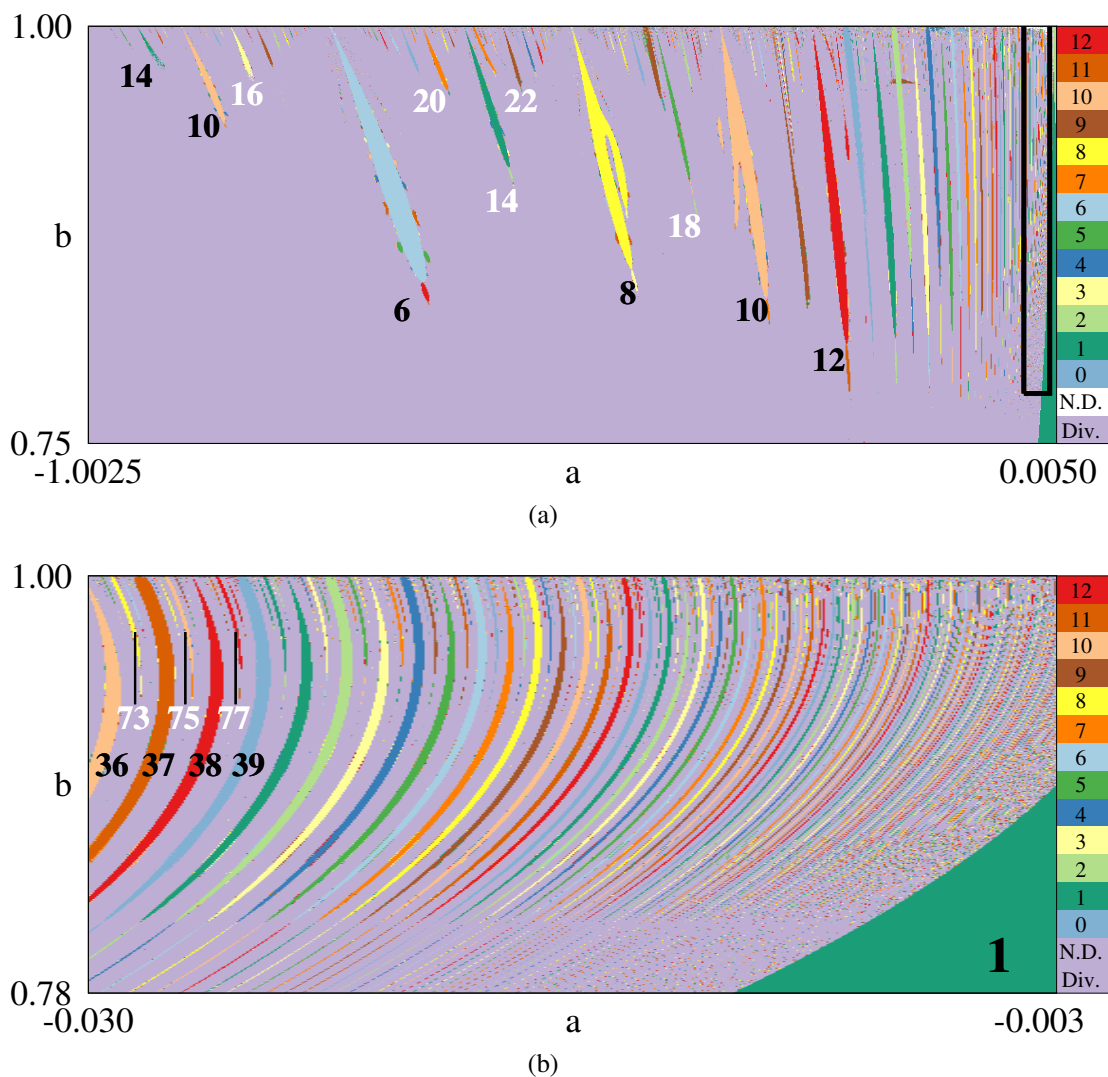


Figura 3.1: (a) Visão geral das estruturas em forma de cacto do espaço de parâmetros do mapa de Hénon. Números representam o período do corpo principal de cada cacto. As estruturas de período seis, oito, dez, doze, e assim sucessivamente, são *cactos primários*, aumentando o período de dois em dois. Os períodos de cactos secundários e terciários são mostrados pelos números brancos, e podem ser encontrados através da regra da soma de períodos. (b) Ampliação da região R. Quanto mais próximos de $a = 0$, mais semelhantes se tornam os cactos. Todavia, as bases dos cactos pares e ímpares permanecem distinguíveis entre si. A sigla “N.D.” na tabela de cores significa *não-divergente*, e é assinalada a parâmetros para os quais não foi possível observar ciclos periódicos, mas que também não apresenta comportamento divergente.

Boa parte das estruturas estudadas compartilha algumas características em comum¹: cada

¹Essas características foram encontradas em todas as estruturas observadas, o que não garante a veracidade da afirmação para todo o conjunto.

cacto é formado por um *corpo principal*, cujo *período principal* está indicado na imagem. Ligados ao corpo, aparecem os *bulbos primários*, ou *bulbos de ordem 1*. Conectados a estes últimos, tem-se os bulbos secundários, e a esses, os terciários, e assim sucessivamente.

O corpo de cada cacto pode variar em forma e tamanho, possuindo um único *ramo*, como por exemplo a estrutura de período seis da Fig. 3.2(a), ou mais de um, como os cactos de período oito e dez, ampliados nas Figs. 3.5(a) e 3.5(b), respectivamente.

Em todo caso, dado um corpo de período k , observa-se que o bulbo primário na extremidade de *cada ramo* possui período $2k$. Tomando-o como referência, nota-se ainda que os períodos dos maiores bulbos primários, tanto à sua esquerda, quanto à sua direita, aumentam de k em k . As estruturas de ordem 2, 3 e superiores também seguem esse padrão: ligada à uma estrutura secundária de período n , existe uma estrutura terciária com o dobro do seu período, de modo que as demais estruturas à direita e à esquerda desta aumentam de período de n em n . Essa organização é muito parecida à encontrada em $\mathcal{M}$ (compare com a Fig. 1.2).

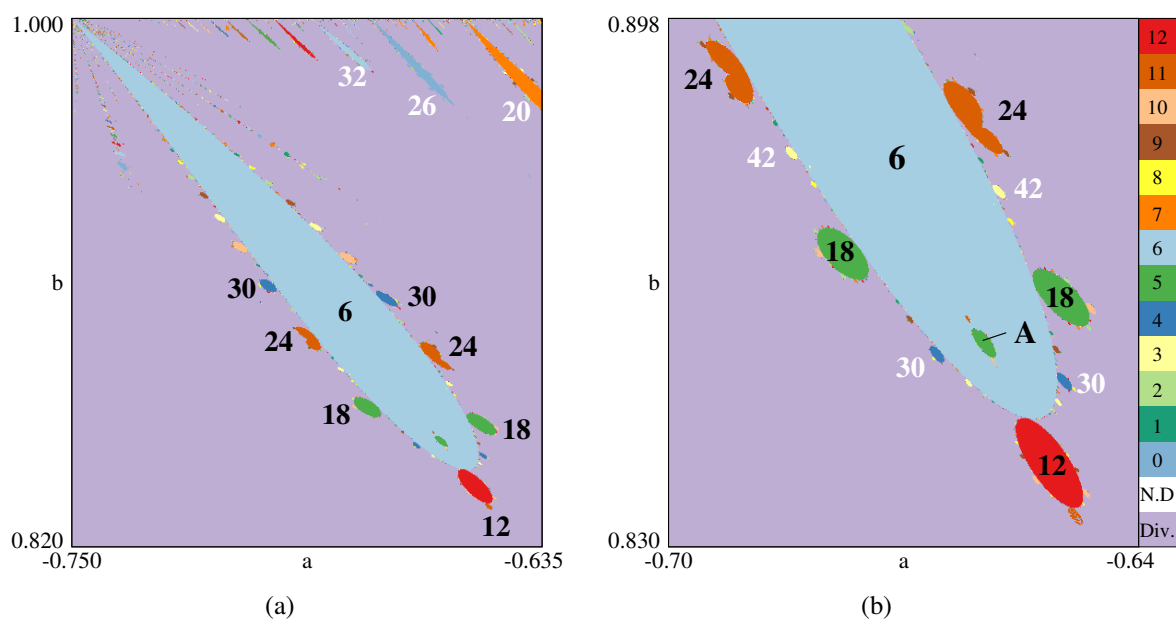


Figura 3.2: Cacto de período seis. Dentre todos os formatos possíveis para bulbos monócúspides, o de período vinte e quatro, mostrado com maiores detalhes em (b), é certamente o mais encontrado em diversos cactos.

Em geral, os parâmetros que formam os cactos apresentam multi-estabilidade do tipo-1. Mas na Fig. 3.2(b) nota-se a presença de uma estrutura similar à uma pequena cópia distorcida do conjunto $\mathcal{M}$, sobreposta à uma pequena região do cacto. Nela, verifica-se a existência de multi-estabilidade do tipo-2. Veja a Tab. 3.4.

Muitos dos bulbos encontrados assemelham-se aos bulbos do conjunto de Mandelbrot, possuindo forma de discos perfeitos ou levemente ovalados, com bulbos secundários e terciários

seguindo o mesmo padrão. Todavia, diferentemente do que ocorre em $\mathcal{M}$, aqui eles podem ter formas diversas, como é o caso, por exemplo, dos bulbos de período vinte e quatro. Eles possuem um formato que lembra um cardioide, com um ponto de cúspide mais ou menos centralizado entre os bulbos secundários de período quarenta e oito. Quanto mais próximos à esse ponto, menor se tornam os bulbos e mais elevados são seus períodos. Nesse sentido, diz-se que a cúspide é um *ponto de acumulação*.

Diferenças na forma dos bulbos são comumente observadas ao se verificar a presença de pontos de cúspides, e algumas delas serão exploradas ao longo desse trabalho, em especial na Sec. 3.2.3.1. Apesar da quantidade de cúspides ao longo da estrutura não parecer guardar correlação alguma com o formato das mesmas, o número delas em um determinado bulbo é uma forma simples de catalogá-los. Será útil adiantar, portanto, as nomenclaturas *monocúspide*, *bicúspide*, *tricúspide*, *etc*, para referir-se à estruturas com número de cúspides igual a um, dois, três e assim por diante. Desse modo, o bulbo de período vinte e quatro na Fig. 3.2(a) é monocúspide, enquanto os bulbos de período doze e dezoito, bem como o corpo principal desse cacto, são não-cuspidais.

3.2.2 Nascimento dos Cactos

3.2.2.1 Cactos Pares

Próximo à região da base dos cactos pares, é possível observar também a presença de pequenas estruturas enfileiradas, formando *cadeias*. Veja as Figs. 3.2(a) e 3.3.

Apesar de não se ligarem diretamente ao cacto, seus períodos aumentam de acordo com o período principal k . Note, na imagem 3.3(b), que entre dois bulbos quaisquer, existe uma cadeia menor, ou *cadeia secundária*, em detrimento da cadeia de bulbos maiores, ou *primária*. Vê-se também cadeias terciárias entre quaisquer dois bulbos da cadeia secundária, e assim sucessivamente.

Voltando à Fig. 3.2(a), tem-se a impressão de que para $b \rightarrow 1$, as bases dos cactos ficam cada vez mais afiladas, convergindo para um ponto sobre a linha $b = 1$. Essa afirmação é válida apenas para cactos pares, para os quais é possível calcular tais pontos através dos autovalores da matriz jacobiana do sistema.

Através da Eq.(2.4), é fácil obter a equação orbital para os pontos fixos do mapa, dada por:

$$x^2 + (1 - b)x - a = 0 \quad (3.2)$$

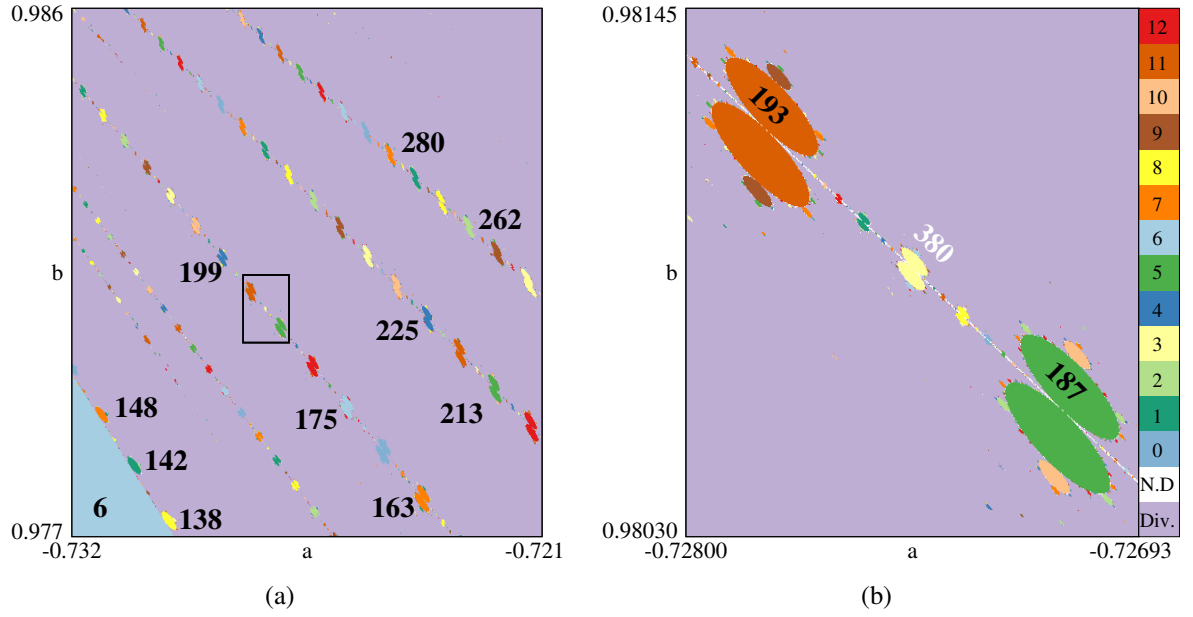


Figura 3.3: (a) Cadeias encontradas próximas à base do cacto de período seis. Os períodos dos bulbos aumentam em direção à base de acordo com o período do corpo principal do cacto, mesmo que o período de muitas dessas estruturas não sejam múltiplos de seis. (b) Detalhe das sub-cadeias que aparecem entre quaisquer dois bulbos da cadeia principal. A legenda “N.D.” na tabela de cores significa *não-divergente*. A linha branca observada é formada por parâmetros para os quais é necessário um transiente muito longo para que a trajetória convirja para seu comportamento final.

Tomando $b = 1$, a Eq. (3.2) resulta em

$$x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \quad (3.3)$$

de modo que os pontos fixos são dados por $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_2 = -\sqrt{a}$. Observe que a extensão das variáveis para o plano complexo permite a existência de pontos fixos quando $a < 0$.

A matriz jacobiana da Eq.(2.4) é dada por

$$J = \begin{pmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

de modo que para os dois pontos fixos x_1 e x_2 , encontra-se respectivamente:

$$J_1(a) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2(a) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Seus autovalores serão dados por

$$\begin{cases} \lambda_{1\pm} = \sqrt{a} \pm \sqrt{a+1}, & \text{para } x_1 \\ \lambda_{2\pm} = -\sqrt{a} \pm \sqrt{a+1}, & \text{para } x_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Considerando que $a < 0$, essas equações podem ser reescritas como

$$\begin{cases} \lambda_{1\pm} = i\sqrt{|a|} \pm \sqrt{-|a|+1}, & \text{para } x_1 \\ \lambda_{2\pm} = -i\sqrt{|a|} \pm \sqrt{-|a|+1}, & \text{para } x_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

o que mostra que nesse caso, cada um desses pontos fixos possui um par de autovalores complexos, tais que $|\lambda_{1\pm}(a)| = |\lambda_{2\pm}(a)| = 1$. Desse modo, na forma polar, tem-se que

$$\begin{cases} \lambda_{1\pm} = \exp \left[i \arctan \left(\pm \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{-|a|+1}} \right) \right], & \text{para } x_1 \\ \lambda_{2\pm} = \exp \left[i \arctan \left(\mp \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{-|a|+1}} \right) \right], & \text{para } x_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

Observe na Fig. 3.2(a), que o cacto de período 6 nasce no ponto $a = -3/4$. Para este parâmetro, tem-se os autovalores mostrados na Tab. 3.2, que nada mais são do que quatro das raízes sêxticas da unidade. Para a estrutura de período oito (Fig. 3.5(a)), que tem sua origem no ponto $(a, b) = (-1/2, 1)$, o mesmo procedimento resulta em quatro das raízes oitavas da unidade.

Período	λ_{1+}	λ_{1-}	λ_{2+}	λ_{2-}
6	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$
8	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

Tabela 3.2: Autovalores do mapa de Hénon para os pontos de conexão dos cactos 6 e 8 à linha $b=1$, dados por $a = -3/4$ e $a = -1/2$, respectivamente.

De maneira geral, para o cacto de período par $2k$, a região de estabilidade emerge de um valor a que pode ser obtido igualando-se os autovalores dos pontos fixos às raízes $2k$ -ésimas da unidade. Isto é, como a n -ésima raiz da unidade, r_n , é dada por

$$r_n = e^{\frac{2\pi im}{n}}, \quad (3.9)$$

onde $m = 1, 2, \dots, (n-1)$ e $i = \sqrt{-1}$, e tomando

$$\exp \left[i \arctan \left(\pm \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{-|a|+1}} \right) \right] = \exp \left[\frac{2\pi m}{2k} i \right], \quad (3.10)$$

obtem-se

$$|a| \left[1 + \tan^2 \left(\frac{\pi m}{k} \right) \right] = \tan^2 \left(\frac{\pi m}{k} \right), \quad (3.11)$$

ou ainda,

$$a \equiv a_m = -\sin^2 \left(\frac{\pi m}{k} \right), \quad (3.12)$$

onde o sinal negativo na Eq. (3.12) vem do fato de se estar considerando o caso $a < 0$. A Tab. 3.3 mostra os pontos de nascimento de alguns períodos pares, calculados com o auxílio dessa equação.

6	8	10	12	14	16	18	20
-0.75	-0.5	-0.34549	-0.25	-0.18825	-0.14644	-0.11697	-0.095491
	-0.90450	-0.75	-0.61126	-0.50	-0.41317	-0.34549	

Tabela 3.3: Pontos de nascimento dos cactos de período par.

3.2.2.2 Cactos Ímpares

Assim como o cacto 6-periódico foi utilizado como protótipo para descrever as características gerais dos cactos pares, o cacto de período sete é um bom representante das estruturas de período ímpar.

Apesar das várias semelhanças entre os dois casos (corpo composto por um ramo principal com bulbos ao redor, etc.), na Fig. 3.4 são notáveis algumas diferenças. Em primeiro lugar, sua base surge de um intervalo sobre a linha $b = 1$, dando origem à um corpo principal que apresenta uma leve curvatura.

Isso acarreta na existência de dois pontos de acumulação para esse cacto, um de cada lado da base, mesmo que seu corpo principal possua um único ramo. Esses pontos de acumulação diferem dos demais apresentados até aqui pela falta de uma cadeia de bulbos observável em suas proximidades.

Na extremidade oposta não se verifica a presença de nenhum bulbo com o dobro do período, mas sim com o triplo, deslocado para o lado esquerdo do corpo principal. Mais ainda, os períodos dos bulbos primários não aumentam de acordo com o período $k = 7$ do cacto, como no caso de estruturas pares, mas com $2k = 14$. Todavia, a regra da soma periódica permanece válida.

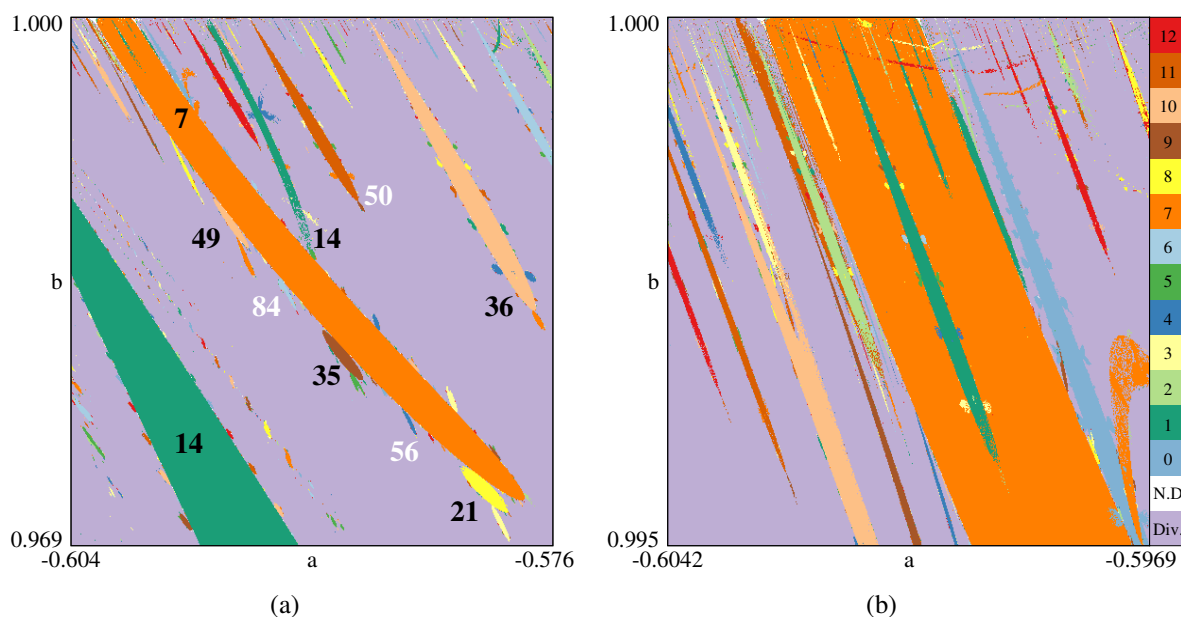


Figura 3.4: (a) Cacto de período sete, em laranja, cercado por diversas estruturas pares. Todos os cactos ímpares observados nascem próximos à estruturas pares com o dobro de seu período, como é o caso cacto 14-periódico mostrado em parte na imagem. (b) Detalhe da base do cacto, mostrando a existência de vários cactos pares sobrepostos.

Do ponto de vista computacional, os pontos próximos à base demoram bastante para convergir: foram necessários transientes da ordem de $2^{27} = 134217728$. Algumas das estruturas que aparecem na imagem mostram algumas “falhas”, devido ao tamanho reduzido da bacia de atração dos parâmetros nessas regiões.

3.2.3 Explorando Estruturas Diversas

3.2.3.1 Cactos de Período 8 e 10

De posse de uma visão geral dos cactos “padrões”, serão apresentadas nessa seção estruturas que possuem características diversas, começando pelas de período oito e dez, mostrados nas Figs. 3.5(a) e 3.5(b).

Esses cactos possuem um corpo principal dividido em dois ramos, e em cada um deles é observada a organização descrita para o cacto seis, com a seguinte ressalva: enquanto no cacto de período oito as sobreposições de estruturas tipo-mandelbrot são observadas próximas às extremidades dos dois ramos, no cacto 10-periódico, essa sobreposição ocorre nos bulbos de período vinte, como mostra a Fig. 3.5(c).

Os bulbos ligados ao cacto na região entre os ramos de ambos parecem convergir para algum ponto entre eles, o que levanta a hipótese da existência de um segundo ponto de acumulação.

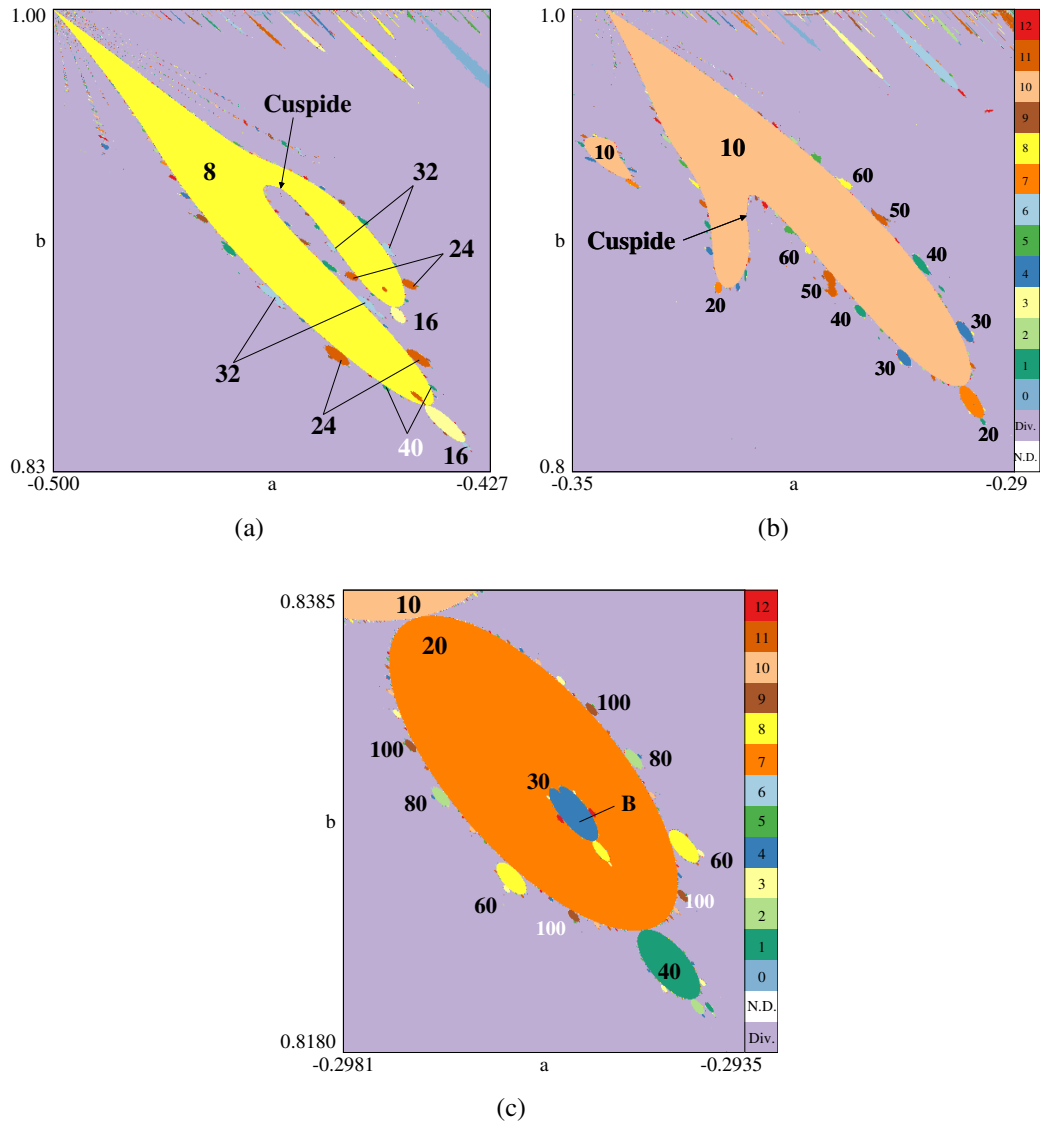


Figura 3.5: Cactos de período (a) oito e (b) dez. A localização das cúspides entre seus ramos é indicada pelas setas. Enquanto o cacto oito apresenta estruturas semelhantes ao conjunto $\mathcal{M}$ sobrepostas nas extremidades de seus ramos, no de período dez essa sobreposição ocorre nos bulbos de período vinte, dos quais o direito é mostrado em detalhes na imagem (c).

Essa convergência é desigual, sendo mais acentuada no ramo menor em ambos os casos, mais próximos dos quais se encontram as cúspides, ampliadas nas Figs. 3.6(a) e 3.6(b). Nelas é possível distinguir a presença de bulbos em cadeia, sugerindo que esse tipo de formação ocorre sempre próximo a pontos de acumulação das estruturas pares.

Enquanto o cacto de período oito apresenta três cadeias, o de período dez apresenta apenas uma. No entanto, esta última, em particular, possui um padrão interessante e facilmente observável.

Na Fig. 3.6(c), os bulbos de tais cadeias aparecem em pares, alternando entre *emparelhados* e *desemparelhados*. Em determinado ponto, todavia, eles se “fundem”, e o padrão anterior é en-

tão modificado: cada estrutura possui agora duas cúspides cujas posições relativas se alternam; ora a cúspide da esquerda encontra-se mais acima que a da direita, ora o contrário (Fig. 3.6(d)). Os bulbos onde ocorrem as “fusões” são mostrados em detalhes nas Figs. 3.6(e) e 3.6(f).

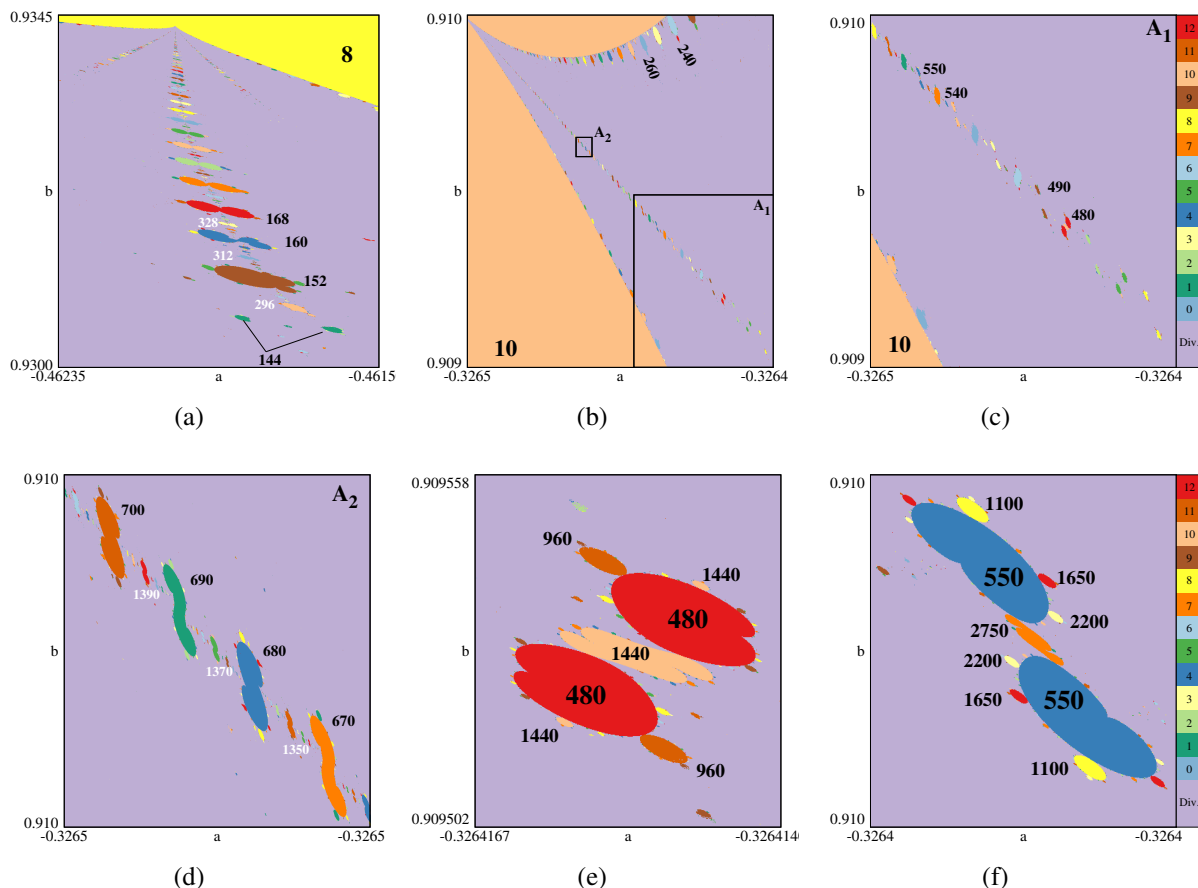


Figura 3.6: Ampliações das regiões próximas às cúspides dos cactos de período (a) oito e (b) dez. Nesta última é possível ver uma única cadeia de bulbos. (c) Na ampliação da área A_1 , nota-se a perda do padrão *emparelhado* por volta do bulbo de período 480, enquanto a do padrão *desemparelhado* ocorre por volta do bulbo de período 550. (d) Detalhe do novo padrão após a “fusão”, obtido através da ampliação da região A_2 , e dos bulbos (e) 480 e (f) 550.

3.2.3.2 Bulbos do Cacto de Período 10

Enquanto no cacto de período oito as deformidades nos bulbos são semelhantes a outros exemplos encontrados e ocorrerem entre os bulbos de período trinta e dois e quarenta, no cacto 10-periódico elas podem ser observadas entre os bulbos de período cinquenta e noventa, e são por vezes de natureza inesperada. Este último caso constitui portanto um vasto campo de exploração, que será apresentado agora, começando pelos bulbos não-cuspidais mostrados na primeira linha de imagens da Fig. 3.7.

Localizado no ramo direito do cacto, o bulbo na Figs. 3.7(a) é um exemplo de estrutura primária cuja forma elíptica é bastante aparente, mas cujos bulbos secundários apresentam cús-

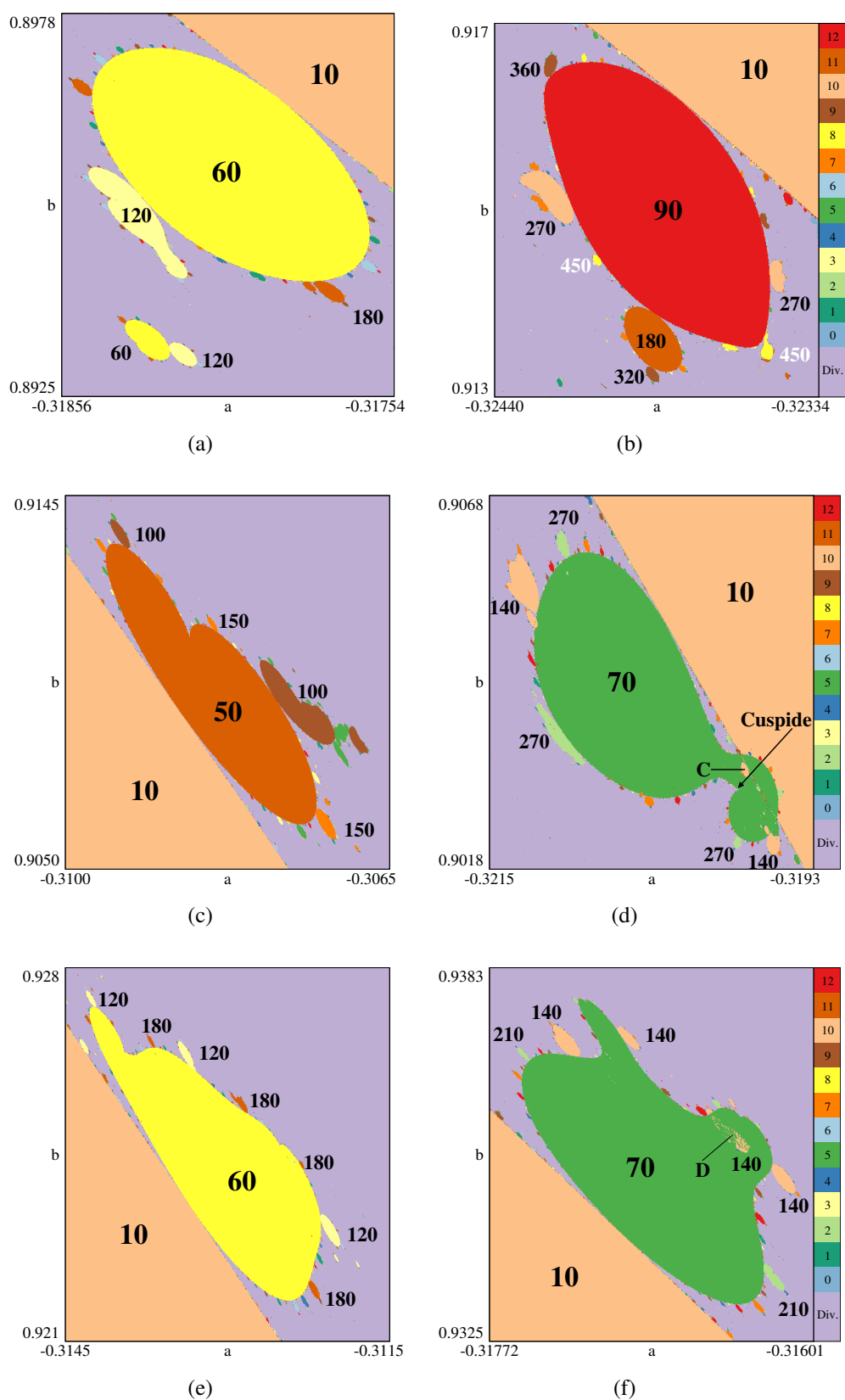


Figura 3.7: Bulbos do cacto 10-periódico, organizados segundo o número de cúspides de cada um. Os dois da primeira linha são não-cuspidais, os do meio monocuspidais, e os dois últimos bicuspidais. As cúspides podem ser localizadas entre os bulbos secundários de menor período.

pides e formatos variados. A Fig. 3.7(b), por sua vez, é um exemplo de bulbo não-cuspidal cujo corpo principal é visivelmente achatado. Essas foram todas as possibilidades observadas para essa classe de estrutura.

Contudo, como já mencionado antes, as possibilidades de forma parecem ser ainda mais abundantes conforme o número de cúspides cresce. Nos bulbos de período cinquenta (Fig. 3.7(c)), situado na parte superior do ramo direito, e período setenta (Fig. 3.7(d)), no lado inferior do mesmo ramo, é possível observar formações inusitadas. No primeiro, que pode ser comparado a uma série de três “caroços de feijão”, o que chama a atenção é a estrutura de período duzentos, completamente amorfa, ampliada na Fig. 3.8(a), e que possui cinco cúspides. À primeira vista, ela parece ser um bulbo terciário, conectado aos dois caroços menores.

Olhando para sua ampliação, no entanto, vê-se que o bulbo terciário de período duzentos conectado ao caroço secundário é aquele semelhante à uma elipse distorcida, localizada mais abaixo, e que apesar de próximo, não possui ligação com a estrutura pentacuspidal. Portanto, pode-se dizer que *aparentemente* o que ocorre, é que a pentacúspide faz parte do caroço menor, pois liga-se a este em apenas um ponto, e se sobrepõe ao bulbo secundário. Aquele caroço é um exemplo de “bulbo flutuante”, como o de período sessenta na Fig. 3.7(a).

No segundo, acontece um fenômeno semelhante ao anterior, agora porém entre um bulbo primário e o corpo principal do cacto. A Fig. 3.8(b) mostra ainda em detalhe as várias superposições ocorridas próximas a essa região.

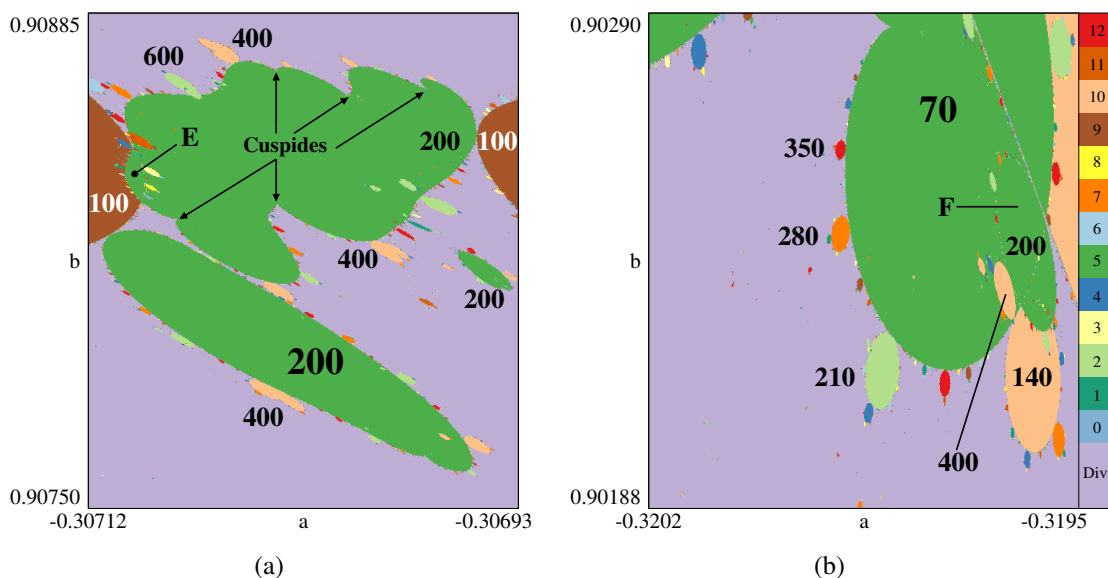


Figura 3.8: (a) Estrutura pentacuspidal de período duzentos sobrepondo-se ao bulbo secundário de período cem. (b) Detalhe a sobreposição entre o bulbo da Fig. 3.7(d), de período 70 e o corpo principal do cacto. Nota-se ainda a sobreposição do bulbo de período 200.

Passando para os bulbos primários bicúspides, encontram-se os de períodos sessenta e setenta nas Figs. 3.7(e) e 3.7(f). As formas de ambos em nada se assemelham, mas tanto neles, quanto em todos os demais, fica evidente que as regras apresentadas anteriormente, relacionando o período de cada estrutura com a posição relativa entre elas, continuam válidas apesar de todas as deformidades apresentadas.

3.2.3.3 Cacto de período 48

Na Fig. 3.9 é mostrado um cacto par de formato singular. Como esperado, sua base é afilada, conectando-se à linha $b = 1$ em um único ponto. Contudo, sua extremidade oposta também aparenta ser pontiaguda, com todos os bulbos localizados nas laterais de seu corpo principal.

A ampliação em torno dessa região (Fig. 3.9(c)) mostra, no entanto, a existência de uma cúspide. Nota-se também uma cadeia de bulbos na direção desse ponto. Essas observações colocam esse cacto na mesma categoria dos cactos de períodos oito e dez, ratificando as propriedades e padrões identificados lá.

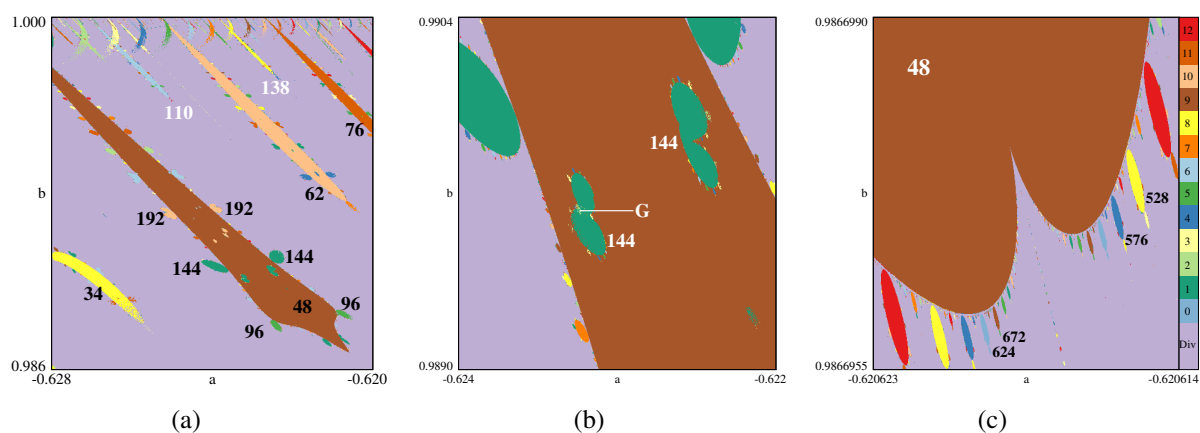


Figura 3.9: (a) Cacto de período quarenta e oito, que parece possuir uma ponta na extremidade oposta à sua base. (b) Detalhe de algumas das estruturas sobrepostas ao cacto. (c) Ampliação da “ponta” do cacto, revelando a presença de uma cúspide.

Sobre o corpo principal do cacto encontram-se vários bulbos sobrepostos, em contraposição ao caso mais comum, onde se constata a presença de apenas um. Além disso, tais estruturas não se assemelham a um conjunto de Mandelbrot, possuindo múltiplas cúspides, como pode ser visto na Fig. 3.9(b).

O bulbo sobreposto inferior, de período 144, possui ainda uma estrutura sobre si, de modo que o ponto G é um exemplo de parâmetros para os quais existe multi-estabilidade dos tipos 1 e 2 com três ciclos estáveis diferentes.

A Tab. 3.4 fornece pontos das órbitas estáveis encontradas no sistema para os parâmetros A - G , sendo necessário apenas uma mudança de sinal na parte imaginária de cada um deles para se obter o ciclo conjugado. Esses pontos podem ser encontrados nas Figs. 3.2(b) (pág. 40), 3.5(c) (pág. 46), 3.7(d) e 3.7(f) (pág. 48), 3.8 (pág. 49) e 3.9(b), e foram escolhidos apenas com o intuito de se verificar a coexistência de ciclos estáveis complexos.

Para cada par de parâmetros, foram testados $200^4 = 1600000000$ pontos iniciais em uma região cúbica 4-dimensional centrada na origem de lados $6 \times 6 \times 6 \times 6$. Regiões maiores demonstraram conter uma porcentagem menor de pontos pré-periódicos.

Na última coluna da tabela, é possível verificar quantos desses pontos pertencem à bacia de atração de cada um dos respectivos atratores. Esse número não leva em conta a diferença entre uma órbita e a sua conjugada. Portanto, no ciclo de período seis do ponto A , por exemplo, o número 25182 representa a soma dos pontos iniciais que convergiram tanto para a órbita do ponto $(x, y) = (0.313615, 0.396675, 0.227199, 1.106402)$ quanto para a sua conjugada.

Ponto	Período	x	y	Total
$A = (-0.66, 0.8565)$	6	(0.31361, 0.39667)	(0.22719, 1.10640)	25182
	18	(0.40018, 0.30900)	(0.27041, 1.15344)	2765
$B = (-0.2954, 0.8282)$	20	(-0.32619, 0.62446)	(-0.37115, 0.38098)	107159
	30	(-0.27156, 0.70502)	(-0.38521, 0.33013)	10625
$C = (-0.31977, 0.90313)$	70	(0.09683, 0.72148)	(0.09038, 0.19570)	110788
	270	(-0.23661, 0.69614)	(-0.35134, 0.45301)	991950
$D = (-0.31644, 0.9357)$	70	(0.24470, 0.86474)	(-0.16413, 0.86884)	57623
	140	(-0.15259, 0.85897)	(-0.17417, 0.63887)	79039
$E = (-0.307099, 0.90841)$	100	(-0.03558, 0.71070)	(0.29464, 0.22349)	98739
	200	(-0.23157, 0.68243)	(-0.34711, 0.35226)	45992
$F = (-0.3196, 0.9025)$	70	(0.09683, 0.72148)	(0.09038, 0.19570)	65257
	200	(-0.24152, 0.71054)	(-0.34146, 0.42213)	1006052
$G = (0.62323, 0.98963)$	48	(-0.25624, 1.02414)	(-0.28441, 0.58497)	829
	144	(-0.34289, 0.70977)	(0.04950, 0.56017)	46
	288	(0.31946, 0.83538)	(0.07649, 1.09160)	4

Tabela 3.4: Parâmetros para os quais se verifica multi-estabilidade tipo-2 na região próxima a $b = 1$, selecionados ao longo dessa seção. Cada um dos pontos (x, y) faz parte de um ciclo cujo período é indicado na segunda coluna. Em todos os exemplos acima, todos os pontos da uma órbita atrativa possuem parte imaginária de mesmo sinal, significando que esses ciclos e seus conjugados são simétricos em relação ao eixo real, e conferindo ao sistema multi-estabilidade tipo-1.

Perceba que o total de pontos convergentes é muito pequeno, comparado ao total de pontos testados, significando que a bacia de atração deve ser muito pequena. Na maioria dos casos, quanto maior o período, menor a bacia, com exceção do ponto E , onde o número de pontos da bacia de maior período é quase dez vezes maior.²

²Também foram encontrados mais pontos para a bacia de maior período no ponto D . Contudo, a diferença é

3.3 Nas Proximidades de $b = -1$

3.3.1 Regiões Periódicas

Além do aparecimento dos cactos na região próxima a $b = 1$, foi verificado também o surgimento de estruturas estáveis próximas a $b = -1$. Observe a Fig. 3.10(a), onde se vê vários picos de períodos variados, uns sobrepostos aos outros. O maior dentre eles, de cor azul, possui período seis, e já é conhecido na literatura, de modo que o leitor interessado pode encontrar cálculos analíticos de sua curva de bifurcação nas Refs. [15, 17].

Na ponta dessas cúspides, surgem bulbos muito semelhantes aos já descritos na Sec. 3.2.1, e na Ref. [18]. Os dois maiores, que se encontram nas pontas das regiões de período seis (visível na imagem) e oito (região R), são mostrados nas Figs. 3.10(b) e 3.10(c), respectivamente.

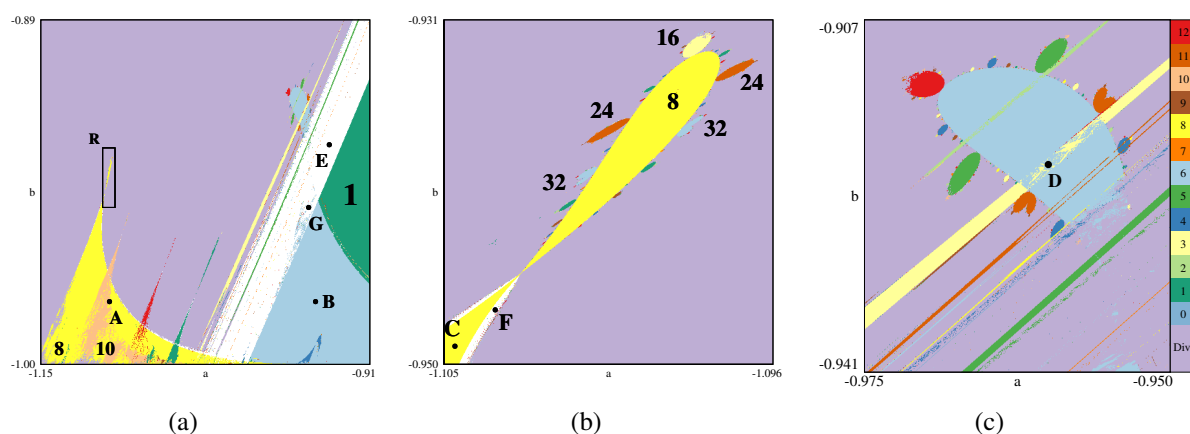


Figura 3.10: (a) Visão geral das estruturas encontradas na região próxima a $b = -1$. (b) Detalhe da região R , onde se encontra um cacto de período 8. (c) Detalhe do cacto de período seis encontrado na extremidade da cúspide de mesmo período. (Figuras (a) e (b) em fase de aprimoramento.)

A Tab. 3.5 contém alguns pontos pertencentes aos atratores encontrados no sistema para os parâmetros A - D indicados nas Figs. 3.10(a)-3.10(c). Em todos eles, foi constatada a presença de um único atrator complexo para cada período observado, significando que todas as órbitas atrativas investigadas são invariantes sob operação de conjugação.

A última coluna da tabela fornece o total de pontos pertencentes a bacia de cada atrator, ao serem testados $200^4 = 1600000$ de pontos iniciais, dessa vez em um quadrilátero quadridimensional centrado na origem de lados $2 \times 2 \times 2 \times 2$.

pequena se comparada ao caso do ponto E .

Ponto	Período	x	y	Total
$A = (-1.1, -0.98)$	8	$(-0.649698, 0.623351)$	$(-0.797440, 0.721829)$	13620
	10	$(-0.863328, 0.609177)$	$(-0.585588, 0.436739)$	1933
$B = (-0.95, -0.98)$	1	$(-0.816506, 0.0)$	$(-0.816506, 0.0)$	7000320
	6	$(-0.482716, 0.702376)$	$(-0.185625, -0.064230)$	989512
$C = (-1.1047, -0.949)$	8	$(-0.625086, 0.707605)$	$(-0.813909, 0.791602)$	18155
$D = (-0.96, -0.921)$	6	$(-0.576934, 0.768595)$	$(-0.141304, 0.016306)$	134327
	16	$(-0.571321, 0.115661)$	$(-0.728525, 0.307216)$	1089628

Tabela 3.5: Parâmetros para os quais se verifica apenas multi-estabilidade do tipo-2, na região próxima a $b = -1$.

3.3.2 Nova Região Caótica

Dado que os atratores reais caóticos aparentemente são muito sensíveis à mudança para variáveis complexas, chama a atenção o aparecimento da faixa branca na Fig. 3.10(a). Uma análise mais detalhada da dinâmica do sistema nessa região, feita utilizando-se o ponto $E = (-0.94, -0.93)$ indicado nessa imagem, revela as seguintes características:

- O sistema possui vários ciclos diferentes de estabilidade neutra.³

A Fig. 3.11(a) mostra as órbitas de três pontos iniciais que apresentam diferenças da ordem de $d = 10^{-4}$ apenas na componente real da coordenada x_0 . Todos eles se encontram dentro do círculo indicado na imagem, cujo raio é da ordem de 10^{-2} . Após um transiente de aproximadamente mil iterações, as trajetórias desses pontos passam a descrever órbitas em forma de meia lua, “preenchendo” as curvas mostradas.

Apesar da distância entre esses pontos iniciais ser bem menor do que a escala mostrada na figura, pode-se questionar o efeito de diferenças ainda menores sobre essas órbitas. A Fig. 3.11(b) mostra as trajetórias resultantes para $d = 10^{-8}$, que em um primeiro momento aparentam ser idênticas. As ampliações feitas nas Figs. 3.11(c) e 3.11(d) indicam porém, que apesar de muito próximas, de modo que a distância entre ambas é quase uniforme, ainda se trata de duas órbitas distintas.

A presença de degenerações desse tipo é esperada para os casos hamiltonianos, onde $b = \pm 1$, e as transformações preservam áreas, mas percebe-se que aqui elas aparecem em uma região distante desses limites.⁴

³Por estabilidade neutra, entenda-se um ciclo não atrativo, mas também não repulsivo. Desse modo, órbitas suficientemente próximas a um ciclo de estabilidade neutra permanecem próximas à ele, sem contudo convergir, nem divergir.

⁴Distante quando se considera o nível de precisão da máquina.

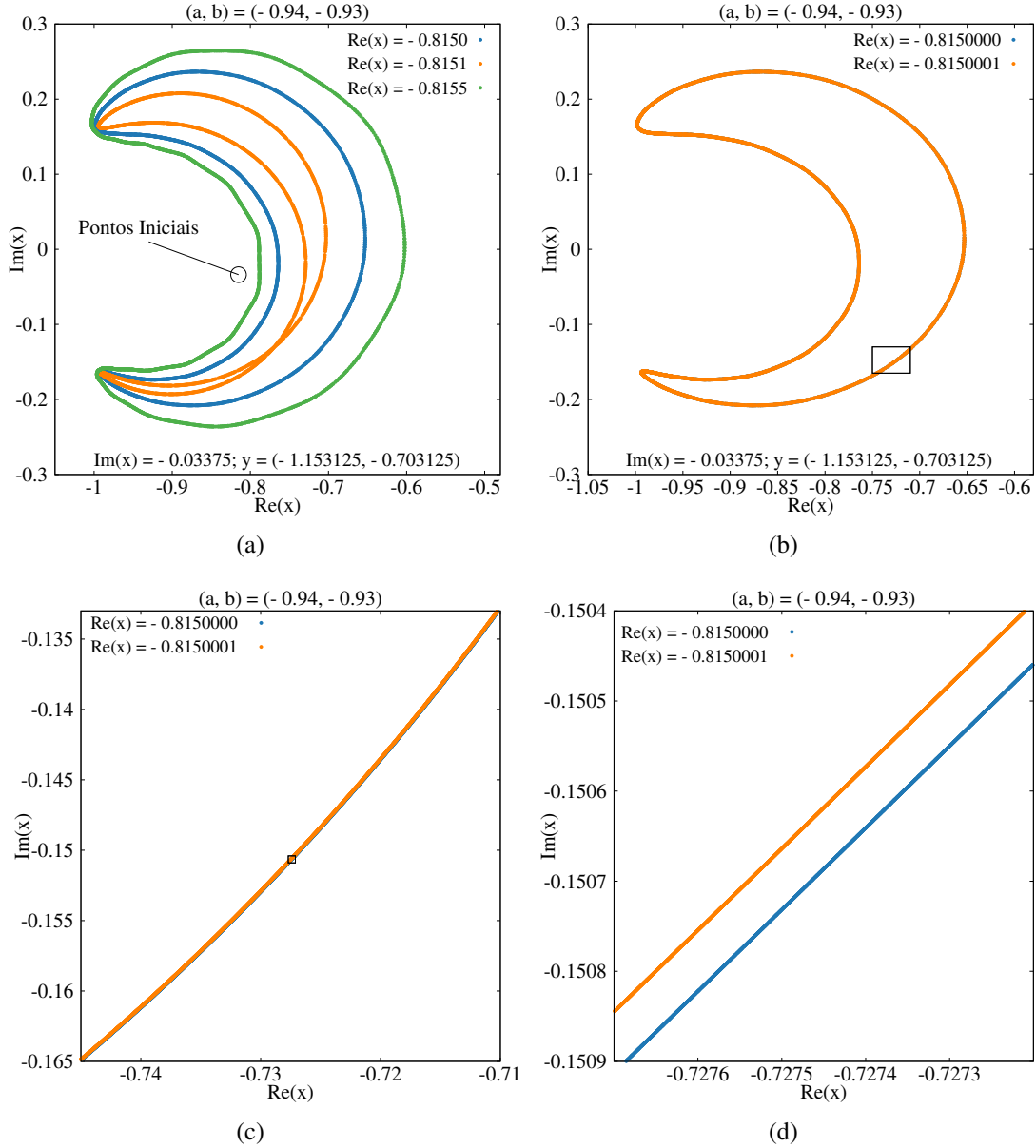


Figura 3.11: (a) Órbitas dos pontos iniciais (x, y) indicados para os parâmetros $(a, b) = (-0.94, -0.93)$. Eles diferem apenas na parte real de x , estando todos localizados dentro do círculo indicado. (b) A diferença entre os pontos iniciais foi diminuída ainda mais, resultando em trajetórias aparentemente iguais. No entanto, as ampliações em (c) e (d) indicam se tratar de órbitas diferentes.

- As órbitas apresentadas tem um período extremamente longo, ou não se repetem, apesar da dinâmica aparentemente previsível.

Essa afirmação baseia-se no seguinte experimento: escolhe-se um ponto inicial não-divergente para o parâmetro N , como por exemplo $p_0 = (x_0, y_0) = (-0.87, 0.01, -0.87, 0.0)$, e itera-se a Eq. (2.4) um número *Transiente* de vezes, obtendo-se o ponto $p_{transiente}$. Esse número deve ser muito grande, garantindo que não se trata apenas de uma órbita de divergência demorada.

Utilizando agora o $p_{transiente}$ como ponto inicial, itera-se o mapa, dessa vez calculando-

se a distância entre ele e cada ponto obtido. O computador repete essa operação um número *PeriodoMaximo* de vezes, e caso o resultado fique abaixo de um valor *Erro*, condizente com a precisão da máquina, considera-se que a órbita se repetiu.

Para $Transiente = 2^{30} = 1073741824$, $PeriodoMaximo = 2^{30}$ e $Erro = 10^{-11}$, e utilizando-se os pontos iniciais mostrados na Fig. 3.11, não foram observadas repetições em nenhuma das órbitas. As explicações possíveis para esse resultado são:

- Seus respectivos períodos são extremamente longos.
- Essas órbitas são de fato não-periódicas e não-divergentes, constituindo um possível exemplo de quasi-periodicidade.
- Imprecisão numérica.

Dessas três hipóteses, as duas últimas são as mais plausíveis. Todavia, corroborando com o segundo caso, está o fato de o “erro” considerado estar na décima primeira casa decimal, sendo dez mil vezes maior do que a precisão da máquina que é da ordem de 10^{-15} . A verificação da segunda hipótese pode ser feita através da análise dos autovalores da matriz jacobiana, estando tal análise fora do escopo deste trabalho.

É importante mencionar ainda a constatação de que as órbitas dessas regiões brancas “herdam” a dinâmica da região periódica a qual se ligam, semelhante ao que ocorre em um processo de bifurcação. Esse fenômeno é mostrado com mais detalhes na Fig. 3.12, onde mais uma vez foram marcadas as trajetórias de dois pontos iniciais muito próximos, após um transiente longo, para os parâmetros $F = (-0.94, -0.93)$ da Fig. 3.10(b).

A imagem deixa claro que a órbita pode ser dividida em oito regiões, ou *locus*, que são simétricos em relação ao eixo real. Isso sugere que após um número suficiente de iterações, as órbitas conjugadas descrevem a mesma a figura.

As setas na imagem indicam o caminho percorrido por um ponto da órbita escolhido aleatoriamente. Apesar da não repetição constatada, percebe-se um resquício da periodicidade da cúspide de período oito: começando pelo *locus* 1 indicado, o ponto é levado ao segundo *locus*, depois ao terceiro, ao quarto, etc, retornando ao *locus* original após oito iterações. Os *loci* de 1-4 são mostrados em detalhes nas Figs. 3.13.

Dado esse comportamento inusitado, é interessante observar o que ocorre na região de sobreposição entre o pico azul de período seis, e a faixa branca, onde se encontra o ponto

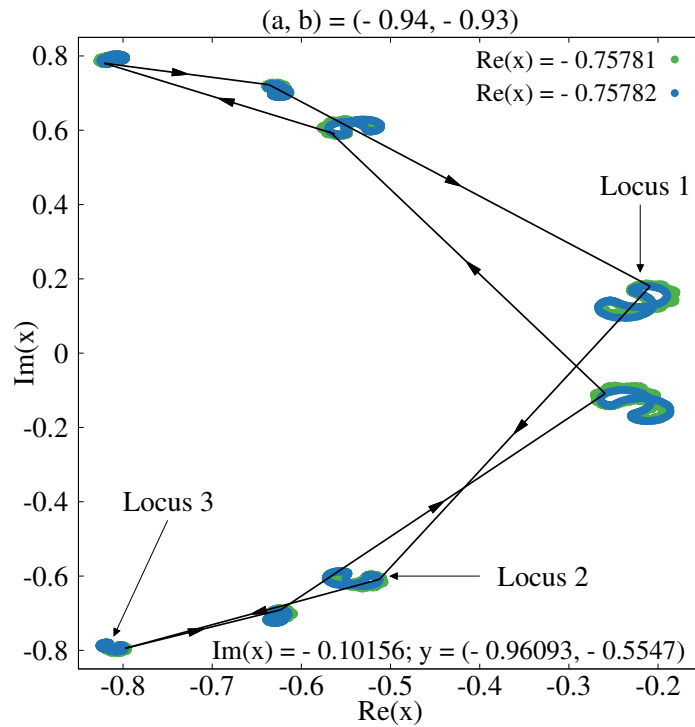


Figura 3.12: Órbitas de diferentes pontos iniciais para os parâmetros $(a, b) = (-1.1036, -0.947)$. Após oito iterações, um ponto da órbita retorna ao locus de origem.

$G = (-0.8577, -0.82)$ da Fig. 3.10(a). A Fig. 3.14 mostra três dos atratores encontrados: dois não-periódicos, nas cores azul e laranja, e um atrativo de período seis⁵.

Utilizando, mais uma vez 200^4 pontos iniciais em uma área quadridimensional centrada na origem de lados $4 \times 4 \times 4 \times 4$, obteve-se os seguintes resultados:

1. Número de pontos divergentes: $k_d = 1599564512$, ($\approx 99.973\%$);
2. Número Pontos que levam a ciclos estáveis neutros: $k_n = 362588$, ($\approx 0.023\%$).
3. Número Pontos que levam ao atrator 6-periódico: $k_p = 72900$, ($\approx 0.005\%$).

⁵Para este atrator foram encontrados vários pontos iniciais que convergem para o mesmo ciclo, daí a designação *atrativo*. Veja o Cap. 2, pag. 21.

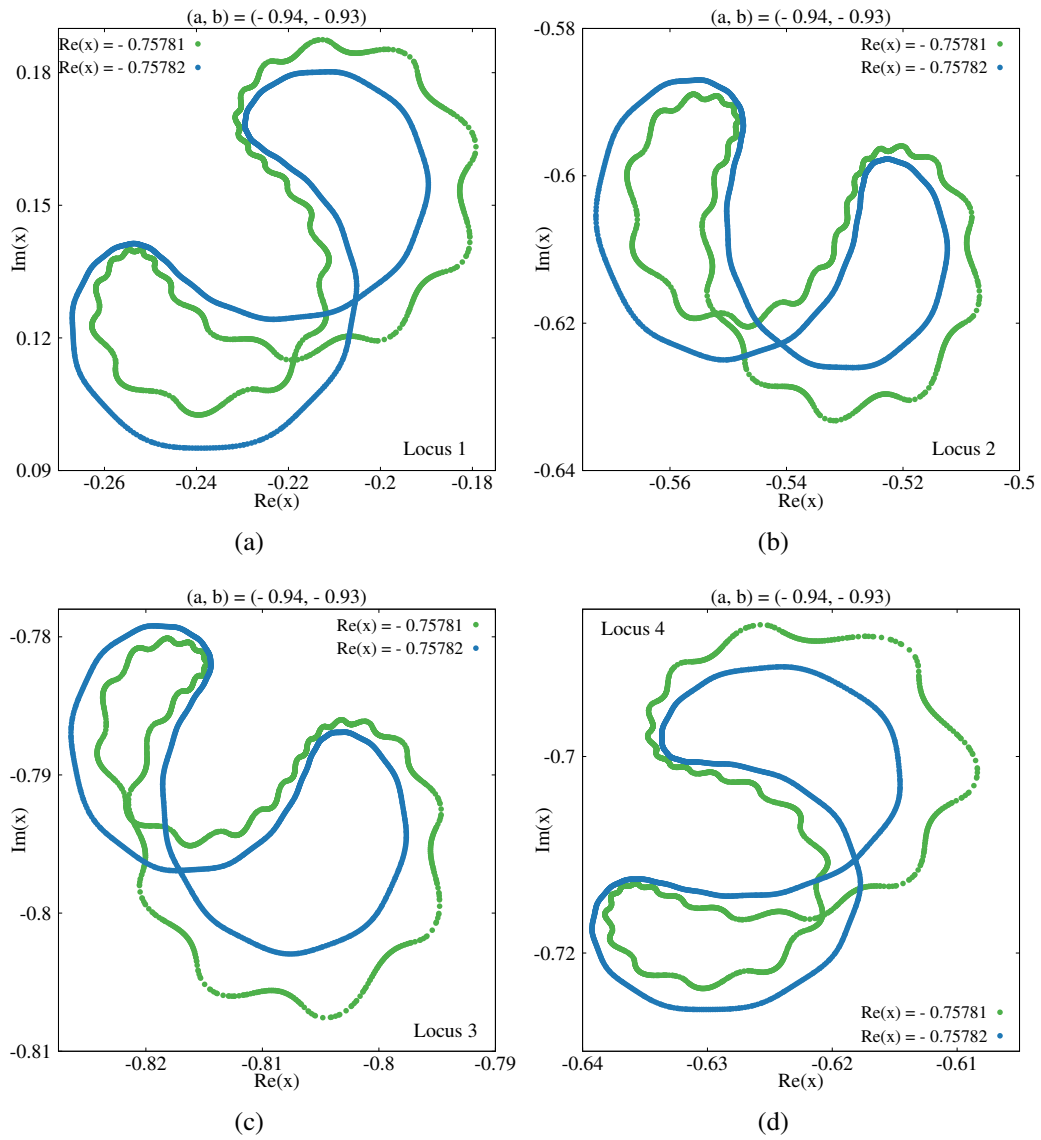


Figura 3.13: Detalhes dos loci de diferentes pontos iniciais para os parâmetros $(a, b) = (-1.1036, -0.947)$.

Atrator	x	y
Período 6	$(-0.1171, 0.1272)$	$(-0.5122, 0.8109)$
Azul	$(-0.9854, 0.1152)$	$(-0.9941, 0.1152)$
Laranja	$(-0.7074, 0.1390)$	$(-0.8116, 0.2122)$

Tabela 3.6: Pontos pertencentes ao atrator de período seis, e às órbitas não-periódicas em laranja e azul.

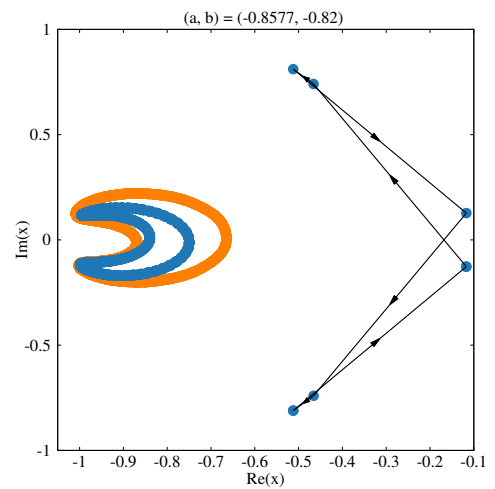


Figura 3.14: Órbitas coexistentes para os parâmetros $(a, b) = (-0.955, -0.95)$ vistas no plano complexo da variável x .

Capítulo 4

MAPA CÚBICO COMPLEXO

O mapa de Hénon faz parte de um conjunto mais abrangente de mapas chamado *grupo de Cremona*, G [32]. Todos os membros desse grupo são caracterizados por serem mapas polinomiais cuja inversa é também um polinômio. Uma de suas propriedades mais interessantes é que qualquer elemento de G é conjugado¹ a uma composição de *mapas de Hénon generalizados*, dados por

$$\begin{cases} x_{n+1} = cy_n + f(x_n), \\ y_{n+1} = x_n, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $f(x_n)$ é uma função polinomial de grau $d \geq 2$ em x_n , e $c \neq 0$ [21]. Observe que todos esses mapas possuem jacobiano constante dado por $J = -c$.

Depois do caso em que $d = 2$, portanto, as transformações mais simples a serem investigadas são as que envolvem polinômios cúbicos. Adotando então o procedimento intermediário utilizado para o mapa de Hénon, isto é, manter os parâmetros no domínio do reais mas permitir que as variáveis sejam complexas, investiga-se neste capítulo o mapa

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 + x_n(a+1) + b + cy_n, \\ y_{n+1} = x_na, \end{cases} \quad (4.3)$$

Essas equações possuem três parâmetros distintos, de modo que seriam necessários isodigramas tridimensionais para o estudo completo do espaço de fase, algo pouco viável, dada a necessidade da observação das cores de cada ponto. Perceba, no entanto, que a constante c destaca-se das demais por estar relacionada com o jacobiano do sistema, e ser responsável pelo

¹Dado um grupo G , dois elementos $a, b \in G$ são ditos *conjugados* se existir um terceiro elemento $g \in G$ tal que

$$g^{-1}ag = b \quad (4.1)$$

Em termos práticos, isso significa que a mesma dinâmica observada em a pode ser encontrada em b , e vice-versa.

acoplamento das variáveis. Por essa razão, opta-se aqui por investigar o plano dos parâmetros $a - b$, enquanto c é mantido constante.

4.1 Caso $c = 0$

No regime de desacoplamento (i.e. $c = 0$), o mapa da Eq. (4.3) passa a ser dado pela transformação

$$x_{n+1} = x_n^3 + x_n(a + 1) + b \quad (4.4)$$

Apesar desse mapa não pertencer ao grupo de Cremona por não ser inversível, mapas cúbicos unidimensionais em geral possuem uma vasta gama de aplicações, indo desde o estudo de nuvens de elétrons [7], até sistemas biológicos [34]. Nestes caso, no entanto, os parâmetros em geral são associados a quantidades físicas mensuráveis, o que torna desinteressante a generalização dos mesmos para o caso complexo.

Mapas polinomiais complexos de uma única variável e ordem $d \geq 2$ são bastante conhecidos, de modo que existem vários resultados capazes de facilitar o processo de implementação computacional. Um deles em especial, obtido por Douady e Hubbard [13], diz que a conexidade das bacias de atração desses mapas mantém uma relação direta com os pontos críticos da transformação. Assim, caso *todos* os pontos críticos de um mapa possuam órbitas divergentes, suas bacias de atração serão do tipo Cantor. Caso todos possuam órbitas limitadas, então suas bacias são conexas².

Isso facilita bastante os experimentos numéricos, uma vez que para cada par de parâmetros necessita-se averiguar o destino das órbitas de apenas dois pontos:

$$x_{0\pm} = \pm \sqrt{\frac{-(a+1)}{3}} \quad (4.5)$$

que são os pontos críticos da Eq. (4.4).

O resultado é mostrado na Fig. 4.1(a). Nela a cúspide preta possui período 1, e foi colorida assim pelo fato de também fazer parte do espaço de parâmetros no caso em que o mapa (4.4) é puramente real. Em outras palavras, a mudança para variáveis complexas afeta os atratores presentes no caso real de forma semelhante ao que foi descrito na Sec. 3.1. A região “nova”, por assim dizer, é o cacto mostrado mais à esquerda da figura, no qual todas as órbitas atrativas

²Esse resultado é uma generalização da dicotomia fundamental apresentada no Cap. 1. Como o mapa quadrático possui apenas um ponto crítico ($x = 0$), existem apenas as duas opções citadas. Para mapas com mais de um ponto crítico, existe ainda a possibilidade da trajetória de alguns deles divergir, enquanto a de outros não; ou de alguns dos pontos críticos serem levados a um atrator diferente dos demais.

são complexas.

Essa estrutura é ainda mais similar ao conjunto $\mathcal{M}$ do que as encontradas no Cap. 3, não apenas pela maior regularidade nas formas de suas estruturas, mas também pelo fato de ser provado tratar-se de um conjunto conexo [13,37].

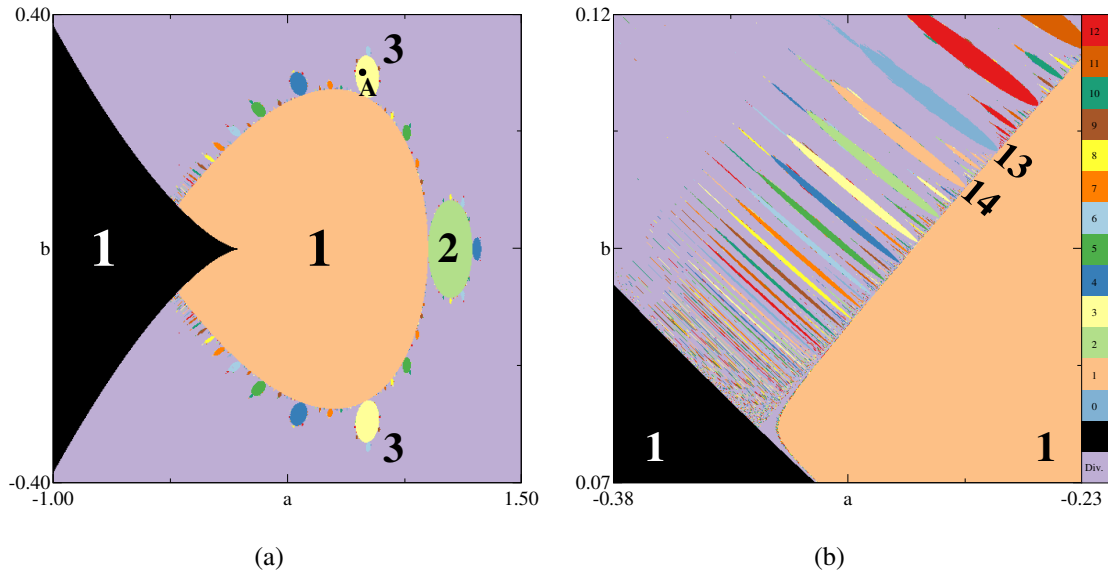


Figura 4.1: (a) Espaço de fase do mapa cúbico. Tanto a cúspide preta quanto o corpo principal do cacto possuem período 1. (b) Detalhe da região de convergência dos bulbos.

Ao contrário do que ocorre no caso mandelbrot, porém, a Eq.(4.4) é invariante sob conjugação já que $a, b \in \mathbb{R}$. Isso confere a cada parâmetro pertencente ao cacto a coexistência de dois ciclos periódicos estáveis, caracterizando-se assim uma multi-estabilidade do tipo-1, como encontrado no caso do mapa de Hénon.

A Fig. 4.2 mostra o conjunto de Julia preenchido³ do parâmetro $A = (0.65, 0.3)$, visto na Fig. 4.1(a). Enquanto o ciclo superior executa 1/3 de volta no sentido anti-horário a cada iteração, o ciclo inferior executa 2/3 de volta no mesmo sentido⁴. Por causa dessa ambiguidade, não é possível assinalar a cada disco primário um número de rotação *baseando-se apenas no comportamento dinâmico numérico dos pontos do ciclo*, como feito anteriormente.

Outra diferença significativa entre esse conjunto e $\mathcal{M}$ são os pontos de acumulação dos bulbos, como mostra a Fig. 4.1(b). Esse tipo de empacotamento, que corre em um segmento de linha em vez de uma curva fechada, é reportado para o caso do mapa cúbico na Ref. [37], e é uma mostra da não-conexidade *local* desse conjunto⁵.

³Perceba que para obter as bacias de atração de cada ciclo é necessário iterar mais do que apenas os pontos

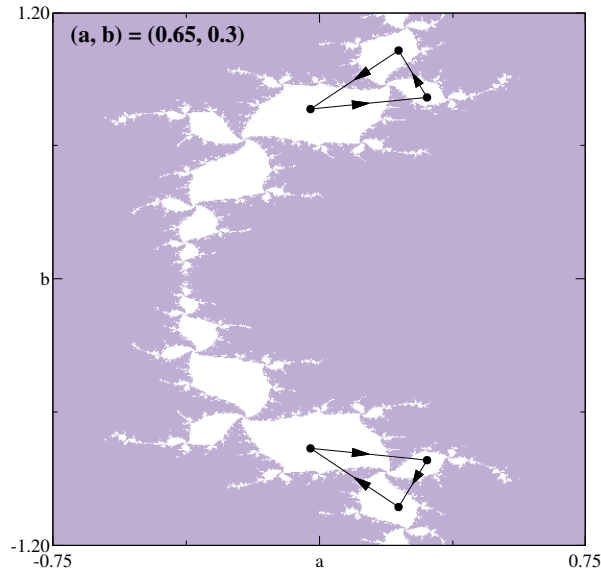


Figura 4.2: Conjunto de Julia preenchido do mapa (4.4) com parâmetros $(a, b) = (0.65, 0.3)$. Note que ele é simétrico em relação ao eixo real.

4.2 Caso $c > 0$

Quando $c \neq 0$, as variáveis x e y se acoplam, e são observadas várias modificações nas estruturas do espaço de fase. Aqui, os teoremas vistos na seção passada não podem ser aplicados, e o algoritmo para gerar as imagens deve ser o mesmo utilizado no Cap. 3.

Começando pelas imagens da Fig. 4.3, vê-se que a medida que $c \rightarrow 1$, o corpo principal do cacto parece “englobar” a cúspide, que por sua vez sofre uma redução em sua área.

Enquanto o corpo principal se espalha, a “velocidade” com que os bulbos primários convergem aumenta. Como pode ser visto nas Figs. 4.4, eles passam a se aglomerar a partir de períodos menores, a medida que c cresce.

A única exceção é o bulbo de período dois. Na Fig. 4.3(c) pode-se observar que ele adquire um formato elipsoide, e que os bulbos secundários a ele conectados também sofrem deformações. A maior parte destes últimos tornam-se finos e alongados, como o bulbo de período seis nesta mesma imagem. Isso, porém, não é verdade para todos eles.

Como mostra a Fig. 4.3(d), o bulbo de período oito se divide em duas partes desconexas, enquanto o período dez ganha um ponto de cúspide, assumindo a forma de uma letra “V”. Já o bulbo de período doze, que também passa a ser monocúspide, não possui forma bem definida.

críticos.

⁴O que equivale à 1/3 de volta no sentido horário.

⁵Enquanto se sabe que o mapa cúbico complexo não é localmente conexo, a conexidade local do conjunto de Mandelbrot permanece uma questão em aberto.

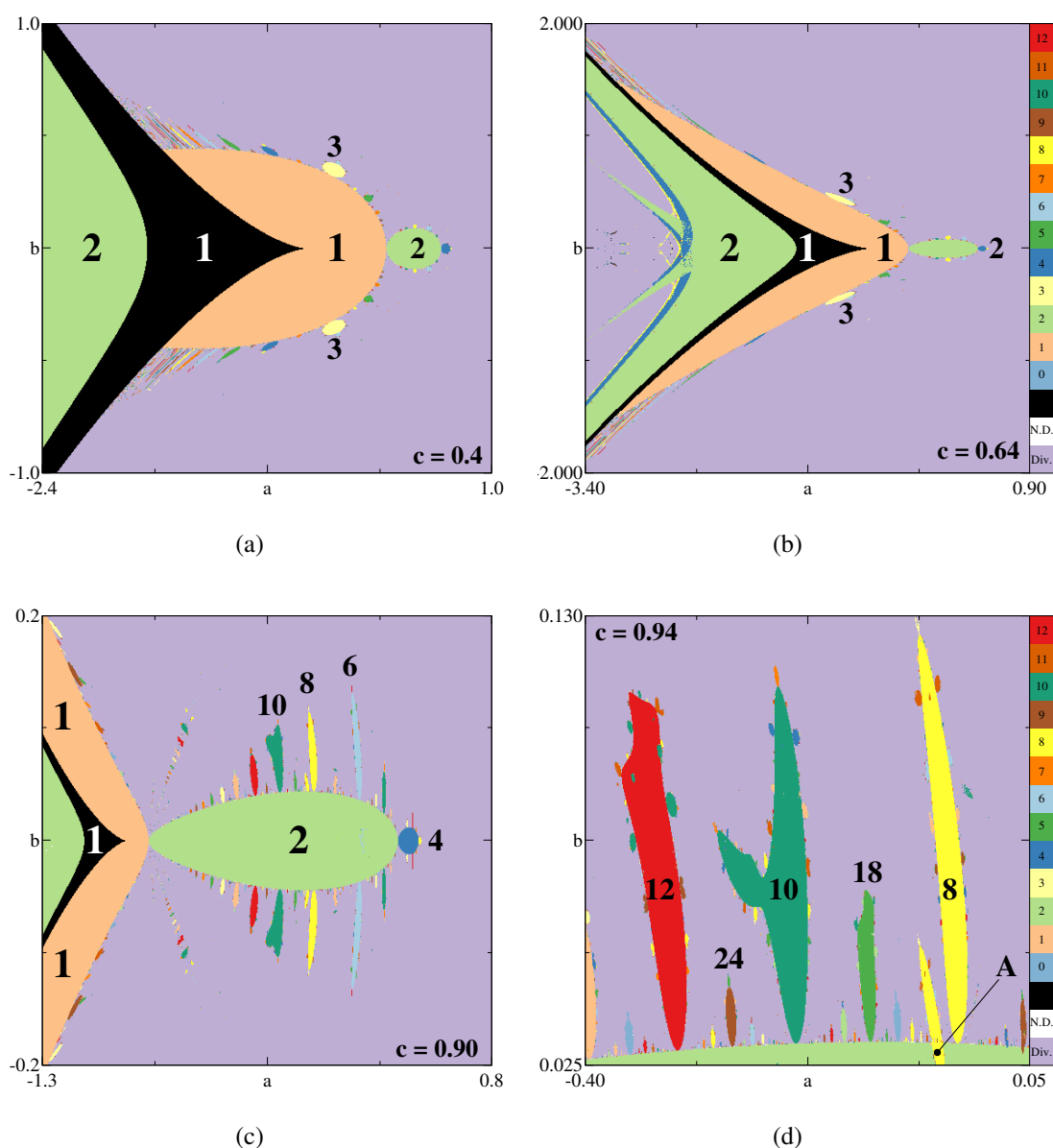


Figura 4.3: Evolução do espaço de parâmetros a medida que $c \rightarrow 1$.

Os bulbos terciários localizados nas proximidades desses também sofrem deformações exóticas, como é o caso do de período dezoito.

Outras similaridades entre o mapa cúbico e o de Hénon, além de bulbos deformados, aparecem nas Figs. 4.3(c) e 4.3(d). São elas, respectivamente:

- O aparecimento de cadeias de estruturas, como as descritas na Sec. 3.2.2.1.
- A observação de parâmetros para os quais existem órbitas estáveis coexistentes, como é o caso do ponto A.

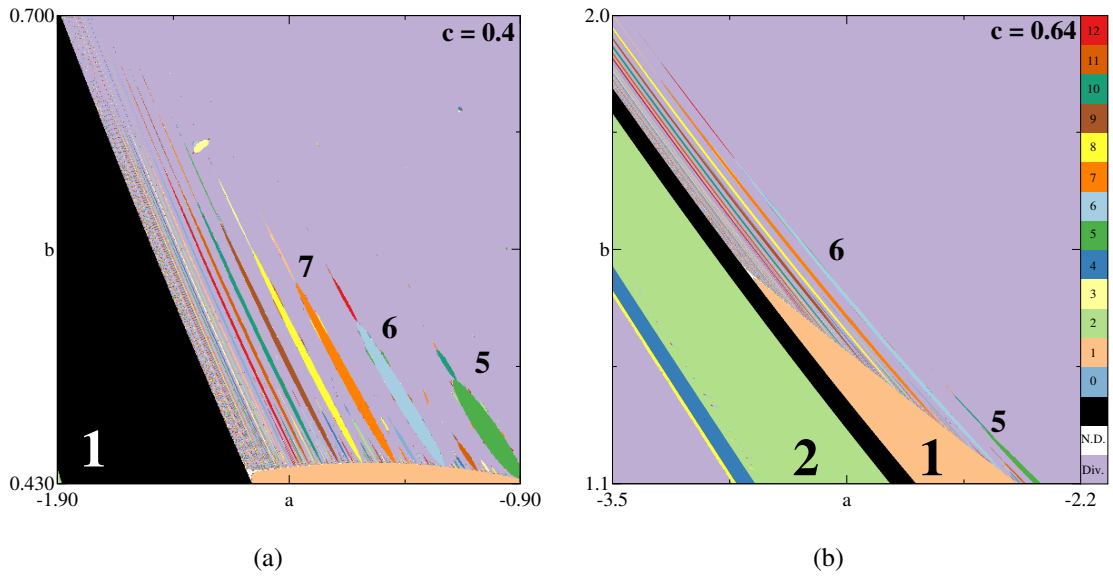


Figura 4.4: Ampliação da região de aglomeração dos bulbos para os parâmetros (a) $c = 0.4$ e (b) $c = 0.64$. À medida que c aumenta, a taxa de convergência também parece crescer.

4.3 Caso $c < 0$

Quando $c \rightarrow -1$, o corpo principal do cacto parece realizar o “movimento” inverso. Como visto nas Figs. 4.5, a região de contato entre ele e a cúspide diminui cada vez mais, ao passo que ambas parecem se afastar.

É interessante notar que durante esse processo, o cacto de período 1 vai adquirindo uma forma elipsoide, similarmente ao ocorrido com o bulbo de período 2 do caso $c > 0$. Mais ainda, comparando as imagens Fig. 4.3(c) e 4.5(c), é possível observar que as transformações sofridas pelos bulbos ligados a essas formas elípticas são também muito parecidas.

Começando pelo bulbo primário 2-periódico na imagem 4.5(c), e seguindo a parte de cima do corpo principal, vê-se que o primeiro bulbo, de período três, se alonga. O segundo, de período quatro, ganha uma cúspide que se aproxima da base do cacto a medida que c aumenta. Em determinado ponto, esse bulbo é então dividido em duas partes que sobrepõem, como visto na Fig. 4.5(d). No ponto D indicado nessa imagem, observa-se a existência de multi-estabilidade do tipo-2 e do tipo-1, com a coexistência de órbitas atrativas diferentes, mas de mesmo período.

O terceiro cacto, de período cinco, assume a forma da letra “V”, assim com o cacto de período nove. O quarto, de período seis, adquire um formato indeterminado, a exemplo do que ocorre com o de período doze, na Fig. 4.3(d)

Essas deformações acontecem exatamente com o segundo, terceiro e quarto bulbos secundários da Fig. 4.3(c), o que sugere uma relação entre o tipo de deformação e a posição relativa

dessas estruturas.

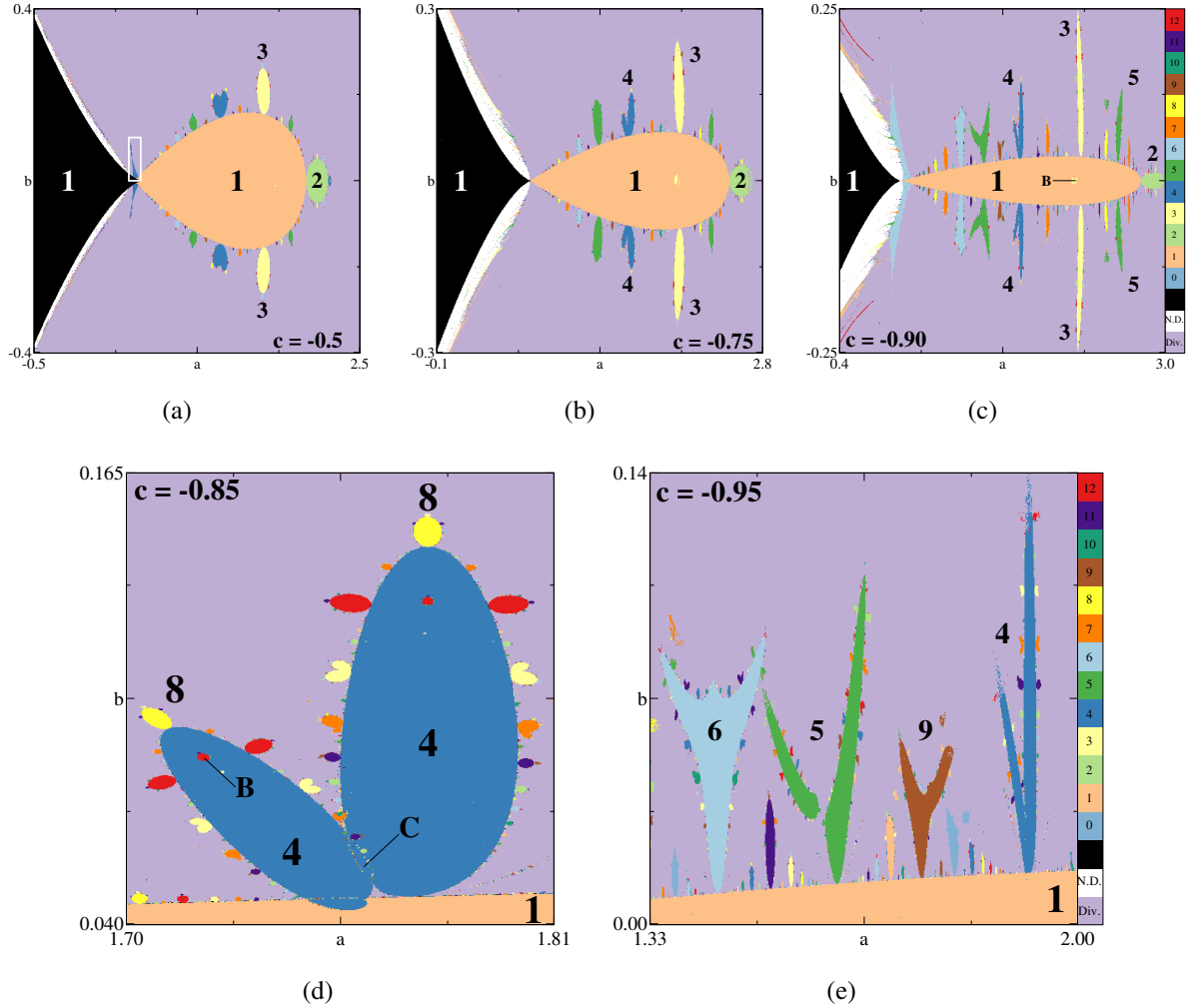


Figura 4.5: Evolução do espaço de parâmetros para $c \rightarrow -1$. Em (c), as deformações sofridas pelos bulbos primários são semelhantes às deformações encontradas nos bulbos secundários para o caso em que $c > 0$. (d) Detalhe dos bulbos deformados para $c = -0.95$. (e) Detalhe do bulbo de período quatro após a sua separação ($c = -0.85$). Observe que as duas partes se sobrepõem, de modo que para os parâmetros localizados na região de interseção, o sistema apresenta multi-estabilidade com órbitas diferentes de mesmo período.

Indo um pouco mais além, a Fig. 4.5(e) mostra em detalhes os bulbos encontrados para $c = -0.95$. Aqui se percebe que as transformações descritas continuam, com a cisão do cacto de período cinco em duas partes, e com o cacto de período seis assumindo a forma de um tridente. Este último possui uma cúspide na ponta central do tridente, semelhante ao que foi encontrado na Sec. 3.2.3.3, pág. 50.

Apesar do corpo principal do cacto se afastar, a região da cúspide passa a ser circundada por uma outra região, de cor branca, composta por pontos não-divergentes. Essa faixa branca, visível em todas os quadros da Fig. 4.5, cresce ao passo que $c \rightarrow -1$, e é permeada por estruturas periódicas.

Ponto	Período	x	y
$A = (-0.044, 0.028, 0.94)$	2	$(0.01562, -0.97620)$	$(-0.02862, -0.06135)$
	8	$(-0.13721, -0.17974)$	$(0.17845, -0.91407)$
$B = (2.28, 0.0, -0.9)$	1	$(0.0, -1.17473)$	$(0.0, -1.17473)$
	3	$(0.0, -0.93901)$	$(0.0, -0.90843)$
$C = (1.72, 0.086, -0.85)$	4	$(0.11015, -0.98522)$	$(-0.24772, -1.07689)$
	12	$(-0.482716, 0.702376)$	$(-0.185625, -0.064230)$
$D = (1.761, 0.056, -0.85)$	4	$(0.12638, -1.04892)$	$(0.22013, -0.88469)$
	4	$(0.14972, -0.96589)$	$(-0.03370, -0.90195)$

Tabela 4.1: Parâmetros para os quais se verifica multi-estabilidade dos tipos 2 e 1 no mapa cúbico. O ponto A pode ser encontrado na Fig. 4.3(d), pág. 62, e os pontos B , C e D nas Figs. 4.5, pág. 64.

A Fig. 4.6(a) é uma ampliação próxima à essa faixa. As estruturas periódicas principais aumentam seus períodos de dois em dois, em direção a ponta da cúspide preta. Cada uma delas, por sua vez, é composta por duas cúspides, na extremidade das quais se veem novos cactos, mostrados na Fig. 4.6(b).

Na parte inferior da imagem é possível constatar ainda a existência de várias bicúspides semelhantes, porém menores. Enquanto a regra da soma de períodos é válida para os bulbos dos cactos, ela não é observada para as bicúspides.

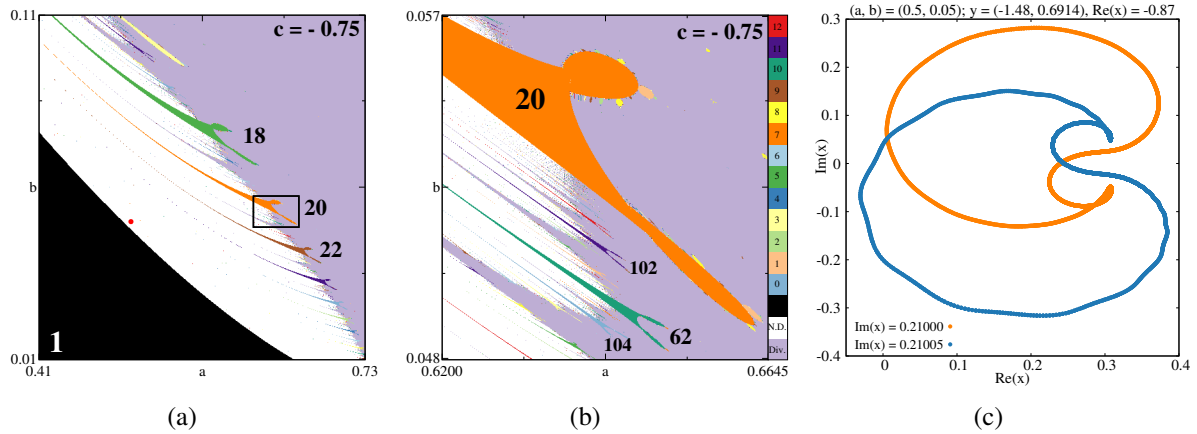


Figura 4.6: (a) Detalhe da região branca formada por pontos não divergentes e de regiões periódicas estáveis em meio a eles. (b) Ampliação da região mostrada em (a), onde se vê que a presença de pequenos cactos nas extremidades da estrutura de período vinte, bem como outras estruturas similares menores. (c) Projeção das órbitas de dois pontos iniciais diferentes no plano complexo da variável x , para parâmetros $(a, b) = (0.5, 0.05)$. Esse parâmetro se localiza na região branca.(ainda será colocado)

A dinâmica do sistema para na região branca não parece ser caótica, mas sim quasi-periódica, como encontrado na Sec. 3.3.2. Isso pode ser visto na Fig. 4.6(c), que mostra as órbitas de dois pontos iniciais distintos para o sistema com parâmetros $(a, b, c) = (0.5, 0.05, -0.75)$.

Além das regiões de estabilidade em meio à área branca, foram encontrados ainda outros exemplos de cúspides com cactos em seus extremos, como a que aparece na área destacada na

Fig. 4.5(a), e ampliada na Fig. 4.7(a).

Essa cúspide, porém, está localizada fora da área branca, na região de interface entre a cúspide negra e o corpo do cacto principal. Outra diferença entre ela e as anteriores, é que sua presença não é verificada para qualquer $c < 0$. Isso pode ser comprovado após observar-se as Figs. 4.5(b) e 4.5(c): enquanto na primeira a cúspide está ausente, na segunda tem-se uma estrutura de período seis.

Voltando à Fig. 4.7(a), percebe-se também uma pequena formação, destacada pelo quadrilátero indicado. Uma ampliação dessa área, Fig. 4.7(b), revela tratar-se de um exemplo de *tricórnio*. Eles foram facilmente encontrados em diversas regiões do espaço de parâmetros do sistema em questão.

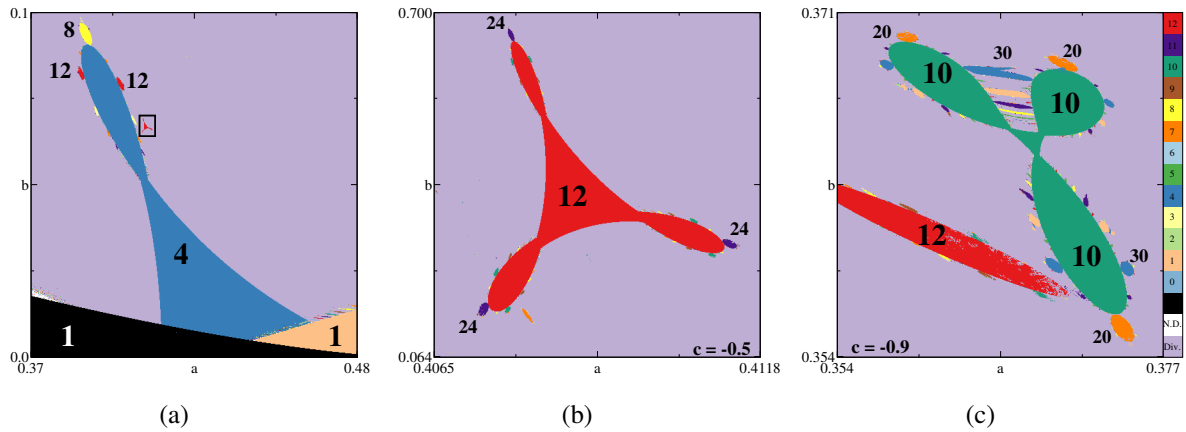


Figura 4.7: (a) Bulbo na extremidade da cúspide de período quatro, que se mostra presente quando $c = -0.5$. (b) Tricórnio de período doze. (c) Tricórnio de período dez. Este último claramente não é invariante sob rotações.

Tricórnios são estruturas que foram observadas primeiramente no espaço de fase do mapa

$$z_{n+1} = \bar{z}_n^3 + c, \quad (4.6)$$

onde $c, z_n \in \mathbb{C}$ e $\bar{z}_n$ é o conjugado de z_n . Por essa razão, são também conhecidas como *conjuntos de Mandelbar*, $\mathcal{M}_{bar}$ [6].

Posteriormente, foram encontradas também no plano real do espaço de parâmetros de uma família de mapas cúbicos complexos investigados por J. Milnor [37]. É nesse trabalho que o termo tricórnio é introduzido. O mapa por ele utilizado, no entanto, possui apenas uma variável complexa.

A fronteira do corpo principal do tricórnio é descrita por uma deltoide, possuindo assim três cúspides. Na extremidade de cada uma delas encontram-se conjuntos semelhantes a $\mathcal{M}$. Eles possuem várias propriedades interessantes, das quais cita-se aqui sua invariância sob rotações de $2\pi/3$ em torno do seu ponto central.

No caso em estudo, essas estruturas também sofrem deformações, como se pode observar na parte superior da Fig. 4.7(c). Os bulbos considerados como sendo os primários dos dois cactos superiores se sobrepõe, o que quebra a simetria rotacional.

Capítulo 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Com o avanço da tecnologia e a facilidade de acesso a máquinas mais rápidas e precisas, o uso de simulações e experimentos numéricos torna-se cada vez mais importante para o desenvolvimento científico. Em contrapartida, verificar a concordância entre os resultados já conhecidos e os obtidos computacionalmente, como feito ao longo deste trabalho, é fundamental para se adquirir confiança em novas descobertas. Assim sendo, acredita-se que, apesar de não rigorosos do ponto de vista matemático, os resultados aqui apresentados são confiáveis.

Como visto no Cap. 2, mesmo em sistemas aparentemente simples e para os quais resultados analíticos abundam, como o mapa de Hénon, ainda existem características que são muito mais facilmente observadas através de métodos numéricos. É o caso, por exemplo, dos arcos de períodos variados, e da relação entre a organização dos mesmos e a dinâmica do sistema.

No Cap. 3 foram mostradas estruturas de fase no espaço de parâmetros real do mapa de Hénon, ou seja, conjuntos pontos de parâmetro para os quais o sistema apresenta órbitas complexas estáveis. Grande parte dessas estruturas possui forma de cactus, e são observadas apenas quando as variáveis do mapa são complexas com parte imaginária não nula.

Foram encontradas semelhanças entre sua organização e a do conjunto de Mandelbrot, $\mathcal{M}$, mas não obstante tais similaridades, constata-se ainda uma diversidade muito grande em suas formas e padrões, o que torna muito difícil a obtenção de uma classificação completa. Visando tal intento, levar em conta o número de cúspides em cada estrutura mostrou-se, até o momento, uma opção razoável de critério classificatório, mas ainda não satisfatória, dado a possibilidade da existência de cactus com número arbitrário de cúspides.

Além da questão da classificação, outro problema que permanece em aberto, é a confirmação precisa ou não da existência de órbitas quasi-periódicas, tanto para o mapa de Hénon quanto para o mapa cúbico.

Este último, descrito com maiores detalhes no Cap. 4, também apresenta uma vasta gama de estruturas de fase reais com órbitas complexas, algumas guardando semelhanças com as encontradas no Cap. 3 e ao conjunto $\mathcal{M}$. Aqui, contudo, a existência de um terceiro parâmetro permite a análise de deformações variadas e de perdas de simetria que essas estruturas sofrem, à medida que o sistema vai do regime dissipativo em direção ao regime hamiltoniano. Isso abre margem para investigações mais detalhadas desse sistema, e gera a expectativa de estudar mapas de Cremona de grau mais alto e mais, onde existam mais parâmetros a serem investigados.

Nota-se, portanto, que os objetos encontrados e descritos nesse trabalho ampliam os horizontes das possibilidades de estudo analítico, não só das transformações aqui consideradas, mas do grupo de Cremona como um todo, o que pode se mostrar interessante do ponto de vista matemático.

Além disso, do ponto de vista físico, tais mapas são utilizados para modelar diversos processos da natureza, como mencionado ao longo do texto. A obtenção de órbitas complexas estáveis em sistemas com parâmetros reais é, portanto, útil quando se considera que, nessas condições, continua sendo possível associar grandezas físicas mensuráveis aos parâmetros, enquanto tais órbitas implicam em novas possibilidades para o comportamento dinâmico do sistema, cuja observação é esperada.

REFERÊNCIAS

- [1] AMEL, K. ; ILHEM, D. *One-dimensional and two-dimensional dynamics of cubic maps.* Discrete Dynamics in Nature and Society, v. 2006, p. 1-13, 2006.
- [2] BIHAM, O. ; WENZEL, W. *Characterization of Unstable Periodic Orbits in Chaotic Attractors and Repellers.* Phys. Rev. Lett., v. 63, n. 8, p. 819-821, 1989.
- [3] BONNATO, C. ; GARREAU, J. C.; GALLAS, J. A. C. *Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ laser.* Phys. Rev. Lett., v. 95, set. 2005
- [4] BRANNER, B. ; HUBBARD J. H. *The iterations of cubic polynomials. Part I: The global topology of parameter space* Acta Mathematica, v. 160, p. 143-206, 1988.
- [5] BUESCU, J. *Exotic Attractors: From Liapunov Stability to Riddled Basins.* Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.
- [6] CROWE, W. D.; HASSON, R.; RIPPON, P. J.; STRAIN-CLARK, P. E. D. *On the structure of the Mandelbar set.* Nonlinearity, v. 2, p. 541-553, 1989.
- [7] DEMMA, T. , PETRACCA, S. , STABILE, A. *A physical interpretation of the cubic map coefficients describing the electron cloud evolution.* arXiv:1011.1682 [physics.acc-ph], nov 2010.
- [8] DÉNES, A. ; MAKAY, G. *Attractors and basins of dynamical systems.* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, n.20, p. 1-11, 2011.
- [9] DEVANEY, R. L. *The complex Dynamics of Quadratic Polynomials*, dez. 1994.
- [10] DEVANEY, R. L. *The fractal geometry of the Mandelbrot set: I. Periods of the bulbs.* Fractals, Graphics, and Mathematics Education, MAA Notes, vol. 58, p.61-68, 2002.
- [11] DEVANEY, R. L. *The fractal geometry of the Mandelbrot set: II. How to add and how to count.* Fractals, Graphics, and Mathematics Education, **3**, p.629-640, 1995.
- [12] DEVANEY, R. L. ; MORENO-ROCHA, M. *Geometry of the antennas in the Mandelbrot set.* Fractals, v.10, n. 1, p. 39-46, mar. 2002.
- [13] DOUADY, A. ; HUBBARD, J. H. *Étude Dynamique des Polynômes Complexes.*, Publications Mathématique D'orsay.
- [14] DOUADY, A. ; HUBBARD, J. H. *On the Dynamics of Polynomial-like Mappings.* Annales Scientifiques de l'É.N.S., v. 18, n. 2, p. 287-343, 1985.

- [15] ENDLER, A. *Aspectos Algébricos de Sistemas Dinâmicos*. 2002. 132 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [16] ENDLER, A. ; GALLAS, J. A. C. *Arithmetical signatures of the dynamics of the Hénon map*. Phys. Rev. E, v. 65, n. 3, mar. 2002.
- [17] ENDLER, A. ; GALLAS, J. A. C. *Existence and characterization of stable ghost orbits in the Hénon map*. Physica A, v. 344, n. 3-4, p. 491-497, dez. 2004.
- [18] ENDLER, A. ; GALLAS, J. A. C. *Mandelbrot-like sets in dynamical systems with no critical points*. Comptes Rendus Mathématique, Paris, v. 342, n. 9, p. 681-684, mai. 2006.
- [19] ENDLER, A. ; GALLAS, J. A. C. *Period four stability and multistability domains for the Hénon map*. Physica A, v. 95, n. 1-2, p. 285-290, jun. 2001.
- [20] FRAME, M. *National Academy of Sciences: Benoit B. MandelBrot*. Disponível em: <<http://www.nasonline.org/publications/biographical-memoirs/memoir-pdfs/mandelbrot-benoit.pdf>>. Acesso em: 13 de jan. de 2014.
- [21] FRIEDLAND, S. ; MILNOR, J. *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, v. 9, n. 1, p. 67-99, mar 1989.
- [22] GALIAS, Z. ; TUCKER, W. *Numerical study of coexisting attractors for the Hénon map*. Int. J. Bifurcation Chaos, v. 17, n. 7, jul. 2013.
- [23] GALLAS, J. A. C. *Structure of the Parameter Space of the Hénon Map*. Phys. Rev. Lett. v. 70, n. 18, p. 2714-2717, mai. 1993.
- [24] GRAHAM, R. ; TÉL, T. *Quantization of Hénon's Map with Dissipation*. Z. Phys B - Condensed Matter, New York, v. 60, n. 2/4, p. 127-136, 1985.
- [25] HEAGY, J. F. *A physical interpretation of the Hénon map*, 1992, p. 436-446, 1992.
- [26] HÉNON, M. *A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor*. Commun. Math. Phys., v. 50, n. 1, p. 69-77, out. 1976.
- [27] HIRSCH, M. W. ; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential Equations, Dynamical Systems & AN Introduction to Chaos*. 2 ed. San Diego: Elsevier, 2004.
- [28] HONE, A. N. W. ; IRLE, M. V. ; THURURA, G. W. *On the Neimark-Sacker bifurcation in a discrete predator-prey system.*, maio 2009.
- [29] JULIA, G. M. *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Paris, v. 1, n. 8, p. 47-246, 1918.
- [30] LI, T. ; YORKE, J. A. *Period three implies Chaos*. The American Mathematical Monthly, v.82, n.10, p. 985-992, dec. 1975.
- [31] LORENZ, E. N. *Deterministic Nonperiodic Flow*. J. Atmos. Sci., v. 20, n. 2, p. 130-141, mar. 1963.
- [32] MANDELBROT, B. B. *Fractal Aspects of the Iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ for Complex λ and z* . Annals of the New York Academy of Sciences, v.350, p. 249-159, 1980.

- [33] MAY, R. M. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, v. 261, p. 459-467, 1976.
- [34] May, R. M. *Nonlinear Phenomena in Ecology and Epidemiology*. Annals of the New York Academy of Sciences, v. 357, p. 267-281, 1980.
- [35] MILNOR, J. *On the Concept of Atractor*. Communications in Mathematical Physics, v.90, p. 177-195, 1985.
- [36] MILNOR, J. *On the Concept of Attractor: Correction and Remarks*. Communications in Mathematical Physics, v.102, p. 517-519, 1985.
- [37] MILNOR, J. *Remarks on Iterated Cubic Maps*. Experimental Mathematics, v. 1, n.1, p. 5-24, 1992.
- [38] NUSSE, H. ; YORK, J. A. *Dynamics: Numerical Explorations* Springer-Verlag, 1998.
- [39] OTT, E. *Basin of Attraction*. Scholarpedia, v. 1, n. 8, 2006. Acesso em: 13 de jun. de 2016.
- [40] PEITGEN, H. ; JÜRGENS H. ; SAUPE, D. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. 2 ed. New York:Springer, 2004.
- [41] RECH, P. C. ; BEIMS, M. W. ; GALLAS, J. A. C. *On the abundance of multistability in the Hénon map*. IEEE Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, 11.,2003, Scuol. Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Scuol, p. 205-208, 2003.
- [42] ROGERS, T. D. ; WHITLEY, D. *Chaos in The Cubic Mapping*. Mathematical Modelling, v. 4, p. 9-25, 1983.
- [43] SACKER, R. *On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations*. Report IMM-NYU 333, New York University, 1964.
- [44] STROGATZ, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, biology, Chemistry, and Engineering*. Perseus Books Publishing, 2004.
- [45] WEN, H. *A review of the Hénon map and its physical interpretations*. School of Physics, Georgia Institute of Technology, 2014.