



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Física

Programa de Pós-graduação em Física

**Influência das Cordas Cósmicas
não-Abelianas na Geometria do
Espaço-tempo**

Antônio de Pádua Santos

Tese de Doutorado

João Pessoa - PB

25 de Fevereiro de 2016.

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Antônio de Pádua Santos

**Influência das Cordas Cósmicas não-Abelianas na Geometria
do Espaço-tempo**

Tese de Doutorado apresentada ao de Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello*
João Pessoa - PB

25 de Fevereiro de 2016.

S237i Santos, Antônio de Pádua.
Influência das cordas cósmicas não-Abelianas na geometria do espaço-tempo / Antônio de Pádua Santos.- João Pessoa, 2016.
87f. : il.
Orientador: Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Cordas cósmicas não-Abelianas. 3. Teoria da Relatividade Geral. 4. Quebra espontânea de simetria. 5. Espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter. 6. Análise numérica.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Antônio de Pádua Santos**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

1 Aos vinte e cinco dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e seis, às 14h00, no
2 Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de
5 Gravitação e Cosmologia, **Antônio de Pádua Santos**. A comissão examinadora foi
6 composta pelos professores doutores: *Eugênio Ramos Bezerra de Mello* (UFPB),
7 orientador e presidente da banca examinadora, *Valdir Barbosa Bezerra* (UFPB), *Sérgio*
8 *André Fontes Azevedo* (UFPB), *Geusa de Araújo Marques* (UFCG) e *Bruno Carneiro*
9 *da Cunha* (UFPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. *Eugênio Ramos Bezerra de*
10 *Mello* comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao
11 candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese
12 intitulado "*Influência das cordas cósmicas não-abelianas na geometria do espaço-*
13 *tempo*". Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora que
14 emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da
15 Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para
16 constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, redigiu a presente ata
17 que vai assinada pelo mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa,
18 Paraíba, **25 de fevereiro de 2016**.

19

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
UFPB

Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo
UFPB

Profa. Dra. Geusa de Araújo Marques
UFCG

Prof. Dr. Bruno Carneiro da Cunha
UFPE

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário

Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Valdir Barbosa Bezerra
Sérgio Azevedo
Geusa de Araújo Marques
Bruno Carneiro da Cunha
Danilo Wilson Lemos Menezes

EM TEMPO: ONDE SE LÊ "DOIS MIL E SEIS", NA
LINHA 1, LEIA "DOIS MIL E DEZESSEIS".

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário PPGF/CCEN/UFPB
Mat. SIAP 1647724

26/02/2016



*Dedico esta tese a meus pais Erasmo Manoel Santos e
Maria de Lourdes Santos
e a minha esposa Cláudia Farias Santos.*

Agradecimentos

I get by with a little help from my friends.

— Lennon e McCartney.

O momento de agradecer é sempre um momento de correr o risco da falha de memória. No entanto, esta tese é o resultado concreto e visível da superação de um desafio, de noites acordado, de estudo obstinado, de listas de exercícios, de provas, de leituras de artigos, de cálculos analíticos e computacionais. Gostaria de dedicar algumas palavras às pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para que esta tese se tornasse realidade.

Esta tese não seria possível sem o apoio, a ajuda e o amor incondicional de meus pais Erasmo Manoel e Maria de Lourdes Santos que durante minha vida tem me dado suporte, sobretudo nos meus estudos. Também agradeço a minha esposa Cláudia Farias Santos que, ao meu lado, com seu indispensável apoio, compreensão e amor, vem me ajudando a superar e vencer os desafios e obstáculos. Sonhamos juntos, realizamos juntos.

Quero destacar meus sinceros agradecimentos ao professor Eugênio Ramos Bezerra de Mello pela dedicação, paciência e orientação. Sua competência e empenho foi substancial para o êxito desta tese, ajudando-me superar as dificuldades inerentes à pesquisa em Física e a compreender a Teoria de Campos em espaço-tempo curvo.

Também agradeço aos professores, amigos desde os tempos da minha graduação, Fernando Moraes e Sérgio Azevedo do Departamento de Física da UFPB que me incentivaram durante estes anos a superar os desafios do doutorado.

Quero agradecer à Universidade Federal Rural de Pernambuco, bem como ao professor Jairo Rocha do Departamento de Física da UFRPE pela assistência e apoio na minha liberação

para o doutorado.

Agradeço também ao meu colega de curso, o doutorando João Paulo Moraes, e a professora Betti Hartmann do Instituto de Física da USP em São Carlos, pela assistência, debates e discussões sobre o programa COLSYS e análise numérica. Também agradeço aos professores que tive a oportunidade de cursar disciplinas e que contribuíram na minha formação. Agradeço também a todos os colegas da pós-graduação com quem compartilhei os bons momentos que ficarão em minha memória.

Também quero expressar meus agradecimentos ao secretário da pós-graduação do Departamento de Física da UFPB, sr. Danilo Menezes pela ajuda nos assuntos relativos à secretaria do programa de doutorado. Agradeço ao sr. Mariano pelas boas conversas e prosas durante os cafés na Copa.

A todos com quem convivi durante esses anos de doutorado em Física na UFPB, meu muito obrigado. Família, amigos, professores, colegas, funcionários, em cada página dessa tese posso reconhecer um pouco de vocês.

Resumo

Nesta tese estudamos a influência das cordas cósmicas não-Abelianas na geometria do espaço-tempo. Para este fim, utilizamos um modelo de Higgs não-Abeliano acoplado com a gravidade e obtemos um sistema de equações diferenciais não-lineares. Como este sistema de equações diferenciais não possui solução analítica, realizamos análise numérica para obter o comportamento dos campos de Higgs, de gauge e métricos em função da distância à corda cósmica. O modelo considerado apresenta dois campos bosônicos e um campo de gauge não-Abeliano. Como os dois setores bosônicos podem apresentar um acoplamento direto, investigamos a relevância deste acoplamento no sistema, especificamente na densidade linear de energia e no déficit de ângulo planar. Também analisamos o comportamento destas quantidades como função da escala de energia onde a simetria de gauge é espontaneamente quebrada. Ampliamos este estudo para as cordas cósmicas não-Abelianas no espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter. Para isto, construímos um sistema de equações de campo considerando a presença da constante cosmológica. Utilizando a análise numérica, fornecemos o comportamento dos campos de Higgs, de gauge e dos campos métricos para valores específicos dos parâmetros físicos do modelo. Para o caso do espaço-tempo de de Sitter, salientamos o surgimento do horizonte cosmológico que, embora seja consequência da constante cosmológica, está fortemente relacionado ao acoplamento gravitacional. Para o espaço-tempo de anti-de Sitter, encontramos que o sistema não apresenta horizonte. Esta característica do sistema está relacionada às componentes (tt) e (zz) do tensor métrico, que divergem para grandes distâncias da corda cósmica.

Palavras-chaves: Cordas cósmicas, Abeliano, não-Abeliano, Teoria da Relatividade Geral, Quebra Espontânea de Simetria, Espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter, Análise Numérica.

Abstract

In this thesis, we study the influence of gravitating non-Abelian cosmic strings on the spacetime geometry. In order to develop this analysis, we constructed a set of coupled non-linear differential equations. Because there is no closed solution for this set of equations, we solve it numerically to determine the behaviour for the Higgs, gauge and metric fields. This model under consideration presents two bosonic sectors, besides the non-Abelian gauge field. The two bosonic sectors may present a direct coupling. So, we investigate the relevance of this coupling on the system, specifically in the linear energy density of the string and on the planar angle deficit. We also analyze the behaviors of these quantities as function of the energy scale where the gauge symmetry is spontaneously broken. We have extended this analysis to de Sitter and anti-de Sitter spacetimes. In order to do that we construct the complete set of equations of motion considering the presence of a cosmological constant. By using numerical analysis we provide the behavior of the Higgs and gauge fields and also for the metric tensor for specific values of the physical parameters of the theory. For de Sitter case, we find the appearance of horizons that although being consequence of the presence of the cosmological constant it strongly depends on the value of the gravitational coupling. In the anti-de Sitter case, we find that the system does not present horizons. In fact the new feature of this system is related with the behavior of the (tt) and (zz) components of the metric tensor. They present a strongly increasing for large distance from the string.

Key-words: Cosmic strings, Abelian, não-Abelian, General Theory of Relativity, Spontaneous symmetry breaking, de Sitter and anti-de Sitter spacetime, Numerical analysis.

Sumário

1	Introdução	1
2	Teoria da Relatividade Geral	5
2.1	Princípio da Equivalência	5
2.2	Transformação de Coordenadas	6
2.3	Métrica e Conexão	10
2.4	Conexão de Levi-Civita	14
2.5	Curvatura	18
2.6	Tensor Momento-Energia	22
2.6.1	Campo Gravitacional	22
2.6.2	Campo Escalar	26
2.7	Equações de Campo de Einstein	27
2.8	Espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter	29
2.8.1	Espaço-tempo de de Sitter (dS)	29
2.8.2	Espaço-tempo de anti-de Sitter (AdS)	31
3	Defeitos Topológicos	35
3.1	Quebra Espontânea de Simetria Global	37
3.2	Quebra Espontânea de Simetria Local	40
3.2.1	Vórtices Abelianos	42
3.2.2	Vórtices não-Abelianos	45

4	Cordas Cósmicas	51
4.1	Modelo Cosmológico Padrão	51
4.2	Métrica da Corda Cósmica	58
4.3	Efeitos Cosmológicos das Cordas Cósmicas	60
5	Cordas Cósmicas não-Abelianas	63
5.1	O Modelo	63
5.1.1	O Ansatz	65
5.2	Equações de Campo	68
5.2.1	Equações de Campo de Higgs e de Gauge	69
5.2.2	Equações dos Campos Métricos	69
5.2.3	Condições de Contorno	78
5.3	Resultados Numéricos	79
5.4	Caso Especial	84
6	Cordas Cósmicas não-Abelianas no Espaço-tempo de de Sitter e de anti-de Sitter	89
6.1	O Modelo	89
6.1.1	O Ansatz	91
6.2	Equações de Campo	92
6.2.1	Condições de Contorno	96
6.2.2	Solução de Vácuo	97
6.3	Resultados Numéricos	99
6.3.1	Espaço-tempo de de Sitter	100
6.3.2	Espaço-tempo de Anti-de Sitter	103
7	Conclusões	107

A	Colsys	111
B	Códigos	115
B.1	input.dat para cordas cósmicas não-Abelianas:	116
B.2	Driver para cordas cósmicas não-Abelianas:	116
B.3	input.dat para cordas cósmicas Abelianas:	126
B.4	Driver para cordas cósmicas Abelianas:	126
B.5	input.dat para cordas cósmicas não-Abelianas no espaço-tempo de de Sitter	135
B.6	input.dat para cordas cósmicas não-Abelianas no espaço-tempo de anti-de Sitter	135
B.7	Driver para cordas cósmicas não-Abelianas no espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter	136

Lista de Figuras

2.1	Curva parametrizada entre os pontos P e Q	16
2.2	Transporte paralelo de um vetor por uma curva fechada.	20
2.3	Espaço-tempo Ω com contorno $\partial\Omega$. A variação do tensor métrico no contorno é nula.	24
3.1	Potencial: $\lambda > 0, \eta^2 \leq 0$	38
3.2	Potencial: $\lambda > 0, \eta^2 > 0$	38
3.3	Região definida pelo contorno em torno do vórtice.	44
3.4	Comportamento dos campos de Higgs, $f(r)$, e de gauge, $H(r)$	46
3.5	Comportamento dos campos de Higgs $X(x)$, $Y(x)$ e de gauge, $H(x)$, para os parâmetros $\alpha = 1.0$, $\beta_2 = 1.0$, $\beta_3 = 0.9$, $q = 0.8$	49
4.1	Potencial: $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi - \eta^2)^2$	57
4.2	Comportamento do potencial efetivo em relação à temperatura.	57
4.3	Espaço cônico formado a partir da retirada de uma região correspondente ao ângulo $8\pi G\mu$	59
4.4	Formação de lentes gravitacionais devido à natureza cônica do espaço.	62
5.1	Comportamento dos campos para cordas cósmicas não-Abelianas considerando os parâmetros $\alpha = 2.0$, $\gamma = 0.6$, $\beta_2 = 2.0$, $\beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$	81
5.2	Comportamento dos campos para cordas cósmicas Abelianas considerando os parâmetros $\alpha = 2.0$, $\gamma = 0.6$	81

- 5.3 Comparação do comportamento dos campos métricos como função de x , considerando $\alpha = 1.0$ e $\gamma = 0.6$. Para o caso das cordas cósmicas não-Abelianas, consideramos $\beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$ 82
- 5.4 Comportamento da densidade de energia por unidade de $2\pi\eta_1^2$ em função da constante de acoplamento dos setores de Higgs, β_3 , e da constante de acoplamento gravitacional, γ . Em ambos os gráficos, consideramos os parâmetros $\alpha = 2.0, \beta_2 = 1.0$ e $q = 1.0$ 83
- 5.5 Comportamento do déficit de ângulo planar em unidades de 2π em função da constante de acoplamento dos setores de Higgs, β_3 , e da constante de acoplamento gravitacional, γ . Em ambos os gráficos, consideramos os parâmetros $\alpha = 2.0, \beta_2 = 1.0$ e $q = 1.0$ 83
- 5.6 Região no espaço de parâmetros $(\alpha - \gamma)$ que contém cordas cósmicas não-Abelianas regulares, considerando $\beta_2 = 1.0$ e $q = 1.0$ 84
- 5.7 Comportamento dos campos para o caso especial da corda cósmica não-Abeliana considerando $\alpha = 2.0, \gamma = 0.6, \beta_2 = \beta_3 = 1$ e $q = 1$, e para a corda cósmica Abeliana na condição de BPS, considerando $\alpha = 2.0$ e $\gamma = 0.6$ 87
- 6.1 Corda cósmica não-Abeliana: (a) Comportamento dos campos de Higgs e de gauge em função de x . (b) Comportamento dos campos métricos em função de x . Em ambos os gráficos consideramos os parâmetros físicos $\alpha = 0.8, \gamma = 0.61, \bar{\Lambda} = 0.0075, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$ 101
- 6.2 Corda cósmica Abeliana: (a) Comportamento dos campos de Higgs e de gauge fields em função de x . (b) Comportamento dos campos métricos em função de x . Em ambos os gráficos consideramos os parâmetros físicos $\alpha = 0.8, \gamma = 0.61, \bar{\Lambda} = 0.0075$ 101

- 6.3 (a) Comportamento do horizonte cosmológico x_0 , em função de γ considerando os parâmetros físicos $\alpha = 0.8, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.0, \bar{\Lambda} = 0.0075$ e $q = 1.0$. (b) A linha tracejada representa o comportamento do horizonte cosmológico, x_0 , para corda cósmica não-Abeliana em função de $\bar{\Lambda}$. Os parâmetros físicos utilizados foram $\alpha = 0.8, \gamma = 0.61, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$. A linha sólida corresponde ao comportamento do horizonte cosmológico, x_0^v , na condição de vácuo. 102
- 6.4 Corda cósmica Não-Abeliana: (a) Comportamento dos campos de Higgs e de gauge em função de x no espaço-tempo de anti-de Sitter. (b) Comportamento dos campos métricos em função de x no espaço-tempo de anti-de Sitter. Em ambos os gráficos, consideramos os parâmetros físicos $\alpha = 0.8, \gamma = 0.6, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.0, \bar{\Lambda} = -0.03$ e $q = 1.0$ 103
- 6.5 Corda cósmica Abeliana: (a) Comportamento dos campos de Higgs e de gauge em função de x no espaço-tempo de anti-de Sitter. (b) Comportamento dos campos métricos em função de x no espaço-tempo de anti-de Sitter. Em ambos os gráficos, consideramos os parâmetros físicos $\alpha = 0.8, \gamma = 0.6$ e $\bar{\Lambda} = -0.03$. 104
- 6.6 Comportamento dos campos métricos em função de x para diferentes valores da constante cosmológica. As linhas sólidas correspondem a $\bar{\Lambda} = -0.010$ e as linhas tracejadas correspondem a $\bar{\Lambda} = -0.007$. Em ambos os gráficos, consideramos $\alpha = 0.8, \gamma = 0.6, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$ 105

CAPÍTULO 1

Introdução

Nosso entendimento do Universo está baseado no modelo cosmológico padrão conhecido como Λ -CDM¹. A principal característica deste modelo é que o Universo está se expandindo e esfriando. Durante os instantes primordiais de sua evolução, o Universo sofreu uma série de transições de fase caracterizada por quebras espontâneas de simetria [1]. Estas transições de fase desempenharam um papel importante no contexto cosmológico, ou seja, estas transições de fase forneceram um mecanismo para a formação de defeitos topológicos que podem ser descritos por teoria clássica de campos [2]. As configurações de vácuo da teoria de campo que descrevem estes defeitos topológicos apresentam soluções elegantes e topologicamente estáveis com implicações físicas relevantes. Estas soluções são conhecidas como paredes de domínio, monopolos e cordas cósmicas entre outras [3]. Entre as soluções, as cordas cósmicas, além de serem defeitos topológicos, tem atraído a atenção dos físicos e são estudadas por serem candidatas a explicarem as anisotropias da radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB) ou associadas à emissão de ondas gravitacionais [4–6].

Na década de 1970, as soluções das teorias de campo tipo vórtices foram obtidas por Nielsen e Olesen através de uma teoria clássica de campos e relativística considerando um sistema composto por campos de gauge Abelianos e não-Abelianos acoplados a campos de Higgs [7]. Neste sistema foi considerado um potencial de auto-interação associado ao campo de Higgs que apresenta solução de vácuo não trivial responsável pela quebra espontânea de simetria. Infelizmente, o sistema de equações de campo que descrevem estes objetos topológicos são não-

¹O modelo Λ -CDM, é um modelo que descreve o Universo em concordância com a Teoria do Big Bang, que explica as observações realizadas sobre a radiação cósmica de fundo em microondas, a estrutura em larga escala e a expansão acelerada do Universo. A sigla Λ -CDM significa Λ -Cold Dark Matter (Matéria Escura Fria), onde Λ é a constante cosmológica.

lineares e, em geral, não possuem solução analítica. Na década de 1980, o modelo Abelian foi adotado para se estudar a influência desses defeitos lineares na geometria do espaço-tempo pelo acoplamento do tensor momento-energia associado ao vórtice de Nielsen e Olensen com as equações de campo de Einstein [8, 9], e recentemente o modelo Higgs Abelian também foi investigado no contexto da gravitação de Einstein em [10, 11].

Nosso objetivo nesta tese é estudar a influência das cordas cósmicas não-Abelianas na geometria do espaço-tempo. Para isto, escreveremos as equação de campo do modelo de Higgs não-Abelian acoplado às equações de campo de Einstein. Analisaremos numericamente este sistema de equações e compararemos os resultados com o caso da corda cósmica Abelian. Também ampliamos essa análise, estendendo esse modelo para espaço-tempo na presença da constante cosmológica. Ou seja, estudaremos a influência das cordas cósmicas não-Abelianas no espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter.

Esta tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, fazemos uma revisão da Teoria da Relatividade Geral, abordando os pontos mais importantes desta Teoria que serão utilizados nesta tese. Partimos do Princípio da Equivalência e construímos os objetos geométricos necessários para a definição de curvatura do espaço-tempo. Também construímos o tensor momento-energia do campo gravitacional e de um campo escalar. Finalmente escrevemos a equação de campo de Einstein.

No capítulo 3, fazemos um breve revisão de defeitos topológicos. Abordamos a quebra espontânea de simetria global e local e discutimos os vórtices Abelianos e não-Abelianos.

No capítulo 4, abordamos as cordas cósmicas. Apresentamos o Modelo Cósmológico Padrão e descrevemos a métrica da corda cósmica, bem como seu efeito na geometria do espaço-tempo através da definição do déficit de ângulo planar. Também apresentamos alguns efeitos cosmológicos provocados pelas cordas cósmicas.

Nos capítulos 5 e 6 apresentamos as nossas principais contribuições no estudo das cordas cósmicas. No capítulo 5, estudamos a influência das cordas cósmicas não-Abelianas na geo-

metria do espaço-tempo. Obtemos o sistema de equações diferenciais não-lineares e acopladas, cujas soluções descrevem o comportamento dos campos das cordas cósmicas não-Abelianas. Uma vez que este sistema de equações diferenciais não possui solução analítica, desenvolvemos a análise numérica através da aplicação do COLSYS, um software para resolução de problemas de valores de contorno para EDOs. Também aplicamos o método computacional ao caso das cordas cósmicas Abelianas e comparamos a influência das cordas cósmicas Abelianas e não-Abelianas na geometria do espaço-tempo.

No capítulo 6, estendemos nosso estudo ao espaço-tempo de de Sitter e de anti-de Sitter. Obtemos o sistema de equações para cordas cósmicas não-Abelianas para o espaço-tempo de de Sitter e obtemos numericamente o comportamento dos campos para esta geometria. Comparamos os nossos resultados com o caso das cordas cósmicas Abelianas e determinamos o horizonte cosmológico. Também realizamos a análise da corda cósmica não-Abeliana no espaço-tempo de anti-de Sitter e comparamos os resultados com o caso Abeliano.

No capítulo 7, apresentamos nossas conclusões e em seguida os apêndices. No apêndice A, fazemos uma breve descrição do software COLSYS e seu funcionamento. No apêndice B apresentamos os códigos mais importantes no desenvolvimento das análises numéricas realizadas.

Apresentamos abaixo os artigos publicados e submetidos à publicação durante o desenvolvimento desta tese. São eles:

- S. Bellucci, E. R. Bezerra de Mello, A. de Padua, A. A. Saharian, Fermionic vacuum polarization in compactified cosmic string spacetime, *Eur. Phys. J. C* (2014) 74:2688;
- Antônio de Pádua Santos and Eugênio R Bezerra de Mello, Gravitating non-Abelian cosmic string, *Class. Quatum Grav.* **32**, 155001 (2015);
- Antônio de Pádua Santos and Eugênio R. Bezerra de Mello, Non-Abelian Cosmic Strings in the de Sitter and anti-de Sitter Space, submetido ao *Class. and Quantum Grav.*

Ao longo deste tese, usaremos o sistema de coordenadas naturais, isto é, a menos que seja

explicitado no texto, consideraremos $G = c = 1$. Também adotaremos a assinatura $(+, -, -, -)$ para o espaço-tempo.

Teoria da Relatividade Geral

Todas as partículas sofrem a influência da gravidade. Esta característica da gravidade é uma propriedade que faz a gravidade ser considerada uma interação universal¹. Em 1915, Albert Einstein propõe a Teoria da Relatividade Geral, onde a interação gravitacional é descrita como a manifestação da curvatura do espaço-tempo.

A Teoria da Relatividade Geral pode ser obtida a partir do Princípio da Mínima Ação, sendo que a ação será formada por um termo geométrico e um termo de matéria. Assim, para compreendermos a interação gravitacional devemos desenvolver as ferramentas matemáticas e geométricas necessárias que nos permitam representar a interação gravitacional com as partículas. Neste capítulo vamos fazer uma breve descrição de alguns princípios e conceitos desses objetos geométricos a fim de entendermos melhor a interação gravitacional. Maiores detalhes podem ser encontrados em [12–17].

2.1 Princípio da Equivalência

É através do Princípio da Equivalência que descrevemos a Teoria da Relatividade Geral. Ele é a base conceitual que permite entender a interação gravitacional como uma curvatura do espaço-tempo. O Princípio da Equivalência pode ser dividido em duas formas: Princípio da Equivalência Fraco e o Princípio da Equivalência Forte [12–17]:

¹Este fato foi apresentado por Isaac Newton nos Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, onde o livro 3 é dedicado à gravitação.

1. *Princípio da Equivalência Fraco:* As partículas sob influência da interação gravitacional tem a mesma aceleração independente da composição, da forma ou de sua massa. Ou seja, não há nenhuma característica especial nas partículas que as diferencie para a gravidade. Este princípio determina a universalidade da gravitação e estabelece que a massa inercial é igual à massa gravitacional. A consequência desta universalidade é que a interação gravitacional está acoplada a tudo. Além disso, a trajetória das partículas dependem apenas da posição inicial e da velocidade inicial sendo, portanto, descritas por equações diferenciais de segunda ordem.
2. *Princípio da Equivalência Forte:* Este princípio estabelece que podemos determinar um sistema de coordenadas local e inercial, de maneira que para regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, as leis da natureza satisfazem aos princípios da Relatividade Especial. Isto sugere que a deformação no espaço-tempo provocada pela gravitação é uma mudança de métrica.

Em outras palavras, não podemos distinguir entre um campo gravitacional e um referencial acelerado. Assim, deveremos observar os mesmos fenômenos físicos para as duas situações. Por exemplo, o movimento de uma partícula em queda livre num campo gravitacional constante é equivalente ao movimento de uma partícula em um referencial cuja aceleração é a mesma do campo gravitacional.

2.2 Transformação de Coordenadas

Para localizar um ponto no espaço-tempo, usamos um sistema de N coordenadas. A escolha destas coordenadas é arbitrária, de maneira que podemos passar de um sistema de coordenadas para outro. Esta mudança de coordenadas é realizada através de uma transformação de

coodenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ expressa por N equações

$$x'^\mu = x'^\mu(x^1, x^2, \dots, x^N), \quad (\mu = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

onde cada nova coordenada é dada em termos da coordenada antiga. Considerando que a equação (2.1) é formada por funções contínuas e diferenciáveis, podemos determinar a matriz de transformação como

$$\left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^N} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x'^2}{\partial x^N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x'^N}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^N}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x'^N}{\partial x^N} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

tal que chamamos de Jacobiano o determinante da matriz de transformação,

$$J = \det \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right]. \quad (2.3)$$

Se $J \neq 0$, podemos determinar a transformação inversa $\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right]$ de maneira que

$$\sum \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} = \delta_\rho^\mu, \quad (2.4)$$

onde δ_ρ^μ é o delta de Kronecker.

Se fizermos uma transformação de um sistema de coordenadas S para um sistema de coordenadas S' , define-se vetores contravariantes os vetores que se transformam segundo a expressão

$$\mathbf{V}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \mathbf{V}^\lambda, \quad (2.5)$$

enquanto que define-se vetores covariantes os vetores que se transformam obedecendo a expressão

$$\mathbf{V}'_{\mu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \mathbf{V}_{\lambda}. \quad (2.6)$$

Podemos usar a transformação de coordenadas para definir os tensores contravariante e covariante de 2ª ordem respectivamente como

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} A^{\sigma\rho} \quad (2.7)$$

e

$$B'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} B_{\sigma\rho}. \quad (2.8)$$

Para um tensor misto, a transformação obedece a

$$C'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} C^{\rho}_{\sigma}. \quad (2.9)$$

É interessante notar que a lei de transformação é homogênea. Assim, se todas as componentes de um tensor são nulas em um sistema de coordenadas, as componentes deste tensor também serão nulas em outro sistema de coordenadas. Ou seja, propriedades intrínsecas dos espaços não devem depender do sistema de coordenadas utilizado para descrevê-las. Por exemplo, se um espaço não apresenta curvatura, esta propriedade não deve depender do sistema de coordenadas utilizado. Esta característica permite que o formalismo dos tensores seja o formalismo matemático adequado ao estudo da Teoria da Relatividade, uma vez que as leis da Física devem ser as mesmas em qualquer sistema de coordenadas.

Outra característica importante dos tensores é que podemos contrair seus índices. Considere um tensor misto de índices contravariantes $r_1, r_2, \dots, r_n$ e covariantes $s_1, s_2, \dots, s_m$, que representaremos por $\binom{n}{m}^2$. Dizemos que este tensor tem ordem $n + m$. Suponha agora que

²De fato, esse processo se faz igualando um índice contravariante com outro índice covariante e somamos nesses índices.

diminuamos em 1 a quantidade de índices superior e inferior passando a ter um novo tensor de índices $\binom{n-1}{m-1}$. Este novo tensor terá ordem $(n-1) + (m-1) = n+m-2$. Ou seja, o novo tensor terá ordem reduzida por 2. Para vermos isso, considere a lei de transformação para um tensor de índices $\binom{2}{1}$, $T^{\alpha\beta}_{\alpha}$,

$$T'^{\alpha\beta}_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} T^{\kappa\lambda}_{\mu}. \quad (2.10)$$

Mas, temos que

$$\delta^{\kappa}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\alpha}}. \quad (2.11)$$

então,

$$T'^{\alpha\beta}_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} T^{\mu\lambda}_{\mu}, \quad (2.12)$$

que corresponde a lei de transformação para um vetor contravariante.

Uma outra característica importante dos tensores refere-se as suas simetrias. Dizemos, por exemplo, que um tensor de ordem 2 covariante é simétrico se $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$, que tem $\frac{1}{2}N(N+1)$ componentes independentes. Usando a notação $T_{(\alpha\beta)}$ tal que para tensores simétricos, temos

$$T_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}), \quad (2.13)$$

e de maneira similar para tensores contravariantes $T^{\alpha\beta}$.

Por outro lado, dizemos que um tensor de ordem 2 covariante é antissimétrico se $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$ que tem $\frac{1}{2}N(N-1)$ componentes independentes. A notação usada para tensores antissimétricos é $T_{[\alpha\beta]}$. Assim, temos,

$$T_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}), \quad (2.14)$$

e de maneira similar para tensores contravariantes $T^{\alpha\beta}$. Além disso, tensores de mesma ordem

e tipo podem ser adicionados ou subtraídos conforme a regra

$$S_{\mu\nu}^{\kappa} = A_{\mu\nu}^{\kappa} + B_{\mu\nu}^{\kappa} \quad \text{e} \quad C_{\mu\nu}^{\kappa} = A_{\mu\nu}^{\kappa} - B_{\mu\nu}^{\kappa}. \quad (2.15)$$

2.3 Métrica e Conexão

Embora tenhamos estudado algumas características dos vetores, ainda não falamos sobre o comprimento ou norma de um vetor. Podemos definir geometricamente um vetor a partir de dois pontos. Ou seja, podemos falar em comprimento ou norma de um vetor a partir da distância entre dois pontos. Vamos definir o produto interno entre dois vetores como uma aplicação bilinear e simétrica que atua em dois vetores, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de dimensão N , resultando em um escalar. Denotaremos essa aplicação por $g(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$, tal que [15, 17]

$$g(\mathbf{U}, \mathbf{V}) : (\mathbf{U}, \mathbf{V}) \longmapsto \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Escrevendo $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ como combinação linear de suas respectivas bases, e_{μ} , temos que

$$\begin{aligned} g(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= g(U^{\mu} e_{\mu}, V^{\nu} e_{\nu}) \\ \Rightarrow g(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= g_{\mu\nu} U^{\mu} V^{\nu}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde fizemos

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu} \cdot e_{\nu}. \quad (2.18)$$

Chamamos $g_{\mu\nu}$ de tensor métrico covariante representado por uma matriz quadrada com determinante $g = \det(g_{\mu\nu})$,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & \dots & e_1 \cdot e_N \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & \dots & e_2 \cdot e_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_N \cdot e_1 & e_N \cdot e_2 & \dots & e_N \cdot e_N \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

Como o produto interno (2.18) é comutativo, temos que $g_{\mu\nu}$ é simétrico, ou seja, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, com $\frac{N(N+1)}{2}$ componentes independentes. Considerando que a matriz $g_{\mu\nu}$ acima é não singular ($g \neq 0$), o tensor simétrico contravariante $g^{\mu\nu}$ é definido como sendo a matriz inversa e simétrica de $g_{\mu\nu}$, tal que

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.20)$$

Por simplicidade, frequentemente o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ quando escrito em termos de um sistema de coordenadas é chamado de métrica. Isto se deve ao fato de que $g_{\mu\nu}$ descreve a métrica do espaço a qual está relacionada ao sistema de coordenadas. Na Teoria da Relatividade Geral, o tensor métrico é o elemento fundamental do qual podemos obter todas as informações geométricas do espaço-tempo.

Podemos usar o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para determinar a distância entre dois pontos. Seja a distância infinitesimal ds entre dois pontos em λ_0 e $\lambda_0 + d\lambda$ em uma curva parametrizada $x^\mu(\lambda)$, onde λ é um parâmetro real. Considere também um vetor tangente à curva, $\mathbf{V}$. Definimos o comprimento ou norma de $\mathbf{V}$ por [17]:

$$|\mathbf{V}| = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})^{1/2} = [g(\mathbf{V}, \mathbf{V})]^{1/2}. \quad (2.21)$$

Usando a equação (2.17), temos que

$$|\mathbf{V}| = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})^{1/2} = (g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu)^{1/2}. \quad (2.22)$$

Como o vetor $\mathbf{V}$ é tangente à curva $x^\mu(\lambda)$, podemos dizer que $|\mathbf{V}| = \frac{ds}{d\lambda}$ e $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Substituindo em (2.22), temos que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.23)$$

onde a distância infinitesimal entre dois pontos ds é denominada de elemento de linha associado a $g_{\mu\nu}$.

Podemos usar o tensor métrico para realizar uma aplicação linear que levem as componentes de tensores covariantes em contravariantes de mesma ordem (ou vice-versa). Por exemplo, para o caso de um vetor $\mathbf{V}$ (tensor de 1ª ordem) de componentes contravariantes, obtemos as componentes covariantes através

$$V_\mu = g(\mathbf{V}, e_\mu) = g(V^\nu e_\nu, e_\mu) = V^\nu g(e_\nu, e_\mu) = g_{\mu\nu} V^\nu. \quad (2.24)$$

e de maneira semelhante para um vetor $\mathbf{V}$ de componentes covariantes, obtemos as componentes contravariantes usando a expressão

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu. \quad (2.25)$$

Em geral, a derivada ordinária de um tensor não é covariante quando realizamos uma transformação de coordenadas. Para que isso ocorra é necessário introduzir uma correção que permita derivar covariantemente os tensores. Esta correção é feita através da introdução de uma conexão, Γ . A derivada covariante de um vetor contravariante é dada por

$$D_\mu \mathbf{V} = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu V^\lambda, \quad (2.26)$$

e de maneira semelhante, a derivada covariante de um vetor covariante é

$$D_\mu \mathbf{V} = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu V_\nu, \quad (2.27)$$

onde os símbolos $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ chamados de coeficientes da conexão ou símbolos de Christoffel de segunda espécie [15]. Podemos interpretar os coeficientes da conexão como uma quantidade que conecta o valor de um vetor em um ponto da variedade com o valor deste vetor em outro ponto da variedade, ou seja, a conexão permite realizar operações com vetores que pertencem a espaços tangentes distintos. Além disso, no caso de mudança de coordenadas, os coeficientes da conexão não se transformam como um tensor, mas deve se transformar de acordo com a expressão

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}. \quad (2.28)$$

Como a derivada covariante de um vetor é um tensor, a subtração de derivadas covariantes de dois vetores também é um tensor, ou seja, $D_\mu \mathbf{V} - D_\nu \mathbf{V}$ também é um tensor. Substituindo a expressão da derivada covariante para vetores covariantes, (2.27), temos

$$D_\mu \mathbf{V} - D_\nu \mathbf{V} = (\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho) V_\rho. \quad (2.29)$$

Em coordenadas cartesianas, a derivada covariante é igual a derivada ordinária. Portanto, o lado esquerdo da equação (2.29) é igual a zero. Como a diferença $D_\mu \mathbf{V} - D_\nu \mathbf{V}$ é uma tensor, então esta diferença é zero em qualquer sistema de coordenadas, o que implica em $\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho = 0$. Consequentemente, os coeficientes da conexão são simétricos em relação aos índices inferiores,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho. \quad (2.30)$$

Uma vez que definimos a derivada covariante, podemos estender o conceito de derivada covariante para tensores. A derivada covariante para um tensor covariante de segunda ordem é dada por

$$D_\mu T_{\lambda\nu} = \partial_\mu T_{\lambda\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho T_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho T_{\lambda\rho}, \quad (2.31)$$

enquanto que as derivadas covariantes para tensores contravariante e misto são dadas, respectivamente, por

$$D_\mu T^{\lambda\nu} = \partial_\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda T^{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\mu}^\nu T^{\lambda\rho} \quad (2.32)$$

e

$$D_\mu T_\lambda^\nu = \partial_\mu T_\lambda^\nu + \Gamma_{\rho\mu}^\nu T_\lambda^\rho - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho T_\rho^\nu. \quad (2.33)$$

2.4 Conexão de Levi-Civita

Em uma dada variedade existem uma infinidade de conexões que obedecem a expressão (2.28). Porém, podemos encontrar uma conexão especial em que a métrica é conservada, ou seja, uma conexão tal que os vetores conservam seu módulo e ângulo. Esta conexão especial obedece a uma condição chamada de condição de compatibilidade da métrica. Para obtê-la precisamos determinar a derivada covariante do tensor métrico. Da equação (2.31) para o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, podemos escrever

$$D_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho g_{\mu\rho}. \quad (2.34)$$

Usando a equação (2.18) e aplicando a regra de Leibnitz para derivada parcial de $g_{\mu\nu}$,

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = (\partial_\sigma e_\mu) \cdot e_\nu + e_\mu \cdot (\partial_\sigma e_\nu). \quad (2.35)$$

Mas definindo $\partial_\sigma e_\mu = \Gamma_{\mu\sigma}^\rho e_\rho$ [15] e substituindo em (2.35), obtemos

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho g_{\mu\rho}. \quad (2.36)$$

Substituindo (2.36) em (2.34) obtemos

$$D_\rho g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.37)$$

A equação (2.37) é chamada de condição de compatibilidade da métrica. Neste caso, existe uma conexão em que a métrica é conservada, ou seja, o produto interno entre dois vetores permanece o mesmo durante o transporte paralelo ao longo de qualquer curva. Podemos usar a equação (2.31) na equação (2.37) para o caso do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e considerar a simetria dos coeficientes da conexão, equação (2.30), para encontrar a expressão para os coeficientes desta conexão. Assim, temos que

$$\partial_\kappa g_{\mu\rho} - \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\rho\kappa}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0. \quad (2.38)$$

Realizando duas permutações cíclicas dos índices, obtemos

$$\partial_\mu g_{\rho\kappa} - \Gamma_{\rho\mu}^\sigma g_{\sigma\kappa} - \Gamma_{\kappa\mu}^\sigma g_{\rho\sigma} = 0, \quad (2.39)$$

e

$$\partial_\rho g_{\kappa\mu} - \Gamma_{\kappa\rho}^\sigma g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\kappa\sigma} = 0. \quad (2.40)$$

Adicionando a equação (2.38) com a equação (2.39) e subtraindo a equação (2.40), chegamos

a

$$\partial_\kappa g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\rho\kappa} - \partial_\rho g_{\kappa\mu} = 2\Gamma_{\mu\kappa}^\sigma g_{\rho\sigma}. \quad (2.41)$$

Multiplicando por $g^{\rho\nu}$, encontramos

$$\Gamma_{\mu\kappa}^\nu = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\kappa g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\rho\kappa} - \partial_\rho g_{\mu\kappa}). \quad (2.42)$$

Como obtemos uma expressão para os coeficientes da conexão em termos do tensor métrico e suas derivadas, equação (2.42), a partir da condição de compatibilidade da métrica, equação (2.37), denominamos esta conexão de conexão métrica ou conexão de Levi-Civita. As suas componentes $\Gamma_{\mu\kappa}^{\nu}$ são chamadas de símbolos de Christoffel [15–17].

Em um sistema de coordenadas cartesianas, os coeficientes da conexão $\Gamma_{\rho\nu}^{\mu}$ são nulos e a equação da geodésica tem como solução linhas retas. Por outro lado, como uma geodésica é a menor distância entre dois pontos em um espaço curvo, podemos usar o princípio variacional para mostrar que as curvas geodésicas são um extremo de um comprimento de arco definido pelo elemento de linha ds entre os pontos P e Q , (ver figura (2.1)), onde podemos parametrizar a curva por $x^{\mu}(\lambda)$, onde λ é um parâmetro real. No entanto, como o elemento de linha é descrito pela equação $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ é mais conveniente calcular $\delta \int ds^2 = 0$, [12]. Uma vez que $\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$, podemos escrever,

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}) d\lambda = 0. \quad (2.43)$$

Definimos a lagrangiana como $L(x^{\mu}, \dot{x}^{\mu}) = g_{\kappa\lambda} \dot{x}^{\kappa} \dot{x}^{\lambda}$ e usamos a equação de Euler-Lagrange

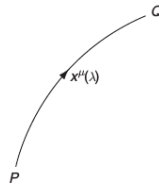


Figura 2.1 Curva parametrizada entre os pontos P e Q .

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0 \quad (2.44)$$

para determinar a equação da geodésica. Temos que

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = g_{\kappa\lambda, \mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 2g_{\mu\kappa} \dot{x}^\kappa. \quad (2.45)$$

Substituindo na equação de Euler-Lagrange (2.44), obtemos

$$g_{\kappa\lambda, \mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda - 2g_{\mu\kappa, \lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda - 2g_{\mu\kappa} \ddot{x}^\kappa = 0. \quad (2.46)$$

Multiplicando por $g^{\mu\rho}$,

$$\ddot{x}^\rho + g^{\mu\rho} g_{\mu\kappa, \lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda - \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g_{\kappa\lambda, \mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0. \quad (2.47)$$

Uma vez que $\dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda$ é simétrico em relação a $\kappa \leftrightarrow \lambda$, temos $g_{\mu\kappa, \lambda} = \frac{1}{2}(g_{\mu\kappa, \lambda} + g_{\mu\lambda, \kappa})$. Substituindo na equação (2.47), obtemos a equação da geodésica,

$$\ddot{x}^\rho + \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (g_{\mu\kappa, \lambda} + g_{\mu\lambda, \kappa} - g_{\kappa\lambda, \mu}) \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0, \quad (2.48)$$

ou simplesmente,

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0 \quad (2.49)$$

onde

$$\Gamma_{\kappa\lambda}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (g_{\mu\kappa, \lambda} + g_{\mu\lambda, \kappa} - g_{\kappa\lambda, \mu}). \quad (2.50)$$

Ao usarmos o princípio variacional, obtemos uma expressão para $\Gamma_{\kappa\lambda}^\rho$ que é a mesma ex-

pressão para conexão de Levi-Civita, dada na equação (2.42). Dizemos então que a Teoria da Relatividade Geral utiliza uma conexão em que a métrica é conservada. As partículas sob a influência da interação gravitacional percorrem trajetórias descritas pela equação da geodésica que é a menor distância entre dois pontos em um espaço curvo.

2.5 Curvatura

Como a derivada covariante de um vetor é um tensor, podemos definir o comutador formado pela derivada covariante D_κ que atua sobre a derivada covariante de um vetor $D_\nu V^\lambda$, ou seja, $D_\kappa(D_\nu V^\lambda)$. Assim,

$$D_\kappa D_\nu V^\lambda = \partial_\kappa(\partial_\nu V^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\mu) + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda(\partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V^\mu) - \Gamma_{\nu\kappa}^\nu(\partial_\sigma V^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V^\mu) \quad (2.51)$$

e de forma semelhante,

$$D_\nu D_\kappa V^\lambda = \partial_\nu(\partial_\kappa V^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V^\mu) + \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda(\partial_\kappa V^\sigma + \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma V^\mu) - \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma(\partial_\sigma V^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V^\mu). \quad (2.52)$$

Subtraindo a equação (2.52) da equação (2.51), definimos o comutador como,

$$[D_\mu, D_\nu]V^\lambda = D_\mu D_\nu V^\lambda - D_\nu D_\mu V^\lambda, \quad (2.53)$$

tal que substituindo (2.51) e (2.52) em (2.53), temos,

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]V^\lambda &= \partial_\mu(\partial_\nu V^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\mu) + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda(\partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V^\mu) - \Gamma_{\nu\mu}^\nu(\partial_\sigma V^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V^\mu) \\ &\quad - \partial_\nu(\partial_\mu V^\lambda + \Gamma_{\mu\mu}^\lambda V^\mu) - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda(\partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\mu}^\sigma V^\mu) + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(\partial_\sigma V^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V^\mu) \\ &\quad + \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma(\partial_\sigma V^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V^\mu). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Considerando que derivadas de primeira ordem comutam, que da equação (2.30), $\Gamma_{\nu\kappa}^\sigma = \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma$, e que

$$\partial_\kappa(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\mu) = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\kappa}, \quad (2.55)$$

$$\partial_\nu(\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V^\mu) = \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\nu}, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\kappa} = -\Gamma_{\mu\kappa}^\sigma V^\mu, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\nu} = -\Gamma_{\mu\nu}^\sigma V^\mu, \quad (2.58)$$

chegamos a

$$[D_\kappa, D_\nu]V^\lambda = \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma \right) V^\mu, \quad (2.59)$$

tal que podemos escrever

$$[D_\kappa, D_\nu]V^\lambda = R_{\mu\nu\kappa}^\lambda V^\mu, \quad (2.60)$$

sendo o tensor de curvatura ou tensor de Riemann $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$ definido por

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma. \quad (2.61)$$

Podemos interpretar geometricamente o comutador formado pela derivada covariante como sendo a diferença α (ver figura (2.2)) entre o vetor final e o vetor inicial quando realizamos o transporte paralelo por dois percursos diferentes, isto é, no sentido ANBA ou ABNA conforme a figura (2.2). Se esta diferença α for zero, então o tensor de curvatura $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = 0$. Se o espaço não apresenta curvatura, o transporte paralelo de um vetor não depende da trajetória de maneira que dizemos que o espaço é plano. O tensor de curvatura possui as seguintes propriedades de simetria:

$$1. R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} \equiv 0$$

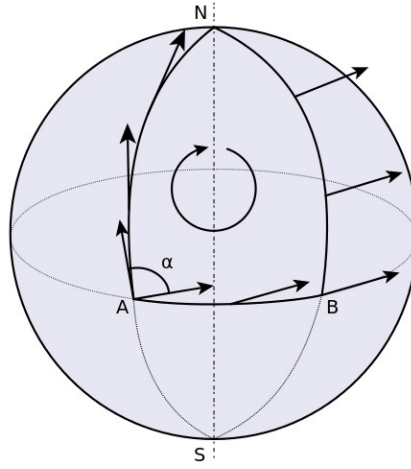


Figura 2.2 Transporte paralelo de um vetor por uma curva fechada.

2. $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu}$
3. $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\kappa\nu}$.
4. $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$
5. $D_\rho R_{\lambda\mu\nu\kappa} + D_\kappa R_{\lambda\mu\rho\nu} + D_\nu R_{\lambda\mu\kappa\rho} = 0$. (Identidade de Bianchi)

A partir do tensor de curvatura, definimos um tensor simétrico chamado tensor de Ricci através da contração com o tensor métrico,

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\kappa} R_{\kappa\mu\lambda\nu}, \quad (2.62)$$

sendo o tensor de Ricci simétrico, ou seja, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Realizando a contração do tensor de Ricci com o tensor métrico, definimos o escalar de curvatura ou escalar de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.63)$$

onde o escalar de curvatura associa um escalar a cada ponto do espaço.

A partir da identidade de Bianchi, das definições de tensor de Ricci, do escalar de Ricci e usando as propriedades de simetria do tensor de curvatura descritas acima, temos que

$$D_\rho R_{\lambda\mu\nu\kappa} - D_\kappa R_{\lambda\mu\nu\rho} + D_\nu R_{\lambda\mu\kappa\rho} = 0. \quad (2.64)$$

Multiplicando essa equação por $g^{\lambda\nu}$, obtemos

$$D_\rho R_{\mu\kappa} - D_\kappa R_{\mu\rho} + D_\nu R_{\mu\kappa\rho}^\nu = 0. \quad (2.65)$$

Mas, das propriedades de simetria de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, temos que $D_\nu R_{\mu\kappa\rho}^\nu = -D_\nu R_{\mu\rho\kappa}^\nu$, então,

$$D_\rho R_{\mu\kappa} - D_\kappa R_{\mu\rho} - D_\nu R_{\mu\rho\kappa}^\nu = 0. \quad (2.66)$$

Após algumas manipulações algébricas, multiplicando por $g^{\rho\kappa}$ e fazendo $\kappa \rightarrow \mu$ e multiplicando por $(-\frac{1}{2})$, temos

$$D_\nu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) = 0. \quad (2.67)$$

Onde definimos o tensor de Einstein como,

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R, \quad (2.68)$$

ou na sua forma covariante

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.69)$$

Como o tensor métrico e de Ricci são simétricos, o tensor de Einstein também é simétrico, ou seja, $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$. Da equação (2.67), podemos notar que a derivada covariante do tensor de Einstein é nula, $D_\nu G^{\mu\nu} = 0$.

2.6 Tensor Momento-Energia

Nesta seção vamos apresentar o tensor momento-energia associado a um campo escalar, como também mostrar como se obtém o tensor de Einstein, a partir da variação da ação de Einstein-Hilbert com respeito à variação do tensor métrico.

2.6.1 Campo Gravitacional

Vamos mostrar como, através da ação do campo gravitacional, conhecida como ação de Einstein-Hilbert, S_{EH} , podemos chegar ao tensor de Einstein definido na equação (2.69). A ação de Einstein-Hilbert é descrita em termos de uma densidade lagragena que é um escalar e que depende apenas do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$ e de suas derivadas. O escalar mais simples construído a partir do tensor métrico e suas derivadas é o escalar de Ricci, R , tal que

$$S_{EH} = \frac{1}{\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.70)$$

onde $\sqrt{-g} d^4x$ é o elemento invariante de hipervolume. A constante κ é dada por

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.71)$$

sendo G a constante gravitacional de Newton e c é a velocidade da luz. O fator $\frac{1}{2\kappa}$ é escolhido de maneira conveniente para que possamos obter o acoplamento do campo gravitacional com a sua fonte. Escrevendo $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ em (2.70), obtemos

$$S_{EH} = \frac{1}{\kappa} \int (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.72)$$

A variação de $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ corresponderá na variação da ação S_{EH} , onde a variação de $g_{\mu\nu}$ se anula no contorno, ver figura (2.3). Assim, calculando a variação de S_{EH} em relação a

variação de $g^{\mu\nu}$, temos que

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{\kappa} \int (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g})) d^4x. \quad (2.73)$$

Ou seja, podemos separar em três termos:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} = & \underbrace{\frac{1}{\kappa} \int (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x}_{\delta I_1} + \underbrace{\frac{1}{\kappa} \int g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x}_{\delta I_2} \\ & + \underbrace{\frac{1}{\kappa} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} (\delta \sqrt{-g}) d^4x}_{\delta I_3} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Observe que δI_1 já está em termos de $\delta g^{\mu\nu}$. Portanto, precisamos calcular a variação de $R_{\mu\nu}$ e a variação de $\sqrt{-g}$ na equação (2.74) que corresponde a δI_2 e δI_3 .

Para calcularmos a variação de $R_{\mu\nu}$ em δI_2 considere a expressão para o tensor de curvatura:

$$R^\sigma_{\mu\nu\rho} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\tau_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\tau\rho}. \quad (2.75)$$

A variação do tensor de curvatura equivale a fazer a variação nos coeficientes da conexão, $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu}$, tal que, embora os coeficientes da conexão não seja um tensor, a diferença $\delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ se transforma como um tensor. Portanto podemos escolher um sistemas de coordenadas locais de maneira que em um ponto P qualquer tenhamos $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}(P) = 0$. Neste ponto P , a variação do tensor de curvatura torna-se [15]

$$\delta R^\sigma_{\mu\nu\rho} = \partial_\nu (\delta \Gamma^\sigma_{\mu\rho}) - \partial_\rho (\delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu}). \quad (2.76)$$

Como no ponto P , a derivada covariante é igual a derivada ordinária, ou seja, temos

$$\delta R^\sigma_{\mu\nu\rho} = D_\nu (\delta \Gamma^\sigma_{\mu\rho}) - D_\rho (\delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu}), \quad (2.77)$$

e como a equação (2.77) é um tensor, esta expressão é válida em qualquer sistema de coordenadas. Contraindo σ com ρ e fazendo $\sigma \rightarrow \nu$, obtemos a variação do tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) - D_\sigma(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma). \quad (2.78)$$

Substituindo em δI_2 e usando o fato que a derivada covariante do tensor métrico é nula, temos

$$\delta I_2 = \frac{1}{\kappa} \int [D_\nu(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\nu)] \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.79)$$

Calculando δI_2 como uma integral de superfície no contorno $\partial\Omega$ e considerando que a variação da métrica se anula nesse contorno (ver figura (2.3)), finalmente usando o teorema da divergência, encontramos

$$\delta I_2 = 0. \quad (2.80)$$

Para calcularmos δI_3 , precisamos calcular $\delta(\sqrt{-g})$ em relação à variação de $g^{\mu\nu}$. Para isso

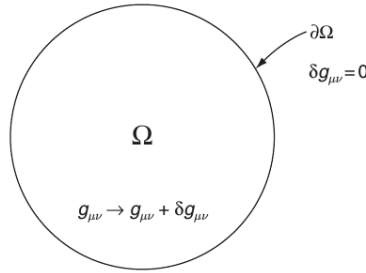


Figura 2.3 Espaço-tempo Ω com contorno $\partial\Omega$. A variação do tensor métrico no contorno é nula.

considere $g = \det(g_{\mu\nu})$, tal que podemos escrever [15, 17]

$$g = \sum_{\mu} g_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu}, \quad (2.81)$$

onde $\tilde{g}^{\mu\nu}$ é o cofator de $g_{\mu\nu}$. Derivando g em relação ao tensor métrico, encontramos

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \tilde{g}^{\mu\nu}. \quad (2.82)$$

Usando a notação de Einstein e multiplicando ambos lados da equação (2.81) por $g^{\mu\rho}$, temos que $\tilde{g}^{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}$. Substituindo em $\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}$, encontramos

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}. \quad (2.83)$$

Fazendo $\delta(\sqrt{-g})$ e substituindo o valor de $\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}$,

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu}, \\ \Rightarrow \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Mas $\delta(g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$. Substituindo em (2.84), temos

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.85)$$

Portanto, δI_3 torna-se

$$\begin{aligned} \delta I_3 &= \frac{1}{\kappa} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right) d^4x \\ \delta I_3 &= \frac{1}{\kappa} \int \left(-\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Substituindo δI_1 , δI_2 e δI_3 em δS_{EH} , equação (2.74), obtemos,

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{\kappa} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.87)$$

O termos entre parêntesis da equação (2.87) é o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, obtido geometrica-

mente na seção anterior, equação (2.69).

2.6.2 Campo Escalar

Vamos agora considerar um campo escalar real $\phi(x^\mu)$, definido em todo o espaço-tempo de maneira que a densidade de lagrangeana é dada por [15],

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - V(\phi), \quad (2.88)$$

onde o primeiro termo designa a energia cinética e o termo $V(\phi)$ é o potencial. A ação corresponde a essa densidade lagrangeana é

$$S_M = \int \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - V(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.89)$$

Vamos analisar como a ação S varia sob a variação do tensor métrico $g^{\mu\nu}$,

$$\delta S_M = \int \left\{ \left[\frac{1}{2}(\delta g^{\mu\nu})(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) \right] \sqrt{-g} - \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - V(\phi) \right] (\delta\sqrt{-g}) \right\} d^4x. \quad (2.90)$$

Da referência [15] e substituindo a equação (2.85) na equação (2.90), temos

$$\delta S_M = \int \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\phi)(\partial_\sigma\phi) - V(\phi) \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.91)$$

Reorganizando os termos,

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int \left\{ (\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}(\partial^\sigma\phi)(\partial_\sigma\phi) - V(\phi) \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.92)$$

O tensor momento-energia é definido como [16]:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.93)$$

Assim da equação (2.92), concluimos que

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (\partial^\sigma \phi)(\partial_\sigma \phi) - V(\phi) \right]. \quad (2.94)$$

Observamos que o termo entre os colchetes é a densidade lagrangeana, logo podemos escrever o tensor momento-energia de um campo escalar real como

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M. \quad (2.95)$$

Como o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é simétrico e as derivadas parciais comutam, temos que o tensor momento-energia é simétrico, ou seja, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

Pode-se também mostrar [16], que a derivada covariante do tensor momento-energia é nula, isto é, $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

2.7 Equações de Campo de Einstein

Nosso objetivo é construir uma ação S a partir da qual possamos derivar as equações de campo de Einstein. Vamos considerar que esta ação, S , tenha um termo que corresponde ao campo gravitacional dada pela ação de Einstein-Hilbert, S_{EH} , e outro termo responsável pela fonte do campo gravitacional, S_M . Especificamente vamos considerar apenas campos escalares reais.

Considere que um sistema físico formado por campos não-gravitacionais. Como vimos na seção anterior, a esses campos estão associados o tensor de momento-energia, $T_{\mu\nu}$. Podemos

usar o princípio variacional para obter as equações de campo que descrevem o comportamento desse sistema físico.

Podemos dividir a ação para este sistema em duas parcelas. Uma em relação ao campo gravitacional descrito pela ação de Einstein-Hilbert, S_{EH} , e outra parcela que descreve os campos não-gravitacionais, ou seja, o termo de fonte ou matéria, S_M . Assim, temos que a ação total é dada por

$$S = \frac{1}{\kappa} S_{EH} + S_M, \quad (2.96)$$

onde κ é dada na expressão (2.71). Considerando a variação da ação S em relação a $g^{\mu\nu}$, obtemos

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\kappa} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (2.97)$$

Da equação (2.87), definimos [15]

$$G_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.98)$$

e da equação (2.93)

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.99)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein definido na equação (2.69) e $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia associado a campos escalares reais definido na equação (2.95). Substituindo as equações (2.98) e (5.61) na equação (2.8.1), obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.100)$$

O lado esquerdo da equação de campo de Einstein, eq. (2.100), descreve a configuração geométrica do espaço-tempo devido a presença da fonte definida pelo tensor momento-energia, $T_{\mu\nu}$, no lado direito dessa equação.

Uma outra forma de escrever a equação de campo de Einstein é isolando o tensor de Ricci.

Para isto, multiplicamos a equação (2.100) por $g^{\mu\nu}$ e obtemos $R = \kappa T$. Substituímos em (2.100) e chegamos a

$$R_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (2.101)$$

Esta será a forma da equação de campo de Einstein que usaremos nesta tese.

2.8 Espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter

Devido a sua importância nos modelos cosmológicos, podemos inserir a constante cosmológica Λ nas equações de campo de Einstein. Assim, a equação de campo de Einstein torna-se [15],

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.102)$$

Considerando valores positivos para constante cosmológica, denominamos este espaço-tempo de espaço-tempo de de Sitter. Caso a constante cosmológica assuma valores negativos, o espaço-tempo correspondente será denominado de espaço-tempo de anti-de Sitter.

2.8.1 Espaço-tempo de de Sitter (dS)

O espaço-tempo de de Sitter (dS) é uma das soluções maximalmente simétricas das equações de campos de Einstein na presença de uma constante cosmológica positiva, $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$. Neste contexto, o Universo pode ser descrito por um espaço-tempo de de Sitter [18, 19], o qual representa um espaço cuja a seção espacial está se expandindo. Podemos também descrever o espaço-tempo de dS como hiperboloide dado pela equação abaixo [20–22]

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\alpha^2, \quad (2.103)$$

imerso em um espaço-tempo de Minkowski de 5 dimensões, representado pela métrica [22]

$$ds^2 = -dz_0^2 + dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2. \quad (2.104)$$

O parâmetro α está associado à curvatura da variedade. A constante cosmológica para espaço-tempo de dS é $\Lambda = \frac{3}{\alpha^2}$, enquanto que o escalar de curvatura é uma constante dada por $R = \frac{12}{\alpha^2}$.

Podemos expressar a equação (2.103) adotando as coordenadas [16, 22]

$$z_0 = \alpha \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) + \frac{1}{2\alpha} e^{\frac{t}{2\alpha}} |\mathbf{x}|^2, \quad (2.105)$$

$$z_4 = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) - \frac{1}{2\alpha} e^{\frac{t}{2\alpha}} |\mathbf{x}|^2, \quad (2.106)$$

$$z_i = e^{\frac{t}{2\alpha}} x_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad -\infty < (t, x_i) < \infty. \quad (2.107)$$

Neste contexto, o elemento de linha é, portanto, escrito nessas novas coordenadas por,

$$ds^2 = dt^2 - e^{\frac{2t}{\alpha}} \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2. \quad (2.108)$$

Utilizando um sistema de coordenadas descrito através de um tempo conforme dado por

$$\tau = -\alpha e^{-\frac{t}{\alpha}}, \quad -\infty < \tau < 0, \quad (2.109)$$

obtemos que o elemento de linha (2.108) fica escrito por,

$$ds^2 = \left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^2 \left[d\tau^2 - \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \right], \quad (2.110)$$

de maneira que o espaço-tempo de de Sitter é conformemente relacionado à região espaço-tempo de Minkowski com o fator conforme $\left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^2$.

Para um sistema de coordenadas estático [21],

$$z_0 = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right), \quad (2.111)$$

$$z_1 = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right), \quad (2.112)$$

$$z_2 = r \sin \theta \cos \theta, \quad (2.113)$$

$$z_3 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad (2.114)$$

$$z_4 = r \cos \theta, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (2.115)$$

obtemos o seguinte elemento de linha,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.116)$$

2.8.2 Espaço-tempo de anti-de Sitter (AdS)

O espaço-tempo de anti-de Sitter (AdS), que também é uma das soluções maximamente simétricas das equações de campos de Einstein na presença de uma constante cosmológica negativa, desempenha um importante papel na física teórica como, por exemplo, a realização do princípio holográfico conhecido como Correspondência AdS/CFT [23–25]. Podemos descrever o espaço-tempo de AdS como um hiperboloide em $\mathbb{R}^{(2,3)}$ [16, 21],

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 = \alpha^2, \quad (2.117)$$

onde o parâmetro α é o raio de curvatura. Este hiperboloide é imerso em um espaço-tempo de Minkowski de 5 dimensões, cuja a métrica é dada por

$$ds^2 = -dz_0^2 + dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 - dz_4^2. \quad (2.118)$$

Considerando $\alpha < 0$, a constante cosmológica para espaço-tempo de AdS é $\Lambda = -\frac{3}{\alpha^2}$, enquanto que o escalar de curvatura é dado por $R = -\frac{12}{\alpha^2}$. O espaço-tempo de anti-de Sitter pode ser parametrizado pelas coordenadas globais [16]

$$z_0 = \alpha \cos \tau \cosh \rho, \quad (2.119)$$

$$z_1 = \alpha \sin \tau \cosh \rho, \quad (2.120)$$

$$z_2 = \alpha \sinh \rho \cos \theta, \quad (2.121)$$

$$z_3 = \alpha \sinh \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad (2.122)$$

$$z_4 = \alpha \sinh \rho \sin \theta \sin \varphi \quad (2.123)$$

onde $-\pi \leq \tau \leq \pi$, $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Com esta parametrização, a métrica será dada por

$$ds^2 = \alpha^2 \left[\cosh^2 \rho d\tau^2 - d\rho^2 - \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (2.124)$$

Fazendo uma mudança de variáveis

$$\tau = \frac{t}{\alpha}, \quad (2.125)$$

$$r = \alpha \sinh \rho, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (2.126)$$

obtemos a métrica como

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.127)$$

O sistema de coordenadas globais salienta a característica esférica dos espaços maximamente simétricos. No entanto podemos escolher um sistema de coordenadas que descreva o espaço-tempo de AdS em um espaço plano. Para isto, utilizaremos o sistema de coordenadas de Poin-

caré [26], que cobre a metade do hiperboloide (2.117),

$$z_0 = \frac{1}{2u} \left[\alpha^2 + u^2 - t^2 + \sum_{i=3}^4 (x_i)^2 \right], \quad (2.128)$$

$$z_1 = \frac{\alpha t}{u}, \quad (2.129)$$

$$z_2 = \frac{1}{2u} \left[(\alpha^2 - u^2 + t^2 - \sum_{i=3}^4 (x_i)^2) \right], \quad (2.130)$$

$$z_3 = \frac{\alpha x_3}{u}, \quad (2.131)$$

$$z_4 = \frac{\alpha x_4}{u}, \quad (2.132)$$

onde $x_i, t \in (-\infty, \infty)$ e $u \in (0, \infty)$ e chegamos a expressão para o elemento de linha,

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{u^2} \left[dt^2 + du^2 - \sum_i (dx_i)^2 \right]. \quad (2.133)$$

Observamos que o elemento de linha torna-se conforme relacionado ao espaço-tempo de Minkowski pelo fator conforme $\left(\frac{\alpha}{u}\right)^2$, onde $0 \leq u < \infty$. Os limites $u = 0$ corresponde a fronteira e $u = \infty$ corresponde ao horizonte do espaço-tempo de AdS.

Defeitos Topológicos

As transições de fase são fenômenos que acontecem com certa frequência na natureza. Elas ocorrem quando um sistema físico passa de um estado com maior simetria para outro estado com menor simetria. No contexto da Matéria Condensada, as transições de fase podem produzir defeitos topológicos tais como as linhas de fluxo magnético nos supercondutores do tipo II, linhas de vórtices em ^4He superfluido, dislocações em cristais, domínios em materiais ferromagnéticos, ou até mesmo vários tipos de defeitos nas diversas fases de cristais líquidos [27].

Em Cosmologia, as transições de fase também apresentam um papel importante. No contexto cosmológico, nosso entendimento do Universo está baseado no modelo cosmológico padrão conhecido como Λ -CDM, que descreve o Universo em concordância com a Teoria do Big Bang, que explica as observações realizadas sobre a radiação cósmica de fundo em microondas, a estrutura em larga escala e a expansão acelerada do Universo. De acordo com este modelo, o Universo primordial apresentava uma temperatura muito elevada. Durante sua fase inicial de evolução, o Universo foi expandindo e esfriando muito rapidamente, sofrendo uma série de transições de fase caracterizadas por quebras espontâneas de simetrias [1, 2]. Estas transições de fase desencadeiam um mecanismo de formação de defeitos topológicos descritos por teorias clássicas de campos, cujas configurações de vácuo possuem soluções topologicamente estáveis com relevantes implicações físicas. Tais soluções são conhecidos como paredes de domínio, monopolos, cordas cósmicas, texturas, entre outras [3].

Analisando o mecanismo de formação de defeitos, há uma analogia entre o papel exercido pelos defeitos topológicos tanto na Cosmologia como na Matéria Condensada, dado que estes

defeitos topológicos são resultados da quebra espontânea de simetria nas transições de fase. Esta analogia é tão forte que permite que os métodos e as ideias da gravitação e cosmologia possam ser úteis no estudo de alguns sistemas da matéria condensada e, em contrapartida, a física da matéria condensada pode ser um laboratório de teste de algumas ideias e hipóteses cosmológicas [28].

Por outro lado, no contexto das Teorias de Grande Unificação (TGU) da física de partículas elementares, os defeitos topológicos tem exercido um papel importante como resultado de quebras espontâneas de simetrias de um grupo de simetria maior G . No modelo padrão de partículas elementares, as interações básicas da natureza estavam todas unificadas em uma escala de alta energia da ordem de 10^{16} GeV¹. Durante a expansão, e consequente esfriamento do Universo, ocorreram uma série de quebras espontâneas de simetria que resultaram nas interações fundamentais conhecidas hoje. Podemos representar essas quebras de simetrias pelo diagrama abaixo,

$$G \longrightarrow H \longrightarrow SU_C(3) \times SU_{EF}(2) \times U_Y(1) \longrightarrow SU_C(3) \times U_{EM}(1), \quad (3.1)$$

onde os grupos $U_{EM}(1)$, $SU_{EF}(2)$, $SU_C(3)$, representam as simetrias associadas às respectivas interações fundamentais da natureza.

O eletromagnetismo, responsável pela interação entre partículas eletricamente carregadas, está associado ao grupo $U(1)$. A interação nuclear fraca, que descreve a radioatividade, está associada ao grupo $SU(2)$. Esta descrição foi unificada ao eletromagnetismo por S. Weinberg, A. Salam e S. Glashow formando a teoria Eletrofraca descrita pelo grupo de simetria $SU(2) \times U(1)$, cujas previsões foram confirmadas no início da década de 1980 [29–31]. A interação nuclear forte, responsável pela interação entre os quarks e a formação dos núcleos atômicos, está associada ao grupo $SU(3)$.

A interação gravitacional, como vimos no capítulo 2, é uma teoria geométrica e ainda não

¹1GeV = 10^9 eV.

se encontra unificada as outras interações fundamentais e, portanto, não faz parte das TGU. Na escala nuclear, a interação gravitacional é insignificante, no entanto, em largas escalas, a interação gravitacional é a interação dominante. Por outro lado, acredita-se que em altas energias, da ordem da escala de Planck, cerca de 10^{19} GeV, a interação gravitacional esteja compatível as outras interações fundamentais da natureza [16].

Podemos notar que tão frequente na natureza quanto as transições de fase, os defeitos topológicos estão de certa forma presentes em diversos aspectos da natureza, sendo estudados por diferentes abordagens e delimitações que vão da cosmologia, da gravitação, passando pela matéria condensada e chegando até mesmo à física das partículas elementares. Embora haja uma diversidade de defeitos topológicos, nesta tese dedicaremos nosso estudo aos defeitos lineares conhecidos como cordas cósmicas. Passamos agora a descrever a quebra espontânea de simetria sob a abordagem da Teoria Clássica de Campos.

3.1 Quebra Espontânea de Simetria Global

Em geral, o conceito de simetria está associado às leis de conservação dos sistemas físicos. A simetria, portanto, revela a invariância de um determinado sistema físico em relação às transformações de coordenadas ou em relação a um espaço interno, representado por um determinado grupo de simetria. Em Teoria de Campos, usualmente descrevemos os sistemas físicos por densidade de lagrangiano. Consequentemente, as propriedades de simetria se manifestam nas propriedades de invariância da densidade de lagrangiano do sistema físico em análise. Dessa maneira, compreender a quebra de simetria significa compreender as causas da quebra de invariância da densidade de lagrangiano em relação às transformações a que o sistema físico é submetido.

Um tipo especial de quebra de simetria é a quebra espontânea de simetria que, como vimos na seção anterior, está associada às transições de fase. Além disso, quando o sistema apresenta

estados de vácuo degenerados, isto é, múltiplos estados de vácuo², o sistema evolui de maneira aleatória para qualquer um desses estados de vácuo, caracterizando a quebra espontânea de simetria do sistema.

Para podermos compreender melhor como ocorre a quebra espontânea de simetria, considere a densidade de lagrangiano $\mathcal{L}$ para um campo escalar complexo,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^* - V(\phi), \quad (3.2)$$

em que o potencial $V(\phi)$ é dado por,

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^* \phi - \eta^2)^2, \quad (3.3)$$

onde λ e η são constantes. A densidade de lagrangiano (3.2) é invariante por uma transformação de gauge global, descrita pelo grupo de simetria $U(1)$,

$$\phi'(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \phi(x), \quad (3.4)$$

sendo α é uma constante. Para o caso em que $\lambda > 0$ e $\eta^2 \leq 0$, o sistema apresenta um único

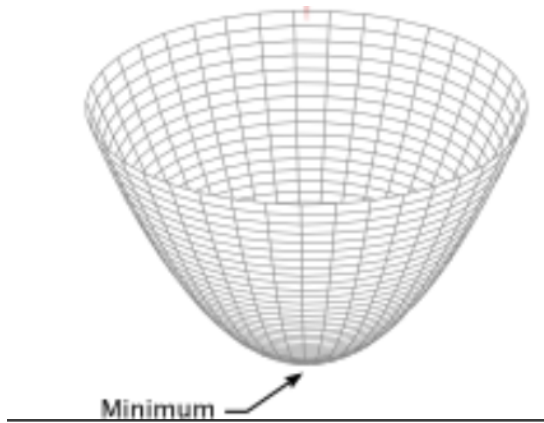


Figura 3.1 Potencial: $\lambda > 0$, $\eta^2 \leq 0$

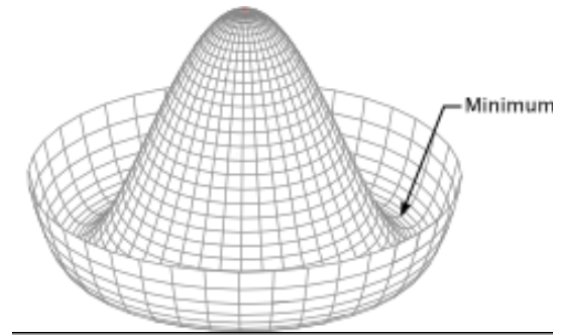


Figura 3.2 Potencial: $\lambda > 0$, $\eta^2 > 0$

²Adotaremos por estados de vácuo, o estado de energia mais baixa do sistema físico.

estado de vácuo, e portanto, não há quebra de simetria, ver figura (3.1). No entanto, para $\lambda > 0$ e $\eta^2 > 0$, os mínimos do potencial (3.3) são encontrados para o círculo no plano complexo, $|\phi| = \eta$, logo estado de vácuo é infinitamente degenerado, ver figura (3.2). Assim, podemos escrever este estado como

$$\langle \phi_0 \rangle = \eta e^{i\theta}, \quad (3.5)$$

onde θ é uma fase arbitrária. Usando a transformação (3.4), o estado de vácuo é levado da fase θ para $(\theta + \alpha)$, de maneira que a simetria é quebrada espontaneamente.

Como o estado de vácuo após a quebra de simetria possui infinitos valores equivalentes, podemos escolher arbitrariamente $\theta = 0$, de maneira que $\langle \phi_0 \rangle = \eta$. Para estudarmos a física em torno da vizinhança deste vácuo, fazemos uma perturbação em torno do valor de vácuo. Desta maneira, podemos escrever o campo perturbado ϕ da seguinte forma,

$$\phi = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (3.6)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são campos escalares reais com valores de vácuo nulos. Substituindo o campo perturbado (3.6) na densidade de lagrangiano (3.2), temos que após desenvolvimento algébrico, chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2}_{\mathcal{L}_{\text{livre}}} \\ & \underbrace{-\frac{1}{4}\lambda\phi_1\phi_2^2 - \frac{1}{8}\lambda\phi_1^2\phi_2^2 - \frac{1}{4}\lambda\sqrt{2}\eta\phi_1^3 - \frac{1}{16}\lambda(\phi_1^4 + \phi_2^4)}_{\mathcal{L}_{\text{interação}}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

O termo $\mathcal{L}_{\text{interação}}$ descreve a autointeração entre os campos e o deixaremos de lado. Podemos reescrever a densidade de lagrangiano como,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2 + \mathcal{L}_{\text{interação}}, \quad (3.8)$$

em que o termo de interação $\mathcal{L}_{\text{interação}}$ inclui os termos de ordem superior de ϕ_1 e ϕ_2 conforme a equação (3.7). Da densidade de lagrangiano (3.8), observamos que o campo ϕ_1 adquire massa, $m_{\phi_1} = \sqrt{\lambda}\eta$. O campo ϕ_2 é um campo sem massa chamado de bóson de Goldstone. Ou seja, após a quebra de simetria, ocorre o surgimento de uma partícula sem massa como consequência da quebra espontânea de simetria global. Este fato é descrito pelo teorema de Goldstone:

Teoremas de Goldstone: Seja um sistema físico sob ação de uma simetria contínua. Para cada gerador desta simetria que não deixa o vácuo invariante, surgirá um bóson escalar sem massa chamado de bóson de Goldstone.

3.2 Quebra Espontânea de Simetria Local

Para descrever a quebra espontânea de simetria local, estabeleceremos que o campo ϕ deve se transformar pelo grupo local $U(1)$,

$$\begin{aligned}\phi(x) &\longrightarrow e^{i\alpha(x)}\phi \\ \phi^*(x) &\longrightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi^*.\end{aligned}\tag{3.9}$$

No entanto, a derivada de $\phi(x)$ não se transforma da mesma maneira que os campos, ou seja:

$$\partial_\mu \phi' \not\longrightarrow e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu \phi + i(\partial_\mu \alpha(x))\phi].\tag{3.10}$$

Assim, precisamos inserir um campo vetorial compensador, A_μ , na derivada para que a derivada do campo se transforme como o campo,

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu,\tag{3.11}$$

sendo que A_μ se transforma por uma transformação de gauge como

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (3.12)$$

A constante e é a constante de acoplamento. A derivada expressa na equação (3.11) é chamada de derivada covariante e representa o acoplamento mínimo entre o campo de matéria e o campo de gauge, A_μ . Vemos agora que

$$D_\mu \phi \longrightarrow D'_\mu \phi' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi, \quad (3.13)$$

onde

$$D'_\mu = \partial_\mu + ieA'_\mu. \quad (3.14)$$

Assim, a densidade de lagrangiano passa a ser escrita por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^*] - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - \eta^2)^2, \quad (3.15)$$

onde o primeiro termo representa a densidade de lagrangiano do campo compensador, sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, o qual é invariante de gauge. O estado de vácuo é obtido para

$$\langle |\phi_0|^2 \rangle = \eta^2, \quad (3.16)$$

de maneira que podemos escrever o estado de vácuo como

$$\phi_0 = \eta e^{i\beta}. \quad (3.17)$$

Como β é arbitrário, podemos escolher um $\beta = 0$ tal que ϕ_0 seja real. Analisando o sistema na vizinhança desse estado de vácuo, podemos expandir ϕ na vizinhança desse estado de vácuo:

$$\phi = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (3.18)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são campos reais. Substituindo ϕ na densidade de lagrangiano (3.15), obtemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1) - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2 + e^2\eta^2A_\mu A^\mu + \mathcal{L}_{\text{interação}}, \quad (3.19)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{interação}}$ contém os termos de ordem maior ou igual a três nos campos. Observando a densidade de lagrangiano (3.19), vemos que o campo ϕ_1 possui massa, $m_{\phi_1} = \sqrt{\lambda}\eta$, mas também surge um bóson de gauge, com massa $m_{A_\mu} = \sqrt{2}e\eta$, como consequência do Mecanismo de Higgs.

Assim, comparando o caso da quebra espontânea de simetria global com a quebra espontânea de simetria local, temos que no caso da quebra espontânea de simetria global, ocorre o surgimento de um campo sem massa, conforme o Teorema de Goldstone. No caso da quebra espontânea de simetria local, o Mecanismo de Higgs faz com que o campo de gauge absorva o boson de goldstone, gerando uma massa para o mesmo.

3.2.1 Vórtices Abelianos

Como vimos, a quebra espontânea de simetria permite a formação de defeitos topológicos. Tais defeitos são as soluções estáveis das equações de campo e que apresentam energia finita. Um tipo específico de defeito topológico que surge em sistemas tridimensionais são os vórtices. O estudo dos vórtices, sobretudo na Matéria Condensada, se tornou mais relevante a partir do trabalho de A. A. Abrikosov em 1957 que demonstrou, via teoria de supercondutividade de Ginzburg-Landau [32], a existência de confinamento do campo magnético em supercondutores

do tipo II.

Entretanto, foi em 1973 que Nielsen e Olesen apresentaram uma solução tipo vórtices a partir de uma Teoria de Campo usando um modelo de Higgs abeliano [7]. Faremos a seguir uma breve descrição sobre a proposta de Nielsen-Olesen em que apresenta um modelo com campo escalar complexo e um campo de gauge. A densidade de lagrangiano do sistema é dada por,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)(D^\mu\phi^*) + \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi - \eta^2)^2. \quad (3.20)$$

As equações de campo são [33]

$$D_\mu D^\mu\phi = -\lambda\phi(\phi^*\phi - \eta^2), \quad (3.21)$$

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = j_\mu = -\frac{1}{2}ie[\phi^*(\partial_\mu\phi) - \phi(\partial^\mu\phi^*)] + e^2A_\mu(\phi^*\phi). \quad (3.22)$$

Para vórtices magnéticos apontando na direção do eixo z , podemos determinar o fluxo magnético que passa por uma região do plano xy , conforme a figura (3.3). Parametrizando o campo de Higgs por

$$\phi = |\phi|e^{i\chi}, \quad (3.23)$$

o fluxo que atravessa a região definida pelo caminho fechado P , veja figura (3.3) é dado por,

$$\Phi = \int F_{12} dx dy = \int_P A_i(x) dx^i = -\frac{1}{e} \int_P dx^i \partial_i \chi, \quad (3.24)$$

onde consideramos que a corrente, J_μ , é nula ao longo do contorno P . Como χ deve ser unívoca, esta exigência leva a

$$\Phi = \frac{1}{e}[\chi(2\pi) - \chi(0)] = \frac{2\pi}{e}n, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3.25)$$

Vemos que o fluxo de campo magnético é quantizado e o número n é chamado de vorticidade.

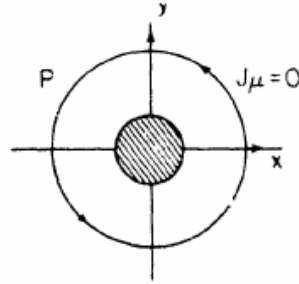


Figura 3.3 Região definida pelo contorno em torno do vórtice.

Como estamos interessados em estudar as configurações de vórtices, vamos agora analisar as equações de campo, admitindo que as mesmas apresentam simetria cilíndrica, as quais são dadas pelo ansatz abaixo

$$A_0 = 0, \quad \vec{A} = A(r)\hat{\theta}, \quad \phi = f(r)e^{in\theta}, \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (3.26)$$

Este ansatz leva a equações de campo (3.21) e (3.22) a serem escritas como

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} |f| \right) + \left[\left(\frac{n}{r} - eA \right)^2 + \lambda (f^2 + \eta^2) \right] = 0, \quad (3.27)$$

$$-\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA) \right] + \left(Ae^2 - \frac{e}{r} \right) f^2 = 0. \quad (3.28)$$

Estas equações diferenciais são acopladas e não-lineares. Embora elas não apresentem soluções analíticas, é possível fazer uma análise assintótica. Existem duas escalas distintas de massa nas

equações (3.27) e (3.28): A massa $m_s = \sqrt{2\lambda}\eta$ que corresponde à massa do campo escalar deslocado $\phi' = \phi - \eta$ e a massa $m_v = \eta e$ que corresponde ao campo de gauge que adquire massa devido ao Mecanismo de Higgs. Definimos comprimento de penetração, $\delta \equiv \frac{1}{m_v}$, a escala de variação espacial dos efeitos eletromagnéticos, enquanto que o comprimento de coerência, $\xi \equiv \frac{\sqrt{2}}{m_s}$, é a escala variação espacial do campo de Higgs. Considerando que o vórtice deve apresentar energia finita, esta condição leva a

$$f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} (1 - C_1 e^{-r/\xi}) \eta \quad (3.29)$$

e

$$A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n}{er} + C_2 e^{-r/\delta}, \quad (3.30)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. A relação entre esses dois comprimentos é chamado de parâmetro de Ginzburg-Landau, κ .

$$\kappa \equiv \frac{\delta}{\xi} = \frac{m_s}{\sqrt{2}m_v} = \frac{\sqrt{\lambda}}{e}. \quad (3.31)$$

Esta razão permite distinguir duas categorias de supercondutores:

- $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ supercondutor de tipo I;
- $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ supercondutor de tipo II.

Apenas métodos numéricos fornecem os comportamentos dos campos de Higgs e de gauge. Na figura (3.4) apresentamos o comportamento dos campos de Higgs e de gauge.

3.2.2 Vórtices não-Abelianos

Uma vez que descrevemos os vórtices abelianos, naturalmente nos perguntamos se é possível obter soluções tipo vórtices a partir de uma densidade de lagrangiano com simetria interna não-abeliana, como por exemplo, via o grupo $SU(2)$. Nielsen e Olesen também mostraram que para

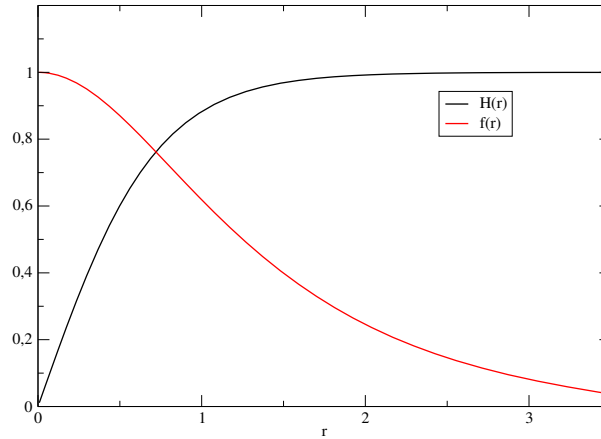


Figura 3.4 Comportamento dos campos de Higgs, $f(r)$, e de gauge, $H(r)$.

se obter soluções do tipo vórtices não-abelianos, topologicamente estáveis, seria necessário a presença de dois setores bosônicos [7]. Nessa seção, faremos uma breve descrição da proposta de Nielsen e Olesen, a qual foi incorporada por de H. J. de Vega [34] para o espaço-tempo de Minkowski³.

Consideremos a densidade de lagrangiano a qual é invariante de gauge frente ao grupo $SU(2)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu \varphi^a)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu \chi^a)^2 - V(\varphi^a, \chi^a). \quad (3.32)$$

Nessa densidade de lagrangiano, o índice a corresponde ao índice de isospin, associado ao grupo $SU(2)$, ($a = 1, 2, 3$). O tensor intensidade de campo, $F_{\mu\nu}^a$, é do tipo Yang-Mills, conforme a expressão

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.33)$$

sendo A_μ^a o iso-potencial vetor, e a constante de acoplamento e ϵ^{abc} a constante de estrutura do grupo $SU(2)$. As derivadas covariante dos campos de Higgs são

$$D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b \varphi^c, \quad (3.34)$$

³Apresentaremos de forma breve, o modelo que será analisado com mais detalhes no Capítulo 5 desta Tese para descrever o sistema físico que apresenta vórtices não-abelianos $SU(2)$.

$$D_\mu \chi^a = \partial_\mu \chi^a + e \varepsilon^{abc} A_\mu^b \chi^c. \quad (3.35)$$

O potencial de interação, $V(\varphi^a, \chi^a)$, é descrito por

$$\begin{aligned} V(\varphi^a, \chi^a) = & \frac{\lambda_1}{4} [(\varphi^a)^2 - \eta_1^2]^2 + \frac{\lambda_2}{4} [(\chi^a)^2 - \eta_2^2]^2 \\ & + \frac{\lambda_3}{2} [(\varphi^a)^2 - \eta_1^2] [(\chi^a)^2 - \eta_2^2], \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde λ_1 e λ_2 são constantes positivas de autoacoplamento dos campos de Higgs. λ_3 é a constante de acoplamento dos setores de Higgs, η_1 e η_2 são parâmetros que correspondem à escala de energia em que a simetria de gauge é quebrada.

O potencial acima tem propriedades diferentes conforme o sinal do discriminante $\Delta \equiv \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2$:

- Para $\Delta > 0$, o potencial é positivo e o mínimo global é determinado para $(\varphi^a)^2 = \eta_1^2$ and $(\chi^a)^2 = \eta_2^2$.
- Para $\Delta < 0$, obtemos pontos de sela e dois mínimos locais ocorrem:

$$(\varphi^a)^2 = 0, \quad (\chi^a)^2 = \eta_2^2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \eta_1^2 \quad (3.37)$$

e

$$(\chi^a)^2 = 0, \quad (\varphi^a)^2 = \eta_1^2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \eta_2^2. \quad (3.38)$$

Os valores do potencial são, respectivamente,

$$V_{min} = \frac{\eta_1^4}{4\lambda_2} \Delta \quad \text{e} \quad V_{min} = \frac{\eta_2^4}{4\lambda_1} \Delta. \quad (3.39)$$

Ambos valores de V_{min} são negativos para $\Delta < 0$.

Usaremos um ansatz para os setores bosônico e para o campo de gauge [34], descrito pelas

expressões abaixo:

$$\varphi^a(\rho) = f(\rho) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\chi^a(\rho) = g(\rho) \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\vec{A}^a(\rho) = \hat{\phi} \left(\frac{1-H(\rho)}{e\rho} \right) \delta_{a,3} = -\hat{\phi} \frac{A(\rho)}{e\rho} \delta_{a,3} \quad (3.42)$$

e

$$A_t^a(\rho) = 0, \quad a = 1, 2, 3, \quad (3.43)$$

em que os campos bosônicos satisfazem a condição de ortogonalidade, $\varphi^a \chi^a = 0$. Definimos novas variáveis e funções adimensionais conforme abaixo:

$$x = \sqrt{\lambda_1} \eta_1 \rho, \quad f(\rho) = \eta_1 X(x), \quad g(\rho) = \eta_1 Y(x), \quad H(\rho) = H(x). \quad (3.44)$$

Substituindo (3.44) no ansatz dos campos de Higgs, e usando a equação de Euler-Lagrange para a densidade de lagrangiano (3.32), encontramos as equações de campo

$$x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + x \frac{dX}{dx} = X [x^2 (X^2 - 1) + \beta_3^2 x^2 (Y^2 - q^2) + H^2], \quad (3.45)$$

$$x^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} + x \frac{dY}{dx} = Y [\beta_3^2 x^2 (X^2 - 1) + \beta_2^2 x^2 (Y^2 - q^2) + H^2], \quad (3.46)$$

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dH}{dx} = \alpha (X^2 + Y^2) H, \quad (3.47)$$

onde os parâmetros α , q e β_i^2 são definidos por

$$\alpha = \frac{e^2}{\lambda_1}, \quad q = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad \beta_i^2 = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.48)$$

As equações de campo (3.45 - 3.47) são equações diferenciais de segunda ordem não-lineares e acopladas. Infelizmente não existem soluções analíticas para o conjunto de equações acima. Apenas por métodos numéricos poderemos inferir os comportamentos dos campos como função da distância. Escolhendo os parâmetros α , q e β_i adequadamente é possível encontramos as soluções numéricas para o comportamento dos campos. Na figura (3.5) apresentamos o comportamento dos campos de Higgs e de gauge para os parâmetros $\alpha = 1.0$, $\beta_2 = 1.0$, $\beta_3 = 0.9$, $q = 0.8$.

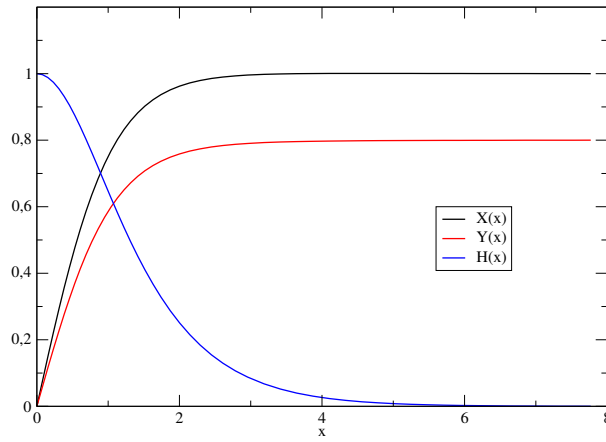


Figura 3.5 Comportamento dos campos de Higgs $X(x)$, $Y(x)$ e de gauge, $H(x)$, para os parâmetros $\alpha = 1.0$, $\beta_2 = 1.0$, $\beta_3 = 0.9$, $q = 0.8$.

CAPÍTULO 4

Cordas Cósmicas

4.1 Modelo Cosmológico Padrão

O modelo cosmológico padrão, conhecido como Big Bang, é fundamentado em dois pilares observacionais: a recessão das galáxias e a radiação cósmica de fundo em micro-ondas.

Em 1929, Edwin Hubble observou, a partir da análise do desvio para o vermelho da radiação emitida das estrelas variáveis Cefeidas e supernovas de galáxias distantes, que a velocidade de recessão das galáxias é proporcional à distância [35],

$$v = Hr, \quad (4.1)$$

onde $H = 100h \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ é o parâmetro de Hubble. O parâmetro adimensional h descreve a incerteza atual das medidas. Com as atuais medidas dos parâmetros cosmológicos, a idade do Universo é estimada em $13,799 \pm 0,021$ bilhões de anos [4].

A radiação cósmica de fundo é uma relíquia da radiação emitida quando o Universo era quente e denso, sendo observada pela primeira vez por A. Penzias e R. Wilson em 1965 [36]. Esta radiação tem um espectro térmico de corpo negro com intensidade na faixa de micro-onda e temperatura de $2,726 \pm 0,01$ K [37].

Admitindo que o Universo é homogêneo e isotrópico em larga escala, podemos utilizar coordenadas comóveis, de maneira que neste sistema de coordenadas, as galáxias mantêm sua posição. Assim, a distância real das galáxias $r(t)$ está relacionada com sua distância coordenada

x por um fator de escala universal $a(t)$,

$$r(t) = a(t)x. \quad (4.2)$$

Ou seja, a distância $r(t)$ caracteriza a expansão do Universo. Desta forma, a lei de Hubble (4.1) torna-se,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (4.3)$$

O desvio para o vermelho da radiação de objetos distantes, como galáxias ou quasares, é dado por $1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}$, onde t_0 é o tempo atual e t é o tempo em que a radiação foi emitida pelo objeto. A evolução temporal do fator de escala é dada pela equação de Friedmann de acordo com a Teoria da Relatividade Geral [38],

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}, \quad (4.4)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, c é a velocidade da luz, ρ é a densidade do Universo, K é a curvatura da seção espacial do Universo. Se $K > 0$, o Universo é espacialmente fechado e expandirá até um determinado raio e depois se contrairá, e possivelmente chegando a um "big crunch". Se $K < 0$, o Universo é aberto e se expandirá para sempre. Se $K = 0$, o Universo é plano, aberto e também se expandirá para sempre.

Usando a equação de Friedmann, equação (4.4), podemos expressar esta condição de expansão em termos da densidade. Considere que para um dado H , existe um valor especial da densidade do Universo que faz com que o Universo seja plano, ou seja $K = 0$. Chamamos esse valor da densidade de densidade crítica, ρ_c . Substituindo essas condições na equação (4.4) obtemos,

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (4.5)$$

Por outro lado, conhecendo o valor do parâmetro de Hubble hoje, que denotaremos por H_0 ,

podemos determinar a densidade crítica do Universo. Substituindo o valor da constante gravitacional de Newton, G , obtemos,

$$\rho_c(t_0) = 1,88 h^2 \times 10^{-26} \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad (4.6)$$

onde t_0 denota o valor de ρ_c medido no tempo atual. No entanto, o Universo não precisa ser necessariamente plano, logo podemos definir um parâmetro adimensional conhecido como parâmetro de densidade, Ω , tal que

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (4.7)$$

Como ρ_c e ρ dependem do tempo, então Ω também depende do tempo. Vamos denotar o valor atual do parâmetro de densidade por Ω_0 . Substituindo ρ dado na equação (4.7) na equação de Friedmann, equação (4.4), obtemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \Omega - \frac{K}{a^2}. \quad (4.8)$$

Utilizando a equação (4.5), chegamos a

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (4.9)$$

Para usar a equação de Friedmann, equação (4.4), devemos determinar a densidade ρ . Para isso, usamos a equação da energia que é obtida a partir da 1ª Lei da Termodinâmica,

$$dE + pdV = TdS, \quad (4.10)$$

aplicado a um volume V em termos do raio comóvel. Assim, considerando $E = mc^2$, o volume,

$V = \frac{4\pi}{3}a^3$ e que a densidade é dada por $\rho = \frac{m}{V}$, temos que

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2 \quad (4.11)$$

e

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}. \quad (4.12)$$

Considerando que a expansão é reversível ($dS = 0$) e substituindo (4.11) e (4.12) na equação (4.10), obtemos a equação da energia

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (4.13)$$

onde fizemos $c = 1$.

Para resolver esta equação consideramos que há uma equação de estado que relaciona a pressão p com a densidade ρ . Vamos considerar duas situações possíveis: Um Universo dominado pela radiação em que $p = \frac{1}{3}\rho$ e um Universo dominado pela matéria não-relativística (poeira) com $p = 0$. Assim, para o Universo dominado pela radiação, a equação (4.13) leva a $\rho_{rad} \propto a^{-4}$, enquanto que para um Universo dominado pela matéria não-relativística, a equação (4.13) leva a $\rho_{mat} \propto a^{-3}$. Considerando que no Universo primordial, a densidade ρ era muito próximo do valor da densidade crítica, ρ_c , e substituindo os respectivos valores de ρ de cada era do Universo na equação de Friedmann, equação (4.4), temos que $a \propto t^{1/2}$ para o caso em que o Universo é dominado pela radiação e $a \propto t^{2/3}$ para a situação em que o Universo é dominado pela matéria não-relativística (poeira).

Considerando a homogeneidade e isotopia do Universo em larga escala, uma boa aproximação para a estrutura do Universo é dada pela métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (4.14)$$

Recentes medidas dos parâmetros cosmológicos [4], sugerem que atualmente $K = 0$, tal que o Universo seja descrito por uma métrica espacialmente plana,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2, \quad (4.15)$$

onde $d\mathbf{x}^2$ descreve a seção espacial do Universo.

Como a densidade de radiação, ρ_{rad} , cai mais rápido que a densidade de matéria, ρ_{mat} , então rapidamente o Universo tornou-se frio o suficiente para que elétrons e núcleos se re-combinassem e formassem um gás neutro. As cordas cósmicas podem ter sido formadas no período do Universo primordial, portanto em uma época em que o Universo era dominado pela radiação [3, 39]. Como neste período do Universo o fator de escala universal era $a \propto t^{1/2}$, o parâmetro de Hubble era

$$H = \frac{1}{2t}. \quad (4.16)$$

Nestas condições, substituindo a equação (4.16) na equação da densidade (4.5), a densidade da era da radiação é dada por

$$\rho_{rad} = \frac{3}{32\pi G t^2}. \quad (4.17)$$

Quando abordamos a quebra espontânea de simetria no Capítulo 3, consideramos o potencial puramente clássico. No entanto, uma descrição realista envolve campos quânticos que interagem entre si e com outros campos. Além disso, para uma descrição mais completa das transições de fase, é necessário considerar que o potencial também dependa da temperatura. Assim, o principal efeito é trocar potencial $V(\phi)$ por um potencial efetivo $V_{ef}(\phi)$ na densidade de lagrangiano, em que $V_{ef}(\phi)$ é determinado pela expansão perturbativa¹

$$V_{ef}(\phi) = V(\phi) + V_1(\phi) + V_2(\phi) + \dots, \quad (4.18)$$

¹Aqui seguiremos a descrição de A. Vilenkin e E. P. S. Shellard dada na referência [3].

onde $V(\phi)$ é o potencial clássico e os $V_i(\phi)$ são as contribuições das perturbações. Para altas temperaturas, o potencial efetivo, $V_{ef}(\phi, T)$, é dado por [3, 39]

$$V_{ef}(\phi, T) = V(\phi) + \frac{\lambda + 3e^2}{12} T^2 |\phi|^2 - \frac{2\pi^2}{45} T^4. \quad (4.19)$$

O termo em T^4 não depende de $|\phi|$ e, portanto, não afeta a quebra de simetria. Logo, a correção mais importante ocorre no termo que depende de T^2 , que leva a restauração da simetria em altas temperaturas. Considerando o potencial

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - \eta^2)^2, \quad (4.20)$$

e desprezando os termos independentes de ϕ , podemos escrever o potencial efetivo para altas temperaturas como

$$V_{ef}(\phi, T) = m^2(T) |\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4. \quad (4.21)$$

onde $m^2(T)$ é a massa efetiva do campo escalar no estado simétrico, dada por

$$m^2(T) = \frac{\lambda}{12} (T^2 - 6\eta^2). \quad (4.22)$$

Esta massa se anula para $T = T_c = \sqrt{6}\eta$. Para $T > T_c$, o termo $m^2(T)$ é positivo e o mínimo do potencial efetivo, $V_{ef}(\phi, T)$, é alcançado quando $\phi = 0$. Neste caso, o valor esperado de ϕ se anula e a simetria é restaurada. Para $T < T_c$, o termo $m^2(T)$ é negativo, o estado simétrico fica instável e o valor esperado de ϕ torna-se diferente de zero. O valor mínimo do potencial efetivo, $V_{ef}(\phi, T)$, para $T < T_c$ é encontrado quando

$$|\phi| = \frac{1}{\sqrt{6}} (T_c^2 - T^2)^{1/2}. \quad (4.23)$$

No estágio primordial, o Universo se encontrava muito quente e, portanto, em um estado

simétrico tal que não havia formação de cordas cósmicas. Quanto o Universo esfriou abaixo da temperatura crítica, T_c , o campo de Higgs, ϕ , acomodou-se na região contendo o círculo de valores mínimos do potencial efetivo, V_{ef} . Eventualmente, quando $T = 0$, o sistema tenderá a um dos estados de vácuo descritos pelos pontos no círculo conforme a figura (4.1).

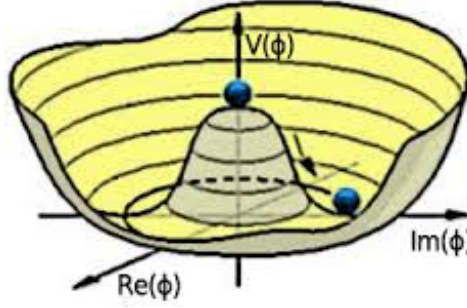


Figura 4.1 Potencial: $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^* \phi - \eta^2)^2$.

No contexto cosmológico, quando o Universo sofreu transições de fase à medida em que esfriava, o campo ϕ alcançava o valor dado pela equação (4.23). No entanto, a fase θ do campo ϕ não depende apenas na física local, mas também das flutuações randômicas, podendo assumir diferentes valores em diferentes regiões do espaço. A dependência do potencial efetivo da temperatura é mostrado na figura (4.2),

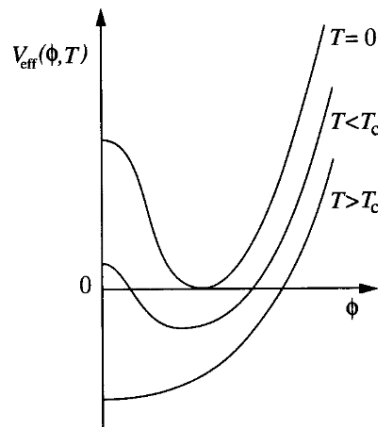


Figura 4.2 Comportamento do potencial efetivo em relação à temperatura.

4.2 Métrica da Corda Cósmica

Para descrever as cordas cósmicas idealizadas usaremos o modelo de vórtices de Nielsen-Olesen. Nesse sentido, se acopla ao tensor momento-energia associado a esses objetos às equações de campo de Einstein, e se estuda a influência dos mesmos na geometria do espaço-tempo.

Entretanto, as equações que descrevem as cordas cósmicas são equações diferenciais de segunda ordem, não-lineares, acopladas e não possuem soluções analíticas. No entanto, podemos estudar as cordas cósmicas se fizermos duas importantes simplificações. Primeiro, considerando que a espessura da corda cósmica é muito menor que todas as outras dimensões relevantes. A outra simplificação é considerarmos que a interação gravitacional da corda é suficientemente fraca de maneira que possamos usar as equações de Einstein linearizadas. Estas condições certamente não são válidas para todas as situações, mas é uma boa aproximação para o caso em que $\eta \ll m_p$, onde η é a escala de energia onde ocorre a quebra espontânea de simetria e m_p é a massa de Planck [3].

Vilenkin mostrou que o tensor momento-energia associado a uma corda cósmica estática, infinitamente longa é dado por [40, 41],

$$T_{\nu}^{\mu} = \mu \delta(x) \delta(y) \text{diag}(1, 0, 0, 1), \quad (4.24)$$

onde μ é a densidade linear de massa². Assumindo que o parâmetro adimensional $G\mu \ll 1$, Vilenkin também mostrou que a métrica da região exterior à corda cósmica pode ser encontrada a partir da solução das equações de campo de Einstein linearizadas para corda cósmica. Observando a simetria cilíndrica, o elemento de linha é dado por [41],

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - (1 - 4G\mu)\rho^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (4.25)$$

²Em geral, utiliza-se a forma adimensional $G\mu$, onde G é a constante gravitacional de Newton.

Definindo uma nova coordenada angular,

$$\phi' = (1 - 4G\mu)\phi, \quad (4.26)$$

podemos escrever o elemento de linha (4.25) como

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\phi'^2 - dz^2, \quad (4.27)$$

onde $0 < \phi' < 2\pi(1 - 4G\mu)$. Esta métrica é localmente minkowskiana e descreve um espaço cônico, cujo deficit ângulo planar, δ , é dado por

$$\delta = 8\pi G\mu. \quad (4.28)$$

O espaço cônico exterior à corda cósmica pode ser visualizado ao se retirar uma região do espaço de Minkowski correspondente ao ângulo $8\pi G\mu$ e identificando as bordas da superfície, conforme podemos ver na figura (4.3). Uma corda cósmica no espaço de Minkowski ao longo

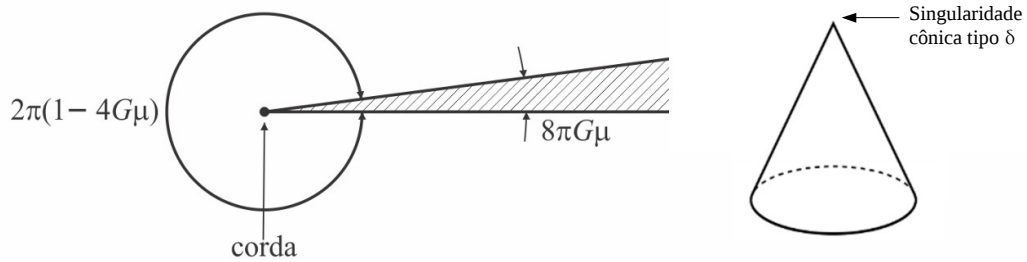


Figura 4.3 Espaço cônico formado a partir da retirada de uma região correspondente ao ângulo $8\pi G\mu$.

do eixo z é invariante sob translação temporal, translação ao longo do eixo z , rotação em torno do eixo z . Também é invariante sob boosts de Lorentz no eixo z .

Os efeitos das vórtices na geometria do espaço-tempo foram analisados através do acoplamento tensor momento-energia associado ao vórtice de Nielsen-Olesen e a equações de campo

de Einstein [8, 9, 42]. Nestes artigos, as soluções cilíndricas e estáticas para o campo de matéria, campo de gauge e para o tensor métrico são obtidos pela análise numérica das equações diferenciais ordinárias não-lineares e acopladas.

Considerando que as propriedades de simetria se mantêm para o caso de cordas cósmicas geradas a partir dos vórtices, podemos escrever o elemento de linha mais geral invariante sob translações espaciais na direção do eixo z , invariante sob boost de Lorentz na direção do eixo z , invariante sob translação temporal e cilindricamente simétrico como

$$ds^2 = N^2(\rho)dt^2 - d\rho^2 - L^2(\rho)d\varphi^2 - N^2(\rho)dz^2. \quad (4.29)$$

Para este caso, o déficit de ângulo planar é estabelecido pelo comportamento assintótico da função $L'(\rho)$ no infinito [3], ou seja,

$$\delta = 2\pi \left[1 - \lim_{\rho \rightarrow \infty} L'(\rho) \right]. \quad (4.30)$$

4.3 Efeitos Cosmológicos das Cordas Cósmicas

Devido à topologia não trivial do espaço-tempo na presença das cordas cósmicas, alguns efeitos são previstos. Tais efeitos induzem fenômenos que podem ser tanto de natureza clássica quanto quântica e a observação ou detecção desses fenômenos podem ter consequências relevantes para Astrofísica ou Cosmologia.

Fenômenos clássicos como o movimento de partículas teste no espaço-tempo de cordas cósmicas foi analisado através do estudo de geodésicas em [43, 44] e a analogia com o efeito Aharonov-Bohm foi investigado em [45–47]. Fenômenos de natureza quântica como a dinâmica quântica relativística de partículas foi investigado em [48] e o espalhamento de fótons no espaço tempo de cordas cósmicas foi estudado em [49]. Em Teoria Quântica de Campos,

criação em pares de partículas e decaimento de partículas massivas foram analisados em [50] e a polarização do vácuo foi examinado em [51–54]. A polarização do vácuo também foi investigada tanto no espaço de de Sitter em [55], como no espaço de anti-de Sitter em [56]. Esses exemplos são uma pequena parte de fenômenos que mostram que desde o início da década de 80 do século passado que o estudo da influência das cordas cósmicas tem despertado intenso interesse.

Os efeitos gravitacionais das cordas cósmicas dependem do parâmetro adimensional $G\mu \sim \left(\frac{\eta}{m_p}\right)^2$. No cenário cosmológico, a escala de energia de grande unificação é da ordem de $\eta \sim 10^{15}$ GeV, o que corresponde a $G\mu \sim 10^{-8}$, enquanto para a interação eletrofraca, a escala de energia é $\eta \sim 10^2$ GeV, correspondendo a $G\mu \sim 10^{-34}$. O valor de $G\mu$ proporciona o limite superior para o qual seria possível a detecção de cordas cósmicas [3, 37].

As cordas cósmicas foram sugeridas como explicação alternativa à Teoria da Inflação para as flutuações da densidade do Universo primordial que possibilitariam a formação de galáxias [57]. Entretanto, dados do satélite WMAP ³ apresentaram resultados que são consistentes com a Teoria do Big Bang, com a Teoria da Inflação e mostrou que as cordas cósmicas tem pouca contribuição para as flutuações da densidade do Universo primordial para a formação de estruturas [58]. Pelos dados do WMAP, o parâmetro adimensional para as cordas cósmicas teria como valor superior $G\mu \sim 10^{-7}$ [59].

Uma outra perspectiva é que as cordas cósmicas também poderiam levar a descontinuidade ou anisotropias da radiação cósmica de fundo em micro-ondas. Tal anisotropia seria consequência de um pequeno desvio no efeito Doppler da temperatura da radiação cósmica de fundo [60–62]. Este fenômeno seria caracterizado pelo valor do parâmetro adimensional $G\mu \sim 10^{-5}$ [37]. Além das anisotropias da radiação cósmica de fundo em micro-ondas, as cordas cósmicas também tem sido propostas como origem da raios cósmicos de alta energia. Cordas cósmicas supercondutoras poderiam explicar a alta emissão de radiação na faixa de

³A sigla WMAP é formada pelas iniciais de Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.

raios gama no Universo [63, 64].

Um outro fato potencialmente importante é que, devido à natureza cônica do espaço ao redor da corda cósmica, podem ser formadas imagens duplas de objetos localizados atrás da corda cósmica. Este fenômeno é conhecido como lentes gravitacionais [65–67]. Para entender a formação de imagens duplas, podemos notar que o espaço cônico é formado pela retirada de uma região corresponde ao ângulo $\delta = 8\pi G\mu$ do espaço plano e depois identificando as bordas. Devido a isto, o observador verá duas imagens da fonte com uma separação angular de $\delta\alpha$ entre as duas imagens conforme a figura (4.4) .

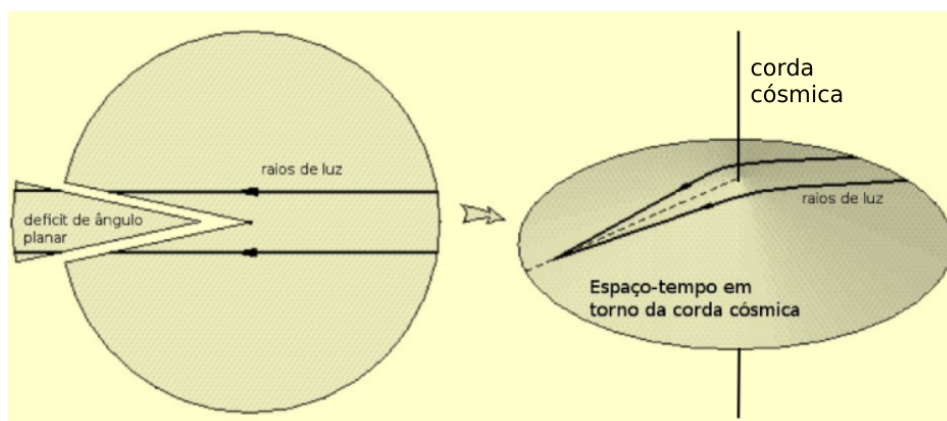


Figura 4.4 Formação de lentes gravitacionais devido à natureza cônica do espaço.

Cordas Cósmicas não-Abelianas

Neste capítulo vamos desenvolver o modelo para cordas cósmicas geradas por vórtices não-abelianos [68]. Partiremos da seção (3.2.2), onde descrevemos vórtices não-Abelianos e detalharemos a análise das consequências na geometria do espaço-tempo.

5.1 O Modelo

O modelo que propomos para descrever a corda cósmica basea-se no vórtice não-Abeliano de Nielson-Olesen acoplado às equações de Einstein. A ação que descreve esse sistema é [68]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_m \right), \quad (5.1)$$

onde R é o escalar de Ricci, G é a constante gravitacional de Newton e $\mathcal{L}_m$ denota a densidade de lagrangiano de matéria do modelo de Higgs não-Abeliano, a qual é dada por

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi^a)^2 + \frac{1}{2} (D_\mu \chi^a)^2 - V(\varphi^a, \chi^a). \quad (5.2)$$

Como vimos na seção (3.2.2), nessa densidade de lagrangiano, o índice a corresponde ao índice de isospin, associado ao grupo de simetria de gauge $SU(2)$, ($a = 1, 2, 3$). O tensor intensidade de campo, $F_{\mu\nu}^a$, é do tipo Yang-Mills, dado pela expressão

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (5.3)$$

sendo A_μ^a o iso-potencial vetor, e a constante de acoplamento e ε^{abc} a constante de estrutura do grupo $SU(2)$. As derivadas covariante dos campos de Higgs são

$$D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + e \varepsilon^{abc} A_\mu^b \varphi^c, \quad (5.4)$$

$$D_\mu \chi^a = \partial_\mu \chi^a + e \varepsilon^{abc} A_\mu^b \chi^c. \quad (5.5)$$

O potencial de interação, $V(\varphi^a, \chi^a)$, é descrito por

$$\begin{aligned} V(\varphi^a, \chi^a) = & \frac{\lambda_1}{4} [(\varphi^a)^2 - \eta_1^2]^2 + \frac{\lambda_2}{4} [(\chi^a)^2 - \eta_2^2]^2 \\ & + \frac{\lambda_3}{2} [(\varphi^a)^2 - \eta_1^2] [(\chi^a)^2 - \eta_2^2], \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde λ_1 e λ_2 são constantes positivas de autoacoplamento dos campos de Higgs. λ_3 é a constante de acoplamento dos setores de Higgs, η_1 e η_2 são parâmetros que correspondem à escala de energia em que a simetria de gauge é quebrada.

O potencial acima tem propriedades diferentes conforme o sinal do discriminante $\Delta \equiv \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2$:

- Para $\Delta > 0$, o potencial é positivo e o mínimo global é determinado para $(\varphi^a)^2 = \eta_1^2$ e $(\chi^a)^2 = \eta_2^2$.
- Para $\Delta < 0$, obtemos pontos de sela e dois mínimos locais ocorrem:

$$(\varphi^a)^2 = 0, \quad (\chi^a)^2 = \eta_2^2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \eta_1^2 \quad (5.7)$$

e

$$(\chi^a)^2 = 0, \quad (\varphi^a)^2 = \eta_1^2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \eta_2^2. \quad (5.8)$$

Os valores do potencial são, respectivamente,

$$V_{min} = \frac{\eta_1^4}{4\lambda_2}\Delta \quad \text{e} \quad V_{min} = \frac{\eta_2^4}{4\lambda_1}\Delta. \quad (5.9)$$

Ambos valores de V_{min} são negativos para $\Delta < 0$.

5.1.1 O Ansatz

Para encontrarmos soluções do tipo vórtices, vamos admitir que o sistema apresenta simetria cilíndrica, seja estático e simétrico em relação ao boost de Lorentz ao longo do eixo z . Assim, usaremos um ansatz para os setores bosônicos e para o campo de gauge [34], descrito pelas expressões abaixo:

$$\varphi^a(\rho) = f(\rho) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\chi^a(\rho) = g(\rho) \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\vec{A}^a(\rho) = \hat{\phi} \left(\frac{1-H(\rho)}{e\rho} \right) \delta_{a,3} = -\hat{\phi} \frac{A(\rho)}{e\rho} \delta_{a,3} \quad (5.12)$$

e

$$A_t^a(\rho) = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (5.13)$$

Vemos que os campos bosônicos satisfazem a condição de ortogonalidade, $\varphi^a \cdot \chi^a = 0$.

Vamos considerar o elemento de linha mais geral invariante sob boost de Lorentz na

direção do eixo z , e cilindricamente simétrico. Esse elemento de linha tem a seguinte estrutura:

$$ds^2 = N^2(\rho)dt^2 - d\rho^2 - L^2(\rho)d\phi^2 - N^2(\rho)dz^2, \quad (5.14)$$

onde as funções N e L dependem apenas da coordenada ρ . Assim a forma do tensor métrico é dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^2(\rho) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L^2(\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N^2(\rho) \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

O tensor métrico contravariante, $g^{\mu\nu}$, é obtido através da equação $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \mathbf{1}$, onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade.

Por simplicidade, usaremos a seguinte notação para os campos de Higgs, de gauge e métricos:

$$f(\rho) \longrightarrow f, \quad g(\rho) \longrightarrow g \quad (5.16)$$

$$N(\rho) \longrightarrow N, \quad L(\rho) \longrightarrow L \quad (5.17)$$

$$A(\rho) \longrightarrow A \quad (5.18)$$

Vamos usar o ansatz (5.10) e (5.11) para escrever os campos de Higgs e suas nas derivadas covariantes. Para os campos de Higgs, temos

$$(\varphi^a)^2 = f^2, \quad (5.19)$$

e

$$(\chi^a)^2 = g^2. \quad (5.20)$$

Usando as equações (5.19) e (5.20) na equação (5.6), o potencial será escrito como

$$V(f, g) = \frac{\lambda_1}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 + \frac{\lambda_2}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 + \frac{\lambda_3}{2} (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \quad (5.21)$$

Os quadrados das derivadas covariante dos campos de Higgs expressas nas equações (5.4) e (5.5) tornam-se, respectivamente,

$$(D_\mu \varphi^a)^2 = g^{\mu\nu} (D_\mu \varphi^a) (D_\nu \varphi^a) = - \left[f'^2 + \frac{f^2}{L^2} (1 - A)^2 \right] \quad (5.22)$$

e

$$(D_\mu \chi^a)^2 = g^{\mu\nu} (D_\mu \varphi^a) (D_\nu \chi^a) = - \left[g'^2 + \frac{g^2}{L^2} (1 - A)^2 \right], \quad (5.23)$$

onde $f' = \frac{df(\rho)}{d\rho}$ e $g' = \frac{dg(\rho)}{d\rho}$.

Para o campo de gauge, usando o ansatz (5.12), a única componente de A_μ diferente de zero é

$$A_\phi = - \frac{A(\rho)}{e}. \quad (5.24)$$

Substituindo (5.24) em (5.3), obtemos

$$F_{\phi\rho}^a = -F_{\rho\phi}^a = \frac{A'}{e}, \quad (5.25)$$

onde $A' = \frac{dA(\rho)}{d\rho}$. Assim sendo, termo de gauge na densidade de lagrangiano é escrito como,

$$F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = g^{\rho\rho} g^{\phi\phi} F_{\rho\phi}^a F_{\rho\phi}^a + g^{\phi\phi} g^{\rho\rho} F_{\phi\rho}^a F_{\phi\rho}^a = \frac{2}{L^2} \frac{A'^2}{e^2}. \quad (5.26)$$

Substituindo as equações (5.21), (5.22), (5.23) e (5.26) na densidade de lagrangeano (5.2)

encontramos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & -\frac{1}{4} \left(\frac{2}{L^2} \frac{A'^2}{e^2} \right) - \frac{1}{2} \left[f'^2 + \frac{f^2}{L^2} (1-A)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[g'^2 + \frac{g^2}{L^2} (1-A)^2 \right] \\ & - \frac{\lambda_1}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 - \frac{\lambda_2}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 - \frac{\lambda_3}{2} (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Como os campos determinarão a geometria do espaço-tempo, precisamos multiplicar $\mathcal{L}_m$ por $\sqrt{-g}$, onde $g = \det(g_{\mu\nu})$, com o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, dado na equação (5.15). Ou seja,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (5.28)$$

em que $g = -N^4 L^2$. A densidade de lagrangiano, $\mathcal{L}$, torna-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{L} \frac{A'^2}{e^2} \right) - \frac{N^2 L}{2} \left[f'^2 + \frac{f^2}{L^2} (1-A)^2 \right] - \frac{N^2 L}{2} \left[g'^2 + \frac{g^2}{L^2} (1-A)^2 \right] \\ & - \frac{\lambda_1 N^2 L}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 - \frac{\lambda_2 N^2 L}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 - \frac{\lambda_3 N^2 L}{2} (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Com relação a ação de Einstein-Hilbert, o escalar de Ricci é escrito pela contração do tensor de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

5.2 Equações de Campo

Nessa seção, vamos descrever o procedimento para determinar as equações de campo que descrevem a corda cósmica não-Abeliana.

5.2.1 Equações de Campo de Higgs e de Gauge

Vamos agora usar a equação de Euler-Lagrange para os campos f, g e A para obter as equações de movimento para os campos correspondentes. Assim para cada um desses campo, temos a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right) = 0, \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} - \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g'} \right) = 0, \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} - \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'} \right) = 0. \quad (5.32)$$

Substituindo a densidade de lagrangiano (5.29) nas equações de Euler-Lagrange (5.30), (5.31) e (5.32) obtemos as equações de campo para f, g e A , respectivamente,

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{df}{d\rho} \left(\frac{2}{N} \frac{dN}{d\rho} + \frac{1}{L} \frac{dL}{d\rho} \right) = \frac{f}{L^2} (1-A)^2 + \lambda_1 f (f^2 - \eta_1^2) + \lambda_3 f (g^2 - \eta_2^2), \quad (5.33)$$

$$\frac{d^2 g}{d\rho^2} + \frac{dg}{d\rho} \left(\frac{2}{N} \frac{dN}{d\rho} + \frac{1}{L} \frac{dL}{d\rho} \right) = \frac{g}{L^2} (1-A)^2 + \lambda_2 g (g^2 - \eta_2^2) + \lambda_3 g (f^2 - \eta_1^2), \quad (5.34)$$

e

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{dA}{d\rho} \left(\frac{2}{N} \frac{dN}{d\rho} - \frac{1}{L} \frac{dL}{d\rho} \right) = -e^2 (f^2 + g^2) (1-A). \quad (5.35)$$

5.2.2 Equações dos Campos Métricos

Para encontrarmos as equações dos campos métricos, L e N , vamos usar a equação de Einstein, que escreveremos convenientemente da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (5.36)$$

O tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, é determinado a partir da contração do tensor de Riemann, conforme a equação,¹

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\kappa} R_{\kappa\mu\lambda\nu}. \quad (5.37)$$

Para o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, dado na equação (5.15), as componentes não nulas do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, são:²

$$R_{tt} = -R_{zz} = -\frac{NLN'' + NN'L' + L(N')^2}{L}, \quad (5.38)$$

$$R_{\rho\rho} = \frac{2LN'' + NL''}{NL}, \quad (5.39)$$

$$R_{\phi\phi} = \frac{L(2N'L' + NL'')}{N}, \quad (5.40)$$

onde o símbolo (') denota a derivada em relação a ρ .

O tensor momento-energia, $T_{\mu\nu}$, na equação (5.36) será determinado através da ação de matéria, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (5.41)$$

que escrevendo em termos da densidade de lagrangiano de matéria, obtemos

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m \right). \quad (5.42)$$

Considerando os campos φ e χ , definidos no modelo, temos que,

$$T_{\mu\nu} = (D_\mu \varphi^a)(D_\nu \varphi^a) + (D_\mu \chi^a)(D_\nu \chi^a) - F_\beta^{\sigma a} F_{\alpha\sigma}^a - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m. \quad (5.43)$$

Vamos agora escrever explicitamente todas as componentes não-nulas do tensor momento-

¹Para maiores detalhes, veja a seção (2.5) do Cap. 2.

²O cálculo das componentes do tensor de Ricci é muito exaustivo, porém essas componentes podem ser encontradas facilmente utilizando um software de computação simbólica como o Maple ou Mathematica.

energia. A componente T_{tt} do tensor momento-energia é dada por,

$$T_{tt} = (D_t \varphi^a)(D_t \varphi^a) + (D_t \chi^a)(D_t \chi^a) - F_t^{\sigma a} F_{t\sigma}^a - g_{tt} \mathcal{L}_m. \quad (5.44)$$

Como os campos φ, χ, A não dependem do tempo e $A_t^a = 0$, a densidade de energia torna-se,

$$T_{tt} = -N^2 \mathcal{L}_m. \quad (5.45)$$

Substituindo $\mathcal{L}_m$, dado na equação (5.27), obtemos,

$$\begin{aligned} T_{tt} = & \frac{A'^2 N^2}{2e^2 L^2} + \frac{1}{2} \left[N^2 f'^2 + \frac{N^2 f^2}{L^2} (1-A)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[N^2 g'^2 + \frac{N^2 g^2}{L^2} (1-A)^2 \right] \\ & + \frac{\lambda_1 N^2}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 + \frac{\lambda_2 N^2}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 + \frac{\lambda_3 N^2}{2} (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \end{aligned} \quad (5.46)$$

A próxima componente não-nula é T_{rr} . Da equação (5.43), temos que para a coordenada ρ ,

$$T_{\rho\rho} = (D_\rho \varphi^a)(D_\rho \varphi^a) + (D_\rho \chi^a)(D_\rho \chi^a) - F_\rho^{\sigma a} F_{\rho\sigma}^a - g_{\rho\rho} \mathcal{L}_m. \quad (5.47)$$

Do ansatz, equações (5.10), (5.11) e (5.12), temos que

$$(D_\rho \varphi^a)(D_\rho \varphi^a) = f'^2, \quad (5.48)$$

$$(D_\rho \chi^a)(D_\rho \chi^a) = g'^2. \quad (5.49)$$

Apenas as componentes $\sigma = \phi$ e $\sigma = \rho$ sobrevivem no termo $F_\rho^{\sigma a} F_{\rho\sigma}^a$. Logo,

$$F_\rho^{\sigma a} F_{\rho\sigma}^a = g^{\phi\phi} (\partial_\rho A_\phi)(\partial_\rho A_\phi) = -\frac{A'^2}{e^2 L^2}, \quad (5.50)$$

onde usamos a componente $g^{\phi\phi}$ a partir do tensor métrico (5.15), e do ansatz usamos a equação (5.24), $A_\phi = -\frac{A(\rho)}{e}$. Substituindo as equações (5.48), (5.49), (5.50), a componente $g_{\rho\rho}$ do

tensor métrico e $\mathcal{L}_m$ na equação (5.47), chegamos a componente $T_{\rho\rho}$, ou seja,

$$T_{\rho\rho} = \frac{A'^2}{2e^2L^2} + \frac{1}{2} \left[f'^2 - \frac{f^2}{L^2}(1-A)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[g'^2 - \frac{g^2}{L^2}(1-A)^2 \right] - \frac{\lambda_1}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 - \frac{\lambda_2}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 - \frac{\lambda_3}{2} (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \quad (5.51)$$

Para a componente $T_{\phi\phi}$, temos

$$T_{\phi\phi} = (D_\phi \varphi^a)(D_\phi \varphi^a) + (D_\phi \chi^a)(D_\phi \chi^a) - F_\phi^{\sigma a} F_{\phi\sigma}^a - g_{\phi\phi} \mathcal{L}_m. \quad (5.52)$$

Seguindo desenvolvimento semelhante realizado no caso anterior, temos que

$$(D_\phi \varphi^a)(D_\phi \varphi^a) = f^2(1-A)^2, \quad (5.53)$$

$$(D_\phi \chi^a)(D_\phi \chi^a) = g^2(1-A)^2, \quad (5.54)$$

$$F_\phi^{\sigma a} F_{\phi\sigma}^a = -\frac{A'^2}{e^2}. \quad (5.55)$$

Substituindo as equações (5.53), (5.54) e (5.55), a componente $g_{\theta\theta}$ do tensor métrico e $\mathcal{L}_m$ na equação (5.52), obtemos

$$T_{\phi\phi} = \frac{A'^2}{2e^2} - \frac{1}{2} \left[L^2 f'^2 - f^2(1-A)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[L^2 g'^2 - g^2(1-A)^2 \right] - \frac{\lambda_1 L^2}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 - \frac{\lambda_2 L^2}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 - \frac{\lambda_3 L^2}{2} (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \quad (5.56)$$

Para a componente T_{zz} , temos

$$T_{zz} = (D_z \varphi^a)(D_z \varphi^a) + (D_z \chi^a)(D_z \chi^a) - F_z^{\sigma a} F_{z\sigma}^a - g_{zz} \mathcal{L}_m. \quad (5.57)$$

Como os campos φ, χ, A não dependem da componente z e $A_z^a = 0$, portanto,

$$T_{zz} = -g_{zz}\mathcal{L}_m. \quad (5.58)$$

Substituindo a componente g_{zz} do tensor métrico, equação (5.15) e $\mathcal{L}_m$, dado em (5.27), obtemos

$$\begin{aligned} T_{zz} = & -\frac{A'^2 N^2}{2e^2 L^2} - \frac{1}{2} \left[N^2 f'^2 + \frac{N^2 f^2}{L^2} (1-A)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[N^2 g'^2 + \frac{N^2 g^2}{L^2} (1-A)^2 \right] \\ & - \frac{\lambda_1 N^2}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 - \frac{\lambda_2 N^2}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 - \frac{\lambda_3 N^2}{2} (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Ou seja, $T_{zz} = -T_{tt}$.

O traço do tensor momento-energia, T , é determinado pela contração do tensor $T_{\mu\nu}$ com o tensor métrico, ou seja,

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = g^{tt} T_{tt} + g^{\rho\rho} T_{\rho\rho} + g^{\theta\theta} T_{\theta\theta} + g^{zz} T_{zz}. \quad (5.60)$$

Substituindo os valores de $g^{\mu\nu}$ obtidos a partir do tensor métrico (5.15) e usando as equações (5.46), (5.51), (5.56) e (5.59), temos que

$$\begin{aligned} T = & f'^2 + g'^2 + \frac{f^2}{L^2} (1-A)^2 + \frac{g^2}{L^2} (1-A)^2 \\ & + \lambda_1 (f^2 - \eta_1^2)^2 + \lambda_2 (g^2 - \eta_2^2)^2 + 2\lambda_3 (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Agora que obtivemos as expressões para as componentes não-nulas de $T_{\mu\nu}$ e também obtivemos a expressão para o traço T , podemos determinar as equações dos campos métricos. Para isso, substituiremos na equação de Einstein (5.36), as respectivas expressões das componentes não-nulas do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, do tensor momento-energia, $T_{\mu\nu}$ e T . Embora possamos obter quatro equações, uma equação para cada componente do espaço-tempo, duas

dessas equações são linearmente dependentes. Assim, como já encontramos as equações diferenciais para os campos de Higgs, f , g e do campo de gauge, A , (as equações de Euler-Lagrange (5.33), (5.34), (5.35)), precisaremos apenas determinar uma equação diferencial para N e outra equação diferencial para L . Para a coordenada t , a equação de Einstein torna-se,

$$R_{tt} = -\kappa \left(T_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} T \right), \quad (5.62)$$

onde $\kappa = 8\pi G$. Fazendo uma simplificação, podemos rescrever a equação (5.38) como

$$R_{tt} = -\frac{(LNN')'}{L} \quad (5.63)$$

substituindo g_{tt} , as equações (5.46) e (5.61), (5.63) na equação (5.62), obtemos

$$\frac{(LNN')'}{N^2L} = \kappa \left[\frac{A'^2}{2e^2L^2} - \frac{\lambda_1}{4}(f^2 - \eta_1^2)^2 - \frac{\lambda_2}{4}(g^2 - \eta_2^2)^2 - \frac{\lambda_3}{2}(f^2 - \eta_1^2)(g^2 - \eta_2^2) \right]. \quad (5.64)$$

Para a componente ϕ , a equação de Einstein torna-se,

$$R_{\phi\phi} = -\kappa \left(T_{\phi\phi} - \frac{1}{2} g_{\phi\phi} T \right). \quad (5.65)$$

Fazendo uma simplificação, a equação (5.40) pode ser rescrita como,

$$R_{\phi\phi} = \frac{(N^2L')'}{N^2L}. \quad (5.66)$$

Substituindo $g_{\phi\phi}$, as equações (5.56), (5.61) e (5.66) na equação (5.65), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(N^2L')'}{N^2L} = & -\kappa \left[\frac{A'^2}{2e^2L^2} + \frac{f^2}{L^2}(1-A)^2 + \frac{g^2}{L^2}(1-A)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_1}{4}(f^2 - \eta_1^2)^2 + \frac{\lambda_2}{4}(g^2 - \eta_2^2)^2 + \frac{\lambda_3}{2}(f^2 - \eta_1^2)(g^2 - \eta_2^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

As equações (5.30), (5.31), (5.32), (5.64) e (5.67) formam um sistema de 5 equações diferenciais de segunda ordem, não-lineares e acopladas. A solução destas equações diferenciais descrevem o comportamento dos campos de Higgs f e g , de gauge A e os campos métricos N e L . Infelizmente, este sistema de equações não possui solução analítica. Apenas métodos numéricos permitem obter as soluções que descrevem o comportamento dos campos. Apresentamos abaixo o sistema formado pelas 5 equações de campo. As equações para os campos de Higgs e gauge:

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{df}{d\rho} \left(\frac{2}{N} \frac{dN}{d\rho} + \frac{1}{L} \frac{dL}{d\rho} \right) = \frac{f}{L^2} (1-A)^2 + \lambda_1 f (f^2 - \eta_1^2) + \lambda_3 f (g^2 - \eta_2^2), \quad (5.68)$$

$$\frac{d^2 g}{d\rho^2} + \frac{dg}{d\rho} \left(\frac{2}{N} \frac{dN}{d\rho} + \frac{1}{L} \frac{dL}{d\rho} \right) = \frac{g}{L^2} (1-A)^2 + \lambda_2 g (g^2 - \eta_2^2) + \lambda_3 g (f^2 - \eta_1^2), \quad (5.69)$$

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{dA}{d\rho} \left(\frac{2}{N} \frac{dN}{d\rho} - \frac{1}{L} \frac{dL}{d\rho} \right) = -e^2 (f^2 + g^2) (1-A). \quad (5.70)$$

E as equações para os campos métricos:

$$\frac{(LNN')'}{N^2 L} = \kappa \left[\frac{A'^2}{2e^2 L^2} - \frac{\lambda_1}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 - \frac{\lambda_2}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 - \frac{\lambda_3}{2} (f^2 - \eta_1^2)(g^2 - \eta_2^2) \right], \quad (5.71)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{(N^2 L')'}{N^2 L} = & -\kappa \left[\frac{A'^2}{2e^2 L^2} + \frac{f^2}{L^2} (1-A)^2 + \frac{g^2}{L^2} (1-A)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_1}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 + \frac{\lambda_2}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 + \frac{\lambda_3}{2} (f^2 - \eta_1^2)(g^2 - \eta_2^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Iremos resolver este sistema de equações diferenciais numericamente, adotando valores especiais para as constantes físicas do sistema. São elas: $e, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta_1, \eta_2$ e G . Para usar estas constantes como parâmetros, precisamos escrever o sistema de equações diferenciais (5.68) a (5.72) de forma mais apropriada para aplicar os métodos numéricos. Para isto, definimos novas

variáveis e funções adimensionais,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\lambda_1} \eta_1 \rho, \quad f(\rho) = \eta_1 X(x), \quad g(\rho) = \eta_1 Y(x), \\ L(x) &= \sqrt{\lambda_1} \eta_1 L(\rho) \quad \text{e} \quad H(\rho) = 1 - A(\rho) = H(x). \end{aligned} \quad (5.73)$$

Consequentemente, a densidade de lagrangiano dependerá apenas dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$\alpha = \frac{e^2}{\lambda_1}, \quad q = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad \beta_i^2 = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \gamma = \kappa \eta_1^2 \text{ e } \kappa = 8\pi G. \quad (5.74)$$

Substituindo as funções e parâmetros (5.73) e (5.74) nas equações (5.68), (5.69), (5.70), (5.71) e (5.72), obtemos as equações de Euler-Lagrange para os campos de Higgs X, Y e gauge H , respectivamente,

$$\frac{(N^2 L X')'}{N^2 L} = X \left[X^2 - 1 + \beta_3^2 (Y^2 - q^2) + \frac{H^2}{L^2} \right], \quad (5.75)$$

$$\frac{(N^2 L Y')'}{N^2 L} = Y \left[\beta_3^2 (X^2 - 1) + \beta_2^2 (Y^2 - q^2) + \frac{H^2}{L^2} \right], \quad (5.76)$$

$$\frac{L}{N^2} \left(\frac{N^2 H'}{L} \right)' = \alpha (X^2 + Y^2) H. \quad (5.77)$$

E as equações dos campos métricos N e L são, respectivamente:

$$\frac{(L N N')'}{N^2 L} = \gamma \left[\frac{H'^2}{2\alpha L^2} - \frac{1}{4} (X^2 - 1)^2 - \frac{\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 - \frac{\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right], \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{(N^2 L')'}{N^2 L} &= -\gamma \left[\frac{H'^2}{2\alpha L^2} + (X^2 + Y^2) \frac{H^2}{L^2} + \frac{1}{4} (X^2 - 1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 + \frac{\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Agora o símbolo $(')$ denota as derivadas em relação a x .

Verificamos que as equações de campos (5.75) a (5.79) se reduzem ao modelo Higgs Abeliano [10] se considerarmos um dos campos de Higgs nulo e $\beta_2 = \beta_3 = 0$. Como um de nossos objetivos é comparar nossos resultados com o modelo Abeliano, consideraremos, quando necessário, o campo bosônico $\chi = 0$, o qual em termos das funções adimensionais, corresponde a $Y = 0$.

Vamos escrever as componentes não-nulas do tensor momento-energia em termos das funções adimensionais. A densidade de energia por unidade de comprimento está relacionada à componente T_t^t do tensor momento-energia. A densidade de energia é dada por [3]:

$$\varepsilon = \int \sqrt{{}^{(3)}g} T_t^t d\rho d\phi, \quad (5.80)$$

onde ${}^{(3)}g$ é o determinante do elemento de linha (2+1)-dimensional dado em (5.14), considerando $dz = 0$ e T_t^t é a componente-00 do tensor momento-energia dado por $T_t^t = g^{tt} T_{tt}$. Substituindo g^{tt} , a equação (5.46) e considerando as equações (5.73) e (5.74), obtemos T_t^t em termos das funções adimensionais. Ou seja,

$$\begin{aligned} T_t^t = & \eta_1^4 \lambda_1 \left[\frac{H'^2}{2\alpha L^2} + \frac{1}{2} (X'^2 + Y'^2) + \frac{1}{2} (X^2 + Y^2) \frac{H^2}{L^2} + \frac{1}{4} (X^2 - 1)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 + \frac{\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Portanto, a densidade de energia escrita em termos das funções adimensionais torna-se

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 2\pi \eta_1^2 \int_0^\infty NL \left[\frac{H'^2}{2\alpha L^2} + \frac{1}{2} (X'^2 + Y'^2) + \frac{1}{2} (X^2 + Y^2) \frac{H^2}{L^2} + \frac{1}{4} (X^2 - 1)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 + \frac{\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right] dx. \end{aligned} \quad (5.82)$$

As componentes T_ρ^ρ e T_ϕ^ϕ do tensor momento-energia são obtidas através de $T_\rho^\rho = g^{\rho\rho} T_{\rho\rho}$ e

$T_\phi^\phi = g^{\phi\phi} T_{\phi\phi}$, que escritas em termos das funções adimensionais são, respectivamente,

$$T_\rho^\rho = \eta_1^4 \lambda_1 \left[-\frac{H'^2}{2\alpha L^2} - \frac{1}{2} (X'^2 + Y'^2) + \frac{1}{2} (X^2 + Y^2) \frac{H^2}{L^2} + \frac{1}{4} (X^2 - 1)^2 + \frac{\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 + \frac{\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right], \quad (5.83)$$

$$T_\phi^\phi = \eta_1^4 \lambda_1 \left[-\frac{H'^2}{2\alpha L^2} + \frac{1}{2} (X'^2 + Y'^2) - \frac{1}{2} (X^2 + Y^2) \frac{H^2}{L^2} + \frac{1}{4} (X^2 - 1)^2 + \frac{\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 + \frac{\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right]. \quad (5.84)$$

Seguindo o mesmo procedimento para a componente T_z^z do tensor momento-energia, temos que $T_z^z = T_t^t$.

5.2.3 Condições de Contorno

Para que possamos encontrar as soluções das equações de campo, precisamos definir as condições de contorno. A necessidade de regularidade das soluções na origem e de estabilidade topológica das soluções, levam as seguintes condições de contorno para os campos de Higgs e de gauge,

$$H(0) = 1; \quad H(\infty) = 0, \quad (5.85)$$

$$X(0) = 0, \quad X(\infty) = 1, \quad Y(0) = 0, \quad Y(\infty) = \frac{\eta_2}{\eta_1} = q, \quad (5.86)$$

enquanto que para os campos métricos, as condições de contorno são:

$$N(0) = 1, \quad N'(0) = 0, \quad L(0) = 0, \quad L'(0) = 1. \quad (5.87)$$

Na próxima seção faremos a análise numérica deste sistema de equações e apresentaremos os resultados obtidos.

5.3 Resultados Numéricos

Nosso objetivo nessa seção é analisar numericamente o comportamento das soluções das equações diferenciais que descrevem a corda cósmica não-Abeliana, a partir da escolha de parâmetros físicos do sistema. Além disso, vamos comparar o comportamento dos campos das cordas cósmicas não-Abelianas com o comportamento dos campos das cordas cósmica Abelianas, observando a influência de cada um desses sistemas na geometria do espaço-tempo. É possível obter soluções numéricas para diversos valores dos parâmetros físicos, desde que os mesmos obedeçam à condição do discriminante do potencial, ou seja, $\Delta \equiv \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2 > 0$, onde λ_i são dados em termos dos β_i conforme a equação (5.74). No entanto, para fins de comparação entre o comportamento da corda cósmica não-Abeliana e Abeliana, consideraremos um conjunto específico de parâmetros físicos $\alpha, \gamma, \beta_2, \beta_3, q$, conforme descrito nos gráficos.

Para realizar o estudo numérico, usamos o programa computacional para resolver equações diferenciais COLSYS [69–71]. Os detalhes da implementação do COLSYS para solução das equações diferenciais ordinárias (5.75) a (5.79) que descrevem o comportamento dos campos com as condições de contorno (5.85) a (5.87) estão descritas no Apêndice A e os códigos em FORTRAN estão no apêndice B. Os erros relativos das funções são da ordem 10^{-8} a 10^{-10} e, dependendo da escolha ótima dos valores dos parâmetros físicos, podendo ser até menores.

Analizamos o comportamentos dos campos de Higgs, do campo de gauge e dos campos métricos para o caso Abelianos e não-Abelianos e construímos os gráficos para estes campos como funções da variável adimensional x .

O caso das cordas cósmicas não-Abelianas é apresentado na figura (5.1). Na figura (5.1a), apresentamos o comportamento dos campos de Higgs, X e Y , e do campo de gauge, H . Na

figura (5.1b), apresentamos o comportamento dos campos métricos N e L . Nesta análise, foram utilizados os parâmetros físicos $\alpha = 2.0, \gamma = 0.6, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$.

O caso das cordas cósmicas Abelianas é apresentado na figura (5.2). Na figura (5.2a) apresentamos o comportamento do campo de Higgs X e gauge H e na figura (5.2b) apresentamos o comportamento dos campos métricos. Neste caso, os parâmetros físicos utilizados foram $\alpha = 2.0, \gamma = 0.6$.

Gostaríamos nesse momento de comparar as influências das cordas cósmicas não-Abelianas e Abelianas na geometria do espaço-tempo. Isto é observado na figura (5.3), onde apresentamos a comparação do comportamento dos campos métricos para o caso Abeliano e não-Abeliano. Gostaríamos também de apresentar a densidade linear de energia para estes dois objetos.

Tanto as cordas cósmicas Abelianas, como as cordas cósmicas não-Abelianas apresentam déficit de ângulo planar. Como vimos no capítulo 4, o déficit de ângulo planar é dado pela expressão (4.30),

$$\delta = 2\pi \left[1 - \lim_{\rho \rightarrow \infty} L'(\rho) \right]. \quad (5.88)$$

Considerando os valores dos parâmetros físicos usados na análise apresentada nos gráficos anteriores, os déficits de ângulo planar para a corda cósmica não-Abeliana e Abeliana são,³

$$\frac{\delta_{NA}}{2\pi} \approx 0.7998 \quad \text{e} \quad \frac{\delta_A}{2\pi} \approx 0.3493. \quad (5.89)$$

Também determinamos a densidade linear de energia, ε , calculando numericamente a integral dada na equação (5.82). Para as cordas cósmicas não-Abeliana e Abeliana, as densidades lineares de energia são, respectivamente,

$$\frac{\varepsilon_{NA}}{2\pi\eta_1^2} \approx 1.2856 \quad \text{e} \quad \frac{\varepsilon_A}{2\pi\eta_1^2} \approx 1.1646. \quad (5.90)$$

³Os índices NA e A referem-se a não-Abeliano e Abeliano, respectivamente.

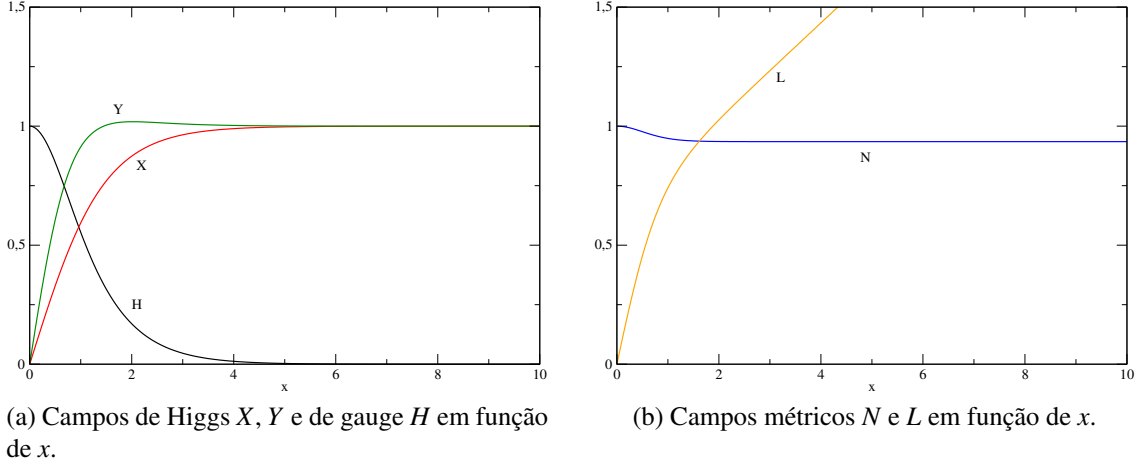


Figura 5.1 Comportamento dos campos para cordas cósmicas não-Abelianas considerando os parâmetros $\alpha = 2.0$, $\gamma = 0.6$, $\beta_2 = 2.0$, $\beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$.

A partir de nossos resultados, verificamos que a corda cósmica não-Abeliana fornece um déficit de ângulo planar maior que o déficit de ângulo planar da corda cósmica Abelianas correspondente, embora a densidade linear de energia seja muito próxima, ou seja,

$$\frac{\delta_{NA}}{\delta_A} \approx 2.290 \quad \text{e} \quad \frac{\varepsilon_{NA}}{\varepsilon_A} \approx 1.104. \quad (5.91)$$

Analizamos também o comportamento da densidade linear de energia por unidade de $2\pi\eta_1^2$ em função do acoplamento dos setores de Higgs, β_3 , e do acoplamento gravitacional, γ , para

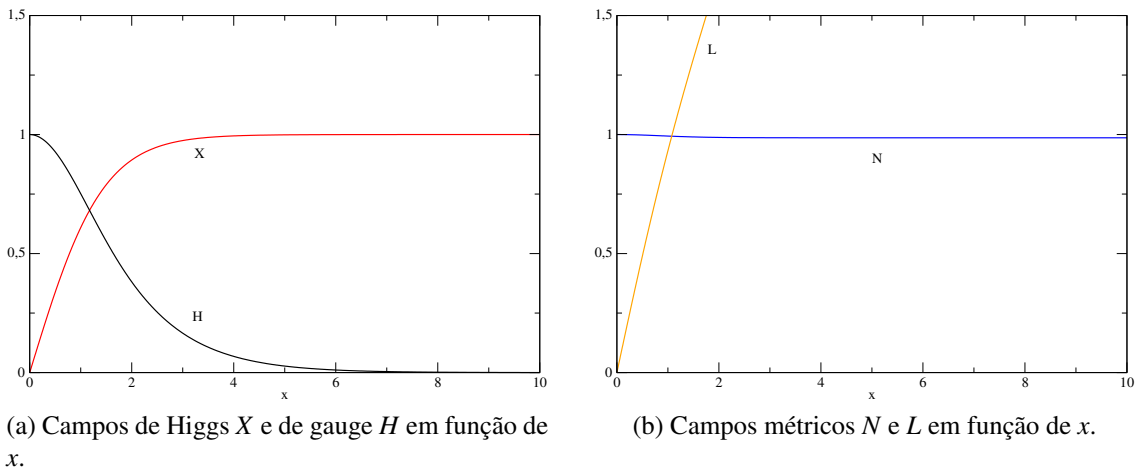


Figura 5.2 Comportamento dos campos para cordas cósmicas Abelianas considerando os parâmetros $\alpha = 2.0$, $\gamma = 0.6$.

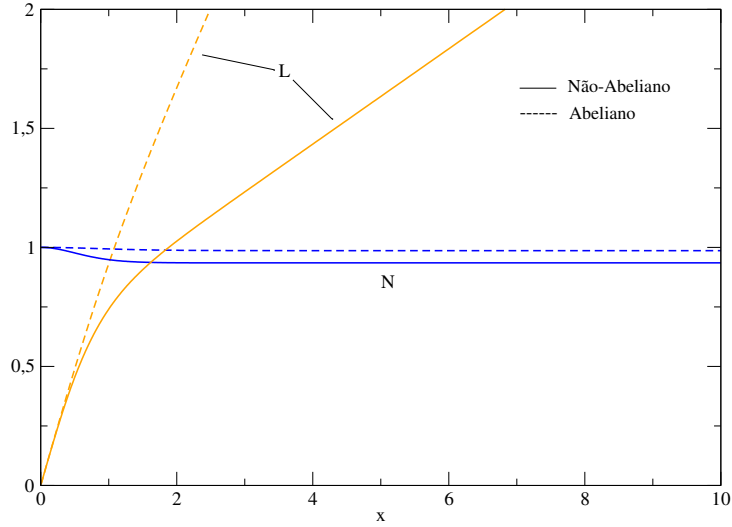


Figura 5.3 Comparação do comportamento dos campos métricos como função de x , considerando $\alpha = 1.0$ e $\gamma = 0.6$. Para o caso das cordas cósmicas não-Abelianas, consideramos $\beta_2 = 2.0$, $\beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$.

cordas cósmicas não-Abelianas. Na figura (5.4a) exibimos o este comportamento considerando $\gamma = 0.6$. Na figura (5.4b), apresentamos o comportamento da densidade linear de energia em termos γ , considerando $\beta_3 = 1.0$. Em ambos os gráficos, os parâmetros físicos foram $\alpha = 1.0$, $\beta_2 = 2.0$ e $q = 1.0$.

O comportamento do déficit de ângulo planar em unidades de 2π , $\delta/2\pi$, é apresentado na figura (5.5a) em função da constante de acoplamento dos setores de Higgs e da constante de acoplamento gravitacional, γ , considerando $\gamma = 0.6$. Na figura (5.5b), exibimos o comportamento do déficit de ângulo planar em unidades de 2π em função da constante de acoplamento gravitacional γ , considerando $\beta_3 = 1.0$. Em ambos os gráficos, mantivemos os parâmentros $\alpha = 2.0$, $\beta_2 = 1.0$ e $q = 1.0$.

Nesta tese, analisamos os casos em que o déficit de ângular planar é menor que 2π . As soluções que obedecem esta condição são chamadas de cordas cósmicas regulares. O déficit de ângulo planar determina a intensidade da modificação na geometria do espaço-tempo provocada pela interação gravitacional do sistema. Para obter cordas cósmicas regulares é necessário uma escolha ótima dos parâmetros físicos $\alpha, \gamma, \beta_2, \beta_3$ e q . Considerando valores fixos de β_2, β_3

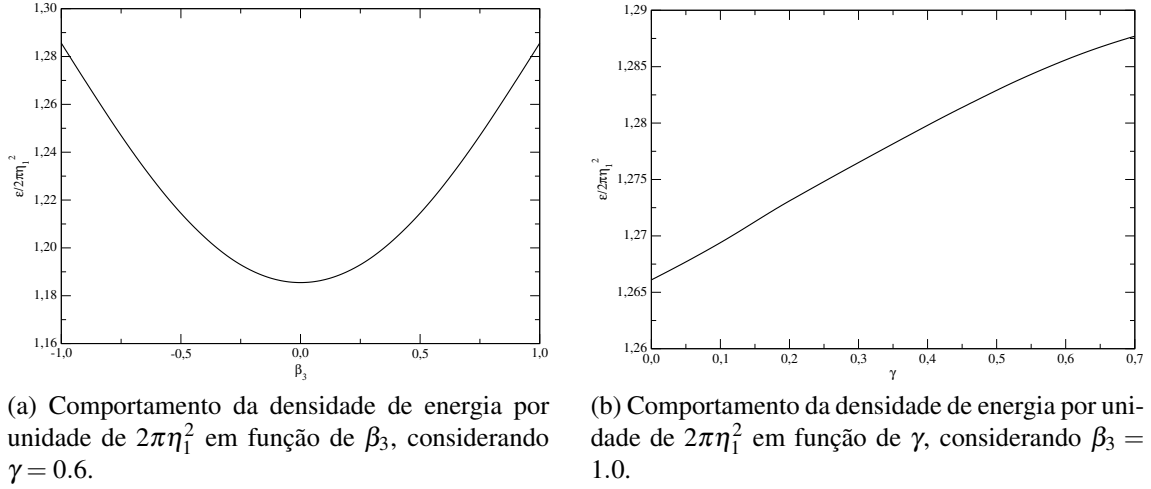


Figura 5.4 Comportamento da densidade de energia por unidade de $2\pi\eta_1^2$ em função da constante de acoplamento dos setores de Higgs, β_3 , e da constante de acoplamento gravitacional, γ . Em ambos os gráficos, consideramos os parâmetros $\alpha = 2.0, \beta_2 = 1.0$ e $q = 1.0$.

e q , podemos determinar as soluções regulares examinando a região abaixo da curva do espaço de parâmetros $(\alpha - \gamma)$. No entanto, pela expressão da densidade de energia dada pela equa-

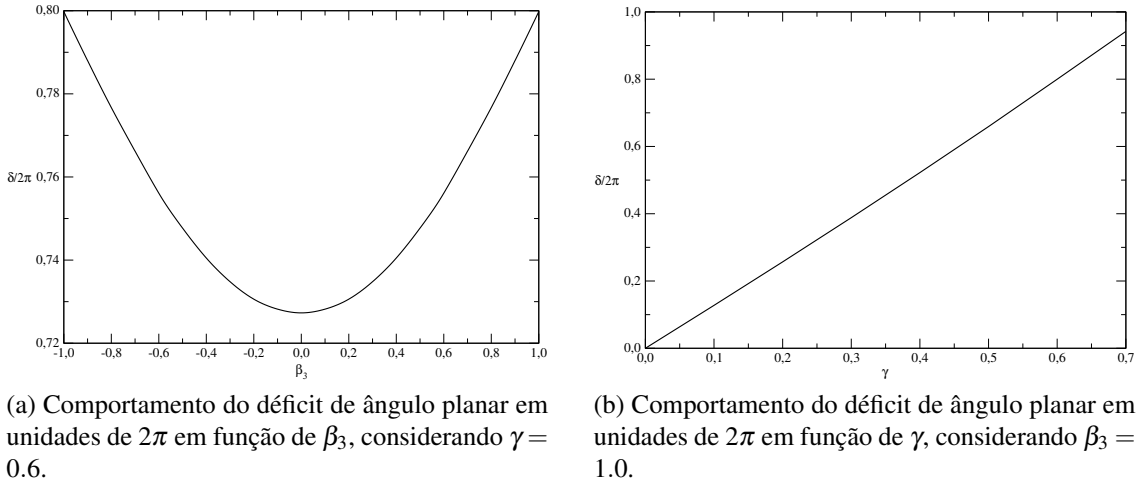


Figura 5.5 Comportamento do déficit de ângulo planar em unidades de 2π em função da constante de acoplamento dos setores de Higgs, β_3 , e da constante de acoplamento gravitacional, γ . Em ambos os gráficos, consideramos os parâmetros $\alpha = 2.0, \beta_2 = 1.0$ e $q = 1.0$.

ção (5.82), a densidade de energia diminui com o aumento do parâmetro α e aumenta com o crescimento do parâmetro γ , conforme mostrado na figura (5.4b). Portanto, as cordas cósmicas regulares podem ser obtidas até um valor crítico de γ , que chamaremos de γ_{cr} . O valor de

γ_{cr} é dado pela curva no espaço de parâmetros $(\alpha - \gamma)$. Para $\beta_3 = 0$, não há contribuição da interação entre setores bosônicos, e o valor de γ_{cr} torna-se maior que no caso em que $\beta_3 \neq 0$. Isto é, chamamos a atenção para o fato que desligando a interação entre os setores bosônicos, poderemos obter soluções regulares para maiores valores de γ . Na figura (5.6) apresentamos o gráfico do espaço de parâmetros $(\alpha - \gamma)$ para dois valores distintos de β_3 , considerando os parâmetros $\beta_2 = 2.0$ e $q = 1.0$.

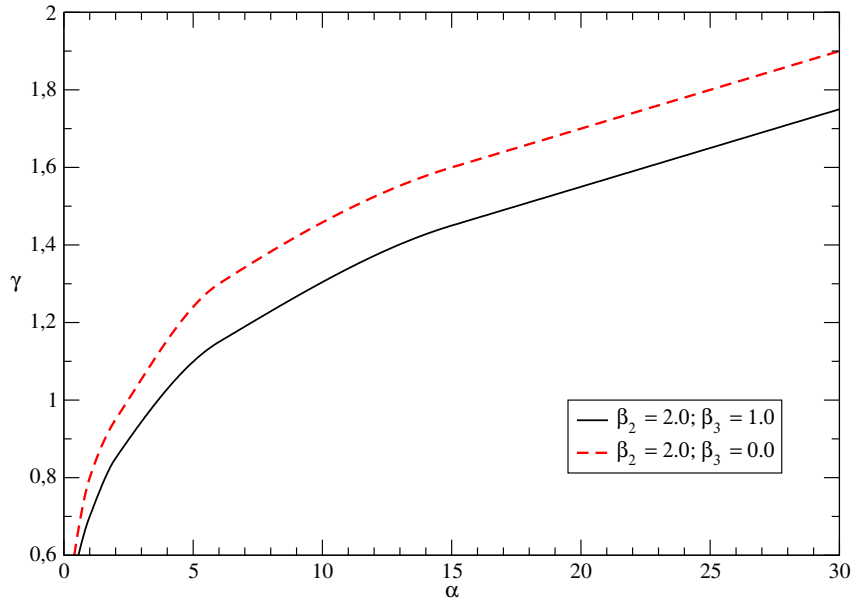


Figura 5.6 Região no espaço de parâmetros $(\alpha - \gamma)$ que contém cordas cósmicas não-Abelianas regulares, considerando $\beta_2 = 1.0$ e $q = 1.0$.

5.4 Caso Especial

Sabemos que o sistema Higgs-Abeliano apresenta soluções BPS [72, 73] para as equações de campo. Neste caso, os campos satisfazem um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem que minimiza a densidade energia da corda cósmica. Esta configuração de campos é obtida considerando $\alpha = 2.0$ nas equações de movimento e considerando $N = 1$ para o caso da

corda cósmica Abelian [10]. Para o sistema não-Abeliano estudado nesta tese, ele se reduzirá à condição de ‘BPS’ do sistema Higgs Abelian a partir das equações diferenciais (5.75) a (5.79) considerando $\beta_2 = \beta_3 = 0$, $\alpha = 2.0$, o campo $Y = 0$ e o campo métrico $N = 1$. Substituindo esses valores na equação (5.78) e (5.79), obtemos respectivamente,

$$H' = L(X^2 - 1) \quad \text{e} \quad L'' = -\gamma L \left[\frac{X^2 H^2}{L^2} + \frac{(X^2 - 1)^2}{2} \right] \quad (5.92)$$

Substituindo $\alpha = 2$, $Y = 0$ e $N = 1$ na equação (5.77), obtemos

$$X' = X \frac{H}{L}. \quad (5.93)$$

O conjunto de equações (5.92) e (5.93) correspondem à condição de BPS. Desprezando a influência na geometria, isto é, tornando $\gamma = 0$ e $L = 1$, encontramos um conjunto de duas equações diferenciais lineares e acopladas.

Vamos agora analisar o caso em que as equações de campos da corda cósmica não-Abeliana poderia apresentar a condição análoga à de BPS. Para obter a solução tipo ‘BPS’ a partir das equações diferenciais do sistema não-Abeliano, precisamos considerar $\alpha = 2.0$, $\beta_i = 1.0$, $N = 1$ e $q = 1.0$ nas equações (5.78) e (5.79). Dessa forma, encontramos, $\Delta \equiv \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2 = 0$. Esta condição corresponde a um ponto de sela, e não podemos mais afirmar que a solução correspondente é topologicamente estável. Adotando esses valores, obtemos

$$H' = L(X^2 + Y^2 - 2), \quad (5.94)$$

$$L'' = -\gamma L \left[(X^2 + Y^2) \frac{H^2}{L^2} + \frac{1}{2} (X^2 + Y^2 - 2)^2 \right]. \quad (5.95)$$

Considerando que $\alpha = 2.0$ na equação (5.77), duas equações diferenciais particulares e linear-

mente independentes podem ser obtidas. São elas:

$$X' = X \frac{H}{L} \quad \text{e} \quad Y' = Y \frac{H}{L}. \quad (5.96)$$

Substituindo (5.96) nas equações (5.83) e (5.84), verificamos que as componentes radial e azimutal do tensor momento-energia se anulam⁴,

$$T_\rho^\rho = T_\phi^\phi = 0. \quad (5.97)$$

A densidade de energia e a componente axial do tensor momento-energia podem ser determinadas substituindo as equações (5.94) a (5.96) na equação (5.81)

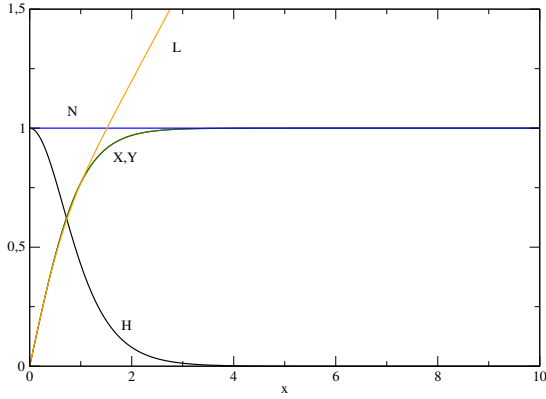
$$T_z^z = T_t^t = \frac{\eta_1^4 \lambda_1}{2L} [H(X'^2 + Y'^2 - 2)]', \quad (5.98)$$

onde as derivadas são em relação a x .

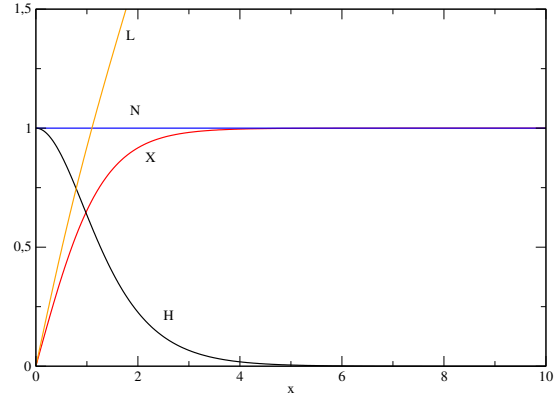
Como o objetivo de mostrar a consistência entre as equações de campos no limite BPS, com as equações originais, apresentamos nossos resultados numéricos para as cordas cósmicas não-Abeliana e Abeliana. Esses resultados são apresentados na figura (5.7). Na figura (5.7a) exibimos o comportamento dos campos de Higgs, de gauge e dos campos métricos para o caso especial tipo BPS para a corda cósmica não-Abeliana, considerando $\alpha = 2.0, \beta_2 = \beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$. Vemos que as curvas correspondentes aos campos X e Y coincidem, o que está de acordo com a equação (5.96). Na figura (5.7b), apresentamos o comportamento dos campos de Higgs, de gauge e campos métricos para a condição de BPS para a corda cósmica Abeliana, considerando $\alpha = 2.0$. Para ambos os casos, consideramos $\gamma = 0.6$.

Gostaríamos de mencionar que para ambas as configurações, as densidades lineares de energia por unidade de $2\pi\eta_1^2$ são iguais a unidade. Além disso, o déficit de ângulo planar para

⁴Esse fato também se verifica na configuração BPS para cordas Abelianas.



(a) Comportamento dos campos de Higgs, de gauge e métricos para o caso especial da corda cósmica não-Abeliana.



(b) Comportamento dos campos de Higgs, de gauge e métricos para a corda cósmica Abeliana na condição de BPS.

Figura 5.7 Comportamento dos campos para o caso especial da corda cósmica não-Abeliana considerando $\alpha = 2.0$, $\gamma = 0.6$, $\beta_2 = \beta_3 = 1$ e $q = 1$, e para a corda cósmica Abeliana na condição de BPS, considerando $\alpha = 2.0$ e $\gamma = 0.6$.

o caso de cordas cósmicas Abelianas na condição de BPS é [74],

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{\gamma}{2}. \quad (5.99)$$

Para o caso especial da corda cósmica não-Abeliana, utilizando as equações (5.94) a (5.96), obtemos

$$L'' = -\frac{\gamma}{2} [H(X^2 + Y^2 - 2)]'. \quad (5.100)$$

Integrando a equação acima, obtemos

$$L'(x) \Big|_0^\infty = -\frac{\gamma}{2} [H(x) (X^2(x) + Y^2(x) - 2)] \Big|_0^\infty. \quad (5.101)$$

A partir das condições de contorno, encontramos,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L'(x) = 1 - \gamma. \quad (5.102)$$

Usando a definição de déficit de ângulo planar dada pela equação (4.30), encontramos,

$$\frac{\delta}{2\pi} = \gamma. \quad (5.103)$$

Vemos, portanto, que embora ambas soluções apresentem a mesma densidade linear de energia, o déficit de ângulo planar para a corda cósmica não-Abeliana na condição semelhante à condição de BPS é o dobro do déficit de ângulo planar para a corda cósmica Abeliana na condição de BPS. A razão para isto é que no caso da corda cósmica não-Abeliana na condição semelhante à condição de BPS, existe a contribuição dos dois setores bosônicos, enquanto que no caso Abeliano na condição de BPS, há apenas um setor bosônico. Também gostaríamos de mencionar que nossos resultados numéricos apresentam em ambos os casos,

- densidade linear de energia igual a unidade;
- deficit de ângulo planar em acordo com as equações (5.99) e (5.103).

Cordas Cósmicas não-Abelianas no Espaço-tempo de de Sitter e de anti-de Sitter

6.1 O Modelo

O espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter são soluções maximalmente simétricas das equações de campo de Einstein na presença de valores positivo e negativo da constante cosmológica Λ , respectivamente. Devido à simetria, vários fenômenos físicos foram estudados recentemente nessas geometrias. Uma breve descrição do espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter foi realizada nas subseções 2.8.1 e 2.8.2 desta tese.

No capítulo 5 estudamos o comportamento das cordas cósmicas na ausência da constante cosmológica. Neste capítulo, estudaremos a influência da constante cosmológica sobre as cordas cósmicas Abelianas e não-Abelianas. Para este objetivo, o modelo que estudaremos é descrito pela seguinte ação:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m \right), \quad (6.1)$$

onde R é o escalar de Ricci, G é a constante gravitacional de Newton e Λ é a constante cosmológica. Para o espaço-tempo de de Sitter, $\Lambda > 0$, enquanto que para o espaço-tempo de anti-de Sitter, $\Lambda < 0$.

A densidade de lagrangiano de matéria para o modelo de Higgs não-Abeliano será o mesmo

utilizado no capítulo 5, ou seja

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}(D_\mu \varphi^a)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu \chi^a)^2 - V(\varphi^a, \chi^a), \quad a = 1, 2, 3; \quad (6.2)$$

onde $F_{\mu\nu}^a$ denota o tensor intensidade de campo do tipo Yang-Mills,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (6.3)$$

Da mesma forma que descrevemos no capítulo anterior, as derivadas covariantes dos campos de Higgs são dadas por $D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b \varphi^c$, onde os índices latinos denotam o grupo de simetria $SU(2)$. A_μ^b é o iso-potential vetor e e é a constante de acoplamento de gauge. O potencial de interação, $V(\varphi^a, \chi^a)$, é definido pela expressão

$$\begin{aligned} V(\varphi^a, \chi^a) = & \frac{\lambda_1}{4} [(\varphi^a)^2 - \eta_1^2]^2 + \frac{\lambda_2}{4} [(\chi^a)^2 - \eta_2^2]^2 \\ & + \frac{\lambda_3}{2} [(\varphi^a)^2 - \eta_1^2] [(\chi^a)^2 - \eta_2^2], \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde λ_1 e λ_2 são constantes positivas que descrevem o autoacoplamento dos campos de Higgs, e λ_3 é a constante de acoplamento dos setores bosônicos. η_1 e η_2 são parâmetros que corresponde às escalas de energias onde a simetria de gauge é espontaneamente quebrada.

Conforme descrevemos na seção 5.1, potencial de interação, $V(\varphi^a, \chi^a)$, apresenta diferentes propriedades de acordo com o sinal do discriminante $\Delta \equiv \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2$ [68]:

- Para $\Delta > 0$, o potencial é positivo e o seu mínimo global é determinado para $(\varphi^a)^2 = \eta_1^2$ and $(\chi^a)^2 = \eta_2^2$.
- Para $\Delta < 0$, esta configuração leva a pontos de sela, com dois mínimos locais em:

$$(\varphi^a)^2 = 0, \quad (\chi^a)^2 = \eta_2^2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \eta_1^2 \quad (6.5)$$

e

$$(\chi^a)^2 = 0, \quad (\varphi^a)^2 = \eta_1^2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \eta_2^2. \quad (6.6)$$

O valor do potencial para estes casos são, respectivamente,

$$V_{min} = \frac{\eta_1^4}{4\lambda_2} \Delta \quad \text{e} \quad V_{min} = \frac{\eta_2^4}{4\lambda_1} \Delta. \quad (6.7)$$

Ambos valores de V_{min} são negativos para $\Delta < 0$.

6.1.1 O Ansatz

O ansatz adotado para as configurações de campo estático e com simetria cilíndrica será o mesmo utilizado no capítulo 5. Desta forma, vamos considerar o elemento de linha mais geral invariante sob boost de Lorentz na direção do eixo z e cilindricamente simétrico,

$$ds^2 = N^2(\rho) dt^2 - d\rho^2 - L^2(\rho) d\phi^2 - N^2(\rho) dz^2. \quad (6.8)$$

Para esta métrica, as componentes não-nulas do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, são

$$R_{tt} = -R_{zz} = \frac{NLN'' + NN'L' + L(N')^2}{L}, \quad (6.9)$$

$$R_{\rho\rho} = \frac{2LN'' + NL''}{NL}, \quad (6.10)$$

$$R_{\phi\phi} = \frac{L(2N'L' + NL'')}{N}, \quad (6.11)$$

onde as derivadas são em relação a ρ .

Para os campos de Higgs e de gauge, temos as seguintes expressões [34]:

$$\varphi^a(\rho) = f(\rho) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

$$\chi^a(\rho) = g(\rho) \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

$$\vec{A}^a(\rho) = \hat{\phi} \left(\frac{1-H(\rho)}{e\rho} \right) \delta_{a,3} \quad (6.14)$$

e

$$A_t^a(\rho) = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (6.15)$$

Novamente ressaltamos que ambos campos bosônicos satisfazem a condição de ortogonalidade, $\varphi^a \cdot \chi^a = 0$.

6.2 Equações de Campo

Para encontrarmos as equações de campos, usaremos a mesma notação do capítulo 5 para as variáveis e funções adimensionais, ou seja,

$$x = \sqrt{\lambda_1} \eta_1 \rho, \quad f(\rho) = \eta_1 X(x), \quad g(\rho) = \eta_1 Y(x), \quad \text{e} \quad L(x) = \sqrt{\lambda_1} \eta_1 L(\rho). \quad (6.16)$$

Assim, a densidade de lagrangiano dependerá apenas das variáveis e parâmetros adimensionais:

$$\alpha = \frac{e^2}{\lambda_1}, \quad q = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad \beta_i^2 = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \gamma = \kappa \eta_1^2, \quad \bar{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\eta_1^2 \lambda_1} \quad \text{e} \quad \kappa = 8\pi G. \quad (6.17)$$

Para o espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter, escreveremos a equação de Einstein convenientemente da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad \text{com} \quad T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \mu, \nu = t, x, \phi, z. \quad (6.18)$$

O tensor momento-energia é dado pela expressão (5.42),

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m \right), \quad g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (6.19)$$

A variação da ação (6.1) em relação aos campos de matéria e de gauge levará as mesmas equações de campo de Higgs e de gauge encontradas no capítulo 5. O procedimento para obter estas equações de campo foi detalhado nas subseções 5.1.1 e 5.2.1. Portanto, apenas apresentaremos as equações dos campos de Higgs e de gauge. Estas equações são:

$$\frac{(N^2 L X')'}{N^2 L} = X \left[X^2 - 1 + \beta_3^2 (Y^2 - q^2) + \frac{H^2}{L^2} \right], \quad (6.20)$$

$$\frac{(N^2 L Y')'}{N^2 L} = Y \left[\beta_3^2 (X^2 - 1) + \beta_2^2 (Y^2 - q^2) + \frac{H^2}{L^2} \right], \quad (6.21)$$

$$\frac{L}{N^2} \left(\frac{N^2 H'}{L} \right)' = \alpha (X^2 + Y^2) H. \quad (6.22)$$

Para determinarmos as equações de campos métricos, seguiremos um procedimento semelhante ao realizado na seção 5.2.2, mas agora acrescentaremos a constante cosmológica, Λ , nas equações de Einstein. Assim, da mesma forma que procedemos no capítulo anterior, devido ao fato que apenas duas equações de campos métricos são linearmente independentes, precisamos meramente encontrar uma equação para o campo métrico N e outra equação para o campo métrico L . Utilizando a equação (6.18), a equação de Einstein para a coordenada t torna-se,

$$R_{tt} = -\kappa \left(T_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} T \right) + \Lambda g_{tt}, \quad (6.23)$$

enquanto que para a coordenada ϕ , escrevemos a equação de Einstein como

$$R_{\phi\phi} = -\kappa \left(T_{\phi\phi} - \frac{1}{2} g_{\phi\phi} T \right) + \Lambda g_{\phi\phi}. \quad (6.24)$$

As componentes T_{tt} , $T_{\phi\phi}$ são dadas, respectivamente, pelas equações (5.46) e (5.56), ou seja,

$$\begin{aligned} T_{tt} = & \frac{A'^2 N^2}{2e^2 L^2} + \frac{1}{2} \left[N^2 f'^2 + \frac{N^2 f^2}{L^2} (1-A)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[N^2 g'^2 + \frac{N^2 g^2}{L^2} (1-A)^2 \right] \\ & + \frac{\lambda_1 N^2}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 + \frac{\lambda_2 N^2}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 + \frac{\lambda_3 N^2}{2} (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \end{aligned} \quad (6.25)$$

e

$$\begin{aligned} T_{\phi\phi} = & \frac{A'^2}{2e^2} - \frac{1}{2} \left[L^2 f'^2 - f^2 (1-A)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[L^2 g'^2 - g^2 (1-A)^2 \right] \\ & - \frac{\lambda_1 L^2}{4} (f^2 - \eta_1^2)^2 - \frac{\lambda_2 L^2}{4} (g^2 - \eta_2^2)^2 - \frac{\lambda_3 L^2}{2} (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \end{aligned} \quad (6.26)$$

O traço do tensor momento-energia, T , é dado pela equação (5.61), ou seja,

$$\begin{aligned} T = & f'^2 + g'^2 + \frac{f^2}{L^2} (1-A)^2 + \frac{g^2}{L^2} (1-A)^2 \\ & + \lambda_1 (f^2 - \eta_1^2)^2 + \lambda_2 (g^2 - \eta_2^2)^2 + 2\lambda_3 (f^2 - \eta_1^2) (g^2 - \eta_2^2). \end{aligned} \quad (6.27)$$

As componentes do tensor métrico g_{tt} e $g_{\phi\phi}$ são determinados a partir do elemento de linha (6.8). Substituindo g_{tt} e as equações (6.9), (6.25) e (6.27) na equação (6.23) e considerando as reparametrizações (6.16) e (6.17), obtemos para o campo métrico N ,

$$\frac{(LNN')'}{N^2 L} = -\bar{\Lambda} + \gamma \left[\frac{H'^2}{2\alpha L^2} - \frac{1}{4} (X^2 - 1)^2 - \frac{\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 - \frac{\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right]. \quad (6.28)$$

De maneira semelhante, substituindo $g_{\phi\phi}$, (6.11), (6.26) e (6.27) na equação (6.24) e conside-

rando as transformações (6.16) e (6.17), obtemos para o campo métrico L ,

$$\begin{aligned} \frac{(N^2 L')'}{N^2 L} = & -\bar{\Lambda} - \gamma \left[\frac{H'^2}{2\alpha L^2} + (X^2 + Y^2) \frac{H^2}{L^2} + \frac{1}{4} (X^2 - 1)^2 + \frac{\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

As derivadas dessas equações são em relação a x . O sistema de equações diferenciais formado pelas equações (6.20) a (6.22), (6.28) e (6.29) descrevem a corda cósmica não-Abeliana no espaço-tempo de de Sitter e de anti-de Sitter¹.

Para melhor visualização deste sistema de equações diferenciais, vamos reunir as equações de campo que descrevem a corda cósmica não-Abeliana abaixo. A partir das equações de Euler-Lagrange, obtivemos as equações de campo de Higgs e de gauge,

$$\frac{(N^2 L X')'}{N^2 L} = X \left[X^2 - 1 + \beta_3^2 (Y^2 - q^2) + \frac{H^2}{L^2} \right], \quad (6.30)$$

$$\frac{(N^2 L Y')'}{N^2 L} = Y \left[\beta_3^2 (X^2 - 1) + \beta_2^2 (Y^2 - q^2) + \frac{H^2}{L^2} \right], \quad (6.31)$$

$$\frac{L}{N^2} \left(\frac{N^2 H'}{L} \right)' = \alpha (X^2 + Y^2) H. \quad (6.32)$$

E a partir da equação de Einstein, obtivemos as equações de campo métrico,

$$\frac{(L N N')'}{N^2 L} = -\bar{\Lambda} + \gamma \left[\frac{H'^2}{2\alpha L^2} - \frac{1}{4} (X^2 - 1)^2 - \frac{\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 - \frac{\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right]. \quad (6.33)$$

¹Dependendo, respectivamente, se a constante cosmológica, $\bar{\Lambda}$, for positiva ou negativa.

e

$$\begin{aligned} \frac{(N^2 L')'}{N^2 L} = & -\bar{\Lambda} - \gamma \left[\frac{H'^2}{2\alpha L^2} + (X^2 + Y^2) \frac{H^2}{L^2} + \frac{1}{4} (X^2 - 1)^2 + \frac{\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Como podemos notar, este sistema de equações diferenciais não-lineares e acopladas é mais árduo de ser analisado que o caso analisado no capítulo anterior onde a constante cosmológica é nula. Da mesma forma que fizemos no capítulo 5, apenas métodos numéricos permitem a análise do comportamento dos campos.

Verificamos que as equações de campos (6.30) a (6.34) se reduzem ao modelo Higgs Abelianiano na presença da constante cosmológica se considerarmos um dos campos de Higgs nulo e $\beta_2 = \beta_3 = 0$ [11]. Como um de nossos objetivos é comparar nossos resultados com o modelo Abelianiano na presença da constante cosmológica, consideraremos, quando necessário, o campo bosônico $\chi = 0$, o qual em termos das funções adimensionais, corresponde a $Y = 0$.

6.2.1 Condições de Contorno

Para que possamos analisar o comportamento dos campos definidos pelo sistema de equações diferenciais (6.30) a (6.34) será necessário definirmos condições de contorno que serão estabelecidas pela necessidade de regularidade das soluções na origem. No entanto, o sinal da constante cosmológica, $\bar{\Lambda}$, determinará diferentes tipos de condições de contorno para os campos de matéria e de gauge para grandes distâncias [11].

- Para o espaço-tempo de de Sitter ($\bar{\Lambda} > 0$), as condições de contorno na origem para os campos de Higgs e de gauge são:

$$H(0) = 1, X(0) = 0, Y(0) = 0. \quad (6.35)$$

Como veremos, a constante cosmológica fornecerá um horizonte cosmológico para o tensor métrico [75]. Portanto, devemos integrar estas equações de campo até o valor da coordenada $x = x_0$ para que o núcleo da corda cósmica permaneça dentro deste horizonte. Para que isto ocorra, as condições de contorno no horizonte cosmológico são:

$$X(x = x_0) = 1, \quad Y(x = x_0) = \frac{\eta_2}{\eta_1} = q \quad \text{e} \quad H(x = x_0) = 0. \quad (6.36)$$

- Para o espaço-tempo de anti-de Sitter ($\bar{\Lambda} < 0$), não há horizonte cosmológico. Portanto, as condições de contorno são:

$$H(0) = 1; \quad H(\infty) = 0, \quad (6.37)$$

$$X(0) = 0, \quad X(\infty) = 1, \quad Y(0) = 0 \quad \text{e} \quad Y(\infty) = \frac{\eta_2}{\eta_1} = q. \quad (6.38)$$

em ambas as geometrias, as condições de contorno para os campos métricos são dadas por:

$$N(0) = 1, \quad N'(0) = 0, \quad L(0) = 0, \quad L'(0) = 1. \quad (6.39)$$

6.2.2 Solução de Vácuo

Antes de analisarmos a solução de vácuo, vamos definir uma função $u(x)$, tal que [11],

$$u(x) = \sqrt{-g} = N^2 L. \quad (6.40)$$

Calculado a segunda derivada $u''(x)$ e dividindo por $u(x)$, temos,

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = 2 \frac{(LNN')'}{N^2 L} + \frac{(N^2 L)'}{N^2 L} \quad (6.41)$$

Utilizando as equações (6.33) e (6.34) encontramos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{u''(x)}{u(x)} = & -3\bar{\Lambda} - \gamma \left[-\frac{H'^2}{2\alpha L^2} + (X^2 + Y^2) \frac{H^2}{L^2} + \frac{3}{4} (X^2 - 1)^2 + \frac{3\beta_2^2}{4} (Y^2 - q^2)^2 \right. \\ & \left. + \frac{3\beta_3^2}{2} (X^2 - 1) (Y^2 - q^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.42)$$

A solução de vácuo é obtida substituindo $X(x) = 1$, $Y(x) = q$ e $H(x) = 0$ na equação (6.42).

Assim, temos que:

$$u''(x) + 3\bar{\Lambda}u(x) = 0. \quad (6.43)$$

- Para o espaço-tempo de de Sitter ($\bar{\Lambda} > 0$), a solução da equação (6.43) é dada por

$$N^2(x)L(x) = A_1 \sin(\sqrt{3\bar{\Lambda}}x) + B_1 \cos(\sqrt{3\bar{\Lambda}}x). \quad (6.44)$$

Usando as condições de contorno dadas pela equação (6.39), encontramos a expressão

$$N^2(x)L(x) = \frac{1}{\sqrt{3\bar{\Lambda}}} \sin(\sqrt{3\bar{\Lambda}}x). \quad (6.45)$$

Aplicando o método sugerido por Linet [76], encontramos as soluções para os campos métricos,

$$N(x) = \cos^{2/3} \left(\sqrt{3\bar{\Lambda}} \frac{x}{2} \right) \quad (6.46)$$

e

$$L(x) = \frac{2^{2/3}}{\sqrt{3\bar{\Lambda}}} \left[\sin(\sqrt{3\bar{\Lambda}}x) \right]^{1/3} \left[\tan \left(\sqrt{3\bar{\Lambda}} \frac{x}{2} \right) \right]^{2/3}. \quad (6.47)$$

- Para o espaço-tempo de anti-de Sitter ($\bar{\Lambda} < 0$), a solução da equação (6.43) é dada por

$$N^2(x)L(x) = A_2 \exp(\sqrt{3|\bar{\Lambda}}x) + B_2 \exp(-\sqrt{3|\bar{\Lambda}}x) \quad (6.48)$$

Usando as condições de contorno dadas na equação (6.39), encontramos a expressão

$$N^2(x)L(x) = \frac{1}{\sqrt{3|\bar{\Lambda}|}} \sinh\left(\sqrt{3|\bar{\Lambda}|}x\right). \quad (6.49)$$

Novamente, aplicando o método sugerido por Linet, encontramos as soluções para os campos métricos [76],

$$N(x) = \cosh^{2/3}\left(\sqrt{3|\bar{\Lambda}|}\frac{x}{2}\right) \quad (6.50)$$

e

$$L(x) = \frac{2^{2/3}}{\sqrt{3|\bar{\Lambda}|}} \left[\sinh(\sqrt{3|\bar{\Lambda}|}x) \right]^{1/3} \left[\tanh\left(\sqrt{3|\bar{\Lambda}|}\frac{x}{2}\right) \right]^{2/3}. \quad (6.51)$$

Gostaríamos de salientar que o espaço-tempo de de Sitter apresenta naturalmente horizonte cosmológico [75]. No caso das condições de vácuo, este horizonte cosmológico surge para o primeiro zero da função $N(x)$, ou seja, para $x_0^v = \frac{\pi}{\sqrt{3\bar{\Lambda}}}$. Nesta mesma posição, $L(x \rightarrow x_0^v) \rightarrow \infty$. Por outro lado, o espaço-tempo de anti-de Sitter não apresenta horizonte cosmológico.

6.3 Resultados Numéricos

Nesta seção, iremos investigar numericamente nosso sistema. Para integrar numericamente as equações (6.30) a (6.34) com as condições de contorno apropriadas (6.35) a (6.39), que correspondem ao espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter, usaremos o programa computacional para resolver equações diferenciais COLSYS [69–71]. Os detalhes da implementação do COLSYS estão descritas no apêndice A e os códigos em FORTRAN estão no apêndice B. Os erros relativos das funções são da ordem 10^{-8} a 10^{-10} e, dependendo da escolha ótima dos valores dos parâmetros físicos, podendo ser até menores.

Nosso objetivo é analisar o comportamento das soluções para a corda cósmica não-Abeliana

no espaço-tempo de de Sitter e de anti-de Sitter. A partir da escolha dos parâmetros físicos do sistema para valores positivos da constante cosmológica (espaço-tempo de de Sitter) e de valores negativos da constante cosmológica (espaço-tempo de anti-de Sitter) construímos as soluções numéricas. Também compararemos o comportamento dos campos com o caso correspondente de cordas cósmicas Abelianas, observando a influência de cada sistema na geometria do espaço-tempo.

6.3.1 Espaço-tempo de de Sitter

Analizamos o comportamento dos campos de Higgs, de gauge e dos campos métricos para a corda cósmica não-Abeliana e Abeliana no espaço-tempo de de Sitter. O caso não-Abeliano é apresentado na figura (6.1). Na figura (6.1a) apresentamos o comportamento dos campos de Higgs, X e Y , e de gauge, H . Na figura (6.1b) apresentamos os campos métricos N e L . Em ambos os gráficos, os parâmetros físicos utilizados foram $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.61$, $\bar{\Lambda} = 0.0075$, $\beta_2 = 2.0$, $\beta_3 = 1.0$ and $q = 1.0$.

Na figura (6.2) apresentamos o caso Abeliano. Na figura (6.2a) exibimos o comportamento dos campos de Higgs, X , e de gauge, H . Na figura (6.2b), exibimos o comportamento dos campos métricos N e L . Nesta análise, foram utilizados os parâmetros físicos $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.61$, $\bar{\Lambda} = 0.0075$.

Comparando a figura (6.1b) com a figura (6.2b), vemos que ambos sistemas apresentam horizontes cosmológicos. Verificamos que o horizonte cosmológico para a corda cósmica não-Abeliana é menor que para a corda cósmica Abeliana. Além disso, para os parâmetros físicos utilizados na análise numérica, os campos de matéria e de gauge alcançam os valores assintóticos dentro do horizonte cosmológico em ambos os casos.

Também observamos que para solução de vácuo, o horizonte cosmológico é determinado em $x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3\bar{\Lambda}}}$, o qual para o valor da constante cosmológica adotado, fornece um valor de $x_0 \approx 20.94395$.

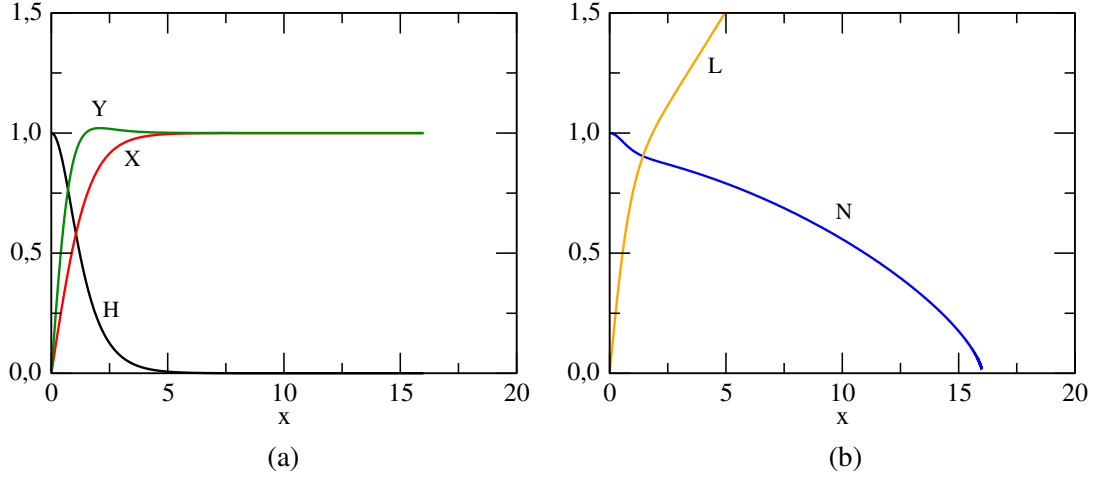


Figura 6.1 Corda cósmica não-Abeliana: (a) Comportamento dos campos de Higgs e de gauge em função de x . (b) Comportamento dos campos métricos em função de x . Em ambos os gráficos consideramos os parâmetros físicos $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.61$, $\bar{\Lambda} = 0.0075$, $\beta_2 = 2.0$, $\beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$.

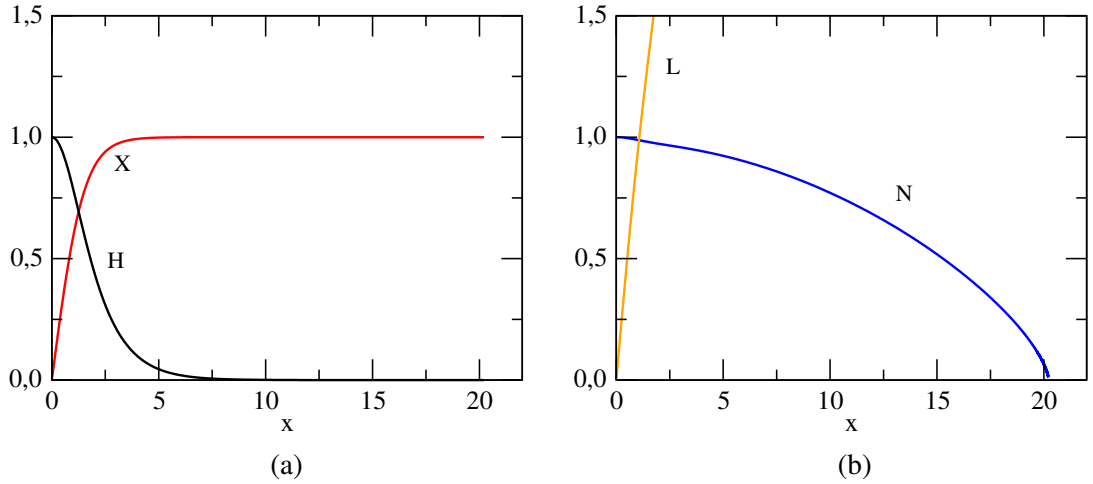


Figura 6.2 Corda cósmica Abeliana: (a) Comportamento dos campos de Higgs e de gauge fields em função de x . (b) Comportamento dos campos métricos em função de x . Em ambos os gráficos consideramos os parâmetros físicos $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.61$, $\bar{\Lambda} = 0.0075$.

Valores mais realísticos para o horizonte cosmológico foram obtidos em ambos os gráficos, considerando comportamentos não-trivial dos campos. Motivado por esse fato, procuramos investigar a dependência do horizonte cosmológico em relação a constante de acoplamento gravitacional, γ , e da constante cosmológica, $\bar{\Lambda}$.

Analizamos a dependência do horizonte cosmológico x_0 em relação a γ . Nesta análise,

fixamos os parâmetros físicos α , β_2 , β_3 , $\bar{\Lambda}$ e q e obtemos o valor do horizonte cosmológico quando o campo métrico $N(x = x_0)$ se anula. Nossos resultados numéricos para $\alpha = 0.8$, $\beta_2 = 2.0$, $\beta_3 = 1.0$, $\bar{\Lambda} = 0.0075$ and $q = 1.0$ são apresentados na figura (6.3a). Observamos que o horizonte cosmológico, x_0 , diminui com o aumento do valor da constante de acolplamento gravitacional, γ .

Para determinar a dependência do horizonte cosmológico em relação a $\bar{\Lambda}$ fixamos α , γ , β_2 , β_3 e q e obtemos o valor do horizonte cosmológico quando o campo métrico $N(x)$ se anula. Nossos resultados são apresentados na figura (6.3b). Verificamos claramente que o valor do horizonte cosmológico, x_0 , diminui à medida que o valor da constante cosmológica, $\bar{\Lambda}$, aumenta. Neste gráfico também apresentamos o comportamnto do horizonte cosmológico na condição de vácuo em relação a $\bar{\Lambda}$.

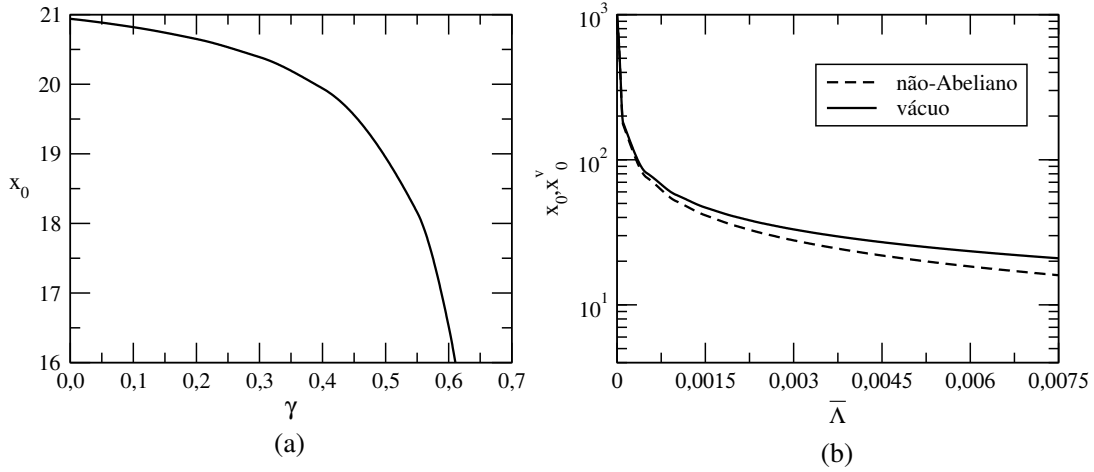


Figura 6.3 (a) Comportamento do horizonte cosmológico x_0 , em função de γ considerando os parâmetros físicos $\alpha = 0.8$, $\beta_2 = 2.0$, $\beta_3 = 1.0$, $\bar{\Lambda} = 0.0075$ e $q = 1.0$. (b) A linha tracejada representa o comportamento do horizonte consmológico, x_0 , para corda cósmica não-Abeliana em função de $\bar{\Lambda}$. Os parâmetros físicos utilizados foram $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.61$, $\beta_2 = 2.0$, $\beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$. A linha sólida corresponde ao comportamento do horizonte cosmológico, x_0^v , na condição de vácuo.

6.3.2 Espaço-tempo de Anti-de Sitter

Investigamos a influência de valores negativos da constante cosmológica no comportamento dos campos de cordas cósmicas não-Abelianas e Abelianas.

Na figura (6.4a), apresentamos o comportamento dos campos de Higgs, X e Y e de gauge, H , em função da variável adimensional x para o caso da corda cósmica não-Abeliana, considerando valores atribuídos aos parâmetros físicos. Na figura (6.4b), exibimos o comportamento dos campos métricos, N and L , em função de x . Em ambos os gráficos, utilizamos os parâmetros físicos $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.6$, $\beta_2 = 2.0$, $\beta_3 = 1.0$, $\bar{\Lambda} = -0.03$ e $q = 1.0$. Na figura (6.5a),

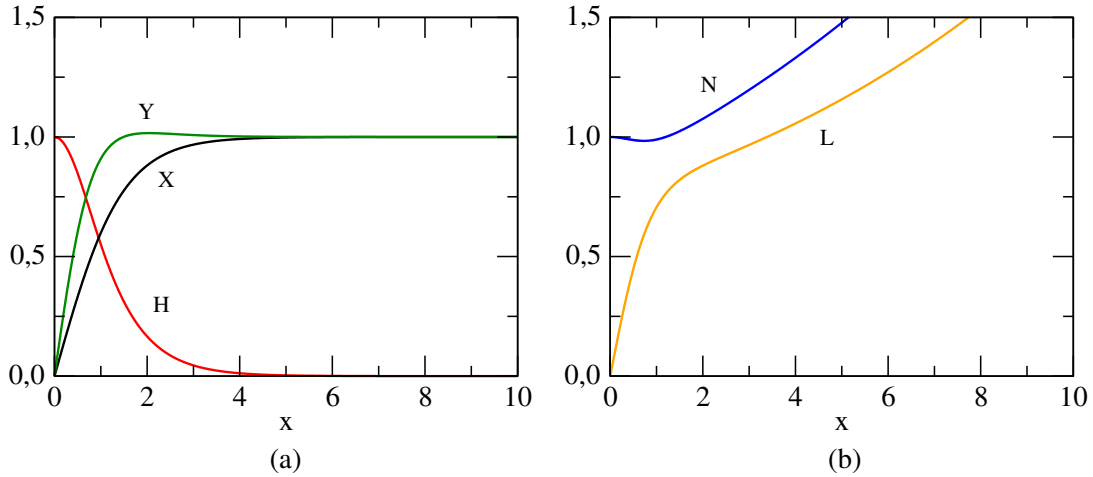


Figura 6.4 Corda cósmica Não-Abeliana: (a) Comportamento dos campos de Higgs e de gauge em função de x no espaço-tempo de anti-de Sitter. (b) Comportamento dos campos métricos em função de x no espaço-tempo de anti-de Sitter. Em ambos os gráficos, consideramos os parâmetros físicos $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.6$, $\beta_2 = 2.0$, $\beta_3 = 1.0$, $\bar{\Lambda} = -0.03$ e $q = 1.0$.

apresentamos o comportamento dos campos de Higgs, X e de gauge, H , em função de x para cordas cósmicas Abelianas. Na figura (6.5b), apresentamos o comportamento dos campos métricos, N e L , em função de x . Nesta análise, os parâmetros físicos foram $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.6$ e $\bar{\Lambda} = -0.03$. Em ambos os casos, cordas cósmicas não-Abeliana e Abeliana, o comportamento do campo métrico N apresenta um forte aumento à medida que x cresce. Finalmente, na figura (6.6), exibimos o comportamento dos campos métricos para dois valores diferentes da

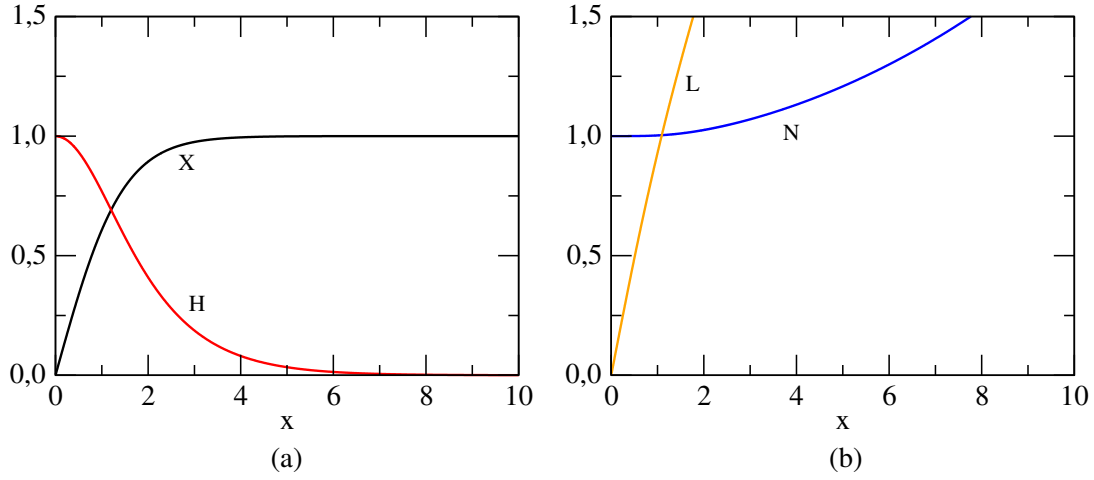


Figura 6.5 Corda cósmica Abelian: (a) Comportamento dos campos de Higgs e de gauge em função de x no espaço-tempo de anti-de Sitter. (b) Comportamento dos campos métricos em função de x no espaço-tempo de anti-de Sitter. Em ambos os gráficos, consideramos os parâmetros físicos $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.6$ e $\bar{\Lambda} = -0.03$.

constante cosmológica, $\bar{\Lambda} = -0.010$ e $\bar{\Lambda} = -0.007$ para cordas cósmicas não-Abelianas. Verificamos que o campo métrico N aumenta com o aumento do valor da constante cosmológica.

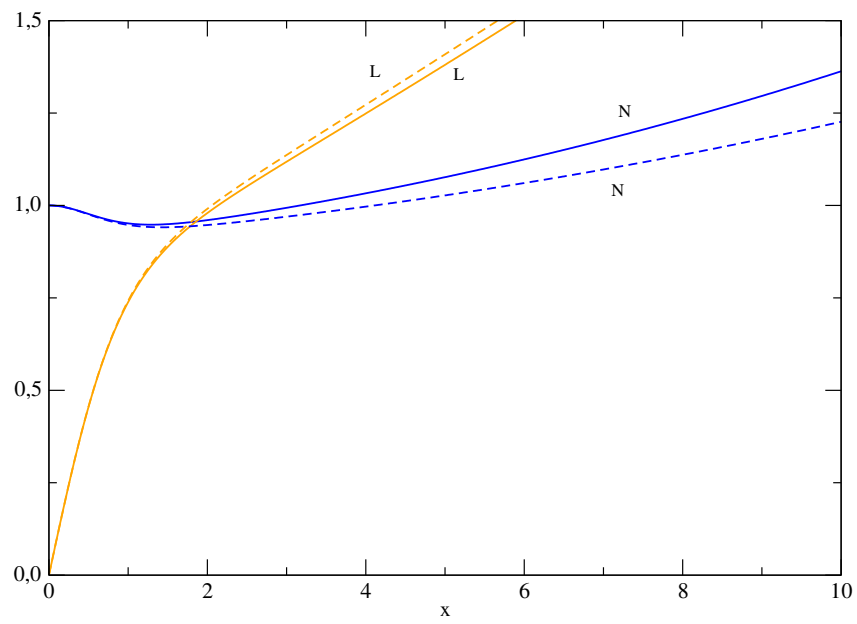


Figura 6.6 Comportamento dos campos métricos em função de x para diferentes valores da constante cosmológica. As linhas sólidas correspondem a $\bar{\Lambda} = -0.010$ e as linhas tracejadas correspondem a $\bar{\Lambda} = -0.007$. Em ambos os gráficos, consideramos $\alpha = 0.8, \gamma = 0.6, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.0$ e $q = 1.0$.

CAPÍTULO 7

Conclusões

Nesta tese analisamos a influência das cordas cósmicas não-Abelianas na geometria do espaço-tempo. Para obtermos soluções topologicamente estáveis utilizamos dois iso-vetores bosônicos e um potencial de interação com termos de potência de quarta ordem dos campos que podem apresentar acoplamento direto entre os setores bosônicos. Realizamos análise numérica considerando valores específicos dos parâmetros físicos do modelo.

Um dos nossos objetivos foi comparar os comportamentos dos campos métricos em função da variável adimensional x que correspondem às cordas cósmicas não-Abelianas com os campos métricos que correspondem às cordas cósmicas Abelianas. Estes comportamentos foram apresentados nas figuras (5.1) e (5.2). Na figura (5.3), exibimos o comportamento dos campos N e L para ambos casos Abeliano e não-Abeliano. Verificamos que para valores específicos dos parâmetros físicos, a corda cósmica não-Abeliana fornece um déficit de ângulo planar maior que o correspondente déficit para a corda cósmica Abeliana, devido à contribuição do acoplamento dos setores bosônicos. Nossa análise numérica indica que o déficit de ângulo planar para a corda cósmica não-Abeliana é aproximadamente 2.290 maior que o déficit de ângulo planar da corda cósmica Abeliana. Esta característica também se verifica na densidade linear de energia, embora a relação seja bem menor. Ou seja, a densidade linear de energia da corda cósmica não-Abeliana é aproximadamente 1.104 maior que a densidade linear de energia da corda cósmica Abeliana.

Também analisamos o comportamento da densidade linear de energia em relação à constante de acoplamento dos setores bosônicos entre si, β_3 , e em relação à constante de acoplamento gravitacional, γ , para cordas cósmicas não-Abelianas. Na figura (5.4a), observamos que

o valor mínimo da densidade linear de energia ocorre para $\beta_3 = 0$, enquanto que a densidade linear de energia aumenta com o crescimento do valor de γ conforme apresentado na figura (5.4b).

A análise do déficit de ângulo planar como função de β_3 e de γ são exibidos na figura (5.5). Verificamos que o valor mínimo do déficit de ângulo planar ocorre para $\beta_3 = 0$, conforme apresentado na figura (5.5a). Evidenciamos que para esta análise, é necessário que $\gamma > 0$. Nossos resultados numéricos também apontam que o déficit de ângulo planar aumenta com o aumento da constante de acoplamento gravitacional, γ . Este resultado é exibido na figura (5.5b).

Além disso, analisamos as situações em que as cordas cósmicas não-Abelianas apresentam soluções regulares. Para este objetivo, construímos e analisamos o espaço de parâmetros $(\alpha - \gamma)$ considerando $\beta_2 = 2.0$ e $q = 1$ para dois valores distintos de β_3 . O espaço de parâmetros $(\alpha - \gamma)$ é apresentado na figura (5.6). A região abaixo das curvas correspondem às situações onde a corda cósmica não-Abeliana apresenta soluções regulares. Considerando $\beta_3 = 0$, para um dado valor de α , o valor crítico de γ que permite soluções regulares é maior que para $\beta_3 = 1$. Este fato é consequência da dependência da densidade de energia em relação a β_3 . Como o déficit de ângulo planar aumenta com a densidade de energia ε , ele depende de β_3 . Portanto, se este parâmetro β_3 for nulo, será necessário maiores valores de γ serão necessários para que $\frac{\delta}{2\pi}$ assumam valores próximos da unidade, que é o limite para as soluções regulares.

Nesta tese, consideramos os parâmetros que fornecem o discriminante positivo, ou seja, $\Delta \equiv \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2 > 0$. No entanto, analisamos o caso especial de cordas cósmicas não-Abelianas em que esta condição não é obedecida. Este caso apresenta algumas semelhanças com a solução de BPS para a corda cósmica Abeliana, isto é, este caso especial apresenta o campo métrico $N = 1$ e permite a redução do sistema de equações diferenciais a um sistema mais simples.

Comparando a densidade de energia do caso especial da corda cósmica não-Abeliana com a solução de BPS da corda cósmica Abeliana, ambas apresentam densidade de energia igual

a unidade. No entanto, ao compararmos o déficit de ângulo planar, verificamos que o caso especial não-Abeliano apresenta o dobro do valor do déficit de ângulo planar da solução BPS da corda cósmica Abeliana, conforme as equações (5.99) e (5.103).

Ampliamos nossa análise para examinar a influência da constante cosmológica nas cordas cósmicas não-Abeliana e Abelianas. Mostramos que também é possível obtermos cordas cósmicas não-Abelianas topologicamente estáveis utilizando dois iso-vetores bosônicos com mecanismo de Higgs no espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter.

Destacamos que na análise do espaço-tempo de de Sitter, nossos resultados constataam o surgimento de horizonte cosmológico para cordas cósmicas não-Abelianas. Este resultado complementa os estudos que demonstram o surgimento de horizonte cosmológico para configurações de vácuo [76] e para cordas cósmicas Abelianas [11]. Os resultados de nossa análise sobre o surgimento do horizonte cosmológico para o caso de cordas cósmicas não-Abeliana e Abelianas são apresentados nas figuras (6.1b) e (6.2b). Pela análise dos gráficos, verificamos que a corda cósmica não-Abeliana apresenta um menor horizonte cosmológico que o caso correspondente Abeliano.

Também analisamos o comportamento do horizonte cosmológico em relação à constante de acoplamento gravitacional γ e em relação à constante cosmológica $\bar{\Lambda}$. Na figura (6.3a), observamos que o horizonte cosmológico diminui com o aumento da constante de acoplamento gravitacional, γ . Verificamos que o horizonte cosmológico também decresce para valores grandes de $\bar{\Lambda}$, conforme apresentado na figura (6.3b). Também comparamos horizonte cosmológico com caso de vácuo. Observamos que para um dado valor da constante cosmológica, o horizonte cosmológico associado à corda cósmica não-Abeliana é menor que o caso de vácuo.

Analizamos o comportamento dos campos de Higgs, de gauge e campos métricos para o espaço-tempo de anti-de Sitter para cordas cósmicas não-Abelianas e Abelianas. Os resultados estão apresentados na figura (6.4) e (6.5), respectivamente. Em ambos os casos, verificamos que o campo métrico $N(x)$ diverge, no entanto no caso das cordas cósmicas não-Abelianas, a

inclinação de $N(x)$ é maior que o corresponde caso Abeliano.

Também comparamos o comportamento dos campos métricos das cordas cósmicas não-Abelianas com as Abelianas para dois valores distintos da constante cosmológica $\bar{\Lambda}$. Observamos que com o aumento da constante cosmológica, campos métricos N e L se aproximam entre si. Este resultado é compatível com a as condições de vácuo.

Finalmente, como perspectivas para trabalhos futuros, avaliamos a extensão do estudo realizado nesta tese para modelos extendidos da Relatividade Geral, tais como, teorias $f(R)$ da gravitação.

APÊNDICE A

Colsys

O COLSYS¹ é um programa que permite resolver numericamente um sistema de equações diferenciais com problema de valores de contorno. O sistema de equações diferenciais é descrito através de um conjunto de funções $u_i(x)$, onde $i = 1, \dots, d$ e $x \in [a, b]$, escrito como

$$\frac{d^{m_i} u_i}{dx^{m_i}} = f_i(x, z(u)), \quad (\text{A.1})$$

onde m_i é ordem da equação diferencial da função u_i e $z(u)$ é o conjunto de funções e suas derivadas,

$$z(u) = \left[u_1, \frac{du_1}{dx}, \dots, \frac{du_1^{m_1-1}}{dx^{m_1-1}}, \dots, u_d, \frac{du_d}{dx}, \dots, \frac{du_d^{m_d-1}}{dx^{m_d-1}} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Assim, teremos um sistema de d equações diferenciais com d funções a determinar. A ordem da i -ésima equação diferencial é dada por m_i . Em geral, o sistema é formado por equações diferenciais não-lineares (podendo ser também acopladas) e dependerá das funções e suas derivadas.

As condições de contorno são escritas como

$$g_j(z(u(\eta_j))) = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde $j = 1, \dots, m^*$, em que $m^* = \sum_{i=1}^d m_i$ e $\eta_j \in [a, b]$, $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_{m^*}$. Estes são os pontos onde as equações diferenciais devem satisfazer às condições de contorno. Assumiremos que as condições de contorno dependem apenas de η_i , isto é, as equações diferenciais assumem

¹Colsys é o nome utilizado para designar um programa que utiliza o método de Colocação para resolver EDOs. O termos vem do inglês Collocation Software for Boundary-Value ODEs.

os valores das condições de contorno em apenas um ponto no domínio de integração. Também consideraremos que o sistema tem solução numérica tal que as funções $u_i(x) \in C^{m_i-1}$ no intervalo de integração. Desta forma, o método de integração numérica será global.

O COLSYS é considerado um software estado-da-arte para resolução de problemas de valores de contorno que implementa uma série de algoritmos para resolver de equações diferenciais. Vamos descrever brevemente seu funcionamento [77].

Método da Colocação: Seja π uma malha no domínio de integração $[a, b]$,

$$\pi = (a = x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1} = b), \quad (\text{A.4})$$

$$h_j = x_{j+1} - x_j, j = 1 \dots N, \quad (\text{A.5})$$

$$h = \max h_i. \quad (\text{A.6})$$

Em cada subintervalo, os pontos de colocação são definidos usando a distribuição de Gauss-Legendre [71],

$$x_{jl} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2} + \frac{1}{2}h_j\rho_l, \quad (\text{A.7})$$

onde $j = 1 \dots N, l = 1 \dots k$ e ρ_l são os k -pontos de Gauss-Legendre no intervalo $[-1, 1]$.

A solução aproximada é escrita como $u_i = \sum_{n=1}^M \alpha_{i,n} \phi_n(x)$, onde ϕ_n são funções linearmente independentes e $\alpha_{i,n}$ são os coeficientes da solução aproximada [69, 70]. Existem $M = kN + m^*$ parâmetros livres $\alpha_{i,j}$ que são determinados pelas condições de contorno e pelas equações diferenciais ao longo dos pontos de colocação no intervalo $[a, b]$ [70, 71]. Os pontos onde a solução aproximada é determinada são justamente os k pontos de colocação dentro de cada subintervalo.

Linearização: O problema da não-linearidade do sistema de equações diferenciais será abordado linearizando as equações diferenciais e as condições de contorno através dos termos de primeira ordem da expansão em séries de Taylor [70]. Em cada iteração, a procedure do método da colocação é realizado no sistema linearizado. Os coeficientes desconhecidos da

série são obtidos da sistema linearizado.

Considere $u_i^{(0)}$ uma solução inicial do sistema e $u_i^{(v)}$ a solução aproximada na v -ésima iteração. O sistema torna-se

$$\frac{d^{m_i} w_i^v}{dx^{m_i}} - \sum_{l=1}^{m^*} \frac{\partial f_i(x, z(u^{(v)}))}{\partial z_l} \cdot z_l(w^{(v)}) = \hat{f}_i(x, z(u^{(v)})), \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{l=1}^{m^*} \frac{\partial g_j(x, z(u^{(v)}))}{\partial z_l} \cdot z_l(w^{(v)}) = \hat{g}_i(x, z(u^{(v)})), \quad (\text{A.9})$$

onde $i = 1 \dots d$ e $j = 1 \dots m^*$. As funções $\hat{f}$ e $\hat{g}$ correspondem a contribuição não-linear das equações diferenciais e das condições de contorno, respectivamente,

$$\hat{f}_i(x, z(u^{(v)})) = f_i(x, z(u^{(v)})) - \sum_{l=1}^{m^*} \frac{\partial f_i(x, z(u^{(v)}))}{\partial z_l} \cdot z_l(u^{(v)}), \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{g}_i(x, z(u^{(v)})) = \sum_{l=1}^{m^*} \frac{\partial g_j(x, z(u^{(v)}))}{\partial z_l} \cdot z_l(u^{(v)}) - g_i(x, z(u^{(v)})). \quad (\text{A.11})$$

Os termos não-lineares são calculados usando a solução aproximada $z(u^{(v)})$. As funções $z_l(u)$ são a l -ésima componente do conjunto de funções $z(u)$ e suas derivadas de ordem inferiores. Na $(v+1)$ -ésima iteração, a solução aproximada é dada por

$$u_i^{v+1} = u_i^{(v)} + w_i^{(v)}. \quad (\text{A.12})$$

Também será necessário fornecer o Jacobiano explicitamente. A partir das equações diferenciais, implementamos as funções $\frac{\partial f_i(x, z(u^{(v)}))}{\partial z_l}$ e das condições de contorno, implementamos as funções $\frac{\partial g_j(x, z(u^{(v)}))}{\partial z_l}$.

O método de Newton é utilizado para determinação dos coeficientes das soluções aproximadas, mas como sua performance deste método é baixa, o COLSYS utiliza o método de Newton modificado, conhecido como método de Newton "damped", onde as derivadas são

¹Em análise numérica, geralmente chamamos a solução inicial de guess solution.

multiplicadas por um fator. Neste caso, a solução aproximada será dada por

$$u_i^{v+1} = u_i^{(v)} + \lambda^{(v)} w_i^{(v)}, \quad (\text{A.13})$$

onde o escalar $\lambda^{(v)}$ é o fator de relaxação. O COLSYS implementa um método de predição e correção do fator de relaxação em cada iteração.

Estimação de Erro e seleção da rede²: O COLSYS também permite estimar o erro de cada função e de suas derivadas. Em cada iteração, o COLSYS gera duas soluções. Uma delas é realizada em uma rede menor que a outra. Se o número dos k pontos de Gauss é grande o suficiente, então o erro será estimado em termos apenas destas soluções aproximadas [70].

Além disso, o usuário poderá definir a tolerância para cada função. Quando o erro é menor que a tolerância definida, o COLSYS finaliza o cálculo. Se não for, o COLSYS continua até alcançar a tolerância.

A divisão da rede é útil para estimação do error, bem como da construir a adaptação da rede em cada iteração. Quando a tolerância não é alcançada, o COLSYS adapta uma nova rede para obter um erro menor. Esta escolha da rede permite que o COLSYS introduza mais pontos nas regiões onde as funções são mais problemáticas.

²Usamos o termo rede para descrever o termo inglês "mesh". Em diversos métodos de cálculo numérico se costuma dividir o intervalo onde se deseja encontrar as soluções em redes discretas tal que as soluções do problema em questão possam ser testadas nos sítios desta rede.

APÊNDICE B

Códigos

O programa que resolve o sistema de equações diferenciais, COLSYS, foi escrito em FORTRAN. Portanto, toda a implementação dos códigos para solução numérica das equações diferenciais que descrevem as cordas cósmicas também foi realizada na linguagem de programação FORTRAN.

A estrutura para obter as soluções numéricas do sistema de equações diferenciais é construída da seguinte maneira:

- Um arquivo em ASCII, chamado input.dat, com os dados de entrada contendo os parâmetros físicos e a localização das condições de contorno. Condições de contorno no infinito serão localizadas em um valor de distância muito grande que possa ser considerado como infinito em comparação com os outros valores de distância. No caso desta tese, consideramos o infinito localizado em $x = 1000$;
- Um programa driver que fornecerá as equações diferenciais, as condições de contorno e a matriz jacobiana ao COLSYS. O driver lerá os dados de entrada escrito no input.dat. Escrevemos um driver para cada caso estudado nesta tese;
- O programa COLSYS resolverá numericamente o sistema de equações que descrevem as cordas cósmicas. O significado das variáveis e parâmetros de programação são descritos no texto introdutório do próprio programa COLSYS. Este programa é formado por várias subrotinas que implementam os métodos numéricos descritos no apêndice A, o que torna este programa demasiadamente grande para ser reproduzido aqui. O COLSYS pode ser consultado e transferido para o computador pessoal diretamente do site <http://www.netlib.no/netlib/ode/colsys.f> .

Apresentamos abaixo os códigos utilizados nos capítulos 5 e 6 para o caso a corda cósmica não-Abeliana e Abeliana. No entanto, como os programas são muito longos, apresentaremos apenas os mais importantes que foram utilizados nesta tese. Os demais programas são variações destes códigos e seus respectivos dados de entrada. Os códigos são:

- Cordas cósmicas não-Abelianas;
- Cordas cósmicas Abelianas;
- Cordas cósmicas no espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter.

B.1 input.dat para cordas cósmicas não-Abelianas:

```
XL=
1000.0
alpha=
2.0
beta2=
2.0
beta3=
1.0
gamma=
0.6
q=
1.0
TOLIN=
0.010
NINT=
400
IMAX=
400
NDIAG=
-1
Npri=
1
```

B.2 Driver para cordas cósmicas não-Abelianas:

```
C      Departamento de Fisica - UFPB
C      Antonio de Padua Santos
C      May 2014: Non-abelian Cosmic String
cc     z1=H, z3=X, z5=Y, z7=N, z9=L
cc
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```

COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2 , beta3 , alpha , gamma , xq
COMMON /PARB/ XMAX,IMAX
DOUBLE PRECISION ZETA(10),FSPACE(800000)
DOUBLE PRECISION TOL(5),Z(10),DMVAL(5)
DOUBLE PRECISION AFUN(850),ASUN(850)
DOUBLE PRECISION BFUN(850),BSUN(850)
DOUBLE PRECISION CFUN(850),CSUN(850)
DOUBLE PRECISION FFUN(850),FSUN(850)
DOUBLE PRECISION DFUN(850),DSUN(850)
DOUBLE PRECISION AAS(850),BAS(850),FAS(850)
DOUBLE PRECISION ELCH(850)
INTEGER ISPACE(80000),M(5),IPAR(12),LTOL(5),NPAS(5)
DOUBLE PRECISION INTE(80010)
EXTERNAL COLSYS
EXTERNAL FSUB,DFSUB,GSUB,DGSUB,SOLUTN,INTPOL

open(unit=1, file='input.dat')
open(unit=2, file='solu.dat', position='append')
open(unit=3, file='solu.new')
open(unit=4, file='solu.old')
open(unit=88,file='print.dat')

C
C INPUT DATA FOR PHYSICAL PROBLEM
C
PI=4.D0*DATAN(1.D0)
SQ2 = DSQRT(2.D0)
READ(1,*)
READ(1,*)XL
READ(1,*)
READ(1,*) alpha
READ(1,*)
READ(1,*) beta2
READ(1,*)
READ(1,*) beta3
READ(1,*)
READ(1,*) gamma
READ(1,*)
READ(1,*) xq
READ(1,*)
READ(1,*)TOLIN
READ(1,*)
READ(1,*)NINT
READ(1,*)
READ(1,*)IMAX
READ(1,*)
READ(1,*)NDIAG
READ(1,*)
read(1,*) npri

CALL INTPOL

C
C INPUT FOR SUBROUTINE COLSYS
C
NCOMP=5
M(1)=2
M(2)=2
M(3)=2
M(4)=2
M(5)=2
ALEFT=0.D0
ZETA(1)=ALEFT
ZETA(2)=ALEFT
ZETA(3)=ALEFT
ZETA(4)=ALEFT
ARIGHT=XL
ZETA(5)=ALEFT

```



```

      IP=I+1
8  INTE(IP)=2.D0/3.D0
   INTE(NPB)=1.D0/3.D0
   XSTR = 0.D0
   XENE = 0.D0
   XNPA = DFLOAT(NPA)
CC
   DXS=XL/XNPA
   X=0.D0
   X=X+DXS
   DO 7 I=2,NPA
   CALL APPSLN(X,Z,FSPACE,ISPACE)
   Z1=Z(1)
   Z2=Z(2)
   Z3=Z(3)
   Z4=Z(4)
   Z5=Z(5)
   z6=z(6)
   z7=z(7)
   z8=z(8)
   z9=z(9)
   z10=z(10)

   xene = xene + z7*z9*(z2**2/(2.0*alpha*z9**2)
.   + (0.5)*(z4**2+z6**2)+
.   (0.5)*(z1/z9)**2*(z3**2+z5**2)+(0.25)*(z3**2-1)**2+
.   (beta2**2)*(0.25)*(z5**2-xq**2)**2+(beta3**2)*(0.5)*
.   (z3**2-1)*(z5**2-xq**2))*DXS*INTE(I)

   X=X+DXS
7  CONTINUE
45 CONTINUE
   WRITE(2,26) alpha,beta2,beta3,gamma,xene,xdelta
   WRITE(6,*) alpha,beta2,beta3,gamma,xene,xdelta

ccccccc end of calculation of the inertial energy per unit length in units of 2*pi
DO 202 I=1,isp1
X=FSPACE(I)
CALL APPSLN(X,Z,FSPACE,ISPACE)
AFUN(I)=Z(1)
ASUN(I)=Z(2)
BFUN(I)=Z(3)
BSUN(I)=Z(4)
FFUN(I)=Z(5)
FSUN(I)=Z(6)
CFUN(I)=Z(7)
CSUN(I)=Z(8)
DFUN(I)=Z(9)
DSUN(I)=Z(10)

202 continue
DO 21 I=1,isp1,npri
X=FSPACE(I)
21 WRITE(3,25)X,AFUN(I),ASUN(I)
DO 22 I=1,isp1,npri
X=FSPACE(I)
22 WRITE(3,25)X,BFUN(I),BSUN(I)
DO 23 I=1,isp1,npri
X=FSPACE(I)
23 WRITE(3,25)X,FFUN(I),FSUN(I)
DO 24 I=1,isp1,npri
X=FSPACE(I)
24 WRITE(3,25)X,CFUN(I),CSUN(I)
DO 224 I=1,isp1,npri
X=FSPACE(I)
224 WRITE(3,25)X,DFUN(I),DSUN(I)

```

```

DO 28 I=2,ISP1 , npri
X=FSPACE(1)
WRITE(88,26)X,afun(i),bfun(i),ffun(i),cfun(i),dfun(i)
28 continue
DO 29 I=2,ISP1 , npri
X=FSPACE(1)
29 continue
25 FORMAT(E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10)
26 FORMAT(7f10.4)
STOP
END

C
SUBROUTINE FSUB(X,Z,F)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2 , beta3 , alpha , gamma , xq
DOUBLE PRECISION Z(10),F(5)

Z1=Z(1)
Z2=Z(2)
Z3=Z(3)
Z4=Z(4)
Z5=Z(5)
Z6=Z(6)
Z7=Z(7)
Z8=Z(8)
z9=z(9)
z10=z(10)

cc
ff1=(alpha*z1*z3**2*z7*z9+alpha*z1*z5**2*z7*z9+z10*z2*z7-2.0*z2
. *z8*z9)/(z7*z9)
ff2=(-beta3**2*xq**2*z3*z7*z9**2+beta3**2*z3*z5**2*z7*z9**2+z1
. **2*z3*z7-z10*z4*z7*z9+z3**3*z7*z9**2-z3*z7*z9**2-2.0*z4*z8*z9
. **2)/(z7*z9**2)
ff3=(-beta2**2*xq**2*z5*z7*z9**2+beta2**2*z5**3*z7*z9**2+beta3
. **2*z3**2*z5*z7*z9**2-beta3**2*z5*z7*z9**2+z1**2*z5*z7-z10*z6*
. z7*z9-2.0*z6*z8*z9**2)/(z7*z9**2)
ff4=(-alpha*beta2**2*gamma*xq**4*z7**2*z9**2+2.0*alpha*beta2**2
. *gamma*xq**2*z5**2*z7**2*z9**2-alpha*beta2**2*gamma*z5**4*z7**
. 2*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*gamma*xq**2*z3**2*z7**2*z9**2-2.0*
. alpha*beta3**2*gamma*xq**2*z7**2*z9**2-2.0*alpha*beta3**2*
. gamma*z3**2*z5**2*z7**2*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*gamma*z5**2*
. z7**2*z9**2-alpha*gamma*z3**4*z7**2*z9**2+2.0*alpha*gamma*z3**
. 2*z7**2*z9**2-alpha*gamma*z7**2*z9**2-4.0*alpha*z10*z7*z8*z9-
. 4.0*alpha*z8**2*z9**2+2.0*gamma*z2**2*z7**2)/(4.0*alpha*z7*z9
. **2)
ff5=(-alpha*beta2**2*gamma*xq**4*z7*z9**2+2.0*alpha*beta2**2*
. gamma*xq**2*z5**2*z7*z9**2-alpha*beta2**2*gamma*z5**4*z7*z9**2
. +2.0*alpha*beta3**2*gamma*xq**2*z3**2*z7*z9**2-2.0*alpha*beta3
. **2*gamma*xq**2*z7*z9**2-2.0*alpha*beta3**2*gamma*z3**2*z5**2*
. z7*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*gamma*z5**2*z7*z9**2-4.0*alpha*
. gamma*z1**2*z3**2*z7-4.0*alpha*gamma*z1**2*z5**2*z7-alpha*
. gamma*z3**4*z7*z9**2+2.0*alpha*gamma*z3**2*z7*z9**2-alpha*
. gamma*z7*z9**2-8.0*alpha*z10*z8*z9-2.0*gamma*z2**2*z7)/(4.0*
. alpha*z7*z9)

ccc
f(1) = ff1
f(2) = ff2
f(3) = ff3
f(4) = ff4
f(5) = ff5

cc
RETURN
END

CCC
SUBROUTINE DFSUB(X,Z,DF)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

```

COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2 ,beta3 ,alpha ,gamma ,xq
DOUBLE PRECISION Z(10),DF(5,10)
Z1=Z(1)
Z2=Z(2)
Z3=Z(3)
Z4=Z(4)
Z5=Z(5)
Z6=Z(6)
Z7=Z(7)
Z8=Z(8)
z9=z(9)
z10=z(10)

cc
cc
dff11=alpha*(z3**2+z5**2)
dff12=(z10*z7-2.0*z8*z9)/(z7*z9)
dff13=2.0*alpha*z1*z3
dff14=0.0
dff15=2.0*alpha*z1*z5
dff16=0.0
dff17=(2.0*z2*z8)/z7**2
dff18=(-2.0*z2)/z7
dff19=(-z10*z2)/z9**2
dff110=z2/z9
dff21=(2.0*z1*z3)/z9**2
dff22=0.0
dff23=(-beta3**2*xq**2*z9**2+beta3**2*z5**2*z9**2+z1**2+3.0*z3
. **2*z9**2-z9**2)/z9**2
dff24=(-z10*z7-2.0*z8*z9)/(z7*z9)
dff25=2.0*beta3**2*z3*z5
dff26=0.0
dff27=(2.0*z4*z8)/z7**2
dff28=(-2.0*z4)/z7
dff29=(-2.0*z1**2*z3+z10*z4*z9)/z9**3
dff210=(-z4)/z9
dff31=(2.0*z1*z5)/z9**2
dff32=0.0
dff33=2.0*beta3**2*z3*z5
dff34=0.0
dff35=(-beta2**2*xq**2*z9**2+3.0*beta2**2*z5**2*z9**2+beta3**2*
. z3**2*z9**2-beta3**2*z9**2+z1**2)/z9**2
dff36=(-z10*z7-2.0*z8*z9)/(z7*z9)
dff37=(2.0*z6*z8)/z7**2
dff38=(-2.0*z6)/z7
dff39=(-2.0*z1**2*z5+z10*z6*z9)/z9**3
dff310=(-z6)/z9
dff41=0.0
dff42=(gamma*z2*z7)/(alpha*z9**2)
dff43=gamma*z3*z7*(beta3**2*xq**2-beta3**2*z5**2-z3**2+1.0)
dff44=0.0
dff45=gamma*z5*z7*(beta2**2*xq**2-beta2**2*z5**2-beta3**2*z3**2
. +beta3**2)
dff46=0.0
dff47=(-alpha*beta2**2*gamma*xq**4*z7**2*z9**2+2.0*alpha*beta2
. **2*gamma*xq**2*z5**2*z7**2*z9**2-alpha*beta2**2*gamma*z5**4*
. z7**2*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*gamma*xq**2*z3**2*z7**2*z9**2-
. 2.0*alpha*beta3**2*gamma*xq**2*z7**2*z9**2-2.0*alpha*beta3**2*
. gamma*z3**2*z5**2*z7**2*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*gamma*z5**2*
. z7**2*z9**2-alpha*gamma*z3**4*z7**2*z9**2+2.0*alpha*gamma*z3**
. 2*z7**2*z9**2-alpha*gamma*z7**2*z9**2+4.0*alpha*z8**2*z9**2+
. 2.0*gamma*z2**2*z7**2)/(4.0*alpha*z7**2*z9**2)
dff48=(-z10*z7-2.0*z8*z9)/(z7*z9)
dff49=(alpha*z10*z8*z9-gamma*z2**2*z7)/(alpha*z9**3)
dff410=(-z8)/z9
dff51=(-2.0*gamma*z1*(z3**2+z5**2))/z9
dff52=(-gamma*z2)/(alpha*z9)

```

```

dff53=(gamma*z3*( beta3**2*xq**2*z9**2-beta3**2*z5**2*z9**2-2.0*
. z1**2-z3**2*z9**2+z9**2))/z9
dff55=0.0
dff56=0.0
dff57=(2.0*z10*z8)/z7**2
dff58=(-2.0*z10)/z7
dff59=(gamma*(-alpha*beta2**2*xq**4*z9**2+2.0*alpha*beta2**2*xq
. **2*z5**2*z9**2-alpha*beta2**2*z5**4*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*
. xq**2*z3**2*z9**2-2.0*alpha*beta3**2*xq**2*z9**2-2.0*alpha*
. beta3**2*z3**2*z5**2*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*z5**2*z9**2+4.0*
. alpha*z1**2*z3**2+4.0*alpha*z1**2*z5**2-alpha*z3**4*z9**2+2.0*
. alpha*z3**2*z9**2-alpha*z9**2+2.0*z2**2))/(4.0*alpha*z9**2)
dff510=(-2.0*z8)/z7

```

CC

```

df(1,1) = dff11
df(1,2) = dff12
df(1,3) = dff13
df(1,4) = dff14
df(1,5) = dff15
df(1,6) = dff16
df(1,7) = dff17
df(1,8) = dff18
df(1,9) = dff19
df(1,10) = dff110

```

```

df(2,1) = dff21
df(2,2) = dff22
df(2,3) = dff23
df(2,4) = dff24
df(2,5) = dff25
df(2,6) = dff26
df(2,7) = dff27
df(2,8) = dff28
df(2,9) = dff29
df(2,10) = dff210

```

```

df(3,1) = dff31
df(3,2) = dff32
df(3,3) = dff33
df(3,4) = dff34
df(3,5) = dff35
df(3,6) = dff36
df(3,7) = dff37
df(3,8) = dff38
df(3,9) = dff39
df(3,10) = dff310

```

```

df(4,1) = dff41
df(4,2) = dff42
df(4,3) = dff43
df(4,4) = dff44
df(4,5) = dff45
df(4,6) = dff46
df(4,7) = dff47
df(4,8) = dff48
df(4,9) = dff49
df(4,10) = dff410

```

```

df(5,1) = dff51
df(5,2) = dff52
df(5,3) = dff53
df(5,4) = dff54
df(5,5) = dff55
df(5,6) = dff56
df(5,7) = dff57

```

```

      df(5,8) = dff58
      df(5,9) = dff59
      df(5,10) = dff510
cc
      RETURN
      END
      SUBROUTINE GSUB(I,Z,G)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2,beta3,alpha,gamma,xq
      DOUBLE PRECISION Z(10),G
      GOTO(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10),I
1    G=Z(1)-1.d0
      RETURN
2    G=Z(3)-0.d0
      RETURN
3    G=Z(5)-0.D0
      RETURN
4    G=Z(7)-1.D0
      RETURN
5    G=Z(8)-0.D0
      RETURN
6    G=Z(9)-0.00
      RETURN
7    G=Z(10)-1.D0
      RETURN
8    G=Z(1)-0.d0
      RETURN
9    G=Z(3)-1.d0
      RETURN
10   G=Z(5)-xq
      END
      SUBROUTINE DGSUB(I,Z,DG)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2,beta3,alpha,gamma,xq
      DOUBLE PRECISION Z(10),DG(10)
      DO 111 J=1,10
111  DG(J)=0.D0
      GOTO(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10),I
1    DG(1)=1.d0
      RETURN
2    DG(3)=1.D0
      RETURN
3    DG(5)=1.D0
      RETURN
4    DG(7)=1.D0
      RETURN
5    DG(8)= 1.D0
      RETURN
6    DG(9)=1.D0
      RETURN
7    DG(10)=1.D0
      RETURN
8    DG(1)=1.D0
      RETURN
9    DG(3)=1.D0
      RETURN
10   DG(5)=1.D0
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C          ROUTINE INTPOL
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE INTPOL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION Z(10),DMVAL(5)

```

```

COMMON /FIELDS/ XI(400),V1(400),V2(400),V3(400),V4(400),
*          V5(400),V6(400),W1(400),W2(400),W3(400),W4(400),
*          V7(400),V8(400),V9(400),V10(400),W5(400)
COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2,beta3,alpha,gamma,xq
COMMON /PARB/ XMAX,IMAX
DO 20 I=1,IMAX
  READ(3,25)XI(I),V1(I),V2(I)
20 WRITE(4,25)XI(I),V1(I),V2(I)
  DO 21 I=1,IMAX
    READ(3,25)XI(I),V3(I),V4(I)
21 WRITE(4,25)XI(I),V3(I),V4(I)
    DO 22 I=1,IMAX
      READ(3,25)XI(I),V5(I),V6(I)
22 WRITE(4,25)XI(I),V5(I),V6(I)
      DO 23 I=1,IMAX
        READ(3,25)XI(I),V7(I),V8(I)
23 WRITE(4,25)XI(I),V7(I),V8(I)
        DO 24 I=1,IMAX
          READ(3,25)XI(I),V9(I),V10(I)
24 WRITE(4,25)XI(I),V9(I),V10(I)

25 FORMAT(E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10)
C
  REWIND 3
C
  write(6,*)'coucou'
  XMAX=XI(IMAX)
  IMAXM=IMAX-1
C
  DXO=XI(2)-XI(1)
  DXF=XI(IMAX)-XI(IMAXM)
C
  W1(1)=(V2(2)-V2(1))/DXO
  W2(1)=(V4(2)-V4(1))/DXO
  W3(1)=(V6(2)-V6(1))/DXO
  W4(1)=(V8(2)-V8(1))/DXO
  W5(1)=(V10(2)-V10(1))/DXO
c
  W1(IMAX)=(V2(IMAX)-V2(IMAXM))/DXF
  W2(IMAX)=(V4(IMAX)-V4(IMAXM))/DXF
  W3(IMAX)=(V6(IMAX)-V6(IMAXM))/DXF
  W4(IMAX)=(V8(IMAX)-V8(IMAXM))/DXF
  W5(IMAX)=(V10(IMAX)-V10(IMAXM))/DXF
c
  DO 40 I=2,IMAXM
    IP=I+1
    IM=I-1
    DXI=XI(IP)-XI(IM)
    W1(I)=(V2(IP)-V2(IM))/DXI
    W2(I)=(V4(IP)-V4(IM))/DXI
    W3(I)=(V6(IP)-V6(IM))/DXI
    W4(I)=(V8(IP)-V8(IM))/DXI
    W5(I)=(V10(IP)-V10(IM))/DXI

40 CONTINUE
  RETURN
  END
C
  SUBROUTINE SOLUTN(X,Z,DMVAL)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION Z(10),DMVAL(5)
  COMMON /FIELDS/ XI(400),V1(400),V2(400),V3(400),V4(400),
*          V5(400),V6(400),W1(400),W2(400),W3(400),W4(400),
*          V7(400),V8(400),V9(400),V10(400),W5(400)
  COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2,beta3,alpha,gamma,xq
  COMMON /PARB/ XMAX,IMAX

```

```

      IF(X.EQ.0.D0)GO TO 1
      IF(X.GE.XMAX)GO TO 2
      DO 10 I=1,IMAX
      IDXP=I
      IF(X.LT.XI(1))GO TO 11
10  CONTINUE
11  IDX=IDXP-1
      XDX=XI(IDX)
      XDXP=XI(IDXP)
      FAK=(X-XDX)/(XDXP-XDX)

C
      Z(1)=V1(IDX)+(V1(IDXP)-V1(IDX))*FAK
      Z(2)=V2(IDX)+(V2(IDXP)-V2(IDX))*FAK
      Z(3)=V3(IDX)+(V3(IDXP)-V3(IDX))*FAK
      Z(4)=V4(IDX)+(V4(IDXP)-V4(IDX))*FAK

C
      Z(5)=V5(IDX)+(V5(IDXP)-V5(IDX))*FAK
      Z(6)=V6(IDX)+(V6(IDXP)-V6(IDX))*FAK
      Z(7)=V7(IDX)+(V7(IDXP)-V7(IDX))*FAK
      Z(8)=V8(IDX)+(V8(IDXP)-V8(IDX))*FAK
      Z(9)=V9(IDX)+(V9(IDXP)-V9(IDX))*FAK
      Z(10)=V10(IDX)+(V10(IDXP)-V10(IDX))*FAK

C
      DMVAL(1)=W1(IDX)+(W1(IDXP)-W1(IDX))*FAK
      DMVAL(2)=W2(IDX)+(W2(IDXP)-W2(IDX))*FAK
      DMVAL(3)=W3(IDX)+(W3(IDXP)-W3(IDX))*FAK
      DMVAL(4)=W4(IDX)+(W4(IDXP)-W4(IDX))*FAK
      DMVAL(5)=W5(IDX)+(W5(IDXP)-W5(IDX))*FAK

      RETURN
1  CONTINUE

      Z(1)=V1(1)
      Z(2)=V2(1)
      Z(3)=V3(1)
      Z(4)=V4(1)
      Z(5)=V5(1)
      Z(6)=V6(1)
      Z(7)=V7(1)
      Z(8)=V8(1)
      Z(9)=V9(1)
      Z(10)=V10(1)

      DMVAL(1)=w1(1)
      DMVAL(2)=w2(1)
      DMVAL(3)=w3(1)
      DMVAL(4)=w4(1)
      DMVAL(5)=w5(1)
      RETURN
2  CONTINUE

      Z(1)=V1(IMAX)
      Z(2)=V2(IMAX)
      Z(3)=V3(IMAX)
      Z(4)=V4(IMAX)
      Z(5)=V5(IMAX)
      Z(6)=V6(IMAX)
      Z(7)=V7(IMAX)
      Z(8)=V8(IMAX)
      Z(9)=V9(IMAX)
      Z(10)=V10(IMAX)

      DMVAL(1)=W1(IMAX)
      DMVAL(2)=W2(IMAX)
      DMVAL(3)=W3(IMAX)

```

```

DMVAL(4)=W4(IMAX)
DMVAL(5)=W5(IMAX)

RETURN
END

```

B.3 input.dat para cordas cósmicas Abelianas:

```

XL=
1000.0
alpha=
2.0
gamma=
0.6
TOLIN=
0.01
NINT=
400
IMAX=
400
NDIAG=
-1
Npri=
1

```

B.4 Driver para cordas cósmicas Abelianas:

```

C      Departamento de Fisica – UFPB
C      Antonio de Padua Santos
C      May 2014, Abelian Cosmic String
C      z1= Higgs, z3= gauge, z5= N, z7 = L
ccc
cc
ccccc GENERAL REMARK: the functions that enter the program are
ccccc denoted as follows: f=z(1), f'=z(2), P=z(3), P'=z(4),
ccccc N=z(5), N'=z(6), L=z(7), L'=z(8)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /PAR/ XL, alpha, gamma
      COMMON /PARB/ XMAX, IMAX
      DOUBLE PRECISION ZETA(8), FSPACE(800000)
      DOUBLE PRECISION TOL(4), Z(8), DMVAL(4)
      DOUBLE PRECISION AFUN(850), ASUN(850)
      DOUBLE PRECISION BFUN(850), BSUN(850)
      DOUBLE PRECISION CFUN(850), CSUN(850)
      DOUBLE PRECISION FFUN(850), FSUN(850)
      DOUBLE PRECISION DDFUN(850), DDSUN(850)
      DOUBLE PRECISION EEFUN(850), EESUN(850)
      DOUBLE PRECISION AAS(850), BAS(850), FAS(850)
      DOUBLE PRECISION ELCH(850)
      INTEGER ISPACE(80000), M(4), IPAR(11), LTOL(4), NPAS(4)
      DOUBLE PRECISION INTE(80010)
      DOUBLE PRECISION xmass
      EXTERNAL COLSYS
      EXTERNAL FSUB, DFSUB, GSUB, DGSUB, SOLUTN, INTPOL

```

```

open(unit=1, file='input.dat')
open(unit=2, file='alpha.dat', position='append')
open(unit=22, file='gamma.dat', position='append')
open(unit=3, file='solu.new')
open(unit=4, file='solu.old')
open(unit=88, file='print.dat')
open(unit=89, file='Abelian_N.dat')
open(unit=90, file='Abelian_L.dat')
open(unit=91, file='Abelian_dN.dat')
open(unit=92, file='Abelian_dL.dat')

C
C      INPUT DATA FOR PHYSICAL PROBLEM
C      parameters that appear in the equation
cccc  XL is equal to the maximal value of the radial coordinate
cccc  TOLIN is the tolerance in the error
cccc  NINT=IMAX is the number of discrete points
cccc

      READ(1,*)
      READ(1,*) XL
      READ(1,*)
      READ(1,*) alpha
      READ(1,*)
      READ(1,*) gamma
      READ(1,*)
      READ(1,*) TOLIN
      READ(1,*)
      READ(1,*) NINT
      READ(1,*)
      READ(1,*) IMAX
      READ(1,*)
      READ(1,*) NDIAG
      READ(1,*)
      READ(1,*) npri

      CALL INTPOL

C
C      INPUT FOR SUBROUTINE COLSYS
C      NCOMP= number of differential equations
c      M(i), i=1,2,3,4 the order of the differential equation
      NCOMP=4
      M(1)=2
      M(2)=2
      M(3)=2
      M(4)=2
cccc  ALEFT= left boundary on which we fix conditions, here ALEFT=0
      ALEFT=0.D0
      ZETA(1)=ALEFT
      ZETA(2)=ALEFT
      ZETA(3)=ALEFT
      ZETA(4)=ALEFT
cccc  ARIGHT = right boundary on which we fix the conditions, in principle = infinity,
cccc  but we integrate up to XL, good enough for numerics
      ARIGHT=XL
      ZETA(5)=aleft
      ZETA(6)=aleft
      ZETA(7)=xl
      ZETA(8)=xl
cccc  Tolerance associated to the 4 ODEs
      TOL(1)=TOLIN
      TOL(2)=TOLIN
      TOL(3)=TOLIN
      TOL(4)=TOLIN

```

```

cccc Tolerance on the function
      LTOL(1)=1
      LTOL(2)=3
      LTOL(3)=5
      LTOL(4)=7
      DO 1 I=1,11
1 IPAR(I)=0
Cccc some general parameters
      IPAR(1)=1
      IPAR(3)=NINT
      IPAR(4)=4
      IPAR(5)=800000
      IPAR(6)=80000
      IPAR(7)=NDIAG
      IPAR(8)=1
      IPAR(9)=1
      DO 55 INP=1,IMAX
      READ(3,*)X,AA,BB
      FSPACE(INP)=X
55 CONTINUE
      REWIND 3
cccc Call of COLSYS, the black box solver ccccccccccc
      CALL COLSYS(NCOMP,M,ALEFT,ARIGHT,ZETA,IPAR,LTOL,TOL,
*             FIXPNT,ISPACE,FSPACE,IFLAG,FSUB,
*             DFSUB,GSUB,DGSUB,SOLUTN)
C
      ISP1=ISPACE(1)
3 FORMAT('alpha = ',D12.6,2X,'gamma = ',D12.6,
*       2X,'beta2 = ',D12.6)
4 FORMAT('akas= ',D12.6,2X,'bkas= ',D12.6)

5 FORMAT('Fp(0) = ',D12.6,2X,'PPP(0) = ',D12.6)
6 FORMAT('XL = ',F10.4,' IFLAG = ',I2,'NBR MECHES = ',I3)
      WRITE(6,*)' colsys a fini —meche=',isp1

      IF(IFLAG.NE.1)STOP
ccc value of deficit angle in units of 2*pi ccccccccccccccc
      xor = fspace(IMAX)
      CALL APPSLN(Xor,Z,FSPACE,ISPACE)
      xdelta = 1.d0-z(8)

ccc Calculation of inertial energy per unit length in units of 2*pi and units of
cccccccccc lambda_l*eta_l**2 cccccccccccccccccccccccccc

      NPAS(1)=20000
      NPAS(2)=40000
      NPAS(3)=80000
      DO 45 k=1,3
      NPA = NPAS(k)
      NPB = NPA+1
      INTE(1)=1.D0/3.D0
      DO 8 I=2,NPA,2
      INTE(I)=4.D0/3.D0
      IP=I+1
8 INTE(IP)=2.D0/3.D0
      INTE(NPB)=1.D0/3.D0
      XSTR = 0.D0
      xene = 0.D0
      XNPA = DFLOAT(NPA)
CC
      DXS=XL/XNPA
      X=0.D0
      X=X+DXS
      DO 7 I=2,NPA
      CALL APPSLN(X,Z,FSPACE,ISPACE)

```

```

Z1=Z(1)
Z2=Z(2)
Z3=Z(3)
Z4=Z(4)
Z5=Z(5)
z6=z(6)
z7=z(7)
z8=z(8)

xene = xene + z5*z7*(z2**2+ z4**2/(alpha*z7**2)+
. (z3*z1/z7)**2 + 0.5*(1-z1**2)**2)*DXS*INTE(I)

X=X+DXS
7 CONTINUE

45 CONTINUE
WRITE(2,266) alpha , xene
WRITE(22,266) gamma , xene
WRITE(6,*) alpha , gamma , xene , xdelta

cccccccc end of calculation of the inertial energy per unit length in units of 2*pi cccccccccccccccccccccccccccccccccc

cccccccccc write the solution into the file solu.new
DO 202 I=1,isp1
X=FSPACE(I)
CALL APPSLN(X,Z,FSPACE,ISPACE)
AFUN(I)=Z(1)
ASUN(I)=Z(2)
BFUN(I)=Z(3)
BSUN(I)=Z(4)
FFUN(I)=Z(5)
FSUN(I)=Z(6)
CFUN(I)=Z(7)
CSUN(I)=Z(8)

202 continue
DO 21 I=1,isp1 , npri
X=FSPACE(I)
21 WRITE(3,25)X,AFUN(I),ASUN(I)
DO 22 I=1,isp1 , npri
X=FSPACE(I)
22 WRITE(3,25)X,BFUN(I),BSUN(I)
DO 23 I=1,isp1 , npri
X=FSPACE(I)
23 WRITE(3,25)X,FFUN(I),FSUN(I)
DO 24 I=1,ISP1 , npri
X=FSPACE(I)
24 WRITE(3,25)X,FFUN(I),FSUN(I)
DO 28 I=2,ISP1 , npri
X=FSPACE(I)
c WRITE(88,266)x,afun(i),bfun(i),ffun(i),cfun(i)
write(89,266)x,ffun(i)
write(90,266)x,cfun(i)
write(91,266)x,fsun(i)
write(92,266)x,csun(i)
28 continue
25 FORMAT(E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10,E16.10,2X,E16.10,2X,
& E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10)
266 FORMAT(7f14.8)
STOP
END

C
Cccc subroutine that contains the ODEs

```

```

SUBROUTINE FSUB(X,Z,F)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /PAR/ XL,alpha,gamma
DOUBLE PRECISION Z(8),F(4)

Z1=Z(1)
Z2=Z(2)
Z3=Z(3)
Z4=Z(4)
Z5=Z(5)
Z6=Z(6)
z7=z(7)
z8=z(8)

cc
cccc Ordinary differential equations here ccccccccccccccccc
cccc the ODEs are always written in the form highest derivative = rest
cccc e.g. for the function P, they read P''=....
cccc thus, ff1 stands for P'', ff2 for h'', ff3 for R'' and ff4 for f''
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      ff1=(-z2*(2.0*z6*z7**2 + z8*z5*z7) + z1*((z1**2-1.0)*z5*z7**2+
      . z3**2*z5))/(z5*z7**2)
      ff2=(z4*(-2.0*z6*z7 + z8*z5) + alpha*z1**2*z3*z5*z7)/(z5*z7)
      ff3=(-4.0*alpha*z6*(z6*z7**2+z8*z5*z7)+
      . gamma*z5*(2.0*z4**2*z5-
      . alpha*(1.0-z1**2)**2*z5*z7**2))/(4.0*alpha*z5*z7**2)
      ff4=(-8.0*alpha*z6*z8*z7**2-
      . gamma*z7*(2.0*z4**2*z5+4.0*alpha*z3**2*z1**2*z5+
      . (1-z1**2)**2*alpha*z5*z7**2))/(4.0*alpha*z5*z7**2)

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

      f(1) = ff1
      f(2) = ff2
      f(3) = ff3
      f(4) = ff4
cc

RETURN
END
CCC
SUBROUTINE DFSUB(X,Z,DF)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /PAR/ XL,alpha,gamma
DOUBLE PRECISION Z(8),DF(4,8)
Z1=Z(1)
Z2=Z(2)
Z3=Z(3)
Z4=Z(4)
Z5=Z(5)
Z6=Z(6)
Z7=Z(7)
Z8=Z(8)

cccccccccccccccccccc Jacobian of ODEs here ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccc contains derivatives of the ODEs with respect to the functions
cccccccccccccccccccc notation: df11=derivative of 1.ODE with respect to z(1)=P, df12
cccccccccccccccccccc derivative of 1.ODE with respect to z(2)=P' ccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      dff11=3.0*z1**2-1.0 +(z3/z7)**2
      dff12=-(2.0*z6/z5 +z8/z7)
      dff13=2.0*z1*z3/z7**2
      dff14=0.0
      dff15=2.0*z2*z6/z5**2

```

```

dff16=-2.0*z2/z5
dff17=z2*z8/z7**2 - 2.0*z1*z3**2/z7**3
dff18=-z2/z7
dff21=2.0*alpha*z1*z3
dff22=0.0
dff23=alpha*z1**2
dff24=-2.0*z6/z5 +z8/z7
dff25=2.0*z4*z6/z5**2
dff26=-2.0*z4/z5
dff27=-z4*z8/z7**2
dff28=z4/z7
dff31=gamma*z5*z1*(1.0-z1**2)
dff32=0.0
dff33=0.0
dff34=gamma*z5*z4/(alpha*z7**2)
dff35=(z6/z5)**2 +gamma*(z4**2/(2.0*alpha*z7**2)-
. ((1.0-z1**2)**2)/4.0)
dff36=-(z8/z7 +2.0*z6/z5)
dff37=(z6*z8/z7**2)-gamma*z5*z4**2/(alpha*z7**3)
dff38=-z6/z7
dff41=-gamma*z1*z7*(2.0*(z3/z7)**2-(1.0-z1**2))
dff42=0.0
dff43=-2.0*gamma*z3*z1**2/z7
dff44=-gamma*z4/(alpha*z7)
dff45=2.0*z6*z8/z5**2
dff46=-2.0*z8/z5
dff47=gamma*(z4**2/(2.0*alpha*z7**2)+(z3*z1/z7)**2 -
. ((1.0-z1**2)**2)/4.0)
dff48=-2.0*z6/z5

```

```

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cc

```

```

df(1,1) = dff11
df(1,2) = dff12
df(1,3) = dff13
df(1,4) = dff14
df(1,5) = dff15
df(1,6) = dff16
df(1,7) = dff17
df(1,8) = dff18

```

```

df(2,1) = dff21
df(2,2) = dff22
df(2,3) = dff23
df(2,4) = dff24
df(2,5) = dff25
df(2,6) = dff26
df(2,7) = dff27
df(2,8) = dff28

```

```

df(3,1) = dff31
df(3,2) = dff32
df(3,3) = dff33
df(3,4) = dff34
df(3,5) = dff35
df(3,6) = dff36
df(3,7) = dff37
df(3,8) = dff38

```

```

df(4,1) = dff41
df(4,2) = dff42
df(4,3) = dff43
df(4,4) = dff44

```



```

C          ROUTINE INTPOL
C          reads the starting solution (from solu.new) and
c          makes a simple interpolation
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

      SUBROUTINE INTPOL
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION Z(8),DMVAL(4)
      COMMON /FIELDS/ XI(400),V1(400),V2(400),V3(400),V4(400),
*          V5(1000),V6(400),W1(400),W2(400),W3(400),W4(400),
*          V7(400),V8(400),V9(400),V10(400),V11(400)
*          ,V12(400),
*          W5(400),W6(400)
      COMMON /PAR/ XL,b2,b3,q
      COMMON /PARB/ XMAX,IMAX
      DO 20 I=1,IMAX
      READ(3,25) XI(I),V1(I),V2(I)
20 WRITE(4,25) XI(I),V1(I),V2(I)
      DO 21 I=1,IMAX
      READ(3,25) XI(I),V3(I),V4(I)
21 WRITE(4,25) XI(I),V3(I),V4(I)
      DO 22 I=1,IMAX
      READ(3,25) XI(I),V5(I),V6(I)
22 WRITE(4,25) XI(I),V5(I),V6(I)
      DO 23 I=1,IMAX
      READ(3,25) XI(I),V7(I),V8(I)
23 WRITE(4,25) XI(I),V7(I),V8(I)
25 FORMAT(E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10)

C          REWIND 3
C
C          XMAX=XI(IMAX)
C          IMAXM=IMAX-1
C
C          DXO=XI(2)-XI(1)
C          DXF=XI(IMAX)-XI(IMAXM)
C
C          W1(1)=(V2(2)-V2(1))/DXO
C          W2(1)=(V4(2)-V4(1))/DXO
C          W3(1)=(V6(2)-V6(1))/DXO
C          W4(1)=(V8(2)-V8(1))/DXO
C
c          W1(IMAX)=(V2(IMAX)-V2(IMAXM))/DXF
c          W2(IMAX)=(V4(IMAX)-V4(IMAXM))/DXF
c          W3(IMAX)=(V6(IMAX)-V6(IMAXM))/DXF
c          W4(IMAX)=(V8(IMAX)-V8(IMAXM))/DXF
C
c          DO 40 I=2,IMAXM
c          IP=I+1
c          IM=I-1
c          DXI=XI(IP)-XI(IM)
c          W1(I)=(V2(IP)-V2(IM))/DXI
c          W2(I)=(V4(IP)-V4(IM))/DXI
c          W3(I)=(V6(IP)-V6(IM))/DXI
c          W4(I)=(V8(IP)-V8(IM))/DXI

40 CONTINUE
      RETURN
      END

ccccccc takes result from interpolation and constructs the new starting solution ccccccccccc
      SUBROUTINE SOLUTN(X,Z,DMVAL)

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION Z(8),DMVAL(4)
COMMON /FIELDS/ XI(400),V1(400),V2(400),V3(400),V4(400),
*      V5(1000),V6(400),W1(400),W2(400),W3(400),W4(400),
*      V7(400),V8(400),V9(400),V10(400),
*      V11(400),V12(400),
*      W5(400),W6(400)
COMMON /PAR/ XL,b2,b3,q
COMMON /PARB/ XMAX,IMAX

IF(X.EQ.0.D0)GO TO 1
IF(X.GE.XMAX)GO TO 2
DO 10 I=1,IMAX
IDXP=I
IF(X.LT.XI(I))GO TO 11
10 CONTINUE
11 IDX=IDXP-1
XDX=XI(IDX)
XDXP=XI(IDXP)
FAK=(X-XDX)/(XDXP-XDX)

Z(1)=V1(IDX)+(V1(IDXP)-V1(IDX))*FAK
Z(2)=V2(IDX)+(V2(IDXP)-V2(IDX))*FAK
Z(3)=V3(IDX)+(V3(IDXP)-V3(IDX))*FAK
Z(4)=V4(IDX)+(V4(IDXP)-V4(IDX))*FAK
c
Z(5)=V5(IDX)+(V5(IDXP)-V5(IDX))*FAK
Z(6)=V6(IDX)+(V6(IDXP)-V6(IDX))*FAK
Z(7)=V7(IDX)+(V7(IDXP)-V7(IDX))*FAK
Z(8)=V8(IDX)+(V8(IDXP)-V8(IDX))*FAK

DMVAL(1)=W1(IDX)+(W1(IDXP)-W1(IDX))*FAK
DMVAL(2)=W2(IDX)+(W2(IDXP)-W2(IDX))*FAK
DMVAL(3)=W3(IDX)+(W3(IDXP)-W3(IDX))*FAK
DMVAL(4)=W4(IDX)+(W4(IDXP)-W4(IDX))*FAK

RETURN
1 CONTINUE

Z(1)=V1(1)
Z(2)=V2(1)
Z(3)=V3(1)
Z(4)=V4(1)
Z(5)=V5(1)
Z(6)=V6(1)
Z(7)=V7(1)
Z(8)=V8(1)

DMVAL(1)=w1(1)
DMVAL(2)=W2(1)
DMVAL(3)=W3(1)
DMVAL(4)=W4(1)

RETURN
2 CONTINUE

Z(1)=V1(IMAX)
Z(2)=V2(IMAX)
Z(3)=V3(IMAX)
Z(4)=V4(IMAX)
Z(5)=V5(IMAX)

```

```

Z(6)=V6(IMAX)
Z(7)=V7(IMAX)
Z(8)=V8(IMAX)

```

```

DMVAL(1)=W1(IMAX)
DMVAL(2)=W2(IMAX)
DMVAL(3)=W3(IMAX)
DMVAL(4)=W4(IMAX)

```

```

RETURN
END

```

B.5 input.dat para cordas cósmicas não-Abelianas no espaço-tempo de de Sitter

```

XL=
16.0
alpha=
0.8
beta2=
2.0
beta3=
1.0
gamma=
0.61
q=
1.0
xc=
0.0075
TOLIN=
0.010
NINT=
1128
IMAX=
1128
NDIAG=
-1
Npri=
1

```

B.6 input.dat para cordas cósmicas não-Abelianas no espaço-tempo de anti-de Sitter

```

XL=
1000.0
alpha=
0.8
beta2=
2.0

```

```

beta3=
1.0
gamma=
0.6
q=
1.0
xc=
-0.03
TOLIN=
0.010
NINT=
1128
IMAX=
1128
NDIAG=
-1
Npri=
1

```

B.7 Driver para cordas cósmicas não-Abelianas no espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter

```

C      Departamento de Fisica – UFPB
C      Antonio de Padua Santos
C      July 2015: non-abelian in dS and AdS
cc     z1=H, z3=X, z5=Y, z7=N, z9=L
cc
      IMPLICIT REAL*8(A–H,O–Z)
      COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2,beta3,alpha,gamma,xq,xc
      COMMON /PARB/ XMAX,IMAX
      DOUBLE PRECISION ZETA(10),FSPACE(800000)
      DOUBLE PRECISION TOL(5),Z(10),DMVAL(5)
      DOUBLE PRECISION AFUN(1650),ASUN(1650)
      DOUBLE PRECISION BFUN(1650),BSUN(1650)
      DOUBLE PRECISION CFUN(1650),CSUN(1650)
      DOUBLE PRECISION FFUN(1650),FSUN(1650)
      DOUBLE PRECISION DFUN(1650),DSUN(1650)
      DOUBLE PRECISION AAS(1650),BAS(1650),FAS(1650)
      DOUBLE PRECISION ELCH(1650)
      INTEGER ISPACE(80000),M(5),IPAR(12),LTOL(5),NPAS(5)
      DOUBLE PRECISION INTE(80010)
      EXTERNAL COLSYS
      EXTERNAL FSUB,DFSUB,GSUB,DGSUB,SOLUTN,INTPOL

      open(unit=1, file='input.dat')
      open(unit=2, file='solu.dat', position='append')
      open(unit=3, file='solu.new')
      open(unit=4, file='solu.old')
      open(unit=88,file='print.dat')

C
C      INPUT DATA FOR PHYSICAL PROBLEM
C
      PI=4.D0*DATAN(1.D0)
      SQ2 = DSQRT(2.D0)
      READ(1,*)
      READ(1,*)XL
      READ(1,*)
      READ(1,*)alpha
      READ(1,*)

```

```

      READ(1,*) beta2
      READ(1,*)
      READ(1,*) beta3
      READ(1,*)
      READ(1,*) gamma
      READ(1,*)
      READ(1,*) xq
      READ(1,*)
      READ(1,*) xc
      READ(1,*)
      READ(1,*) TOLIN
      READ(1,*)
      READ(1,*) NINT
      READ(1,*)
      READ(1,*) IMAX
      READ(1,*)
      READ(1,*) NDIAG
      READ(1,*)
      read(1,*) npri

      CALL INTPOL

C
C      INPUT FOR SUBROUTINE COLSYS
C
      NCOMP=5
      M(1)=2
      M(2)=2
      M(3)=2
      M(4)=2
      M(5)=2
      ALEFT=0.D0
      ZETA(1)=ALEFT
      ZETA(2)=ALEFT
      ZETA(3)=ALEFT
      ZETA(4)=ALEFT
      ARIGHT=XL
      ZETA(5)=ALEFT
      ZETA(6)=ALEFT
      ZETA(7)=ALEFT
      ZETA(8)=XL
      ZETA(9)=XL
      ZETA(10)=XL
      TOL(1)=TOLIN
      TOL(2)=TOLIN
      TOL(3)=TOLIN
      TOL(4)=TOLIN
      TOL(5)=TOLIN
      LTOL(1)=1
      LTOL(2)=3
      LTOL(3)=5
      LTOL(4)=7
      LTOL(5)=9
      DO 1 I=1,11
1 IPAR(I)=0
C
      IPAR(1)=1
      IPAR(3)=NINT
      IPAR(4)=5
      IPAR(5)=800000
      IPAR(6)=80000
      IPAR(7)=NDIAG
      IPAR(8)=1
      IPAR(9)=1
      DO 55 INP=1,IMAX
      READ(3,*) X, AA, BB
      FSPACE(INP)=X

```

```

55 CONTINUE
    REWIND 3
    CALL COLSYS(NCOMP,M,ALEFT,ARIGHT,ZETA,IPAR,LTOL,TOL,
*           FIXPNT,ISPACE,FSPACE,IFLAG,FSUB,
*           DFSUB,GSUB,DGSUB,SOLUTN)
C
    ISP1=ISPACE(1)
3  FORMAT('alpha = ',D12.6,2X,'gamma = ',D12.6,
*        2X,'beta2 = ',d12.6)
4  FORMAT('akas= ',D12.6,2X,' bkas= ',D12.6)

5  FORMAT('Fp(0) = ',D12.6,2X,'PPP(0) = ',D12.6)
6  FORMAT('XL = ',F10.4,' IFLAG = ',I2,'NBR MECHES = ',I3)
    WRITE(6,*)' colsys a fini —meche=',isp1

    IF(IFLAG.NE.1)STOP
ccc  value of deficit angle in units of 2*pi cccccccccccccccc
    xor = fspace(IMAX)
    CALL APPSLN(Xor,Z,FSPACE,ISPACE)
    xdelta = 1.d0-z(10)

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

ccc  Calculation of inertial energy per unit length in units of 2*pi and units of
ccccccccccc  lambda_1*eta_1**2 cccccccccccccccccccccccccccc

    NPAS(1)=20000
    NPAS(2)=40000
    NPAS(3)=80000
    DO 45 k=1,3
    NPA = NPAS(k)
    NPB = NPA+1
    INTE(1)=1.D0/3.D0
    DO 8 I=2,NPA,2
    INTE(I)=4.D0/3.D0
    IP=I+1
8  INTE(IP)=2.D0/3.D0
    INTE(NPB)=1.D0/3.D0
    XSTR = 0.D0
    XENE = 0.D0
    XNPA = DFLOAT(NPA)
CC
    DXS=XL/XNPA
    X=0.D0
    X=X+DXS
    DO 7 I=2,NPA
    CALL APPSLN(X,Z,FSPACE,ISPACE)
    Z1=Z(1)
    Z2=Z(2)
    Z3=Z(3)
    Z4=Z(4)
    Z5=Z(5)
    z6=z(6)
    z7=z(7)
    z8=z(8)
    z9=z(9)
    z10=z(10)

    xene = xene + z7*z9*(z2**2/(2.0*alpha*z9**2)
.  + (0.5)*(z4**2+z6**2)+
.  (0.5)*(z1/z9)**2*(z3**2+z5**2)+(0.25)*(z3**2-1)**2+
.  (beta2**2)*(0.25)*(z5**2-xq**2)**2+(beta3**2)*(0.5)*
.  (z3**2-1)*(z5**2-xq**2))*DXS*INTE(I)

```

```

      X=X+DXS
7  CONTINUE

45  CONTINUE
    WRITE(2,26)  alpha , beta2 , beta3 , gamma , xene , xdelta
    WRITE(6,*)   alpha , beta2 , beta3 , gamma , xene , xdelta , xc

ccccccc end of calculation of the inertial energy per unit length in units of 2*pi cccccccccccccccccccccccccccccccccc
    DO 202 I=1,isp1
      X=FSPACE(I)
      CALL APPSLN(X,Z,FSPACE,ISPACE)
      AFUN(I)=Z(1)
      ASUN(I)=Z(2)
      BFUN(I)=Z(3)
      BSUN(I)=Z(4)
      FFUN(I)=Z(5)
      FSUN(I)=Z(6)
      CFUN(I)=Z(7)
      CSUN(I)=Z(8)
      DFUN(I)=Z(9)
      DSUN(I)=Z(10)

202  continue
    DO 21 I=1,isp1 , npri
      X=FSPACE(I)
21  WRITE(3,25)X,AFUN(I) ,ASUN(I)
      DO 22 I=1,isp1 , npri
        X=FSPACE(I)
22  WRITE(3,25)X,BFUN(I) ,BSUN(I)
        DO 23 I=1,isp1 , npri
          X=FSPACE(I)
23  WRITE(3,25)X,FFUN(I) ,FSUN(I)
          DO 24 I=1,isp1 , npri
            X=FSPACE(I)
24  WRITE(3,25)X,CFUN(I) ,CSUN(I)
            DO 224 I=1,isp1 , npri
              X=FSPACE(I)
224  WRITE(3,25)X,DFUN(I) ,DSUN(I)
              DO 28 I=2,ISP1 , npri
                X=FSPACE(I)
                WRITE(88,26)X,afun(i) ,bfun(i) ,ffun(i) ,cfun(i) ,dfun(i)
28  continue
              DO 29 I=2,ISP1 , npri
                X=FSPACE(I)
29  continue
25  FORMAT(E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10)
26  FORMAT(7f10.4)
    STOP
    END

C
SUBROUTINE FSUB(X,Z,F)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2 , beta3 , alpha , gamma , xq , xc
  DOUBLE PRECISION Z(10) ,F(5)

  Z1=Z(1)
  Z2=Z(2)
  Z3=Z(3)
  Z4=Z(4)
  Z5=Z(5)
  Z6=Z(6)
  Z7=Z(7)
  Z8=Z(8)
  z9=z(9)

```

```

z10=z(10)

cc      z1=H, z3=X, z5=Y, z7=N, z9=L
cc      z2=H', z4=X', z6=Y', z8=N', z10=L'

ff1=(alpha*z1*z3**2*z7*z9+alpha*z1*z5**2*z7*z9+z10*z2*z7-2.0*z2
. *z8*z9)/(z7*z9)
ff2=(-beta3**2*xq**2*z3*z7*z9**2+beta3**2*z3*z5**2*z7*z9**2+z1
. **2*z3*z7-z10*z4*z7*z9+z3**3*z7*z9**2-z3*z7*z9**2-2.0*z4*z8*z9
. **2)/(z7*z9**2)
ff3=(-beta2**2*xq**2*z5*z7*z9**2+beta2**2*z5**3*z7*z9**2+beta3
. **2*z3**2*z5*z7*z9**2-beta3**2*z5*z7*z9**2+z1**2*z5*z7-z10*z6*
. z7*z9-2.0*z6*z8*z9**2)/(z7*z9**2)
ff4=(-xc*4.0*alpha*z7**2*z9**2
. -alpha*beta2**2*gamma*xq**4*z7**2*z9**2+2.0*alpha*beta2**2
. *gamma*xq**2*z5**2*z7**2*z9**2-alpha*beta2**2*gamma*z5**4*z7**
. 2*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*gamma*xq**2*z3**2*z7**2*z9**2-2.0*
. alpha*beta3**2*gamma*xq**2*z7**2*z9**2-2.0*alpha*beta3**2*
. gamma*z3**2*z5**2*z7**2*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*gamma*z5**2*
. z7**2*z9**2-alpha*gamma*z3**4*z7**2*z9**2+2.0*alpha*gamma*z3**
. 2*z7**2*z9**2-alpha*gamma*z7**2*z9**2-4.0*alpha*z10*z7*z8*z9-
. 4.0*alpha*z8**2*z9**2+2.0*gamma*z2**2*z7**2)/(4.0*alpha*z7*z9
. **2)
ff5=(-xc*4.0*alpha*z7*z9**2
. -alpha*beta2**2*gamma*xq**4*z7*z9**2+2.0*alpha*beta2**2*
. gamma*xq**2*z5**2*z7*z9**2-alpha*beta2**2*gamma*z5**4*z7*z9**2
. +2.0*alpha*beta3**2*gamma*xq**2*z3**2*z7*z9**2-2.0*alpha*beta3
. **2*gamma*xq**2*z7*z9**2-2.0*alpha*beta3**2*gamma*z3**2*z5**2*
. z7*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*gamma*z5**2*z7*z9**2-4.0*alpha*
. gamma*z1**2*z3**2*z7-4.0*alpha*gamma*z1**2*z5**2*z7-alpha*
. gamma*z3**4*z7*z9**2+2.0*alpha*gamma*z3**2*z7*z9**2-alpha*
. gamma*z7*z9**2-8.0*alpha*z10*z8*z9-2.0*gamma*z2**2*z7)/(4.0*
. alpha*z7*z9)

ccc

f(1) = ff1
f(2) = ff2
f(3) = ff3
f(4) = ff4
f(5) = ff5

cc

RETURN
END

CCC
SUBROUTINE DFSUB(X,Z,DF)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2,beta3,alpha,gamma,xq,xc
DOUBLE PRECISION Z(10),DF(5,10)
Z1=Z(1)
Z2=Z(2)
Z3=Z(3)
Z4=Z(4)
Z5=Z(5)
Z6=Z(6)
Z7=Z(7)
Z8=Z(8)
z9=z(9)
z10=z(10)

cc
cc

dff11=alpha*(z3**2+z5**2)
dff12=(z10*z7-2.0*z8*z9)/(z7*z9)
dff13=2.0*alpha*z1*z3

```

```

dff14=0.0
dff15=2.0*alpha*z1*z5
dff16=0.0
dff17=(2.0*z2*z8)/z7**2
dff18=(-2.0*z2)/z7
dff19=(-z10*z2)/z9**2
dff110=z2/z9
dff21=(2.0*z1*z3)/z9**2
dff22=0.0
dff23=(-beta3**2*xq**2*z9**2+beta3**2*z5**2*z9**2+z1**2+3.0*z3
.   **2*z9**2-z9**2)/z9**2
dff24=(-z10*z7-2.0*z8*z9)/(z7*z9)
dff25=2.0*beta3**2*z3*z5
dff26=0.0
dff27=(2.0*z4*z8)/z7**2
dff28=(-2.0*z4)/z7
dff29=(-2.0*z1**2*z3+z10*z4*z9)/z9**3
dff210=(-z4)/z9
dff31=(2.0*z1*z5)/z9**2
dff32=0.0
dff33=2.0*beta3**2*z3*z5
dff34=0.0
dff35=(-beta2**2*xq**2*z9**2+3.0*beta2**2*z5**2*z9**2+beta3**2*
.   z3**2*z9**2-beta3**2*z9**2+z1**2)/z9**2
dff36=(-z10*z7-2.0*z8*z9)/(z7*z9)
dff37=(2.0*z6*z8)/z7**2
dff38=(-2.0*z6)/z7
dff39=(-2.0*z1**2*z5+z10*z6*z9)/z9**3
dff310=(-z6)/z9
dff41=0.0
dff42=(gamma*z2*z7)/(alpha*z9**2)
dff43=gamma*z3*z7*(beta3**2*xq**2-beta3**2*z5**2-z3**2+1.0)
dff44=0.0
dff45=gamma*z5*z7*(beta2**2*xq**2-beta2**2*z5**2-beta3**2*z3**2
.   +beta3**2)
dff46=0.0
dff47=(-alpha*beta2**2*gamma*xq**4*z7**2*z9**2+2.0*alpha*beta2
.   **2*gamma*xq**2*z5**2*z7**2*z9**2-alpha*beta2**2*gamma*z5**4*
.   z7**2*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*gamma*xq**2*z3**2*z7**2*z9**2-
.   2.0*alpha*beta3**2*gamma*xq**2*z7**2*z9**2-2.0*alpha*beta3**2*
.   gamma*z3**2*z5**2*z7**2*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*gamma*z5**2*
.   z7**2*z9**2-alpha*gamma*z3**4*z7**2*z9**2+2.0*alpha*gamma*z3**
.   2*z7**2*z9**2-alpha*gamma*z7**2*z9**2+4.0*alpha*z8**2*z9**2+
.   2.0*gamma*z2**2*z7**2)/(4.0*alpha*z7**2*z9**2)-xc
dff48=(-z10*z7-2.0*z8*z9)/(z7*z9)
dff49=(alpha*z10*z8*z9-gamma*z2**2*z7)/(alpha*z9**3)
dff410=(-z8)/z9
dff51=(-2.0*gamma*z1*(z3**2+z5**2))/z9
dff52=(-gamma*z2)/(alpha*z9)
dff53=(gamma*z3*(beta3**2*xq**2*z9**2-beta3**2*z5**2*z9**2-2.0*
.   z1**2-z3**2*z9**2+z9**2))/z9
dff55=0.0
dff55=0.0
dff56=0.0
dff57=(2.0*z10*z8)/z7**2
dff58=(-2.0*z10)/z7
dff59=(gamma*(-alpha*beta2**2*xq**4*z9**2+2.0*alpha*beta2**2*xq
.   **2*z5**2*z9**2-alpha*beta2**2*z5**4*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*
.   xq**2*z3**2*z9**2-2.0*alpha*beta3**2*xq**2*z9**2-2.0*alpha*
.   beta3**2*z3**2*z5**2*z9**2+2.0*alpha*beta3**2*z5**2*z9**2+4.0*
.   alpha*z1**2*z3**2+4.0*alpha*z1**2*z5**2-alpha*z3**4*z9**2+2.0*
.   alpha*z3**2*z9**2-alpha*z9**2+2.0*z2**2))/(4.0*alpha*z9**2)
.   -xc
dff510=(-2.0*z8)/z7

```

cc

```

df(1,1) = dff11
df(1,2) = dff12
df(1,3) = dff13
df(1,4) = dff14
df(1,5) = dff15
df(1,6) = dff16
df(1,7) = dff17
df(1,8) = dff18
df(1,9) = dff19
df(1,10) = dff110

```

```

df(2,1) = dff21
df(2,2) = dff22
df(2,3) = dff23
df(2,4) = dff24
df(2,5) = dff25
df(2,6) = dff26
df(2,7) = dff27
df(2,8) = dff28
df(2,9) = dff29
df(2,10) = dff210

```

```

df(3,1) = dff31
df(3,2) = dff32
df(3,3) = dff33
df(3,4) = dff34
df(3,5) = dff35
df(3,6) = dff36
df(3,7) = dff37
df(3,8) = dff38
df(3,9) = dff39
df(3,10) = dff310

```

```

df(4,1) = dff41
df(4,2) = dff42
df(4,3) = dff43
df(4,4) = dff44
df(4,5) = dff45
df(4,6) = dff46
df(4,7) = dff47
df(4,8) = dff48
df(4,9) = dff49
df(4,10) = dff410

```

```

df(5,1) = dff51
df(5,2) = dff52
df(5,3) = dff53
df(5,4) = dff54
df(5,5) = dff55
df(5,6) = dff56
df(5,7) = dff57
df(5,8) = dff58
df(5,9) = dff59
df(5,10) = dff510

```

cc

```

RETURN
END
SUBROUTINE GSUB(I,Z,G)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2 , beta3 , alpha , gamma , xq , xc
DOUBLE PRECISION Z(10),G

```

```

      GOTO(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10),I
1   G=Z(1)-1.d0
      RETURN
2   G=Z(3)-0.d0
      RETURN
3   G=Z(5)-0.D0
      RETURN
4   G=Z(7)-1.D0
      RETURN
5   G=Z(8)-0.D0
      RETURN
6   G=Z(9)-0.00
      RETURN
7   G=Z(10)-1.D0
      RETURN
8   G=Z(1)-0.d0
      RETURN
9   G=Z(3)-1.d0
      RETURN
10  G=Z(5)-xq
      END
      SUBROUTINE DGSUB(I,Z,DG)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2,beta3,alpha,gamma,xq,xc
      DOUBLE PRECISION Z(10),DG(10)
      DO 111 J=1,10
111  DG(J)=0.D0
      GOTO(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10),I
1   DG(1)=1.d0
      RETURN
2   DG(3)=1.D0
      RETURN
3   DG(5)=1.D0
      RETURN
4   DG(7)=1.D0
      RETURN
5   DG(8)= 1.D0
      RETURN
6   DG(9)=1.D0
      RETURN
7   DG(10)=1.D0
      RETURN
8   DG(1)=1.D0
      RETURN
9   DG(3)=1.D0
      RETURN
10  DG(5)=1.D0
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C          ROUTINE INTPOL
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE INTPOL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION Z(10),DMVAL(5)
      COMMON /FIELDS/ XI(1650),V1(1650),V2(1650),V3(1650),V4(1650),
*          V5(1650),V6(1650),W1(1650),W2(1650),W3(1650),W4(1650),
*          V7(1650),V8(1650),V9(1650),V10(1650),W5(1650)
      COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2,beta3,alpha,gamma,xq
      COMMON /PARB/ XMAX,IMAX
      DO 20 I=1,IMAX
      READ(3,25) XI(I),V1(I),V2(I)
20  WRITE(4,25) XI(I),V1(I),V2(I)
      DO 21 I=1,IMAX
      READ(3,25) XI(I),V3(I),V4(I)

```

```

21 WRITE(4,25)XI(I),V3(I),V4(I)
   DO 22 I=1,IMAX
     READ(3,25)XI(I),V5(I),V6(I)
22 WRITE(4,25)XI(I),V5(I),V6(I)
   DO 23 I=1,IMAX
     READ(3,25)XI(I),V7(I),V8(I)
23 WRITE(4,25)XI(I),V7(I),V8(I)
   DO 24 I=1,IMAX
     READ(3,25)XI(I),V9(I),V10(I)
24 WRITE(4,25)XI(I),V9(I),V10(I)

25 FORMAT(E16.10,2X,E16.10,2X,E16.10)

C
  REWIND 3

C
  write(6,*)'coucou'
  XMAX=XI(IMAX)
  IMAXM=IMAX-1

C
  DXO=XI(2)-XI(1)
  DXF=XI(IMAX)-XI(IMAXM)

C
  W1(1)=(V2(2)-V2(1))/DXO
  W2(1)=(V4(2)-V4(1))/DXO
  W3(1)=(V6(2)-V6(1))/DXO
  W4(1)=(V8(2)-V8(1))/DXO
  W5(1)=(V10(2)-V10(1))/DXO

c
  W1(IMAX)=(V2(IMAX)-V2(IMAXM))/DXF
  W2(IMAX)=(V4(IMAX)-V4(IMAXM))/DXF
  W3(IMAX)=(V6(IMAX)-V6(IMAXM))/DXF
  W4(IMAX)=(V8(IMAX)-V8(IMAXM))/DXF
  W5(IMAX)=(V10(IMAX)-V10(IMAXM))/DXF

c
  DO 40 I=2,IMAXM
    IP=I+1
    IM=I-1
    DXI=XI(IP)-XI(IM)
    W1(I)=(V2(IP)-V2(IM))/DXI
    W2(I)=(V4(IP)-V4(IM))/DXI
    W3(I)=(V6(IP)-V6(IM))/DXI
    W4(I)=(V8(IP)-V8(IM))/DXI
    W5(I)=(V10(IP)-V10(IM))/DXI

40 CONTINUE
  RETURN
  END

SUBROUTINE SOLUTN(X,Z,DMVAL)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION Z(10),DMVAL(5)
  COMMON /FIELDS/ XI(1650),V1(1650),V2(1650),V3(1650),V4(1650),
*      V5(1650),V6(1650),W1(1650),W2(1650),W3(1650),W4(1650),
*      V7(1650),V8(1650),V9(1650),V10(1650),W5(1650)
  COMMON /PAR/ XL,PI,AL,beta2,beta3,alpha,gamma,xq
  COMMON /PARB/ XMAX,IMAX

  IF(X.EQ.0.D0)GO TO 1
  IF(X.GE.XMAX)GO TO 2

```

```

DO 10 I=1,IMAX
  IDXP=I
  IF (X.LT.XI(I))GO TO 11
10 CONTINUE
11 IDX=IDXP-1
  XDX=XI(IDX)
  XDXP=XI(IDXP)
  FAK=(X-XDX)/(XDXP-XDX)

  Z(1)=V1(IDX)+(V1(IDXP)-V1(IDX))*FAK
  Z(2)=V2(IDX)+(V2(IDXP)-V2(IDX))*FAK
  Z(3)=V3(IDX)+(V3(IDXP)-V3(IDX))*FAK
  Z(4)=V4(IDX)+(V4(IDXP)-V4(IDX))*FAK
c
  Z(5)=V5(IDX)+(V5(IDXP)-V5(IDX))*FAK
  Z(6)=V6(IDX)+(V6(IDXP)-V6(IDX))*FAK
  Z(7)=V7(IDX)+(V7(IDXP)-V7(IDX))*FAK
  Z(8)=V8(IDX)+(V8(IDXP)-V8(IDX))*FAK
  Z(9)=V9(IDX)+(V9(IDXP)-V9(IDX))*FAK
  Z(10)=V10(IDX)+(V10(IDXP)-V10(IDX))*FAK
c
  DMVAL(1)=W1(IDX)+(W1(IDXP)-W1(IDX))*FAK
  DMVAL(2)=W2(IDX)+(W2(IDXP)-W2(IDX))*FAK
  DMVAL(3)=W3(IDX)+(W3(IDXP)-W3(IDX))*FAK
  DMVAL(4)=W4(IDX)+(W4(IDXP)-W4(IDX))*FAK
  DMVAL(5)=W5(IDX)+(W5(IDXP)-W5(IDX))*FAK

  RETURN
1 CONTINUE

  Z(1)=V1(1)
  Z(2)=V2(1)
  Z(3)=V3(1)
  Z(4)=V4(1)
  Z(5)=V5(1)
  Z(6)=V6(1)
  Z(7)=V7(1)
  Z(8)=V8(1)
  Z(9)=V9(1)
  Z(10)=V10(1)

  DMVAL(1)=w1(1)
  DMVAL(2)=W2(1)
  DMVAL(3)=W3(1)
  DMVAL(4)=W4(1)
  DMVAL(5)=W5(1)
  RETURN
2 CONTINUE

  Z(1)=V1(IMAX)
  Z(2)=V2(IMAX)
  Z(3)=V3(IMAX)
  Z(4)=V4(IMAX)
  Z(5)=V5(IMAX)
  Z(6)=V6(IMAX)
  Z(7)=V7(IMAX)
  Z(8)=V8(IMAX)
  Z(9)=V9(IMAX)
  Z(10)=V10(IMAX)

  DMVAL(1)=W1(IMAX)
  DMVAL(2)=W2(IMAX)
  DMVAL(3)=W3(IMAX)
  DMVAL(4)=W4(IMAX)
  DMVAL(5)=W5(IMAX)

```

```
RETURN  
END
```

Referências Bibliográficas

- [1] T. W. B. Kibble, “Topology of cosmic domains and strings,” *J. Phys. A*, vol. **9**, p. 1387, (1976).
- [2] T. W. B. Kibble, “Some implications of a cosmological phase transitions,” *Phys. Rep.*, vol. **67**, p. 1, (1980).
- [3] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic String and Other Topological Defects*. Cambridge University Press, (1994).
- [4] P. Ade *et al.*, “Planck collaboration 2015 results xiii cosmological parameters,” *arXiv:1502.01589v2*, (2015).
- [5] M. Hindmarsh, “Signals of inflationary models with cosmic strings,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. **190**, p. 197, (2011).
- [6] E. J. Copeland, L. Pogosian, and T. Vachapati, “Seeking string theory in the cosmos,” *Class. Quantum Grav.*, vol. **28**, p. 204009, (2011).
- [7] H. B. Nielsen and P. Olesen, “Vortex-line models for dual strings,” *Nuclear Physics*, vol. **B61**, p. 45, (1973).
- [8] D. Garfinkle, “General relativistic strings,” *Phys. Rev. D*, vol. **31**, no. 6, p. 1323, (1985).
- [9] P. Laguna-Castillo and R. A. Matzner, “Discontinuity cylinder model of gravitating U(1) cosmic strings,” *Phys. Rev. D*, vol. **35**, no. 10, p. 2933, (1987).

- [10] Y. Brihaye and M. Lubo, “Classical solution of the gravitating abelian Higgs model,” *Phys. Rev. D*, vol. **62**, p. 085004, (2000).
- [11] E. R. B. de Mello, Y. Brihaye, and B. Hartmann, “Strings in de Sitter space,” *Phys. Rev. D*, vol. **67**, p. 124008, (2003).
- [12] L. Ryder, *Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, (2009).
- [13] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., (1971).
- [14] J. Baez and J. P. Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific, (1994).
- [15] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, (2006).
- [16] S. Carrol, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, (2004).
- [17] O. Gron and S. Hervik, *Einstein’s General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology*. Springer, (2007).
- [18] A. G. Riess *et al.*, “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and Cosmological Constant,” *Astron. J.*, vol. **116**, p. 1009, (1998).
- [19] S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae,” *Astrophys. J.*, vol. **517**, p. 565, (1999).
- [20] U. Moschella, “The de Sitter and anti-de Sitter sightseeing tour,” in *Seminaire Poincaré I*, pp. 1–12, (2005).
- [21] E. R. F. Medeiros, *Efeitos induzidos por uma corda cósmica na dinâmica relativística e na polarização do vácuo de campos de matéria*. PhD thesis, UFPB, (2014).

- [22] N. D. Birrel and D. P. C. W, *Quantum Fields in Curved Spaces*. Cambridge University Press, (1982).
- [23] J. M. Maldacena, “The large n limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.*, vol. **2**, p. 231, (1998).
- [24] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.*, vol. **2**, p. 253, (1998).
- [25] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” *Phys. Lett. B*, vol. **428**, p. 105, (1998).
- [26] C. A. B. Bayona and N. R. F. Braga, “Anti-de Sitter boundary in Poincaré coordinates,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. **39**, no. 9, pp. 1367–1379, (2007).
- [27] P. M. Chaikin and T. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, (1995).
- [28] F. Moraes, “Condensed matter physics as laboratory for gravitation and cosmology,” *Braz. J. of Phys.*, vol. **30**, no. 2, p. 304, (2000).
- [29] G. Arnison *et al.*, “Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at $s = 540\text{GeV}$,” *Phys. Lett. B*, vol. **122**.
- [30] G. Arnison *et al.*, “Experimental observation of lepton pairs of invariant mass around $95\text{GeV}/c^2$ at the cern sps collider,” *Phys. Lett. B*, vol. **126**, p. 398, 1983.
- [31] D. Cline and C. Rubbia, “Antiproton-proton colliders and intermediate bosons,” *Physics Today*, vol. **33**, no. 8, p. 44, 1980.
- [32] A. A. Abrikosov, “On the magnetic properties of superconductors of the second group,” *Soviet Physics JEPT*, vol. **5**, no. 6, p. 1174, (1957).

- [33] W. Marciano and H. Pagels, “Quantum chromodynamics,” *Physics Report*, vol. **36**, no. 3, p. 137, (1978).
- [34] H. J. de Vega, “Fermions and vortex solutions in abelian and non-abelian gauge theories,” *Phys. Rev. D*, vol. **18**, no. 8, p. 2932, (1978).
- [35] E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae,” *Proc. Nat. Acad. of Science*, vol. **15**, p. 169, (1929).
- [36] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s,” *Astrophysical Journal*, vol. **142**, no. 1, p. 419, (1965).
- [37] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*. Addison-Wesley Publishing Company, (1990).
- [38] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. John Wiley and Sons Ltd., (2003).
- [39] T. W. B. Kibble and M. B. Hindmarsh, “Cosmic strings,” *Reports on Progress in Physics*, vol. **58**, no. 5, p. 477, (1995).
- [40] A. Vilenkin, “Cosmic strings and domains walls,” *Phys. Rep.*, vol. **121**, no. 5, p. 263, (1985).
- [41] A. Vilenkin, “Gravitational field of vacuum domain walls and strings,” *Phys. Rev. D*, vol. **23**, no. 4, p. 852, (1981).
- [42] P. Laguna-Castillo and R. A. Matzner, “Coupled field solutions for U(1) gauge cosmic strings,” *Phys. Rev. D*, vol. **36**, no. 12, p. 3663, (1987).
- [43] B. Hartmann and P. Sirimachan, “Geodesic motion in the space-time of a cosmic string,” *JHEP*, vol. **08**, p. 110, (2010).
- [44] A. Banerjee and N. Banerjee, “Motion of test particles and photons in the gravitational field of a cosmic string,” *Phy. Lett. A*, vol. **160**, p. 119, (1991).

- [45] L. H. Ford and A. Vilenkin, “A gravitational analogue of the Aharonov-Bohm effect,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. **14**, p. 2353, (1981).
- [46] V. B. Bezerra, “Gravitational analogue of the Aharonov-Bohm effect in four and three dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. **35**, no. 6, p. 2031, (1987).
- [47] G. de A. Marques and V. B. Bezerra, “On a gravitational analogue of the Aharonov-Bohm effect,” *Phys. Lett. A*, vol. **318**, p. 1, (2003).
- [48] E. F. Medeiros and E. B. de Mello, “Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential,” *Eur. Phys. J. C*, vol. **72**, p. 2051, (2012).
- [49] Y.-Z. Chu and T. Vachaspati, “Gravitational scattering of photons off cosmic strings,” *Phys. Rev. D*, vol. **87**, p. 083512, (2013).
- [50] J. Audretsch and A. Economou, “Pair creation and decay of a massive particle near and far away from a cosmic string,” *Phys. Rev. D*, vol. **45**, no. 4, p. 1103, (1992).
- [51] V. P. Frolov and E. M. Serebriany, “Vacuum polarization in the gravitational field of a cosmic string,” *Phys. Rev. D*, vol. **35**, no. 12, p. 3779, (1987).
- [52] J. Spinelly and E. R. B. de Mello, “Vacuum polarization by a magnetic flux in a cosmic string background,” *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, vol. **127**, p. 77, (2004).
- [53] E. R. B. de Mello, A. A. Saharian, and S. V. Abajyan, “Fermionic vacuum polarization by a flat boundary in cosmic string spacetime,” *Class. Quantum Grav.*, vol. **30**, p. 015002, (2013).
- [54] S. Bellucci, E. R. B. de Mello, A. de Padua, and A. A. Saharian, “Fermionic vacuum polarization in compactified cosmic string spacetime,” *Eur. Phys. J. C*, vol. **74**, p. 2688, (2014).

- [55] E. R. B. de Mello and A. A. Saharian, “Fermionic vacuum polarization by a cosmic string in de Sitter spacetime,” *JHEP*, vol. **08**, p. 38, (2010).
- [56] E. R. B. de Mello and A. A. Saharian, “Vacuum polarization induced by a cosmic string in anti-de Sitter spacetime,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. **45**, p. 115402, (2012).
- [57] A. Vilenkin, “Cosmological density fluctuations produced by vacuum strings,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. **46**, p. 1169, (1981).
- [58] C. L. Bennet. et al, “First-year Wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)1 observations: Preliminary maps and basic results,” *The Astrophys. J. Suppl. Series*, vol. **148**, p. 1, (2003).
- [59] H. F. S. Mota, *Contribuições ao Estudo de Consequências Físicas de Cordas Cósmicas e do Efeito Casimir em Contexto Cosmológico*. PhD thesis, UFPB, (2014).
- [60] A. Stebbins, “Cosmic strings and microwave sky 1: Anisotropy from moving strings,” *The Astrophys. J.*, vol. **327**, p. 584, (1988).
- [61] F. Boucet, D. Bennett, and A. Stebbins, “Microwave anisotropy patterns from evolving strings,” *Nature*, vol. **355**, p. 410, (1988).
- [62] N. Kaiser and A. Stebbins, “Microwave anisotropy due to cosmic strings,” *Nature*, vol. **310**, p. 391, (1984).
- [63] V. Berezhinsky, B. Hnatyk, and A. Vilenkin, “Gamma ray bursts from superconducting cosmic strings,” *Phys. Rev. D*, vol. **64**, p. 043004, (2001).
- [64] K. S. Cheng, Y.-W. Yu, and T. Harko, “High redshift gamma-ray bursts: Observational signatures of superconducting cosmic strings?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. **104**, p. 241102, (2010).

- [65] A. Vilenkin, “gravitational fields of vacuum domain walls and strings,” *Phys. Rev. D*, vol. **23**, p. 852, (1981).
- [66] A. Vilenkin, “Cosmic strings as gravitational lenses,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. **51**, p. 282, (1984).
- [67] J. R. Gott, “Gravitational lenses effect of vacuum cosmic string: exact results,” *Astrophys. J.*, vol. **288**, p. 422, (1985).
- [68] A. de Pádua Santos and E. R. B. de Mello, “Gravitating non-abelian cosmic strings,” *Class. Quantum Grav.*, vol. **32**, p. 155001, (2015).
- [69] U. Asher, J. Christiansen, and R. D. Russel, “Collocation software for boundary-value odes,” *ACM Trans. Math. Softw.*, vol. **7**, no. 2, p. 209, (1981).
- [70] U. Asher, J. Christiansen, and R. D. Russel, “A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems,” *Math. Comput.*, vol. **33**, no. 146, p. 659, (1979).
- [71] B. Childs, M. R. Scott, J. W. Daniel, E. D. Denman, and P. Nelson, *Codes for Boundary-Value Problems in Ordinary Differential Equation - Lecture Notes in Computer Science*, vol. **76**. Springer-Verlag, (1978).
- [72] E. B. Bogomolni, “The stability of classical solutions,” *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. **24**, p. 449, (1976).
- [73] M. K. Prasad and C. M. Sommerfeld, “Exact classical solution for the ’tHooft monopole and the Julia-Zee dyon,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. **35**, p. 760, (1975).
- [74] Y. Verbin, “Cosmic strings in the abelian Higgs model with conformal coupling to gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. **59**, p. 105015, (1999).
- [75] T. Padmanabhan, “Cosmological constant - the weight of the vacuum,” *Physics Reports*, vol. **380**, p. 235, (2002).

- [76] B. Linet, “The static cylindrically symmetric strings in general relativity with cosmological constant,” *J. Math. Phys.*, vol. **27**, no. 7, p. 1817, (1986).
- [77] J. L. B. Salcedo, *Rotating Objects in General Relativity and Gauge Fields*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, (2014).