

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**TEORIA DA GRAVITAÇÃO NUM
ESPAÇO-TEMPO DE WEYL
NÃO-INTEGRÁVEL**

RUYDEIGLAN GOMES LIMA

ORIENTADOR: PROF. DR. CARLOS AUGUSTO ROMERO FILHO.

João Pessoa – PB

Fevereiro – 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**TEORIA DA GRAVITAÇÃO NUM
ESPAÇO-TEMPO DE WEYL
NÃO-INTEGRÁVEL**

RUYDEIGLAN GOMES LIMA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física, área de concentração: Gravitação e Cosmologia.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho.

João Pessoa – PB

Fevereiro – 2016

L732t Lima, Ruydeiglan Gomes.
Teoria da gravitação num espaço-tempo de Weyl não-
integrável / Ruydeiglan Gomes Lima.- João Pessoa, 2016.
61f.
Orientador: Carlos Augusto Romero Filho
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Geometria de Weyl. 3. Transformação de
calibre. 4. Equações de campo. 5. Tempo próprio.
6. Unificação.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno
Ruydeiglan Gomes Lima, candidato ao
Título de Mestre em Física na Área de
Concentração Gravitação e Cosmologia.

1 Aos vinte e cinco dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezesseis, às 10h00, na
2 sala de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza
3 da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de
5 Gravitação e Cosmologia, **Ruydeiglan Gomes Lima**. A comissão examinadora
6 composta pelos professores doutores: Carlos Augusto Romero Filho (DF/UFPB),
7 orientador e presidente da banca examinadora, Fábio Dahia (DF/UFPB) e Gonzalo
8 Olmo (Universitat de València). Dando início aos trabalhos, o Prof. Carlos Augusto
9 Romero Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a
10 palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de
11 dissertação intitulado "*Teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl não-integrável*".
12 Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o
13 seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba
14 expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu,
15 Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, lavrei a presente ata que vai
16 assinada por mim mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, 25 de
17 fevereiro de 2016.

18

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Fábio Dahia
UFPB

Prof. Dr. Gonzalo Olmo
Universitat de València

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário

Carlos Augusto Romero Filho

Fábio Dahia

Gonzalo Olmo



AGRADECIMENTOS

A Deus pelo seu amor e proteção durante todos os dias da minha vida.

A minha amada esposa Leidijane Santos Lima pela dedicação e cumplicidade indispensável a todas as nossas conquistas.

A minha querida mãe Maria Ozana Gomes Lima pois sem sua contribuição expressiva durante a graduação eu não conseguiria ter adentrado no mestrado.

A minha estimada tia Maria Livramento Gomes Lima que ainda hoje ora pelo meu sucesso e felicidade.

Ao meu tio Ateilton Gomes Lima pelos conselhos e exemplos que até hoje me norteiam.

Ao meu amigo Adriano Rocha Soares pelo companheirismo e ajuda nos momentos que precisei.

Ao professor Dr. Carlos Augusto Romero Filho pela dedicação a todos os seus alunos, por sua paciência, conselhos, aulas e orientação nos dois anos de mestrado.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

A matéria diz ao espaço como se curvar e o espaço diz à matéria como se mover.

John Archibald Wheeler

RESUMO

Em 1918 o alemão Hermann Weyl desenvolveu sua teoria de unificação entre gravitação e eletromagnetismo geometrizando ambas as interações, isto é, ele associou o potencial eletromagnético a uma 1-forma σ_μ depois de ter considerado que o comprimento de um vetor não preserva-se sob transporte paralelo assim como acontece com a direção, isso também fez com que a derivada covariante do tensor métrico deixasse de ser nula tornando-se $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\sigma_\alpha$. As equações de campo gravitacionais e eletromagnéticas são obtidas da ação $I = \int (R^2 + AF_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x$ em um calibre qualquer e no “calibre natural” $R = \Lambda = \text{constante}$ levando em conta que elas, assim como a ação, devem ser tanto invariantes por transformações de coordenadas como invariantes sob as transformações de calibre introduzidas, a saber, $\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}$ e $\bar{\sigma}_\mu = \sigma_\mu + f_{|\mu}$, na verdade, a primeira pessoa a falar em invariância de escala na física foi o próprio Weyl em seu artigo. Também é verificado que as soluções para o vácuo das equações de campo de Einstein também são soluções das equações de campo de Weyl correspondentes. Por fim mostra-se que as geodésicas afins de Weyl não podem advir de um princípio variacional através da análise das condições de Helmholtz para o problema inverso do cálculo de variações e discute-se sobre a crítica de Einstein à teoria, onde conclui-se que o mesmo se apoderou de uma definição inadequada de tempo próprio para dar seu parecer sobre o trabalho de Weyl, assim, um problema a ser resolvido seria encontrar uma boa definição de tempo próprio, o que deixa em aberto uma versão final da teoria de Weyl.

Palavras-chave: geometria de Weyl, transformações de calibre, equações de campo, tempo próprio, unificação.

ABSTRACT

In 1918 the German Hermann Weyl developed a unified theory of gravitation and electromagnetism becoming geometrical both interactions, that is, he associated the potential electromagnetic a 1-form σ_μ after considering that the length of a vector is not preserved under parallel transport as well as with the direction, this also meant that the covariant derivatives of the metric tensor ceased to be null becoming $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\sigma_\alpha$. The gravitational and electromagnetic field equations are obtained from the action $I = \int (R^2 + AF_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x$ in a gauge any and “natural gauge” $R = \Lambda = \text{constant}$ taking into account that they, as well as the action, should be both invariant under coordinate transformations as invariant under the gauge transformations introduced, namely, $\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}$ and $\bar{\sigma}_\mu = \sigma_\mu + f_{|\mu}$, actually, the first person to speak in scale invariance in physics was the Weyl himself in his article. It is also found that the solutions to the emptiness of Einstein’s field equations are also solutions of the corresponding Weyl’s field equations. Finally it is shown that the Weyl affine geodesic may not come from a variational principle by analysing the Helmholtz conditions for the inverse problem of the calculus of variations and discusses about Einstein’s criticism of the theory, on which it is concluded that the even seized an inadequate definition of proper time to give his opinion on the work of Weyl, thus, a problem to be solved was to find a good definition of proper time, which leaves open a final version of the Weyl theory.

Keywords: Weyl geometry, gauge transformations, field equations, proper time, unification.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	9
CAPÍTULO 2 – GEOMETRIA DE WEYL	11
2.1 Transformações de calibre	15
2.2 Identidades de Bianchi na geometria de Weyl	20
CAPÍTULO 3 – O ELETROMAGNETISMO NA GEOMETRIA DE WEYL	23
3.1 Equações de campo no “calibre natural” $R = \Lambda$	27
3.1.1 Variação no campo σ_μ	31
3.1.2 Variação em $g_{\mu\nu}$	32
3.2 Equações de campo em um calibre qualquer	34
3.2.1 Equações de campo eletromagnéticas da teoria de Weyl	34
3.2.2 Equações de campo gravitacionais da teoria de Weyl	35
CAPÍTULO 4 – CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE A TEORIA DE WEYL	38
4.1 O problema variacional inverso	38
4.1.1 Geodésicas métricas e geodésicas afins (autoparalelas)	38
4.1.2 Autoparalelas de Weyl	39
4.2 Crítica de Einstein à teoria de Weyl	41
4.3 Crítica à crítica de Einstein	43
CAPÍTULO 5 – CONCLUSÃO	45

<i>Sumário</i>	8
APÊNDICE A – DEDUÇÃO DO TENSOR DE RICCI E DO ESCALAR DE CURVATURA	47
APÊNDICE B – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO GRAVITACIONAIS DA TEORIA DE WEYL	50
APÊNDICE C – AS CONDIÇÕES DE HELMHOLTZ E A GEOMETRIA DE WEYL INTEGRÁVEL	56
REFERÊNCIAS	59

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A ideia de desenvolver uma teoria abrangente que explique os mais diferentes fenômenos da natureza não é somente um sonho de muitos físicos da atualidade, mas o problema também ocupou a mente de diversos cientistas do passado. Além disso, o que ainda hoje motiva os pesquisadores em tal busca é o grande sucesso de algumas teorias, que de certa forma unificaram ideias ou conceitos que até àquele momento eram considerados desconexos. Na referência [1] o autor Jenner Barreto Bastos Filho denomina este pensamento de *reducionismo unificador*.

Na física pode-se citar alguns exemplos de tal abordagem. Sir Isaac Newton (1643-1727) influenciado pelas ideias de Johannes Kepler (1571-1630), Galileu Galileu (1564-1642) e Nicolau Copérnico (1473-1543) construiu sua teoria da gravitação universal acabando com as fronteiras entre os dois mundos de Aristóteles¹ (384 a.C.-322a.C.), pois reduziu a física que descreve o movimento dos corpos celestes (mundo supralunar) e as leis que regem os corpos nas proximidades da terra (mundo sublunar) aos mesmos primeiros princípios. Além disso, a unificação da eletricidade, magnetismo e também da ótica foi concretizada por James Clerk Maxwell (1831-1879) [1], enquanto Albert Einstein (1879-1955) conseguiu com a relatividade geral construir uma teoria da gravitação coerente com a relatividade especial.

Nessa mesma linha Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955) tentou unificar gravitação e eletromagnetismo em uma teoria puramente geométrica. Além disso, Weyl introduziu o princípio de calibre, sem o qual as teorias modernas de unificação não seriam possíveis, por exemplo, todas as teorias de Yang-Mills, teoria das cordas e teoria-M dependem intimamente

¹Segundo o filósofo grego Aristóteles o universo era dividido em dois mundos diferentes, aquele formado por quatro elementos básicos, a saber, água, fogo, terra e ar, localizado na região inferior a órbita da lua era chamado de mundo sublunar. Os movimentos existentes neste lugar eram devidos à procura constante desses quatro elementos por seus lugares naturais (água e terra se moviam para baixo porque este era seu lugar natural enquanto fogo e ar se moviam para cima pelo mesmo motivo). O outro mundo composto pela lua, sol, estrelas e demais corpos celestes era formado por um quinto elemento, o éter, e recebeu o nome de mundo supralunar. O primeiro mundo era caracterizado pela constante mutação e imperfeição e o segundo pela ordem, harmonia e regularidade.

de tal princípio [2].

O objetivo deste trabalho é apresentar a geometria de Weyl e encontrar as equações de campo, fazendo uma exposição matematicamente minuciosa e apresentando o tema de modo a fornecer uma bibliografia acessível aos leitores, visto que na literatura este é um assunto pouco discutido.

O presente conteúdo se dividirá como segue: No capítulo dois a geometria de Weyl é apresentada e são deduzidas as principais identidades geométricas da teoria, como a conexão, que difere dos símbolos de Christoffel de segundo tipo, a nova condição de compatibilidade entre a métrica e a conexão, as transformações de calibre e as identidades de Bianchi da teoria. No capítulo três o eletromagnetismo é inserido dentro da nova geometria através da identificação do campo de 1-forma que caracteriza a geometria com o potencial eletromagnético, com isso são encontradas as equações de campo eletromagnéticas e gravitacionais tanto em um calibre qualquer como no “calibre natural” $R = \text{constante}$. Por fim, o quarto capítulo trata do problema inverso do cálculo variacional a fim de mostrar que as geodésicas afins de Weyl não podem advir de um princípio variacional, bem como da crítica de Einstein referente ao tempo próprio, neste ponto o presente trabalho tenta reviver a teoria de Weyl mostrando que ainda não existe uma definição adequada para o tempo próprio, o que torna a teoria de Weyl incompleta, sendo precipitado concluir que ela está errada.

Capítulo 2

GEOMETRIA DE WEYL

Weyl foi um matemático alemão que estudou em Göttingen, onde foi aluno do famoso David Hilbert (1862-1943). Ele se interessava muito por filosofia da matemática e das ciências naturais, tanto que três anos depois de Einstein ter desenvolvido a teoria da relatividade geral ele apresentou sua teoria de unificação das duas únicas interações conhecidas na época, a gravitação e o eletromagnetismo.

Uma vez que a teoria da relatividade geral de Einstein geometriza os fenômenos gravitacionais, seria razoável tentar fazer o mesmo para o eletromagnetismo, isto é, tentar geometrizar-lo estabelecendo uma correspondência entre o potencial eletromagnético e o campo tensorial métrico. Entretanto, as componentes da métrica em geometria riemanniana¹ já estavam completamente comprometidas com as equações de movimento de Einstein, não havendo lugar para embutir os fenômenos eletromagnéticos nesta geometria. A ideia de Weyl foi generalizar a geometria riemanniana afim de aumentar a liberdade na escolha do tensor métrico, possibilitando a inserção do eletromagnetismo. Uma abordagem histórica do desenvolvimento da teoria de Weyl pode ser encontrada em [3], onde o autor afirma que:

[...] A primeira teoria de campo unificada daquele tipo² foi a teoria de Weyl, que serviu como o modelo do programa completo das teorias de campo geométricas unificadas (1918). [...] a teoria de Weyl teve uma influência decisiva nas teorias de campo geométricas unificadas subsequentes que surgiram no início da década 1920, acima de tudo, as teorias de Eddington (1921), Kaluza (1921), Einstein (1923), e outras ([3], p. 71-72.).

A ideia deste capítulo é introduzir as principais características da geometria de Weyl e no decorrer de todo o trabalho será considerado que o leitor já teve contato com geometria riemanniana e relatividade geral.

¹Geometria riemanniana é a geometria utilizada no desenvolvimento da teoria da relatividade geral.

²Uma generalização da geometria riemanniana e cujo o campo eletromagnético pode ser interpretado como um fenômeno geométrico.

Um vetor v , no ponto P da variedade M , é expressado em um dado sistema de coordenadas $\{x^\mu\} = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$, por

$$v = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.1)$$

onde n é a dimensão da variedade, ξ^μ são as componentes de v e $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ os elementos da base induzida pelo sistema de coordenadas³.

Como um tensor, em especial um vetor, é definido em um único ponto da variedade não é possível comparar vetores em pontos diferentes de M , para isso faz-se necessário o conceito de transporte paralelo da relatividade geral, segundo o qual a variação das componentes de um vetor transportado paralelamente de um ponto $P(x^1, \dots, x^n) \in M$ a outro ponto infinitamente próximo $P'(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n) \in M$ têm a seguinte forma:

$$d\xi^\alpha = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \xi^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é conhecido como as componentes da conexão, como será visto depois, ela não é exatamente a conexão riemanniana. O sinal de menos no segundo membro de (2.2) é uma convenção utilizada pela maioria dos livros que se debruçam sobre relatividade geral, tais como [4–7], mas ainda existe na literatura autores que preferem não colocar o sinal de menos, por exemplo [8]. Tal convenção influenciará diretamente na definição de derivada em espaços curvos. De maneira análoga à definição de derivada no cálculo diferencial e integral, será definida aqui a derivada covariante de um vetor cujas componentes são ξ^α no ponto P e $\xi^\alpha + d\xi^\alpha$ no ponto P' da seguinte forma:

$$\nabla_\beta \xi^\alpha = \lim_{dx^\beta \rightarrow 0} \frac{\{\xi^\alpha(x + dx) - [\xi^\alpha(x) + d\xi^\alpha(x)]\}}{dx^\beta}. \quad (2.3)$$

Da definição anterior obtém-se trivialmente o seguinte resultado:

$$\nabla_\beta \xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \xi^\gamma. \quad (2.4)$$

Enquanto a derivada covariante de uma 1-forma de componentes ζ_α fica definida como:

$$\nabla_\beta \zeta_\alpha = \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \zeta_\gamma. \quad (2.5)$$

Caso o sinal no segundo membro da Eq. (2.2) fosse modificado isso implicaria a alteração dos sinais da conexão nas definições (2.4) e (2.5). A expressão da derivada covariante de um tensor geral, com índices covariantes e contravariantes segue diretamente das duas definições acima

³ Aqui é adotada a convenção de soma criada por Einstein, na qual dois índices repetidos, sendo um covariante e outro contravariante, representam uma soma.

conforme encontrado na referência [9], para o caso especial do tensor métrico

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} - \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha g_{\mu\alpha}. \quad (2.6)$$

A partir de agora, por razões práticas serão adotadas algumas convenções para a derivada covariante e derivada parcial, a saber,

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \xi^\alpha &= \xi^\alpha_{||\beta}, \\ \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} &= \xi^\alpha_{|\beta}. \end{aligned}$$

Outra expressão conhecida é aquela para o quadrado do comprimento de um vetor que pode ser calculado em qualquer ponto de M pela seguinte expressão:

$$l = \xi^\mu \xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu. \quad (2.7)$$

Enquanto na geometria euclidiana, cujo espaço é plano, o transporte de um vetor através de uma curva fechada não altera sua direção nem seu comprimento, na geometria riemanniana somente o comprimento é mantido constante, pois neste último caso o espaço é curvo. A modificação proposta por Weyl foi relaxar também a restrição da invariância no comprimento. Ele propôs que a variação no quadrado do comprimento de um vetor quando este é transportado paralelamente por uma distância infinitamente pequena é proporcional ao quadrado do seu comprimento l antes do transporte, ao vetor deslocamento infinitesimal dx^μ e a um campo de 1-forma⁴ cujo as componentes são σ_μ , isto analiticamente corresponde a:

$$dl = \sigma_\mu dx^\mu l, \quad (2.8)$$

onde $\sigma_\mu = \sigma_\mu(x)$, ou seja, são funções somente da posição independentemente de l . A Eq. (2.8) tem estrutura semelhante a Eq. (2.2) com σ_μ desempenhando o papel de $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$. Realizada essa modificação torna-se possível que algumas das grandezas definidas em geometria riemanniana sejam modificadas. Para analisar a afirmação precedente, dl será calculada de duas maneiras diferentes:

$$dl = \sigma_\gamma dx^\gamma l = g_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \sigma_\gamma dx^\gamma \Rightarrow dl = g_{\alpha\beta} \sigma_\gamma \xi^\alpha \xi^\beta dx^\gamma. \quad (2.9)$$

Outro resultado para dl é encontrado substituindo l por $g_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta$ antes da diferenciação:

$$dl = d(g_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta) = d(g_{\alpha\beta}) \xi^\alpha \xi^\beta + g_{\alpha\beta} d(\xi^\alpha) \xi^\beta + g_{\alpha\beta} \xi^\alpha d(\xi^\beta),$$

⁴Essas componentes serão posteriormente associadas ao 4-potencial eletromagnético.

utilizando a Eq. (2.2) e escrevendo a diferencial da métrica como $d(g_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta|\gamma}dx^\gamma$, tem-se:

$$dl = g_{\alpha\beta|\gamma}\xi^\alpha\xi^\beta dx^\gamma - g_{\alpha\beta}\Gamma_{\rho\gamma}^\alpha\xi^\rho\xi^\beta dx^\gamma - g_{\alpha\beta}\Gamma_{\rho\gamma}^\beta\xi^\alpha\xi^\rho dx^\gamma. \quad (2.10)$$

Igualando os valores para dl na Eq. (2.9) e na Eq. (2.10), além de renomear os índices e rearranjar os termos, obtém-se:

$$g_{\alpha\beta}\sigma_\gamma\xi^\alpha\xi^\beta dx^\gamma = (g_{\alpha\beta|\gamma} - g_{\rho\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^\rho - g_{\alpha\rho}\Gamma_{\beta\gamma}^\rho)\xi^\alpha\xi^\beta dx^\gamma.$$

Desde que ξ^α e dx^γ são arbitrários a equação anterior pode ser reescrita como

$$g_{\alpha\beta|\gamma} - g_{\rho\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^\rho - g_{\alpha\rho}\Gamma_{\beta\gamma}^\rho = g_{\alpha\beta}\sigma_\gamma. \quad (2.11)$$

O lado esquerdo da Eq. (2.11) corresponde a derivada covariante da métrica, $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta|\gamma}$, conforme (2.6), que se anula em geometria riemanniana. O resultado riemanniano $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$ é conhecido como a condição de compatibilidade entre a métrica e a conexão [10]. Em geometria de Weyl essa condição de compatibilidade é modificada e se apresenta na forma da Eq. (2.11), sendo escrita de maneira mais compacta como

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta|\gamma} = g_{\alpha\beta}\sigma_\gamma. \quad (2.12)$$

Voltando à Eq. (2.11) pode-se por meio da permutação cíclica dos índices construir mais duas relações. As três equações são apresentadas abaixo

$$g_{\alpha\beta|\gamma} - g_{\rho\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^\rho - g_{\alpha\rho}\Gamma_{\beta\gamma}^\rho = g_{\alpha\beta}\sigma_\gamma, \quad (I)$$

$$g_{\gamma\alpha|\beta} - g_{\rho\alpha}\Gamma_{\gamma\beta}^\rho - g_{\gamma\rho}\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = g_{\gamma\alpha}\sigma_\beta, \quad (II)$$

$$g_{\beta\gamma|\alpha} - g_{\rho\gamma}\Gamma_{\beta\alpha}^\rho - g_{\beta\rho}\Gamma_{\gamma\alpha}^\rho = g_{\beta\gamma}\sigma_\alpha. \quad (III)$$

Considerando as simetrias da conexão e da métrica, a saber, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$ e calculando $(I) + (II) - (III)$, encontra-se que

$$2g_{\alpha\sigma}\Gamma_{\beta\gamma}^\sigma = (g_{\alpha\beta|\gamma} + g_{\gamma\alpha|\beta} - g_{\beta\gamma|\alpha}) - (g_{\alpha\beta}\sigma_\gamma + g_{\gamma\alpha}\sigma_\beta - g_{\beta\gamma}\sigma_\alpha).$$

Multiplicando ambos os lados da equação anterior por $\frac{1}{2}g^{\mu\nu}$ e em seguida contraindo ν com α , obtém-se

$$\begin{aligned} \delta_\sigma^\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma &= \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\beta|\gamma} + g_{\gamma\alpha|\beta} - g_{\beta\gamma|\alpha}) - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\beta}\sigma_\gamma + g_{\gamma\alpha}\sigma_\beta - g_{\beta\gamma}\sigma_\alpha) \\ \Gamma_{\beta\gamma}^\mu &= \{\mu_{\beta\gamma}\} - \frac{1}{2}(\delta_\beta^\mu \sigma_\gamma + \delta_\gamma^\mu \sigma_\beta - g_{\beta\gamma}\sigma^\mu), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde $\{\mu_{\beta\gamma}\} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\beta|\gamma} + g_{\gamma\alpha|\beta} - g_{\beta\gamma|\alpha})$ são conhecidos como os símbolos de Christoffel de

segundo tipo [10]. Assim, pode-se concluir que a geometria de Weyl é uma generalização da geometria riemanniana, recaindo nesta quando as componentes do campo de 1-forma são nulas, $\sigma_\mu = 0$, pois neste caso (2.8), (2.12) e (2.13) resultam respectivamente em $dl = 0$, $g_{\mu\nu||\alpha} = 0$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \{\alpha_{\mu\nu}\}$, os resultados da relatividade geral.

Nos capítulos posteriores será conveniente definir algumas grandezas de Weyl em função das grandezas riemanniana correspondentes, por isso é necessário encontrar um método de distinguir as entidades das duas geometrias. Neste trabalho, tal como em [11, 12], será colocado um til ($\sim$) para identificar tudo que for riemanniano, para exemplificar segue abaixo a derivada covariante de um vetor ξ^α escrita em termo dos símbolos de Christoffel:

$$\tilde{\nabla}_\beta \xi^\alpha = \xi^\alpha_{|\beta} + \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^\alpha \xi^\gamma; \quad \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^\alpha = \{\alpha_{\gamma\beta}\}. \quad (2.14)$$

A expressão anterior será importante na hora de escrever o tensor de Ricci e o escalar de curvatura da teoria de Weyl em termos de seus correspondentes riemannianos.

2.1 Transformações de calibre

Einstein em 1905⁵ desenvolveu a sua teoria da relatividade restrita, a qual se baseava em dois postulados fundamentais: o princípio da relatividade e a constância da velocidade da luz. Estes postulados são aceitos até hoje pela comunidade científica, mas enquanto o segundo postulado provocou grande alvoroço pela sua originalidade, o primeiro postulado só generalizava o que já era conhecido desde o século XVII. Nas palavras de [14]

[...] Já existia, desde o século XVII, um princípio de relatividade associado aos fenômenos mecânicos: em todos os referenciais inerciais em movimento relativo uniforme, as leis básicas da mecânica são as mesmas. O princípio adotado na teoria da relatividade é mais geral, afirmando que não são apenas as leis da mecânica que são as mesmas, mas *todas* as leis básicas da física devem ser as mesmas em todos os referenciais inerciais em movimento relativo uniforme ([14], p. 2-3).

Na teoria geral da relatividade, Einteins postula então o princípio da covariância geral, onde afirma que “as equações da física devem ter a forma tensorial”, isso significa que elas são invariantes sob transformações de coordenadas. Weyl neste ponto não se opôs a Einsteins, mas propôs que além de invariante sob transformações de coordenadas, as equações da física deveriam também ser invariantes sob transformações de calibre (gauge). É exatamente sobre esta invariância que a presente seção se debruça.

⁵O ano de 1905 ficou conhecido como o ano miraculoso de Albert Einstein, pois neste ano ele publicou quatro artigos, alguns afirmam que qualquer um deles seria suficiente para creditá-lo o posto de um físico brilhante, conforme [13].

Como a métrica foi fixada de maneira bastante arbitrária pode-se considerar um campo escalar $f(x)$ definido na variedade e construir as grandezas geométricas com a métrica $e^{f(x)}g_{\mu\nu}$, ao invés de $g_{\mu\nu}$. Essa transformação modifica todos os elementos de comprimento:

$$\bar{l} = \bar{g}_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = e^{f(x)}g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \implies \bar{l} = e^{f(x)}l, \quad (2.15)$$

onde usou-se a transformação $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{f(x)}g_{\mu\nu}$. É possível saber qual a transformação em σ_μ , isto é, $\bar{\sigma}_\mu$, induzida pelo novo campo métrico, pois, a relação (2.12) continua sendo válida:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu||\lambda} = \bar{g}_{\mu\nu}\bar{\sigma}_\lambda &\implies \left[e^{f(x)}g_{\mu\nu} \right]_{||\lambda} = e^{f(x)}g_{\mu\nu}\bar{\sigma}_\lambda \implies \left[e^{f(x)} \right]_{||\lambda} g_{\mu\nu} + e^{f(x)}g_{\mu\nu||\lambda} = e^{f(x)}g_{\mu\nu}\bar{\sigma}_\lambda \\ &\implies f(x)_{|\lambda} e^{f(x)}g_{\mu\nu} + e^{f(x)}g_{\mu\nu}\sigma_\lambda = e^{f(x)}g_{\mu\nu}\bar{\sigma}_\lambda. : \quad \bar{\sigma}_\lambda = \sigma_\lambda + f(x)_{|\lambda}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Reunindo $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{f(x)}g_{\mu\nu}$ e (2.16) formam-se as chamadas *transformações de Weyl* ou *transformações de calibre*⁶,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{f(x)}g_{\mu\nu}, \quad \bar{\sigma}_\lambda = \sigma_\lambda + f(x)_{|\lambda}. \quad (2.17)$$

A referência [8] inclui nas transformações de calibre a condição $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, porém da forma como a teoria foi exposta até aqui, tal requerimento é uma consequência e pode ser deduzido utilizando (2.17) e $\bar{g}^{\mu\nu} = e^{-f(x)}g^{\mu\nu}$. Da Eq. (2.13) tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\lambda\alpha}(\bar{g}_{\sigma\beta|\gamma} + \bar{g}_{\lambda\gamma|\beta} - \bar{g}_{\beta\gamma|\lambda}) - \frac{1}{2}(\delta_\beta^\alpha\bar{\sigma}_\gamma + \delta_\gamma^\alpha\bar{\sigma}_\beta - \bar{g}_{\beta\gamma}\bar{\sigma}^\alpha) = \frac{1}{2}e^{-f}g^{\lambda\alpha}[(e^f g_{\lambda\beta})_{|\gamma} \\ &\quad + (e^f g_{\lambda\gamma})_{|\beta} - (e^f g_{\beta\gamma})_{|\lambda}] - [\delta_\beta^\alpha(\sigma_\gamma + f_{|\gamma}) + \delta_\gamma^\alpha(\sigma_\beta + f_{|\beta}) - g_{\beta\gamma}g^{\lambda\alpha}(\sigma_\lambda + f_{|\lambda})] \\ &= \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{1}{2}(\delta_\beta^\alpha f_{|\gamma} + \delta_\gamma^\alpha f_{|\beta} - f_{|\lambda}g_{\beta\gamma}g^{\lambda\alpha}) - \frac{1}{2}(\delta_\beta^\alpha f_{|\gamma} + \delta_\gamma^\alpha f_{|\beta} - f_{|\lambda}g_{\beta\gamma}g^{\lambda\alpha}). : \\ &\quad \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha. \end{aligned} \quad (2.18)$$

As grandezas ou relações que não mudam sua forma quando submetidas às transformações (2.17) são chamadas de *invariantes de calibre*. O campo escalar $e^{f(x)}$ é conhecido por *fator de calibre* e σ_μ é denominado de *campo vetorial de Weyl* ou de *calibre*.

Através de uma escolha do fator de calibre $e^{f(x)}$ é possível sair da geometria de Weyl caracterizada pelo campo tensorial métrico $g_{\mu\nu}$ e pelo campo de 1-forma σ_μ e ir para a geometria riemanniana, onde $\bar{\sigma}_\mu = 0$, se, e somente se, σ_μ for um campo vetorial gradiente $\sigma_\mu = \phi_{|\mu}$, que implica ter rotacional nulo:

$$\sigma_{\mu|v} - \sigma_{v|\mu} = 0, \quad (2.19)$$

⁶Como o ângulo entre vetores e a razão entre o comprimento dos mesmos não são alteradas sob a mudança $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{f(x)}g_{\mu\nu}$ [8], tal transformação é também uma transformação conforme na métrica [10].

em outras palavras, “A condição necessária e suficiente para a geometria de Weyl reduzir-se a geometria riemanniana é que matenha seu comprimento original depois de ser transportado ao longo de uma trajetória fechada” [8], ou seja,

$$dl = \sigma_\alpha dx^\alpha l \implies \oint \frac{dl}{l} = \oint \sigma_\alpha dx^\alpha$$

supondo $\sigma_\alpha = \phi_{|\alpha}$ (gradiente de $\phi(x)$, um campo escalar definido na variedade), tem-se:

$$\oint \frac{dl}{l} = \oint \sigma_\alpha dx^\alpha = \oint \phi(x)_{|\alpha} dx^\alpha = \phi(x_0) - \phi(x_0) = 0. \quad (2.20)$$

Dessa forma conclui-se que $dl = 0$ e que a invariância no comprimento acontece quando σ_α é um campo vetorial gradiente. Falta então encontrar para qual escolha de $f(x)$ se encontrará $\bar{\sigma}_\alpha = 0$,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha + \frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} = 0 &\implies \frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} = -\sigma_\alpha \implies df(x) = -\phi_{|\alpha} dx^\alpha \implies df(x) = d(-\phi). : \\ f(x) &= -\phi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Se a condição (2.19) for satisfeita tem-se a chamada *geometria de Weyl integrável*⁷, que se reduz a geometria riemanniana para o fator de calibre $e^{-\phi}$, enquanto o caso geral $\sigma_{\mu|v} - \sigma_{v|\mu} \neq 0$ corresponde a *geometria de Weyl não-integrável*. Assim, pode-se definir analiticamente o campo tensorial antissimétrico

$$F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu|v} - \sigma_{v|\mu}, \quad (2.22)$$

que é análogo ao tensor de Riemann, pois assim como o anulamento de $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ faz com que a geometria riemanniana recaia na euclidiana, o anulamento de $F_{\mu\nu}$ ⁸ faz com que a geometria de Weyl recaia na geometria riemanniana.

O tensor definido em (2.22) tem algumas propriedades interessantes, a saber:

1. $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico.

$$F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu|v} - \sigma_{v|\mu} = -(\sigma_{v|\mu} - \sigma_{\mu|v}). : \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \quad (2.23)$$

⁷Para uma análise mais detalhada com aplicações em geometria de Weyl integrável o autor recomenda a leitura das referências [11, 12, 15, 16].

⁸ $F_{\mu\nu}$ será posteriormente identificado com o tensor campo eletromagnético.

2. As derivadas parciais de (2.22) obedecem a seguinte expressão $\{F_{\alpha\beta|\gamma}\} = 0^9$.

$$\begin{aligned} \{F_{\alpha\beta|\gamma}\} &= \frac{1}{6}(F_{\alpha\beta|\gamma} + F_{\gamma\alpha|\beta} + F_{\beta\gamma|\alpha} - F_{\beta\alpha|\gamma} - F_{\gamma\beta|\alpha} - F_{\alpha\gamma|\beta}) = \frac{2}{6}(F_{\alpha\beta|\gamma} + F_{\gamma\alpha|\beta} \\ &\quad + F_{\beta\gamma|\alpha}) = \frac{1}{3}(\sigma_{\alpha|\beta|\gamma} - \sigma_{\beta|\alpha|\gamma} + \sigma_{\gamma|\alpha|\beta} - \sigma_{\alpha|\gamma|\beta} + \sigma_{\beta|\gamma|\alpha} - \sigma_{\gamma|\beta|\alpha}). : \\ \{F_{\alpha\beta|\gamma}\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

3. $F_{\mu\nu}$ é uma quantidade geometrica intrínseca da geometria de Weyl, ou seja, é invariante sob transformações de calibre.

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\mu\nu} &= \bar{\sigma}_{\mu|\nu} - \bar{\sigma}_{\nu|\mu} = \sigma_{\mu|\nu} + f(x)_{|\mu|\nu} - \sigma_{\nu|\mu} - f(x)_{|\nu|\mu} = \sigma_{\mu|\nu} - \sigma_{\nu|\mu}. : \\ \bar{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como o princípio de transporte paralelo continua válido em geometria de Weyl pode-se definir uma linha geodésica como uma curva em que o vetor tangente é transportado paralelo a ele mesmo, ou seja, faz sentido falar em *geodésicas afins* ou *autoparalelas*¹⁰ e não mais como a linha de menor comprimento entre dois pontos¹¹, visto que o comprimento da curva não é um invariante de calibre, conforme [8]. No entanto, geodésica nula é um conceito invariante de calibre. Além disso, derivada covariante, tensor de Riemann, tensor de Ricci e escalar de curvatura são definidos da mesma forma que em geometria riemanniana, porém, é importante lembrar que a conexão utilizada na definição dessas quantidades é a conexão de Weyl dada por (2.13).

Nessa nova teoria, segundo [4], é necessário restringir os tensores àquelas quantidades que além de se transformarem pela lei usual, de acordo com uma mudança nas coordenadas, também obedecem a forma abaixo sob a transformação (2.17)

$$\bar{\xi}^{\alpha\dots\beta} = e^{m \cdot f(x)} \xi^{\alpha\dots\beta}, \quad (2.26)$$

onde m é um número inteiro chamado de peso do tensor relativo às transformações de Weyl. Entretanto, o campo de 1-forma, σ_μ não possui nenhum peso, pois sua mudança é descrita por (2.16). As grandezas de peso nulo são invariantes de calibre. Por exemplo, a métrica, $\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}$, tem peso 1, enquanto $\bar{F}_{\mu\nu} = e^{0 \cdot f} F_{\mu\nu}$ tem peso 0 quando submetidos a (2.17). Pode-se da mesma forma atribuir pesos às densidades tensoriais. Afim de ilustrar essa afirmação

⁹As chaves significam uma soma antissimetrizada, onde $\{F_{\alpha\beta|\gamma}\} = \frac{1}{6}(F_{\alpha\beta|\gamma} + F_{\gamma\alpha|\beta} + F_{\beta\gamma|\alpha} - F_{\beta\alpha|\gamma} - F_{\gamma\beta|\alpha} - F_{\alpha\gamma|\beta})$.

¹⁰Os dois nomes foram dados porque os autores se dividem quanto a nomenclatura dessas curvas, por exemplo, [10] chama tais curvas de geodésicas afins enquanto [7] e [17] às chamam de autoparalelas.

¹¹Posteriormente esse ponto será tratado com maior cuidado, pois seá abordado o problema inverso ao cálculo de variações.

será calculado o determinante da métrica. Representando $g_{\mu\nu}$ na forma matricial e lembrando que multiplicar uma linha da matrix por e^f significa multiplicar o determinante pelo mesmo fator, deve-se concluir que no caso de uma matrix com n linhas

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu} \implies \bar{g} = e^{nf} g,$$

onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$, ou seja, a densidade tensorial g tem peso n (dimensão da variedade) relativo a (2.17). Tomando agora a raiz quadrada do negativo de g , obtém-se:

$$\sqrt{-\bar{g}} = e^{(n/2)f} \sqrt{-g}.$$

É interessante verificar que para o espaço-tempo 4-dimencional $\sqrt{-g}$ terá peso 2 sob uma transformação de calibre. Analiticamente tem-se

$$\sqrt{-\bar{g}} = e^{2f} \sqrt{-g}. \quad (2.27)$$

Embora $F_{\mu\nu}$ seja invariante de calibre sua forma contravariante não o é. Para verificar isto basta notar que $\bar{g}^{\mu\nu} = e^{-f} g^{\mu\nu}$ e que

$$\bar{F}^{\alpha\beta} = \bar{g}^{\alpha\mu} \bar{g}^{\beta\nu} F_{\mu\nu} = e^{-2f} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} = e^{-2f} F^{\alpha\beta},$$

isto é, $F^{\alpha\beta}$ tem peso -2 , porém, ao multiplicá-lo por $\sqrt{-g}$ gera-se uma densidade tensorial de peso 0, a saber¹²,

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = \bar{F}^{\mu\nu} \sqrt{-\bar{g}} = e^{-2f} F^{\mu\nu} \cdot e^{2f} \sqrt{-g} = F^{\mu\nu} \sqrt{-g}.$$

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = \mathcal{F}^{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Finalmente, como a conexão de Weyl (2.13) é invariante sob as tranformações (2.17), o tensor de curvatura¹³ $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ que só depende de $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ e suas derivadas também o é. O mesmo acontece para o tensor de Ricci, $R_{\beta\delta} = R^\alpha_{\beta\alpha\delta}$. Todavia, o escalar de curvatura que possui uma contração com a métrica não é invariante sob tais transformações, pois,

$$\bar{R} = \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{R}_{\alpha\beta} = e^{-f} g^{\alpha\beta} \bar{R}_{\alpha\beta} = e^{-f} R.$$

Para produzir uma grandeza invariante de calibre a partir de R , basta considerar a expressão abaixo:

$$R^2 \sqrt{-g}. \quad (2.29)$$

A procura por grandezas invariantes de calibre desempenhará um papel importante na procura

¹²Este resultado só é válido para uma variedade 4-dimensional.

¹³As convenções para o tensor de Riemann e o tensor de Ricci deste trabalho são as mesmas adotadas em [15].

por uma lagrangiana também invariante em um princípio variacional posterior.

2.2 Identidades de Bianchi na geometria de Weyl

O tensor de riemann $\tilde{R}^\alpha_{\beta\gamma\lambda}$ da relatividade geral possui algumas propriedades de simetria de extrema importância em uma das possíveis demonstrações das equações de campo de Einstein, entre elas se destacam as identidades de Bianchi

$$\tilde{R}_{\lambda\mu\nu\alpha||\beta} + \tilde{R}_{\lambda\mu\beta\nu||\alpha} + \tilde{R}_{\lambda\mu\alpha\beta||\nu} = 0, \quad (2.30)$$

e as identidades contraídas de Bianchi

$$\tilde{G}^{\alpha\beta}_{||\beta} = 0, \quad (2.31)$$

onde aparece o tensor

$$\tilde{G}^{\alpha\beta} = \tilde{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\tilde{R}, \quad (2.32)$$

chamado de tensor de Einstein ou tensor traço reverso do tensor de Ricci¹⁴. No entanto, quando a teoria de Weyl é considerada nem todas as simetrias riemannianas do tensor de curvatura são preservadas.

Segundo [18–21] as identidades de Bianchi ficam:

$$R^\lambda_{\mu\nu\alpha||\beta} + R^\lambda_{\mu\beta\nu||\alpha} + R^\lambda_{\mu\alpha\beta||\nu} = 0, \quad (2.33)$$

além disso, outras relações que continuam válidas no espaço de Weyl são:

$$R^\alpha_{\mu\nu\beta} + R^\alpha_{\beta\mu\nu} + R^\alpha_{\nu\beta\mu} = 0, \quad (2.34)$$

$$R^\lambda_{\alpha\mu\nu} = -R^\lambda_{\alpha\nu\mu}. \quad (2.35)$$

O tensor de curvatura surge na maioria dos livros textos de relatividade geral¹⁵ [8, 10] através da seguinte expressão

$$\xi^\alpha_{||\beta||\gamma} - \xi^\alpha_{||\gamma||\beta} = \tilde{R}^\alpha_{\eta\beta\gamma}\xi^\eta, \quad (2.36)$$

onde ξ^α são as componentes de um campo vetorial. Equações análogas a anterior podem ser

¹⁴A nomenclatura traço reverso se deve ao fato que $\tilde{G} = g^{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu} = -\tilde{R}$, o que implica que $\tilde{R}^{\mu\nu} = \tilde{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\tilde{G}$, ou seja, tem a mesma forma do tensor de Einstein em função do tensor de Ricci.

¹⁵Uma definição geométrica um pouco diferente da habitual e extremamente elegante do tensor de curvatura pode ser encontrada em [22].

encontradas para tensores de outras ordens e com índices covariantes, um caso útil para o que será desenvolvido nesta seção é a expressão para o tensor métrico. Usando a definição de derivada covariante tem-se:

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu||\alpha||\beta} &= (g_{\mu\nu|\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda})_{|\beta} \\
 &\quad - \Gamma_{\mu\beta}^{\tau} (g_{\tau\nu|\alpha} - \Gamma_{\tau\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\tau}) \\
 &\quad - \Gamma_{\nu\beta}^{\tau} (g_{\tau\mu|\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\tau} - \Gamma_{\tau\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\mu}) \\
 &\quad - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} (g_{\mu\nu|\tau} - \Gamma_{\tau\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\tau}^{\lambda} g_{\lambda\mu}),
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu||\beta||\alpha} &= (g_{\mu\nu|\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda})_{|\alpha} \\
 &\quad - \Gamma_{\mu\alpha}^{\tau} (g_{\tau\nu|\beta} - \Gamma_{\tau\beta}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} g_{\lambda\tau}) \\
 &\quad - \Gamma_{\nu\alpha}^{\tau} (g_{\tau\mu|\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} g_{\lambda\tau} - \Gamma_{\tau\beta}^{\lambda} g_{\lambda\mu}) \\
 &\quad - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} (g_{\mu\nu|\tau} - \Gamma_{\tau\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\tau}^{\lambda} g_{\lambda\mu}).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Assim, depois de algumas identificações conclui-se que:

$$g_{\mu\nu||\alpha||\beta} - g_{\mu\nu||\beta||\alpha} = -g_{\lambda\nu} R_{\mu\alpha\beta}^{\lambda} - g_{\lambda\mu} R_{\nu\alpha\beta}^{\lambda}. \tag{2.39}$$

O lado esquerdo de (2.39) pode ainda ser exposto de outra forma, a saber,

$$g_{\mu\nu||\alpha||\beta} - g_{\mu\nu||\beta||\alpha} = g_{\mu\nu} \sigma_{\beta} \sigma_{\alpha} + g_{\mu\nu} \sigma_{\alpha||\beta} - g_{\mu\nu} \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} - g_{\mu\nu} \sigma_{\beta||\alpha} = g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \tag{2.40}$$

onde $F_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha||\beta} - \sigma_{\beta||\alpha} = \sigma_{\alpha||\beta} - \sigma_{\beta||\alpha}$. A equação (2.39) pode ser por fim reescrita da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} - g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \tag{2.41}$$

No caso da geometria riemanniana em que $F_{\alpha\beta} = 0$ recupera-se uma das propriedades de simetria do tensor de curvatura, $\tilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = -\tilde{R}_{\nu\mu\alpha\beta}$.

Para encontrar as identidades de Bianchi reduzidas da geometria de Weyl deve-se partir de (2.33), contraí-las fazendo $\lambda = \beta$ e utilizar quando necessário a antissimetria entre os dois últimos índices do tensor de Riemann, resultando assim em:

$$\left(g^{\lambda\kappa} R_{\kappa\mu\nu\alpha} \right)_{||\lambda} + R_{\mu\nu||\alpha} - R_{\mu\alpha||\nu} = 0. \tag{2.42}$$

Apesar da derivada covariante da métrica não ser nula em geometria de Weyl, a densidade tensorial $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}$ construída com o tensor métrico possui essa propriedade, isto

é,

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right)_{||\kappa} &= \left(\sqrt{-g} \right)_{||\kappa} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu}_{||\kappa} g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}_{||\kappa} \\
 &= 2\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \sigma_\kappa - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \sigma_\kappa - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \sigma_\kappa. : \\
 \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right)_{||\kappa} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Assim, multiplicando $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}$ por (2.42), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \left(R^\lambda_{\mu\nu\alpha||\lambda} + R_{\mu\nu||\alpha} + R^\lambda_{\mu\alpha\lambda||\nu} \right) &= 0 \\
 \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\kappa} R_{\kappa\mu\nu\alpha} \right)_{||\lambda} + \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right)_{||\alpha} - \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha} \right)_{||\nu} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Usando a propriedade (2.41) encontra-se:

$$\left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\kappa} (-R_{\mu\kappa\nu\alpha} - g_{\mu\kappa} F_{\nu\alpha}) \right]_{||\lambda} + \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} R \right)_{||\alpha} - \left(\sqrt{-g} R^{\nu\beta} \right)_{||\nu} = 0,$$

e por fim

$$\left[\sqrt{-g} \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) \right]_{||\alpha} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \right)_{||\alpha}. \tag{2.45}$$

No caso particular da relatividade geral, ou seja, $F^{\alpha\beta} = 0$ as equações (2.31) são obtidas. Assim (2.45) corresponde às identidades reduzidas de Bianchi na geometria de Weyl¹⁶.

¹⁶O presente assunto também pode ser encontrado nas referências [18, 20].

Capítulo 3

O ELETROMAGNETISMO NA GEOMETRIA DE WEYL

Antes de usar o princípio variacional para encontrar as equações de campo advindas da teoria de Weyl é necessário imbutir as quantidades essenciais do eletromagnetismo na nova geometria. Deve-se para tanto associar o tensor campo eletromagnético ao tensor $F_{\mu\nu}$ definido na Eq. (2.22) e o 4-potencial eletromagnético ao campo de 1-forma σ_μ , onde, $\sigma_0 = \phi$ é o potencial escalar que origina a força elétrica e $\sigma_i = (A_1, A_2, A_3)$ é o potencial vetor. Tal escolha se legitima pela relação entre o 4-potencial e o tensor campo eletromagnético ser exatamente igual a (2.22) e também porque através dessa associação o primeiro conjunto de equações de Maxwell resulta diretamente da teoria,

$$\{F_{\alpha\beta|\gamma}\} = 0, \quad (3.1)$$

e o segundo grupo de equações do eletromagnetismo poderá ser escrito posteriormente, sem maiores dificuldades, a partir da densidade tensorial $\mathcal{F}^{\mu\nu}$,

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}_{|\beta} = \mathcal{J}^\alpha, \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{J}^\alpha$ deve ser entendido como uma densidade de corrente. Nota-se que de maneira consistente com o mundo físico as equações de Maxwell na teoria de Weyl são invariantes por uma mudança de escala. Tal teoria é uma consequência natural da nova geometria do espaço, assim como a gravitação na relatividade geral, e isso da maior significância à teoria de Weyl.

Afim de encontrar as equações de campo deve-se começar escolhendo uma ação invariante de calibre do tipo

$$I = \int W \sqrt{-g} d^4x.$$

Para isso W deve ter peso -2 relativo às transformações (2.17). Definindo também a densidade

tensorial $\mathcal{W} = W\sqrt{-g}$ torna-se possível reescrever a ação de maneira mais compacta,

$$I = \int \mathcal{W} d^4x.$$

Agora, fazendo uso do princípio variacional e considerando as variáveis σ_μ e $g_{\mu\nu}$ independentes, com suas variações se anulando nos limites de integração, tem-se:

$$\delta \int \mathcal{W} d^4x = 0 \implies \int (\mathcal{W}^\alpha \delta \sigma_\alpha + \mathcal{W}^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}) d^4x = 0, \quad (3.3)$$

onde $\mathcal{W}^{\alpha\beta} = \mathcal{W}^{\beta\alpha}$. Pelas equações de Euler-Lagrange pode-se determinar as equações de campo da teoria. Para isso, toma-se $\mathcal{W} = \mathcal{W}(g_{\alpha\beta}, \sigma_\alpha)$. Isso implica que

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \sigma_\alpha} = \mathcal{W}^\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \sigma_{\alpha|\beta}} = 0. : \quad \mathcal{W}^\alpha = 0. \quad (3.4)$$

Esse resultado é obtido com σ_α como coordenada generalizada. Quando se analisa a coordenada generalizada $g_{\alpha\beta}$, tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g_{\alpha\beta}} = \mathcal{W}^{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g_{\alpha\beta|\gamma}} = 0. : \quad \mathcal{W}^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.5)$$

A equações (3.4) e (3.5) são leis física de acordo com [23]. Essas quatorze¹ relações não são todas independentes, pois, $\mathcal{W}$ além de ser invariante sob transformações de coordenadas, é invariante também quando submetido a transformações de calibre, com isso encontra-se cinco identidades redundantes.

Para encontrar as variações $\delta \sigma_\alpha$ e $\delta g_{\alpha\beta}$ em (3.3) devido a uma mudança infinitesimal de escala supõe-se que o fator de calibre seja da forma geral

$$e^{f(x)} = 1 + \varepsilon \pi(x), \quad (3.6)$$

onde ε é muito pequeno. Nota-se também que $\pi(x)$ deve ser nulo nos limites de integração. Assim,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha\beta} &= (1 + \varepsilon \pi) g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \varepsilon \pi g_{\alpha\beta} \implies \bar{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} = \varepsilon \pi g_{\alpha\beta} : \\ \delta g_{\alpha\beta} &= \varepsilon \pi g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A segunda variação requer uso da transformação (2.17) para o campo σ_α :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\alpha &= \sigma_\alpha + (1 + \varepsilon \pi)_{|\alpha} \implies \bar{\sigma}_\alpha - \sigma_\alpha = \varepsilon \pi_{|\alpha} : \\ \delta \sigma_\alpha &= \varepsilon \pi_{|\alpha}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

¹O número de quatorze equações é obtido somando-se 10 de (3.5), devido a simetria em $\mathcal{W}^{\alpha\beta}$ que é semelhante à da métrica, com 4 advindas de (3.4).

Substituindo (3.7) e (3.8) na identidade (3.3), obtém-se:

$$\int (\mathcal{W}^\alpha \pi_\alpha + \pi \mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}) d^4x = 0 \Rightarrow \int \left[(\mathcal{W}^\alpha \pi)_\alpha - \mathcal{W}_\alpha^\alpha \pi + \pi \mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \right] d^4x = 0$$

$$\int (\mathcal{W}^\alpha \pi)_\alpha d^4x - \int (\mathcal{W}_\alpha^\alpha \pi - \pi \mathcal{W}_\alpha^\alpha) d^4x = 0.$$

A primeira integral tem valor zero, pois trata-se de um termo de fronteira. Dessa forma resta somente a segunda integral:

$$\int (\mathcal{W}_\alpha^\alpha - \mathcal{W}_\alpha^\alpha) \pi d^4x = 0. \quad (3.9)$$

Como $\pi(x)$ se anula nos extremos, conclui-se que sob todas as variações possíveis a única maneira de (3.9) valer sempre é se

$$\mathcal{W}_\alpha^\alpha = \mathcal{W}_\alpha^\alpha. \quad (3.10)$$

Além dessa equação existem mais quatro que podem ser encontradas considerando uma transformação infinitesimal nas coordenadas, a saber,

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha, \quad (3.11)$$

neste caso $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$ se anula nos limites de integração. A relação (3.11) será considerada uma transformação ativa, isto é, de um ponto a outro na variedade. Um procedimento semelhante pode ser encontrado em [24] e [25]. Para isso será necessário algumas definições preliminares.

Dados dois pontos P e Q na variedade e uma curva $\alpha(\lambda)$ passando pelos dois pontos. Sendo também o campo vetorial tangente a curva dado por $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ e supondo que exista um campo tensorial, por exemplo $T^{\mu\nu}$, definido em cada ponto do espaço, deseja-se saber a variação desse campo em determinado ponto. Como não é permitido operar com tensores em pontos diferentes deve-se utilizar o conceito de arrastamento de Lie para tensores, onde segundo a convenção de [10] $T^{\mu\nu}(P) = T^{\mu\nu}(x)$ está localizado no ponto P com coordenadas x , $T^{\mu\nu}(Q) = T^{\mu\nu}(\bar{x})$ está localizado no ponto Q de coordenadas $\bar{x}$ dado por (3.11) e $\bar{T}^{\mu\nu}(Q) = \bar{T}^{\mu\nu}(\bar{x})$ é o tensor arrastado de P para Q . Agora pode-se tomar a diferença entre o tensor arrastado e tensor já situado em Q pois ambos estão no mesmo ponto.

Sabe-se que diferenciando a Eq. (3.11), chega-se a

$$\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \varepsilon \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta},$$

no entanto, se o resultado desejado for a inversa $\partial x^\alpha / \partial \bar{x}^\beta$, tem-se

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \approx \delta_\beta^\alpha - \varepsilon \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (3.12)$$

pois, $\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\rho} \cdot \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\beta} \approx \delta_\beta^\alpha$ onde o termo com ε^2 é negligenciado. Com isso é possível calcular o tensor

métrico arrastado até Q pela lei normal de transformação de tensores,

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x}) &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\mu\nu}(x) = \left(\delta_\alpha^\mu - \varepsilon \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta_\beta^\nu - \varepsilon \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \right) g_{\mu\nu}(x) = \\ &= \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu g_{\mu\nu}(x) - \varepsilon \left[\delta_\alpha^\mu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu}(x) + \delta_\beta^\nu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu}(x) \right] + \dots\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x}) \approx g_{\alpha\beta}(x) - \varepsilon \left[\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} g_{\alpha\nu}(x) + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} g_{\mu\beta}(x) \right]. \quad (3.13)$$

Para encontrar $g_{\alpha\beta}(\bar{x})$ basta fazer uma expansão em séries de Taylor:

$$g_{\alpha\beta}(\bar{x}) = g_{\alpha\beta}(x + \varepsilon \xi) = g_{\alpha\beta}(x) + \varepsilon \xi^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\gamma}. \quad (3.14)$$

Escrevendo de maneira mais compacta $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}$ e agora subtraindo os dois tensores métricos que se encontram no mesmo ponto, $\bar{\delta}g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x}) - g_{\alpha\beta}(\bar{x})$, obtém-se

$$\bar{\delta}g_{\alpha\beta} = -\varepsilon(\xi^\nu_{|\beta} g_{\alpha\nu} + \xi^\mu_{|\alpha} g_{\mu\beta} + \xi^\gamma g_{\alpha\beta|\gamma}). \quad (3.15)$$

O mesmo procedimento pode ser feito para encontrar $\bar{\delta}\sigma_\alpha = \bar{\sigma}_\alpha(\bar{x}) - \sigma_\alpha(\bar{x})$. Assim, usando a lei de transformação para tensores, tem-se

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_\alpha(\bar{x}) &= \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \sigma_\beta(x) = \left(\delta_\alpha^\beta - \varepsilon \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \sigma_\beta(x) = \delta_\alpha^\beta \sigma_\beta - \varepsilon \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \sigma_\beta(x). : \\ \bar{\sigma}_\alpha(\bar{x}) &= \sigma_\alpha(x) - \varepsilon \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \sigma_\beta(x),\end{aligned} \quad (3.16)$$

onde foi usado a Eq. (3.12). Para encontrar $\sigma_\alpha(Q) = \sigma_\alpha(\bar{x})$ deve-se expandir a 1-forma em termos das coordenadas do ponto P .

$$\sigma_\alpha(\bar{x}) = \sigma_\alpha(x + \varepsilon \xi) = \sigma_\alpha(x) + \sigma_\alpha(x)_{|\beta} (x^\beta + \varepsilon \xi^\beta - x^\beta) + \dots$$

De forma semelhante ao que foi definido para a métrica será usado $\sigma_\alpha(x) = \sigma_\alpha$, assim, obtém-se

$$\sigma_\alpha(\bar{x}) = \sigma_\alpha(x) + \varepsilon \xi^\beta \sigma_{\alpha|\beta}. \quad (3.17)$$

Agora, tomando a variação de σ_α no ponto P , chega-se a

$$\bar{\delta}\sigma_\alpha = -\varepsilon(\xi^\beta_\alpha \sigma_\beta + \xi^\beta \sigma_{\alpha|\beta}). \quad (3.18)$$

Por fim, pode-se substituir as equações (3.15) e (3.18) na Eq. (3.3) para obter

$$\int (\mathcal{W}^\alpha \bar{\delta}\sigma_\alpha + \mathcal{W}^{\alpha\beta} \bar{\delta}g_{\alpha\beta}) d^4x = 0$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \int \left(\mathcal{W}^\alpha \xi^\mu_{|\alpha} \sigma_\mu + \mathcal{W}^\alpha \xi^\mu \sigma_{\alpha|\mu} + \mathcal{W}^{\alpha\beta} \xi^\mu_{|\beta} g_{\alpha\mu} + \mathcal{W}^{\alpha\beta} \xi^\mu_{|\alpha} g_{\mu\beta} + \mathcal{W}^{\alpha\beta} \xi^\mu g_{\alpha\beta|\mu} \right) d^4x = 0. \\
& \int \left[(\mathcal{W}^\alpha \xi^\mu \sigma_\mu)_{|\alpha} - \mathcal{W}^\alpha_{|\alpha} \xi^\mu \sigma_\mu - \mathcal{W}^\alpha \xi^\mu \sigma_{\mu|\alpha} + \mathcal{W}^\alpha \xi^\mu \sigma_{\alpha|\mu} + 2\mathcal{W}^{\alpha\beta} \xi^\mu_{|\beta} g_{\alpha\mu} \right. \\
& \left. + \mathcal{W}^{\alpha\beta} \xi^\mu g_{\alpha\beta|\mu} \right] d^4x = \int \left[(\mathcal{W}^\alpha \xi^\mu \sigma_\mu)_{|\alpha} - \mathcal{W}^\alpha_{|\alpha} \xi^\mu \sigma_\mu + F_{\alpha\mu} \mathcal{W}^\alpha + 2(\mathcal{W}^{\alpha\beta} \xi^\mu g_{\alpha\mu})_{|\beta} \right. \\
& \left. - 2\mathcal{W}^{\alpha\beta} \xi_\alpha - 2\mathcal{W}^{\alpha\beta} \xi^\mu g_{\alpha\mu|\beta} + \mathcal{W}^{\alpha\beta} \xi^\mu g_{\alpha\beta|\mu} \right] d^4x = 2 \int (\mathcal{W}^{\alpha\beta} \xi^\mu g_{\alpha\mu})_{|\beta} d^4x \\
& + \int (\mathcal{W}^\alpha \xi^\mu \sigma_\mu)_{|\alpha} d^4x + \int \left[-\mathcal{W}^\alpha_{|\alpha} \sigma_\mu + F_{\alpha\mu} \mathcal{W}^\alpha - 2(\mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu})_{|\beta} + \mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta|\mu} \right] \xi^\mu d^4x = 0.
\end{aligned}$$

Na última relação as duas primeiras integrais são nulas pois ξ^μ se anula nos contornos, pelo mesmo motivo da terceira integral tem-se:

$$\begin{aligned}
& -\mathcal{W}^\alpha_{|\alpha} \sigma_\mu + F_{\alpha\mu} \mathcal{W}^\alpha - 2\mathcal{W}^\alpha_{\mu|\alpha} + \mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta|\mu} = 0, \\
& \mathcal{W}^\alpha_{\mu|\alpha} + \left(\frac{1}{2} \mathcal{W}^\alpha_{|\alpha} \sigma_\mu - \frac{1}{2} \mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta|\mu} \right) = \frac{1}{2} F_{\alpha\mu} \mathcal{W}^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

O termo entre parenteses é exatamente $-\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \mathcal{W}^\beta_\alpha$ como pode ser visto abaixo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \mathcal{W}^\beta_\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\mu\lambda|\beta} + g_{\beta\lambda|\mu} - g_{\mu\beta|\lambda}) \mathcal{W}^\beta_\alpha - \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \sigma_\beta + \delta_\beta^\alpha \sigma_\mu - g_{\mu\beta} \sigma^\alpha) \mathcal{W}^\beta_\alpha \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{W}^{\beta\lambda} (g_{\mu\lambda|\beta} + g_{\beta\lambda|\mu} - g_{\mu\beta|\lambda}) - \frac{1}{2} \mathcal{W}^\beta_\mu \sigma_\beta - \frac{1}{2} \mathcal{W}^\alpha_\alpha \sigma_\mu + \frac{1}{2} g_{\mu\beta} g^{\alpha\nu} \sigma_\nu \mathcal{W}^\beta_\alpha \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta|\mu} - \frac{1}{2} \mathcal{W}^\beta_\mu \sigma_\beta - \frac{1}{2} \mathcal{W}^\alpha_\alpha \sigma_\mu + \frac{1}{2} \mathcal{W}^\nu_\mu \sigma_\nu.
\end{aligned}$$

Da Eq.(3.10) sabe-se que $\mathcal{W}^\alpha_\alpha = \mathcal{W}^\alpha_{|\alpha}$. Assim,

$$\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \mathcal{W}^\beta_\alpha = \frac{1}{2} \mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta|\mu} - \frac{1}{2} \mathcal{W}^\alpha_{|\alpha} \sigma_\mu. \tag{3.20}$$

Dessa forma a Eq. (3.19) pode ser reescrita como segue.

$$\mathcal{W}^\alpha_{\mu|\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \mathcal{W}^\beta_\alpha = \frac{1}{2} F_{\alpha\mu} \mathcal{W}^\alpha. \tag{3.21}$$

Logo, a relação em (3.10) e as quatro equações em (3.21) reduzem as quatorze equações de campo que aparecem em (3.4) e (3.5) a somente nove identidades independentes.

3.1 Equações de campo no “calibre natural” $R = \Lambda$

A densidade lagrangeana $\mathcal{W}$ deve ser invariante de calibre, logo, a forma de generalização da ação para incorporar a interação eletromagnética proposta por Einstein,

$$\mathcal{W} = \left(R + \frac{C}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g}, \quad (3.22)$$

não serve para ser adotada na nova teoria, pois $R\sqrt{-g}$ tem peso 1 sobre uma mudança de calibre. A ideia proposta na literatura é escolher uma densidade lagrangeana que se aproxime o máximo possível de (3.22) e tenha peso nulo sobre uma transformação de Weyl. A escolha possível que será utilizada neste trabalho é

$$\mathcal{W} = (R^2 + A F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \sqrt{-g}, \quad (3.23)$$

que difere de (3.22) somente pelo expoente 2 em R .

As equações de campo eletromagnéticas e gravitacionais da teoria foram obtidas por [24] e [26] em um calibre especial $R = \Lambda$, chamado por Eddington de calibre natural, onde Λ é constante em toda a variedade, pois para ele as medidas físicas deveriam ser feitas com essa escala.

[...] O calibre utilizado na prática é o calibre natural para o qual nossas fórmulas mecânicas anteriores se aplicam – ou melhor, uma vez que o sistema de medida é ligeiramente ambíguo e as fórmulas teóricas são presumivelmente exatas, o calibre natural é um calibre exato com o qual todas as medidas práticas concordam em uma aproximação suficiente para todos os fenômenos mecânicos e métricos observáveis ([26], p. 207).

A escolha de um calibre que facilite os cálculos se justifica pelo fato de existirem grandezas invariantes de calibre, entretanto, deve-se tomar cuidado ao se calcular as grandezas que não são.

O escalar de curvatura R na geometria de Weyl depende do campo σ_μ , pois a conexão da teoria depende do mesmo. Antes de aplicar o princípio variacional à $\mathcal{W}$ será necessário expressar R como uma função de $\tilde{R}$ e σ_μ . Já que R é um escalar seu valor independe do sistema de coordenadas adotado, logo, por conveniência o sistema de coordenadas geodésico riemanniano deve ser escolhido. O nome riemanniano é adequado, pois nesse sistema de coordenadas a conexão riemanniana dada pelo símbolo de Christoffel de segundo tipo é nula e não a conexão de Weyl como um todo, esse procedimento é sugerido em [8]. É necessário observar que a derivada da conexão riemanniana não se anula necessariamente nesse sistema de coordenadas. Assim, a expressão já conhecida

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha - \frac{1}{2} (\delta_\beta^\alpha \sigma_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \sigma_\beta - g_{\beta\gamma} \sigma^\alpha)$$

no sistema de coordenadas geodésico se reduz a

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \stackrel{*}{=} -\frac{1}{2}(\delta_{\beta}^{\alpha}\sigma_{\gamma} + \delta_{\gamma}^{\alpha}\sigma_{\beta} - g_{\beta\gamma}\sigma^{\alpha}), \quad (3.24)$$

onde $\stackrel{*}{=}$ é usado quando uma identidade que é válida somente em sistema de coordenadas particular.

O escalar de curvatura é dado por $R = g^{\beta\lambda}R_{\beta\lambda} = g^{\beta\lambda}R_{\beta\alpha\lambda}^{\alpha}$. Partindo da definição do tensor de Riemann² $R_{\beta\gamma\lambda}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma|\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\lambda|\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\tau}\Gamma_{\tau\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\tau}\Gamma_{\tau\gamma}^{\alpha}$ conclui-se que

$$R = g^{\beta\lambda}(\Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha})_{|\lambda} - (g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha})_{|\alpha} + g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\alpha}^{\tau}\Gamma_{\tau\lambda}^{\alpha} - g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^{\tau}\Gamma_{\tau\alpha}^{\alpha}. \quad (3.25)$$

No segundo termo da identidade anterior a métrica entra na derivada parcial porque em um único ponto ela é constante e é importante lembrar que o sistema de coordenadas especial adotado até agora só é definido em um ponto.³

Para encontrar o termo de $g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha}$ deve-se continuar com a conexão riemanniana $\tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\alpha}$ pois as derivadas dela podem ser diferentes de zero. Logo,

$$\begin{aligned} g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} &= g^{\beta\lambda}\tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\alpha} - \frac{1}{2}g^{\beta\lambda}(\delta_{\beta}^{\alpha}\sigma_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\alpha}\sigma_{\beta} - g_{\beta\lambda}\sigma^{\alpha}) = g^{\beta\lambda}\tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\alpha} - \frac{1}{2}(\sigma^{\alpha} - \sigma^{\alpha} + n\sigma^{\alpha}). : \\ g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} &= g^{\beta\lambda}\tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\alpha} + \frac{1}{2}(n-2)\sigma^{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde foi usado que $g^{\beta\lambda}g_{\beta\lambda} = \delta_{\beta}^{\beta} = n$, a dimensão do espaço. É necessário lembrar de fazer $\tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\alpha} = 0$ quando este termo não for derivado.

Outro termo presente em R é

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} = \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{2}(\underbrace{\delta_{\beta}^{\alpha}\sigma_{\alpha}}_{\sigma_{\beta}} + \underbrace{\delta_{\alpha}^{\alpha}\sigma_{\beta}}_n - \underbrace{g_{\beta\alpha}\sigma^{\alpha}}_{\sigma_{\beta}}). : \quad \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} = \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\alpha} - \frac{n}{2}\sigma_{\beta}. \quad (3.27)$$

Os dois últimos termos de R não aparecem derivadas da conexão por isso pode-se usar direto $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \stackrel{*}{=} -\frac{1}{2}(\delta_{\beta}^{\alpha}\sigma_{\gamma} + \delta_{\gamma}^{\alpha}\sigma_{\beta} - g_{\beta\gamma}\sigma^{\alpha})$, por exemplo, o termo $g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\alpha}^{\tau}\Gamma_{\tau\lambda}^{\alpha}$ pode ser calculado mais facilmente como segue:

$$\begin{aligned} g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\alpha}^{\tau}\Gamma_{\tau\lambda}^{\alpha} &\stackrel{*}{=} \frac{1}{4}g^{\beta\lambda}(\delta_{\beta}^{\tau}\sigma_{\alpha} + \delta_{\alpha}^{\tau}\sigma_{\beta} - g_{\beta\alpha}\sigma^{\tau})(\delta_{\tau}^{\alpha}\sigma_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\alpha}\sigma_{\tau} - g_{\tau\lambda}\sigma^{\alpha}) \stackrel{*}{=} \frac{1}{4}g^{\beta\lambda}(\sigma_{\beta}\sigma_{\lambda} \\ &+ \sigma_{\beta}\sigma_{\lambda} - g_{\beta\lambda}\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha} + n\sigma_{\beta}\sigma_{\lambda} + \sigma_{\beta}\sigma_{\lambda} - \sigma_{\beta}\sigma_{\lambda} - \sigma_{\beta}\sigma_{\lambda} - g_{\beta\lambda}\sigma_{\tau}\sigma^{\tau} + \sigma_{\beta}\sigma_{\lambda}) \end{aligned}$$

²Alguns autores usam uma definição diferente do tensor de Riemann, nesse trabalho é usada a mesma convenção da referência [23].

³O resultado da constância da métrica nesse sistema de coordenadas pode ser deduzido matematicamente partindo da condição de compatibilidade entre a conexão e a métrica, porém, o argumento qualitativo apresentado é claro e objetivo o suficiente.

$$\begin{aligned}
& \stackrel{*}{=} \frac{1}{4}(-n\sigma_\alpha\sigma^\alpha + n\sigma_\beta\sigma^\beta + 2\sigma_\beta\sigma^\beta - n\sigma_\tau\sigma^\tau). : \\
& g^{\beta\lambda}\Gamma_{\tau\lambda}^\alpha\Gamma_{\beta\alpha}^\tau \stackrel{*}{=} -\frac{1}{4}(n-2)\sigma_\alpha\sigma^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Agora, substituindo (3.26), (3.27) e (3.28) na expressão para R em (3.25), tem-se

$$\begin{aligned}
R & \stackrel{*}{=} g^{\beta\lambda}(\tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^\alpha - \frac{n}{2}\sigma_\beta)_{|\lambda} - [g^{\beta\lambda}\tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^\alpha + \frac{1}{2}(n-2)\sigma^\alpha]_{|\alpha} - \frac{1}{4}(n-2)\sigma_\alpha\sigma^\alpha + \frac{1}{4}n(n-2)\sigma_\tau\sigma^\tau \\
& \stackrel{*}{=} g^{\beta\lambda}(\tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^\alpha)_{|\lambda} - (g^{\beta\lambda}\tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^\alpha)_{|\alpha} - \frac{n}{2}\sigma_{|\lambda}^\lambda - \frac{1}{2}(n-2)\sigma_{|\alpha}^\alpha + \frac{1}{4}(n-1)(n-2)\sigma_\alpha\sigma^\alpha. : \\
R & \stackrel{*}{=} \tilde{R} + \frac{1}{4}(n-1)(n-2)\sigma_\alpha\sigma^\alpha - (n-1)\sigma_{|\alpha}^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Como o tensor métrico pode entrar na derivada, a densidade tensorial $\sqrt{-g}$ também pode entrar e sair levemente da derivada, assim, pode-se reescrever (3.29) numa forma invariante de coordenadas:

$$R = \tilde{R} + \frac{1}{4}(n-1)(n-2)\sigma_\alpha\sigma^\alpha - \frac{(n-1)}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^\alpha)_{|\alpha}. \tag{3.30}$$

Essa é uma expressão elegante de R como função de $\tilde{R}$ e σ_α . Tendo em vista que cada termo da equação é escalar, a identidade torna-se válida qualquer que seja o sistema de coordenadas adotado e não só para as coordenadas especiais utilizadas nessa demonstração. Para um espaço 4-dimensional a Eq. (3.30) se torna

$$R = \tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{3}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^\alpha)_{|\alpha}. \tag{3.31}$$

No apêndice A, onde são encontrados o tensor de Ricci e o escalar de curvatura em um sistema qualquer de coordenadas é mostrado que $\tilde{\nabla}_\alpha\sigma^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^\alpha)_{|\alpha}$ e portanto (3.31) pode ser reescrita como:

$$R = \tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - 3\tilde{\nabla}_\alpha\sigma^\alpha.$$

Finalmente, depois de encontrar (3.31) pode-se escrever a ação de Weyl como segue,

$$I = \int (R^2 + AF_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x, \tag{3.32}$$

aplicando o princípio variacional, tem-se $\delta I = 0$, ou melhor,

$$\delta \int (R^2 + AF_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x = 0. \tag{3.33}$$

Para encontrar uma forma mais adequada para (3.33) deve-se analisar o termo $\delta(R^2\sqrt{-g})$,

$$\delta(R^2\sqrt{-g}) = 2R\sqrt{-g}\delta R + R^2\delta\sqrt{-g} = 2R\sqrt{-g}\delta R + 2R^2\delta\sqrt{-g} - R^2\delta\sqrt{-g}$$

$$= 2R\delta(R\sqrt{-g}) - R^2\delta\sqrt{-g}. \quad (3.34)$$

Essa relação independe do calibre escolhido, mas por simplicidade e também com o intuito de seguir os passos de [24] e [26]⁴ o calibre natural $R = \Lambda$, onde Λ é constante em toda a variedade, será considerado:

$$\delta(R^2\sqrt{-g}) = 2\Lambda\delta(R\sqrt{-g}) - \Lambda^2\delta\sqrt{-g} = 2\Lambda \left[\delta(R\sqrt{-g}) - \frac{\Lambda}{2}\delta\sqrt{-g} \right]. \quad (3.35)$$

Assim, com o auxílio do resultado anterior, a variação na ação no calibre $R = \Lambda$ fica:

$$\begin{aligned} \delta I &= 2\Lambda \int \left[\delta(R\sqrt{-g}) - \frac{\Lambda}{2}\delta\sqrt{-g} + \frac{A}{2\Lambda}\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) \right] d^4x = 0 \\ \delta \int \left(R - \frac{\Lambda}{2} + \frac{A}{2\Lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} d^4x &= 0, \end{aligned}$$

onde supe-se $\Lambda \neq 0$. Substituindo (3.31) na equação anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{3}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^\alpha)_{|\alpha} - \frac{\Lambda}{2} + \frac{A}{2\Lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x &= 0 \\ \delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{\Lambda}{2} + \frac{A}{2\Lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x - 3\delta \underbrace{\int (\sqrt{-g}\sigma^\alpha)_{|\alpha} d^4x}_0 &= 0 \\ \delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{\Lambda}{2} + \frac{A}{2\Lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Da identidade (3.36) pode-se obter as equações eletromagnéticas e gravitacionais da teoria, basta considerar variações no campo σ_μ ou na métrica $g_{\mu\nu}$, respectivamente.

3.1.1 Variação no campo σ_μ

Afim de encontrar as equações eletromagnéticas no calibre natural é necessário considerar variações somente no campo de Weyl σ_μ . Os únicos termos na integral em (3.36) que não dão variação nula são $\delta(\sigma_\mu\sigma^\mu\sqrt{-g})$ e $\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g})$. O primeiro passo é calcular esses dois termos, assim:

$$\delta(\sigma_\mu\sigma^\mu\sqrt{-g}) = 2\sqrt{-g}\sigma^\mu\delta\sigma_\mu. \quad (3.37)$$

O segundo não é tão direto e será preciso um cálculo um pouco mais longo, a saber,

$$\begin{aligned} \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) &= \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}) = 2\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} \\ &= 2\sqrt{-g}F^{\mu\nu} \left[(\delta\sigma_\mu)_{|\nu} - (\delta\sigma_\nu)_{|\mu} \right] = 4\sqrt{-g}F^{\mu\nu}(\delta\sigma_\mu)_{|\nu}. \end{aligned}$$

⁴Uma referência posterior que segue passos semelhantes aos dessa seção é [25].

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = N^{\nu}_{|\nu} - 4(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}\delta\sigma_{\mu}, \quad (3.38)$$

onde $N^{\nu} = 4\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta\sigma_{\mu}$. Substituindo (3.37) e (3.38) em (3.36), obtém-se:

$$\int \left[3\sigma^{\mu}\sqrt{-g} - \frac{2A}{\Lambda}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu} \right] \delta\sigma_{\mu} d^4x + \frac{A}{2\Lambda} \underbrace{\int N^{\nu}_{|\nu} d^4x}_0 = 0. \quad (3.39)$$

A última integral se anula pois é um termo de superfície e como $\delta\sigma_{\mu}$ é arbitrário, pode-se concluir que

$$(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu} = \frac{3\Lambda\sqrt{-g}}{2A}\sigma^{\mu}. \quad (3.40)$$

Essa equação é válida somente no calibre em que $R = \Lambda$, porém conforme [8] é possível sair de (3.40) para uma equação invariante de calibre, para isso basta notar que o vetor

$$\sigma_{\nu} + (\ln R)_{|\nu} \quad (3.41)$$

é invariante de calibre e com ele constrói-se a equação de campo eletromagnética que é válida seja qual for o calibre adotado, a saber,

$$(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu} = \frac{3}{2A}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}(R\sigma_{\nu} + R_{|\nu}), \quad (3.42)$$

que consistentemente, recupera o resultado (3.40) para o caso $R = \Lambda$. A equação (3.42) já tinha sido obtida por Weyl em 1918 em seu artigo, o qual pode ser encontrado em [27]⁵. Em uma seção futura esses resultados serão obtido sem falar em calibre especial, partindo direto do princípio de mínima ação.

3.1.2 Variação em $g_{\mu\nu}$

Nesta subseção será considerada somente variações do tipo $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ na relação (3.36). A primeira medida a ser adotada nesta procura das equações gravitacionais é calcular os seguintes termos: $\delta\sqrt{-g}$, $\delta(\tilde{R}\sqrt{-g})$, $\delta(\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha}\sqrt{-g})$ e $\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g})$. Alguns resultados já são conhecidos da geometria riemanniana, a saber,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}), \quad (3.43)$$

$$\delta(\tilde{R}\sqrt{-g}) = \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu}\delta\tilde{R}_{\mu\nu}\sqrt{-g}. \quad (3.44)$$

⁵Essa referência é uma coletânea de artigos de diversos autores, o último é o artigo de Weyl *Gravitation and Electricity* no qual Weyl apresenta sua geometria.

O terceiro termo também é obtido de maneira direta e resulta em

$$\delta(\sigma_\alpha \sigma^\alpha \sqrt{-g}) = \left(\sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2} \sigma_\alpha \sigma^\alpha g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}). \quad (3.45)$$

O último termo não é tão evidente, sendo necessário de um pouco de álgebra para obtê-lo, porém, o resultado segue de maneira familiar da forma abaixo:

$$\begin{aligned} \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) &= \delta(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g}) = F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \delta \sqrt{-g} + F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\nu\beta} \delta(g^{\mu\alpha}) + \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} \delta(g^{\nu\beta}). \end{aligned}$$

Modificando os índices de maneira adequada e utilizando a propriedade de antissimetria de $F_{\mu\nu}$, obtém-se:

$$\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = -2(g^{\alpha\beta} F_{\mu\beta} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}),$$

ou de maneira mais compacta

$$\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = -2T_{\mu\nu} \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}), \quad (3.46)$$

onde $T_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} F_{\mu\beta} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ é exatamente o tensor energia-momento do campo eletromagnético.

Por fim, tomando os quatro resultados desejados e substituindo em (3.36), obtém-se provisoriamente

$$\begin{aligned} \int \left[\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \left(\sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha \right) + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} - \frac{A}{\Lambda} T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) d^4x \\ + \underbrace{\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} d^4x}_0 = 0, \quad (3.47) \end{aligned}$$

onde a última integral é nula, pois, o integrando pode ser expressado como um termo de superfície, isso é mostrado na maioria dos livros de relatividade que falam sobre o método de Palatini, por exemplo, [10], [5], e [7]. Portanto, como a variação $\delta(g^{\mu\nu})$ é arbitrária, conclui-se que

$$\frac{A}{\Lambda} T_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \left(\sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha \right). \quad (3.48)$$

Novamente, vale lembrar que essa equação vale somente no “calibre natural” que já foi citado no texto. É interessante notar que os dois primeiros termos de (3.48) coincide com o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ e no caso especial em que $\sigma_\alpha = 0$, recupera-se as equações já obtidas no contexto da relatividade geral, quando se considera a constante cosmológica, pois, aqui Λ desempenha o

papel da mesma. Assim,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4}g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.49)$$

é a equação que descreve o espaço vazio sem a presença de campo eletromagnético e pode ser encontrada em [10], [9] e [22], salvaguardadas as respectivas convenções e tomando $T_{\mu\nu} = 0$. A equação anterior, bem como uma possível aplicação foram propostas por [28] e [29], quando estes tentaram encontrar as equações gravitacionais da teoria de Weyl de forma independente do calibre adotado.

3.2 Equações de campo em um calibre qualquer

Essa seção se dedica a encontrar as equações de campo eletromagnéticas e gravitacionais em um calibre qualquer, sem privilegiar o “calibre natural” citado por [26], por coerência, os resultados encontrados deverão reduzir-se àqueles obtidos na seção anterior. Para os fenômenos eletromagnético a generalização das equações de campo para um calibre qualquer já foi exposta no capítulo precedente, a novidade aqui será obtê-las diretamente de um princípio variacional⁶. Entretanto, no que concerne a variação da ação de Weyl em relação ao campo tensorial métrico, as equações obtidas neste trabalho ainda não foram encontradas na literatura, outros autores como [28, 29] se debruçaram sobre o problema mas ainda não existe um consenso sobre quais equações estão corretas.

3.2.1 Equações de campo eletromagnéticas da teoria de Weyl

Tendo em mãos a equação (3.31) e a ação de Weyl 3.32 deve-se enfim aplicar o princípio variacional considerando somente variações no campo de Weyl $\sigma_\mu \rightarrow \sigma_\mu + \delta\sigma_\mu$. Além disso sabe-se de (3.38) que $\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = N^\nu_{|\nu} - 4(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}\delta\sigma_\mu$, onde $N^\nu = 4\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta\sigma_\mu$. Assim, a variação $\delta\mathcal{W}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} &= \sqrt{-g}\delta(R^2 + AF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = 2R\sqrt{-g}\delta R + (4A\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta\sigma_\mu)_{|\nu} - 4A(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}\delta\sigma_\mu \\ &= 2R\sqrt{-g}\left[\frac{3}{2}g^{\mu\nu}\delta(\sigma_\mu\sigma_\nu) - \frac{3}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\sigma_\nu)_{|\mu}\right] + (4A\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta\sigma_\mu)_{|\nu} \\ &\quad - 4A(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}\delta\sigma_\mu = 6R\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\sigma_\nu\delta\sigma_\mu - (6R\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\sigma_\nu)_{|\mu} \\ &\quad + 6R_{|\mu}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\sigma_\nu + (4A\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta\sigma_\mu)_{|\nu} - 4A(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}\delta\sigma_\mu. : \\ \delta\mathcal{W} &= [6\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(R\sigma_\nu + R_{|\nu}) - 4A(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}]\delta\sigma_\mu + M^\nu_{|\nu}, \end{aligned}$$

⁶Tendo em vista a facilidade do procedimento, é possível que Weyl e Eddington conhecessem este método, mas preferiram não utilizá-lo.

onde $M^\nu = 4A\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta\sigma_\mu - 6R\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\sigma_\mu$. Assim, $\delta I = \int \delta\mathcal{W} d^4x = 0$ resulta em:

$$\int [6\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(R\sigma_\nu + R_{|\nu}) - 4A(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}]\delta\sigma_\mu + \int M^\nu_{|\nu} d^4x = 0. \quad (3.50)$$

Como $\delta\sigma_\mu$ é arbitrário, se anulando somente nas fronteiras e sabendo que $\int M^\nu_{|\nu} d^4x = 0$, conclui-se que a equação anterior torna-se

$$6\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(R\sigma_\nu + R_{|\nu}) - 4A(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu} = 0. \quad (3.51)$$

Já foi definindo que $\mathcal{J}^\mu = (\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}$, com isso pode-se reescrever a última equação da seguinte forma:

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{3}{2A}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(R\sigma_\nu + R_{|\nu}), \quad (3.52)$$

que apresenta uma relação entre a campo métrico e o campo de 1-forma que juntos caracterizam a geometria de Weyl. A expressão (3.52) é exatamente igual a (3.42) e como visto no capítulo precedente recupera (3.40) no “calibre natural” $R = \Lambda = \text{const.}$

3.2.2 Equações de campo gravitacionais da teoria de Weyl

Na subseção anterior foram encontradas as equações de campo (3.52) advindas de variações na ação devido somente às variações no campo de Weyl σ_μ . Agora, o princípio variacional precisa ser aplicado à ação (3.23), considerando variações no campo métrico $g_{\mu\nu}$. Este procedimento está disponível no apêndice B, onde as equações de campo gravitacionais da teoria de Weyl são deduzidas. O resultado final é bastante simples, a saber,

$$AT_{\mu\nu} = R\left(R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R\right) - D_{(\mu\nu)}, \quad (3.53)$$

onde A é uma constante, $T_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, $D_{(\mu\nu)} = R_{|\mu||\nu} + \frac{1}{2}R(\sigma_{\mu||\nu} + \sigma_{\nu||\mu}) + R\sigma_\mu\sigma_\nu + R_{|\mu}\sigma_\nu + R_{|\nu}\sigma_\mu$ e todos os outros termos são definidos na geometria de weyl. Este resultado é curioso, pois, a menos do termo $D_{(\mu\nu)}$, é análogo ao da relatividade geral se ao invés de $\tilde{R}$ fosse utilizado $\tilde{R}^2$ na ação, porém, naquele caso a equação ficaria $AT_{\mu\nu} = \tilde{R}\left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\tilde{R}\right)$, onde $\tilde{R}$ e $\tilde{R}_{\mu\nu}$ estão definidos em geometria riemanniana e são portanto diferentes de R e $R_{\mu\nu}$ que aparecem em (3.53), o que permite afirmar que apesar da semelhança entre as relações elas são de fato diferentes, mesmo se não existisse o segundo termo do segundo membro.

No apêndice B também é mostrado que a partir do divergente nulo da derivada de corrente, $\mathcal{J}^\alpha_{|\alpha} = \mathcal{J}^\alpha_{||\alpha} = 0$, surge uma relação de restrição importante no processo de

obtenção das equações de campo gravitacionais, a saber, $g^{\mu\nu}D_{\mu\nu}$ ou

$$g^{\mu\nu}(R_{|\mu||\nu} + R\sigma_{\mu||\nu} + R\sigma_{\mu}\sigma_{\nu} + 2R_{|\mu}\sigma_{\nu}) = 0.$$

Mesmo que a densidade lagrangeana (3.23) não corresponda àquela utilizada na relatividade geral e portanto leve a equações de campo gravitacionais diferentes, pode-se, em determinados casos, encontrar previsões físicas desta teoria, por exemplo, segundo W. Pauli

[...] pode ser mostrado que para o caso de um campo esfericamente simétrico e estático no espaço fora de uma partícula material, o campo da teoria de Einstein é ao mesmo tempo uma solução das equações gravitacionais da teoria de Weyl. Este caso, na prática, é o único caso importante e é decisivo para a precessão do periélio de Mercúrio e para o atraso dos raios de luz. *A teoria de Weyl é assim capaz de explicar a precessão do periélio de Mercúrio e o atraso dos raios de luz tão bem quanto a teoria de Einstein* ([23], p. 201).

É possível que Pauli estivesse se referindo às equações gravitacionais calculadas no “calibre especial” $R = \Lambda = \text{const.}$, expostas aqui na expressão (3.48), pois eram os únicos resultados disponíveis na literatura na época em que ele escreveu seu tratado sobre relatividade geral. Assim, a nova teoria além de matematicamente elegante também apresenta, em alguns casos, resultados condizentes com os experimentos. No entanto, para comparar com a solução riemanniana é necessário tomar a condição $\sigma_{\mu} = 0$, com isso a equação (3.52) resulta:

$$R_{|\alpha} = 0 \Rightarrow R = \text{constante}. \quad (3.54)$$

Como o campo de 1-forma é dito ser nulo por hipótese, tem-se:

$$R = \tilde{R} = \text{constante}. \quad (3.55)$$

Por outro lado a equação (3.53) fica da seguinte forma;

$$\tilde{R} \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\tilde{R} \right) = 0, \quad (3.56)$$

pois $T_{\mu\nu} = 0$ e $D_{(\mu\nu)} = 0$.

A citação anterior afirma que a solução da relatividade geral para um campo com simetria esférica na região exterior a distribuição de cargas é também solução das equações de campo gravitacionais da teoria de Weyl, agora será mostrado que qualquer solução exterior na geometria riemanniana também é solução em geometria de Weyl, isto é, a solução para o espaço vazio encontrada nos livros de relatividade geral

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = 0, \quad (3.57)$$

também é solução de (3.56), pois implica tanto $\tilde{R}$ como $\tilde{R}_{\mu\nu}$ nulos. Além disso, (3.56) corresponde exatamente a $\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4}g_{\mu\nu} = 0$, a equação de campo gravitacional obtida tomando o calibre $R = \Lambda$ antes da variação da ação.

É interessante lembrar também que as equações de campo obtidas nessa seção não contemplam o espaço com matéria, pois não existe uma contribuição de matéria na ação, para que este tema seja abordado é necessário que o problema do tempo próprio seja resolvido, tal problema será discutido no próximo capítulo.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE A TEORIA DE WEYL

Neste capítulo serão analisados dois pontos importantes da teoria de Weyl. O primeiro pode ser exemplificado na afirmação de Weyl em 1918 a respeito das equações geodésicas, a saber, “[a geodésica] não pode, é claro, ser interpretada como a linha de menor comprimento porque o conceito de comprimento ao longo de uma curva não tem significado” [27], apesar disso, os argumentos apresentados em [8, 23, 27] são demasiados qualitativos. A intensão da próxima seção é portanto, fornecer um arcabolo matemático que justifique de maneira mais rigorosa a afirmação anterior. O segundo ponto investigado é a famosa crítica de Einstein à nova geometria.

4.1 O problema variacional inverso

Já é bastante difundido que se pode obter as equações de movimento de um sistema partindo da lagrangiana correspondente ao mesmo, porém o que será analisado aqui é o problema inverso, isto é, uma vez dada as equações de movimento deseja-se saber se é possível encontrar uma lagrangiana cujo as equações de Euler-Lagrange coincidam com as equações de movimento fornecidas a priori. Isso é conhecido na literatura como *problema inverso ao cálculo variacional* ou *problema variacional inverso*.

4.1.1 Geodésicas métricas e geodésicas afins (autoparalelas)

Antes de prosseguir é necessário saber a definição de geodésicas métricas e autoparalelas. Assim, dados dois pontos P e Q de uma variedade M , a curva $\alpha(\lambda)$ que fornece a menor distância entre os dois pontos é definida como geodésica métrica, onde λ é o parâmetro

da curva. Por outro lado, uma curva $\beta(\lambda)$ é chamada de autoparalela se o vetor tangente V à curva é transportado paralelamente a ele mesmo, isto é, $\nabla_V V = 0$. Somente as curvas que equivalem a geodésicas podem advir de um princípio variacional.

Em um espaço euclidiano as únicas curvas nas quais o vetor tangente é transportado paralelo a ele mesmo são as retas, as mesmas também minimizam a distância entre dois pontos, logo, neste caso as retas são tanto geodésicas métricas como autoparalelas. Algo semelhante acontece no espaço riemanniano, pois, as equações,

$$\ddot{x}^\alpha + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0,$$

podem ser obtidas tanto da equação $\nabla_V V = 0$ como de um princípio variacional através da ação $s = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt$, isto é, tal como no espaço plano, as autoparalelas são também geodésicas métricas.

De modo geral, dadas as equações de movimento

$$G_\mu(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0, \quad (4.1)$$

onde $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ é a aceleração, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ é a velocidade, x é a posição e t um parâmetro afim, as condições que G_μ deve satisfazer para que exista uma lagrangiana tal que $G_\mu = [L]_\mu$, onde $[L]_\mu$ é a derivada lagrangiana, são:

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu} = \frac{\partial G_\nu}{\partial \ddot{x}^\mu}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} \right). \quad (4.4)$$

Conforme as referências [30, 31], essas condições foram apresentadas primeiramente em 1887 por Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) na obra [32], onde ele mostrou somente que essas relações são necessárias. Segundo [30], a suficiência das equações só foi demonstrada posteriormente em 1896 por A. Meyer¹.

4.1.2 Autoparalelas de Weyl

As equações das autoparalelas de Weyl são dadas por:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0. \quad (4.5)$$

¹Generalizações dessas relações foram fornecidas mais tarde em [33, 34].

O processo para obtê-las é análogo àquele utilizado em geometria riemanniano. As Equações de campo são portanto expressadas por (4.5) e para associá-las ao G_μ da subseção anterior e poder testar se tais equações satisfazem as condições de Helmholtz, é necessário que as autoparalelas sejam covariantes em seus índices, porém se o procedimento de baixar índice for feito puramente com $g_{\mu\alpha}$, G_μ não fica invariante sob transformações de Weyl, fazendo com que as condições sejam satisfeitas em um calibre e em outro não, o que não é algo desejável². Além disso, como verificado no apêndice C para o caso de Weyl integrável, que é conhecido advir de uma ação, somente baixando os índices com $e^{-\phi}g_{\mu\alpha}$ as condições de Helmholtz ficam satisfeitas, o que é condizente com o exposto anteriormente, pois $e^{-\phi}g_{\mu\alpha}$ é invariante de calibre e torna G_μ também independente do calibre adotado. Então para o caso de Weyl não-integrável é necessário encontrar uma “métrica” que independa do calibre e que de preferência recaia em $e^{-\phi}g_{\mu\alpha}$ para $\sigma_\alpha = \phi|_\alpha$. Para isso pode-se baixar os índices com a métrica multiplicada por um fator que torne a expressão toda invariante pelas transformações de Weyl, tal como abaixo:

$$e^{-\int \sigma_p dx^p} g_{\mu\alpha}. \quad (4.6)$$

Assim, é possível reescrever as autoparalelas de Weyl com índices covariantes como segue:

$$G_\mu = e^{-\int \sigma_p dx^p} g_{\mu\alpha} \left(\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \right) = 0. \quad (4.7)$$

Com isso, percebe-se facilmente que a primeira condição de Helmholtz fica satisfeita:

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu} = e^{-\int \sigma_p dx^p} g_{\mu\alpha} \delta_\nu^\alpha = e^{-\int \sigma_p dx^p} g_{\mu\nu} = \frac{\partial G_\nu}{\partial \ddot{x}^\mu}. \quad (4.8)$$

Para analisar a segunda condição será necessário calcular $\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} &= 2e^{-\int \sigma_p dx^p} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\beta. : \\ \frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} &= \dot{x}^\beta e^{-\int \sigma_p dx^p} \left[(g_{\beta\mu|\nu} + g_{\nu\mu|\beta} - g_{\beta\nu|\mu}) - (g_{\beta\mu}\sigma_\nu + g_{\nu\mu}\sigma_\beta - g_{\beta\nu}\sigma_\mu) \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

e consequentemente, fazendo as trocas $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$, tem-se:

$$\frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = \dot{x}^\beta e^{-\int \sigma_p dx^p} \left[(g_{\beta\nu|\mu} + g_{\mu\nu|\beta} - g_{\beta\mu|\nu}) - (g_{\beta\nu}\sigma_\mu + g_{\mu\nu}\sigma_\beta - g_{\beta\mu}\sigma_\nu) \right]. \quad (4.10)$$

Com isso o lado esquerdo da segunda condição de Helmholtz fica:

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2\dot{x}^\beta e^{-\int \sigma_p dx^p} [g_{\mu\nu|\beta} - g_{\mu\nu}\sigma_\beta], \quad (4.11)$$

²É interessante notar que $G_\mu = 0$ continua invariante de gauge, pois a fator de calibre aparece como um fator multiplicativo, porém o G_μ em si, não é invariante e é com ele que as condições de Helmholtz são construídas.

Já o lado direito da segunda condição de Helmholtz pode ser deduzido como segue³:

$$2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} \right) = 2 \dot{x}^\beta \partial_\beta \left(e^{-\int \sigma_\rho dx^\rho} g_{\mu\nu} \right) . \quad (4.12)$$

$$2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} \right) = 2 \dot{x}^\beta e^{-\int \sigma_\rho dx^\rho} \left(g_{\mu\nu|\beta} - g_{\mu\nu} \partial_\beta \int \sigma_\rho dx^\rho \right) . \quad (4.13)$$

Com isso nota-se facilmente que a segunda condição de Helmholtz não é satisfeita para as autoparalelas da geometria de Weyl não-integrável. Isto significa que tais equações não podem advir de um princípio variacional. Para que essa condição fosse satisfeita seria necessário ter $g_{\mu\nu} \partial_\beta \int \sigma_\rho dx^\rho = g_{\mu\nu} \sigma_\beta$, o que não se pode concluir em Weyl não-integrável. No entanto, espera-se que Weyl integrável, onde $\sigma_\beta = \phi_{|\beta}$, satisfaça essa condição, pois neste caso é conhecido que as autoparalelas vêm de um princípio variacional através da extremização da ação $\int e^{-\phi} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt$. Realmente, neste caso acontece o esperado, pois, $g_{\mu\nu} \partial_\beta \int \phi_{|\rho} dx^\rho = g_{\mu\nu} \phi_{|\beta}$.

Assim, é possível concluir que a segunda condição de Helmholtz não é satisfeita na geometria de Weyl não-integrável e quando considera-se o caso em que o campo de Weyl é o gradiente de um escalar, obtm-se $e^{-\int \phi_{|\rho} dx^\rho} = e^{-\phi}$, o mesmo fator usado para baixar o índice em Weyl integrável, e como mostrado no apêndice C todas as condições ficam satisfeitas para este caso.

4.2 Crítica de Einstein à teoria de Weyl

Uma possível incompatibilidade entre os resultados experimentais e as previsões da teoria de Weyl foi levantada por Einstein. Para melhor entender o argumento de Einstein pode-se considerar um campo gravitacional e um campo eletrostático, ambos esfericamente simétricos e estáticos atuando juntos em uma determinada região do espaço-tempo, onde as componentes espaciais de σ_μ são nulas, isto é, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ enquanto a componente temporal do 4-potencial $\sigma_0 = \varphi(r)$ depende somente da distância ao centro de simetria e φ assim como $g_{\mu\nu}$ é independente do tempo. Fixando um relógio em um determinado ponto do espaço pode-se medir o tempo através de um processo periódico de período τ_0 . Partindo da Eq. (2.8) e lembrando que o comprimento l_0 de um vetor varia com o tempo, conclui-se que depois de passado o tempo coordenado $x^0 = t$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{l} = \sigma_0 dx^0 &\Rightarrow \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \int_0^{x^0} \varphi dx^0 \Rightarrow \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \varphi x^0 \Rightarrow \frac{l}{l_0} = e^{\varphi t} . : \\ & l = l_0 e^{\varphi t} . \end{aligned} \quad (4.14)$$

³Em alguns casos será mais adequado usar a notação ∂_μ ao invés de $_{|\mu}$ para derivada parcial.

A proposta de Einstein foi associar o período τ ao comprimento de um vetor, assim é possível reescrever a Eq. (4.14) da forma:

$$\tau = \tau_0 e^{\varphi t}. \quad (4.15)$$

Para interpretar esse resultado inicia-se por considerar dois relógios C_1 e C_2 em um ponto cujo 4-potencial é φ_1 . Se um dos relógios, por exemplo C_2 , for levado a outro ponto do espaço com 4-potencial φ_2 seus períodos se modificarão com o passar do tempo de maneira diferente, a saber,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_0 e^{\varphi_1 t}, \\ \tau_2 &= \tau_0 e^{\varphi_2 t}. \end{aligned}$$

Logo, os passos dos dois relógios serão distintos e dependerão da história pregressa de cada um. Mesmo que C_2 seja levado espacialmente ao ponto inicial sua velocidade de funcionamento será diferente daquela de C_1 . De maneira semelhante ao que acontece com os períodos as frequências desses relógios também se modificarão cada vez mais. Este efeito deveria ser notado nas linhas espectrais dos átomos, isto é, linhas espectrais de frequências definidas não deveriam existir, pois as frequências dependeriam da história pregressa de cada átomo, uma vez que o período varia com o tempo de acordo com a Eq. (4.15). Entretanto, é conhecido que o espectro de cada substância é bem definido. Por isso Einstein concluiu que a teoria de Weyl estava em flagrante desacordo com a experiência. Tal crítica é abordada por diferentes autores entre eles, [3, 8, 23, 35–38]. Segundo [35], o efeito citado por Einstein e descrito pela equação (4.16) pode ser chamado de “*segundo efeito do relógio*”, para distingui-lo do paradoxo dos gêmeos que seria o primeiro efeito do relógio, previsto pela relatividade especial e também pela relatividade geral. Para ilustrar a diferença entre os dois conceitos [35] escreve

[...] Na geometria de Weyl, podemos prever que um viajante espacial que viaja a uma estrela distante e, em seguida retorna à terra, encontrará não somente que aqueles na terra envelheceram muito mais, mas também que os relógios na terra são encontrados funcionando em uma taxa diferente daqueles a bordo da nave do foguete! ([35], p. 451).

Conforme [36], Walther Hermann Nernst (1864-1941) concordava com as objeções de Einstein e solicitou à academia de Berlin que a crítica fosse anexada ao artigo de Weyl, o qual teve que aceitar isso. Depois da publicação de seu artigo, Weyl se comunicou algumas vezes com Einstein, trechos dessas cartas podem ser encontrados em [36–39] e mostram que a intensão primeira de Weyl era tratar com pé de igualdade a direção e o comprimento [40], isto é, se a direção não é preservada sob transporte paralelo, o comprimento deveria se comportar da mesma forma, mas no decorrer da busca por essa igualdade e por uma teoria invariante

por mudança de escala, Weyl se deparou com uma teoria capaz de geometrizar o eletromagnetismo. Depois da maioria dos físicos da época terem considerado sua teoria sem significado físico, Weyl abandonou a teoria de unificação, mas conseguiu incorporar a ideia de uma teoria invariante de calibre na mecânica quântica algum tempo depois juntamente com Vladimir Aleksandrovich Fock (1898-1974) e Fritz Wolfgang London (1900-1954).

4.3 Crítica à crítica de Einstein

Quando Einstein elaborou sua crítica à geometria de Weyl, ele associou o tempo próprio ao comprimento de um vetor, como feito anteriormente, mas sabe-se que a definição do comprimento é feita inteiramente com o campo tensorial métrico $g_{\mu\nu}$, isto é

$$l = g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu,$$

onde ξ^α são as componentes do vetor de comprimento l . Isso significa que o campo de 1-forma de Weyl σ_μ não contribui em nada para o tempo próprio, entretanto como pode ser observado no decorrer deste trabalho as quantidades de interesse físico nesta nova geometria são construídas com o campo de 1-forma, por exemplo, a conexão $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ e todas as grandezas definidas com ela, entre elas $R_{\beta\gamma\lambda}^\alpha$ e $R_{\beta\lambda}$, dependem de σ_μ . A própria ação de Weyl contém em todos os termos o campo de Weyl, a saber, $\int (R^2 + AF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x$. Além disso tais quantidades são invariantes pelas transformações de Weyl (2.17) e tendo em vista a importância do conceito de tempo próprio para a física era de se esperar que este possuísse tais propriedades. Porém o comprimento de um vetor e também o tempo próprio, além de não dependerem de σ_μ não são invariantes de calibre e o que Einstein fez foi basear seu ponto de vista em uma definição de tempo próprio riemanniana sem se atentar as propriedades citadas anteriormente. Na referência [41], Romero apresenta alguns itens que devem ser observados na hora de propor uma definição para o tempo próprio $\Delta\tau$, estes são:

[...] É claro que a definição procurada teria de preencher os seguintes requisitos:

- (i) $\Delta\tau$ deve ser construído inteiramente da geometria (lembramos que o tempo próprio da relatividade geral é proporcional ao comprimento);
- (ii) $\Delta\tau$ deve ser consistente com o princípio de invariância de calibre;
- (iii) $\Delta\tau$ deve depender tanto do campo métrico $g_{\mu\nu}$ como do campo de calibre A_μ ;
- (iv) $\Delta\tau$ deve reduzir-se à definição de tempo próprio da relatividade geral no limite quando σ_μ vai a zero;
- (v) $\Delta\tau$ deve ser escrita na forma $\Delta\tau = \int \mathcal{F}(V, g, A) d\lambda$, com $\mathcal{F}$, como na geometria de Finsler, sendo uma função homogênea de primeira ordem com respeito ao vetor tangente V (Esta condição é necessária para garan-

tir a invariância sob reparametrização) [16];

(vi) Finalmente, seria altamente desejável, embora não estritamente necessário, que a nova definição de $\Delta\tau$ pudesse permitir que as equações das geodésicas afins de Weyl fossem deduzidas de um princípio variacional ([41], p. 4)⁴.

No início deste capítulo foi mostrado que as equações para as geodésicas afins (auto-pararelas) de Weyl não podem surgir de um princípio variacional, entretando conforme relatado no requerimento (vi) tal condição não é estritamente necessária.

Assim, a definição de tempo próprio utilizada por Einstein viola claramente alguns dos requerimentos citados anteriormente, por exemplo, (ii) e (iii). No caso particular da geometria de Weyl integrável o tempo próprio

$$\Delta\tau = \int e^{-\phi/2} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda,$$

onde λ é o parâmetro, obedece todos as condições sugeridas em [41] e portanto é uma boa definição para o caso especial em que $\sigma_\mu = \phi_{|\mu}$.

Deve ser bastante complicado encontrar uma definição razoável para o tempo próprio na teoria de Weyl não-integrável, pois o problema persiste desde sua origem em 1918, e ainda não sabe-se se é possível resolvê-lo. O que a análise feita neste trabalho sugere é que a teoria de Weyl sem uma expressão adequada para o tempo próprio é incompleta e não há argumentos fortes o suficiente, pelo menos baseado na crítica de Einstein, para dizer que a nova geometria está errada e sem significado físico.

⁴A notação em [41] é ligeiramente diferente, por exemplo, naquele trabalho A_μ corresponde ao campo de Weyl σ_μ desta dissertação.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

A teoria apresentada nesta dissertação foi a primeira tentativa de unificação entre gravitação e eletromagnetismo, nela a parte eletomagnética advém puramente da geometria do espaço tal como a gravitação¹. Apesar de matematicamente muito elegante essa proposta foi fortemente criticada pelos pesquisadores da época, entre os quais o criador da relatividade Albert Einstein. Contudo, a versão integrável da teoria de Weyl conseguiu sobreviver, sem é claro ter o objetivo de unificar as interações citadas anteriormente, pois neste caso especial não existe eletromagnetismo ($F_{\mu\nu} = 0$).

Como visto, a teoria de Weyl possui no caso do espaço fora da distribuição de matéria os mesmos resultados da relatividade geral e isso é um ponto a favor da mesma, porém não ter sido encontrada uma definição adequada para o tempo próprio limita muito a teoria, impedindo inclusive de propor uma teoria cosmológica incluindo a matéria. Entretanto, a teoria não pode ainda ser considerada sem significado físico, tal como afirmou Einstein, e o fato dela estar incompleta pode ser visto como mais uma área de estudo para os pesquisadores interessados.

De imediato pode-se pensar em algumas perspectivas de investigação nessa área. É conhecido que em gravitação Newtoniana o campo gravitacional não depende da carga do corpo, entretanto quando se leva em consideração a relatividade geral, a solução de Reissner (1916) e Nordström (1918) que analisa o campo na região exterior a uma partícula carregada revela que a carga da partícula influencia no campo métrico, ou seja, a geometria do espaço não é indiferente ao eletromagnetismo. Assim, pode ser interessante estudar como ficaria o problema de Reissner-Nordström no cenário da geometria de Weyl.

¹As propostas de unificação atuais além das interações gravitacionais e eletromagnéticas tentam englobar as interações nucleares forte e fraca, entretanto na época o núcleo atômico era um mistério e Weyl e os demais físicos da época não se preocupavam com tais questões.

Por fim, caso se proponha adequadamente uma definição para o tempo próprio nesta teoria é possível tentar fazer algum trabalho em cosmologia? Será que tal teoria faz previsões coerentes com os dados observacionais obtidos? Tais perguntas podem ser feitas e resumem o quão é importante resolver o problema levantado no capítulo anterior para pesquisas futuras em geometria de Weyl não-integrável.

Apêndice A

DEDUÇÃO DO TENSOR DE RICCI E DO ESCALAR DE CURVATURA

O objetivo deste apêndice é encontrar o tensor de Ricci e o escalar de curvatura da geometria de Weyl em função das grandezas correspondentes na geometria riemanniana e do campo de Weyl σ_μ . A relação para o escalar de curvatura já foi calculada no capítulo 3, mas em um sistema de coordenadas especial, que foi nomeado de sistema de coordenadas geodésico riemanniano, tal método é interessante, pois quem se interessa sobre o assunto pode fazer uso de dois sistemas geodésico, o riemanniano no qual $\{\beta_\gamma^\alpha\} = 0$, e aquele natural da geometria de Weyl para o qual $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$. Nesse momento, entretanto, a maior dificuldade será encontrar $R_{\mu\nu}$, já que o escalar de curvatura é ligeiramente determinado por $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Então, partindo da definição $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$, obtém-se:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha|\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha|\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\tau\alpha}^\alpha. \quad (\text{A.1})$$

Como a expressão da conexão de Weyl em função dos símbolos de Christoffel já é conhecida, equação (2.13) na página 14, basta calcular as duas derivadas das componentes da conexão, isto é, os dois primeiros termos do segundo membro de (A.1) e substituir tudo em (A.1). Mostra-se facilmente que os dois termos desejados são:

$$\Gamma_{\mu\alpha|\nu}^\alpha = \{\mu\alpha\}_{|\nu} - \frac{1}{2}n\sigma_{\mu|\nu} \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma_{\nu\alpha|\mu}^\alpha = \{\mu\nu\}_{|\alpha} - \frac{1}{2}\left[\sigma_{\mu|\nu} + \sigma_{\nu|\mu} - (g_{\mu\nu}\sigma^\alpha)_\alpha\right], \quad (\text{A.3})$$

onde n é a dimensão da variedade. Substituindo estes dois termos e (2.13) em (A.1), tem-se:

$$R_{\mu\nu} = \{\mu\alpha\}_{|\nu} - \frac{1}{2}n\sigma_{\mu|\nu} - \{\mu\nu\}_{|\alpha} + \frac{1}{2}\left[\sigma_{\mu|\nu} + \sigma_{\nu|\mu} - (g_{\mu\nu}\sigma^\alpha)_\alpha\right] + \left[\{\mu^\tau\}_\alpha - \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\tau\sigma_\mu$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_\mu^\tau \sigma_\alpha - g_{\mu\alpha} \sigma^\tau \Big) \Big[\{ \tau_\nu^\alpha \} - \frac{1}{2} (\delta_\tau^\alpha \sigma_\nu + \delta_\nu^\alpha \sigma_\tau - g_{\tau\nu} \sigma^\alpha) \Big] - \Big[\{ \mu_\nu^\tau \} - \frac{1}{2} (\delta_\mu^\tau \sigma_\nu + \delta_\nu^\tau \sigma_\mu - g_{\mu\nu} \sigma^\tau) \Big] \Big[\{ \tau_\alpha^\alpha \} - \frac{1}{2} (\delta_\tau^\alpha \sigma_\alpha + \delta_\alpha^\alpha \sigma_\tau - g_{\alpha\tau} \sigma^\alpha) \Big] = \{ \mu_\alpha^\alpha \}_{|\nu} - \{ \mu_\nu^\alpha \}_{|\alpha} + \{ \mu_\alpha^\tau \} \{ \tau_\nu^\alpha \} \\
& - \{ \mu_\nu^\tau \} \{ \tau_\alpha^\alpha \} + \frac{1}{2} (\sigma_{\mu|\nu} + \sigma_{\nu|\mu}) - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \sigma^\alpha)_{|\alpha} - \frac{1}{2} n \sigma_{\mu|\nu} - \frac{1}{2} \{ \tau_\nu^\alpha \} (\delta_\alpha^\tau \sigma_\mu + \delta_\mu^\tau \sigma_\alpha - g_{\mu\alpha} \sigma^\tau) - \frac{1}{2} \{ \mu_\alpha^\tau \} (\delta_\tau^\alpha \sigma_\nu + \delta_\nu^\alpha \sigma_\tau - g_{\tau\nu} \sigma^\alpha) + \frac{1}{4} (\delta_\alpha^\tau \sigma_\mu + \delta_\mu^\tau \sigma_\alpha - g_{\mu\alpha} \sigma^\tau) (\delta_\tau^\alpha \sigma_\nu + \delta_\nu^\alpha \sigma_\tau - g_{\tau\nu} \sigma^\alpha) + \frac{1}{2} \{ \mu_\nu^\tau \} n \sigma_\tau + \frac{1}{2} \{ \tau_\alpha^\alpha \} (\delta_\mu^\tau \sigma_\nu + \delta_\nu^\tau \sigma_\mu - g_{\mu\nu} \sigma^\tau) - \frac{1}{4} n \sigma_\tau (\delta_\mu^\tau \sigma_\nu + \delta_\nu^\tau \sigma_\mu - g_{\mu\nu} \sigma^\tau).
\end{aligned}$$

Como $\tilde{R}_{\mu\nu} = \{ \mu_\alpha^\alpha \}_{|\nu} - \{ \mu_\nu^\alpha \}_{|\alpha} + \{ \mu_\alpha^\tau \} \{ \tau_\nu^\alpha \} - \{ \mu_\nu^\tau \} \{ \tau_\alpha^\alpha \}$ é o tensor de Ricci riemanniano a expressão anterior fica reduzida e para simplificar ainda mais o mesmo, pode-se contar com o auxílio da derivada covariante riemanniana, aquela que é definida em termos dos símbolos de Christoffel e não da conexão de Weyl. Matematicamente essas simplificações são:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \tilde{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\sigma_{\mu|\nu} + \sigma_{\nu|\mu}) - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \sigma^\alpha)_{|\alpha} - \frac{1}{2} n \sigma_{\mu|\nu} - \frac{1}{2} \{ \tau_\nu^\alpha \} \sigma_\mu - \frac{1}{2} \{ \mu_\nu^\alpha \} \sigma_\alpha \\
&+ \frac{1}{2} \{ \tau_\nu^\alpha \} g_{\mu\alpha} \sigma^\tau - \frac{1}{2} \{ \mu_\alpha^\alpha \} \sigma_\nu - \frac{1}{2} \{ \mu_\nu^\alpha \} \sigma_\alpha + \frac{1}{2} \{ \mu_\alpha^\tau \} g_{\nu\tau} \sigma^\alpha + \frac{1}{2} \{ \mu_\nu^\tau \} n \sigma_\tau + \frac{1}{2} \{ \mu_\alpha^\alpha \} \sigma_\nu \\
&+ \frac{1}{2} \{ \nu_\alpha^\alpha \} \sigma_\mu - \frac{1}{2} \{ \tau_\alpha^\alpha \} g_{\mu\nu} \sigma^\tau + \frac{1}{4} (n \sigma_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \sigma_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \sigma_\mu \sigma_\nu \\
&- g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha - g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha + \sigma_\mu \sigma_\nu) - \frac{1}{4} n (2 \sigma_\mu \sigma_\nu - g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha) \\
&= \tilde{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2} n \tilde{\nabla}_\nu \sigma_\mu - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\alpha (g_{\mu\nu} \sigma^\alpha) - \frac{(n-2)}{4} (\sigma_\mu \sigma_\nu - g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\nabla}_\rho$ correspondendo justamente a derivada covariante riemanniana definida em (2.14). Como é conhecido $\tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Outro resultado útil para tornar a equação anterior um pouco mais elegante é que

$$\tilde{\nabla}_\nu \sigma_\mu - \tilde{\nabla}_\mu \sigma_\nu = \sigma_{\mu|\nu} - \{ \mu_\nu^\alpha \} \sigma_\alpha - \sigma_{\nu|\mu} + \{ \nu_\mu^\alpha \} \sigma_\alpha = \sigma_{\mu|\nu} - \sigma_{\nu|\mu} = F_{\mu\nu}.$$

Assim, numa variedade de dimensão n o tensor de Ricci da geometria de Weyl pode ser expressado em termos do seu correspondente riemanniano da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} [(n+1) \tilde{\nabla}_\nu \sigma_\mu - 3 \tilde{\nabla}_\mu \sigma_\nu + g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha] - \frac{(n-2)}{4} (\sigma_\mu \sigma_\nu - g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha).$$

Esse era o resultado procurado, porém a teoria de Weyl deve ser analisada no caso de uma variedade 4-dimensional, logo, fazendo $n = 4$ na última equação $R_{\mu\nu}$ adquire a forma:

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_\nu \sigma_\mu + \tilde{\nabla}_\mu \sigma_\nu + g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha) - \frac{1}{2} (\sigma_\mu \sigma_\nu - g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha). \quad (\text{A.4})$$

Da relatividade geral sabe-se que o tensor de Ricci riemanniano é simétrico, $\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\nu\mu}$, no entanto, fazendo uma análise de (A.4) verifica-se que tal simetria é perdida em geometria de Weyl devido ao surgimento do termo referente ao campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ que é antissimétrico em seus índices, assim, pode-se decompor o tensor de Ricci em sua parte simétrica $R_{(\mu\nu)}$ e em sua parte antissimétrica $R_{[\mu\nu]}$, como mostrado abaixo¹:

$$R_{(\mu\nu)} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\nu \sigma_\mu + \tilde{\nabla}_\mu \sigma_\nu + g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha) - \frac{1}{2}(\sigma_\mu \sigma_\nu - g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha), \quad (\text{A.5})$$

$$R_{[\mu\nu]} = -F_{\mu\nu}. \quad (\text{A.6})$$

Logo, quando $R_{\mu\nu}$ for multiplicado por $(\delta g^{\mu\nu})$ ou pelo próprio tensor métrico $g^{\mu\nu}$ somente a sua parte simétrica sobreviverá, visto que $g^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$ devido existir uma soma entre um tensor simétrico e outro antissimétrico nos mesmos índices. Com isso, pode-se calcular o escalar de curvatura definido por $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{(\mu\nu)}$, resultando em:

$$\begin{aligned} R &= \tilde{R} - \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha + 4\tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha) - \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \sigma^\alpha - 4\sigma_\alpha \sigma^\alpha). : \\ R &= \tilde{R} + \frac{3}{2}\sigma_\alpha \sigma^\alpha - 3\tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Com as equações (A.4) e (A.7) o objetivo deste apêndice foi alcançado, porém, para comparar com o resultado obtido em (3.31) é necessário investigar o último termo de (A.7), isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha &= \sigma^\alpha_{|\alpha} + \{\rho^\alpha_\alpha\} \sigma^\rho = \sigma^\alpha_{|\alpha} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta|\rho} \sigma^\rho = \sigma^\alpha_{|\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g})_{|\alpha} \sigma^\alpha. : \\ \tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \sigma^\alpha)_{|\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo a relação anterior em (A.7) recupera-se o resultado (3.31) da página 30, a saber,

$$R = \tilde{R} + \frac{3}{2}\sigma_\alpha \sigma^\alpha - \frac{3}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \sigma^\alpha)_{|\alpha}.$$

Tal resultado confirma a validade do método de coordenadas geodésicas riemannianas apresentado neste trabalho.

¹De maneira geral a parte simétrica de um tensor covariante de ordem 2 é $H_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(H_{\mu\nu} + H_{\nu\mu})$, enquanto sua parte antissimétrica é definida por $H_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(H_{\mu\nu} - H_{\nu\mu})$.

Apêndice B

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO GRAVITACIONAIS DA TEORIA DE WEYL

O objetivo desse apêndice é encontrar as equações de campo gravitacionais da teoria de Weyl, tais soluções são obtidas quando se toma variações em relação ao campo métrico na ação de Weyl (3.32). Assim, a variação na densidade lagrangiana fica dada por:

$$\delta\mathcal{W} = \delta(R^2\sqrt{-g}) + A\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = 2R\sqrt{-g}\delta R + R^2\delta(\sqrt{-g}) + A\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}). \quad (\text{B.1})$$

Por definição $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ e usando o resultado bastante conhecido $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ e a equação (3.46), a saber, $\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = -2T_{\mu\nu}\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})$, onde $T_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, pode-se obter do resultado anterior a seguinte expressão:

$$\delta\mathcal{W} = 2R\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})\left(R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R\right) - 2AT_{\mu\nu}\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) + 2R\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \quad (\text{B.2})$$

onde $R_{(\mu\nu)}$ é a parte simétrica do tensor de Ricci apresentado em (A.5). isso se deve ao fato que $\delta g^{\mu\nu}$ é totalmente simétrico, cancelando a parte antissimétrica de $R_{\mu\nu}$. O resultado (B.2) pode ser reescrito como segue abaixo:

$$\delta\mathcal{W} = \sqrt{-g}\left[2R\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R\right) - 2AT_{\mu\nu}\right](\delta g^{\mu\nu}) + 2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \quad (\text{B.3})$$

O termo $2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ na última equação dá mais trabalho aqui do que na relatividade geral e precisa de alguns resultados que serão obtidos agora.

Já é conhecido que $g_{\mu\nu||\alpha} = g_{\mu\nu}\sigma_\alpha$, então, partindo do princípio que $(\delta^\alpha_\beta)_{||\lambda} = 0$ deduz-se o importante resultado que $g^{\mu\nu}_{||\alpha} = -g^{\mu\nu}\sigma_\alpha$. Além disso, trazendo a definição de densidade tensorial da relatividade geral conforme [8, 23], bem como usando a definição de derivada covariante de uma densidade tensorial encontrada em [20], a mesma da geometria

riemanniana¹, segue que $(\sqrt{-g}\xi^\mu)_{||\mu} = (\sqrt{-g}\xi^\mu)_{|\mu}$ e também $(\sqrt{-g})_{||\mu} = 2\sqrt{-g}\sigma_\mu$.

Para resolver o problema é necessário reescrever $2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ de uma forma adequada, para isso a identidade de Palatini é essencial. Esta identidade para a geometria de Weyl é exatamente igual àquela encontrada na maioria dos livros textos de relatividade geral, ou seja,

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{||\lambda} - (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{||\nu}$$

Logo, substituindo a identidade anterior em $2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ encontra-se:

$$2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = 2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}[(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{||\lambda} - (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{||\nu}]. :$$

$$2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = 2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{||\lambda} - 2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{||\nu}.$$

Utilizando a propriedade leibniz da derivada covariante e posteriormente os resultados mostrados anteriormente para as derivadas covariantes da métrica contravariante e das densidades tensoriais, chega-se a:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= (2R\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)_{|\alpha} - (2R\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{|\alpha} - 2R_{|\lambda}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\ &\quad - 2R\sqrt{-g}\sigma_\lambda g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + 2R_{|\nu}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + 2R\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\sigma_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda. : \\ 2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= X_{|\alpha}^\alpha - 2\sqrt{-g}(R_{|\lambda} + R\sigma_\lambda)g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + 2\sqrt{-g}(R_{|\nu} + R\sigma_\nu)g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda, \end{aligned}$$

onde $X^\alpha = 2R\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)$. Assim, renomeando os índices “mudos”, obtém-se:

$$2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = X_{|\alpha}^\alpha + 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} + R\sigma_\alpha)(g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha). \quad (\text{B.4})$$

Antes de prosseguir, será calculado separadamente o termo $g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$.

$$\begin{aligned} \delta(g^{\mu\alpha}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) &= (\delta g^{\mu\alpha})\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - (\delta g^{\mu\nu})\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha. : \\ g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \delta(g^{\mu\alpha}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) + (\delta g^{\mu\nu})\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - (\delta g^{\mu\alpha})\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda. \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

O termo $V^\alpha = g^{\mu\alpha}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ pode ser expressado de uma forma mais conveniente, a saber,

$$\begin{aligned} V^\alpha &= \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\lambda\rho}(g_{\mu\rho|\lambda} + g_{\lambda\rho|\mu} - g_{\mu\lambda|\rho}) - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\delta_\mu^\lambda\sigma_\lambda + \delta_\lambda^\mu\sigma_\mu - g_{\mu\lambda}\sigma^\lambda) \\ &\quad - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}(g_{\mu\rho|\nu} + g_{\nu\rho|\mu} - g_{\mu\nu|\rho}) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\delta_\mu^\alpha\sigma_\nu + \delta_\nu^\alpha\sigma_\mu - g_{\mu\nu}\sigma^\alpha), \\ V^\alpha &= \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\lambda\rho}g_{\lambda\rho|\mu} - 2\sigma^\alpha - g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}g_{\mu\rho|\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}g_{\mu\nu|\rho} - \sigma^\alpha. : \\ V^\alpha &= g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}g_{\mu\nu|\rho} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}g_{\mu\rho|\nu} - 3g^{\alpha\rho}\sigma_\rho. \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

¹ A derivada covariante de uma densidade tensorial de peso w é dada por $\mathcal{J}^{\dots}_{||\alpha} = (\text{termo normal para tensores}) - w\Gamma_{\rho\alpha}^\rho \mathcal{J}^{\dots}$, conforme [20].

Substituindo (B.6) em (B.5), tem-se:

$$\begin{aligned} g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \delta(g^{\mu\nu} g^{\alpha\rho} g_{\mu\nu|\rho} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\rho} g_{\mu\rho|\nu} - 3\sigma_{\rho} g^{\alpha\rho}) + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} (\delta g^{\mu\nu}) \\ - \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} (\delta g^{\mu\alpha}) &= (\delta g^{\alpha\rho}) g^{\mu\nu} g_{\mu\nu|\rho} + g^{\alpha\rho} (\delta g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu|\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu|\rho}) - (\delta g^{\mu\nu}) g^{\alpha\rho} g_{\mu\rho|\nu} \\ &\quad - g^{\mu\nu} (\delta g^{\alpha\rho}) g_{\mu\rho|\nu} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\rho} (\delta g_{\mu\rho})_{|\nu} - 3\sigma_{\rho} g^{\alpha\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} (\delta g^{\mu\nu}) - \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} (\delta g^{\mu\alpha}). \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na Eq. (B.4), a expressão para $2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ fica:

$$\begin{aligned} &= X_{|\alpha}^{\alpha} + 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \left[(\delta g^{\alpha\rho}) g^{\mu\nu} g_{\mu\nu|\rho} + g^{\alpha\rho} (\delta g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu|\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu|\rho}) \right. \\ &\quad - (\delta g^{\mu\nu}) g^{\alpha\rho} g_{\mu\rho|\nu} - g^{\mu\nu} (\delta g^{\alpha\rho}) g_{\mu\rho|\nu} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\rho} (\delta g_{\mu\rho})_{|\nu} - 3\sigma_{\rho} g^{\alpha\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} (\delta g^{\mu\nu}) \\ &\quad \left. - \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} (\delta g^{\mu\alpha}) \right] = X_{|\alpha}^{\alpha} + 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \left[g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu})_{|\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\rho})_{|\nu} \right] \\ &\quad + 2\sqrt{-g} \left[(R_{|\mu} + R\sigma_{\mu}) g^{\lambda\rho} g_{\lambda\rho|\nu} + (R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho} g_{\mu\nu|\rho} - (R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho} g_{\mu\rho|\nu} \right. \\ &\quad \left. - (R_{|\mu} + R\sigma_{\mu}) g^{\lambda\rho} g_{\lambda\nu|\rho} - 3(R_{|\mu} + R\sigma_{\mu}) \sigma_{\nu} + (R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - (R_{|\mu} + R\sigma_{\mu}) \Gamma_{\nu\lambda}^{\lambda} \right] (\delta g^{\mu\nu}) \\ &= X_{|\alpha}^{\alpha} + \left[2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right]_{|\rho} - \left[2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\rho} \right]_{|\nu} \\ &\quad - 2(\sqrt{-g})_{|\rho} (R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha|\rho} + R_{|\rho}\sigma_{\alpha} + R\sigma_{\alpha|\rho}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &\quad - 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho}_{|\rho} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu}_{|\rho} \delta g_{\mu\nu} + 2(\sqrt{-g})_{|\nu} (R_{|\alpha} \\ &\quad + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\rho} + 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha|\nu} + R_{|\nu}\sigma_{\alpha} + R\sigma_{\alpha|\nu}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\rho} + 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} \\ &\quad + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho}_{|\nu} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\rho} + 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} + R\phi_{\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu}_{|\nu} \delta g_{\mu\rho} + 2\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \left[(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \right. \\ &\quad \times \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + g^{\alpha\rho} g_{\mu\nu|\rho} - g^{\alpha\rho} g_{\mu\rho|\nu} \right) - (R_{|\mu} + R\sigma_{\mu}) \left(\Gamma_{\nu\lambda}^{\lambda} + g^{\lambda\rho} g_{\lambda\nu|\rho} - g^{\lambda\rho} g_{\lambda\rho|\nu} + 3\sigma_{\nu} \right) \left. \right] \\ &= X_{|\alpha}^{\alpha} + Y_{|\rho}^{\rho} + Z_{|\lambda}^{\lambda} + 2\sqrt{-g} \left[(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \left(\frac{1}{2} g^{\lambda\tau} g_{\lambda\tau|\rho} g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\rho}_{|\rho} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu}_{|\rho} \right) \right. \\ &\quad \times g_{\mu\kappa} g_{\nu\beta} (\delta g^{\kappa\beta}) - (R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \left(\frac{1}{2} g^{\lambda\tau} g_{\lambda\tau|\nu} g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\rho}_{|\nu} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu}_{|\nu} \right) g_{\mu\kappa} g_{\nu\beta} (\delta g^{\kappa\beta}) \\ &\quad - (R_{|\alpha|\nu} + R_{|\nu}\sigma_{\alpha} + R\sigma_{\alpha|\nu}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} g_{\mu\kappa} g_{\nu\beta} (\delta g^{\kappa\beta}) + (R_{|\alpha|\rho} + R_{|\rho}\sigma_{\alpha} + R\sigma_{\alpha|\rho}) \\ &\quad \times g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} g_{\mu\kappa} g_{\nu\beta} (\delta g^{\kappa\beta}) \left. \right] + 2\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \left[(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + g^{\alpha\rho} g_{\mu\nu|\rho} - g^{\alpha\rho} g_{\mu\rho|\nu} \right) \right. \\ &\quad \left. - (R_{|\mu} + R\sigma_{\mu}) \left(\Gamma_{\nu\lambda}^{\lambda} + g^{\lambda\rho} g_{\lambda\nu|\rho} - g^{\lambda\rho} g_{\lambda\rho|\nu} + 3\sigma_{\nu} \right) \right], \end{aligned}$$

onde $Y^{\rho} = 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ e $Z^{\lambda} = 2\sqrt{-g}(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\mu\lambda} \delta g_{\mu\rho}$. No cálculo anterior foi utilizado a identidade $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\kappa} g_{\nu\beta} (\delta g^{\kappa\beta})$ e posteriormente será necessária outra relação útil, a saber, $g^{\alpha\rho}_{|\nu} = -g^{\alpha\lambda} g^{\rho\tau} g_{\lambda\tau|\nu}$. Assim, fazendo $X_{|\alpha}^{\alpha} + Y_{|\alpha}^{\alpha} + Z_{|\alpha}^{\alpha} = U_{|\alpha}^{\alpha}$ e colocando os termos $R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}$ e $R_{|\mu} + R\sigma_{\mu}$ em evidência deduz-se que $2\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ é:

$$\begin{aligned} &= U_{|\alpha}^{\alpha} + 2\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \left[(R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\rho} g^{\lambda\tau} g_{\lambda\tau|\rho} + g_{\mu\nu} g^{\alpha\lambda} g^{\rho\tau} g_{\lambda\tau|\sigma} - g^{\alpha\rho} g_{\mu\nu|\rho} \right. \right. \\ &\quad + g^{\alpha\rho} g_{\mu\rho|\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + g^{\alpha\rho} g_{\mu\nu|\rho} - g^{\alpha\rho} g_{\mu\rho|\nu} \left. \right) - (R_{|\mu} + R\sigma_{\mu}) \left(\Gamma_{\nu\lambda}^{\lambda} + g^{\lambda\rho} g_{\lambda\nu|\rho} - g^{\lambda\rho} g_{\lambda\rho|\nu} \right. \\ &\quad \left. + 3\sigma_{\nu} + \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} g_{\lambda\tau|\nu} - g^{\kappa\sigma} g_{\kappa\nu|\sigma} \right) + g_{\mu\nu} R_{|\alpha} \sigma^{\alpha} - R_{\mu} \sigma_{\nu} + g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (R_{|\alpha|\beta} + R\sigma_{\alpha|\beta}) \end{aligned}$$

$$- (R_{|\mu||\nu} + R\sigma_{\mu|\nu}) \Big].$$

Sabendo que $R_{|\mu||\nu} = R_{|\mu||\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} R_{|\alpha}$, $\sigma_{\mu|\nu} = \sigma_{\mu|\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \sigma_{\alpha}$ e $\Gamma_{\nu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g_{\lambda\rho|\nu} - 2\sigma_{\nu}$ mostra-se que $2\sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ é:

$$\begin{aligned} &= U_{|\alpha}^{\alpha} + 2\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \Big[-R_{|\mu||\nu} - R\sigma_{\mu|\nu} + g_{\mu\nu} R_{|\alpha} \sigma^{\alpha} - R_{|\mu} \sigma_{\nu} + g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (R_{|\alpha||\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} R_{|\rho} \\ &+ R\sigma_{\alpha||\beta} + R\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} \sigma_{\rho}) + (R_{\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \Big(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\rho} g^{\lambda\tau} g_{\lambda\tau|\rho} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\lambda} g^{\rho\beta} g_{\lambda\beta|\rho} \Big) \\ &- \sigma_{\nu} (R_{\mu} + R\sigma_{\mu}) \Big] \\ &= U_{|\alpha}^{\alpha} + 2\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \Big[-R_{|\mu||\nu} - R\sigma_{\mu|\nu} + g_{\mu\nu} R_{|\alpha} \sigma^{\alpha} - R_{|\mu} \sigma_{\nu} - R_{|\mu} \sigma_{\nu} - R\sigma_{\mu} \sigma_{\nu} \\ &+ (R_{|\rho} + R\sigma_{\rho}) \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + (R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \Big(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\rho} g^{\lambda\tau} g_{\lambda\tau|\rho} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\lambda} g^{\rho\beta} g_{\lambda\beta|\rho} \Big) \\ &+ g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{|\alpha||\beta} + R g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha||\beta} \Big] \\ &= U_{|\alpha}^{\alpha} + 2\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \Big\{ -(R_{|\mu||\nu} + R\sigma_{\mu|\nu} + R\sigma_{\mu} \sigma_{\nu} + 2R_{\mu} \sigma_{\nu}) + g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{|\alpha||\beta} \\ &+ (R_{|\lambda} + R\sigma_{\lambda}) g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Big[\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\alpha\rho|\beta} + g_{\beta\rho|\alpha} - g_{\alpha\beta|\rho}) - \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^{\lambda} \sigma_{\beta} + \delta_{\beta}^{\lambda} \sigma_{\alpha} - g_{\alpha\beta} \sigma^{\lambda}) \Big] \\ &+ (R_{|\alpha} + R\sigma_{\alpha}) \Big(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\rho} g^{\lambda\tau} g_{\lambda\tau|\rho} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\lambda} g^{\rho\beta} g_{\lambda\beta|\rho} \Big) + R g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha||\beta} + g_{\mu\nu} R_{|\alpha} \sigma^{\alpha} \Big\} \\ &= U_{|\alpha}^{\alpha} + 2\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \Big[-(R_{|\mu||\nu} + R\sigma_{\mu|\nu} + R\sigma_{\mu} \sigma_{\nu} + 2R_{\mu} \sigma_{\nu}) + g_{\mu\nu} R_{|\alpha} \sigma^{\alpha} + g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{|\alpha||\beta} \\ &+ R g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha||\beta} + (R_{|\kappa} + R\sigma_{\kappa}) \Big(g_{\mu\nu} g^{\kappa\rho} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\rho|\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\rho} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta|\rho} + g_{\mu\nu} \sigma^{\kappa} \\ &+ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\rho} g^{\lambda\tau} g_{\lambda\tau|\rho} - g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} g^{\rho\beta} g_{\lambda\beta|\rho} \Big) \Big]. \end{aligned}$$

Portanto, cancelando alguns termos e pondo $g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}$ em evidência encontra-se o resultado final para $2\sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= U_{|\alpha}^{\alpha} + 2\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \Big[g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (R_{|\alpha||\beta} + R\sigma_{\alpha||\beta} + R\sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} + 2R_{|\alpha} \sigma_{\beta}) \\ &- (R_{|\mu||\nu} + R\sigma_{\mu|\nu} + R\sigma_{\mu} \sigma_{\nu} + 2R_{|\mu} \sigma_{\nu}) \Big]. \end{aligned} \quad (B.7)$$

Fazendo $D_{\alpha\beta} = R_{|\alpha||\beta} + R\sigma_{\alpha||\beta} + R\sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} + 2R_{|\alpha} \sigma_{\beta}$, pode-se reescrever a equação anterior de uma forma mais compacta, a saber,

$$2\sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = U_{|\alpha}^{\alpha} + 2\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \Big(g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} - D_{(\mu\nu)} \Big). \quad (B.8)$$

onde $D_{(\mu\nu)}$ é a parte simétrica de $D_{\mu\nu}$, dada por:

$$D_{(\mu\nu)} = R_{|\mu||\nu} + \frac{1}{2} R (\sigma_{\mu|\nu} + \sigma_{\nu|\mu}) + R\sigma_{\mu} \sigma_{\nu} + R_{|\mu} \sigma_{\nu} + R_{|\nu} \sigma_{\mu}, \quad (B.9)$$

pois, $D_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (D_{\mu\nu} + D_{\nu\mu})$ e $R_{|\mu||\nu}$ é totalmente simétrico, devido ao fato de tanto a derivada

parcial como a conexão serem simétricas. Por fim, substituindo (B.8) em (B.2), tem-se:

$$\delta \mathcal{W} = U_{|\alpha}^{\alpha} + 2\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \left[R \left(R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) - AT_{\mu\nu} - D_{(\mu\nu)} + g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta} \right]. \quad (\text{B.10})$$

O uso do princípio variacional requer $\delta I = 0$ e como $\int U_{|\alpha}^{\alpha} d^4x = 0$, chega-se a seguinte equação:

$$\int \left[R \left(R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) - AT_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta} - D_{(\mu\nu)} \right] \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) d^4x = 0. \quad (\text{B.11})$$

Tanto $\sqrt{-g}$ como $\delta g^{\mu\nu}$ são grandezas arbitrárias cujo último termo se anula somente nos limites de integração, logo, pode-se concluir que:

$$AT_{\mu\nu} = R \left(R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) + g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta} - D_{(\mu\nu)}. \quad (\text{B.12})$$

Assim, (B.12) contém as equações de campo gravitacionais obtidas a partir da variação da métrica $g_{\mu\nu}$ na ação de Weyl. Isso completa o conjunto das equações de campo da teoria, pois (3.52) já foi encontrada quando considerou-se a variação no campo de Weyl σ_{μ} . Pode-se perceber da Eq. (B.12) que ela não corresponde àquela da relatividade geral, mesmo no caso em que não existe campo eletromagnético, isto é, $\sigma_{\mu} = 0$ [23]. Entretanto, com a ajuda da Eq. (3.52) é possível simplificar a Eq. (B.12), pois, por definição $\mathcal{J}^{\mu} = (\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}$, isso implica que $\mathcal{J}_{|\mu}^{\mu} = (\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu|\mu} = 0$, visto que as derivadas parciais são simétricas (comutam) enquanto o tensor $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico. Logo, como já foi mencionado anteriormente, no início da seção, quando falou-se sobre a derivada covariante de densidade tensorial, $\mathcal{J}_{|\mu}^{\mu} = \mathcal{J}_{||\mu}^{\mu}$. Com isso tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{||\mu}^{\mu} &= \frac{3}{2A} [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(R\sigma_{\nu} + R_{|\nu})]_{||\mu} = 0 \Rightarrow (\sqrt{-g})_{||\mu}g^{\mu\nu}(R\sigma_{\nu} + R_{|\nu}) \\ &+ \sqrt{-g}g^{\mu\nu}_{||\mu}(R\sigma_{\nu} + R_{|\nu}) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(R_{||\mu}\sigma_{\nu} + R\sigma_{\nu||\mu} + R_{|\nu||\mu}) = 0 \\ R_{|\nu}\sigma^{\nu} + R\sigma_{\nu}\sigma^{\nu} + R_{|\mu}\sigma^{\mu} + g^{\mu\nu}R_{|\mu||\nu} + Rg^{\mu\nu}\sigma_{\mu||\nu} &= 0. : \\ g^{\mu\nu}(R_{|\mu||\nu} + R\sigma_{\mu||\nu} + R\sigma_{\mu}\sigma_{\nu} + 2R_{|\mu}\sigma_{\nu}) &= 0, \end{aligned}$$

ou de maneira mais resumida:

$$g^{\mu\nu}D_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}D_{(\mu\nu)} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Agora, substituindo (B.13) em (B.12) encontra-se uma expressão mais simples para as equações de campo gravitacionais da teoria de Weyl, a saber,

$$R \left(R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) - D_{(\mu\nu)} = AT_{\mu\nu}, \quad (\text{B.14})$$

onde A é uma constante e todos os outros termos são definidos na geometria de weyl. Considerando o valor completo de $D_{(\mu\nu)}$ a equação anterior fica:

$$R\left(R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R\right) - \left[R_{|\mu||\nu} + \frac{1}{2}R(\sigma_{\mu||\nu} + \sigma_{\nu||\mu}) + R\sigma_{\mu}\sigma_{\nu} + R_{|\mu}\sigma_{\nu} + R_{|\nu}\sigma_{\mu}\right] = AT_{\mu\nu}. \quad (\text{B.15})$$

Essas são as equações de campo gravitacionais da nova teoria. É claro que tal equação deve ser ainda confrontada com a realidade.

Apêndice C

AS CONDIÇÕES DE HELMHOLTZ E A GEOMETRIA DE WEYL INTEGRÁVEL

Neste apêndice será verificado que as condições de Helmholtz para o espaço tempo de Weyl integrável são completamente satisfeitas, desde que os índices das equações das auto-paralelas sejam baixadas com a métrica efetiva $e^{-\phi}g_{\mu\nu}$, para tanto é ilustrativo baixar os índices somente com a métrica $g_{\mu\nu}$. Dessa forma tem-se:

$$G_\mu = g_{\mu\alpha}\dot{x}^\alpha + g_{\mu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma. \quad (\text{C.1})$$

Assim, a primeira condição de Helmholtz fica prontamente satisfeita, isto é:

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu} = g_{\mu\alpha}\delta_\nu^\alpha = g_{\mu\nu} = \frac{\partial G_\nu}{\partial \ddot{x}^\mu}, \quad (\text{C.2})$$

porém, já na segunda condição acontece algo indesejável,

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2(g_{\mu\nu|\lambda} - g_{\mu\nu}\phi_{|\lambda})\dot{x}^\lambda, \quad (\text{C.3})$$

$$2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu}\right) = 2g_{\mu\nu|\lambda}\dot{x}^\lambda. \quad (\text{C.4})$$

A segunda condição não é satisfeita o que significaria que as autoparalelas não são obtidas a partir de uma ação, porém como pode ser observado em [19], tais equações podem ser obtidas da ação $s = \int \sqrt{e^{-\phi}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}dt$, onde t é um parâmetro afim. Esse aparente desacordo mostra que o processo de baixar índice não pode ser feito puramente com a métrica, pois, esta não é invariante de calibre. Esta condição pode ser satisfeita no calibre especial em que $\phi_{|\mu} = 0$, ou seja, no calibre em que $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-\phi}g_{\mu\nu}$. Assim, como já discutido em capítulos precedentes é desejável que G_μ seja invariante sobre transformações de Weyl, para não acontecer como

anteriormente, onde as condições de Helmholtz sejam válidas somente em um calibre particular. Por isso, é fundamental escrever G_μ como segue:

$$G_\mu = e^{-\phi} g_{\mu\alpha} \left(\dot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \right). \quad (\text{C.5})$$

Essa equação é invariante de calibre e é equivalente a identidade (4.7), pois, no caso investigado nesse apêndice, $e^{-\int \sigma_\alpha dx^\alpha} = e^{-\int \phi_{|\alpha} dx^\alpha} = e^{-\phi}$. Assim, as duas primeiras condições de Helmholtz que foram abordadas no capítulo 4 podem ser encaradas simplesmente substituindo $-\int \sigma_\alpha dx^\alpha$ por $-\phi$ e σ_μ por $\phi_{|\mu}$, e como esperado nota-se que a primeira e a segunda condição de Helmholtz ficam satisfeitas, pois,

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu}; \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} \right) = 2e^{-\phi} \dot{x}^\rho (g_{\mu\nu|\rho} - g_{\mu\rho|\nu}). \quad (\text{C.7})$$

Como a terceira condição de Helmholtz não foi analisada no capítulo 4, ela deve ser explorada neste apêndice partindo da equação (C.5). Por sorte, da equação (4.9) tem-se:

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = e^{-\phi} \dot{x}^\rho [(g_{\mu\nu|\rho} + g_{\mu\rho|\nu} - g_{\rho\nu|\mu}) - (g_{\mu\nu}\phi_{|\rho} + g_{\mu\rho}\phi_{|\nu} - g_{\rho\nu}\phi_{|\mu})], \quad (\text{C.8})$$

desta última relação mostra-se que

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2e^{-\phi} \dot{x}^\rho (g_{\mu\rho|\nu} - g_{\rho\nu|\mu} - g_{\mu\rho}\phi_{|\nu} + g_{\rho\nu}\phi_{|\mu}). \quad (\text{C.9})$$

Assim, o lado direito da terceira condição de Helmholtz pode ser obtido como segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} \right) &= \frac{d}{dt} \left\{ e^{-\phi} \dot{x}^\rho [(g_{\mu\rho|\nu} - g_{\rho\nu|\mu}) - (g_{\mu\rho}\phi_{|\nu} - g_{\rho\nu}\phi_{|\mu})] \right\} \\ &= \dot{x}^\rho e^{-\phi} [(g_{\mu\rho|\nu} - g_{\rho\nu|\mu}) - (g_{\mu\rho}\phi_{|\nu} - g_{\rho\nu}\phi_{|\mu})] \\ &\quad + \dot{x}^\rho \dot{x}^\gamma \partial_\gamma \left\{ e^{-\phi} [(g_{\mu\rho|\nu} - g_{\rho\nu|\mu}) - (g_{\mu\rho}\phi_{|\nu} - g_{\rho\nu}\phi_{|\mu})] \right\}. \end{aligned}$$

Depois de aplicar algumas vezes a derivada do produto chega-se a uma relação para o lado direito que poderá ser comparada com a identidade futura para o lado esquerdo da última condição, a saber,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} \right) &= e^{-\phi} (\ddot{x}^\rho - \dot{x}^\rho \dot{x}^\gamma \phi_{|\gamma}) [(g_{\mu\rho|\nu} - g_{\rho\nu|\mu}) - (g_{\mu\rho}\phi_{|\nu} - g_{\rho\nu}\phi_{|\mu})] \\ &\quad + e^{-\phi} \dot{x}^\rho \dot{x}^\gamma [(g_{\mu\rho|\nu|\gamma} - g_{\rho\nu|\mu|\gamma}) - (g_{\mu\rho|\gamma}\phi_{|\nu} - g_{\rho\nu|\gamma}\phi_{|\mu}) \\ &\quad - (g_{\mu\rho}\phi_{|\nu|\gamma} - g_{\rho\nu}\phi_{|\mu|\gamma})]. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Para encontrar o lado esquerdo da terceira relação é necessário calcular a derivada

de G_μ em relação a posição, assim, de modo fácil, porém demorado mostra-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} = & \ddot{x}^\alpha e^{-\phi} (g_{\mu\alpha|\nu} - g_{\mu\alpha}\phi_{|\nu}) - \frac{1}{2}e^{-\phi} g_{\mu\alpha|\nu} \left(\delta_\rho^\alpha \phi_{|\gamma} + \delta_\gamma^\alpha \phi_{|\rho} - g_{\rho\alpha}\phi^{|\alpha} \right) \dot{x}^\rho \dot{x}^\gamma \\ & - \frac{1}{2}e^{-\phi} \phi_{|\nu} \left[(g_{\rho\mu|\gamma} + g_{\gamma\mu|\rho} - g_{\rho\gamma|\mu}) - (g_{\mu\rho}\phi_{|\gamma} + g_{\gamma\mu}\phi_{|\rho} - g_{\rho\gamma}\phi_{|\mu}) \right] \dot{x}^\rho \dot{x}^\gamma \\ & + \frac{1}{2}e^{-\phi} \left[(g_{\rho\mu|\gamma|\nu} + g_{\gamma\mu|\rho|\nu} - g_{\rho\gamma|\mu\nu}) - (g_{\mu\rho}\phi_{|\gamma|\nu} + g_{\mu\gamma}\phi_{|\rho|\nu} - g_{\rho\gamma|\nu}\phi_{|\mu} - g_{\rho\gamma}\phi_{|\mu|\nu} \right. \\ & \left. + g_{\rho\gamma}g^{\alpha\tau}g_{\mu\alpha|\nu}\phi_{|\tau}) \right] \dot{x}^\rho \dot{x}^\gamma. \end{aligned}$$

O termo $\frac{\partial G_\nu}{\partial x^\mu}$ é obtido fazendo as seguintes substituições, $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$. Assim, o lado esquerdo da última condição de Helmholtz, depois de uma série de cancelamentos, fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial x^\mu} = & e^{-\phi} (\ddot{x}^\rho - \dot{x}^\rho \dot{x}^\gamma \phi_{|\gamma}) \left[(g_{\mu\rho|\nu} - g_{\rho\nu|\mu}) - (g_{\mu\rho}\phi_{|\nu} - g_{\rho\nu}\phi_{|\mu}) \right] \\ & + e^{-\phi} \dot{x}^\rho \dot{x}^\gamma \left[(g_{\mu\rho|\nu|\gamma} - g_{\rho\nu|\mu|\gamma}) - (g_{\mu\rho|\gamma}\phi_{|\nu} - g_{\rho\nu|\gamma}\phi_{|\mu}) \right. \\ & \left. - (g_{\mu\rho}\phi_{|\nu|\gamma} - g_{\rho\nu}\phi_{|\mu|\gamma}) \right]. \end{aligned} \quad (C.11)$$

Comparando (C.10) com (C.11) chega-se a conclusão de que

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} \right), \quad (C.12)$$

isto é, a terceira condição também é satisfeita. Portanto, verificadas as três relações, conclui-se que as autoparalelas do espaço-tempo de Weyl integrável podem advir de um princípio variacional, diferentemente do que acontece na geometria de Weyl não-integrável. Em [17] é mostrado que para o espaço riemanniano as condições de Helmholtz também são satisfeitas, enquanto que para a geometria de Riemann-Cartan as condições não são verificadas.

REFERÊNCIAS

- [1] FILHO, J. B. B. *Reduccionismo: uma abordagem epistemológica*. Maceió: EDUFAL, 2005. ISBN 85-7177-241-X.
- [2] NYAMBUYA, G. G. A perdurable defence to Weyl's unified theory. *Journal of Modern Physics*, v. 5, n. 14, p. 1244–1253, August 2014. Disponível em: <<http://www.scirp.org/journal/jmp> <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.514124>>.
- [3] VIZGIN, V. P. *Unified Field Theories: in the first third of the 20th century*. Switzerland: Birkhäuser Verlag, 1994.
- [4] LORD, E. L. *Tensors: relativity and cosmology*. New York: Mc.Graw-Hill, 1976.
- [5] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology*. New York: John Wiley and Sons, 1972.
- [6] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The classical theory of fields*. Oxford: Pergamon, 1971.
- [7] RYDER, L. *Introduction to General Relativity*. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [8] ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. *Introduction to general relativity*. New York: Mc.Graw-Hill, 1965.
- [9] CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: an introduction to general relativity*. San Francisco: Addilson Wesley, 2004.
- [10] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's relativity*. New York: Clarendon Press, 1992.
- [11] ROMERO, C.; FONSECA-NETO, J. B.; PUCHEU, M. L. General relativity and Weyl frames. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, v. 3, p. 27–35, June 2011. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com>>.
- [12] ROMERO, C.; FONSECA-NETO, J. B.; PUCHEU, M. L. General relativity and Weyl geometry. *Classical and Quantum Gravity*, v. 29, n. 15, p. 155015, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/29/i=15/a=155015>>.
- [13] LIMA, R. G. *Estudo Comparativo dos Aspectos Dinâmicos de Sistemas Físicos Entre a Teoria da Relatividade e a Mecânica Newtoniana Através da Análise de Gráficos*. 72 f. Graduação em Física — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, Santa Inês, 2014.
- [14] MARTINS, R. A. *Teoria da relatividade restrita*. São Paulo: Livraria da física, 2012.

- [15] ALMEIDA, T. et al. From Brans-Dicke gravity to a geometrical scalar tensor theory. *Physical Review D*, v. 89, March 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.064047>>.
- [16] DAHIA, F.; GOMEZ, G.; ROMERO, C. On the embedding of space-time in five-dimensional weyl spaces. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 49, n. 10, p. 102501, 2008.
- [17] MAULBETSCH, C.; SHABANOV, S. V. The inverse variational problem for autoparallels. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 32, n. 28, February 1999. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/32/28/313>>.
- [18] STRAUB, W. O. Bianchi identities in Weyl space. Julho 2015. Disponível em: <<http://www.weylmann.com>>.
- [19] FERREIRA, A. L. M. *Teoria da Gravitação em Espaços-Tempos de Weyl e os Testes do Sistema Solar*. 109 f. Dissertação de Mestrado — UFPB, João Pessoa, 2011.
- [20] BERGMANN, P. G. *Introduction to the Theory of Relativity*. [S.l.]: Dover Publications, 1976.
- [21] ÇIVI, G. et al. On the bianchi identities in a generalized Weyl space. In: INSTITUTE OF BIOPHYSICS AND BIOMEDICAL ENGINEERING, BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES. *Proceedings of the Second International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*. [S.l.], 2001. p. 151–155.
- [22] SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [23] PAULI, W. *Theory of relativity*. New York: Dover Publications, 1981.
- [24] WEYL, H. *Space-time-matter*. New York: Dover publications, 1952.
- [25] OLIVEIRA, C. G. *Introdução à Formulação de Algumas Teorias do Campo Unitário em II Escola de Cosmologia e Gravitação*. Rio de Janeiro: CBPF-UFPB, 1980.
- [26] EDDINGTON, A. S. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1930.
- [27] LORENTZ, A. et al. *The principle of relativity*. New York: Dover publications, 1952.
- [28] GONZÁLEZ, W. S. Ecuaciones de campo gravitatorio en la teoría unificada de Weyl. Mayo 2014. Disponível em: <<https://www.academia.edu/7076739/Gravitational-field-equations-in-the-unified-theory-of-Weyl>>.
- [29] STRAUB, W. O. Weyl's 1918 theory revisited. Junho 2015. Disponível em: <<http://www.weylmann.com>>.
- [30] LOPUSZANSKI, J. *The Inverse Variational Problem in Classical Mechanics*. Poland: University of Wrocaw, 1999.
- [31] HENRIQUES, P. G. Inverse problem of variational calculus. *The São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, v. 5, n. 2, p. 233–248, 2011.

- [32] HELMHOLTZ, H. von. Ueber die physikalische bedeutung des prinicips der kleinsten wirkung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 100, p. 137–166, 1887.
- [33] HIRSCH, A. Die existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen potentials. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 50, n. 2, p. 429–441, 1898.
- [34] BOEHM, K. Die existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten differenti-alquotienten der coordinaten abhängigen kinetischen potentials. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 121, p. 124–140, 1900.
- [35] PENROSE, R. *The Road to Reality: a complete guide to the laws of the universe*. London: Jonathan Cape, 2004.
- [36] O’RAIFEARTAIGH, L.; STRAUMANN, N. Gauge theory: Historical origins and some modern developments. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 72, p. 1–23, Jan 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.72.1>>.
- [37] PAIS, A. *Subtle is the Lord: The science and the life of Albert Einstein*. [S.l.]: Oxford University Press, 1982.
- [38] GOENNER, H. F. On the history of unified field theories. *Living Reviews in Relativity*, v. 7, n. 2, p. 1830–1923, 2004.
- [39] SCHOLZ, E. Weyl geometry in late 20th century physics. *arXiv preprint arXiv:1111.3220*, 2011.
- [40] AFRIAT, A. How Weyl stumbled across electricity while pursuing mathematical justice. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, Elsevier, v. 40, p. 2025, 2009. Disponível em: <<http://www.elsevier.com/locate/shpsb>>.
- [41] ROMERO, C. Is Weyl unified theory wrong or incomplete? *arXiv preprint arXiv:1508.03766*, 2015.