

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**SOLUÇÃO TIPO MONOPOLO: COM
VIOLAÇÃO E SEM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA
DE LORENTZ**

ADRIANO ROCHA SOARES

ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ ROBERTO SOARES DO NASCIMENTO

João Pessoa – PB

Fevereiro/2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**SOLUÇÃO TIPO MONOPOLO: COM
VIOLAÇÃO E SEM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA
DE LORENTZ**

ADRIANO ROCHA SOARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física, área de concentração: Física das partículas elementares e campos

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento

João Pessoa – PB

Fevereiro/2016

S676s Soares, Adriano Rocha.

Solução tipo monopolo: com violação e sem violação da simetria de Lorentz / Adriano Rocha Soares.- João Pessoa, 2016.

71f. : il.

Orientador: José Roberto Soares do Nascimento

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Física. 2. Defeitos topológicos. 3. Monopolo. 4. Violação da simetria de Lorentz.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno **Adriano
Rocha Soares**, candidato ao Título de Mestre
em Física na Área de Concentração Física das
Partículas Elementares e Campos.

1 Aos dezessete dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e seis, às 10h00, na sala de
2 reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física das
5 Partículas Elementares e Campos, **Adriano Rocha Soares**. A comissão examinadora
6 composta pelos professores doutores: José Roberto Soares Nascimento (DF/UFPB),
7 orientador e presidente da banca examinadora, Cláudio Furtado (DF/UFPB) e Marcos
8 Antônio Anacleto (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. José Roberto Soares
9 Nascimento comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra
10 o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de
11 dissertação intitulado “*Solução tipo monopolo com violação e sem violação da simetria*
12 *de Lorentz*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora
13 que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal
14 da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para
15 constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, lavrei a presente ata
16 que vai assinada por mim mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João
17 Pessoa, **17 de fevereiro de 2016**.

18

Prof. Dr. José Roberto Soares Nascimento

Orientador - UFPB

Prof. Dr. Cláudio Furtado

UFPB

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto

UFCG

Danilo Wilson Lemos Menezes

Secretário

Jose Roberto Soares Nascimento

Cláudio Furtado

Marcos Antônio Anacleto

Danilo Wilson Lemos Menezes

*EM TEMPO; ONDE SE LÊ, NA LINHA "1", "SEIS",
LEIA "DEZESSEIS".*

22/02/2016

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário PPGF/CCEN/UFPB
Mat. SIAP 1647774



À minha avó, Jovelina Soares, e minha mãe, Maria Nerci R. soares.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, autor e consumidor da minha fé. Agradeço também à minha família, principalmente aos meus irmãos Dirceu R. Soares e Diego R. Soares, pelo apoio incondicional.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento, pela compreensão, paciência e orientação. Aos competentes professores do departamento de física da UFPB, sempre dispostos a contribuir.

À minha namorada, Hidayane G. da Silva e sua família, sempre atenciosos. Aos meus amigos: Ruydeiglan G. Lima, Danilo C. Moreira, Ricardo L. Lima Vitoria, Ricardo Andres M. Von Dossow e Anderson A. Meireles, pelas discussões esclarecedoras e amizade.

E por último, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro; e a Universidade Federal da Paraíba, pela aceitação e qualidade no ensino.

"Eu amo a noite solitária e muda, quando no vasto céu fitando os olhos, além do escuro, que lhe tinge a face, alcanço deslumbrado milhões de sóis a divagar no espaço, como em salas de esplêndido banquete mil tochas aromáticas ardendo entre nuvens d'incenso!..."

Gonçalves Dias

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se uma abordagem bibliográfica sobre defeitos topológicos com destaque para os monopolos com ausência de campos de gauge. Inicia-se introduzindo uma recapitulação gradual sobre os principais tipos de defeitos e, como suas abordagens variam à medida que a lagrangiana assume maiores grupos de simetria. Em seguida, mantém-se atenção apenas em modelos que suportam soluções tipo monopolo. Primeiramente, estuda-se o monopolo global $SO(3)$, apresentando por meio de uma abordagem analítica suas principais características, tais como espaço assintótico com déficit angular e interação gravitacional nula. Posteriormente, mostra-se que soluções tipo monopolo podem surgir, também, em teorias de campo com violação da simetria de Lorentz.

Palavras-chave: Defeitos topológicos, Monopolo, Violação da Simetria de Lorentz

ABSTRACT

In this work, it present a bibliographical approach about topological defects especially the monopoles with absence of gauge fields. It begins by introducing a gradual recap on the major types of defects, and how their approaches change as the Lagrangian assumes greater symmetry groups. Next, remains attention only to models that support monopoles. Firstly, it's studied the global monopole $SO(3)$, presenting through an analytical approach, its main features such as asymptotic space with angular deficit and null gravitational interaction. Posteriorly, it's shown that monopole solutions can arise also in field theory with Lorentz symmetry violation.

Keywords: Topological defects, monopole, Lorentz symmetry violation

LISTA DE FIGURAS

2.1	Mapeamento (2.1)	14
2.2	Mapeamento (2.2)	14
2.3	Mapeamento (2.3)	15
2.4	Gráfico do potencial $V(\phi)$	16
2.5	Potencial da Partícula	17
2.6	kink (vermelho) e antikink (Azul)	19
2.7	Densidade de energia	19
2.8	Potencial $V(\phi)$	23
2.9	A região cinza delimita a área do fluxo $\Phi(r, \theta)$	29
3.1	$f(\vec{r})$ no espaço plano.	39

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	10
CAPÍTULO 2 – DEFEITOS TOPOLÓGICOS	13
2.1 Algumas Considerações sobre Homotopia	14
2.2 Kinks	15
2.3 Vórtices Abelianos	20
2.3.1 Vórtices no modelo abeliano de Higgs	22
2.4 Monopolos	27
2.4.1 O Monopolo de Dirac	28
2.4.2 Monopolo de 't Hooft - Polyakov	30
CAPÍTULO 3 – MONOPOLO GLOBAL	35
3.1 Lagrangiana do Monopolo Global: Topologia e Equações de Campo	35
3.2 Ansatz para Solução da Equação de Campo	37
3.3 Análise Assintótica do Espaço-tempo do Monopolo Global	43
3.4 Considerações Sobre a evolução de Monopolos Globais	44
CAPÍTULO 4 – SOLUÇÃO TIPO MONOPOLO EM TEORIA DE CAMPO COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ	46
4.1 Acoplamento do Tensor Energia-Momento com a Métrica	50
4.2 Efeitos sobre a Propagação da Luz	52

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÃO	56
APÊNDICE A – TENSOR ENERGIA-MOMENTO DO MONOPOLO GLOBAL	59
APÊNDICE B – SOBRE O MONOPOLO COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ	63
B.1 Tensor Energia-Momento	63
B.2 Equação de campo do espaço curvo	66
REFERÊNCIAS	69

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Em geral, um determinado sistema físico pode apresentar-se em diversas fases, que na ótica da matéria condensada, tem propriedades macroscópicas bem definidas. Por exemplo, os supercondutores apresentam resistência elétrica nula e sólidos cristalinos têm estruturas atômicas regulares. Contudo, dependendo das condições físicas, tais como temperatura e pressão, o sistema pode transicionar entre uma fase e outra; que podem apresentar maior ou menor simetria. A transição de fase pode ser descrita por um mecanismo que os físicos chamam de quebra espontânea de simetria (Q.E.S) e, é fundamental para compreender tais processos.

O conceito de simetria está relacionado com a propriedade que alguns sistemas têm de manterem-se invariantes mediante algum tipo de transformação. Do ponto de vista das teorias de campo, elas podem ser distinguidas em dois tipos: global, quando a transformação é a mesma ao longo do espaço-tempo, e local, quando a transformação pode variar de um ponto a outro ao longo do espaço-tempo. Além disso, a simetria pode ser discreta ou contínua.

A formulação lagrangiana das teorias de campo são descritas por uma densidade lagrangiana, que apresenta simetria de alguma natureza. Obtendo-se a função densidade de hamiltoniano, pode-se em princípio, obter as configurações de campo que minimizam a energia do sistema, também chamada de variedade do vácuo. Como será explicitamente demonstrado ao longo deste trabalho, as configurações de mínima energia não preservam a simetria da densidade lagrangiana, no entanto, apresentam um nível de simetria menor¹. Desde que a variedade do vácuo seja degenerada, isto é, tenha vários estados fisicamente equivalentes de mínima energia, a transição do

¹O grupo de simetria da variedade do vácuo é um subgrupo do grupo de simetria da densidade lagrangiana, seção 2.1 de [1].

campo para o estado de vácuo ocorre espontaneamente, por isso, dá-se o nome quebra espontânea de simetria.

As soluções conectando os estados de mínima energia são denominadas defeitos topológicos. Como o próprio nome sugere, eles apresentam propriedades assintóticas que permitem classificá-los em setores topológicos e, isto é realizado utilizando-se um ramo da matemática chamado Homotopia², que é muito útil no estudo das soluções de campo.

Dentre os vários tipos de defeitos, neste trabalho serão abordados três: kinks, advindos da quebra de simetria discreta \mathbb{Z}_2 ; vórtice, advindo da quebra de simetria $U(1)$; e monopolo, advindo da quebra de simetria $SO(3)$. Os diferentes tipos de quebra de simetria dão origem a distintos tipos de defeitos com propriedades, em princípio, bem diferentes.

Os defeitos topológicos estão presentes em todos os ramos da física, das clássicas até as modernas teorias quânticas de campo. No entanto, o tema central desta dissertação são os monopolos, cuja simetria subjacente à lagrangiana é contínua e não apresentam campos de gauge. Eles não se assemelham a partículas, tais como monopolos magnéticos. Eles serão estudados em dois contextos: com violação e, sem violação da simetria de Lorentz.

Monopolos são teoricamente previstos como resultado das transições de fases sofridas pelo universo imediatamente após o Big Bang e sua existência é uma exigência das teorias de grande unificação [3, 4]. Devido serem isoladamente estáveis, acredita-se que eles possam ainda estar presentes no universo. Tais objetos, até o momento ainda não foram observados. Apesar de apresentarem grande densidade após a transição de fase, possíveis mecanismos reduziram significativamente o número deles.

No cenário sem violação da simetria de Lorentz, o estudo é feito com base no trabalho de Barriola e Vilenkin [5] entre outros. Nesse trabalho, os autores propõem um modelo com auto acoplamento de um tripleto de campos escalares, cujo grupo de simetria da lagrangiana é o $SO(3)$ e, o estado de vácuo quebra espontaneamente essa simetria em $U(1)$. Esse defeito, chama-se monopolo global, devido a simetria da lagrangiana ser global. Além disso, ela pertence a um grupo não abeliano. No caso seguinte, considera-se a quebra de uma fundamental simetria do espaço tempo, a simetria de Lorentz.

²Área da topologia que lida com deformações contínuas entre espaços topológico. Para uma introdução mais técnica [2].

Sabe-se que a teoria da relatividade de Einstein, especial e geral, são muito bem sucedidas e, baseadas no grupo de simetria de Lorentz. No entanto, motivados por encontrar uma teoria de campo unificada³, muitos cientistas têm considerado a possibilidade de violação da simetria de Lorentz [7, 8]. Neste trabalho, a violação é obtida por um campo tensorial antissimétrico de rank 2, cujo valor esperado no vácuo é diferente de zero. Sendo assim, o vácuo da teoria apresentará uma estrutura geométrica ao longo do espaço tempo, o que obviamente viola a simetria de Lorentz. A forma como esse tipo de quebra de simetria é implementada está demonstrada detalhadamente ao longo do capítulo 3.

Esta dissertação, constitui-se basicamente em um estudo bibliográfico sobre um tipo de defeito topológico denominado monopolo e está dividida em três capítulos, além da introdução e conclusão. No capítulo 2, faz-se um estudo sobre defeitos topológicos com ênfase em kinks, vórtices e monopolos. O capítulo 3 dedica-se exclusivamente ao estudo do monopolo global. A lagrangiana do modelo é escrita em termos de um tripleto de campos escalares. Analisa-se suas propriedades topológicas e apresenta-se uma solução assintótica para as equações de Einstein. No capítulo 4, mostra-se que defeitos tipo monopolo podem surgir em uma teoria com violação da simetria de Lorentz. Analisa-se as equações de Einstein assintoticamente, tomando-se o limite BPS, que fornece uma simplificação muito útil. E por último, tem-se a conclusão, com uma breve análise geral do trabalho e suas perspectivas.

O sistema de unidades naturais, onde $\hbar = c = 1$, é adotado ao longo de todo o trabalho. Todas as dimensões são expressas em termos de energia, cuja unidade básica adotada será o elétron-volt (eV):

$$[\text{Energia}] = [\text{Massa}] = [\text{Comprimento}]^{-1} = [\text{Tempo}]^{-1}$$

³Segundo [6], candidatos promissores são: teorias de cordas, D-branas e teorias de gravidade quântica.

Capítulo 2

DEFEITOS TOPOLÓGICOS

Defeitos topológicos são soluções de equações diferenciais não lineares que, em teoria de campo, ocorrem naturalmente em modelos dinâmicos com quebra espontânea de simetria. Em geral, a simetria da lagrangiana que descreve um dado modelo não é compartilhada pelo estado de vácuo da mesma, ou seja, o estado de mínima energia. Então, quando o sistema tende a esses mínimos, há uma quebra da simetria e, em função do tipo de simetria que é quebrada classifica-se os diferentes tipos de defeitos. Para esta finalidade, usa-se resultados da teoria da homotopia, um ramo da matemática que tem fornecido importantes ferramentas para a compreensão de diversas áreas da física, tais como física da matéria condensada, física de partículas, cosmologia e etc.

Defeitos topológicos desempenham um papel importantíssimo em física, em especial, nas áreas de matéria condensada e cosmologia. Neste último, por meio do mecanismo de Kibble [3], que descreve a formação de defeitos topológicos através de transições de fase no universo primordial.

Neste capítulo, faz-se um estudo sistemático, no âmbito clássico¹, sobre os tipos de defeitos topológicos mais abordados na literatura. Nas seções seguintes são apresentados dois conceitos imprescindíveis para compreensão do tema, são eles: uma breve introdução a teoria homotópica, sem ater-se a demonstrações dos resultados e a quebra espontânea de simetria, que será discutida conforme apresenta-se os tipos de defeitos.

A assinatura da métrica usada ao longo deste capítulo é dada por $(+, -, -, -)$.

¹No sentido de não quantização pelos métodos da mecânica quântica

2.1 Algumas Considerações sobre Homotopia

A teoria de homotopia é um ramo da matemática amplo e muito rico, entretanto, neste trabalho, faz-se uma abordagem introdutória, simples e intuitiva, mas suficiente para introduzir os resultados que serão usados posteriormente.

Define-se o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ como um conjunto de laços contidos no espaço X definidos a partir de um ponto $x_0 \in X$. Dados dois laços quaisquer pertencentes a X , eles correspondem ao mesmo elemento do grupo fundamental se, um puder ser continuamente deformado no outro, caso contrário, eles correspondem a dois elementos distintos do grupo [9]. Para ilustrar estes conceitos, considera-se o mapeamento de um círculo S'_1 (caracterizado por uma função de θ) em outro círculo S_1 (caracterizado pelo ângulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$), que pode ser pensado como o espaço X [10]. As equações (2.1) e (2.2) abaixo, representam dois mapeamentos (laços) sobre S_1 , que está esquematicamente representado pelo círculo preto nas figuras (2.1) e (2.2).

$$f_0(\theta) = 0 \quad \text{para todo } \theta \quad (2.1)$$

e

$$f'_0(\theta) = \begin{cases} t\theta, & \text{para } 0 \leq \theta < \pi \\ t(2\pi - \theta), & \text{para } \pi \leq \theta < 2\pi. \end{cases} \quad (2.2)$$

Onde o parâmetro real t pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, 1]$.

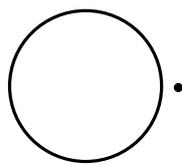


Figura 2.1: Mapeamento (2.1)

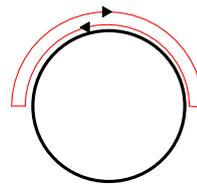


Figura 2.2: Mapeamento (2.2)

A expressão (2.1) ilustrada na figura (2.1), mostra que o mapeamento $f_0(\theta)$ reduz-se a um único ponto sobre S_1 . Já a expressão (2.2), ilustrada na figura (2.2), mostra que o mapeamento $f'_0(\theta)$ vai de 0 a π no sentido anti-horário e retorna a 0 no sentido horário.

Pode-se observar que conforme t tende continuamente a zero, o segundo mapeamento tende suavemente ao primeiro; do ponto de vista topológico ambos são equivalentes. De forma geral, sempre que um mapeamento puder ser suavemente deformado em outro, ambos mapeamentos pertencem a mesma classe topológica, isto é, correspondem ao mesmo elemento do grupo fundamental.

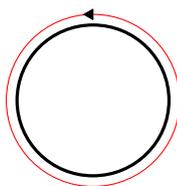


Figura 2.3: Mapeamento (2.3)

Seja um terceiro mapeamento sobre S_1 , dado por:

$$f_1(\theta) = \theta, \quad (2.3)$$

que está ilustrado na figura (2.3). Como pode-se observar, não há como deformar suavemente o mapeamento descrito por (2.3) em (2.1) ou (2.2), a razão é simples e intuitiva, o mapeamento (2.3) dá uma volta completa em torno de S_1 , enquanto os outros dois, não. A grosso modo, para que os mapeamentos fossem topologicamente equivalentes, seria necessário que o mapeamento (2.3) fosse interrompido em algum ponto, não permitindo-o completar uma volta sobre S_1 .

Matematicamente todos esses mapeamentos são escritos como $\pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$, onde \mathbb{Z} pertence ao conjunto dos números inteiros e, corresponde ao número de vezes que (S'_1) "enrola-se" em S_1 . Então fica claro que \mathbb{Z} identifica diferentes classes topológica do grupo. Por exemplo, o mapeamento (2.1) e (2.2) pertencem a $\pi_1(S_1) = 0$, enquanto que (2.3) pertence a $\pi_1(S_1) = 1$.

Estas noções de homotopia, estudadas em um círculo, podem ser generalizadas para grupos de ordem mais alta, tais como $\pi_2(S_2) = \mathbb{Z}$, que representa o mapeamento entre duas superfícies esféricas. Por último, um grupo no qual todos os seus elementos são equivalentes chama-se grupo trivial e é denotado por $\pi_1(S_1) = \mathbb{I}$.

2.2 Kinks

Dentre os tipos de defeitos topológicos, o mais simples é denominado kink, mas não menos importante, ele apresenta as características fundamentais presentes nos demais tipos de defeitos, porém, de forma mais simples, já que trata-se de uma teoria clássica de campos em (1+1) dimensões (uma dimensão espacial mais uma dimensão temporal) com um único campo escalar real [11]. O modelo mais simples que suporta soluções tipo kink é descrito pela densidade lagrangiana abaixo (doravante denominada sim-

plesmente por lagrangiana)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi). \quad (2.4)$$

Com o potencial

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\phi^2 m^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \frac{1}{4}v^4 = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2, \quad (2.5)$$

onde $v^2 = \frac{m^2}{\lambda}$, com m^2 e λ ambos positivos.

De (2.5) tem-se que os mínimos desse potencial são $\phi_0 = \pm v$, também chamados de variedade do vácuo (\mathcal{M}) desta teoria. A figura (2.4) mostra o gráfico desse potencial.

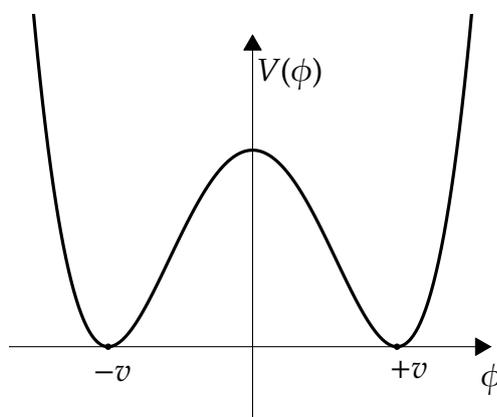


Figura 2.4: Gráfico do potencial $V(\phi)$

A dupla degenerescência nos valores de mínima energia é consequência da invariância da lagrangiana (2.4) sob o grupo de simetria discreta \mathbb{Z}_2 , ou seja, ela é invariante mediante a transformação global $\phi \rightarrow -\phi$. Entretanto, os estados de mínima energia não o são. Sendo assim, quando o sistema tende a um desses mínimos, que são fisicamente equivalentes, ocorre uma quebra espontânea da simetria discreta \mathbb{Z}_2 .

A equação de movimento² e a expressão para a energia³ são dadas respectivamente por:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda(\phi^2 - v^2)\phi \quad (2.6)$$

e

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right] dx. \quad (2.7)$$

²Obtida da equação de Euler-Lagrange: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu \phi} \right) = 0$.

³Obtida de $E = \int_{-\infty}^{\infty} T^0_0 dx$, onde T^0_0 é a densidade de energia do tensor energia-momento canônico $T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$.

Para um campo estacionário $\phi(x)$, as equações (2.6) e (2.7) reduzem-se a:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda(\phi^2 - v^2)\phi \quad (2.8)$$

e

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right] dx. \quad (2.9)$$

Soluções fisicamente aceitáveis da equação de movimento(2.8) devem ter energia finita. Assim, da equação (2.9) conclui-se que o campo $\phi(x)$ deve ser constante em $x \rightarrow \pm\infty$ e, a energia potencial deve ser nula. Dessa maneira, conclui-se que a solução deve tender aos valores $\phi(x) = \pm v$ (os mínimos do potencial) quando $x \rightarrow \pm\infty$.

Neste ponto, é preciso esclarecer que as soluções devem conectar os dois mínimos distintos do potencial. Fazendo-se a seguinte identificação: $x \rightarrow t$ e $\phi(x) \rightarrow x$, a equação (2.8) torna-se exatamente igual a equação de movimento newtoniana para uma partícula de massa unitária, submetida a um potencial $U = -V(\phi)$, com $V(\phi)$ dado por (2.5). A energia dessa partícula seria então dada por:

$$W = \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi). \quad (2.10)$$

Mas de acordo com a discussão anterior, em $x \rightarrow \pm\infty$ o campo tende aos mínimos do potencial, que são valores constantes, de modo que a energia total da partícula seria nula. Em seguida, a figura(2.5) mostra o gráfico do potencial supondo que ele tenha um mínimo em 2.5(a) e, dois em 2.5(b), que é o caso real. Esta suposição é útil para compreender porque a solução deve conectar os dois mínimos distinto do potencial $V(\phi)$.

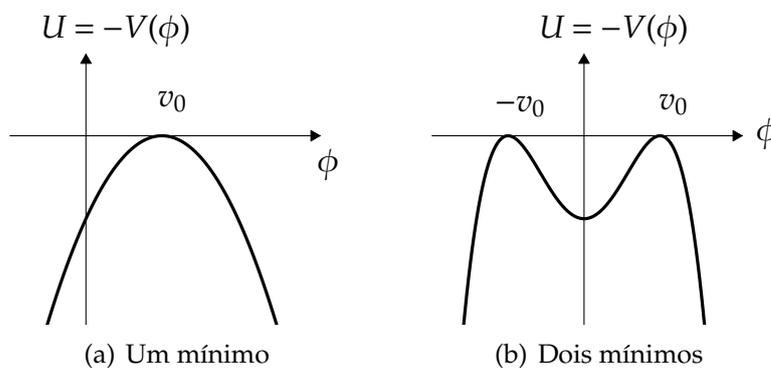


Figura 2.5: Potencial da Partícula

A partir da figura 2.5(a), observa-se que, uma vez que a partícula esteja fora da posição v_0 , ela não pode mais voltar ao estado de mínima energia, porque sua energia potencial sempre será negativa, de modo que sua energia cinética nunca será nula e, portanto, não poderá estabelecer repouso e retornar a v_0 . Agora, se há pelo menos dois mínimos como em 2.5(b), é possível que a partícula saia de $\phi = -v_0$ com aumento da energia cinética até $\phi = 0$, em seguida a energia potencial tende a zero, portanto, a energia cinética também, de modo que a partícula entra em repouso em $\phi = v_0$. Em termos da teoria de campos, isto significa que uma solução não trivial e não singular deve necessariamente conectar os dois mínimos distintos do potencial quando $x \rightarrow \pm\infty$.

Do Ponto de vista topológico, isto significa que o mapeamento dos contornos espaciais ($x \rightarrow \pm\infty$) na variedade do vácuo (\mathcal{M}) não podem ser reduzidos a um único ponto, em outras palavras, o grupo de homotopia da variedade do vácuo não pode ser trivial. Isto é descrito de maneira compacta como $\pi_0(\mathcal{M}) \neq \mathbb{I}$.

Passando para as soluções, uma das formas de se obter a solução da equação (2.8) é multiplicando ambos os lados por $\frac{d\phi}{dx}$ e resolvê-la por quadratura.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\phi}{dx}\right) \frac{d^2\phi}{dx^2} &= \left(\frac{d\phi}{dx}\right) \lambda(\phi^2 - v^2)\phi \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 \right] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right] \\ \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 &= \frac{\lambda}{2} (\phi^2 - v^2)^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A partir da equação (2.11) e admitindo que o campo é nulo em $x = x_0$, ou seja, $\phi(x_0) = 0$, obtém-se:

$$\int_{x_0}^x dx' = \pm \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\phi(x)} \frac{d\phi'}{(\phi'^2 - v^2)}. \quad (2.12)$$

O índice linha (') serve pra distinguir entre a variável de integração e os limites de integração. Executando a operação de integração, obtém-se a solução:

$$\phi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]. \quad (2.13)$$

Os gráficos das soluções (2.13), para $x_0 = 0$, estão ilustrados na figura (2.6). As soluções positiva e negativa são denominadas respectivamente por kink e antikink.

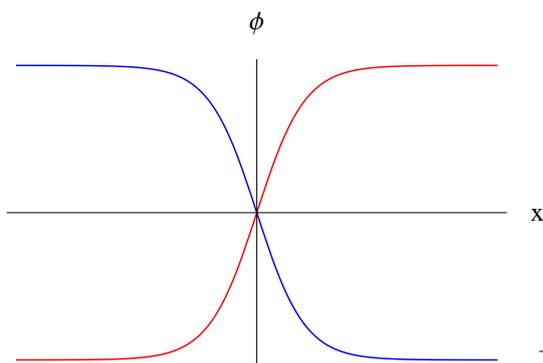


Figura 2.6: kink (vermelho) e antikink (Azul)

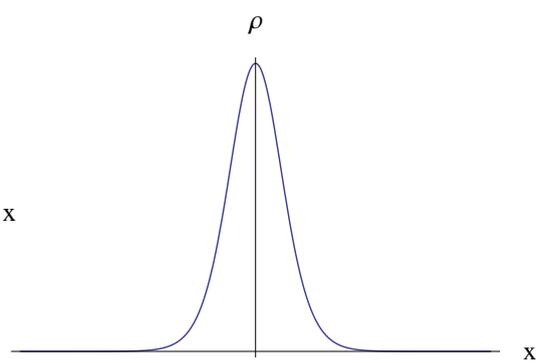


Figura 2.7: Densidade de energia

Substituindo a equação (2.11) na expressão (2.9), obtém-se a energia:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2} (\phi^2 - v^2)^2 dx. \quad (2.14)$$

Onde a expressão $\rho = \frac{\lambda}{2} (\phi^2 - v^2)^2$ é a densidade de energia do Kink. Substituindo (2.13) em ρ , tem-se:

$$\rho = \frac{m^4}{2\lambda} \tanh^4 \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right] - \frac{m^4}{\lambda} \tanh^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right] + \frac{m^4}{2\lambda}, \quad (2.15)$$

e com auxílio da expressão hiperbólica: $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$, mostra-se que:

$$\rho = \frac{\lambda}{2} (\phi^2 - v^2)^2 = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}} \right]. \quad (2.16)$$

Substituindo a expressão (2.16) em (2.14), obtém-se a energia total do kink-antikink:

$$E = \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda}. \quad (2.17)$$

O gráfico da densidade de energia ρ esta ilustrado na figura (2.16).

Mostrou-se anteriormente, através da analogia mecânica com uma partícula, que as soluções de campo, não singulares e não triviais, devem conectar mínimos distintos do potencial. Entretanto, o campo pode ser um dos mínimos do potencial em todo o espaço, neste caso, tem-se a solução trivial. Diante disto, existem quatro soluções fisicamente possíveis para a equação de campo, cada uma determinada a partir das propriedades assintóticas dos campo. A primeira e segunda são triviais, respectivamente caracterizadas por: $\phi(x) = -v$ e $\phi(x) = +v$ ao longo de todo o espaço. A terceira é tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = -v$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +v$. A quarta é tal que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = v$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -v$. Cada uma destas soluções pertence a uma classe ou setor topológico e, soluções de um

dado setor não podem ser continuamente deformadas em soluções pertencentes a um setor distinto, caso contrário, a condição de energia finita seria violada. Isto pode ser explicitamente colocado por meio de leis de conservação topológica.

Define-se carga topológica como:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} K^0 dx \quad \text{onde} \quad K^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (2.18)$$

Aqui, $\epsilon^{\mu\nu}$ é o tensor antissimétrico de Levi-Civita em duas dimensões e, K^μ é a corrente conservada, uma vez que $\partial_\mu K^\mu = 0$. De maneira explícita:

$$Q = \phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty). \quad (2.19)$$

As soluções com $Q \neq 0$ são ditas soluções topológicas e, desde que a energia do sistema seja finita, são estáveis. O mesmo não se pode dizer de soluções não topológicas, onde $Q = 0$, desde que compartilhem o mesmo mínimo do potencial, podem ser suavemente deformadas uma na outra sem violar o requerimento da energia finita.

Em suma, denomina-se Kink-Antikink como um tipo de defeito topológico decorrente da quebra espontânea da simetria \mathbb{Z}_2 , cujo grupo topológico da variedade do vácuo é tal que $\pi_0(\mathcal{M}) \neq \mathbb{I}$. Nas próximas seções ficará claro que os tipos de defeitos mais conhecidos são classificados por meio da quebra espontânea de simetria e do grupo de homotopia da variedade do vácuo.

2.3 Vórtices Abelianos

Na última seção, mostrou-se que uma solução tipo kink é um defeito topológico definido em (1+1) dimensão, cujo grupo de homotopia da variedade é $\pi_0(\mathcal{M}) \neq \mathbb{I}$. O próximo passo em direções com dimensões mais altas, seria estender o modelo do kink (2.4) para pelo menos (1+2) dimensões, com grupo de homotopia dado por $\pi_1(\mathcal{M}) \neq \mathbb{I}$. Entretanto, desde que as soluções procuradas sejam não triviais, estáticas e tenham energia finita, esta extensão não pode ser realizada em uma teoria contendo apenas campos escalares. Essa limitação é expressa por meio do teorema de Derrick⁴ [13]. Considere, no entanto, a tentativa de generalizar o modelo do kink para duas dimensões.

⁴Este teorema aplica-se a lagrangianas da forma: $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - V(\phi^a)$, onde existe uma soma de Einstein no índice a , e $a = 1, \dots, N$, para N campos acoplados. Existem algumas formas de contornar esse teorema, por exemplo, adicionado-se campos de gauge ou mudando o potencial $V(\phi)$ [12].

O defeito topológico mais simples definido em pelo menos (1+2) dimensões chama-se vórtice, e decorre de uma teoria com somente um campo escalar complexo [14], cuja lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - V(\phi) \quad \text{com} \quad V(\phi) = \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (2.20)$$

como em (2.5), λ é positivo.

Os valores que minimizam o potencial e que são representados por ϕ_0 , são tais que $V(\phi_0) = 0$. A fim de que a topologia da variedade do vácuo não seja trivial ($\pi_0(\mathcal{M}) \neq \mathbb{I}$) é necessário que os mínimos do potencial tenham valores distintos em direções distintas do plano. Portanto, em coordenadas polares (r, θ) :

$$\phi_0 = v e^{in\theta} \quad \text{quando} \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Onde θ é a coordenada angular e n pertence ao conjunto dos números inteiros.

Para uma configuração estática, a lagrangiana e o hamiltoniano do sistema são dados respectivamente por:

$$\mathcal{L} = -|\nabla\phi|^2 - V(\phi) \quad \text{e} \quad \mathcal{H} = |\nabla\phi|^2 + V(\phi). \quad (2.22)$$

No limite $r \rightarrow \infty$, têm-se $\phi \rightarrow \phi_0$, de modo que, $\lim_{r \rightarrow \infty} V(\phi) = 0$. Nestas condições, de acordo com (2.22), o hamiltoniano do sistema reduz-se a $\mathcal{H} = |\nabla\phi|^2$. De forma que,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left| \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi_0}{\partial\theta} \hat{e}_\theta \right) \right|^2 \\ &= \left(-\frac{1}{r} in v e^{-in\theta} \right) \left(\frac{1}{r} in v e^{in\theta} \right) = \frac{n^2 v^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A energia, em $r \rightarrow \infty$, é então dada por:

$$E = \int^\infty \frac{n^2 v^2}{r^2} r dr d\theta = 2\pi n^2 v^2 \int^\infty \frac{1}{r} dr. \quad (2.24)$$

Esta divergência logarítmica no valor da energia mostra que o modelo (2.20) não admite soluções estáticas com energia finita.

O problema da divergência na energia pode ser resolvido adicionando-se um campo de gauge (A_μ) que acopla-se ao campo carregado escalar complexo (ϕ) via derivada covariante de gauge:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi, \quad (2.25)$$

onde e é a constante de acoplamento mínimo. Então, escolhendo-se um gauge onde

$$A_0 = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{e} \nabla(n\theta), \quad \text{em } r \rightarrow \infty, \quad (2.26)$$

têm-se

$$A_r = 0 \quad \text{e} \quad A_\theta = \frac{n}{re}. \quad (2.27)$$

A energia desta configuração estática, agora obtida da parte espacial de (2.25), é dada por:

$$E = \int_0^\infty |(\nabla - ie\mathbf{A})\phi|^2 dr. \quad (2.28)$$

Mas a partir das componentes (2.27),

$$(\nabla - ie\mathbf{A})\phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) - ie \left(\frac{n}{re} \right) e^{in\theta}. \quad (2.29)$$

Ao substituir a (2.21) em (2.29) mostra-se que:

$$(\nabla - ie\mathbf{A})\phi = \frac{in}{r} e^{in\theta} - \frac{in}{r} e^{in\theta} = 0. \quad (2.30)$$

Portanto, o $\lim_{r \rightarrow \infty} E = 0$, de forma que recupera-se a condição de energia finita, que juntamente com o grupo de homotopia não trivial do vácuo desta teoria, constitui o tipo de solução desejada.

2.3.1 Vórtices no modelo abeliano de Higgs

Como discutido e verificado anteriormente, existe uma impossibilidade na extensão do modelo tipo kink para duas dimensões espaciais usando modelos com somente campos escalares. Também verificou-se que, ao inserir um campo de gauge no modelo essa dificuldade pode ser contornada sem comprometer a energia e a estabilidade da solução. Um modelo com tais características, e que será aqui estudado, chama-se vórtice de Abrikosov-Nielsen-Olesen [15], ele é uma generalização relativística da teoria de supercondutividade de Ginzburg-Landau [16].

A lagrangiana do modelo é dada por :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi), \quad (2.31)$$

onde

$$V(\phi) = \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2. \quad (2.32)$$

As constantes λ e v são positivas. $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético da eletrodinâmica de Maxwell, e $(D_\mu\phi)^*$ é o conjugado de $(D_\mu\phi)$.

A lagrangiana (2.31) é invariante mediante a transformação local de gauge:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\beta(x)}\phi, \quad (2.33)$$

ou seja, a lagrangiana é invariante sob transformações locais pertencentes a $U(1)$, que é um grupo de simetria abeliano.

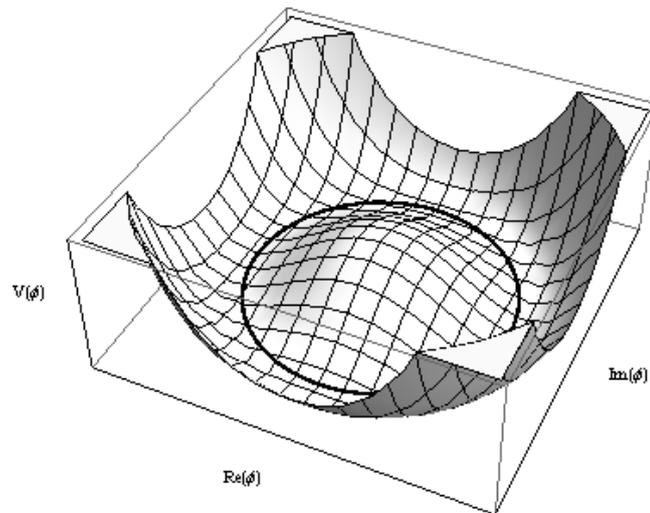


Figura 2.8: Potencial $V(\phi)$

A partir da expressão (2.32), conclui-se que os mínimos (ϕ_0) do potencial são tais que

$$|\phi_0|^2 = v^2. \quad (2.34)$$

Esta condição determina, sobre o plano complexo das componentes do campo, um círculo de raio v , que posteriormente será reconhecido como a variedade do vácuo. O círculo preto no gráfico do potencial (figura 2.8) representa o conjunto de mínimos fisicamente equivalentes, matematicamente expressos por (2.34).

Da expressão (2.34), obtém-se de forma mais simples [14] que, os mínimos do potencial são da forma :

$$\phi_0 = ve^{in\theta}, \quad (2.35)$$

sendo θ a coordenada polar do plano espacial (r, θ) . O passo seguinte, consiste em calcular o tensor energia-momento e em seguida obter a densidade de energia, a fim de mostrar que a configuração (2.35) corresponde a mínima energia do sistema. Com auxílio do tensor energia-momento métrico,

$$T_{\lambda\sigma} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\lambda\sigma}} - g_{\lambda\sigma} \mathcal{L}, \quad (2.36)$$

onde $g_{\lambda\sigma}$ é o tensor métrico, e da lagrangiana (2.31) na forma

$$\mathcal{L} = g^{\mu\alpha} (D_\mu \phi)^* (D_\alpha \phi) - \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} - V(\phi), \quad (2.37)$$

torna-se simples calcular o tensor energia-momento, que é feito como segue.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\lambda\sigma}} &= (D_\mu \phi)^* (D_\alpha \phi) \left(\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial g^{\lambda\sigma}} \right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \left[\left(\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial g^{\lambda\sigma}} \right) g^{\nu\beta} + \left(\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial g^{\lambda\sigma}} \right) g^{\mu\alpha} \right] \\ &= \left(\frac{\delta_\lambda^\mu \delta_\sigma^\alpha + \delta_\sigma^\mu \delta_\lambda^\alpha}{2} \right) (D_\mu \phi)^* (D_\alpha \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \left[\left(\frac{\delta_\lambda^\mu \delta_\sigma^\alpha + \delta_\sigma^\mu \delta_\lambda^\alpha}{2} \right) g^{\nu\beta} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\delta_\lambda^\nu \delta_\sigma^\beta + \delta_\sigma^\nu \delta_\lambda^\beta}{2} \right) g^{\mu\alpha} \right] \\ &= \left(\frac{(D_\lambda \phi)^* (D_\sigma \phi) + (D_\sigma \phi)^* (D_\lambda \phi)}{2} \right) - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{F_{\lambda\nu} F_{\sigma\beta} + F_{\sigma\nu} F_{\lambda\beta}}{2} \right) g^{\nu\beta} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{F_{\mu\lambda} F_{\alpha\sigma} + F_{\mu\sigma} F_{\alpha\lambda}}{2} \right) g^{\mu\alpha} \right] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\lambda\sigma}} &= \left(\frac{(D_\lambda \phi)^* (D_\sigma \phi) + (D_\sigma \phi)^* (D_\lambda \phi)}{2} \right) + \frac{1}{4} (F_{\lambda\beta} F^\beta_\sigma + F_{\sigma\beta} F^\beta_\lambda). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ao inserir a equação (2.38) na (2.36) obtém-se a expressão para o tensor energia-momento:

$$T_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2} (F_{\lambda\beta} F^\beta_\sigma + F_{\sigma\beta} F^\beta_\lambda) + (D_\lambda \phi)^* (D_\sigma \phi) + (D_\sigma \phi)^* (D_\lambda \phi) - g_{\lambda\sigma} \mathcal{L}. \quad (2.39)$$

Deseja-se aqui, da mesma forma como no caso do kink, estudar configurações de campos estáticos, entretanto, segundo [17] não existem soluções carregadas com energia finita no modelo Maxwell-Higgs, de modo que, será adotado o gauge $A_0 = 0$. Partindo desta condição e lembrando da equação de Maxwell $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$, mostra-se facilmente, ao tomar $\nu = 0$, que a densidade de carga é nula. Feitas estas considerações, a partir de (2.39), obtêm-se respectivamente a densidade de energia e a energia total para o caso estático:

$$\rho = T_{00} = \frac{B^2}{2} + |D_i\phi|^2 + \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (2.40)$$

$$E = \int \left[\frac{B^2}{2} + |D_i\phi|^2 + \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2 \right] d^2x. \quad (2.41)$$

Da expressão para a energia total, conclui-se que para uma solução com energia finita é necessário que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \phi_0, \quad \text{onde} \quad \phi_0 = v e^{in\theta}. \quad (2.42)$$

Isto implica que a (2.42) corresponde a variedade do vácuo, dito de outra forma, o campo deve tender aos mínimos do potencial quando as dimensões espaciais do plano tendem ao infinito. Quanto ao valor de n , ele determina o número de vezes que o mapeamento (2.42) "enrola-se" no espaço assintótico bidimensional. Para $n \neq 0$ o grupo de homotopia da variedade do vácuo não é trivial, ou seja, $\pi_1(\mathcal{M}) \neq \mathbb{I}$. Os valores de n também caracterizam diferentes classes de homotopia. Só reiterando, soluções pertencentes a uma dada classe não podem ser deformadas em soluções de outra classe, desde que o requerimento de energia finita não seja violado.

Pode-se observar facilmente que os mínimos do potencial não compartilham da simetria U(1) da lagrangiana, de modo que, quando o sistema escolhe um dos mínimos, ocorre uma quebra espontânea de simetria.

Como observado, a condição (2.42) é necessária, mas não é suficiente para que as configurações de campo tenham energia finita. De (2.41), esse requerimento é expresso matematicamente por:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{B} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \phi_0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} D_i\phi = 0. \quad (2.43)$$

Em particular, a terceira expressão revela que

$$\begin{aligned} (\nabla - ie\mathbf{A})\phi &= 0 \quad \text{em } r \rightarrow \infty \\ \nabla\phi &= ie\mathbf{A}\phi \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{ie} \frac{\nabla\phi}{\phi} = \frac{1}{ie} \nabla(\ln\phi) = \frac{1}{e} \nabla(n\theta). \end{aligned} \quad (2.44)$$

A equação (2.44) implica na quantização do fluxo magnético (Φ) da configuração de campo:

$$\Phi = \int \mathbf{B} d^2x = \int (\nabla \times \mathbf{A}) d^2x = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (2.45)$$

Na passagem da segunda expressão para a terceira, usou-se o teorema de Stokes. Com auxílio da expressão (2.27),

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \oint \frac{n}{re} r d\theta \\ \Phi &= n \frac{2\pi}{e}.\end{aligned}\quad (2.46)$$

É importante ressaltar que o fluxo magnético é uma quantidade topológica conservada, que por depender de n , conseqüentemente depende da classe topológica da solução.

Até aqui, discutiu-se sobre várias propriedades dos vórtices, tais como energia e estabilidade sem, no entanto, se preocupar com o formato das soluções. Este será o objetivo do restante desta seção. As equações de campo serão obtidas por meio do limite BPS [18], método muito conhecido, que dá origem a soluções de mínima energia advinda de equações de primeira ordem. A abordagem que será utilizada aqui faz uso da seguinte relação, chamada de auto dualidade [19]

$$|D_i \phi|^2 = |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \epsilon^{ij} \partial_i J_j, \quad (2.47)$$

onde J_j é a densidade de corrente. Ao substituir a (2.47) na(2.41) obtêm-se:

$$\begin{aligned}E &= \int \left[\frac{B^2}{2} + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \epsilon^{ij} \partial_i J_j + \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2 \right] d^2x \\ &= \int \left[\frac{1}{2}(B^2 \pm 2eB|\phi|^2) + |D_{\pm}\phi|^2 \pm \epsilon^{ij} \partial_i J_j + \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2 \right] d^2x.\end{aligned}\quad (2.48)$$

Onde $D_{\pm}\phi = D_1 \pm iD_2$. De acordo com o teorema de Stokes, $\int (\epsilon^{ij} \partial_i J_j) d^2x = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Agora, ao somar os seguintes termos

$$\pm eBv^2 \mp eBv^2 \quad e \quad + \frac{e^2}{2}(|\phi|^2 - v^2)^2 - \frac{e^2}{2}(|\phi|^2 - v^2)^2 \quad (2.49)$$

em (2.48), têm-se que:

$$\begin{aligned}E &= \int \left[\frac{1}{2}[B^2 \pm 2eB(|\phi|^2 - v^2)^2 + e^2(|\phi|^2 - v^2)^2] + |D_{\pm}\phi|^2 \pm \epsilon^{ij} \partial_i J_j + \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^2}{2}(|\phi|^2 - v^2)^2 \mp eBv^2 \right] d^2x \\ E &= \int \left[\frac{1}{2}[B \pm e(|\phi|^2 - v^2)]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 + \left(\lambda - \frac{e^2}{2} \right) (|\phi|^2 - v^2)^2 \mp eBv^2 \right] d^2x.\end{aligned}\quad (2.50)$$

De modo que, a mínima energia é alcançada quando os dois primeiros termos quadrados são iguais a zero e $\lambda = \frac{e^2}{2}$. Esta última igualdade é um importante resultado na

teoria de supercondutividade, ela corresponde a interface entre supercondutores tipo I e II, porque em geral, a massa dos campos de Higgs e de gauge são distintas para diferentes valores de λ . Por meio do mecanismo de Higgs é possível demonstrar que as massas dos campos de higgs e de gauge são respectivamente $m_\phi = \sqrt{2}ev$ e $m_A = 2\sqrt{\lambda}v$. Quando $m_\phi > m_A$ têm-se um supercondutor tipo I, quando $m_\phi < m_A$ têm-se um supercondutor tipo II, o limite de separação entre eles ocorre quando $m_\phi = m_A$, que é o caso tratado aqui, ou seja, $\lambda = \frac{e^2}{2}$.

A energia é limitada inferiormente por um múltiplo do fluxo magnético, para um fluxo positivo escolhe-se o sinal inferior, para um fluxo negativo escolhe-se o sinal superior, de modo que:

$$E \geq v^2|\Phi|. \quad (2.51)$$

Tomando-se o caso em que o fluxo é positivo, tem-se que ao saturar o limite BPS, encontra-se as seguintes equações:

$$B + e(|\phi|^2 - v^2) = 0 \quad (2.52)$$

e

$$(D_1 + iD_2)\phi = 0. \quad (2.53)$$

Embora não tenham sido obtidas pelo método usual da equação de Euler-lagrange, qualquer solução destas equações acopladas também resolve as equações de Euler-Lagrange. As soluções destas equações (2.52 e 2.53), além de descreverem vórtices não interagentes na teoria de supercondutores, por serem bem conhecidas, têm aplicações em muitos ramos da física, da cosmologia ao modelo padrão da física de partículas.

2.4 Monopulos

O objeto de estudo desta seção, os monopulos, são classificados em dois tipos. O primeiro chama-se monopolo global, devido a transformação de gauge, pela qual a lagrangiana permanece invariante, ser global. O segundo tipo apresenta transformação de gauge local. O monopolo global será estudado detalhadamente no capítulo 3.

A primeira formulação teórica significativa acerca dos monopulos, a saber, monopulos magnéticos, foi dada por Dirac em 1931 [20, 21]. Partindo de argumentos de simetrias no contexto da eletrodinâmica de Maxwell, Dirac, a fim de explicar a quantização da carga elétrica, propõe a existência de monopulos magnéticos.

Em 1974, 't Hooft [22] e Polyakov [23] mostraram que monopolos magnéticos podem surgir naturalmente a partir de uma teoria de gauge não abeliana com o seguinte padrão da quebra espontânea de simetria: $SU(2) \rightarrow U(1)$. Em seguida, estas ideias são apresentadas de forma mais detalhada.

2.4.1 O Monopolo de Dirac

Seguindo o raciocínio original de Dirac, observa-se que as equações de Maxwell no vácuo,

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

são simétricas mediante a transformação $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ e $-\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}$. Para que tal simetria fosse estabelecida no caso geral, na presença de cargas e correntes, ele propôs uma construção teórica na qual existe uma carga magnética g , tal que, o campo magnético \mathbf{B} seja dado por:

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.54)$$

Portanto, o fluxo magnético (Φ_m) através de uma superfície fechada contendo g é então:

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_S |\mathbf{B}| dS = 4\pi r^2 B \\ \Phi_m &= 4\pi g.\end{aligned} \quad (2.55)$$

Onde r é o raio da superfície limitando o volume contendo a carga magnética, e \mathbf{n} é o versor de orientação do elemento de área.

A função de onda $\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi$ para uma partícula com carga elétrica e no campo de um monopolo, é expressa por:

$$\Psi = \psi \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}\right), \quad (2.56)$$

onde \mathbf{A} é o potencial vetor, e ψ é função de onda para o elétron livre⁵. A (2.56) pode ser expressa como:

$$\Psi = \psi e^{i\alpha} \quad (\text{onde } \alpha \text{ é uma fase, dada por } \alpha = -\frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}). \quad (2.57)$$

A mudança total sofrida pela fase ($\Delta\alpha$) ao percorrer-se um ciclo fechado, com r e θ

⁵A equação de onda para o elétron livre é: $\psi = |\psi| \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)\right]$, a forma da (2.56) deve-se a mudança $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c}$ devido a presença do campo magnético.

fixos, e apenas ϕ variando de 0 a 2π , é dada por:

$$\Delta\alpha = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{e}{\hbar c} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar c} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.58)$$

$$\Delta\alpha = \frac{e}{\hbar c} \Phi(r, \theta). \quad (2.59)$$

A figura (2.9) esquematiza a área onde se calcula o fluxo $\Phi(r, \theta)$.

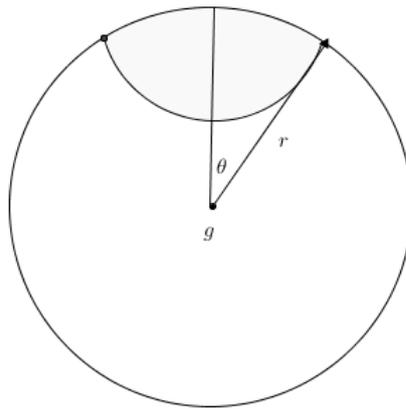


Figura 2.9: A região cinza delimita a área do fluxo $\Phi(r, \theta)$

Então, em $\theta = 0$ tem-se $\Phi(r, \theta) = 0$, conforme o ciclo desce sobre a esfera, $\theta \rightarrow \pi$ e $\Phi(r, \theta) \rightarrow 4\pi g$. Acontece que em $\theta \rightarrow \pi$, o ciclo reduz-se novamente a um ponto. Mas desde que o fluxo seja finito, \mathbf{A} apresenta uma singularidade em $\theta = \pi$. Como isto não depende de r , qualquer esfera terá a mesma característica, por isso \mathbf{A} é singular ao longo de toda parte negativa do eixo z^6 , nessa região Ψ é indeterminada.

A condição de quantização de Dirac poder ser obtida exigindo-se que Ψ seja unívoca, dos argumentos acima, tem-se que:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha = 2\pi n &= \frac{e}{\hbar c} 4\pi g \\ eg &= \frac{n}{2} \hbar c \quad (\text{com } n \text{ inteiro}). \end{aligned}$$

Retomando o sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$), obtém-se:

$$eg = \frac{n}{2}. \quad (2.60)$$

Logo, a existência de monopolos magnéticos leva a quantização da carga elétrica, no entanto, o inverso não é necessariamente verdade. Por isso, isto não significa que de

⁶Isto chama-se corda (string) de Dirac, uma abordagem sobre monopolo magnético sem corda é dada em [24].

fato monopolos magnéticos existam. Em seguida, apresenta-se o monopolo de 't Hooft e Polyakov, uma teoria cujo grupo de simetria da lagrangiana é mais amplo que o grupo da eletrodinâmica de Maxwell.

2.4.2 Monopolo de 't Hooft - Polyakov

Deseja-se aqui, estudar defeitos topológicos em (1+3) dimensões, uma temporal e 3 espaciais. O modelo capaz de fornecer soluções estáticas não triviais e com energia finita, chama-se monopolo de 't Hooft-Polyakov, proposto em 1974 [22, 23]. Este modelo é uma teoria não abeliana de gauge, e o grupo de simetria da lagrangiana é o $SU(2)$. Por estas razões, este modelo é mais complicado que os demais, no entanto, os métodos usados nesta seção são similares aos demais anteriores.

A lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a) - \frac{1}{4}\lambda(\phi^a\phi^a - \eta^2)^2. \quad (2.61)$$

Onde a é um índice interno e, varia de 1 a 3. Então, expressões da forma $\phi^a\phi^a$ apresentam uma soma de Einstein sobre o índice a . Além disto, têm-se:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.62)$$

e a derivada covariante de gauge:

$$D_\mu\phi^a = \partial_\mu\phi^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c. \quad (2.63)$$

As constantes λ e g são positivas e ϵ^{abc} é o símbolo de Levi-Civita. Observa-se que a lagrangiana (2.61) é similar ao modelo abeliano de Higgs (equação 2.31) mediante a comparação $G_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}$ e $A_\mu^a \rightarrow A_\mu$. Neste caso, A_μ^a corresponde a um vetor no espaço interno. Embora esta lagrangiana (2.61) pareça complexa, ela é construída pra ser invariante mediante uma transformação de gauge local⁷.

As equações de campo são obtidas da equação de Euler-Lagrange de maneira usual. Aplicando-a aos campos ϕ^a e A_μ^a , obtêm-se, respectivamente:

$$D_\mu D^\mu\phi^a = -\lambda(\phi^b\phi^b - \eta^2)\phi^a \quad (2.64)$$

⁷Ou seja, a o atuação do grupo $SU(2)$ sob o campo $\phi^a = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ não altera a lagrangiana (2.61), estas transformações podem variar de ponto a ponto do espaço-tempo.

e

$$D_\mu G^{a\mu\nu} = g\epsilon^{abc} (D^\nu \phi^b) \phi^c. \quad (2.65)$$

Restringindo-se a soluções estáticas e com $A_0^a = 0$ para todo a , têm-se:

$$D_i D^i \phi^a = -\lambda(\phi^b \phi^b - \eta^2) \phi^a \quad (2.66)$$

$$D_i G^{aij} = g\epsilon^{abc} (D^j \phi^b) \phi^c. \quad (2.67)$$

O índices i e j são índices puramente espaciais, não devendo ser confundido com o índice a do espaço interno.

A Energia (E) pode ser calculada a partir do hamiltoniano⁸, fornecendo:

$$E = \int \left[\frac{1}{4} G_{ij}^a G^{aij} + \frac{1}{2} D_i \phi^a D^i \phi^a + \frac{1}{4} \lambda (\phi^a \phi^a - \eta^2)^2 \right] d^3x. \quad (2.68)$$

A energia torna-se mínima se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\phi^a \phi^a = \eta^2 \quad A_i^a = 0 \quad D_i \phi^a = 0. \quad (2.69)$$

Portanto, conforme o campo tende ao infinito, estas condições devem ser obedecidas, a fim de que se tenha soluções fisicamente aceitáveis. A condição $\phi^a \phi^a = \eta^2$, determina uma superfície esférica de raio η no espaço interno e, constitui a variedade do vácuo (\mathcal{M}) deste modelo. O mapeamento da variedade bidimensional assintótica do espaço físico⁹ (denota-se por \mathcal{S}) em \mathcal{M} pode pertencer a diversas classes topológicas, que na representação matemática é descrito como $\pi_2(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}$, onde \mathbb{Z} é um número real, que caracteriza o número de vezes que \mathcal{S} "enrola-se" em \mathcal{M} , conforme percorre-se \mathcal{M} . Para tornar isto mais claro, pode-se considerar o caso em que $\mathbb{Z} = 1$, isto implica que para cada direção no espaço físico, tem-se uma direção bem determinada na superfície esférica do espaço interno $\phi^a \phi^a = \eta^2$. Sendo assim, assintoticamente o campo tem diferentes valores para diferentes orientações.

É importante ressaltar, que mesmo que o gradiente de ϕ^a , com $r \rightarrow \infty$, não seja nulo, isto não constituirá um problema, desde que $\lim_{r \rightarrow \infty} D_i \phi^a = 0$. A seção 2.3 apresenta, com mais detalhes, uma abordagem similar para o caso do vórtice.

⁸O hamiltoniano pode ser calculado de maneira direta por: $\mathcal{H} = \sum_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s - \mathcal{L}$, os q 's são os campos e \dot{q} 's são as derivadas temporais.

⁹Esta variedade pode ser pensada como uma superfície esférica de raio $r \rightarrow \infty$ do espaço tridimensional.

Pode-se definir uma corrente topológica¹⁰ [25] dada por:

$$K_\mu = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abc} \partial^\nu \hat{\phi}^a \partial^\rho \hat{\phi}^b \partial^\sigma \hat{\phi}^c. \quad \text{Onde, } \hat{\phi}^a = \frac{\phi^a}{|\phi|}. \quad (2.70)$$

Como $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é antissimétrico, por definição:

$$\partial_\mu K^\mu = 0. \quad (2.71)$$

Isto significa que a corrente topológica é conservada. A carga topológica associada a (2.70) é dada por:

$$\begin{aligned} Q &= \int K_0 d^3x & (2.72) \\ Q &= \frac{1}{8\pi} \int [\epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} \partial_i \hat{\phi}^a \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c] d^3x \\ Q &= \frac{1}{8\pi} \int [\epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} \partial_i (\hat{\phi}^a \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c)] d^3x \\ Q &= \frac{1}{8\pi} \int_S [\epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} (\hat{\phi}^a \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c)] d^2S_i. & (2.73) \end{aligned}$$

Esta última integral é sobre \mathcal{S} , o espaço físico assintótico. \mathcal{S} pode ser descrito pelos parâmetros α_1 e α_2 , que podem ser os ângulos azimutal e polar, por exemplo. Assim, pode-se escrever [10, 26]:

$$\partial_i \hat{\phi}^a = \frac{\partial \hat{\phi}^a}{\partial \alpha_p} \frac{\partial \alpha_p}{\partial x_i} \quad (2.74)$$

e

$$d^2S_i = \frac{1}{2} \epsilon_{imn} \epsilon_{pq} \frac{\partial x^m}{\partial \alpha_p} \frac{\partial x^n}{\partial \alpha_q} d^2\alpha \quad p, q = 1, 2. \quad (2.75)$$

Esta última expressão, relaciona o elemento de área em termos de x^m e α_q . Ao inserir a (2.75) e (2.74) em (2.73), mostra-se que:

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \left(\epsilon^{abc} \epsilon_{pq} \hat{\phi}^a \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial \alpha_p} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial \alpha_q} \right) d^2\alpha. \quad (2.76)$$

Observe que o termo

$$\epsilon^{abc} \epsilon_{pq} \hat{\phi}^a \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial \alpha_p} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial \alpha_q} d^2\alpha \quad (2.77)$$

corresponde a $2d^2S_a^{int}$, por comparação com (2.75). O subíndice "int" indica que o elemento de área na (2.76) é com respeito ao espaço interno, ao contrário da (2.75).

¹⁰Esta corrente topológica não deve ser confundida com as cargas e correntes associadas ao teorema de Noether.

Sendo assim, a (2.76) pode ser escrita como:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \hat{\phi}^a d^2 S_a^{int} = \frac{1}{4\pi} \int d^2 S^{int}. \quad (2.78)$$

Portanto, Q representa o número de vezes que a variedade do vácuo \mathcal{M} é enrolada conforme o espaço físico assintótico é percorrido. De modo que pode-se fazer a seguinte identificação $Q = \pi_2(\mathcal{M})$.

Uma questão pertinente é: por que este modelo chama-se monopolo magnético? Como ele relaciona-se a eletrodinâmica de Maxwell? Em primeiro lugar, deve-se ter em mente que o grupo de simetria da eletrodinâmica de Maxwell, o $U(1)$, é um subgrupo de $SU(2)$, o grupo de simetria do modelo (2.61). Portanto, espera-se que o eletromagnetismo já esteja incorporado no modelo (2.61). De fato isto acontece, 't Hooft apresentou [10] uma definição generalizada para o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, que é um invariante de gauge.

$$F_{\mu\nu} \equiv \hat{\phi}^a G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{g} \hat{\phi}^a D_\mu \hat{\phi}^b D_\nu \hat{\phi}^c. \quad (2.79)$$

Recupera-se a eletrodinâmica de Maxwell ao tomar-se um gauge particular em que ϕ^a aponta sempre para a mesma direção no espaço interno. Para $\phi^a = (0, 0, 1)$, $F_{\mu\nu}$ torna-se $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$.

Sabe-se, da eletrodinâmica de Maxwell, que $\partial^\mu F_{\mu\nu}^* = 0$. Onde

$$F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (2.80)$$

é o dual do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Ao contrário da teoria de Maxwell, o divergente do dual de (2.79) não é nulo. Pode-se mostrar que para $F_{\mu\nu}$ dado por (2.79), tem-se:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = \frac{1}{2g} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abc} \partial^\nu \hat{\phi}^a \partial^\rho \hat{\phi}^b \partial^\sigma \hat{\phi}^c. \quad (2.81)$$

Com auxílio da (2.70), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = \frac{4\pi}{g} K_\mu. \quad (2.82)$$

De modo que, tomando-se $\mu = 0$, tem-se:

$$\frac{1}{2} \epsilon_{0\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = \frac{4\pi}{g} K_0 \rightarrow \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial^j F^{jk} = \frac{4\pi}{g} K_0, \quad (2.83)$$

onde i, j, k variam de 1 a 3. Desde que o campo magnético continue sendo definido de

forma usual, $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}$, a (2.83) implica em:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{4\pi K_0}{g}. \quad (2.84)$$

Onde $\frac{K_0}{g}$ é a densidade de carga magnética. A carga magnética total é então dada por:

$$m = \int \frac{K_0}{g} d^3x = \frac{Q}{g}. \quad (2.85)$$

Onde Q é a carga topológica, equação (2.78).

Conclui-se, portanto, que o modelo não abeliano do monopolo estudado nesta seção, ao contrário da teoria de Maxwell, já apresenta naturalmente monopolos magnéticos. Como discutido brevemente no início, isto já era esperado, já que o grupo de simetria do eletromagnetismo, $U(1)$, é um subgrupo de $SU(2)$. Sendo assim, se este modelo de 't Hooft e Polyakov estiver correto, espera-se que realmente existam monopolos magnéticos. No entanto, eles ainda não foram encontrados, mas isto não deve ser tão perturbador, já que tais objetos são previstos serem muito pesados ($\sim 10^{16}\text{Gev}$) [4], e, portanto, muito difíceis de serem detectados, até mesmo pelos modernos aceleradores de partículas.

Capítulo 3

MONOPOLO GLOBAL

O monopolo global encaixa-se em uma classe de defeitos topológicos conhecida como defeitos globais, cuja simetria da lagrangiana é global; em contraste à aqueles que acoplam-se a campos de gauge, cuja simetria da lagrangiana é local. Por não apresentarem campos de gauge, o principal método para detectar os efeitos do monopolo global será gravitacional, via solução das equações de Einstein para a métrica externa ao núcleo do monopolo. Isto será feito com base, sobre tudo, nos trabalhos de Manuel Barriola e Alexander Vilenkin [5]. A assinatura da métrica adotada nos próximos capítulos é típica da literatura no contexto da Relatividade Geral, $(-, +, +, +)$.

3.1 Lagrangiana do Monopolo Global: Topologia e Equações de Campo

A lagrangiana do monopolo global é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^a)(\partial^\mu \phi^a) - \frac{1}{4}\lambda(\phi^a \phi^a - \eta^2)^2, \quad \text{com } \lambda > 0 \quad \text{e} \quad \eta > 0. \quad (3.1)$$

Onde o índice a vai de 1 a 3 e, não deve ser confundido com os índices de Lorentz, das dimensões do espaço-tempo. O tripleto de campos escalares ϕ^a comporta-se como um vetor no espaço interno¹, de modo que, $\phi^a \phi^a = (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2$. Claramente, a lagrangiana (3.1) é invariante sob o grupo de simetria contínua $SO(3)$ do espaço interno. Isto pode ser observado, notando-se que para um dado ϕ^a , tal que $\phi^a \phi^a = \text{constante} > 0$, uma rotação de ϕ^a no espaço interno deixa a lagrangiana invariante. Em seguida, com auxílio da equação de campo, mostra-se que esta simetria $SO(3)$ é quebrada em $U(1)$

¹Espaço onde $\phi^a = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ comporta-se como um vetor no espaço tridimensional Euclidiano, no mesmo sentido usado no capítulo 3 da referência [27]

pela variedade do vácuo.

De maneira geral, as equações de campo para ϕ^a podem ser obtidas da equação de Euler-Lagrange:

$$\partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (3.2)$$

Os termos da (3.2) estão explicitamente calculados abaixo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^b} = -\frac{2}{4} \lambda (\phi^a \phi^a - \eta^2) 2 \frac{\partial \phi^a}{\partial \phi^b} \phi^a = -\lambda (\phi^a \phi^a - \eta^2) \phi^b, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\partial_\mu \phi^a)}{\partial (\partial_\nu \phi^b)} (\partial^\mu \phi^a) + \frac{\partial (\partial^\mu \phi^a)}{\partial (\partial_\nu \phi^b)} (\partial_\mu \phi^a) \right] \\ &= -\frac{1}{2} [2 \delta_\mu^\nu \delta_b^a (\partial^\mu \phi^a)] = -\partial^\nu \phi^b. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sendo assim, ao substituir as equações (3.3) e (3.4) em (3.2), obtém-se a equação de movimento:

$$\partial_\nu \partial^\nu \phi^b - \lambda (\phi^a \phi^a - \eta^2) \phi^b = 0. \quad (3.5)$$

Qualquer tripleto de campos escalares constantes, satisfazendo $\phi^a \phi^a = \eta^2$, além de satisfazer a equação (3.5), corresponde a solução de mínima energia. Sendo assim, o vínculo $\phi^a \phi^a = \eta^2$ define a variedade do vácuo (\mathcal{M}). Escolhendo-se, por exemplo, o tripleto $(0, 0, \eta)$ e submetendo-o a uma rotação arbitrária no espaço interno, ele não permanece invariante, muito embora conduza a um outro vetor da variedade do vácuo. Agora, se ele rotacionar em torno de si mesmo (no caso, o eixo ϕ^3) por um ângulo arbitrário, permanece invariante. Em outras palavras, quando o campo tende a variedade do vácuo, a simetria $SO(3)$ é espontaneamente quebrada em $U(1)$.

Sabe-se que para uma teoria suportar defeitos, é necessário que a topologia da variedade do vácuo seja correta. No caso do monopolo, entende-se que a variedade do vácuo deve ser uma superfície S^2 não contraível. De fato, isto é claramente observável na relação $\phi^a \phi^a = \eta^2$, então, ao mapear-se a variedade do vácuo na variedade bidimensional do espaço físico assintótico, garante-se que o mapeamento não seja trivial, matematicamente $\pi_2(\mathcal{M}) \neq \mathbb{I}$. Em suma, mostra-se que a lagrangiana (3.1) apresenta os requisitos necessários para descrever defeitos topológicos tipo monopolo global. A etapa seguinte consiste em procurar uma solução para a equação de campo.

3.2 Ansatz para Solução da Equação de Campo

Havendo solução, espera-se que a mais simples seja estática e esfericamente simétrica. O ansatz proposto em [5], para uma tal configuração de campo, é dado por:

$$\phi^a = \eta f(r) \frac{x^a}{r}, \quad \text{onde } x^a x^a = r^2. \quad (3.6)$$

Deve-se enfatizar que esta simetria está relacionada ao espaço tempo e, não ao espaço interno.

O elemento de linha mais geral para a métrica estática com simetria esférica pode ser escrito como

$$ds^2 = -M^2(r)dt^2 + N^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.7)$$

Onde $M^2(r)$ e $N^2(r)$ são funções da coordenada radial r .

As componentes da conexão métrica associadas a (3.7) são obtidas da expressão:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_{\alpha}g_{\lambda\beta} + \partial_{\beta}g_{\lambda\alpha} - \partial_{\lambda}g_{\alpha\beta}), \quad (3.8)$$

de modo que, as componentes não nulas são:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{M'}{M}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{MM'}{N^2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{N'}{N}, \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{N^2}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r\sin^2\theta}{N^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot\theta. \quad (3.11)$$

Com auxílio da conexão e da métrica, pode-se encontrar a equação para $f(r)$. Para isto, é necessário substituir o ansatz (3.6) na equação de campo (3.5)²:

$$\nabla_{\nu}(\partial^{\nu}\phi^b) - \lambda(\phi^a\phi^a - \eta^2)\phi^b = 0.$$

Ao realizar-se a soma sobre o índice ν , no primeiro termo, encontra-se:

$$\nabla_{\nu}(\partial^{\nu}\phi^b) = g^{00}\nabla_0(\partial_0\phi^b) + g^{11}\nabla_1(\partial_1\phi^b) + g^{22}\nabla_2(\partial_2\phi^b) + g^{33}\nabla_3(\partial_3\phi^b). \quad (3.12)$$

²A derivada $\partial_{\nu} \rightarrow \nabla_{\nu}$ devido ao princípio de acoplamento mínimo [28], por estar-se no sistema de coordenadas esféricas, onde os símbolos de Cristoffel não são todos nulos.

A expressão para ϕ^b em coordenadas esféricas, com $b = 1$, por meio da (3.6) dá origem a:

$$\phi^1 = \eta f \sin \theta \cos \varphi, \quad (3.13)$$

de forma que os elementos da (3.12) podem ser explicitamente calculados, resultando em:

$$g^{00}\nabla_0(\partial_0\phi^b) = g^{00}[\partial_0(\partial_0\phi^1) - \Gamma_{00}^\nu(\partial_\nu\phi^1)] = \frac{M'}{MN^2}f'\eta\sin\theta\cos\varphi, \quad (3.14)$$

$$g^{11}\nabla_1(\partial_1\phi^b) = \eta\sin\theta\cos\varphi\left(\frac{f''}{N^2} - \frac{N'f'}{N^3}\right), \quad (3.15)$$

$$g^{22}\nabla_2(\partial_2\phi^b) = -\eta\sin\theta\cos\varphi\left(\frac{f}{r^2} - \frac{f'}{rN^2}\right), \quad (3.16)$$

$$g^{33}\nabla_3(\partial_3\phi^b) = \eta\sin\theta\cos\varphi\left(\frac{f'}{rN^2} - \frac{f}{r^2}\right). \quad (3.17)$$

Onde, $f'(r)$ corresponde a derivada de $f(r)$ em relação a r . Ao substituir as expressões (3.14 - 3.17) na (3.12) obtêm-se que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(\partial^\mu) &= \eta\sin\theta\cos\varphi\left[\frac{f''}{N^2} + \left(\frac{2}{rN^2} - \frac{N'}{N^3} + \frac{M'}{MN^3}\right)f' - \frac{2f}{r^2}\right] \\ \nabla_\mu(\partial^\mu) &= \eta\sin\theta\cos\varphi\left[\frac{f''}{N^2} + \left(\frac{2}{rN^2} + \frac{1}{2M^2}\left(\frac{M^2}{N^2}\right)'\right)f' - \frac{2f}{r^2}\right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

O segundo termo da (3.5) é obtido lembrando-se que,

$$\phi^a\phi^a = \eta^2 f^2 \frac{(x^a)^2}{r^2} = \eta^2 f^2.$$

Portanto,

$$\lambda(\phi^a\phi^a - \eta^2)\phi^1 = \lambda\eta f \sin\theta\cos\varphi(\eta^2 f^2 - \eta^2). \quad (3.19)$$

Ao substituir a (3.19) e a (3.18) na (3.5), finalmente encontra-se a equação para $f(r)$, que é dada por:

$$\frac{f''}{N^2} + \left[\frac{2}{rN^2} + \frac{1}{2M^2}\left(\frac{M^2}{N^2}\right)'\right]f' - \frac{2f}{r^2} - \lambda\eta^2 f(f^2 - 1) = 0. \quad (3.20)$$

No espaço plano, as funções $M^2(r)$ e $N^2(r)$ são iguais a 1, e então a equação (3.20) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dr}\left(f' + 2\frac{f}{r}\right) - \lambda\eta^2 f(f^2 - 1) = 0. \quad (3.21)$$

Seja $\tilde{r} = \eta \sqrt{\lambda} = r\delta^{-1}$, então em termos de \tilde{r} a equação (3.21) torna-se:

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left(\frac{df}{d\tilde{r}} + \frac{2f}{\tilde{r}} \right) - f(f^2 - 1) = 0. \quad (3.22)$$

Embora ainda não tenha-se encontrado uma solução fechada para a equação (3.22), em [29] Shi e Li usaram uma expansão em série de potências de $\tanh(\tilde{r}/\sqrt{2})$ para obter uma solução para $f(\tilde{r})$ no espaço plano. As condições de contorno usadas foram: $f(0) = 0$ e $\lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} f = 1$. Uma representação gráfica é dada na figura (3.1).

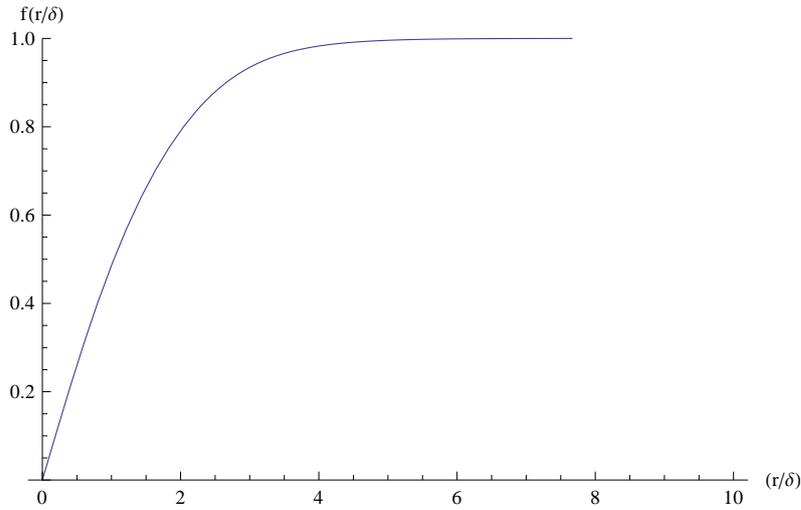


Figura 3.1: $f(\tilde{r})$ no espaço plano.

O monopolo apresenta uma região onde o valor esperado do campo no vácuo tende a zero, ao tamanho dessa região, afastada significativamente do vácuo, dá-se o nome de núcleo do monopolo. No espaço plano ele é dado por $\delta \sim \frac{1}{\eta \sqrt{\lambda}}$ e a sua massa é $M_n \sim \frac{\eta}{\sqrt{\lambda}}$.

Em seguida, o tensor energia-momento ($T_{\mu\nu}$) e o tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$) serão necessários para se obter as expressões para $M^2(r)$ e $N^2(r)$, na busca pela métrica que descreve o espaço curvo ao redor do monopolo.

O tensor energia-momento do monopolo global é dado explicitamente (Apêndice A) por:

$$T^0_0 = -\eta^2 \left[\frac{f'^2}{2N^2} + \frac{f^2}{r^2} + \frac{1}{4} \lambda \eta^2 (f^2 - 1)^2 \right], \quad (3.23)$$

$$T^1_1 = -\eta^2 \left[-\frac{f'^2}{2N^2} + \frac{f^2}{r^2} + \frac{1}{4} \lambda \eta^2 (f^2 - 1)^2 \right], \quad (3.24)$$

$$T^2_2 = T^3_3 = -\eta^2 \left[\frac{f'^2}{2N^2} + \frac{1}{4} \lambda \eta^2 (f^2 - 1)^2 \right]. \quad (3.25)$$

A partir da expressão T^0_0 pode-se observar que a mínima energia é alcançada quando $f = 1$, portanto, $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1$. Fora do núcleo, onde $f(r) \approx 1$, têm-se:

$$T^0_0 \approx T^1_1 \approx -\frac{\eta^2}{r^2} \quad \text{e} \quad T^2_2 = T^3_3 \approx 0. \quad (3.26)$$

Com auxílio das conexões pode-se calcular o tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$) e mostrar que,

$$R_{00} = -\frac{MM'N'}{N^3} + \frac{MM''}{N^2} + \frac{2MM'}{rN^2}, \quad (3.27)$$

$$R_{11} = -\frac{M''}{M} + \frac{N'M'}{NM} + \frac{2N'}{Nr}, \quad (3.28)$$

$$R_{22} = -\frac{1}{N^2} + \frac{rN'}{N^3} - \frac{rM'}{N^2M} + 1, \quad (3.29)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta \left(-\frac{1}{N^2} + \frac{rN'}{N^3} - \frac{rM'}{N^2M} + 1 \right). \quad (3.30)$$

Em seguida, após algumas manipulações algébricas, serão obtidas as expressões para as funções $M^2(r)$ e $N^2(r)$ respectivamente.

Combinando convenientemente as componentes do tensor de Ricci [30], pode-se mostrar que:

$$\frac{R_{11}}{2N^2} + \frac{R_{00}}{2M^2} + \frac{R_{22}}{r^2} = \frac{2N'}{rN^3} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2N^2}. \quad (3.31)$$

Além disto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(R^0_0 - R^1_1) - R^2_2 &= \frac{1}{2}(g^{00}R_{00} - g^{11}R_{11}) - g^{22}R_{22} \\ \frac{1}{2}(R^0_0 - R^1_1) - R^2_2 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{R_{00}}{M^2} - \frac{R_{11}}{N^2} \right) - \frac{R_{22}}{r^2} = -\left(\frac{R_{11}}{2N^2} + \frac{R_{00}}{2M^2} + \frac{R_{22}}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

De modo que, comparando a (3.32) com a (3.31), conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(R^0_0 - R^1_1) - R^2_2 &= -\left(\frac{2N'}{rN^3} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2N^2} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{N^2} - \frac{2rN'}{N^3} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sendo assim,

$$\left(\frac{r}{N^2} \right)' = \frac{1}{N^2} - \frac{2rN'}{N^3} = 1 - r^2 \left[\frac{1}{2}(R^1_1 - R^0_0) + R^2_2 \right]. \quad (3.34)$$

Com auxílio da equação de Einstein³, na forma

$$R^\mu{}_\nu = 8\pi G \left(T^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu T \right), \quad (3.35)$$

mostra-se que

$$R^1{}_1 - R^0{}_0 = 8\pi G (T^1{}_1 - T^0{}_0) \quad \text{e} \quad R^2{}_2 = -8\pi G \left(\frac{T^0{}_0}{2} + \frac{T^1{}_1}{2} \right). \quad (3.36)$$

Ao substituir as equações (3.36) em (3.34), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{N^2} \right)' &= 1 + 8\pi G r^2 T^0{}_0 \\ \frac{r}{N^2} &= r + 8\pi G \int_0^r (r^2 T^0{}_0) dr. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Substituindo a (3.23) em (3.37), têm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} &= 1 - \frac{8\pi G}{r} \eta^2 \int_0^r r^2 \left[\frac{f'^2}{2N^2} + \frac{f^2}{r^2} + \frac{\lambda}{4} \eta^2 (f^2 - 1)^2 \right] dr \\ \frac{1}{N^2} &= 1 - \frac{8\pi G}{r} \eta^2 \int_0^r r^2 \left[\frac{f'^2}{2N^2} + \frac{f^2}{r^2} + \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{\lambda}{4} \eta^2 (f^2 - 1)^2 \right] dr \\ \frac{1}{N^2} &= 1 - 8\pi G \eta^2 - \frac{8\pi G}{r} \eta^2 \int_0^r r^2 \left[\frac{f'^2}{2N^2} + \frac{(f^2 - 1)}{r^2} + \frac{\lambda}{4} \eta^2 (f^2 - 1)^2 \right] dr. \end{aligned} \quad (3.38)$$

De forma análoga ao procedimento adotado para encontrar uma expressão para $N^2(r)$, pode-se encontrar a expressão para $M^2(r)$.

Combinando as componentes R_{11} e R_{22} convenientemente, mostra-se que

$$\frac{R_{11}}{N^2} + \frac{R_{00}}{M^2} = \frac{1}{rN^2} \left[\frac{2N'}{N} + \frac{2M'}{M} \right]. \quad (3.39)$$

Observa-se também que

$$R^1{}_1 - R^0{}_0 = g^{11} R_{11} - g^{00} R_{00} = \left(\frac{R_{11}}{N^2} + \frac{R_{00}}{M^2} \right), \quad (3.40)$$

de modo que pela (3.40) e a (3.35) pode-se escrever:

$$R^1{}_1 - R^0{}_0 = \frac{1}{rN^2} \left(\frac{2N'}{N} + \frac{2M'}{M} \right)$$

³Onde, G é constante gravitacional e T é o traço do tensor energia momento.

$$\begin{aligned}
8\pi G(T^1_1 - T^0_0) &= \frac{1}{rN^2} \left(\frac{2N'}{N} + \frac{2M'}{M} \right) \\
8\pi GrN^2(T^1_1 - T^0_0) &= \frac{2N'}{N} + \frac{2M'}{M} = \frac{(N^2)'}{N^2} + \frac{(M^2)'}{M^2}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Integrando a (3.41) como abaixo,

$$\int_{\infty}^r \frac{d(N^2)}{N^2} + \int_{\infty}^r \frac{d(M^2)}{M^2} = \int_{\infty}^r 8\pi GrN^2(T^r_r - T^t_t) dr, \tag{3.42}$$

e tomando a condição $A(r)B(r)|_{r \rightarrow \infty} = 1$, obtém-se:

$$M^2(r) = \frac{1}{N^2(r)} \exp \left[\int_{\infty}^r 8\pi G(T^r_r - T^t_t) r N^2(r) dr \right]. \tag{3.43}$$

Na região externa ao núcleo do monopolo $T^t_t \approx T^r_r$, de modo que,

$$M^2(r) \approx \frac{1}{N^2(r)}. \tag{3.44}$$

Sendo assim, a (3.38) pode ser expressa como

$$\frac{1}{N^2(r)} = M^2(r) = 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r}. \tag{3.45}$$

Onde,

$$\mathbf{M} = 4\pi\eta^2 \int_0^r r^2 \left[\frac{f'^2}{2N^2} + \frac{f^2 - 1}{r^2} + \frac{\lambda}{4}\eta^2(f^2 - 1)^2 \right] dr. \tag{3.46}$$

Harari e Lousto [31] mostraram por meio de métodos numéricos que $\mathbf{M} \approx -6\pi \frac{\eta}{\sqrt{\lambda}}$; isto corresponde a um potencial gravitacional de natureza repulsiva. Entretanto, esse efeito pode ser ignorado na escala astrofísica, desde que:

$$\frac{\mathbf{M}}{r} \sim \frac{\eta}{\sqrt{\lambda}} = \eta^2 \frac{1}{\eta \sqrt{\lambda}} = \eta^2 \frac{\delta}{r}. \tag{3.47}$$

Onde δ é o tamanho do núcleo do monopolo. Como também fora pontuado por Vilenkin [5], para razoáveis valores de η e λ , nestas condições, \mathbf{M} pode ser negligenciado.

3.3 Análise Assintótica do Espaço-tempo do Monopolo Global

Negligenciando o termo de massa (\mathbf{M}) na (3.45), pode-se escrever o elemento de linha (equação 3.7) da métrica como:

$$ds^2 = -(1 - 8\pi G\eta^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 8\pi G\eta^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.48)$$

Definindo-se um novo sistema de coordenadas, tal que:

$$t' = \left(\sqrt{1 - 8\pi G\eta^2}\right)t \quad \text{e} \quad r' = \frac{r}{\sqrt{1 - 8\pi G\eta^2}}, \quad (3.49)$$

pode-se mostrar (redefinindo $r' \rightarrow r$ e $t' \rightarrow t$) que nesse novo sistema, tem-se:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (1 - 8\pi G\eta^2)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.50)$$

A métrica (3.50) descreve um espaço-tempo com algumas características muito interessantes. A primeira delas, pode ser observada ao se calcular a área de uma esfera de raio fixo, neste espaço. Lembrando-se que o elemento de volume em um determinado espaço, cujo determinante do tensor métrico é g , é dado por:

$$dV = \sqrt{-g}d^4x, \quad (3.51)$$

obtém-se facilmente a área da esfera. O determinante do tensor métrico, que é o produto da diagonal principal, é dado por

$$g = -r^4 \sin^2\theta (1 - 8\pi G\eta^2)^2. \quad (3.52)$$

Com auxílio da (3.52), a área é então calculada da seguinte forma,

$$\begin{aligned} A &= \int \sqrt{-g}d^2x = \int r^2 \sin\theta (1 - 8\pi G\eta^2) d\theta d\varphi \\ A &= r^2 (1 - 8\pi G\eta^2) \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 (1 - 8\pi G\eta^2). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Portanto, a área da superfície esférica de raio r , dada por (3.53), não é $4\pi r^2$, mas sim $4\pi r^2(1 - 8\pi G\eta^2)$. A (3.53) compreende um ângulo sólido total de:

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = 4\pi - 32\pi^2 G\eta^2. \quad (3.54)$$

Logo, nesse espaço existe um déficit de ângulo sólido dado por $\Delta\Omega = 32\pi^2 G\eta^2$.

No plano definido por $\theta = \frac{\pi}{2}$, a métrica é escrita como: $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (1 - 8\pi\eta^2)r^2 d\varphi$, de modo que o comprimento de um círculo de raio r , nesse plano, é dado por:

$$\begin{aligned} C = \int \sqrt{-g} d\varphi &= 2\pi r \sqrt{1 - 8\pi G\eta^2} \\ &= 2\pi r \left(1 - \frac{8\pi G\eta^2}{2}\right) = 2r\pi - 8r\pi^2 G\eta^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Este resultado, compreende um ângulo plano total de $2\pi - 8\pi^2 G\eta^2$. Isto significa que o plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ tem a mesma geometria de um cone com déficit angular igual a $8\pi^2 G\eta^2$.

A métrica (3.50), além de claramente apresentar um espaço com déficit angular, tem o potencial newtoniano igual a zero⁴, isto é, do ponto de vista clássico, não exerce qualquer atração gravitacional sobre a matéria.

3.4 Considerações Sobre a evolução de Monopolos Globais

A existência de monopolos com simetria local e global são preconizadas pelas teorias de grande unificação [4]. Nesse cenário, que baseia-se na teoria do Big Bang, o universo sofreu diversas transições de fase nas variadas escalas de energia, o que deu origem a diversos defeitos topológicos. Por ser isoladamente estável, o monopolo global em princípio, deveria ainda estar presente no universo. No entanto, atualmente nenhum monopolo global foi observado.

Em 1990, partindo do modelo para o monopolo global estudado neste capítulo [5], Hiscock realizou um estudo [32] onde por meio de argumentos cosmológicos e astrofísicos estabeleceu limites superiores para a densidade de monopolos globais. Ao exigir que a densidade de massa do monopolo global correspondesse a menos

⁴Isto porque $g_{00} = -1$ e, no limite Newtoniano pode-se tomar $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$, onde Φ é o potencial Newtoniano.

que 10% da densidade do universo fechado, ele mostrou que é pouco provável que exista pelo menos um monopolo em um grupo local de galáxias⁵, além de estabelecer outros limites, com base em efeitos de maré em grandes estruturas gravitacionalmente ligadas. Por ser demasiadamente baixa a densidade de monopolos, Hiscock sugeriu que: ou um mecanismo eficiente reduziu drasticamente a quantidade de monopolos, ou modelos que envolvam quebra de simetria global capaz de suportar monopolos não são plausíveis.

Em [33], Bennett e Rhie simularam computacionalmente a evolução cosmológica de monopolos globais partindo do modelo $SO(3)$ estudado neste capítulo. Ao considerar aleatórias orientações de campo sem posições fixas, os autores mostraram que durante a expansão do universo, por um processo de correlação, monopolos e antimonopolos rapidamente aniquilaram-se mutuamente. A comóvel densidade de monopolo (n) obtida foi:

$$n = \frac{3,5 \pm 1,5}{d_H} \quad (\text{Era da radiação}),$$

$$n = \frac{4 \pm 1,5}{d_H} \quad (\text{Era da matéria}).$$

Onde d_H é o comprimento de Hubble. Sendo assim, espera-se que a quantidade de monopolos no volume de Hubble seja da ordem de 1, o que certamente implica em uma densidade muito menor que a sugerida por Hiscock. Portanto, dentro destas limitações, é compreensível que ainda não se tenha observado os efeitos dos monopolos globais.

⁵Grupo de algumas dezenas de galáxias, incluindo a via láctea e Andrômeda.

Capítulo 4

SOLUÇÃO TIPO MONOPOLO EM TEORIA DE CAMPO COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

No capítulo anterior, estudou-se o monopolo global, teoria contendo um tripleto de campos escalares, cujo estado de vácuo quebra a simetria global $SO(3)$. Neste capítulo, deseja-se mostrar que soluções tipo monopolo também podem surgir em teorias de campo contendo um único campo tensorial, que dinamicamente viola a simetria de Lorentz. Diferentemente de modelos que acoplam-se a um campo (de fundo) constante, que viola a simetria de Lorentz¹, a solução descrita neste capítulo é advinda do próprio tensor, com sua própria dinâmica.

Inicialmente trabalha-se no espaço plano. Posteriormente, a partir da seção 4.1, na qual acopla-se o tensor energia-momento com a métrica, trabalha-se no espaço curvo.

A teoria é descrita pela seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{6}F^{\mu\nu\lambda}F_{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{2}(B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - b^2)^2. \quad (4.1)$$

Onde o campo tensorial $B^{\mu\nu}$ é antissimétrico. O tensor $F_{\mu\nu\lambda}$ é definido da seguinte maneira:

$$F_{\mu\nu\lambda} = 3\partial_{[\mu}B_{\nu\lambda]} = \partial_{\mu}B_{\nu\lambda} + \partial_{\lambda}B_{\mu\nu} + \partial_{\nu}B_{\lambda\mu}. \quad (4.2)$$

A equação de movimento é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange:

$$\partial_{\sigma} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\sigma} B^{\alpha\beta})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B^{\alpha\beta}} = 0. \quad (4.3)$$

¹Ver por exemplo, [34] e [35]

Calculando-se separadamente cada termo da (4.3), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma B^{\alpha\beta})} &= -\frac{1}{6} \left[\frac{\partial F^{\mu\nu\lambda}}{\partial(\partial_\sigma B^{\alpha\beta})} F^{\mu\nu\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\nu\lambda}}{\partial(\partial_\sigma B^{\alpha\beta})} F^{\mu\nu\lambda} \right] \\
&= -\frac{1}{3} \left[\frac{\partial F^{\mu\nu\lambda}}{\partial(\partial_\sigma B^{\alpha\beta})} F^{\mu\nu\lambda} \right] \\
&= -\frac{1}{3} \left[\frac{\partial(\partial^\mu B^{\nu\lambda} + \partial^\lambda B^{\mu\nu} + \partial^\nu B^{\lambda\mu})}{\partial(\partial_\sigma B^{\alpha\beta})} \right] F^{\mu\nu\lambda} \\
&= -\frac{1}{3} (g^{\mu\sigma} F_{\mu\alpha\beta} + g^{\lambda\sigma} F_{\alpha\beta\lambda} + g^{\nu\sigma} F_{\beta\nu\alpha}) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma B^{\alpha\beta})} &= -\partial^\mu F_{\mu\alpha\beta} \tag{4.4}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B^{\alpha\beta}} &= -2\frac{\lambda}{2} (B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - b^2) \left[\frac{\partial B^{\mu\nu}}{\partial B^{\alpha\beta}} B_{\mu\nu} + \frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial B^{\alpha\beta}} B^{\mu\nu} \right] \\
&= -\lambda (B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - b^2) 2\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu B_{\mu\nu} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B^{\alpha\beta}} &= -2\lambda (B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - b^2) B_{\alpha\beta}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.4) e (4.5) em (4.3), obtêm-se a equação de campo:

$$\partial^\mu F_{\mu\alpha\beta} - 2\lambda (B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - b^2) B_{\alpha\beta} = 0. \tag{4.6}$$

O tensor energia-momento associado a lagrangiana (4.1), cujo cálculo explícito encontra-se no apêndice B.1, é dado por:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha\beta} F_\nu^{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta\lambda} F^{\alpha\beta\lambda} - \frac{\lambda}{2} \eta_{\mu\nu} (B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} - b^2)^2 + 4\lambda (B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} - b^2) B_{\mu\alpha} B_\nu^\alpha. \tag{4.7}$$

Neste ponto, algumas características importantes devem ser destacadas. Observa-se que de acordo com a (4.7) o estado de mínima energia da teoria é alcançado por qualquer campo tensorial constante de segunda ordem satisfazendo:

$$B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = b^2. \tag{4.8}$$

Além disso, campos com essas características também são soluções da equação de campo (4.6). Pelo que já foi discutido neste trabalho, é simples observar que a expressão (4.8), onde $B^{\mu\nu}$ minimiza o potencial, define a variedade do vácuo (\mathcal{M}).

Diferentemente do campo de Higgs (escalar), o valor esperado do campo no vácuo trata-se de um tensor de segunda ordem não nulo. Isto, obviamente, implica em uma estrutura geométrica no espaço tempo que viola a simetria de Lorentz. Por esta razão,

diz-se que há uma quebra espontânea da simetria de Lorentz.

Para identificar o tipo de defeito descrito nesta teoria, sabe-se que é necessário investigar a topologia da variedade do vácuo e mostrar qual é o seu grupo de homotopia. Desenvolvendo-se a equação (4.8) têm-se:

$$\begin{aligned}
B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} &= b^2 \\
\cancel{B^{00}B_{00}} + 2B^{0i}B_{0i} + B^{ij}B_{ij} &= b^2 \\
2\sum_{i=1}^3 \eta^{00}\eta^{ii}(B_{0i})^2 + 2\sum_{i<j}^3 \eta^{ii}\eta^{jj}(B_{ij})^2 &= b^2 \\
-2\sum_{i=1}^3 (B_{0i})^2 + \sum_{i<j}^3 (B_{ij})^2 &= b^2 \\
\sum_{i<j}^3 (B_{ij})^2 &= b^2 + 2\sum_{i=1}^3 (B_{0i})^2. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

A componente B^{00} é nula porque $B^{\mu\nu}$ é antissimétrico. Pela mesma razão, os tensores $B^{\mu\nu}$ definem um espaço vetorial [36] hexadimensional e, a relação (4.9) define uma subvariedade pentadimensional nesse espaço. Escolhendo-se as três componentes B_{0i} , as outras três componentes B_{ij} são vinculadas a uma superfície esférica de raio $\sqrt{b^2 + 2\sum_{i=1}^3 (B_{0i})^2}$. Conclui-se, portanto, que esta variedade é homeomórfica a $S^2 \times \mathbb{R}^3$. Com isto, mostra-se que a variedade do vácuo apresenta topologia não trivial, matematicamente: $\pi_2(\mathcal{M}) \neq \mathbb{I}$.

O passo seguinte consiste em encontrar uma solução para a equação de movimento. Desde que haja solução, espera-se que a mais simples seja estática e tenha simetria esférica. No sistema de coordenadas esféricas usual $((t, r, \theta, \phi) = (0, 1, 2, 3))$, a forma da solução com estas características pode ser expressa por meio de duas funções da coordenada radial r [36, 37], $f(r)$ e $g(r)$.

$$B_{tr} = -B_{rt} = f(r) \quad \text{e} \quad B_{\theta\phi} = -B_{\phi\theta} = g(r)r^2 \sin \theta \tag{4.10}$$

com as demais componentes nulas.

Tomando-se $\alpha = t$ e $\beta = r$ na (4.6), obtém-se:

$$\nabla^\mu F_{\mu 01} - 2\lambda(B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - b^2)B_{01} = 0. \tag{4.11}$$

A presença da derivada covariante ∇^μ deve-se ao princípio de acoplamento mínimo²,

²Onde, $\partial \rightarrow \nabla$ e $F_{\mu\nu\lambda} \rightarrow 3\nabla_{[\mu}B_{\nu\lambda]}$. Para uma revisão, veja o capítulo 4 da referência [28].

implementado, desde que o sistema de coordenadas seja esférico, no qual os símbolos de Christoffel não são nulos. Calculando separadamente cada termo de (4.11), têm-se:

$$\begin{aligned}
\nabla^\mu F_{\mu 01} &= g^{\mu\alpha} \nabla_\alpha F_{\mu 01} = g^{\mu\alpha} \left[\partial_\alpha F_{\mu 01} - \Gamma_{\alpha\mu}^\epsilon F_{\epsilon 01} - \Gamma_{\alpha 0}^\epsilon F_{\mu\epsilon 1} - \Gamma_{\alpha 1}^\epsilon F_{\mu 0\epsilon} \right] \\
&= \partial^\mu F_{\mu 01} - g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^\epsilon F_{\epsilon 01} - g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^\epsilon F_{\mu\epsilon 1} - g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha 1}^\epsilon F_{\mu 0\epsilon} \\
&= \left[\partial^2 F_{201} + \partial^3 F_{301} \right] - \left[g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^2 F_{201} + g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^3 F_{301} \right] - \left[g^{00} \Gamma_{00}^\epsilon F_{0\epsilon 1} \right. \\
&\quad \left. + g^{11} \Gamma_{10}^\epsilon F_{1\epsilon 1} \right] + \left[g^{00} \Gamma_{01}^\epsilon F_{00\epsilon} + g^{11} \Gamma_{11}^\epsilon F_{10\epsilon} + g^{22} \Gamma_{20\epsilon} F_{20\epsilon} + g^{33} \Gamma_{31}^\epsilon F_{30\epsilon} \right].
\end{aligned}$$

A avaliação desses termos se dá de forma prática, levando-se em consideração as componentes não nulas da conexão e o fato de que dois índices iguais em $F_{\mu\nu\lambda}$ o tornam nulo. Dessa maneira, mostra-se que:

$$\nabla^\mu F_{\mu 01} = 0. \quad (4.12)$$

Desenvolvendo o segundo termo da (4.11), têm-se:

$$\begin{aligned}
(B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - b^2) B_{10} &= (2g^{00} g^{11} (B_{01})^2 + 2g^{22} g^{33} (B_{23})^2 - b^2) f \\
&= \left(-2f^2 + \frac{2}{r^4 \sin^2 \theta} (g^2 r^4 \sin^2 \theta) - b^2 \right) f \\
&= (-2f^2 + 2g^2 - b^2) f.
\end{aligned} \quad (4.13)$$

Substituindo (4.13) e (4.12) em (4.11) obtém-se:

$$2\lambda (-2f^2 + 2g^2 - b^2) f = 0. \quad (4.14)$$

A equação (4.14) implica em duas situações: ou $f(r) = 0$ ou $-2f^2 + 2g^2 = b^2$. Esta última condição é equivalente a $B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = b^2$, ou seja, corresponde a variedade do vácuo. Portanto, a fim de que a solução ao longo de todo o espaço não seja a solução trivial, deve-se escolher $f(r) = 0$. Com isto, o tensor $B^{\mu\nu}$ passa a ter apenas uma componente independente não nula, a saber $B_{23} = B_{\theta\phi}$.

A equação obtida tomando-se $\alpha = \theta$ e $\beta = \phi$, na equação de campo (4.6), exige um processo algébrico um pouco mais extenso, no entanto, pode ser obtida como um caso especial da sua respectiva representante no espaço curvo, por esta razão, seu cálculo explícito foi deixado ao apêndice (B.2), que resultou em:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dg}{dr} + \frac{2}{r} g \right) - 2\lambda (2g^2 - b^2) g = 0. \quad (4.15)$$

Ao definir as funções $\tilde{g} = \frac{g\sqrt{2}}{b}$ e $\tilde{r} = rb\sqrt{2\lambda}$, a equação (4.15) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left(\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}}\tilde{g} \right) - (\tilde{g}^2 - b^2)\tilde{g} = 0. \quad (4.16)$$

Esta equação é a mesma encontrada em (3.22), no caso do monopolo global.

4.1 Acoplamento do Tensor Energia-Momento com a Métrica

Para se verificar os efeitos gravitacionais do tensor antissimétrico $B_{\mu\nu}$, deve-se acoplá-lo, via seu tensor energia-momento, ao tensor métrico estático e esfericamente simétrico, cujo elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = -M^2(r)dt^2 + N^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.17)$$

Novamente, como no caso plano, $B_{\mu\nu}$ tem apenas uma componente independente, dada por

$$B_{\theta\phi} = -B_{\phi\theta} = g(r)r^2 \sin\theta. \quad (4.18)$$

Como demonstra-se no apêndice (B.1), as componentes não nulas do tensor energia-momento são:

$$T_{00} = \frac{M^2}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 + \frac{\lambda M^2}{2} (2g^2 - b^2)^2, \quad (4.19)$$

$$T_{11} = \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{\lambda N^2}{2} (2g^2 - b^2)^2, \quad (4.20)$$

$$T_{22} = \frac{r^2}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{r^2\lambda}{2} (2g^2 - b^2)^2 + 4\lambda r^2 g^2 (2g^2 - b^2), \quad (4.21)$$

$$T_{33} = \sin^2\theta T_{22}. \quad (4.22)$$

As duas componentes independentes da equação de Einstein em função de $M(r)$ e $N(r)$ podem ser obtidas de

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \kappa T_{00} \quad (\text{onde, } \kappa = 8\pi G) \quad (4.23)$$

$$R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = \kappa T_{11}, \quad (4.24)$$

onde as expressões para R_{00} , R_{11} e R são as mesmas do capítulo 3 (seção 3.2). Ao fazer as devidas substituições, as equações (4.23) e (4.24) resultam respectivamente em:

$$\frac{2}{r} \frac{N'}{N} + \frac{(N^2 - 1)}{r^2} = \frac{\epsilon}{2b^2} \left[\left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 + \frac{\lambda N^2}{2} (2g^2 - b^2)^2 \right] \quad (4.25)$$

e

$$\frac{2}{r} \frac{M'}{M} + \frac{(N^2 - 1)}{r^2} = \frac{\epsilon}{2b^2} \left[\left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 + \frac{\lambda N^2}{2} (2g^2 - b^2)^2 \right]. \quad (4.26)$$

Onde $\epsilon = 16\pi Gb^2$ e (') indica diferenciação com relação a r . A equação de campo para espaço curvo torna-se (Apêndice B.2):

$$\frac{M}{N} \frac{d}{dr} \left[\frac{M}{N} \left(g' + 2\frac{g}{r} \right) \right] - 2\lambda N^2 (2g^2 - b^2)g = 0. \quad (4.27)$$

Embora uma abordagem numérica seja dada às equações acopladas [38], no contexto do campo gravitacional, pode-se usar o limite BPS ($\lambda \rightarrow 0$) [36] com $g \rightarrow \frac{b}{\sqrt{2}}$ para investigar os efeitos assintóticos do campo. Sendo assim, as equações (4.26) e (4.25) tornam-se:

$$\frac{2}{\tilde{r}} \frac{N'}{N} + \frac{(N^2 - 1)}{\tilde{r}^2} = \frac{\epsilon}{\tilde{r}^2} \quad (4.28)$$

e

$$\frac{2}{\tilde{r}} \frac{M'}{M} + \frac{(N^2 - 1)}{\tilde{r}^2} = \frac{\epsilon}{\tilde{r}^2}. \quad (4.29)$$

Neste caso, o índice (') indica diferenciação com relação a \tilde{r} . Pode-se observar, que embora as equações (4.28) e (4.29) não sejam lineares, elas se encaixam em uma classe de equações conhecida como equação de Bernoulli³, com método de solução bem estabelecido na literatura. Portanto, pode-se mostrar que a solução destas equações são dadas por:

$$N^2(r) = (1 + \epsilon) \left[\frac{\tilde{r}^{1+\epsilon}}{\tilde{r}^{1+\epsilon} + C_1} \right] \quad (4.30)$$

e

$$M^2(r) = C_2 \left[\frac{\tilde{r}^{1+\epsilon} + C_1}{\tilde{r}^{1-\epsilon}} \right]. \quad (4.31)$$

Onde C_1 e C_2 são constantes oriundas da integração. Desde que a coordenada t pode ser reescalada, pode-se escolher $C_2 = 1$.

Tomando-se $C_1 = 0$, o correspondente elemento de linha pode ser escrito como:

$$ds^2 = -\tilde{r}^{2\epsilon} dt^2 + (1 + \epsilon) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.32)$$

Pelo mesmo procedimento usado na seção 3.3 do capítulo anterior, pode-se mostrar

³Equações da forma: $f'(x) + P(x)f(x) = Q(x)f^n(x)$, com n real e, $P(x), Q(x)$ funções de x .

que, para⁴ $\epsilon \ll 1$, o plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ tem a geometria de um cone com déficit angular $\pi\epsilon$. Mas ao contrário do monopolo $SO(3)$, a componente g_{00} da métrica (4.32) cresce lentamente com r , no entanto, o escalar de curvatura é proporcional a r^{-2} . Além disso, desde que $\epsilon \ll 1$, esta solução é fisicamente aceitável em escalas onde os efeitos astrofísicos são perceptíveis [36].

4.2 Efeitos sobre a Propagação da Luz

Os efeitos gravitacionais do monopolo serão estudados a partir da propagação da luz (que segue geodésicas nulas). Os principais efeitos são: o desvio gravitacional para o vermelho (redshift) e a deflexão da luz. A metodologia e os resultados empregada aqui são os mesmos da referência [39].

A energia de um fóton medida por um observador cuja velocidade é v^μ é dada por

$$E = \hbar\omega = -p_\mu v^\mu. \quad (4.33)$$

Onde p_μ é o quadrimomento do fóton; \hbar e ω são respectivamente a constante de Planck dividida por 2π e a frequência angular. Para um observador em repouso $v^\mu = (v^0, 0, 0, 0)$, tem-se:

$$v^\mu v_\mu = g_{00}(v^0)^2. \quad (4.34)$$

Da condição de normalização $v^\mu v_\mu = -1$ tem-se:

$$\begin{aligned} g_{00}(v^0)^2 = -1 &\rightarrow M^2 v_0^2 = 1 \\ v_0 &= \frac{1}{\tilde{r}\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

A independência temporal da métrica, por sua vez, indica a existência do vetor de Killing ξ^μ :

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (4.36)$$

tal que

$$v^\mu = \frac{1}{\tilde{r}\epsilon} \xi^\mu. \quad (4.37)$$

Portanto, de (4.33) obtém-se

$$\hbar\omega = -p_\mu v^\mu = -\frac{1}{\tilde{r}\epsilon} (p_\mu \xi^\mu). \quad (4.38)$$

Onde $p_\mu \xi^\mu$ é uma grandeza conservada ao longo da geodésica.

⁴A condição $\epsilon \ll 1$ é válida desde que a escala de massa b seja bem abaixo da escala de Planck.

Com estas considerações, seja um fóton emitido da posição r_1 com frequência $\omega(r_1)$ em relação ao monopolo. Ele será recebido na posição r_2 com frequência $\omega(r_2)$. Então, da relação (4.38) mostra-se:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\epsilon \rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_1} = 1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right). \quad (4.39)$$

Para $\epsilon \ll 1$,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \approx \epsilon \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right). \quad (4.40)$$

Como pode-se observar o desvio para o vermelho é de fato muito pequeno, ainda que $|r_2 - r_1|$ seja absurdamente grande, para valores de b com poucas ordens de grandeza menor que a escala de Planck, tal efeito ainda assim será muito difícil de ser observado [36, 40]. O próximo efeito, e mais interessante, será então a deflexão do raio de luz.

A metodologia utilizada para se obter as equações geodésicas é a mesma usada em [39, 41], de modo simples, funciona da seguinte forma: Seja

$$2k = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \quad (2k = 0 \text{ para geodésicas nulas}). \quad (4.41)$$

Onde o ponto corresponde diferenciação em relação ao parâmetro a fim (λ). As equações geodésicas são obtidas de:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial k}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial k}{\partial x^\mu} = 0. \quad (4.42)$$

Sem perda de generalidade, pode-se tomar $\theta = \frac{\pi}{2}$ como sendo o plano da geodésica nula. Dito isto, com auxílio da métrica, a (4.41) conduz a:

$$-M^2\dot{t}^2 + N^2\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = 0. \quad (4.43)$$

Para $\mu = 0$ e $\mu = 3$, na (4.42), mostra-se respectivamente as seguintes quantidades conservadas:

$$E = M^2\dot{t} \quad \text{e} \quad L = r^2\dot{\phi}. \quad (4.44)$$

Em termos destas quantidades, a (4.43) torna-se:

$$\dot{r}^2 = \left[\frac{L^2}{r^2(1+\epsilon)} - E^2 \frac{\tilde{r}^{-2\epsilon}}{(1+\epsilon)} \right]. \quad (4.45)$$

Multiplicando a (4.45) por $\dot{\phi}^{-1}$ e simplificando, mostra-se que:

$$\frac{d\phi}{dr} = \mp \left[\frac{\sqrt{1+\epsilon}}{r^2 \sqrt{\beta^{-2}(b\sqrt{2\lambda})^{-2\epsilon} - r^{-2}}} \right]. \quad (4.46)$$

Com $\beta = \frac{L}{E}$. Deseja-se obter $\Delta\phi = \phi(r \rightarrow \infty) - \phi(r \rightarrow -\infty)$. A fim de que o raio de luz não seja capturado, o parâmetro de impacto não deve ser menor que um dado valor crítico β_c .

Reescrevendo a (4.45), tem-se:

$$\frac{E^2}{\tilde{r}^{2\epsilon}(1+\epsilon)} = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2(1+\epsilon)}. \quad (4.47)$$

De modo que o potencial efetivo para a geodésica nula é $V(r) = \frac{L^2}{r^2(1+\epsilon)}$. Sendo assim, a deflexão ocorre na posição $r = r_0$, onde r_0 é tal que:

$$V(r_0) = \frac{E^2}{\tilde{r}_0^{2\epsilon}}. \quad (4.48)$$

Onde $\tilde{r}_0 = b\sqrt{2\lambda}r_0$. Em outras palavras, a energia potencial não deve exceder a energia total, caso contrário, o raio de luz seria capturado. A raiz da equação (4.48) é a mesma que anula o denominador no lado direito da (4.46).

Por simetria, $\Delta\phi$ pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Delta\phi = \pm 2 \int_{\infty}^{r_0} \frac{\sqrt{1+\epsilon}}{r^2 \sqrt{\beta^{-2}(b\sqrt{2\lambda})^{-2\epsilon} - r^{-2}}} dr. \quad (4.49)$$

Como resultado desta integração, mostra-se que:

$$\Delta\phi = \left(\frac{\sqrt{1+\epsilon}}{1-\epsilon} \right) \pi. \quad (4.50)$$

A deflexão, o ângulo entre a trajetória não perturbada e a trajetória perturbada, é dada por $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$, de modo que:

$$\delta\phi = \frac{3\pi}{2}\epsilon. \quad (4.51)$$

Como se pôde constatar, $\delta\phi$ não apresenta qualquer dependência com o parâmetro de impacto aparente $\beta = \frac{L}{E}$, não dependendo das propriedades da geodésica. Isto sugere, que pelo menos no que diz respeito a deflexão da luz, o espaço apresenta um déficit de ângulo sólido $\frac{3\epsilon}{2}$, de maneira similar ao espaço assintótico do monopolo $SO(3)$. Seifert

[36, 40], partindo da aproximação BPS, mostrou que o monopolo global $SO(3)$ e o monopolo com violação da simetria de Lorentz apresentam as mesmas características, como de fato verificou-se por meio da abordagem assintótica. Portanto, segundo Seifert, por terem a mesma assinatura, os mecanismos de produção e aniquilação de monopolos discutidos no capítulo 3 podem ser empregados neste caso. Mas é importante enfatizar que isto é apenas uma hipótese, que até o momento ainda não foi verificada. Conforme discutiu-se na seção 3.4, do capítulo 3, espera-se que hajam aproximadamente cerca de quatro monopolos $SO(3)$ por volume de Hubble, isto por exemplo, não pode ser aplicado diretamente para o monopolo com violação da simetria de Lorentz; exatamente porque enquanto no primeiro caso tem-se um escalar (ϕ^a), no segundo tem-se um tensor ($B^{\mu\nu}$), de modo que é plausível admitir que pode haver muitas diferenças no processo de evolução de ambos monopolos.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Certamente, a característica mais marcante sobre defeitos topológicos é como eles são sensíveis ao conceito de simetria. Por esta razão, o desenvolvimento deste trabalho se deu de forma gradual, para que esta característica pudesse ser percebida na evolução das ideias que apresentaram-se na seguinte sequência: Kinks, vórtices e monopolos.

No capítulo 2, o estudo sobre os três tipos de defeitos citados acima foi responsável pela introdução dos conceitos físicos e matemáticos subjacentes ao tema. O mecanismo da quebra espontânea de simetria aliado à topologia da variedade do vácuo, permitiu de forma sistemática, classificar os diversos tipos de defeitos. Além disto, é importante destacar como a simetria de gauge, ou seja, os graus de liberdade internos, permitem correlacionar os diversos tipos de defeitos. Por exemplo, o grupo de simetria do vórtice, o $U(1)$, é um subgrupo do grupo de simetria mais geral $SU(2)$, e por um raciocínio dessa natureza, mostrou-se que ao estender o grupo de simetria do eletromagnetismo para o $SU(2)$, a existência de monopolos ocorre de forma natural, que como visto, apresenta uma carga de natureza topológica.

Ainda no capítulo 2, introduziu-se a ideia de monopolos partindo-se do monopolo magnético de Dirac, cuja existência implica na quantização da carga elétrica. Entretanto, a existência do monopolo de Dirac só pode ser verdadeira se modificações nas equações de Maxwell puderem ser feitas. Isto, no entanto, não significa que a eletrodinâmica de Maxwell precisa de modificações. Ao expandir o grupo de simetria $U(1)$ para o $SU(2)$, 't Hooft e Polyakov apresentaram um modelo não abeliano com acoplamentos dos campos de gauge capaz de suportar a existência de monopolos magnéticos. Tendo-se feito uma revisão sobre defeitos topológicos, passou-se aos capítulos centrais da dissertação, os monopolos globais, em cenários com violação e sem violação da simetria de Lorentz.

Segundo os autores Barriola e Vilenkin¹, o universo primordial passou por diversas transições de fase vinculadas ao mecanismo da quebra espontânea de simetria, isto, por sua vez, pode ter dado origem a diversos tipos de defeitos topológicos, incluindo monopolos. A fim de descrever o monopolo, eles propuseram o modelo que foi estudado no capítulo 3, o monopolo global, formado por um tripleto de campos escalares acoplados, cuja variedade do vácuo quebra em $U(1)$ o grupo de simetria da lagrangiana, o $SO(3)$. Por isto, refere-se ao monopolo global como $SO(3)$. Mostrou-se que esse modelo tem algumas características muito interessantes. No regime assintótico ($r \gg \delta$), o espaço apresenta um déficit de ângulo sólido. Em $\theta = \frac{\pi}{2}$, ele tem a geometria de um cone com déficit angular dado por $8\pi^2 G\eta^2$. Além disso, esse espaço não apresenta qualquer interação gravitacional, desde que $g_{00} = -1$. É importante frisar, que a quebra de simetria no monopolo $SO(3)$ está relacionada a um campo escalar (campo de Higgs), à medida que se aproxima da variedade do vácuo, o campo apresenta um valor esperado no vácuo não nulo.

No capítulo 4, mostrou-se que a quebra da simetria de Lorentz, uma simetria do espaço-tempo considerada fundamental, pode dar origem a soluções tipo monopolo. Inicialmente mostrou-se que um campo tensorial antissimétrico de rank 2, $B^{\mu\nu}$, apresenta a variedade do vácuo necessária para suportar defeito tipo monopolo. Entretanto, o valor esperado do campo no vácuo fornece uma estrutura geométrica de tal forma que viola a simetria de Lorentz. Em seguida, mostrou-se que tanto no espaço plano quanto no espaço curvo (tomando-se o limite BPS), a solução encontrada é similar ao caso do monopolo $SO(3)$, em outras palavras, a assinatura do monopolo com violação de Lorentz é similar à do monopolo $SO(3)$ (com diferenças sobre suas escalas de energia, η e b). É interessante notar que a origem dos dois modelos é bem diferente, o monopolo $SO(3)$ de forma alguma viola a simetria de Lorentz.

Uma última questão a ser levada em conta, é que monopolos ainda não foram observados na natureza, entretanto, isto não descarta a possibilidades de existência deles, afinal, possíveis mecanismos de aniquilação podem ter reduzido significativamente o número de tais objetos. Hiscock [32] argumentou que é pouco provável que há pelo menos 1 monopolo em grupo local de galáxias. Bennett e Rhie [33] foram ainda mais dramáticos ao mostrar, via simulações computacionais, que há cerca de 4 monopolos por volume de Hubble. Estes, como discutiu-se no final do capítulo 4, são dados acerca dos monopolos $SO(3)$, para o caso com violação pode haver mudanças. O fato é que

¹Que basearam-se no trabalho de Kibble [3], sobre a formação de defeitos topológicos no universo primordial.

tais defeitos topológicos ainda são muito estudados e exigidos em modelos teóricos como teorias de grande unificação.

Apêndice A

TENSOR ENERGIA-MOMENTO DO MONOPOLO GLOBAL

Seja a lagrangiana e o tensor energia-momento respectivamente dados por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^a - \frac{1}{4}(\phi^a\phi^a - \eta^2)^2 \quad (\text{A.1})$$

e

$$T_{\alpha\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(g^{\alpha\nu})} = -2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(g^{\nu\alpha})} + g_{\alpha\nu}\mathcal{L}. \quad (\text{A.2})$$

Onde a derivada ∂ corresponde a derivada funcional e g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. A expressão para o tensor energia-momento do monopolo global pode ser então calculada.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(g^{\nu\alpha})} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(g^{\alpha\nu})}(\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^a) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(g^{\alpha\nu})}(g^{\mu\lambda}\partial_\lambda\phi^a\partial_\mu\phi^a) \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\lambda\phi^a\partial_\mu\phi^a\left(\frac{\delta^\mu_\alpha\delta^\lambda_\nu + \delta^\lambda_\alpha\delta^\mu_\nu}{2}\right) = -\frac{1}{4}(\partial_\nu\phi^a\partial_\alpha\phi^a + \partial_\alpha\phi^a\partial_\nu\phi^a) \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(g^{\nu\alpha})} &= -\frac{1}{2}\partial_\nu\phi^a\partial_\alpha\phi^a. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Ao substituir a (A.3) na (A.2) mostra-se que:

$$T_{\alpha\nu} = \partial_\nu\phi^a\partial_\alpha\phi^a + g_{\alpha\nu}\mathcal{L}. \quad (\text{A.4})$$

Como $T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}$, pode-se escrever:

$$T^\mu{}_\nu = \partial_\nu\phi^a\partial^\mu\phi^a + \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}. \quad (\text{A.5})$$

Antes de se passar aos cálculos explícitos das componentes de T^μ_ν , deve-se expressar primeiramente a lagrangiana em termos de $f(r)$. Partindo-se do primeiro termo de (A.1), tem-se:

$$\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a = \partial_0 \phi^a \partial^0 \phi^a + \partial_1 \phi^a \partial^1 \phi^a + \partial_2 \phi^a \partial^2 \phi^a + \partial_3 \phi^a \partial^3 \phi^a. \quad (\text{A.6})$$

Onde,

$$\partial_1 \phi^a \partial^1 \phi^a = g^{11} \partial_1 \phi^a \partial_1 \phi^a = g^{11} [(\partial_1 \phi^1)^2 + (\partial_1 \phi^2)^2 + (\partial_1 \phi^3)^2], \quad (\text{A.7})$$

$$\partial_2 \phi^a \partial^2 \phi^a = g^{22} \partial_2 \phi^a \partial_2 \phi^a = g^{22} [(\partial_2 \phi^1)^2 + (\partial_2 \phi^2)^2 + (\partial_2 \phi^3)^2], \quad (\text{A.8})$$

$$\partial_3 \phi^a \partial^3 \phi^a = g^{33} \partial_3 \phi^a \partial_3 \phi^a = g^{33} [(\partial_3 \phi^1)^2 + (\partial_3 \phi^2)^2 + (\partial_3 \phi^3)^2]. \quad (\text{A.9})$$

As componentes de (A.7) são explicitamente calculadas abaixo.

$$(\partial_1 \phi^1)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta f r \sin \theta \cos \varphi}{r} \right) \right]^2 = \eta^2 f'^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, \quad (\text{A.10})$$

$$(\partial_1 \phi^2)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta f r \sin \theta \sin \varphi}{r} \right) \right]^2 = \eta^2 f'^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi, \quad (\text{A.11})$$

$$(\partial_1 \phi^3)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta f r \cos \theta}{r} \right) \right]^2 = \eta^2 f'^2 \cos^2 \theta. \quad (\text{A.12})$$

Inserindo a (A.10 - A.12) em (A.7) obtém-se:

$$\begin{aligned} \partial_1 \phi^a \partial^1 \phi^a &= g^{11} \eta^2 f'^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \\ \partial_1 \phi^a \partial^1 \phi^a &= \frac{1}{N^2} \eta^2 f'^2. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

As componentes de (A.8) são explicitamente calculadas abaixo:

$$(\partial_2 \phi^1)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\eta f r \sin \theta \cos \varphi}{r} \right) \right]^2 = \eta^2 f^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi, \quad (\text{A.14})$$

$$(\partial_2 \phi^2)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\eta f r \sin \theta \sin \varphi}{r} \right) \right]^2 = \eta^2 f^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi, \quad (\text{A.15})$$

$$(\partial_2 \phi^3)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\eta f r \cos \theta}{r} \right) \right]^2 = \eta^2 f^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.16})$$

Substituindo a (A.14 - A.16) em (A.8), obtém-se:

$$\partial_2 \phi^a \partial^2 \phi^a = g^{22} \eta^2 f^2 = \frac{1}{r^2} \eta^2 f^2. \quad (\text{A.17})$$

As componentes de (A.9) são explicitamente calculadas abaixo

$$(\partial_3\phi^1)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\eta fr \sin\theta \cos\varphi}{r} \right) \right]^2 = \eta^2 f^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi, \quad (\text{A.18})$$

$$(\partial_3\phi^2)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\eta fr \sin\theta \sin\varphi}{r} \right) \right]^2 = \eta^2 f^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi, \quad (\text{A.19})$$

$$(\partial_3\phi^3)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\eta fr \cos\theta}{r} \right) \right]^2 = 0. \quad (\text{A.20})$$

Substituindo (A.18 - A.20) em (A.9) obtém-se:

$$\begin{aligned} \partial_3\phi^a \partial^3\phi^a &= g^{33} \eta^2 f^2 \sin^2\theta = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \eta^2 f^2 \sin^2\theta \\ \partial_3\phi^a \partial^3\phi^a &= \frac{\eta^2 f^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Substituindo (A.13), (A.17) e (A.21) em (A.6) obtém-se:

$$\partial_\mu\phi^a \partial^\mu\phi^a = \frac{\eta^2 f'^2}{N^2} + 2\frac{\eta^2 f^2}{r^2}. \quad (\text{A.22})$$

Sabe-se também que $\phi^a\phi^a = \eta^2 f^2$, de modo que a Lagrangiana (A.1) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\eta^2 f'^2}{N^2} + 2\frac{\eta^2 f^2}{r^2} \right) - \frac{1}{4} \lambda (\eta^2 f^2 - \eta^2)^2 \\ \mathcal{L} &= -\frac{\eta^2 f'^2}{2N^2} - \frac{\eta^2 f^2}{r^2} - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (f^2 - 1)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Com auxílio de (A.23) pode-se calcular as componentes do tensor energia-momento facilmente. As componentes não nulas são tais que $\mu \neq \nu$.

$$\begin{aligned} T^0_0 &= \underline{\partial_0\phi^a \partial^0\phi^a} + \mathcal{L} \\ T^0_0 &= -\frac{\eta^2 f'^2}{2N^2} - \frac{\eta^2 f^2}{r^2} - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (f^2 - 1)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

De (A.23) e (A.13) obtém-se:

$$\begin{aligned} T^1_1 &= \partial_1\phi^a \partial^1\phi^a + \mathcal{L} \\ &= \frac{\eta^2 f'^2}{N^2} - \frac{\eta^2 f'^2}{2N^2} - \frac{\eta^2 f^2}{r^2} - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (f^2 - 1)^2 \\ T^1_1 &= \frac{\eta^2 f'^2}{2N^2} - \frac{\eta^2 f^2}{r^2} - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (f^2 - 1)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

De (A.23) e (A.17) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 T^2_2 &= \partial_2 \phi^a \partial^2 \phi^a + \mathcal{L} \\
 T^2_2 &= \cancel{\frac{\eta^2 f'^2}{r^2}} - \frac{\eta^2 f'^2}{2N^2} - \cancel{\frac{\eta^2 f'^2}{r^2}} - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (f^2 - 1) \\
 T^2_2 &= -\frac{\eta^2 f'^2}{2N^2} - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (f^2 - 1).
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

De (A.23) e (A.21) observa-se que $T^2_2 = T^3_3$.

Portanto, o tensor energia-momento é dado por

$$T^0_0 = -\eta^2 \left[\frac{f'^2}{2N^2} + \frac{f^2}{r^2} + \frac{1}{4} \lambda \eta^2 (f^2 - 1)^2 \right], \tag{A.27}$$

$$T^1_1 = -\eta^2 \left[-\frac{f'^2}{2N^2} + \frac{f^2}{r^2} + \frac{1}{4} \lambda \eta^2 (f^2 - 1)^2 \right], \tag{A.28}$$

$$T^2_2 = T^3_3 = -\eta^2 \left[\frac{\eta^2 f'^2}{2N^2} + \frac{1}{4} \lambda \eta^2 (f^2 - 1)^2 \right]. \tag{A.29}$$

Apêndice B

SOBRE O MONOPOLO COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

B.1 Tensor Energia-Momento

O tensor energia-momento será obtido pelo mesmo procedimento usado no caso do monopolo global.

Seja a lagrangiana (4.1):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{6}F_{\alpha\beta\lambda}F^{\alpha\beta\lambda} - \frac{\lambda}{2}(B^2 - b^2)^2. \quad (\text{B.1})$$

onde $B^2 = B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}$. Para se calcular o tensor energia-momento usa-se a forma genérica:

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (\text{B.2})$$

em seguida têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(g^{\alpha\sigma}g^{\beta\rho}g^{\lambda\kappa}F_{\alpha\beta\lambda}F_{\sigma\rho\kappa}) - \lambda(B^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(g^{\alpha\sigma}g^{\beta\rho})B_{\alpha\beta}B_{\sigma\rho} \\ &= -\frac{1}{6}F_{\alpha\beta\lambda}F_{\sigma\rho\kappa}\left(\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\beta\rho}g^{\lambda\kappa} + \frac{\partial g^{\beta\rho}}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\alpha\sigma}g^{\lambda\kappa} + \frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\alpha\sigma}g^{\beta\rho}\right) \\ &\quad - \lambda(B^2 - b^2)B_{\alpha\beta}B_{\sigma\rho}\left(\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\beta\rho} + \frac{\partial g^{\beta\rho}}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\alpha\sigma}\right) \\ &= -\frac{1}{6}F_{\alpha\beta\lambda}F_{\sigma\rho\kappa}\left[\left(\frac{\delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}^{\sigma} + \delta_{\nu}^{\alpha}\delta_{\mu}^{\sigma}}{2}\right)g^{\beta\rho}g^{\lambda\kappa} + \left(\frac{\delta_{\mu}^{\beta}\delta_{\nu}^{\rho} + \delta_{\nu}^{\beta}\delta_{\mu}^{\rho}}{2}\right)g^{\alpha\sigma}g^{\lambda\kappa}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\kappa + \delta_\nu^\lambda \delta_\mu^\kappa}{2} \right) g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \Big] \\
& - \lambda(B^2 - b^2) B_{\alpha\beta} B_{\sigma\rho} \left[\left(\frac{\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\sigma + \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\sigma}{2} \right) g^{\beta\rho} + \left(\frac{\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\rho + \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\rho}{2} \right) g^{\alpha\sigma} \right] \\
& = -\frac{1}{12} \left[(F_{\mu\beta\lambda} F_{\nu\rho\kappa} + F_{\nu\beta\lambda} F_{\mu\rho\kappa}) g^{\beta\rho} g^{\lambda\kappa} + (F_{\alpha\mu\lambda} F_{\sigma\nu\kappa} + F_{\alpha\nu\lambda} F_{\sigma\mu\kappa}) g^{\alpha\sigma} g^{\lambda\kappa} \right. \\
& \quad \left. + (F_{\alpha\beta\mu} F_{\sigma\rho\nu} + F_{\alpha\beta\nu} F_{\sigma\rho\mu}) g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \right] - \frac{\lambda(B^2 - b^2)}{2} \left[(B_{\mu\beta} B_{\nu\rho} \right. \\
& \quad \left. + B_{\nu\beta} B_{\mu\rho}) g^{\beta\rho} + (B_{\alpha\mu} B_{\sigma\nu} + B_{\alpha\nu} B_{\sigma\mu}) g^{\alpha\sigma} \right] \\
& = -\frac{1}{12} (F_\mu^{\beta\lambda} F_{\nu\beta\lambda} + F_\nu^{\beta\lambda} F_{\mu\beta\lambda} + F_\mu^\sigma{}^\lambda F_{\sigma\nu\lambda} + F_\nu^\sigma{}^\lambda F_{\sigma\mu\lambda} + F_\mu^{\sigma\beta} F_{\sigma\beta\mu} \\
& \quad + F_\nu^{\sigma\beta} F_{\sigma\beta\nu}) - \frac{\lambda(B^2 - b^2)}{2} (B_\mu^\beta B_{\nu\beta} + B_\nu^\beta B_{\mu\beta} + B_\mu^\sigma B_{\sigma\nu} + B_\nu^\sigma B_{\sigma\mu}) \\
& = -\frac{1}{12} (F_{\mu\beta\lambda} F_\nu^{\beta\lambda} + F_{\mu\beta\lambda} F_\nu^{\beta\lambda} + F_{\mu\sigma\lambda} F_\nu^{\sigma\lambda} + F_{\mu\sigma\lambda} F_\nu^{\sigma\lambda} + F_{\mu\sigma\beta} F_\nu^{\sigma\beta} \\
& \quad + F_{\mu\sigma\beta} F_\nu^{\sigma\beta}) - \frac{\lambda(B^2 - b^2)}{2} (B_{\mu\beta} B_\nu^\beta + B_{\mu\beta} B_\nu^\beta + B_{\mu\sigma} B_\nu^\sigma + B_{\mu\sigma} B_\nu^\sigma) \\
& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} F_{\mu\beta\lambda} F_\nu^{\beta\lambda} - 2\lambda(B^2 - b^2) B_{\mu\beta} B_\nu^\beta. \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Ao substituir (B.3) e (B.1) em (B.2) mostra-se que:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\beta\lambda} F_\nu^{\beta\lambda} - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta\lambda} F^{\alpha\beta\lambda} - \frac{\lambda}{2} g_{\mu\nu} (B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} - b^2)^2 + 4\lambda (B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} - b^2) B_{\mu\beta} B_\nu^\beta. \tag{B.4}$$

Antes de se passar aos cálculos explícitos da densidade de energia e as pressões, é conveniente calcular $F_{\alpha\beta\lambda} F^{\alpha\beta\lambda}$ e $B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}$, com a finalidade de simplificar os próximos cálculos. Para isto, deve-se ter em mente que: $F_{\mu\nu\lambda}$ é nulo se houver índices iguais; a única componente independente não nula de $B_{\alpha\beta}$ é B_{23} .

$$\begin{aligned}
F_{\alpha\beta\lambda} F^{\alpha\beta\lambda} &= F_{0\beta\lambda} F^{0\beta\lambda} + F_{1\beta\lambda} F^{1\beta\lambda} + F_{2\beta\lambda} F^{2\beta\lambda} + F_{3\beta\lambda} F^{3\beta\lambda} \\
&= 3(F_{1\beta\lambda} F^{1\beta\lambda}) = 3(2F_{123} F^{123}) \\
&= 6g^{11} g^{22} g^{33} (\partial_1 B_{23})^2 \\
&= \frac{6}{r^4 N^2 \sin^2 \theta} \left[r^2 \sin \theta \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right]^2 \\
F_{\alpha\beta\lambda} F^{\alpha\beta\lambda} &= \frac{6}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2, \tag{B.5}
\end{aligned}$$

$$B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} = 2(B^{23} B_{23}) = 2g^{22} g^{33} (B_{23})^2$$

$$B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} = \frac{2}{r^4 \sin^2 \theta} (g^2 r^4 \sin^2 \theta) = 2g^2. \quad (\text{B.6})$$

Com auxílio de (B.5) e (B.6), pode-se passar diretamente aos cálculos das quantidades: T_{00} , T_{11} , T_{22} e T_{33} .

$$\begin{aligned} T_{00} &= \cancel{F_{0\beta\lambda}F_0^{\beta\lambda}} - \frac{1}{6}g_{00}F_{\alpha\beta\lambda}F^{\alpha\beta\lambda} - \frac{\lambda}{2}g_{00}(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)^2 + 4\lambda(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)\cancel{B_{0\beta}B_0^{\beta}} \\ T_{00} &= \frac{M^2}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 + \frac{\lambda M^2}{2} (2g^2 - b^2)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= F_{1\beta\lambda}F_1^{\beta\lambda} - \frac{1}{6}g_{11}F_{\alpha\beta\lambda}F^{\alpha\beta\lambda} - \frac{\lambda}{2}g_{11}(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)^2 + 4\lambda(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)\cancel{B_{1\beta}B_1^{\beta}} \\ &= 2g^{22}g^{33}(F_{123})^2 - \frac{1}{6}g_{11}F_{\alpha\beta\lambda}F^{\alpha\beta\lambda} - \frac{\lambda}{2}g_{11}(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)^2 \\ &= 2 \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{\lambda N^2}{2} (2g^2 - b^2)^2 \\ T_{11} &= \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{\lambda N^2}{2} (2g^2 - b^2)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} T_{22} &= F_{2\beta\lambda}F_2^{\beta\lambda} - \frac{1}{6}g_{22}F_{\alpha\beta\lambda}F^{\alpha\beta\lambda} - \frac{\lambda}{2}g_{22}(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)^2 + 4\lambda(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)B_{2\beta}B_2^{\beta} \\ &= 2g^{11}g^{33}(F_{123})^2 - \frac{1}{6}g_{22}F_{\alpha\beta\lambda}F^{\alpha\beta\lambda} - \frac{\lambda}{2}g_{22}(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)^2 \\ &\quad + 4\lambda(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)g^{33}(B_{23})^2 \\ &= \frac{2}{N^2 \sin^2 \theta} \left[r^2 \sin \theta \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right]^2 - \frac{r^2}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{r^2 \lambda}{2} (2g^2 - b^2)^2 \\ &\quad + 4\lambda(B^2 - b^2) \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (g^2 r^4 \sin^2 \theta) \\ &= \frac{2r^2}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{r^2}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{r^2 \lambda}{2} (2g^2 - b^2)^2 + 4\lambda r^2 g^2 (2g^2 - b^2) \\ T_{22} &= \frac{r^2}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{r^2 \lambda}{2} (2g^2 - b^2)^2 + 4\lambda r^2 g^2 (2g^2 - b^2), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} T_{33} &= F_{3\beta\lambda}F_3^{\beta\lambda} - \frac{1}{6}g_{33}F_{\alpha\beta\lambda}F^{\alpha\beta\lambda} - \frac{\lambda}{2}g_{33}(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)^2 + 4\lambda(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)B_{3\beta}B_3^{\beta} \\ &= 2g^{11}g^{22}(F_{123})^2 - \frac{1}{6}g_{33}F_{\alpha\beta\lambda}F^{\alpha\beta\lambda} - \frac{\lambda}{2}g_{33}(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)^2 \\ &\quad + 4\lambda(B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - b^2)g^{22}(B_{32})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2 \theta \left[r^2 \sin^2 \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right]^2 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{\lambda}{2} (2g^2 - b^2) \\
&\quad + 4\lambda (2g^2 - b^2) \frac{g^2 r^4 \sin^2 \theta}{r^2} \\
&= \sin^2 \theta \left[\frac{r^2}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{r^2 \lambda}{2} (2g^2 - b^2)^2 + 4\lambda r^2 g^2 (2g^2 - b^2) \right] \\
T_{33} &= \sin^2 \theta T_{22}. \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Em suma, Juntando as expressões (B.7), (B.8),(B.9) e (B.10), o tensor energia-momento do Monopolo com violação da simetria de Lorentz é dado por:

$$T_{00} = \frac{M^2}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 + \frac{\lambda M^2}{2} (2g^2 - b^2)^2, \tag{B.11}$$

$$T_{11} = \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{\lambda N^2}{2} (2g^2 - b^2)^2, \tag{B.12}$$

$$T_{22} = \frac{r^2}{N^2} \left(g' + \frac{2g}{r} \right)^2 - \frac{r^2 \lambda}{2} (2g^2 - b^2)^2 + 4\lambda r^2 g^2 (2g^2 - b^2), \tag{B.13}$$

$$T_{33} = \sin^2 \theta T_{22}. \tag{B.14}$$

B.2 Equação de campo do espaço curvo

A equação de campo para o espaço curvo é dada por

$$\nabla^\mu F_{\mu\alpha\beta} - 2\lambda (B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - b^2) B_{\alpha\beta} = 0. \tag{B.15}$$

Reiterando, apenas $B_{23} = -B_{32}$ é diferente de zero, de modo que para $\alpha = 2$ e $\beta = 3$:

$$\nabla^\mu F_{\mu 23} - 2\lambda (B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - b^2) B_{23} = 0. \tag{B.16}$$

Onde,

$$2\lambda (B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - b^2) B_{23} = 2\lambda (2g^{22} g^{33} (B_{23})^2 - b^2) B_{23}.$$

Como $B_{23} = g(r)r^2 \sin \theta$, obtém-se que

$$2\lambda (B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - b^2) B_{23} = 2\lambda (2g^2 - b^2) g r^2 \sin \theta. \tag{B.17}$$

A outra parte da equação (B.15) obtém-se desenvolvendo o termo $\nabla^\mu F_{\mu\alpha\beta}$, isto é

$$\begin{aligned}\nabla^\mu F_{\mu 23} &= g^{\mu\alpha} \nabla_\alpha F_{\mu 23} \\ &= g^{\mu\alpha} \left[\partial_\mu F_{\mu 23} - \Gamma_{\alpha\mu}^\epsilon F_{\epsilon 23} - \Gamma_{\alpha 2}^\epsilon F_{\mu\epsilon 3} - \Gamma_{\alpha 3}^\epsilon F_{\mu 2\epsilon} \right] \\ &= \partial^\mu F_{\mu 23} - \left[g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^\epsilon F_{\epsilon 23} + g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha 2}^\epsilon F_{\mu\epsilon 3} + g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha 3}^\epsilon F_{\mu 2\epsilon} \right].\end{aligned}\quad (\text{B.18})$$

Calculando-se separadamente cada termo têm-se:

$$\partial^\mu F_{\mu 23} = \partial^1 F_{123}, \quad (\text{B.19})$$

$$g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^\epsilon F_{\epsilon 23} = g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^1 F_{123} = \left(g^{00} \Gamma_{00}^1 + g^{11} \Gamma_{11}^1 + g^{22} \Gamma_{22}^1 + g^{33} \Gamma_{33}^1 \right) F_{123}, \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned}g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha 2}^\epsilon F_{\mu\epsilon 3} &= g^{00} \Gamma_{02}^\epsilon F_{0\epsilon 3} + g^{11} \Gamma_{12}^\epsilon F_{1\epsilon 3} + g^{22} \Gamma_{22}^\epsilon F_{2\epsilon 3} + g^{33} \Gamma_{32}^\epsilon F_{3\epsilon 3} \\ g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha 2}^\epsilon F_{\mu\epsilon 3} &= g^{11} \Gamma_{12}^2 F_{123} + g^{22} \Gamma_{22}^1 F_{213},\end{aligned}\quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned}g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha 3}^\epsilon F_{\mu 2\epsilon} &= g^{00} \Gamma_{03}^\epsilon F_{02\epsilon} + g^{11} \Gamma_{13}^\epsilon F_{12\epsilon} + g^{22} \Gamma_{23}^\epsilon F_{22\epsilon} + g^{33} \Gamma_{33}^\epsilon F_{32\epsilon} \\ g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha 3}^\epsilon F_{\mu 2\epsilon} &= g^{11} \Gamma_{13}^3 F_{123} + g^{33} \Gamma_{33}^1 F_{321}.\end{aligned}\quad (\text{B.22})$$

Inserindo (B.19-B.22) em (B.15) obtém-se:

$$\begin{aligned}\nabla^\mu F_{\mu 23} &= \partial^1 F_{123} - \left[g^{00} \Gamma_{00}^1 + g^{11} \Gamma_{11}^1 + g^{22} \Gamma_{22}^1 + g^{33} \Gamma_{33}^1 + g^{11} \Gamma_{12}^2 - g^{22} \Gamma_{22}^1 \right. \\ &\quad \left. + g^{11} \Gamma_{13}^3 - g^{33} \Gamma_{33}^1 \right] F_{123}.\end{aligned}\quad (\text{B.23})$$

Onde, levou-se em consideração que qualquer permutação dos índices em $F_{\mu\nu\lambda}$ inverte seu sinal. Com o auxílio da métrica e as componentes da conexão a equação (B.22) torna-se:

$$\begin{aligned}\nabla^\mu F_{\mu 23} &= \partial^1 \partial_1 B_{23} - \left[\frac{1}{M^2} \frac{MM'}{N^2} + \frac{1}{N^2} \frac{N'}{N} + \frac{1}{r^2} \left(-\frac{r}{N^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(-\frac{r}{N^2} \sin^2 \theta \right) \right] \partial_1 B_{23} - \left[\frac{1}{N^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \left(-\frac{r}{N^2} \right) \right] \partial_1 B_{23} \\ &\quad - \left[\frac{1}{N^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(-\frac{r \sin^2 \theta}{N^2} \right) \right] \partial_1 B_{23} \\ &= \partial^1 \partial_1 B_{23} - \frac{1}{N^2} \left[-\frac{M'}{M} + \frac{N'}{N} - \frac{2}{r} \right] \partial_1 B_{23} - \frac{1}{N^2} \frac{2}{r} \partial_1 B_{23} - \frac{1}{N^2} \frac{2}{r} \partial_1 B_{23} \\ \nabla^\mu F_{\mu 23} &= \frac{1}{N^2} \partial_1 \partial_1 B_{23} + \frac{1}{N^2} \left[\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N} \right] \partial_1 B_{23} - \left(\frac{2}{rN^2} \right) \partial_1 B_{23}.\end{aligned}\quad (\text{B.24})$$

Sabendo que $B_{23} = gr^2 \sin \theta$, pode-se colocar $\frac{\sin \theta}{N^2}$ em evidência, assim:

$$\begin{aligned}
 \nabla^\mu F_{\mu 23} &= \frac{\sin \theta}{N^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right) + \left(\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N} \right) r^2 \left(g' + \frac{2g}{r} \right) - 2r \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right] \\
 \nabla^\mu F_{\mu 23} &= \frac{\sin \theta}{N^2} \left[r^2 \frac{d}{dr} \left(g' + \frac{2g}{r} \right) + 2r \left(g' + \frac{2g}{r} \right) + \left(\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N} \right) r^2 \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2r \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right] \\
 \nabla^\mu F_{\mu 23} &= \frac{r^2 \sin \theta}{N^2} \left[\frac{d}{dr} \left(g' + \frac{2g}{r} \right) + \left(\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N} \right) \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right]. \tag{B.25}
 \end{aligned}$$

Portanto, inserindo a (B.25) e a (B.17) na (B.16). obtêm-se

$$\begin{aligned}
 \frac{r^2 \sin \theta}{N^2} \left[\frac{d}{dr} \left(g' + \frac{2g}{r} \right) + \left(\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N} \right) \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right] - 2\lambda (2g^2 - b^2) gr^2 \sin \theta &= 0 \\
 \left[\frac{d}{dr} \left(g' + \frac{2g}{r} \right) + \left(\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N} \right) \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right] - 2N^2 \lambda (2g^2 - b^2) g &= 0. \tag{B.26}
 \end{aligned}$$

Em uma forma mais compacta, a (B.26) pode se escrita como:

$$\frac{N}{M} \frac{d}{dr} \left[\frac{M}{N} \left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right] - 2N^2 \lambda (2g^2 - b^2) g = 0. \tag{B.27}$$

No espaço plano, $N = M = 1$. Então, a (B.27) reduz-se a:

$$\frac{d}{dr} \left[\left(g' + \frac{2g}{r} \right) \right] - 2\lambda (2g^2 - b^2) g = 0, \tag{B.28}$$

conforme menciona-se na equação (4.15).

REFERÊNCIAS

- [1] VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic strings and other topological defects*. New York: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0 521 39153 9.
- [2] VILCHES, M. A. *Introdução a Topologia Algébrica*. [S.l.]: Edição online www.ime.uerj.br/calculo.
- [3] KIBLE, T. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1976.
- [4] PRESKILL, J. Magnetic monopoles. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 34, n. 1, p. 461–530, 1984.
- [5] BARRIOLA M.; VILENKIN, A. Gravitational field of a global monopole. *Phys. Rev. Lett.*, v. 63, p. 341–343, 1989.
- [6] KOSTELECKY, A. *Proceedings of the Third Meeting on CPT and Lorentz Symmetry*. Singapore: World Scientific, 2005. ISBN 981-256-128-5.
- [7] KOSTELECKY, A. The search for relativity violations. *Scientific American*, Nature Publishing Group, v. 291, n. 3, p. 93–101, 2004.
- [8] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, APS, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.
- [9] CROOM, F. H. *Basic Concepts of Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1978. ISBN 0-387-90288-0.
- [10] RAJARAMAN, R. *Solitons and Instantons: an Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. New York: Elsevier Science BV, 1987.
- [11] FINKELSTEIN, D. Kinks. *Journal of Mathematical Physics*, v. 7, p. 1218–1225, 1966.
- [12] BAZEIA, D.; MENEZES, J.; MENEZES, R. New global defect structures. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 24, p. 241601, 2003.
- [13] DERRICK, G. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. *Journal of Mathematical Physics*, 1964.
- [14] SHIFMAN, M. *Advanced Topics in Quantum field Theory*. New York: Cambridge University Press, 2012. ISBN 978-0-521-19084-8.

- [15] NIELSEN, H. B.; OLESEN, P. Vortex-line models for dual strings. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 61, p. 45–61, 1973.
- [16] GENNES, P. D. *Superconductivity of metals and alloys*.
- [17] JULIA, B.; ZEE, A. Poles with both magnetic and electric charges in non-abelian gauge theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 11, p. 2227–2232, 1975.
- [18] BOGOMOLNY, E. B. Stability of Classical Solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 24, p. 449, 1976. [*Yad. Fiz.*24,861(1976)].
- [19] DUNNE, G. V. *Aspects of chern-simons theory*. 1999.
- [20] DIRAC, P. A. Quantised singularities in the electromagnetic field. v. 133, n. 821, p. 60–72, 1931.
- [21] DIRAC, P. The monopole concept. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 17, n. 4, p. 235–247, 1978.
- [22] HOOFT, G. Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nuclear Physics: B*, Elsevier, v. 79, n. 2, p. 276–284, 1974.
- [23] POLYAKOV, A. M. Particle spectrum in quantum field theory. *JETP lett*, World Scientific, v. 20, n. 6, p. 194–195, 1974.
- [24] KHADEMI, S.; SHAHSAVARI, M.; SAEID, A. H. Non-singular magnetic monopole. *arXiv preprint physics/0608051*, 2006.
- [25] ARAFUNE, J.; FREUND, P. G. O.; GOEBEL, C. Topology of higgs fields. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 16, n. 2, p. 433–437, 1975.
- [26] SHNIR, Y. M. *Magnetic monopoles*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- [27] RYDER, L. H. *Quantum field theory*. Cambridge: Cambridge university press, 1996.
- [28] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. 1. ed. San Francisco: Addison Wesley, 2004.
- [29] SHI, X.; LI, X. The gravitational field of a global monopole. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 8, n. 4, p. 761, 1991.
- [30] MELLO, E. Bezerra de. Physics in the global monopole spacetime. *Brazilian journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 31, n. 2, p. 211–222, 2001.
- [31] HARARI, D.; LOUSTO, C. Repulsive gravitational effects of global monopoles. *Physical Review D*, APS, v. 42, n. 8, p. 2626, 1990.
- [32] HISCOCK, W. A. Astrophysical bounds on global monopoles. *Physical review letters*, APS, v. 64, n. 4, p. 344, 1990.
- [33] BENNETT, D. P.; RHIE, S. H. Cosmological evolution of global monopoles and the origin of large-scale structure. *Physical review letters*, APS, v. 65, n. 14, p. 1709, 1990.

- [34] BARRETO, M.; BAZEIA, D.; MENEZES, R. Defect structures in lorentz and cpt violating scenarios. *Physical Review D*, APS, v. 73, n. 6, p. 065015, 2006.
- [35] BAZEIA, D. et al. Lorentz-violating effects on topological defects generated by two real scalar fields. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 239, n. 12, p. 942–947, 2010.
- [36] SEIFERT, M. D. Dynamical lorentz symmetry breaking and topological defects. *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 12, p. 125015, 2010.
- [37] PAPAPETROU, A. Static spherically symmetric solutions in the unitary field theory. In: *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*. [S.l.: s.n.], 1948. p. 69–86.
- [38] LI, X.-z.; XI, P.; ZHANG, Q. Gravitating tensor monopole in a lorentz-violating field theory. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 8, p. 085030, 2012.
- [39] WALD, R. M. *General relativity*. Chicago: University of Chicago press, 2010. ISBN 0-226-87033-2.
- [40] SEIFERT, M. D. Monopole solution in a Lorentz-violating field theory. *Physical review letters*, APS, v. 105, n. 20, p. 201601, 2010.
- [41] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. New York: Oxford University Press, 1899.