



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

JÚLIO ELOÍSIO BRANDÃO DA SILVA

NÍVEIS DE LANDAU-CORIOLIS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JOÃO PESSOA, PB
FEVEREIRO, 2013

JÚLIO ELOÍSIO BRANDÃO DA SILVA

NÍVEIS DE LANDAU-CORIOLIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Mores

JOÃO PESSOA, PB

FEVEREIRO, 2013

JÚLIO ELOÍSIO BRANDÃO DA SILVA

NÍVEIS DE LANDAU-CORIOLIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Data de aprovação: ___ / ___ / ____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Mores

UFPB

Prof. Dr. Itamar Vidal Silva de Lima

UFPB

Prof. Dr. Cleverson Filgueiras

UFCG

A meus pais.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus todo poderoso, por ter me dado permissão para realização desse trabalho. A meus amados pais (avós) João e Alaides que me permitiram começar toda essa jornada. A meus pais Júlio e Márcia que sempre se orgulharam e acreditaram em mim. A meu tio-irmão Marcos Paulo que também me deu apoio nos momentos em que precisei dele para alcançar o que alcancei agora. Agradeço também a todos os meus amigos que me acompanharam e acompanham durante esse longo período. Não poderia deixar de agradecer também a Fernando Moraes por acreditar sempre no meu potencial e me ajudar a ser o profissional que sou. Por fim, à agência de fomento(CAPES) que me auxiliou financeiramente nesse período de permanência no programa de mestrado.

*A mente que se abre a uma nova idéia
jamais voltará ao seu tamanho original.*

—ALBERT EINSTEIN

Resumo

Efeitos inerciais, tais como a força centrífuga e a de Coriolis, desempenham um papel importante na mecânica clássica e atualmente têm sido amplamente explorados na mecânica quântica, inclusive em analogias com efeitos eletromagnéticos. No entanto, essas analogias entre as forças inerciais sobre partículas massivas e as forças eletromagnéticas sobre partículas carregadas não é nenhuma novidade. Elas foram exploradas por Aharonov e Carmi em 1970 e por Tsai e Neilson em 1988 no contexto de uma fase quântica rotacional similar à fase de Aharonov-Bohm. Baseados nessa mesma analogia, Dattoli e Quattromini introduziram estados quânticos de Coriolis análogos aos níveis de Landau. Em 1915, Barnett já havia publicado um artigo sobre magnetização devido à rotação o qual teve recentemente um interesse renovado aplicado a nanoestruturas. Um análogo rotacional do efeito Hall clássico foi proposto e os efeitos inerciais da rotação foram estudados em spintrônica. Espectros de energia tipo níveis de Landau aparecem sob a ação da força de Coriolis quando a força centrífuga agindo nos elétrons livres é compensada por um campo elétrico radial. Neste trabalho, vamos demonstrar efeitos devido à rotação e ao campo magnético em um disco condutor girante. Estudaremos as interações eletromagnéticas e inerciais simultaneamente. Alguns valores para a relação entre o campo magnético e a rotação serão escolhidos e resultarão em níveis tipo Landau para um sistema com força resultante composta pelas forças de Coriolis e magnética. Um mesmo comportamento para o espectro de energia será obtido sem força magnética compondo a força resultante.

Palavras-chave: Efeito Hall clássico e quântico, Efeito Aharonov-Bohm, Efeito Aharonov-Carmi, Níveis de Landau, efeitos inerciais.

Abstract

Inertial effects, such as Coriolis' and centrifuge forces play an interesting role on classical mechanics and currently has been largely used in quantum mechanics, including in analogies with the electromagnetic effects. However, these analogies between the inertial forces on the massives particules and the electromagnetic forces on charged particles is not new. They were explored by Aharonov and Carmi in 1970 and by Tsai and Nelson in 1988 in the context of a rotational quantum phase like an Aharonov-Bohm phase. Based in this analogy, Dattoli and Quattromini, introduced Coriolis' analogue quantum states to Landau levels. In 1915, Barnett had already published a paper about magnetization due to rotation which recently had a renewed interest applied to nanostructures. A rotational analogy of the classical Hall effect was proposed and rotational inertial forces were studied in spintronic. Energy spectra like Landau levels appear under the action of Coriolis forces when the centrifuge force acting on free electrons is compensated by a radial electric field. In this work, we will demonstrate effects caused by rotation and magnetic field in a spinning conductor disc. We will study both the electromagnetic and inertial interactions simultaneously. Some values to the relation between the magnetic field and the rotation will be chosen and this will result in Landau-like levels to a system with resultant force composed by Coriolis' and magnetic forces. A similar behavior for the energy spectrum will be found without a magnetic force composing the resultant force.

Keywords: Classical e quantum Hall effect, Aharonov-Bohm Effect, Aharonov-Carmi Effect, Landau Levels, inertial effects.

Contents

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	viii
Introdução	1
1 Efeitos das interações eletromagnéticas	3
1.1 Introdução	3
1.2 Efeito Hall Clássico	3
1.3 Níveis de Landau	6
Solução para os níveis de Landau em coordenadas cilíndricas	9
1.4 Efeito Hall quântico inteiro	9
1.4.1 Efeito Hall quântico fracionário	12
1.5 Efeito Aharonov-Bohm	13
2 Efeitos Inerciais	16
2.1 Introdução	16
2.2 Abordagem clássica	16
2.2.1 Definição de referenciais inerciais e não-inerciais	16
2.2.2 Referencial em rotação	17
2.2.3 Efeitos da força de Coriolis na Terra	20
2.2.4 Efeito Hall devido a forças inerciais	20
2.3 Estudos em mecânica quântica	22
2.3.1 Efeito Aharonov-Carmi	22
2.3.2 Correntes de spin em sistemas girantes	23
2.3.3 Análogo rotacional do efeito Hall quântico	23
3 Efeito Coriolis-Landau	27
3.1 Introdução	27
3.2 Descrição do problema	27

3.3	Equação de Schrödinger	28
3.4	Campos fracos	34
	Conclusões e Perspectivas	39
	Referências	41

List of Figures

- 1.1 Uma diferença de potencial ao longo do eixo x implica em uma corrente nessa direção. Ao aplicarmos um campo magnético na direção z haverá uma separação de cargas no eixo y e, conseqüentemente, surgirá nessa direção uma diferença de potencial que será chamada de potencial Hall. 4
- 1.2 Visualização do efeito Hall. As partículas representadas pelo número 1 são elétrons, a placa 2 é a amostra condutora, o número 3 indica os pólos magnéticos, 4 são as linhas de campo magnético e 5 é a fonte de alimentação. Na figura A observa-se que os elétrons são desviados para a direita da sua trajetória devido a força de Lorentz. Como o termo magnético da força de Lorentz é dado por $q\vec{v} \times \vec{B}$, nas figuras B, C e D, altera-se respectivamente o sentido da corrente, o campo magnético e ambos simultaneamente. [24] 6
- 1.3 O primeiro diagrama representa a relação entre a densidade de estados e a energia para uma partícula livre em uma amostra. Observa-se que existe um contínuo de estados abaixo da energia de Fermi e que todos os estados estão ocupados pois o sistema se encontra a uma temperatura muito baixa. No gráfico, tem-se que ao aplicar campo magnético na amostra, os estados serão quantizados e nem todos os valores de energia serão possíveis. Na última figura, ilustra-se que ao haver impurezas no sistema, que irá causar espalhamento e desordem, os níveis deixaram de ser linhas para serem bandas que terão estados estendidos (que contribuem para a corrente de condução) e estados localizados. Fonte: [27] 10
- 1.4 A curva que consiste de degraus, representa a resistência Hall, enquanto a curva que nas regiões dos platôs Hall é nula, ilustra o comportamento da resistência longitudinal, que é por onde passa a corrente usual. Fonte: [27]. 13
- 1.5 Dois feixes de elétrons são direcionados a um solenoide. Em seguida, se separam e se recombina com uma fase que está relacionada ao potencial vetor. Fonte: [32]. 14

- 2.1 (a) Neste esquema podemos observar o referencial fixo (x', y') e o referencial girante (x, y) , que tem origem no centro do disco e velocidade angular $\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$. Na figura (b) estão expressos os vetores deslocamento \vec{r}' e \vec{r} nos referenciais fixo e girante respectivamente, e os mesmos vetores após um intervalo de tempo dt . O vetor em azul representa o deslocamento da partícula no intervalo dt . É importante deixar claro que nesta figura não está sendo considerado movimento de translação do referencial girante 18
- 2.2 A amostra é colocada sobre um disco girante, que tem o eixo z como eixo de rotação. 21
- 2.3 Resultados de Johnson. (a) Para cada valor de ℓ foram calculados os 100 primeiros zeros da função de Bessel, que estão representado pelas três linhas verticais. A taxa de rotação utilizada foi 1MHz. Nota-se que as bandas são praticamente um contínuo. (b) A taxa de rotação utilizada agora foi de 100GHz e foram calculados os primeiros 1000 zeros da função de Bessel. No canto inferior direito a escala é ampliada para notar pequena diferença de energia entre 10 estados consecutivos para $\ell = 3$. Fonte: [22] 26
- 3.1 As curvas vermelho, verde, amarelo e azul representam respectivamente a função de onda para $\ell = 1$ e $n=0,1,2,3$ 35
- 3.2 Neste gráfico os valores de ℓ e n são fixos, $\ell = 1$ e $n=1$. As curvas vermelho, verde e amarelo representam respectivamente a função de onda para $B = 10^{-9}T, 10^{-8}T, 10^{-7}T$. Nota-se que a curva amarela não vai a zero em $R = 6mm$. Ou seja, a condição de contorno de anulação da função de onda na borda deve ser imposta para que isso aconteça. 36
- 3.3 É importante notar que o raio do disco é $6mm$ e para cada gráfico tem um valor específico para n . Nestes gráficos as curvas vermelho, verde, amarelo e azul representam a função de onda para $\ell = 1, 2, 3, 4$, respectivamente. 37

Introdução

O eletromagnetismo é uma das áreas da física que tem papel fundamental no desenvolvimento tecnológico da humanidade, assim como outros campos de estudo tais como as mecânicas clássica e quântica.

O eletromagnetismo consegue descrever diversos fenômenos do cotidiano, além de ser um dos responsáveis por parte de avanços tecnológicos expressivos ao longo da história. Uma das invenções presentes no cotidiano, já há algum tempo que pode ser citada, é a televisão. Inventada à base de um tubo que tinha em uma das extremidades um cátodo de onde partiam feixes de elétrons em direção à outra ponta do tubo, ânodo, e eram controlados por campos magnéticos gerado por bobinas.

Campos elétrico e magnético são tão fundamentais que tornam-se base para diversos efeitos em outras áreas como a mecânica quântica. Dentre os efeitos relacionados ao eletromagnetismo que têm grande expressão, está o efeito Hall clássico[1], que foi base para a descoberta do efeito Hall quântico inteiro e efeito Hall quântico fracionário; ambos receberam prêmio Nobel, em 1985 e 1998, respectivamente[2, 3, 4]. Outros efeitos quânticos relacionados a campo magnético, são os conhecidos níveis de Landau e o efeito Aharonov-Bohm [5, 6]. Alguns desses fenômenos são do século XIX e ainda despertam o interesse de muitos físicos que vêm estudando-os em diferentes sistemas, como por exemplo, materiais com defeitos topológicos [15].

Uma das linhas de estudos atuais, envolve fazer uma analogia entre interações eletromagnéticas e forças inerciais. Fenômenos clássicos e quânticos que têm como fonte os campos elétrico e magnético passam a ser gerados por uma rotação [16, 17, 18, 19, 20, 21]. Em 1999, Johnson demonstrou que forças inerciais devido a rotação produzem um efeito similar ao efeito Hall em metais e semicondutores. Ainda no mesmo trabalho, Johnson tentou mostrar um fenômeno análogo ao efeito Hall quântico [22]. A similaridade com o efeito clássico foi bem esclarecida. Todavia, ao estudar o similar quântico, não se obteve uma analogia completa devido à falta de degenerescência e à dependência com o comprimento da amostra. Assim, Johnson conseguiu mostrar o caráter quantizado dos níveis de energia, contudo a degenerescência característica dos níveis de Landau não ocorre em seu estudo.

Em 1959, Yakir Aharonov e David Bohm, descobriram que dois feixes de elétrons lançados na direção de um solenóide, adquirem uma fase, que depende do fluxo de campo magnético que

está no interior do solenóide. Após essa descoberta, muitos outros efeitos que envolvem fase tipo Aharonov-Bohm, porém, com fontes diferentes, passaram a ser investigados. Entre esses, podemos citar o trabalho de Aharonov junto com Gideon Carmi. A abordagem é análoga à do efeito Aharonov-Bohm. Todavia, ao invés da utilização de campo magnético no sistema, eles observaram uma interferência devido à rotação do mesmo. Recentemente, foram realizados estudos sobre o efeito Aharonov-Carmi no fulereno, já que o mesmo tem sido observado em rotação com frequências relativamente altas[23].

A maior motivação para esses trabalhos, inclusive para essa dissertação, são características comuns encontradas no hamiltoniano dos sistemas submetidos a campo magnético e dos sistemas que se encontram em um referencial girante. Em ambos os sistemas, a estrutura do operador hamiltoniano é a mesma, conseqüentemente, a equação de Schrödinger será bastante semelhante. Isso possibilita uma melhor compreensão dos resultados que devem sempre ser comparados com os já bem estabelecidos, que são os descobertos no ambiente do eletromagnetismo.

Neste trabalho estudamos a influência de campo magnético e rotação aplicados simultaneamente em um sistema, que nesse caso será uma partícula carregada em um disco. Analisamos algumas relações entre a rotação do disco e o campo magnético aplicado, nas quais observamos que níveis tipo Landau podem ser encontrados em um sistema que não tem a força magnética como resultante. Notamos também que a função de onda desse sistema é inalterada com a presença ou não de rotação, ou seja, a presença do campo magnético predomina nesse quesito. Contudo, o espectro de energia é modificado devido a rotação. Discutimos a consistência dos nossos resultados fazendo-os convergirem a outros trabalhos encontrados na literatura. Estudamos ainda o espectro de energia no limite para campo magnético muito fraco, que seria o intervalo de transição entre um sistema com rotação e campo magnético para um sistema com rotação apenas [22].

No decorrer dessa dissertação, discutiremos os efeitos clássicos e quânticos gerados pela presença de campo magnético em um sistema e abordaremos os efeitos inerciais assim como efeitos análogos aos do eletromagnetismo. Dessa forma, a estrutura da dissertação consiste em 3 capítulos. No capítulo 1, revisaremos os efeitos devido às interações eletromagnéticas, no qual discutir-se-á os efeitos Hall clássico, Hall quântico inteiro, Hall quântico fracionário e Aharonov-Bohm. No capítulo seguinte, estudaremos os efeitos inerciais devido à rotação focando naqueles que são análogos ao bem estabelecidos na literatura e são originados por campo magnético. No capítulo 3, feito uma revisão de efeitos inerciais e eletromagnéticos, juntaremos rotação e campo magnético para analisar possíveis efeitos similares aos níveis de Landau. Por fim, discutiremos os resultados e as perspectivas para trabalhos futuros.

Efeitos das interações eletromagnéticas

1.1 Introdução

Campos eletromagnéticos são responsáveis por muitos efeitos na física clássica e quântica. Muitos desses são estudados nas mais diversas condições do sistema. Desde sistemas sofisticados ao ponto de ser de difícil experimentação, a experimentos que facilmente pode-se medir em um bom laboratório. Neste capítulo, estudaremos a influência de campo magnético em alguns sistemas. Analisaremos efeitos clássicos como o efeito Hall e fenômenos quânticos como efeito Hall Quântico, níveis de Landau e efeito Aharonov-Bohm.

1.2 Efeito Hall Clássico

Em 1879, Edwin H. Hall no final do seu doutorado começou a investigar o efeito do campo magnético em um fio condutor. A origem da descoberta desse efeito foi quando Hall notou que ao aplicar campo magnético em uma lâmina de ouro, por onde percorria uma corrente longitudinal, fazia surgir uma diferença de potencial entre as laterais da lâmina. Hall mostrou esse resultado ao seu orientador, professor Henry Augustus Rowland, que disse que a diferença de potencial era devida ao acúmulo de cargas elétricas de sinais contrários. Essa carga teria sido afetada pela força eletromagnética. Essa teoria contradizia um trecho do livro "Eletricidade e Magnetismo" de James Clerk Maxwell, no qual afirmava-se que a força devido a um campo magnético aplicado a um condutor por onde se passava uma corrente elétrica, apenas atuaria no condutor e não nas cargas que atravessam o mesmo. Obviamente, no início, o professor Rowland não pensava em questionar o que Maxwell havia escrito. Todavia, em seguida, não apresentou nenhuma objeção e ainda fez algumas sugestões para o experimento que Hall queria propor. A idéia de Hall era investigar se a força exercida em um fio condutor devido à presença de um campo magnético externo atuaria em todo o fio ou apenas nos portadores de carga que estivessem em movimento. O experimento baseava-se na seguinte reflexão[1]:

"Se a corrente de eletricidade em um fio condutor fixo é atraída por um ímã, a corrente deveria ser desviada para um dos lados do fio, e dessa forma a resistência experimentada deveria ser

acrescentada.^{1"}

Como está representado pela figura (1.1), o experimento consiste de um condutor submetido a um campo magnético uniforme em uma direção ortogonal à corrente.

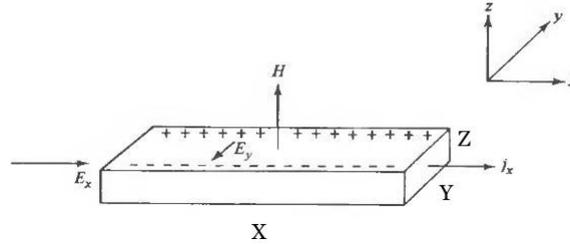


Figure 1.1: Uma diferença de potencial ao longo do eixo x implica em uma corrente nessa direção. Ao aplicarmos um campo magnético na direção z haverá uma separação de cargas no eixo y e, conseqüentemente, surgirá nessa direção uma diferença de potencial que será chamada de potencial Hall.

Os elétrons em movimento sentem a força de Lorentz ($\vec{F}_{lor} = q\vec{v} \times \vec{B}$) e são deslocados em uma direção ortogonal ao campo e à corrente, já que o resultado do produto vetorial entre a velocidade das partículas carregadas \vec{v} e o campo magnético \vec{B} deve ser perpendicular a ambos. Assim, haverá uma separação das cargas positivas e negativas, o que implicará na geração de uma diferença de potencial, que é chamada tensão Hall. O acúmulo de cargas nos lados do condutor irá aumentar até o limite em que a força elétrica devido à tensão gerada equilibre-se com a força de Lorentz.

No equilíbrio, o campo elétrico gerado pelo acúmulo de cargas pode ser escrito como,

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{Lor} = 0, \quad (1.1)$$

$$q\vec{E} = -q\vec{v}_i \times \vec{B}, \quad (1.2)$$

$$\vec{E} = -\vec{v}_i \times \vec{B}, \quad (1.3)$$

que, em módulo, pode ser escrito como

$$E_y = v_x B_z. \quad (1.4)$$

O potencial elétrico devido às cargas separadas pode ser escrito como $V = -\int_0^Y E_y dy$, onde Y é a distância entre as cargas opostas acumuladas, v_i é a velocidade dos portadores de carga da corrente e v_x é sua componente na direção x . Assim, podemos escrever a diferença de potencial Hall, V_H , como,

$$V_H = v_x B Y. \quad (1.5)$$

^{1"}If the current of electricity in a fixed conductor is itself attracted by a magnet, the current should be drawn to one side of the wire, and therefore the resistance experienced should be increased"

Ao escrever a velocidade dos portadores em termos da densidade de cargas por volume n , temos $v = \frac{i}{nqA}$, onde $A = YZ$ é a área da secção transversal por onde passa a corrente i . A expressão para o potencial Hall é dada por

$$V_H = \frac{iB}{nqZ}. \quad (1.6)$$

Como já era esperado, o potencial Hall depende diretamente do campo magnético, pois quanto maior for a força de Lorentz, mais portadores de cargas serão acumulados nas bordas da amostra e maior deverá ser a força elétrica para haver um equilíbrio e as cargas pararem de ser desviadas. Notemos que também existe uma dependência diretamente proporcional à corrente, já que maior sendo a corrente a força de Lorentz também aumentará. Consequentemente, o potencial Hall aumentará para haver o equilíbrio das forças. Dentre as dimensões da amostra, a única que terá importância é a espessura, logo, para que sejam potenciais mensuráveis, devem ser utilizadas amostra mais finas da ordem de nanômetros.

Uma das principais utilidades do efeito Hall, é descobrir a concentração dos portadores de cargas, inclusive seu sinal. Da relação (1.6), sabemos que o número de cargas por unidade de volume é

$$n = \frac{i}{nqYZ}BY = \frac{iB}{V_HqZ}. \quad (1.7)$$

Em relação ao sinal das cargas, a figura (1.2) ilustra bem como as cargas se comportam e que através do potencial Hall medido, o sinal das cargas facilmente será identificado.

Na figura (1.2.A), notemos que as cargas em movimento são negativas, pois o produto externo entre a velocidade das partículas e o campo magnético implicaria em um desvio contrário. Observa-se também que na região superior da amostra haverá uma concentração de cargas negativas, representada pela cor azul, enquanto na parte inferior haverá um acúmulo de cargas positivas, representado pela cor vermelha. Na figura (1.2.B), foi invertido o sentido da corrente, consequentemente o desvio também foi invertido. Nas figuras (1.2.C) e (1.2.D), ao invés de inverter a direção do sentido da corrente, são invertidos os pólos magnéticos. Nas quatro figuras, as partículas da corrente possuem cargas negativas, se acaso as cargas fossem positivas, todas as figuras seriam invertidas.

Ao observar a força de Lorentz, $\vec{F}_{lor} = q\vec{v} \times \vec{B}$, o comportamento mostrado nessas figuras fica bem claro. Note que ao inverter o sinal da carga, da velocidade da corrente ou do campo magnético, o sentido da força é invertido, consequentemente, a configuração do potencial Hall também será. Todavia, se ao invés de um, forem alterados dois desse elementos, essa configuração do sistema equivale a mesma caso não houvesse nenhuma alteração.

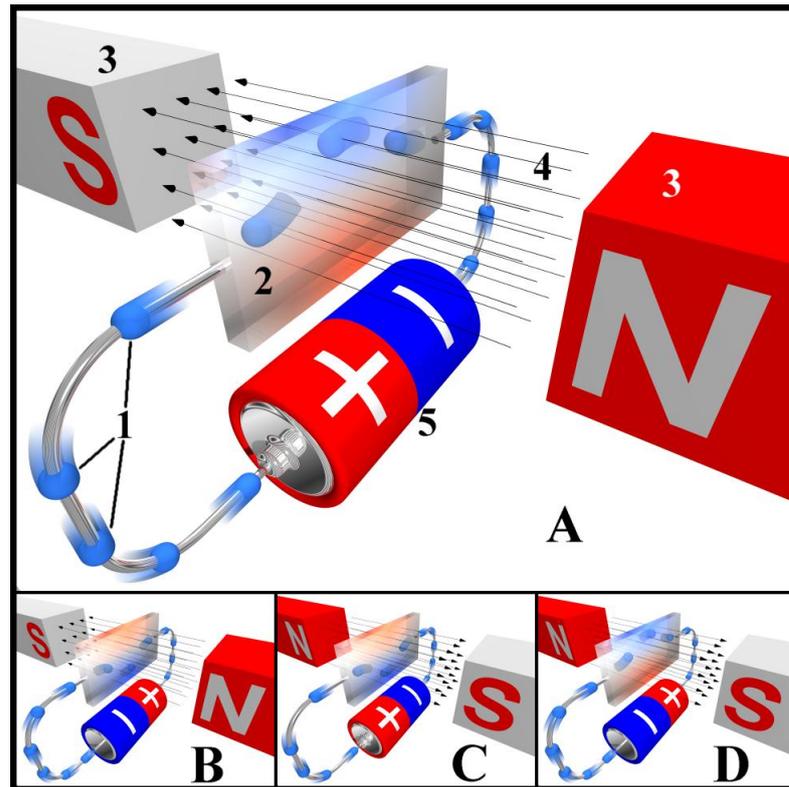


Figure 1.2: Visualização do efeito Hall. As partículas representadas pelo número 1 são elétrons, a placa 2 é a amostra condutora, o número 3 indica os pólos magnéticos, 4 são as linhas de campo magnético e 5 é a fonte de alimentação. Na figura A observa-se que os elétrons são desviados para a direita da sua trajetória devido a força de Lorentz. Como o termo magnético da força de Lorentz é dado por $q\vec{v} \times \vec{B}$, nas figuras B, C e D, altera-se respectivamente o sentido da corrente, o campo magnético e ambos simultaneamente. [24]

1.3 Níveis de Landau

O estudo de efeitos quânticos oriundos da presença de campo magnético através da equação de Schrödinger tem como ponto de partida o hamiltoniano do sistema. Supondo uma amostra planar submetida a um campo magnético uniforme e ortogonal ao plano, pode-se definir que o hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi. \quad (1.8)$$

onde \vec{A} e ϕ são os potenciais vetor e escalar, respectivamente. Esses potenciais eletromagnéticos contêm toda a informação dos campos \vec{E} e \vec{B} [25, 26]. A relação entre os potenciais e os campos é dada por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.10)$$

Para cada configuração de campo não existe apenas um par de potenciais eletromagnéticos. Os campos \vec{E} e \vec{B} são inalterados quando os potenciais se transformam pelas relações

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\xi, \quad \phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\xi}{\partial t} \quad (1.11)$$

onde $\xi(\vec{x}, t)$ é uma função escalar arbitrária. Essa mudança dos potenciais é chamada transformação de gauge, essas mudanças não apresentam qualquer efeito físico. Classicamente, o potencial escalar é o potencial elétrico já conhecido do eletromagnetismo e o potencial vetor é apenas uma ferramenta matemática. Todavia, na última seção deste capítulo discutiremos o significado físico do potencial vetor na mecânica quântica.

A partir da equação (1.8) podemos escrever a equação de Schrödinger como

$$\begin{aligned} H\psi &= E\psi \\ \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}\psi + q\phi\psi &= E\psi \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2\psi + q\phi\psi &= E\psi \end{aligned}$$

Se considerarmos o campo elétrico nulo essa equação pode ser reduzida a

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2\psi = E\psi. \quad (1.12)$$

Consideremos agora um campo magnético uniforme na direção \hat{z} , que pode ser representado por várias escolhas do potencial vetor como por exemplo $\vec{A} = (-By, 0, 0)$, $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ ou $\vec{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$. Utilizando a primeira opção tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}\left[(-i\hbar\partial_x + qBy)^2 + (-i\hbar\partial_y)^2 + (-i\hbar\partial_z)^2\right]\psi &= E\psi, \\ \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-i\partial_x + \frac{qBy}{\hbar}\right)^2 - (\partial_y)^2 - (\partial_z)^2\right]\psi &= E\psi, \end{aligned} \quad (1.13)$$

assim, propõe-se a solução trivial $\psi = e^{i(k_x x + k_z z)} f(y)$ para a equação 1.13 que resulta em

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{q^2 B^2}{2m}\left(y + \frac{\hbar k_x}{qB}\right)^2\right]f(y) = E'f(y), \quad (1.14)$$

onde $E' = E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$. Podemos ainda escrever a equação acima como

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{m\omega_c^2}{2}(y - y_0)^2 - E'\right]f(y) = 0, \quad (1.15)$$

onde $y_0 = \frac{\hbar k_x}{q|B|}$ e $\omega_c = q|B|/m$ é a frequência de ciclotron. Sabe-se que classicamente a trajetória do movimento de uma partícula carregada submetida a um campo magnético é um círculo. A

quantidade y_0 no caso quântico é conservada e corresponde à coordenada y do centro do círculo.

A equação (1.15) é similar a equação do oscilador harmônico,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{m\omega^2}{2} (y - y_0)^2 - E \right] \psi = 0. \quad (1.16)$$

Dessa forma, podemos escrever que

$$E' = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.17)$$

Assim, os auto-valores para uma partícula carregada na presença de um campo magnético uniforme na direção z são dados por

$$E_{n,k_z} = \hbar \frac{q|B|}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}. \quad (1.18)$$

O primeiro termo do lado direito da equação representa valores discretos de energia correspondentes ao movimento no plano perpendicular ao campo magnético. Já que a expressão (1.18) não depende de k_x nem de k_y , que possui uma sequência de valores contínuos, haverá níveis de energia continuamente degenerados. A separação dos níveis de energia é dada pela frequência de cíclotron ω_c , que é diretamente proporcional ao campo magnético. Esses são os chamados níveis de Landau.

A menos de uma constante de normalização, a função de onda para esse sistema é dada por

$$\psi(x, y, z) = \exp\{ik_x x + k_z z\} H_n \left\{ \frac{y - y_0}{l_B} \right\} \exp \left\{ -\frac{(y - y_0)^2}{2l_B^2} \right\}, \quad (1.19)$$

onde H_n representa os polinômios de Hermite e a quantidade

$$l_B = \left(\frac{\hbar}{|q|B} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.20)$$

é definida como comprimento magnético. Retomando a discussão sobre a degenerescência dos estados, ao considerar uma amostra retangular de dimensões L_X e L_Y , os valores possíveis de k_x serão $k_x = 2\pi n_x / L_x$ com $n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. No limite em que L_X e L_Y são muito grandes, não haverá problemas com órbitas próximas à borda e nesse limite o número de estados degenerados correspondente a um valor fixo de n será $L_X L_Y / 2\pi l_B^2$. Fazendo uma interpretação geométrica desse resultado, pode-se dizer que cada estado está relacionado com uma área de magnitude $2\pi l_B^2$ no plano perpendicular ao campo magnético. Pode-se dizer ainda que há uma unidade de fluxo magnético $\Phi_0 = 2\pi\hbar/q = h/q$ para cada área $2\pi l_B^2$. Dessa forma a degenerescência de Landau é dada pelo número de unidades de campo Φ_0 que atravessa o sistema. Logo, o número de estados em um nível de Landau preenchido, correspondente a um dado valor de n é o tamanho do sistema dividido pela superfície da órbita de cíclotron. Dessa forma, o número de estados por unidade de área n_B é dado por

$$n_B = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{qB}{h}. \quad (1.21)$$

Solução para os níveis de Landau em coordenadas cilíndricas

A equação de Schrödinger o sistema discutido anteriormente em coordenadas cartesianas pode ser resolvida também em coordenadas cilíndricas. Os níveis de energia serão os mesmos. A função de onda no entanto será escrita de outra forma.

Reescrevendo a equação (1.13) em coordenadas cilíndricas tem-se:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + i\frac{qB}{2m}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \frac{q^2B^2}{8m}r^2\psi = E\psi.$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right] + i\frac{qB}{2m}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \frac{q^2B^2}{8m}r^2\psi = E\psi. \quad (1.22)$$

Propondo uma solução na forma

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}R(r)e^{i\ell\phi}e^{ip_z z/\hbar}, \quad (1.23)$$

multiplicando por $\hbar^2/2m$ e fazendo $\omega = qB/m$, obtem-se a equação radial

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(R'' + \frac{R'}{r} - \frac{\ell^2 R}{r^2}\right) + \left[E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{8}r^2 - \frac{\hbar\omega\ell}{2}\right]\psi = E\psi. \quad (1.24)$$

Definindo uma nova variável $\xi = (m\omega/2\hbar)r^2$, a equação 1.24 pode ser reescrita como

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi}\right)R = 0, \quad (1.25)$$

onde $\beta = \frac{1}{\hbar\omega}\left(E - \frac{p_z^2}{2m}\right) - \frac{m}{2}$. Ao analisar os limites assintóticos dessa equação, ou seja, $\xi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow \infty$, propõe-se uma solução como

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^{\frac{|\ell|}{2}}u(\xi), \quad (1.26)$$

resultando em uma equação em u que tem como solução a função hipergeométrica confluyente

$$u = F\left[-\left(\beta - \frac{1}{2}|\ell| - \frac{1}{2}\right), |\ell| + 1, \xi\right]. \quad (1.27)$$

Para que essa função seja finita, é necessário que $(\beta - \frac{1}{2}|\ell| - \frac{1}{2})$ seja um inteiro positivo n . A partir dessa condição pode-se concluir que os níveis de energia são dados por[5]

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{|\ell|}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (1.28)$$

1.4 Efeito Hall quântico inteiro

O efeito Hall quântico foi descoberto na noite do dia 5 de fevereiro de 1980, no Laboratório de Alto Campo Magnético, em Grenoble, na França, quando Klaus von Klitzing investigava

propriedades de transporte de um MOSFET² de silício a temperaturas muito baixas e campo magnético muito intenso. Apesar de outros pesquisadores já terem estudado esse sistema desde 1966, e inclusive observado os platôs Hall, apenas em 1980, a idéia de analisá-los em termos de um valor fundamental h/e^2 surgiu pela primeira vez. Depois de outras medidas confirmarem a relação fundamental de quantização para a resistência Hall $R_H = h/ie^2$, onde i é um inteiro, von Klitzing ganhou o prêmio Nobel em 1985 pela descoberta do efeito Hall quântico[27, 28].

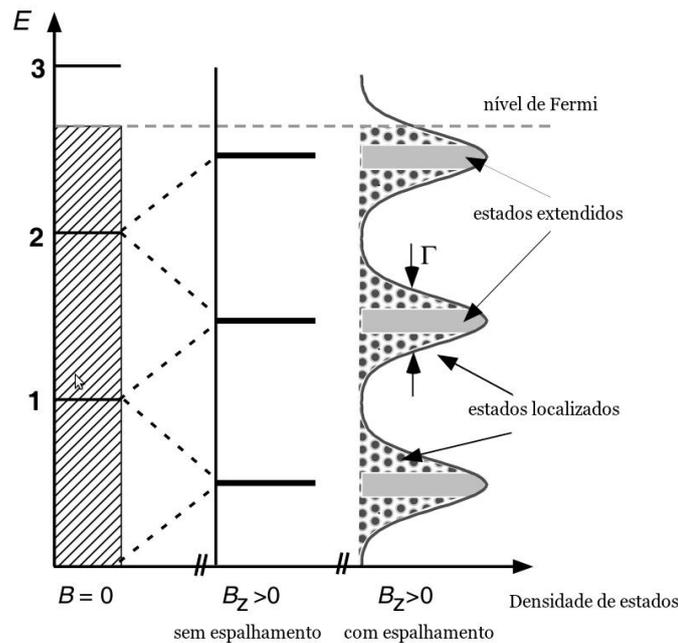


Figure 1.3: O primeiro diagrama representa a relação entre a densidade de estados e a energia para uma partícula livre em uma amostra. Observa-se que existe um contínuo de estados abaixo da energia de Fermi e que todos os estados estão ocupados pois o sistema se encontra a uma temperatura muito baixa. No gráfico, tem-se que ao aplicar campo magnético na amostra, os estados serão quantizados e nem todos os valores de energia serão possíveis. Na última figura, ilustra-se que ao haver impurezas no sistema, que irá causar espalhamento e desordem, os níveis deixaram de ser linhas para serem bandas que terão estados estendidos (que contribuem para a corrente de condução) e estados localizados. Fonte: [27]

Na noite da descoberta, von Klitzing e seus colaboradores Sir Michal Pepper e Gerhard Dorda, utilizaram um tipo especial de transistor de silício (Si), no qual pode-se conduzir elétrons em uma camada entre dois semicondutores. Eles aplicaram um campo magnético intenso obrigando os elétrons da camada do transistor, que possuía espessura de um nanômetro (10^{-9} m), a ocuparem bandas de energia separadas por intervalos finitos que contém apenas alguns níveis

²MOSFET (metal oxide semiconductor field-effect transistor) é um transistor no qual os elétrons podem ser conduzidos em uma camada entre semicondutores. Este dispositivo pode ser usado para amplificar ou comutar sinais eletrônicos.

isolados, ver fig.(1.3). Esses estados isolados existem devido à presença de impurezas, o que faz com que os níveis de Landau deixem de ser níveis para serem bandas. Assim, os estados próximos do centro de cada banda são os estados estendidos, ou pode-se chamar essa região central de banda de estados de condução. Os elétrons que ocupam esses estados são os únicos que podem fazer parte da corrente de condução. Os chamados estados localizados são aqueles que estão na região que seria de "gap" caso não houvesse impureza. Ou seja, estão mais próximos das extremidades das bandas. Os elétrons que estão ocupando esses estados não contribuem para a corrente de condução. Isso significa que se começar a mudar o número de elétrons que ocupam os estados localizados, a corrente será inalterada. Entretanto, uma mudança no número de elétrons nos estados estendidos pode ser verificada pela corrente. Após realizar o experimento, von Klitzing e seus colaboradores observaram que a resistência Hall não variava linearmente com o campo magnético, de acordo com o resultado clássico.

Teoricamente, podemos demonstrar a origem da quantização Hall, recordando a discussão a respeito da degenerescência dos níveis de Landau. Vimos que o número de estados por unidade de área em um nível de Landau preenchido é dado por

$$n_B = \frac{1}{2\pi a_m^2} = \frac{qB}{h}.$$

Podemos definir um fator de preenchimento ν que seria a degenerescência dos níveis como $\nu = n_s/n_B$ onde n_s é o número de elétrons por unidade de área. Quando um nível de Landau está preenchido tem-se $\nu = i$, onde i é um número inteiro. Assim pode-se dizer que o número quântico i indica as bandas de Landau preenchidas. Dessa forma, o número de elétrons por unidade de área será $n_s = in_B$, que ao substituir na relação para a resistência Hall, $R_H = B/qn_s$, obtém-se

$$R_H = \frac{B}{qn_s} = \frac{B}{qi\frac{qB}{h}} = \frac{h}{iq^2}. \quad (1.29)$$

Essa foi a descoberta sensacional de von Klitzing, Dorda e Pepper. Eles observaram que o gráfico da resistência Hall com o campo magnético não era uma reta e sim algo parecido com uma escada, em que cada degrau era separado de um tamanho, $\frac{h}{iq^2}$. O fato do número quântico i ser inteiro sugeriu o nome *Efeito Hall quântico inteiro*

Para analisar os níveis de energia e os platôs Hall, três pontos são muito importantes:

1. Para sistemas com temperaturas muito baixas, todos os estados abaixo do nível de Fermi estão ocupados.
2. Devido às impurezas, os níveis de Landau deixam de ser uma linha e passam a ser bandas com estados de condução (centro da banda) e estados que não conduzem (extremidades da banda).

3. O número de estados está diretamente relacionado com o fluxo magnético que atravessa a amostra, como mostra a relação 1.21. Logo, quanto mais intenso for o campo, mais estados existirão.

Com base nesse tópicos e na figura (1.3), é plausível dizer que ao aumentar o campo magnético, o número de estados irá aumentar e, efetivamente, o nível de Fermi irá baixar, pois todos os estados abaixo dele devem ser preenchidos³.

Suponhamos que o nível de Fermi esteja em uma banda de estados localizados próximo do topo de uma banda de Landau. Com a criação dos novos estados, ele irá baixar permanecendo ainda na região de estados localizados com alta energia, o que significa que todos os estados estendidos da banda de Landau em que ela se encontra continuam preenchidos. Assim a corrente que flui na amostra será a mesma.

Caso o nível de Fermi baixe e passe pela banda de estados estendidos, a corrente irá diminuir, aumentando a resistência Hall. Quando o nível de Fermi baixar e esvaziar a banda de estados estendidos por completo, o nível de Fermi vai entrar em uma sub-banda de estados localizados de baixa energia. Assim a corrente será reduzida em um banda de estados estendidos.

O fato do nível de Fermi esvaziar uma banda de estados estendidos, está relacionado ao fato de a resistência passar de um platô para outro, ver figura (1.4). A ocupação dos estados localizados não altera a resistência e resulta nos degraus, pois, se com o aumento do campo magnético aplicado o nível de Fermi esvaziar apenas estados localizados, a corrente que flui não altera, assim como a resistência. Isso devido ao fato da corrente de condução ser formada apenas pelos estados estendidos[29].

Uma outra característica muito importante do efeito Hall quântico é que nos platôs a corrente longitudinal flui sem resistência. Lembrando que ao passar de um estado de maior energia para outro de energia menor, a diferença de energia dos níveis será transformada em calor ou vibração. O efeito Hall quântico permite a calibração de instrumentos com alta precisão, inclusive ajuda na medida de constantes físicas fundamentais.

1.4.1 Efeito Hall quântico fracionário

Em 1982, Daniel Tsui, Horst Störmer e Arthur Gossad descobriram outros platôs que não estavam relacionados a números inteiros, e sim a alguns números fracionários específicos que continham sempre um número ímpar como denominador [4]. Esse número quântico mede a fração de estados preenchidos. Logo, sendo esse número fracionário, os níveis de Landau não estão cheios. Esse efeito ficou conhecido como efeito Hall quântico fracionário e ganhou o prêmio Nobel de física de 1998. O efeito Hall fracionário é mais complicado que o inteiro,

³Na realidade, a separação entre os níveis de Landau aumenta, pois é diretamente proporcional ao campo magnético. Assim, os níveis sobem passando pela energia de Fermi e não o contrário.

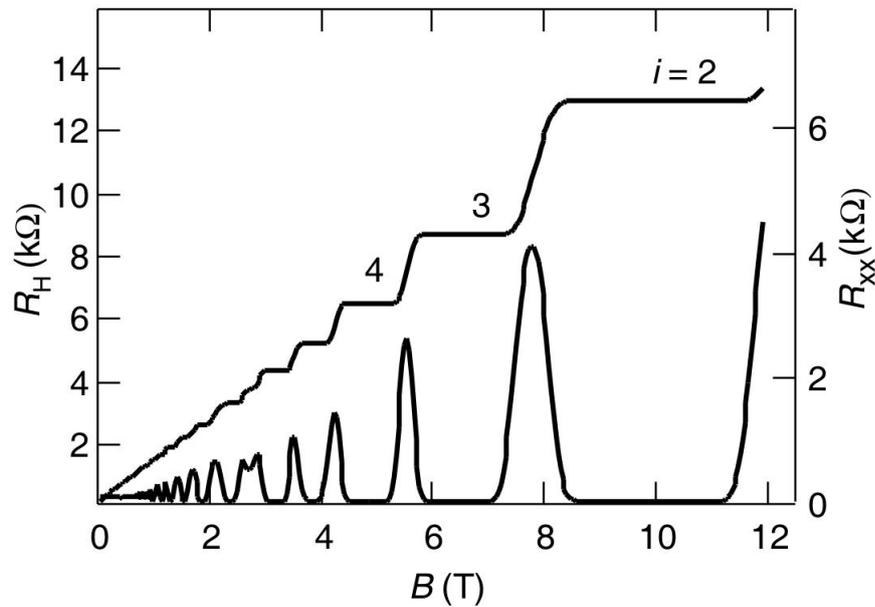


Figure 1.4: A curva que consiste de degraus, representa a resistência Hall, enquanto a curva que nas regiões dos platôs Hall é nula, ilustra o comportamento da resistência longitudinal, que é por onde passa a corrente usual. Fonte: [27].

devendo-se levar em consideração interações elétron-elétron. As referências [30, 31], discutem com detalhes esse tema.

1.5 Efeito Aharonov-Bohm

Em 1865, James Clerk Maxwell conceituou a idéia de potencial vetor que já havia sido apresentada e trabalhada analiticamente por outros físicos desde 1845. Entretanto, apenas em 1959, a importância física do potencial vetor foi discutida por Yakir Aharonov e David Bohm. Eles publicaram um artigo que tinha como proposta um experimento de Young de fenda dupla, onde incluíam a presença de um solenóide "infinito"⁴ entre as fendas e por trás delas[6]. Por consequência, haverá interferência entre as franjas obtidas pela passagem de elétrons nas fendas. É muito importante notar que os elétrons passam por uma região sem campo magnético, pois este está confinado no solenóide.

O hamiltoniano para uma partícula que passa nas proximidades de um solenóide é o mesmo dado nas seções anteriores,

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}, \quad (1.30)$$

⁴O solenóide não é de fato infinito, porém suas dimensões transversais são microscópicas de tal forma que as linhas de campos estejam praticamente confinadas no solenóide

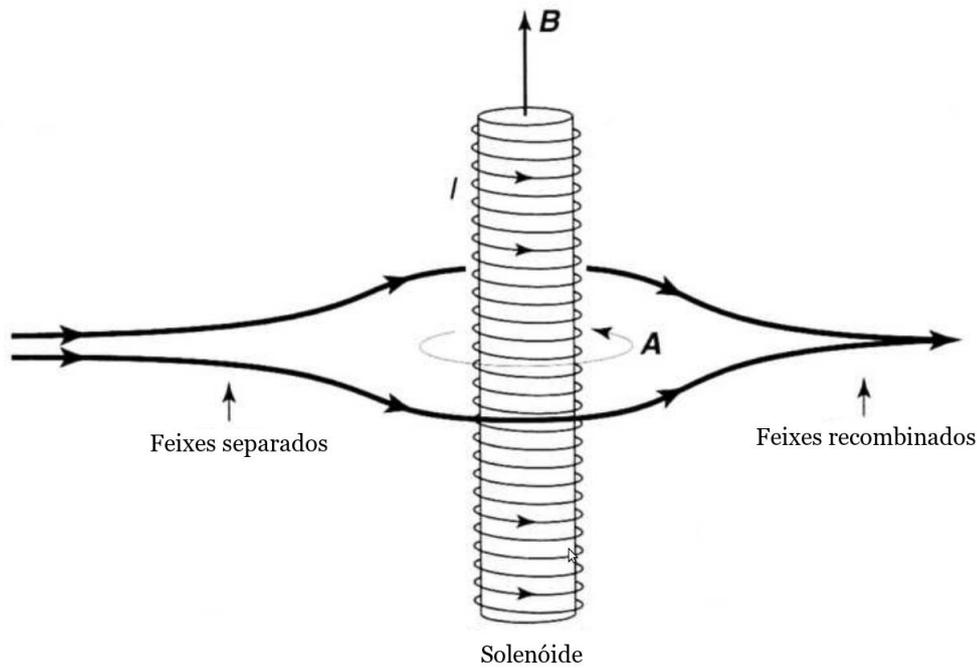


Figure 1.5: Dois feixes de elétrons são direcionados a um solenóide. Em seguida, se separam e se recombinam com uma fase que está relacionada ao potencial vetor. Fonte: [32].

e a equação de Schrödinger é escrita como

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi = E\psi. \quad (1.31)$$

É fácil mostrar que a função de onda para esse problema pode ser escrita como $\psi = e^{ig}\psi'$, onde g representa a fase adquirida devido à presença do solenóide. O potencial vetor para uma região exterior a um solenóide de raio a é dado por

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (1.32)$$

onde o fluxo magnético no interior do solenóide é $\Phi = \pi a^2 B$. Dessa forma, se considerarmos dois feixes de elétrons que se separam e se recombinam após passarem por um solenóide, como mostra a figura (1.5), podemos obter que a fase adquirida por cada feixe será

$$g = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} \hat{\phi} \right) \cdot (r\hat{\phi}d\phi) = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar}. \quad (1.33)$$

O sinal de mais é para o feixe que viaja na mesmo sentido que o campo vetorial \vec{A} , enquanto o sinal de menos é para o feixe que viaja no sentido contrário. Assim a diferença de fase obtida quando os feixes se recombinam será $\frac{q\Phi}{\hbar}$.

Outros efeitos análogos ao Aharonov-Bohm passaram a ser analisados posteriormente, tais como: Aharonov-Casher, Aharonov-Bohm elétrico e Aharonov-Carmi. O último é mais

importante para nosso trabalho e será discutido no próximo capítulo.

Neste capítulo, discutimos como o campo magnético pode influenciar alguns sistemas clássicos e quânticos. Classicamente, a atuação desse campo em uma amostra por onde passa uma corrente elétrica, gera um potencial elétrico ortogonal ao campo e à corrente. Quanticamente, nesse mesmo sistema vimos que a partir do coeficiente Hall observa-se que as órbitas de cíclotron são quantizadas. Ou seja, nem todas as órbitas clássicas são possíveis. Ainda em mecânica quântica, discutimos a proposta para um significado físico do potencial vetor feita por Aharonov e Bohm. Durante todo o capítulo, analisamos diferentes efeitos físicos devido a campo magnético. No seguinte, abordaremos efeitos análogos oriundos de uma rotação aplicada ao sistema.

Efeitos Inerciais

2.1 Introdução

As forças inerciais apresentam efeitos muito interessantes na Física. Tais forças, principalmente devido à rotação, têm sido frequentemente objeto de estudo dos físicos teóricos e experimentais. Os efeitos inerciais são observados desde fenômenos clássicos como a influência da força de Coriolis na Terra, a análogos a efeitos magnéticos na mecânica quântica. Nesse capítulo, mostraremos algumas analogias entre efeitos inerciais e eletromagnéticos na dinâmica quântica de cargas livres, todos causados por rotação. Para um melhor entendimento desse assunto é necessário uma discussão introdutória sobre o conceito de referenciais inerciais e não inerciais, assim como, forças que aparecem em um referencial girante.

2.2 Abordagem clássica

2.2.1 Definição de referenciais inerciais e não-inerciais

Um referencial pode ser dito inercial, se e somente se, nele for válido a lei da inércia,

”Se um corpo estiver em repouso ou movimento retilíneo uniforme ele permanecerá no mesmo estado de movimento até que alguma força passe a atuar sobre ele.”

Também será um sistema inercial todo referencial que esteja em repouso ou em movimento translacional uniforme em relação a um outro sistema inercial. Dessa forma, pode-se definir como referencial não-inercial todo e qualquer referencial acelerado.

Suponha que um ônibus em movimento uniforme de repente freia bruscamente quando o motorista percebe a parada muito próxima. Uma pessoa que estiver em pé no veículo será arremessada para a frente. Porém, ao analisar as forças que atuam nessa pessoa obtém-se que o somatório das forças é zero. Dessa maneira a primeira lei de Newton estaria sendo violada, pois no referencial do ônibus a pessoa estava parada e na ausência de forças atuando sobre ela, a mesma foi acelerada. Por isso o referencial do ônibus sendo freiado é um referencial não-inercial.

No referencial de um observador na parada de ônibus, a lei da inércia não é violada, pois

quando o motorista freia o veículo, as pessoas que estão dentro estão em movimento retilíneo uniforme e continuam em movimento retilíneo uniforme, por isso são arremessadas.

A "força" que faz as pessoas serem arremessadas para frente, no referencial do ônibus, é denominada força de inércia. Ela tem dimensão de força, é proporcional à massa inercial, assim como outras forças conhecidas, todavia, é uma força medida apenas no referencial não-inercial e não representa interação entre partículas. Forças de inércia surgem apenas em sistemas de referencia não-inerciais.

2.2.2 Referencial em rotação

E a respeito de um sistema de referencia em rotação, seria este um referencial inercial ou não-inercial? Esse sistema é bastante interessante, e estudando-o é possível mostrar que as forças de Coriolis e centrífuga são forças inerciais. Logo, o referencial de um disco girando é mais um exemplo de sistema de referencia não-inercial.

Suponha uma partícula que se encontra em um disco que está girando, como mostrado na figura (2.1). Dois referenciais podem ser escolhidos, um que está centralizado no disco que gira junto com o mesmo e um outro que está fixo no laboratório. A posição da partícula no dois referenciais é representada por \vec{r} e \vec{r}' , respectivamente. Pode-se escrever então que

$$\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r} \quad (2.1)$$

onde, \vec{R} representa a posição da origem do referencial girante no sistema de referencia não girante [33]. Dessa forma, podemos escrever que a velocidade da partícula medida no referencial fixo é dada por

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{fixo} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{fixo} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fixo}. \quad (2.2)$$

Assim, vamos focar na variação temporal do vetor \vec{r} no referencial fixo, $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fixo}$.

Sabe-se que um deslocamento devido a uma rotação infinitesimal, no sistema de coordenadas polares, é representado simplesmente por $d\vec{s} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$. Dessa forma, a velocidade para esse deslocamento é dada por $d\vec{s}/dt = d\vec{\theta}/dt \times \vec{r}$ sendo que $\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$ é a velocidade angular, ou seja, $d\vec{s}/dt$ é velocidade da partícula devido apenas à rotação do disco. Caso a partícula possa se mover no disco, essa velocidade, $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{girante}$, deve ser adicionada. Assim a velocidade da partícula no referencial fixo é dada pela velocidade da partícula no referencial girante mais o termo devido à rotação,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fixo} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{girante} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.3)$$

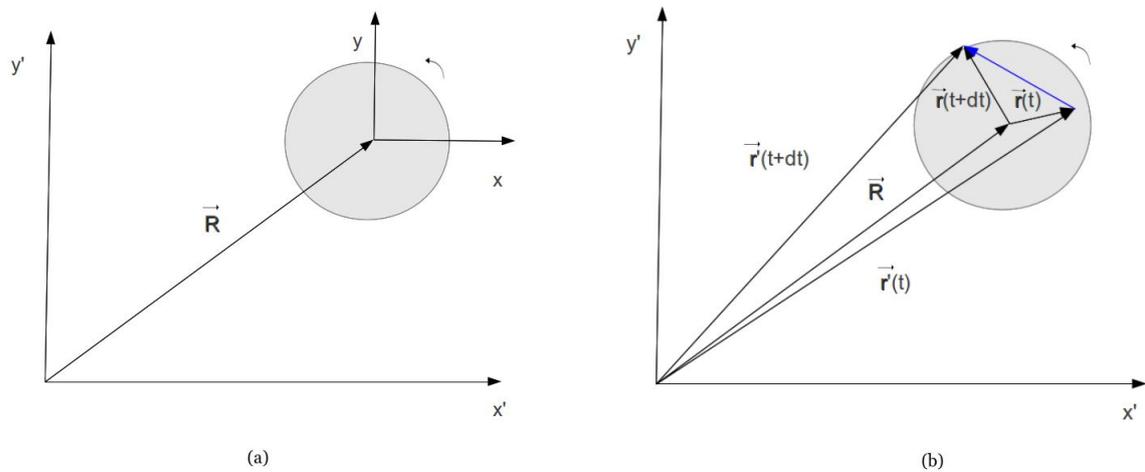


Figure 2.1: (a) Neste esquema podemos observar o referencial fixo (x', y') e o referencial girante (x, y) , que tem origem no centro do disco e velocidade angular $\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$. Na figura (b) estão expressos os vetores deslocamento \vec{r}' e \vec{r} nos referenciais fixo e girante respectivamente, e os mesmos vetores após um intervalo de tempo dt . O vetor em azul representa o deslocamento da partícula no intervalo dt . É importante deixar claro que nesta figura não está sendo considerado movimento de translação do referencial girante

A equação 2.3 pode ser generalizada para relacionar vetores do referencial fixo para o sistema de referencia que está girando,

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{\text{fixo}} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{\text{girante}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}. \quad (2.4)$$

Com esta equação pode se verificar que a aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ é a mesma nos dois referenciais.

Substituindo (2.3) em (2.2) pode-se encontrar a velocidade da partícula medida no referencial fixo

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\text{fixo}} &= \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\text{fixo}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fixo}} \\ &= \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\text{fixo}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{girante}} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

Assim, tem-se

$$\vec{v}_f = \vec{V} + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (2.7)$$

onde

$$\begin{aligned}
\vec{v}_f &= \text{velocidade no referencial fixo} \\
\vec{V} &= \text{velocidade da origem do referencial girante} \\
\vec{v}_r &= \text{velocidade no referencial girante} \\
\vec{\omega} &= \text{velocidade angular no referencial girante} \\
\vec{\omega} \times \vec{r} &= \text{velocidade devido à rotação do referencial girante.}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Como a lei da inércia, a segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, só é válida em referenciais inerciais. Assim, no referencial fixo tem-se

$$\vec{F} = m\vec{a}_f = m \left(\frac{d\vec{v}_f}{dt} \right)_{\text{fixo}}. \tag{2.9}$$

Com base em (2.2) tem-se

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt} \right)_{\text{fixo}} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{\text{fixo}} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{\text{fixo}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{fixo}}. \tag{2.10}$$

Analisando cada termo, pode-se definir

$$\ddot{\vec{R}} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{\text{fixo}} \tag{2.11}$$

e utilizando a equação (2.4), tem-se

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{\text{fixo}} &= \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{\text{girante}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r \\
&= \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

onde \vec{a}_r é a aceleração no sistema de coordenadas girante. O último termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{fixo}} &= \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{girante}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Ao combinar essas equações, obtém-se

$$\vec{F} = m\vec{a}_f = m\ddot{\vec{R}}_f + m\vec{a}_r + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \tag{2.14}$$

Essa é a força medida pelo observador no referencial fixo, a força efetiva medida pelo observador no referencial girante é dada por

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{eff} &= m\vec{a}_r \\
&= \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}_f - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

onde o primeiro termo, \vec{F} , é a força medida no referencial fixo, os dois seguintes, $-m\ddot{\vec{R}}_f - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$, representam o movimento acelerado do referencial não inercial, respectivamente, eles estão relacionados às acelerações translacional e rotacional. Caso não exista aceleração do sistema de referencia não-inercial, esse dois termos serão nulos, resultando em

$$\vec{F}_{eff} = m\vec{a}_f - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \quad (2.16)$$

Os dois últimos termos dessa expressão são as forças centrífuga e de Coriolis, respectivamente. O sinal de menos na força centrífuga significa que ela está direcionada para fora do centro de rotação. Um ponto muito importante a respeito da força de Coriolis é que ela só será não-nula se houver movimento da partícula no referencial não inercial. Ou seja, se uma partícula está livre e parada em um disco e esse disco começa a girar, a única força que a partícula irá sentir será a força centrífuga. É importante estar claro que a força centrípeta é uma força diferente das forças centrífugas e de Coriolis que são forças inerciais e que surgem devido à necessidade de escrever uma expressão como a segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}_f$, para o referencial não-inercial, já que esta só é válida para o referencial inercial.

2.2.3 Efeitos da força de Coriolis na Terra

Ao analisar a força de Coriolis no hemisfério norte obtém-se que o sentido da força é para a direita do movimento da partícula e tem módulo $2mv_r\omega$. Quando observa-se essa força no hemisfério sul, nota-se que a força tem o mesmo módulo e está direcionada para o lado esquerdo do movimento da partícula. Assim, dependendo da direção para a qual um objeto se move e em que hemisfério ela esteja, a força de Coriolis vai atuar curvando a trajetória do objeto, para um lado ou para o outro. Os efeitos mais notáveis dessas forças estão nas massas de ar. A força de Coriolis é responsável pelo surgimento de furacões que perturbam as pessoas. Uma curiosidade é que o sentido do giro dos furacões no hemisfério norte e no hemisfério sul são diferentes, sendo de sentido horário e anti-horário, respectivamente [34].

2.2.4 Efeito Hall devido a forças inerciais

A influência das forças inerciais vai além da mecânica clássica. Essas forças podem ser utilizadas em estudos de efeitos análogos do eletromagnetismo e até da mecânica quântica, como veremos na próxima seção. A idéia principal para esses efeitos análogos é a substituição de campo magnético por rotação.

O efeito Hall está relacionado ao surgimento de uma diferença de potencial em um dado condutor elétrico devido à aplicação de um campo magnético na direção perpendicular à corrente, como explicado no capítulo anterior. O campo magnético altera a condutividade da amostra

e sua resistência elétrica poderá ser calculada em termos do campo magnético, massa de cíclotron e densidade de cargas. Johnson propôs um experimento no qual a resistência Hall será uma função da massa inercial, densidade de carga e da taxa de rotação[22]. O experimento consiste de uma amostra bidimensional em uma plataforma horizontal girante que tem o eixo de rotação perpendicular à amostra, ver fig.(2.2). Os elétrons saem do ponto S, que é a fonte de elétrons, para o ponto D. Devido aos efeitos inerciais, a medida no referencial fixo do laboratório será diferente da medida no referencial girante. Na média, os elétrons terão trajetórias retilíneas no referencial do laboratório, entretanto elas serão deslocadas no referencial girante devido à atuação da força de Coriolis. Efeitos devido à força centrípeta também são detectados, já que ela tem a mesma direção que a corrente, ela será usada pra gerar uma corrente em uma primeira aproximação.

As cargas que têm suas trajetórias deslocadas vão induzir um campo elétrico transversal para balancear os efeitos da força que causou esse deslocamento. Então, o equilíbrio das forças $eE = 2m^*\Omega v$, juntamente com a expressão para a densidade de corrente, $j = nev$, fornecem uma expressão linear para a resistência Hall no referencial girante,

$$R_H = \frac{E}{j} = \frac{2m^*\Omega}{ne^2}, \quad (2.17)$$

onde E é o campo elétrico induzido, m^* é a massa efetiva dos portadores de carga e n é a densidade desses portadores. Dessa forma, Johnson mostrou que o efeito Hall pode ser utilizado não só para caracterizar portadores de carga e a densidade desses portadores, que tem sido feito por muitos anos em metais e supercondutores, mas também como uma prova das forças inerciais quando utiliza-se rotação ao invés de campo magnético.

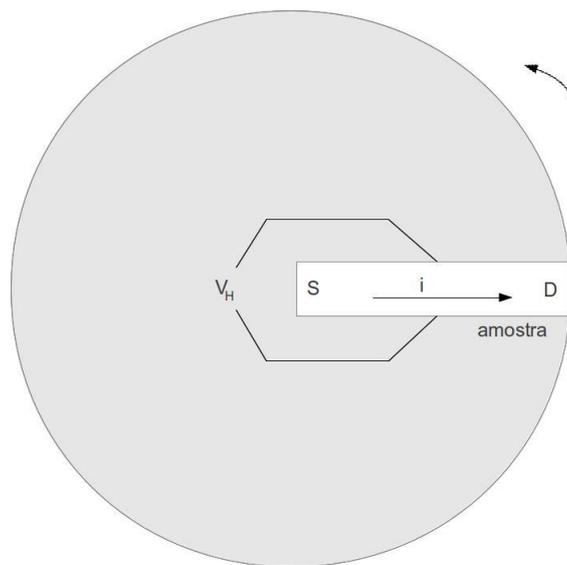


Figure 2.2: A amostra é colocada sobre um disco girante, que tem o eixo z como eixo de rotação.

2.3 Estudos em mecânica quântica

Efeitos inerciais devido à rotação podem ser detectados em experimentos de interferência, como o efeito Aharonov-Carmi, e em experimentos de visualização de espectro de energia. A similaridade entre o hamiltoniano de um sistema submetido a um campo magnético e o de um sistema em um referencial girante, é a principal motivação para buscar um efeito semelhante ao efeito Hall tendo como fonte forças inerciais ao invés da força de Lorentz.

2.3.1 Efeito Aharonov-Carmi

Em 1973, Aharonov e Carmi, propuseram um experimento "imaginário" de interferência envolvendo rotação, que consistia de um anel girando na presença de campos elétrico e magnético[16, 20]. Assim como o efeito Aharonov-Bohm a idéia para esse experimento era estudar um efeito em uma região livre de campos. Dessa forma, os campos eletromagnéticos foram escolhidos para cancelar as forças inerciais na região do anel, $r_1 < r < r_2$. Sejam os campos,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= -(2m/q)\vec{\omega} \\ \vec{E} &= (m/q)\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\end{aligned}\quad (2.18)$$

onde $\vec{\omega}$ é o campo de rotação que é "real" para o referencial girante assim como os campos \vec{E} e \vec{B} são para o observador no referencial inercial. Esse campo magnético pode ser obtido utilizando dois solenóides concêntricos. O campo elétrico pode em princípio ser criado com uma escolha apropriada de uma distribuição de cargas axialmente simétrica.

Sejam os raios internos e externos do anel representados por r_1 e r_2 , respectivamente. O hamiltoniano para a região $r_1 < r < r_2$, onde r é a coordenada radial do vetor posição da partícula, é dado por

$$H = \frac{(\vec{p} - 2m\vec{a})^2}{2m} \quad (2.19)$$

e \vec{a} é o potencial vetor inercial, que satisfaz

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{a}. \quad (2.20)$$

O hamiltoniano para uma partícula carregada submetida a um campo magnético é dado por

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}, \quad (2.21)$$

onde \vec{A} é o potencial vetor que dá origem ao efeito Aharonov-Bohm. Podemos notar que os hamiltonianos (2.19) e (2.21) são análogos, ou seja, a força de Coriolis, representada pelo potencial vetor inercial \vec{a} , substitui a força magnética denotada pelo potencial vetor \vec{A} . Dessa

forma, é de se esperar um efeito de interferência tipo Aharonov-Bohm no sistema girante.

No efeito Aharonov-Bohm, a partícula carregada que está em uma região sem campo magnético, adquire uma fase em sua função de onda devido ao potencial vetor \vec{A} . Essa fase é dada pela integral do potencial vetor ao longo do caminho da partícula carregada,

$$\psi = \psi_0 \exp\left[\frac{iq}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}\right], \quad (2.22)$$

onde ψ_0 é a função de onda para uma partícula livre. Assim a fase será

$$\delta = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (2.23)$$

Então, comparando (2.19) e (2.21) obtém-se que a fase de Aharonov-Carmi será

$$\delta = \frac{2m}{\hbar} \oint \vec{a} \cdot d\vec{l}. \quad (2.24)$$

No efeito Aharonov-Bohm, a partícula carregada passa nas proximidades do fluxo de campo magnético confinado em um solenóide. No efeito Aharonov-Carmi, a partícula move-se próximo ao fluxo de rotação que atravessa a região $r < r_1$. Ou seja, em ambos casos, a partícula está em uma região livre de campos e ainda assim adquire uma fase na função de onda. Além do efeito de interferência, o efeito Aharonov-Carmi pode ser responsável por um deslocamento no espectro de energia, [23, 35, 36]. Isso foi mostrado por Shen e Zhuang em seu artigo abordando uma molécula de fulereno, C60.

2.3.2 Correntes de spin em sistemas girantes

Ao considerar um referencial girante que contém partículas com spin, é necessário uma abordagem um pouco diferente da equação de Schrödinger, que é uma versão da equação de Schrödinger-Pauli. Recentemente, Matsuo, Ieda, Saitoh e Maekawa, investigaram a geração de correntes de spin em sistemas girantes [37]. Utilizando equações de movimento semi-clássicas para um elétron baseado na Equação de Schrödinger-Pauli em um referencial girante, eles mostraram a existência de uma "força" inercial dependente do spin que termina por gerar uma corrente de spin na direção azimutal.

2.3.3 Análogo rotacional do efeito Hall quântico

Além de mostrar a ocorrência do efeito Hall devido as forças inerciais que atuavam em uma amostras que estava em um referencial girante, B. L. Johnson fez um estudo no escopo da mecânica quântica de um disco girante. No referencial girante as forças de Coriolis e centrífuga estão presentes e implicam no seguinte hamiltoniano para o sistema

$$H = \frac{[\vec{p} - m(\vec{\Omega} \times \vec{r})]^2}{2m} - \frac{m(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2}. \quad (2.25)$$

A estrutura desse hamiltoniano é semelhante à do hamiltoniano de uma partícula carregada submetida a um campo eletromagnético,

$$H = \frac{[\vec{p} - q\vec{A}]^2}{2m} + qV. \quad (2.26)$$

Uma importante exceção na semelhança entre os dois operadores é que o acoplamento do potencial vetor no hamiltoniano do sistema girante não tem dependência com a carga elétrica, e sim com a massa.

A grande semelhança entre os hamiltonianos (2.25) e (2.26) leva a crer na existência de algum efeito análogo ao efeito Hall quântico. Então, simplificando (2.25),

$$H = \frac{p^2}{2m} - \vec{p} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (2.27)$$

e escrevendo a equação de Schrödinger, sabendo que $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ e $p_\phi = -\frac{i\hbar}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}$, obtém-se

$$\hat{H}\psi = E\psi \implies -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + i\Omega\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = E\psi. \quad (2.28)$$

Levando em consideração a simetria azimutal da equação, pode-se utilizar a escolha $\psi = R(r)e^{-i\ell\phi}$, onde ℓ é inteiro. Dessa forma, obtém-se uma equação de Bessel para a parte radial da função de onda:

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - \ell^2)R = 0, \quad (2.29)$$

com ℓ positivo e $\lambda^2 = (2m/\hbar^2)(E - \ell\hbar\Omega)$. Assim a função de onda e a energia do sistema são dadas por

$$\psi = J_\ell(|\lambda|r)e^{-i\ell\phi}, \quad (2.30)$$

$$E = \frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + \ell\hbar\Omega, \quad (2.31)$$

A condição de contorno desse problema, de que a função de onda deve ser nula na borda, fará o parâmetro λ ter um papel fundamental na quantização dos níveis de energia, ele estará relacionado com os zeros da função de Bessel. Existirão n zeros para a função de Bessel de tal modo que a função de onda será nula na borda do disco. Logo, para uma amostra de raio R , a função de onda deve satisfazer a $J_\ell(\lambda R) = 0$, que resulta em $\lambda \rightarrow \lambda_{n\ell}/R$, onde $\lambda_{n\ell}$ é o n -ésimo zero da função de Bessel de ordem ℓ .

A semelhança entre os hamiltonianos do sistema girante e do sistema submetido ao campo magnético é muito grande, contudo, os resultados para a função de onda e os níveis de energia apresentam diferenças interessantes. Como já foi visto no capítulo anterior, para uma partícula submetida a um campo magnético uniforme, os níveis de energia são degenerados e o efeito Hall quântico é resultado da independência da energia com o comprimento da amostra. Para o caso

girante, a degenerescência não existe devido à presença do parâmetro λ na expressão para a energia. Sendo esse parâmetro relacionado ao tamanho da amostra, o efeito Hall quântico também não pode ser medido. Fisicamente, a razão para haver essas diferenças é a presença da força centrífuga. Nota-se inclusive que a contribuição no hamiltoniano devido ao movimento centrífugo é estruturalmente semelhante à parte devida ao campo elétrico no hamiltoniano (2.26). Assim pode-se dizer que o movimento centrífugo é análogo ao movimento devido ao campo elétrico, que não está presente nos níveis de Landau pois implica num movimento de deriva nos elétrons.

Para ilustrar melhor o comportamento dos níveis de energia no referencial girante, Jonhson fez alguns gráficos, ver fig. (2.3), onde mostra que o espectro de energia será discreto mas o gap de energia entre ℓ 's diferentes será preenchido por estados com diferentes λ 's de um ℓ específico. Na figura (2.3.a), utilizando uma taxa de rotação de 1Mhz, estão expostos os 100 primeiros zeros da função de Bessel para cada valor de ℓ , ou seja, cada uma das linhas do gráfico são na verdade, 100 pontos muito próximos. Nota-se que existe uma superposição evidente entre as bandas de ℓ 's diferentes e a distribuição dos estados é praticamente um contínuo. Na figura (2.3.b), a taxa de rotação passou a ser 100Ghz e para cada valor de ℓ foram calculados 1000 zeros da função de Bessel. Agora a superposição dos estados é menor. Um trecho com 10 pontos do nível $\ell = 3$ é expandido para mostrar que a diferença de energia entre o primeiro e o décimo ponto é apenas 0.01meV. Vale destacar que o valor da taxa de rotação utilizada neste gráfico é meramente ilustrativa, pois é uma taxa muito alta.

Muitos outros efeitos devido a forças inerciais são estudados, no limite relativístico, onde utiliza-se a equação de Dirac. Pode-se observar o efeito Sagnac, acoplamento spin-órbita, efeito *redshift* energia-momentum, etc.

No capítulo anterior, discutimos alguns efeitos clássicos e quânticos baseados em interações eletromagnéticas, dentre eles os níveis de Landau e o efeito Hall quântico. Nesse capítulo, abordamos efeitos análogos aos do capítulo anterior, que utilizam rotação ao invés de campo magnético. No capítulo seguinte, estudaremos o efeito da combinação do campo magnético e da rotação.

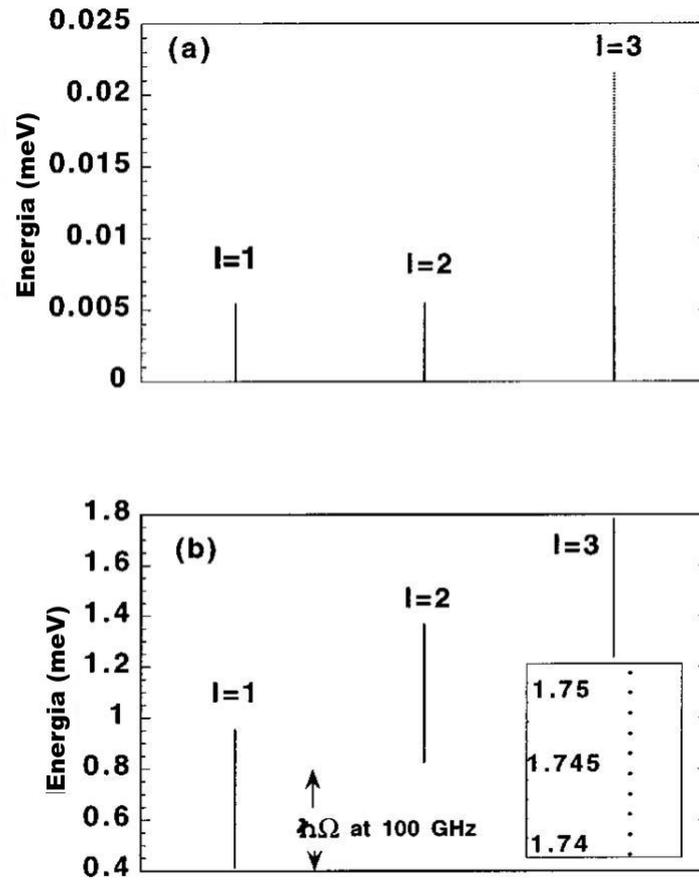


Figure 2.3: Resultados de Johnson. (a) Para cada valor de ℓ foram calculados os 100 primeiros zeros da função de Bessel, que estão representado pelas três linhas verticais. A taxa de rotação utilizada foi 1MHz. Nota-se que as bandas são praticamente um contínuo. (b) A taxa de rotação utilizada agora foi de 100GHz e foram calculados os primeiros 1000 zeros da função de Bessel. No canto inferior direito a escala é ampliada para notar pequena diferença de energia entre 10 estados consecutivos para $\ell = 3$. Fonte: [22]

Efeito Coriolis-Landau

3.1 Introdução

Nos capítulos anteriores discutimos os efeitos adquiridos por alguns sistemas devido a presença de campo magnético, assim como a rotação dos sistemas. Neste capítulo, abordaremos a nossa contribuição para a área. Exploraremos a influência de campo magnético e rotação sobre por uma partícula carregada.

3.2 Descrição do problema

O sistema em estudo é um disco girando com velocidade $\vec{\Omega}$ e submetido a um campo magnético \vec{B} . Mais especificamente, serão analisados os efeitos dos campos magnético e de rotação sobre uma partícula carregada que se move nesse disco. Dessa forma, as forças atuantes são Coriolis, centrífuga e Lorentz, as quais são especificadas respectivamente como

$$\vec{F}_{Cor} = 2m(\vec{v} \times \vec{\Omega}), \quad (3.1)$$

$$\vec{F}_{Cen} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \quad (3.2)$$

e

$$\vec{F}_{Lor} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.3)$$

onde m e q são respectivamente, a massa e a carga da partícula.

Nesse capítulo será feito um estudo no referencial girante, para onde os campos eletromagnéticos irão se transformar de acordo com [38]:

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{\gamma}{(\gamma+1)}(\vec{V} \cdot \vec{E})\vec{V}, \\ \vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{V} \times \vec{E}) + \gamma^2 \vec{V} \times (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)}(\vec{V} \cdot \vec{B})\vec{V}, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $\gamma = \sqrt{1/(1 - V^2/c^2)}$ e \vec{V} representa a velocidade de rotação. Os elementos \vec{E}' e \vec{B}' , são os campos no referencial girante e \vec{E} e \vec{B} são os campos no referencial do laboratório. A velocidade de rotação do disco será muito menor que a velocidade da luz, então,

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}, \quad (3.5)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}. \quad (3.6)$$

Nota-se que , o campo magnético no referencial girante (\vec{B}') independe da rotação. Ou seja, será igual a \vec{B} , que é o campo magnético aplicado. Porém, o campo elétrico no referencial girante será o campo elétrico aplicado mais uma componente dependente da rotação e do campo magnético, $(\vec{V} \times \vec{B})$. Assim, mesmo que o disco não seja submetido a um campo elétrico, haverá uma componente devida ao campo magnético e à rotação. A velocidade na relação (3.5) é a velocidade de cada ponto do referencial girante, logo depende do raio, ou seja, $\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$. Então, os campos eletromagnéticos no referencial girante serão dados por

$$\vec{E}' = (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}, \quad (3.7)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}, \quad (3.8)$$

se não há campo elétrico aplicado no referencial fixo. Assim, pode-se concluir que a força total sentida pela partícula no referencial girante é

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= \vec{F}_{Cor} + \vec{F}_{Cen} + \vec{F}_{Lor} \\ &= 2m(\vec{v}' \times \vec{\Omega}) - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + q(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} + q\vec{v}' \times \vec{B} \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde \vec{v}' é a velocidade da partícula no referencial girante.

3.3 Equação de Schrödinger

Para escrever a equação de Schrödinger para a partícula submetida a campo magnético e a rotação, é necessário conhecer os potenciais que descrevem o sistema, pois a partir desse conhecimento, obtém-se o operador hamiltoniano para o mesmo. A única condição imposta por enquanto será que o campo magnético e o eixo de rotação estarão ambos na direção z. Assim os potenciais eletromagnéticos \vec{A} e V serão dados por

$$V = -\frac{\Omega B r^2}{2}, \quad (3.10)$$

$$\vec{A} = (0, \frac{B r}{2}, 0). \quad (3.11)$$

Com base nos capítulos anteriores, podemos escrever que o hamiltoniano para uma partícula submetida à força de Lorentz e às forças inerciais de Coriolis e centrífuga, é

$$H = \frac{[\vec{p} - q\vec{A} - m(\vec{\Omega} \times \vec{r})]^2}{2m} - \frac{m(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2} + qV \quad (3.12)$$

tal que o acoplamento $-q\vec{A} - m(\vec{\Omega} \times \vec{r})$ representa as força magnética e a de Coriolis. Já os outros dois termos representam a força centrífuga e a força elétrica, respectivamente. Então, de posse das expressões (3.10) e (3.11), o hamiltoniano é resumido a

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \alpha r \vec{p}_\phi + \beta r^2 \quad (3.13)$$

onde

$$\alpha = \frac{qB}{2m} + \Omega, \quad (3.14)$$

$$\beta = \frac{q^2 B^2}{8m}. \quad (3.15)$$

Sabendo que $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ e $\vec{p}_\phi = -\hat{\phi}\frac{i\hbar}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}$, a equação de Schrödinger para esse hamiltoniano pode ser escrita como

$$\hat{H}\psi = E\psi \implies -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + i\alpha\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \beta r^2\psi = E\psi. \quad (3.16)$$

Devido à simetria azimutal da equação, a escolha $\psi = R(r)e^{-il\phi}$ pode ser utilizada, o que faz a equação (3.16) resultar em uma equação em r apenas,

$$r^2 R'' + rR' + (-\sigma^2 r^4 + \lambda r^2 - l^2)R = 0, \quad (3.17)$$

onde

$$\sigma^2 = \frac{q^2 B^2}{4\hbar^2}, \quad (3.18)$$

$$\lambda = \frac{2m}{\hbar} \left(\frac{E}{\hbar} - \frac{qBl}{2m} - \Omega l \right). \quad (3.19)$$

Para solucionar a equação (3.17), fazemos $\sigma r^2 = \xi$, tal que

$$r = \sqrt{\frac{\xi}{\sigma}}, \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{d\xi} = 2\sigma r \frac{d}{d\xi} = 2\sigma \sqrt{\frac{\xi}{\sigma}} \frac{d}{d\xi}. \quad (3.21)$$

Dessa maneira, ao substituir (3.20) e (3.21) em (3.17) obtém-se

$$\frac{\xi}{\sigma} \left\{ 2\sigma \sqrt{\frac{\xi}{\sigma}} \frac{d}{d\xi} \left[2\sigma \sqrt{\frac{\xi}{\sigma}} \frac{d}{d\xi} R \right] \right\} + \sqrt{\frac{\xi}{\sigma}} 2\sigma \sqrt{\frac{\xi}{\sigma}} \frac{d}{d\xi} R + \left(-\xi^2 + \frac{\lambda\xi}{\sigma} - l^2 \right) R = 0, \quad (3.22)$$

que leva a

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} + \left(-\frac{l^2}{4\xi} - \frac{\xi}{4} + \frac{\lambda}{4\sigma} \right) R = 0. \quad (3.23)$$

Ao analisar os limites assintóticos dessa equação, ou seja, $\xi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow \infty$, propõe-se uma solução como

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}} u(\xi), \quad (3.24)$$

na qual foi utilizado o módulo de l para que essa solução não tenha uma divergência na origem. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\xi} &= e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}} \frac{du}{d\xi} + \frac{|l|}{2} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}-1} u - \frac{1}{2} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}} u \quad (3.25) \\ \frac{d^2R}{d\xi^2} &= e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}} \frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{|l|}{2} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}-1} \frac{du}{d\xi} - \frac{1}{2} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}} \frac{du}{d\xi} \\ &\quad + \frac{|l|}{2} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}-1} \frac{du}{d\xi} + \frac{|l|}{2} \left(\frac{|l|}{2} - 1 \right) e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}-2} u - \frac{|m|}{4} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}-1} u \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}} \frac{du}{d\xi} - \frac{|m|}{4} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}-1} u + \frac{1}{4} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|l|}{2}} u, \end{aligned}$$

que, ao substituir na equação (3.23) resulta em

$$\begin{aligned} \xi^{\frac{|l|}{2}+1} \frac{d^2u}{d\xi^2} + \left[|l| \xi^{\frac{|l|}{2}} - \xi^{\frac{|l|}{2}+1} \right] \frac{du}{d\xi} + \left\{ -\frac{|l|}{2} \xi^{\frac{|l|}{2}} + \frac{|l|}{2} \left(\frac{|l|}{2} - 1 \right) \xi^{\frac{|l|}{2}-1} + \frac{1}{4} \xi^{\frac{|l|}{2}+1} \right\} u \\ + \xi^{\frac{|l|}{2}} \frac{du}{d\xi} + \left\{ +\frac{|l|}{2} \xi^{\frac{|l|}{2}-1} - \frac{1}{2} \xi^{\frac{|l|}{2}} - \frac{l^2}{4} \xi^{\frac{|l|}{2}-1} - \frac{1}{4} \xi^{\frac{|l|}{2}+1} + \frac{\lambda}{4\sigma} \xi^{\frac{|l|}{2}} \right\} u = 0. \end{aligned}$$

Agora ao multiplicar-se essa equação por $\xi^{-\frac{|l|}{2}}$ e também realizar as operações algébricas necessárias obtém-se,

$$\xi \frac{d^2u}{d\xi^2} + [1 + |l| - \xi] \frac{du}{d\xi} + \left[\frac{\lambda}{4\sigma} - \frac{1}{2} (|l| + 1) \right] u = 0, \quad (3.26)$$

que é uma equação hipergeométrica confluyente [39]. Isto é, da forma

$$z \frac{d^2w}{dz^2} + (b - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0, \quad (3.27)$$

cuja solução completa é

$$w = A.F(a, b, z) + B.U(a, b, z), \quad (3.28)$$

onde A e B são constantes. A função hipergeométrica $F(a, b, z)$ é definida pela série

$$F(a, b, z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!} + \dots + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} + \dots, \quad (3.29)$$

onde

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \quad (a)_0 = 1, \quad (3.30)$$

e a função $U(a, b, z)$ é definida por

$$U(a, b, z) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left\{ \frac{F(a, b, z)}{\Gamma(1+a+b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{F(1+a-b, 2-b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right\}. \quad (3.31)$$

Então a equação (3.26) terá como solução

$$u = A.F\left(\frac{-\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2} (|l| + 1), 1 + |l|, \xi\right) + B.U\left(-\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2} (|l| + 1), 1 + |l|, \xi\right), \quad (3.32)$$

logo,

$$R(r) = e^{-\frac{\sigma r^2}{2}} (\sigma r^2)^{\frac{|l|}{2}} \left\{ A.F \left(-\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2} (|l| + 1), 1 + |l|, \sigma r^2 \right) + B.U \left(-\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2} (|l| + 1), 1 + |l|, \sigma r^2 \right) \right\}.$$

Todavia, pode-se observar que o coeficiente $b = 1 + |l|$ das funções F e U na função R , $|l| + 1$, é inteiro e positivo, o que faz a função U divergir na origem, restando como uma solução fisicamente aceitável apenas a função F . Esta, por sua vez, para ser uma função polinomial finita¹ deve ter $a = -n$, condição que fornecerá a quantização dos níveis de energia. Sendo assim,

$$\begin{aligned} -n &= -\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2} (|l| + 1) \\ -n &= -\frac{\frac{2m}{\hbar} \left(\frac{E}{\hbar} - \frac{qBl}{2m} - \Omega l \right)}{4\frac{qB}{2\hbar}} + \frac{1}{2} (|l| + 1) \\ -\left(\frac{E}{\hbar} - \frac{qBl}{2m} - \Omega l \right) &= \frac{\hbar}{2m} \frac{2qB}{\hbar} \left[-n - \frac{1}{2} (|l| + 1) \right] \\ E &= \hbar \left\{ \frac{qBl}{2m} + \Omega l + \frac{qB}{m} \left[+n + \frac{1}{2} (|l| + 1) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Então os níveis de energia são dados por

$$E_{n,l} = \frac{qB\hbar}{m} \left\{ n + \frac{l}{2} + \frac{|l|}{2} + \frac{1}{2} \right\} + \Omega l \hbar \quad (3.33)$$

e a função de onda é

$$\psi = A e^{-i\ell\phi - \frac{\sigma r^2}{2}} (\sigma r^2)^{\frac{|l|}{2}} F \left(-\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2} (|l| + 1), 1 + |l|, \sigma r^2 \right). \quad (3.34)$$

Esses resultados são para as partículas carregadas em um disco girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}$ e submetido a um campo magnético \vec{B} . Ou seja, para obter tais resultados não foi especificado nenhum valor para a velocidade angular nem para o campo magnético, assim esse é um resultado para valores arbitrários de $\vec{\Omega}$ e \vec{B} . A única condição imposta foi que o campo de rotação e o campo magnético têm mesma direção. Note que o tamanho do disco não aparece nos resultados. Está implícito que a gaussiana que aparece na eq.3.34 aniquila a função de onda bem antes da borda do disco. Isto vale para campos magnéticos fortes. Como veremos abaixo, para campos fracos, outra abordagem será utilizada. A partir desses resultados alguns casos particulares serão abordados. O primeiro deles é a ausência da rotação, $\Omega = 0$, resultando ao sistema apenas a força magnética, o que implica nos já conhecidos níveis de Landau[5]:

$$E_{n,\ell} = \frac{qB\hbar}{m} \left\{ n + \frac{\ell}{2} + \frac{|\ell|}{2} + \frac{1}{2} \right\} \implies E_{n'} = \hbar\omega_B \left\{ n' + \frac{1}{2} \right\}, \quad (3.35)$$

¹A função de onda deve satisfazer a condição de normalização $\int |\psi|^2 dr d\phi = 1$, por isso a função polinomial deve ser finita.

$$\psi = Ae^{-i\ell\phi - \frac{\sigma r^2}{2}} (\sigma r^2)^{\frac{|\ell|}{2}} F\left(-\frac{\lambda'}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|\ell| + 1), 1 + |\ell|, \sigma r^2\right), \quad (3.36)$$

$$(3.37)$$

onde

$$\begin{aligned} n' &= n + \frac{\ell}{2} + \frac{|\ell|}{2} \\ \omega_B &= \frac{qB}{m}, \\ \lambda' &= \frac{2m}{\hbar} \left(\frac{E}{\hbar} - \frac{qBl}{2m} \right). \end{aligned}$$

Para a segunda e a terceira situação é importante analisar a expressão para a força total que atua na partícula,

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= \vec{F}_{Cor} + \vec{F}_{Cen} + \vec{F}_{Lor} \\ &= 2m(\vec{v}' \times \vec{\Omega}) - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + q(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} + q\vec{v}' \times \vec{B}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pode-se escolher uma relação entre os campos $\vec{\Omega}$ e \vec{B} de tal forma a cancelar algumas dessas forças. Assim, a segunda situação é uma escolha de $\vec{\Omega}$ e \vec{B} que implica no cancelamento entre as forças centrífuga e elétrica, restando apenas as de Coriolis e a magnética. Para isso tem-se $\Omega = -\frac{qB}{m}$, que implica em

$$E_{n,\ell} = \frac{qB\hbar}{m} \left\{ n + \frac{\ell}{2} + \frac{|\ell|}{2} + \frac{1}{2} \right\} - \frac{qB}{m} \ell \hbar \implies E_{n'} = \hbar \omega_{CB} \left\{ n' - \frac{1}{2} \right\}, \quad (3.39)$$

$$\psi = Ae^{-i\ell\phi - \frac{\sigma r^2}{2}} (\sigma r^2)^{\frac{|\ell|}{2}} M\left(-\frac{\lambda'}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|\ell| + 1), 1 + |\ell|, \sigma r^2\right). \quad (3.40)$$

onde

$$\begin{aligned} n' &= n + \frac{\ell}{2} + \frac{|\ell|}{2} \\ \omega_{CB} &= \frac{qB}{m}, \\ \lambda' &= \frac{2m}{\hbar} \left(\frac{E}{\hbar} + \frac{qBl}{2m} \right). \end{aligned}$$

O terceiro caso é uma outra relação entre a rotação e o campo magnético, que faz a força de Coriolis e a magnética se cancelarem, restando a centrífuga e a elétrica. Para tal tem-se $\Omega = -\frac{qB}{2m}$, conseqüentemente

$$E_{n,\ell} = \frac{qB\hbar}{m} \left\{ n + \frac{\ell}{2} + \frac{|\ell|}{2} + \frac{1}{2} \right\} - \frac{qB}{2m} \ell \hbar \implies E_{n'} = \hbar \omega_{CEN'}, \quad (3.41)$$

$$\psi = A e^{-i\ell\phi - \frac{\sigma r^2}{2}} (\sigma r^2)^{\frac{|\ell|}{2}} M\left(-\frac{\lambda'}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|\ell| + 1), 1 + |\ell|, \sigma r^2\right). \quad (3.42)$$

onde

$$\begin{aligned} n' &= n + \frac{\ell}{2} + \frac{|\ell|}{2} \\ \omega_{CE} &= \frac{qB}{m}, \\ \lambda' &= \frac{2mE}{\hbar^2}. \end{aligned}$$

A quarta situação é a retirada do campo magnético e, conseqüentemente, do campo elétrico, pois este depende diretamente do campo magnético. Dessa forma, o sistema terá apenas a força de Coriolis e a centrífuga. Esse é o problema estudado em 1999 por Johnson [22], como foi discutido na seção (2.3). Pode-se resgatar este resultado através do limite de B tendendo a zero na expressão (3.34). Entretanto, o resultado para a energia não pode ser obtido tomando esse limite na expressão 3.33, pois a condição para energia deverá ser extraída da função de onda do sistema. Tomar o limite na função de onda fará necessária a imposição de que a função de onda deve se anular na borda. A partir dessa imposição serão extraídos os níveis de energia. A seguir, faremos a demonstração de como chegar ao resultado de Johnson. O termo dependente de r na função de onda para o sistema submetido às quatro forças é

$$R(r) = e^{-\frac{\sigma r^2}{2}} (r^2)^{\frac{|\ell|}{2}} M\left(-\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|\ell| + 1), 1 + |\ell|, \sigma r^2\right), \quad (3.43)$$

onde o fator $\sigma^{\frac{|\ell|}{2}}$ foi extraído para a constante de normalização. Ao fazer

$$\begin{aligned} -\frac{z}{a} &= \sigma r^2 \\ a &= -\frac{\lambda}{4\sigma} + \frac{1}{2}(|\ell| + 1) \end{aligned}$$

obtem-se que, se o campo B tender a zero, a tende a infinito, logo a relação da função hipergeométrica com função de Bessel

$$\lim_{a \rightarrow \infty} M\left(a, b, -\frac{z}{a}\right) = z^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b} J_{b-1}(2\sqrt{z}) \quad (3.44)$$

pode ser utilizada. No limite quando B tende a zero, como $\sigma = \frac{qB}{2\hbar}$, σ tende a zero e portanto

$$a = -\frac{\lambda}{4\sigma}.$$

Assim, z pode ser escrito como

$$z = \frac{\lambda}{4} r^2. \quad (3.45)$$

Forças atuantes	Relação $B - \Omega$	Energia	Função de onda
Magnética	$\Omega = 0$	$E_{n'} = \hbar\omega_B \{n' + \frac{1}{2}\}$	Hipergeométrica confluyente
Magnética e Coriolis	$\Omega = -\frac{qB}{m}$	$E_{n'} = \hbar\omega_{CB} \{n' - \frac{1}{2}\}$	Hipergeométrica confluyente
Elétrica e Centrífuga	$\Omega = -\frac{qB}{2m}$	$E_{n'} = \hbar\omega_{CE} n'$	Hipergeométrica confluyente
Centrífuga e Coriolis	$B = 0$	$E_{\lambda,l} = \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m} + l\hbar\Omega$	Bessel tipo-J

Table 3.1: Nessa tabela tem-se as relações entre campo magnético e rotação que estão relacionadas a quais forças estão atuando no sistema e qual função de onda será solução para a equação de Schödinger em cada situação

Então, no limite para campo magnético nulo, o termo dependente de r da função de onda será

$$\begin{aligned}
R(r) &= (r^2)^{\frac{|\ell|}{2}} z^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b} J_{b-1}(2\sqrt{z}) \\
&= (r^2)^{\frac{|\ell|}{2}} \left(\frac{\lambda}{4} r^2\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(|\ell|+1)} J_{|\ell|}\left(2\sqrt{\frac{\lambda}{4} r^2}\right) \\
&= \left(\frac{\lambda}{4}\right)^{-\frac{1}{2}|\ell|} J_{|\ell|}(\sqrt{\lambda}r)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

onde $\lambda = \frac{2m}{\hbar} \left(\frac{E}{\hbar} - \Omega\ell\right)$ pois já foi tomado o limite para λ também. Essa expressão para λ é a mesma para λ^2 do artigo de Johnson, logo a expressão 3.46 equivale ao resultado publicado por este autor, sendo que o termo $\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{-\frac{1}{2}|\ell|}$ pode ser incluso na constante de normalização pois, para cada valor de ℓ e de n há uma constante de normalização diferente. A tabela a seguir mostra os resultados para essas quatro situações discutidas até aqui.

3.4 Campos fracos

No trabalho de Johnson, o tamanho da amostra a ser estudada era de extrema importância, pois foi necessário impor a anulação da função de onda na borda. Neste capítulo, ao adicionar campo magnético verificou-se a possibilidade da dimensão do disco não causar alguma preocupação. O campo magnético atua confinando a função de onda. Isso retira a necessidade de impor condições de contorno no problema sem campo. Assim, pode-se dizer que para um campo magnético forte a função de onda será confinada e à medida que o campo magnético vai a zero, algumas condições de contorno devem ser impostas à função de onda. Assim, surge a seguinte questão: qual é o limite mínimo do campo magnético para não haver influência das bordas no espectro de energia?

Essa questão chega a ser um pouco subjetiva pois a função Gaussiana vai a zero apenas no infinito, contudo, é plausível afirmar que o intervalo $-3\sigma < x < 3\sigma$ de uma distribuição gaussiana

contém 99,73 por cento do conjunto de dados utilizado para fazer a distribuição. Entretanto, nesse caso, a função de onda não é apenas uma gaussiana, mas sim o produto desta por uma função hipergeométrica. Isso acarreta o alargamento da função de onda. Logo, o campo limite para a relevância ou não da dimensão da amostra é observado através de alguns gráficos para um valor fixo para o raio da amostra.

O gráfico 3.1 mostra a função de onda para uma amostra de raio fixo de $6mm$. O campo magnético aplicado à amostra é de $10^{-8}T$. Nota-se que para uma amostra com raio de $6mm$, esse campo é o suficiente para confinar a função de onda. Ou seja, para campos maiores que esse, o tamanho da amostra passa a ser irrelevante a respeito das condições de contorno da função de onda. Já para campos menores, há uma exigência da imposição das condições de contorno na borda da amostra, ver fig. (3.2). Vale notar também como o número de vezes que a curva corta o eixo depende apenas do número quântico n , ou seja independe de l , ver figs.(3.3a), (3.3b) e (3.3c).

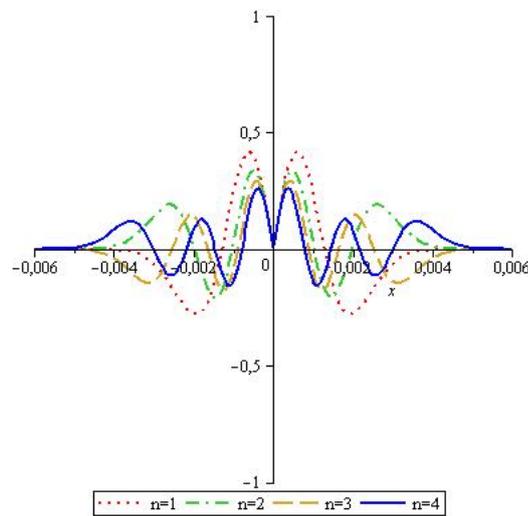


Figure 3.1: As curvas vermelho, verde, amarelo e azul representam respectivamente a função de onda para $\ell = 1$ e $n=0,1,2,3$

Feita a análise para um valor limite do campo magnético B_0 , surge outra pergunta: e para campos menores que B_0 , como serão dados os níveis de energia?

Ao considerar campos magnéticos muito fracos, é possível utilizar a teoria de perturbação independente do tempo. Dessa forma, considera-se o hamiltoniano devido apenas à rotação como o principal e todos os termos que dependem do campo magnético como pequenas perturbações. Vamos agora considerar a situação de campos magnéticos fracos. Para isto usaremos teoria de perturbação em primeira ordem. O hamiltoniano é

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \Omega r p_\phi - \frac{qB}{2m} r p_\phi + \frac{q^2 B^2}{8m} r^2 \\ &= H_0 + H', \end{aligned}$$

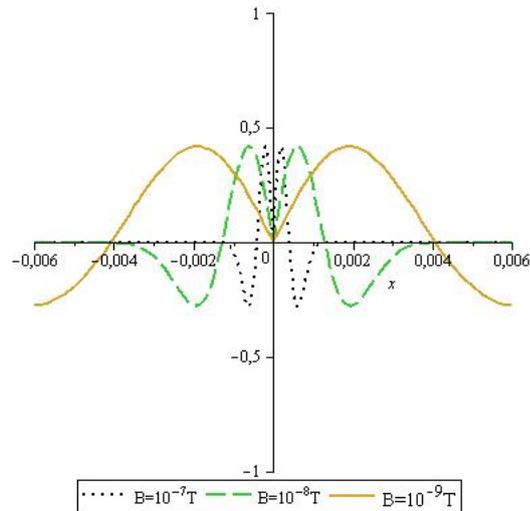


Figure 3.2: Neste gráfico os valores de ℓ e n são fixos, $\ell = 1$ e $n=1$. As curvas vermelho, verde e amarelo representam respectivamente a função de onda para $B = 10^{-9}T$, $10^{-8}T$, $10^{-7}T$. Nota-se que a curva amarela não vai a zero em $R = 6mm$. Ou seja, a condição de contorno de anulação da função de onda na borda deve ser imposta para que isso aconteça.

onde H_0 é o hamiltoniano do problema de Jonhson,

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \Omega r p_\phi \quad (3.47)$$

e H' é o termo perturbativo

$$H' = -\frac{qB}{2m} r p_\phi + \frac{q^2 B^2}{8m} r^2. \quad (3.48)$$

Seguindo essas considerações, o caso não perturbado corresponde à energia e função de onda obtidas por Jonhson

$$\Psi_{n,l}^0 = A J_l(|\lambda|r) \quad e \quad E_{n,l}^0 = \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m} + l \hbar \Omega. \quad (3.49)$$

A correção de primeira ordem para a energia é

$$E_{n,l}^1 = \langle \Psi_{n,l}^0 | H' | \Psi_{n,l}^0 \rangle \quad (3.50)$$

$$= \frac{q^2 B^2}{8m} \langle \Psi_{n,l}^0 | r^2 | \Psi_{n,l}^0 \rangle - \frac{qB}{2m} \langle \Psi_{n,l}^0 | r p_\phi | \Psi_{n,l}^0 \rangle \quad (3.51)$$

$$= \frac{q^2 B^2}{8m} |A|^2 \int_0^R r^2 J_l^2(|\lambda|r) dr d\phi + \frac{qBl}{2m\hbar} |A|^2 \int_0^R J_l^2(|\lambda|r) dr d\phi. \quad (3.52)$$

Ao calcular a normalização da função de onda Ψ^0 mostra-se que $|A|^2 = 1 / \int_0^R J_l^2(|\lambda|r) dr d\phi$,

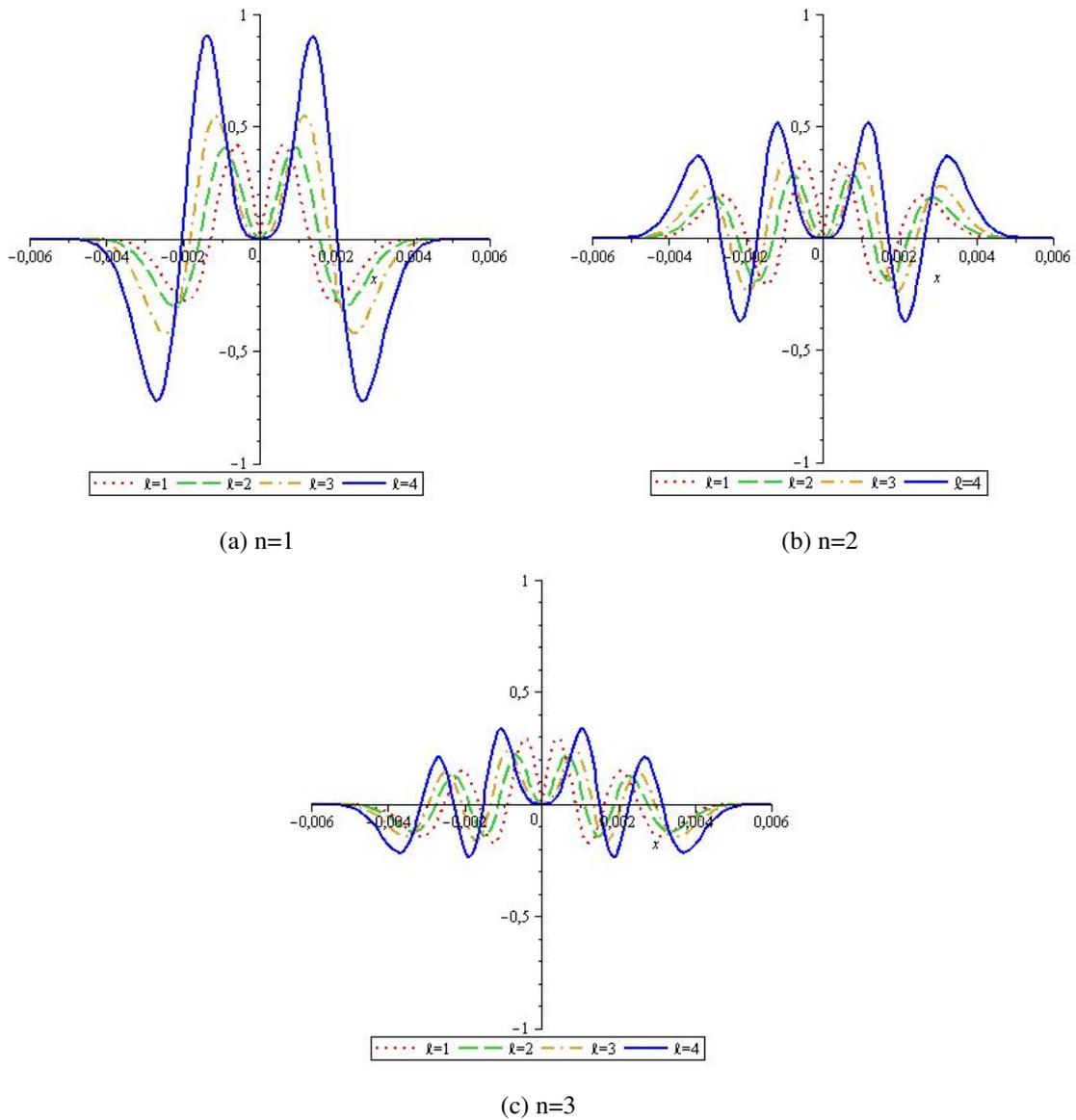


Figure 3.3: É importante notar que o raio do disco é $6mm$ e para cada gráfico tem um valor específico para n . Nestes gráficos as curvas vermelho, verde, amarelo e azul representam a função de onda para $\ell = 1, 2, 3, 4$, respectivamente.

assim, o termo perturbativo de primeira ordem para a energia é dado por

$$\begin{aligned}
 E_{n,l}^1 &= \frac{q^2 B^2}{8m} \frac{\int_0^R r^2 J_l^2(|\lambda|r) dr d\varphi}{\int_0^R J_l^2(|\lambda|r) dr d\varphi} + \frac{qBl}{2m\hbar} \\
 &= \frac{q^2 B^2}{8m|\lambda|^2} \frac{2^{-2l} a^{3+2l} {}_2F_3(3/2+l, l+1/2; 1+2l, 1+l, 5/2+l; -a^2)}{(3+2l)(\Gamma(1+l))^2} + \frac{qBl}{2m\hbar} \\
 &= \frac{q^2 B^2}{8m|\lambda|^2} f(l, R) + \frac{qBl}{2m\hbar}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

l	Energia	$R = 6mm$
0	$\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + \frac{q^2B^2R^2}{24m \lambda ^2} \frac{{}_2F_3(3/2, 1/2; 1, 1, 5/2; -R^2)}{{}_2F_3(1/2, 1/2; 1, 1, 3/2; -R^2)}$	$\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + \frac{q^2B^2}{m \lambda ^2} \cdot 1,5 \cdot 10^{-6}$
1	$\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + \hbar\Omega + \frac{qB}{2m\hbar} + \frac{3R^2q^2B^2}{40m \lambda ^2} \frac{{}_2F_3(5/2, 3/2; 3, 2, 7/2; -R^2)}{{}_2F_3(3/2, 3/2; 3, 2, 5/2; -R^2)}$	$\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + \hbar\Omega + \frac{qB}{2m\hbar} + \frac{q^2B^2}{m \lambda ^2} \cdot 2,75 \cdot 10^{-6}$
2	$\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + 2\hbar\Omega + \frac{qB}{m\hbar} + \frac{5R^2q^2B^2}{56m \lambda ^2} \frac{{}_2F_3(7/2, 5/2; 5, 3, 9/2; -R^2)}{{}_2F_3(5/2, 5/2; 5, 3, 7/2; -R^2)}$	$\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + 2\hbar\Omega + \frac{qB}{m\hbar} + \frac{q^2B^2}{m \lambda ^2} \cdot 3,25 \cdot 10^{-6}$
3	$\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + 3\hbar\Omega + \frac{3qB}{2m\hbar} + \frac{7R^2q^2B^2}{72m \lambda ^2} \frac{{}_2F_3(9/2, 7/2; 7, 4, 11/2; -R^2)}{{}_2F_3(7/2, 7/2; 7, 4, 9; -R^2)}$	$\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + 3\hbar\Omega + \frac{3qB}{2m\hbar} + \frac{q^2B^2}{m \lambda ^2} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6}$

Table 3.2: Expressões para energia com campos fracos para os primeiros valores de ℓ

onde

$$f(l, R) = \frac{R^2 (1 + 2l)}{(3 + 2l)} \frac{{}_2F_3(3/2 + l, l + 1/2; 1 + 2l, 1 + l, 5/2 + l; -R^2)}{{}_2F_3(l + 1/2, l + 1/2; 1 + 2l, 1 + l, 3/2 + l; -R^2)}. \quad (3.54)$$

A dependencia da função de onda e da energia com o n está implícita em $\lambda = \lambda_{nl}$, pois esse termo está relacionado com o n 'ésimo zero da função de Bessel de ordem ℓ . Logo, a energia para o sistema numa região de campo magnético muito fraco será a energia encontrada por Johnson mais esse termo perturbativo, ou seja,

$$E_{n,l} = \frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + l\hbar\Omega + \frac{qBl}{2m\hbar} + \frac{q^2B^2}{8m|\lambda|^2} f(l, R) \quad (3.55)$$

Usando alguns valores de l , podemos escrever a tabela 3.2.

É importante notar que o λ que aparece na solução do método aproximativo, é o mesmo da expressão (4.19) com $B = 0$, que é o λ do trabalho de Johnson.

Neste capítulo, obtivemos os níveis de energia tipo Landau para um sistema com campo magnético e rotação, simultaneamente. Esse resultado foi discutido e conferido com resultado encontrado na literatura, [5, 22]. Discutimos o espectro de energia no intervalo de transição de um sistema com campo magnético e rotação para um sistema com rotação apenas. Nessa situação utilizamos o método de aproximação para campos fracos.

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, discutimos efeitos clássicos e quânticos gerados pela presença de campo magnético, como os efeitos Hall clássico, Hall quântico inteiro, Hall quântico fracionário, Aharonov-Bohm e os níveis de Landau. Abordamos também os efeitos inerciais devido a rotação análogos aos obtidos por campo magnético. Em seguida, discutimos a dinâmica quântica de uma partícula carregada, submetida a um campo magnético uniforme constante, que está localizada em um disco condutor. Devido à grande semelhança do operador hamiltoniano para um sistema com rotação e um sistema submetido a campo magnético, fomos motivados a explorar a influência da rotação e do campo magnético simultaneamente.

O primeiro passo após estudar os efeitos da rotação e do campo magnético separadamente, foi escrever um hamiltoniano que encorpava tanto esses efeitos separados como efeitos inerciais causados nos campos eletromagnéticos. Feito isso, escrevemos uma equação de Schrödinger que tem como solução um função hipergeométrica. Já que esse problema foi pensado como uma fenômeno generalizado do efeitos de rotação e campo magnético, fez-se necessário uma conferência com os resultados anteriores, [5, 22], que são os casos que continham apenas rotação ou campo magnético. Ou seja, os resultados [5, 22] devem ser recuperados quando faz-se nulo o campo magnético ou a rotação.

Ao fazer $\Omega = 0$ na função de onda e nos níveis de energia obtidos nesse trabalho, (3.34) e (3.33), conseguimos facilmente recuperar o resultado obtido por Landau, [5]. Entretanto, para mostrar que nosso resultado coincide com o [22], quando retira-se o campo magnético, não basta fazer $B = 0$, essa conferência não é tão simples. Contudo, o resultado de Johnson para a função de onda é recuperado quando aplica-se o limite de B tendendo a zero. Já a expressão para os níveis de energia não é obtida, pois a mesma deverá ser extraída da função de onda que carrega condições de contorno impostas pela equação. Nossa equação de Schrödinger é uma equação hipergeométrica e a equação do problema de Johnson é uma equação de Bessel, as condições impostas por cada equação são diferentes, por isso o resultados de Johnson para o espectro de energia não pode ser recuperado fazendo um limite do nosso resultado.

Ainda comparando com o trabalho de [22], achamos interessante um estudo utilizando teoria de perturbação para campo magnético fraco. Analisamos como o sistema se comporta na transição da presença de campo magnético e rotação para uma configuração com apenas rotação. Ou seja, respectivamente, os níveis de energia são quantizados degenerados e passam a

dependem dos zeros das funções de Bessel perdendo sua degenerescência. Estudamos o comportamento dos níveis de energia nesse intervalo e obtivemos um termo dependente do campo que é adicionado ao resultado de Johnson, como pode ser visto na tabela (3.2).

As forças que atuam nas partículas carregadas em um disco girante submetido a um campo magnético são: Coriolis, centrífuga, magnética e elétrica. Mediante escolhas de como o campo magnético e a frequência de rotação poderiam se relacionar, pudemos ajustar quais forças iríamos querer que se cancelassem ao serem adicionadas entre si. Dessa maneira, fizemos a força resultante do sistema conter apenas duas das 4 forças. Para a relação $\Omega = -\frac{qB}{m}$, a força centrífuga e a força elétrica, que existe devido a presença de campo magnético e rotação, se cancelam restando ao sistema apenas as forças de Coriolis e a magnética, como mostrado na tabela (3.1). Todavia, se a relação entre o campo e a rotação for $\Omega = -\frac{qB}{2m}$, ocorrerá uma inversão das forças resultantes, a centrífuga e a elétrica se cancelam e a força resultante será composta da força de Coriolis e da força magnética. Assim, observamos que níveis tipo Landau podem ser obtidos em sistemas que tenham como força resultante a força magnética mais uma força inercial, que é a de Coriolis. Notamos também que níveis tipo Landau podem ser obtidos na situação inversa, onde a força resultante não terá origem magnética, ela será composta pela força elétrica e pela força centrífuga.

Dentre as perspectivas, pretendemos calcular o efeito Hall quântico para os dois novos casos de quantização tipo Landau dos níveis de energia, que consistem do disco girando com uma sincronia entre o campo magnético e a rotação, de tal forma a ter em um certo ajuste apenas força centrífuga e elétrica em um outro ajuste a força magnética e a força de Coriolis. É interessante também fazer o mesmo estudo na presença de defeitos topológicos como desclinação e deslocação, para analisar além da rotação e o campo magnético, a influência da curvatura e torção oriundas dos defeitos, respectivamente. Assim, teremos um problema ainda mais geral que envolverá efeitos eletromagnéticos, inerciais e geométricos.

Bibliography

- [1] E. H. Hall, *On a New Action of the Magnet on Electric Currents*, American Journal of Mathematics vol **2**, 287, (1879).
- [2] R. B. Laughlin, *Quantized Hall conductivity in two dimensions*, Physical Review B **23**, 5632 (1981).
- [3] K. v. Klitzing, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Physical Review Letters **45**, 494 (1980).
- [4] D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard, *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*, Physical Review Letters **48**, 1559 (1982).
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz *Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, (1977).
- [6] Y. Aharonov, and D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, The Physical Review, **115**, 485 (1959).
- [7] C. Furtado and G. Duarte. *Dual Aharonov-Bohm Effect*, Physica Scripta, **71**, 7, (2005).
- [8] L. R. Ribeiro, Claudio Furtado e J. R. Nascimento, *Landau Levels Analog to Electric Dipole*, Physical Letters A **348**, 135 (2006).
- [9] C. Furtado, J. R. Nascimento e L. R. Ribeiro, *Landau Quantization of Neutral Particles in an External Field*, Physical Letters A **358**, 336 (2006).
- [10] K. Bakke, L. R. Ribeiro, c. Furtado e J. R. Nascimento, *Landau Quantization for a Neutral Particle in the Presence of Topological Defects*, International Journal of Modern Physical D, **19**, 85 (2010).
- [11] L. R. Ribeiro, E. Passos, C. Furtado e J. R. Nascimento *Landau Analog Levels for Dipoles in Non-Commutative Space and Phase Space*, European Physical Journal C , **56**, 597 (2008).
- [12] Bakke, K.; Furtado, C., *Relativistic Landau quantization for a neutral particle*, Physical Letters A **80**, 032106(2009).

- [13] K. Bakke e C. Furtado *Relativistic Landau-Aharonov-Casher Quantization in Topological Defects Space-Time*, International Journal of Modern Physical D **19**, No. 1, 85 (2010).
- [14] Konno, Kohkichi and Takahashi, Rohta, *Spacetime rotation-induced Landau quantization*, Physical Review D, **85**, 061502 (2012)
- [15] A. L. Silva Netto, Claudio Furtado. *Elastic Landau Levels*, Journal Physical: Condensed Matter, **20**, 125209, (2008).
- [16] Harris, JonathanH. and Semon, MarkD., *A review of the Aharonov-Carmi thought experiment concerning the inertial and electromagnetic vector potentials*, Foundations of Physics **10**, 151 (1980).
- [17] B. J. Ahmedov, M. J. Ermamatov, *Rotational analog of the Hall effect: Coriolis contribution to electric current*, Foundations of Physics Letters **15**, 305 (2002).
- [18] U. R. Fischer, N. Schopohl, *Hall state quantization in a rotating frame* Europhysics Letters **54**, 502 (2001).
- [19] G.Dattoli, M. Quattromini, *A NOTE ON CORIOLIS QUANTUM STATES*, arxiv.org/pdf/1009.3788 (2010).
- [20] Y. Carmi, G. Carmi, *Quantum Aspects of the Equivalence Principle*. Foundations of Physics **3**, 493 (1956).
- [21] Tsai, Chien-Hua and Neilson, D., *New quantum interference effect in rotating systems*, Physical Review A **37**, 619 (1988).
- [22] B. L. Johnson, *Inertial forces and the Hall effect*, American Journal of Physics **68**, 649 (2000).
- [23] J. Q. Shen, S. He, F. Zhuang, *Aharonov-Carmi effect and energy shift of valence electrons in rotating C60 molecules*, The European Physical Journal D **33**, 35 (2005).
- [24] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Efeito-Hall>
- [25] JACKSON, J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley and Sons, 2nd edition.
- [26] K. D. Machado, *Teoria do Eletromagnetismo*, vol. II, editora UEPG, (2003).
- [27] B. Jeckelmann, B. Jeanneret, *The Quantum Hall Effect as an Electrical Resistance Standard*, Birkhäuser Verlag, Basel, 55 (2005).
- [28] J. M. Bassalo, <http://www.seara.ufc.br/folclore/folclore206.htm>.

- [29] D. R. Bes, *Mechanics: A Modern and Concise Introductory Course*, Springer 2ª edição, (2007).
- [30] S. M Girvin, *Introduction to Quantum Hall Fractional Effect*, Birkhäuser Verlag, Basel, 133 (2005).
- [31] Z. F. Ezawa: *Quantum Hall Effects - Field Theoretical Approach and Related Topics*. World Scientific, Singapore 2008
- [32] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall 1995).
- [33] J. B. MARION, *Mechanics Classical - Dynamics of particles and systems*, Thomson Brooks/Cole, New York,(1995).
- [34] <http://stratus.ssec.wisc.edu/courses/gg101/coriolis/coriolis.html>
- [35] A. W. Overhauser and R. Colella , *Experimental Test of Gravitationally Induced Quantum Interference*, Physical Review Letters **33**, 1237 (1974).
- [36] S. A. Werner and J. -L. Staudenmann , *Effect of Earth's Rotation on the Quantum Mechanical Phase of the Neutron*, Physical Review Letters **42**, 1103 (1979).
- [37] M. Matsuo, J. Ieda, E. Saitoh, S. Maekawa, *Spin-dependent inertial force and spin current in accelerating systems*, Physical Review B **84**, 104410 (2011).
- [38] C. T. Ridgely, *Applying relativistic electrodynamics to a rotating material medium*, American Journal of Physics, *66* 114, (1998)
- [39] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* , 9ed (Dover Publications 1965).