

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**VARIÁVEIS DE CONTORNO E LOOP DE WILSON PARA UMA
CLASSE DE ESPAÇOS-TEMPO**

EDINELSON PEREIRA DOS SANTOS

João Pessoa - PB

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**VARIÁVEIS DE CONTORNO E LOOP DE WILSON PARA UMA
CLASSE DE ESPAÇOS-TEMPO**

EDINELSON PEREIRA DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba sob orientação do Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

João Pessoa - PB

2011



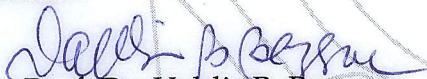
Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Mestrado

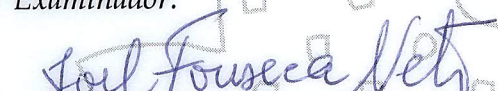
A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 25 de novembro de 2011, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA **Edinelson Pereira dos Santos** na defesa de sua dissertação intitulada “*Variáveis de contorno e loop de Wilson para uma classe de espaços-tempo*”.

João Pessoa, 25 de novembro de 2011

Orientador:


Prof. Dr. Valdir B. Bezerra
(UFPB)

1º Examinador:


Prof. Dr. Joel Batista Fonseca Neto
(UFPB)

2º Examinador:


Prof. Dr. Janilo Santos
(UFRN)

S237v

Santos, Edinelson Pereira dos.

Variáveis de contorno e loop de Wilson para uma classe de espaços-tempo / Edinelson Pereira dos Santos.-- João Pessoa, 2011.

98f. : il.

Orientador: Valdir Barbosa Bezerra

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1.Física. 2.Classes de espaços-tempo. 3.Loop de Wilson.
4.Campo gravitacional. 5.Cálculo de variáveis.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

EDINELSON PEREIRA DOS SANTOS

**VARIÁVEIS DE CONTORNO E LOOP DE WILSON PARA UMA
CLASSE DE ESPAÇOS-TEMPO**

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba sob orientação do Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada em 25 de novembro de 2011.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra - Orientador
Departamento de Física - UFPB

Prof. Dr. Joel Batista da Fonseca Neto - Examinador Interno
Departamento de Física - UFPB

Prof. Dr. Janilo Santos - Examinador Externo
Departamento de Física - UFRN

Este trabalho é dedicado a meu pai Luiz,
minha mãe Edinalva, aos meus irmãos e
irmãs, a minha esposa Roquilane e ao meu
adorável filho Alexandre, que sempre
apoiaram todas as minhas decisões,
confortaram-me nos instantes difíceis e
proporcionaram-me momentos de muita
alegria e aprendizado.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por atender minhas orações.

À minha família, em especial, a minha mãe, meu pai, meus irmãos, minha esposa e ao meu filho, pelo conforto, compreensão e apoio constante.

Ao professor e orientador Valdir Bezerra, pelos ensinamentos, pela confiança depositada, pelas palavras de incentivo, compreensão e pela excelente orientação na elaboração deste trabalho.

Aos colegas e amigos da pós-graduação, em especial a turma da Bahia e aos colegas da sala de estudos, pela boa convivência e pelas discussões que contribuíram no meu aprendizado.

Aos professores da Pós-Graduação em Física da UFPB pela contribuição em minha formação acadêmica.

Aos colegas do pensionato pelos momentos de alegria e descontração.

À CAPES por financiar meus estudos durante o curso de mestrado.

Por fim, à todos que contribuíram de maneira direta e indireta na realização do presente trabalho.

*Podemos aprender todas as coisas através de
Jeová Deus.*

Resumo

Neste trabalho, investigamos uma classe de espaços-tempo através do cálculo das variáveis de contorno para diferentes curvas, que no caso particular, em que os caminhos tomados são fechados (círculos), obtêm-se as denominadas transformações de holonomias, do qual o traço da matriz obtida nos fornece o loop de Wilson gravitacional. Primeiro abordamos o caso em que o campo gravitacional é gerado por uma casca cilíndrica, sem rotação, na aproximação de campo fraco. Em seguida, estudamos os espaços-tempo de Gödel e o de Friedman-Robertson-Walker. Também investigamos o cenário gerado por uma corda cósmica com estrutura interna. Por fim, abordamos o espaço-tempo de Kottler e alguns modelos de wormholes. Para o cálculo das variáveis de contorno utilizamos a técnica da expansão perturbativa, o qual denominamos de *método perturbativo*, e a técnica via transformação de coordenadas de Lorentz local, o qual denominamos de *método exato*. Os resultados nos mostram de que maneira essas variáveis de contorno detectam as características geométricas e topológicas de cada um desses espaços-tempo.

Abstract

In this work, we investigate a class of space-times by calculating the loop variables for different curves, in the particular case where the paths taken are closed (circles), we obtain the so-called holonomy transformations, from which the trace provides the matrix obtained in the Wilson loop gravitational. First we discuss the case where the gravitational field is generated by a cylindrical shell, without rotation, in the approximation of weak field. Then we study the space-times of Gödel and Friedman-Robertson-Walker. We also investigate the space-times generated by a cosmic string with internal structure. Finally we discuss the Kottler space-time and some models of wormholes. To calculate the loop variables we use the perturbation expansion technique, which we call *perturbative method*, and technique through the Lorentz transformation of local coordinates, which we call the *exact method*. The obtained results show us the way these contour variables contain informations related to the geometrical and topological properties of each one of these space-times.

Sumário

1	Introdução	13
2	Breve revisão do formalismo matemático	17
2.1	Introdução.	17
2.2	Noções de geometria diferencial.	17
2.2.1	Variedades diferenciáveis	18
2.2.2	Formas diferenciais.	23
2.2.3	Geometria Riemanniana.	27
2.3	Transporte paralelo de vetores, conexão afim e geodésicas.	30
2.4	Coefficientes de rotação de Ricci, 1-forma de rotação e as equações de estrutura de Maurer-Cartan.	34
2.5	Variáveis de contorno e loop de Wilson gravitacional.	37
3	Cálculo das variáveis de contorno no espaço-tempo gerado por uma casca cilíndrica e nos espaços-tempo de Gödel e Friedmann-Robertson-Walker.	42
3.1	Introdução	42
3.2	Variáveis de contorno no espaço-tempo gerado por uma casca cilíndrica, sem rotação.	43
3.3	Variáveis de contorno no espaço-tempo de Gödel.	53
3.4	Variáveis de contorno no universo de Friedmann-Robertson-Walker.	59
4	Holonomias e loop de Wilson nos espaços-tempo da corda cósmica com estrutura e de Kottler.	67
4.1	Introdução.	67
4.2	Variáveis de contorno no espaço-tempo da corda cósmica com estrutura. . .	67
4.3	Variáveis de contorno no espaço-tempo de Kottler.	77

5	Cálculo da variável de contorno no espaço-tempo de wormholes.	81
5.1	Introdução.	81
5.2	Variáveis de contorno no espaço-tempo de wormhole.	81
5.2.1	Primeiro modelo de wormhole.	90
5.2.2	Segundo modelo de wormhole.	91
5.2.3	Terceiro modelo de wormhole.	92
5.3	Variáveis de contorno para o wormhole de Morris-Thorne.	93
6	Conclusões	95
	Referências	

Lista de Figuras

2.1	Aplicação biunívoca ϕ_i do correspondente U_i em um aberto de R^n	18
2.2	Espaço tangente T_p a M , em p	21
2.3	<i>Vetor paralelo de $x^\mu + \bar{\delta}x^\mu$ em Q.</i>	31
4.1	Representação em 2-dimensões de uma parte finita da corda cósmica com matéria.	69

Capítulo 1

Introdução

O conceito de campo eletromagnético foi introduzido por Faraday e Maxwell para descrever a interação de partículas carregadas eletricamente. Do ponto de vista clássico, é a força de Lorentz que atua diretamente sobre as partículas, e esta depende dos campos elétrico e magnético, e não diretamente dos potenciais escalar e vetorial, que aparecem somente através de suas derivadas. Assim, o conhecimento dos valores das intensidades dos campos elétrico e magnético é suficiente para descrever os processos físicos clássicos. No caso quântico, no entanto, os potenciais escalar e vetorial possuem um papel eminentemente distinto e notável quando comparado ao caso clássico, aparecendo, por exemplo, na equação de Schrödinger que descreve uma partícula carregada, não através de suas derivadas, e sim eles próprios. O resultado surpreendente associado a esse fato é que, no contexto da mecânica quântica de sistemas contendo partículas carregadas, o conhecimento dos valores das intensidades dos campos elétrico e magnético, em um dado ponto, não é suficiente para descrever consistentemente os processos físicos associados a esses sistemas. Na realidade, são os potenciais que determinam como o sistema físico será influenciado, no contexto da mecânica quântica, pois estes não podem ser eliminados da equação de Schrödinger e conseqüentemente possuem significado físico, ao contrário, da eletrodinâmica clássica onde os potenciais são meros instrumentos matemáticos para se calcular os campos, que são os elementos fundamentais, neste contexto. Um exemplo do papel proeminente dos potenciais escalar e vetorial, no contexto da mecânica quântica, diz respeito à influência sofrida por elétrons, na forma de uma mudança de fase, por campos eletromagnéticos que não são experimentados por esses elétrons, pois esses campos

estão blindados e os elétrons não podem penetrar na região em que eles existem. Esse fenômeno paradoxal foi previsto por Aharonov e Bohm [1] e ficou conhecido como efeito Aharonov-Bohm. Neste efeito, as alterações de fase no padrão de interferência dependem da quantidade do fluxo magnético (eletromagnético) através da região delimitada pelas trajetórias dos elétrons. Estes são espalhados na presença de um fluxo magnético confinado a uma dada região, mesmo não estando submetidos a forças.

O efeito Aharonov-Bohm eletromagnético é um dos mais estudados fenômenos de interferência da teoria quântica. Ele é uma prova da natureza não-local da interação entre uma partícula carregada e o campo eletromagnético existente em regiões multiplamente conexas. O significado preciso desses fenômenos só foi dado quando Aharonov e Bohm [2]-[4] apresentaram uma descrição detalhada dos efeitos quânticos associados a fluxos, e chamaram a atenção para as importantes implicações conceituais da existência de tais processos.

Em termos gerais o efeito Aharonov-Bohm pode ser descrito da seguinte forma: considere um elétron que se move numa região multiplamente conexa do espaço, onde o potencial vetor $\vec{A}$ está presente, mas o campo magnético é nulo. Neste caso, o elétron experimenta o campo magnético existente na região à qual ele não tem acesso e seu estado quântico depende do potencial vetor através da combinação invariante de gauge $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$.

A interpretação atual do significado físico do efeito Aharonov-Bohm foi proposta por Wu e Yang [5], através do conceito de fator de fase não-integrável, U , que depende da integral de contorno do potencial escalar ϕ e do potencial vetor $\vec{A}$, e é dado por $U = \exp(-i \frac{e}{\hbar c} \oint_C A_\mu dx^\mu)$, onde a integração é feita ao longo de um contorno fechado determinado pelas trajetórias dos elétrons.

Essa explicação em termos deste fator de fase foi motivada pelo aumento significativo da importância do efeito Aharonov-Bohm para a física fundamental, associada ao ressurgimento da teoria de gauge formulada há alguns anos [5], como uma proposta na qual fosse possível implementar a unificação das interações da natureza.

Baseados nesse fator de fase não-integrável, Wu e Yang [5] concluíram que o eletromagnetismo é uma manifestação da invariância de gauge desse fator, que é uma quantidade física fundamental nesse contexto, e não o tensor intensidade de campo, ou o potencial vetor. Assim, o efeito Aharonov-Bohm comprova que o tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ subdescreve o eletromagnetismo; a fase $-i \frac{e}{\hbar c} \oint_C A_\mu dx^\mu$ sobredescreve o eletromagne-

tismo, pois nenhum experimento pode distinguir entre duas situações em que as fases diferem por múltiplos de 2π , e portanto, a descrição completa do eletromagnetismo é obtida com o uso do fator de fase não-integrável.

No formalismo das variáveis de contorno em teorias de gauge [6], os campos são descritos em termos de curvas ao invés de pontos do espaço-tempo. Nesta abordagem os campos de gauge são descritos associando-se a cada curva no espaço-tempo, um elemento do correspondente grupo de gauge. A quantidade fundamental que advém dessa abordagem é o fator de fase não-integrável [5] (ou fator de fase dependente do contorno, ou ainda variável de contorno), o qual representa o campo eletromagnético ou um campo de gauge qualquer, de uma maneira mais precisa do que o tensor intensidade de campo ou a integral do potencial vetor [5]. No caso eletromagnético, por exemplo, conforme foi observado por Wu e Yang [5] numa situação onde os aspectos globais são levados em conta, o tensor intensidade de campo subdescreve a teoria, enquanto a integral do potencial vetor ao longo de uma dada curva, a subdescreve. A descrição exata é obtida com o uso do fator de fase $\exp[(ie/\hbar c) \oint_C A_\mu dx^\mu]$.

A extensão desse formalismo para o contexto da gravitação foi feita por Mandelstam [7] que estabeleceu algumas equações envolvendo variáveis de contorno, e também por Voronov e Makeenko [8], Yang [9] e Menskii [10].

A investigação das variáveis de contorno associadas a diferentes curvas em vários campos gravitacionais tem sido objeto de diversos estudos [11], [12],[13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20] e [21]. Nestes, vários aspectos têm sido estudados, como por exemplo, os relacionados ao efeito Aharonov-Bohm gravitacional [11]-[13] e descrição da geometria do espaço-tempo gerado por múltiplas cordas [14]. Nesta dissertação calculamos as variáveis de contorno, transformações de holonomias e o loop de Wilson nos seguintes campos gravitacionais: casca cilíndrica sem rotação, Gödel, Friedmann-Robertson-Walker, Kottler, wormholes e corda cósmica com estrutura. A sua estrutura e a distribuição de tópicos é a seguinte:

Iniciamos com uma breve revisão sobre geometria diferencial, transporte paralelo de vetores, equações de estrutura de Maurer-Cartan e variáveis de contorno e loop de Wilson gravitacional. No capítulo 3, calculamos as variáveis de contorno no espaço-tempo gerado por uma casca cilíndrica, e nos campos gravitacionais de Gödel e Friedmann-Robertson-Walker. No capítulo 4, calculamos as transformações de holonomia e o loop de Wilson nos

espaços-tempo gerado por uma corda cósmica com estrutura e no de Kottler. O capítulo 5 é dedicado ao cálculo das variáveis de contorno em diferentes modelos de wormholes. Finalmente, no capítulo 6, apresentamos as nossas conclusões e considerações finais.

Capítulo 2

Breve revisão do formalismo matemático

2.1 Introdução.

Neste capítulo será apresentada uma breve abordagem do formalismo matemático a ser utilizado que, embora seja apenas uma revisão, sem o devido rigor matemático, será suficiente para a compreensão dos métodos aplicados na nossa investigação. No primeiro momento discutiremos um pouco sobre geometria diferencial, cálculos com formas, variedades diferenciáveis, conexões de spin (formalismo de “primeira ordem” [22]) e especialmente, as quantidades de nosso interesse; variáveis de contorno e loop de Wilson gravitacional. Em seguida, apresentaremos um outro método utilizando o cálculo perturbativo da variável de contorno, por meio da utilização da conexão de Christoffel (formalismo de “segunda ordem” ou formalismo métrico [22]). Também mostraremos a equivalência entre os dois procedimentos, lançando mão das leis de transformação.

2.2 Noções de geometria diferencial.

Uma notável mudança produzida pela construção da teoria da relatividade geral de Einstein foi o abandono do conceito de força na descrição das interações entre os corpos. Nessa teoria, a presença de um campo gravitacional é representada pela deformação na

estrutura do espaço-tempo. Nesse caso, o espaço-tempo é representado por uma variedade Riemanniana quadrimensional, com uma métrica localmente Lorentziana. Esses conceitos serão abordados e discutidos com mais detalhes a seguir.

2.2.1 Variedades diferenciáveis

Inicialmente vamos analisar uma variedade n -dimensional, onde em seguida trataremos o caso particular com $n = 4$, que é o caso do nosso interesse. Uma variedade diferenciável M de classe C^∞ , de n dimensões, é um conjunto de pontos, juntamente com famílias de pares $\{(U_i, \phi_i)\}$, onde i é um índice que assume determinados valores, podendo inclusive assumir valores em um conjunto infinito. Essas famílias devem satisfazer às seguintes condições:

- (i) $\{U_i\}$ são conjuntos abertos que cobrem M , isto é, $\bigcup_i U_i = M$.
- (ii) Para cada U_i existe uma aplicação biunívoca ϕ_i do correspondente U_i em um aberto de R^n , ou seja,

$$\phi_i : U_i \rightarrow R^n.$$

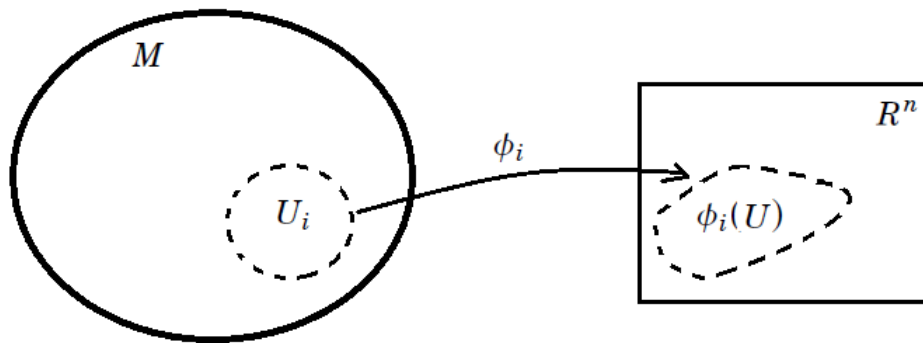


Figura 2.1: Aplicação biunívoca ϕ_i do correspondente U_i em um aberto de R^n .

- (iii) Dados U_i e U_j tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então a aplicação

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

é uma aplicação contínua de um subconjunto aberto de R^n em um subconjunto aberto de R^n . As aplicações (ϕ_i) e (ϕ_i^{-1}) são contínuas e, portanto, homeomorfismos.

O par (U_i, ϕ_i) , para um valor fixo de i é chamado de *carta*, enquanto a família $\{(U_i, \phi_i)\}$ é chamada de *atlas*. O subconjunto U_i é chamado de *vizinhança de coordenadas*, enquanto ϕ_i é a função coordenada, ou simplesmente coordenada. Deste modo, um sistema de coordenadas fica definido sobre cada U_i no sentido de que podemos associar biunivocamente a cada ponto $p \in U_i$, n números reais $\phi_i(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$. O conjunto $\{x^\mu(p)\}$ é também chamado de coordenadas. Assim, $(x^1, \dots, x^n)$ são as coordenadas de p na carta (U_i, ϕ_i) .

Para $U_k \cap U_{\bar{k}} \neq \emptyset$, seja $p \in U_k \cap U_{\bar{k}}$. Nas cartas (U_k, ϕ_k) e $(U_{\bar{k}}, \phi_{\bar{k}})$, num ponto p , tem coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ e coordenadas $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$, respectivamente. A propriedade (iii) nos diz que no seu domínio de definição as primeiras podem ser expressas como funções contínuas das últimas, e vice-versa,

$$\begin{aligned}\bar{x}^\alpha &= \bar{x}^\alpha(x^\beta) \\ x^\alpha &= x^\alpha(\bar{x}^\beta)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$.

Podemos citar como exemplos de variedades: o espaço Euclideo n -dimensional R^n , onde o atlas consiste de uma única carta (R^n, ϕ) ; e a esfera unitária C^n : $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \dots + (x^n)^2 < 1$ em R^n , com a única carta (C^n, ϕ) , onde em ambos os casos ϕ é a aplicação identidade [23].

Vamos agora definir uma curva Γ em M como uma aplicação dada por $\Gamma : R \rightarrow M$, tal que p é a imagem de Γ . A curva é dita parametrizada com parâmetro λ , e num sistema de coordenadas admissível, Γ pode ser descrita por:

$$\Gamma : x^\alpha = x^\alpha(\lambda),\tag{2.2}$$

onde x^α são as coordenadas dos pontos de Γ .

A derivada, ao longo de Γ , de uma função f sobre M , calculada em um ponto p da curva Γ , será dada por

$$D_p f = \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \right)_p.\tag{2.3}$$

Podemos observar que na expressão (2.3), a quantidade $(dx^\alpha/d\lambda)_{\lambda_0}$ são as componentes de um vetor contravariante, tangente à curva em p . Como a função f é arbitrária, podemos definir o operador em p como

$$D_p = \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p\tag{2.4}$$

que atua sobre o espaço das funções diferenciáveis definidas em $p \in M$. O operador D_p é uma representação invariante do vetor tangente à curva Γ em p , no sentido de ser independente de coordenadas. Da expressão (2.4), podemos ver que para quaisquer funções diferenciáveis f, g , definida em p , e $\forall a, b \in R$,

$$\begin{aligned} D_p(af + bg) &= aD_p f + bD_p g \\ D_p(fg) &= fD_p g + (D_p f)g. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Das equações (2.4) e (2.5), podemos definir *vetor tangente* em p como um operador X_p sobre o espaço das funções diferenciáveis em p , com as propriedades de que, para quaisquer funções diferenciáveis f, g , definidas em p , e $a, b \in R$,

- (i) $X_p f \in R$
- (ii) $X_p(af + bg) = aX_p f + bX_p g$
- (iii) $X_p(fg) = (X_p f)g + f(X_p g)$

É fácil verificar que para qualquer c constante, $X_p c = 0$.

Imaginemos agora um espaço vetorial formado por todos os vetores tangentes em p , com $p \in M$. Veja que estamos generalizando um plano tangente à uma superfície em algum ponto dela (ver figura 2.2). Por definição, o *espaço tangente* a M em p , denotado por T_p , é o conjunto de todos os vetores tangentes em p . Assim, consideramos, portanto, todas as curvas parametrizadas Γ que passa por p . T_p é um espaço vetorial sobre os reais, onde

$$(aX_p + Y_p)f = a(X_p f) + Y_p f \quad (2.6)$$

para $X_p, Y_p \in T_p$, $a \in R$ e com f sendo uma função diferenciável definida em p .

Das expressões (2.4) e (2.5), desde que f seja arbitrária, as derivadas parciais $(\partial/\partial x^\mu)_p$, de fato, representam uma base para o espaço vetorial das derivadas direcionais que podemos identificar com o espaço tangente T_p . Assim, segue-se que os vetores $(\partial/\partial x^\mu)_p \in T_p$, são vetores tangentes à variedade em p , e

$$[D_{(a)}]_p = \lambda^\mu_{(a)} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p, \quad (2.7)$$

onde $\lambda^\mu_{(a)} \in R^n$ (com $a = 1, 2, 3, \dots, n$), são n vetores linearmente independentes de T_p [23].

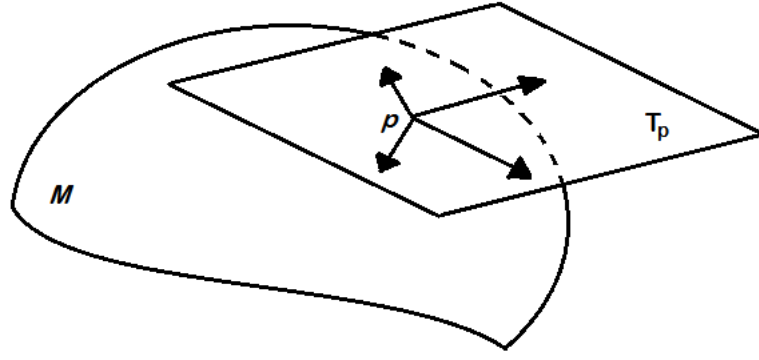


Figura 2.2: Espaço tangente T_p a M , em p .

Pode ser mostrado que para qualquer vetor $V \in T_p$, podemos expressá-lo, num sistema de coordenadas admissível em p , como:

$$V = V^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p, \quad (2.8)$$

onde $V^\mu = V x^\mu$. Desta forma, como já mencionado, os n -vetores linearmente independentes $[D_{(a)}]_p$, definido em (2.7), constituem uma base para o espaço tangente T_p . A dimensão de T_p é a mesma dimensão da variedade, ou seja, n -dimensional. Para qualquer $X \in T_p$, podemos expressar

$$X = X^a [D_{(a)}]_p. \quad (2.9)$$

Para $\lambda^\mu_{(a)} = \delta^\mu_a$, os vetores (2.7) são denominados *vetores de coordenadas*. Assim, podemos ver que

$$[D_{(a)}]_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right)_p \quad (2.10)$$

constitue a denominada *base de coordenadas* tangente às curvas, em p , com parâmetro λ .

A lei de transformação entre as bases de coordenadas são representadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \left(\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\mu} \right)_p \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\beta}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} &= \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\mu} \right)_p \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Assim, por (2.11), $V x^\mu$ e $V \bar{x}^\mu$ se transformam como

$$\begin{aligned} V x^\mu &= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta} \right)_p V \bar{x}^\beta, \\ V \bar{x}^\mu &= \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta} \right)_p V x^\beta, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde utilizamos a definição dada por (2.8).

Um campo de vetores tangentes X em M pode ser descrito como uma coleção de vetores tangentes X_p , um em cada ponto $p \in M$. Podemos representá-lo por

$$X = X^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.13)$$

onde $X^\mu(x)$ são definidos por $X^\mu(x) = Xx^\mu$, que assume os valores $X^\mu(x_p)$ para cada $p \in M$. O campo vetorial X é dito diferenciável se as funções $X^\mu(x)$ forem também diferenciáveis em x^μ . Sob as transformações de coordenadas (2.1) temos que

$$X^\mu(x) \rightarrow \bar{X}^\mu(x) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta} X^\beta(x).$$

Agora, seja o espaço vetorial T_p tangente em p e seja $[D_{(a)}]_p = \delta_a^\mu (\partial/\partial x^\mu)_p$, a base canônica de T_p . Designamos *espaço dual* T_p^* de T_p ao espaço das aplicações lineares de T_p em R , ou seja, $T_p^* : T_p \rightarrow R$.

Para um dado vetor $Y \in T_p^*$,

$$X \rightarrow \langle X, Y \rangle \in R$$

para todo vetor $X \in T_p$. Da algebra linear resulta que o espaço dual T_p^* tem a mesma dimensão de T_p e que se $[D_{(a)}]_p$ é uma base de T_p , então, existe uma base para T_p^* tal que

$$\langle D_{(b)}, d^{(a)} \rangle = \delta_{(b)}^{(a)}, \quad (2.14)$$

onde $\delta_{(b)}^{(a)} = 1$, para $a = b$, $\forall a$ e b , e $\delta_{(b)}^{(a)} = 0$, para $a \neq b$, e $d^{(a)}$ é a base dual de $D_{(b)}$.

Considere uma função f diferenciável em p . Então, podemos definir uma forma linear sobre T_p dada por $X \rightarrow Xf = \lambda^\alpha (\partial f / \partial x^\alpha)_p$. Denotando df como uma aplicação de T_p em R , então df será um elemento do espaço dual T_p^* definido por

$$\langle X, df \rangle = Xf, \quad (2.15)$$

onde podemos fazer

$$\langle \partial_\alpha, dx^\beta \rangle = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} \right)_p = \delta_\alpha^\beta, \quad (2.16)$$

representando $\partial_\alpha = (\partial/\partial x^\alpha)$. Portanto, os elementos df constituem uma base dual à base ∂_α . Tomando $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$, como um elemento de T_p^* , podemos aplicar o produto bilinear

definido por (2.15) e ver que

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_\rho, \omega \rangle &= \langle \partial_\rho, \omega_\alpha dx^\alpha \rangle \\
 \langle \partial_\rho, \omega \rangle &= \omega_\alpha \langle \partial_\rho, dx^\alpha \rangle \\
 \langle \partial_\rho, \omega \rangle &= \omega_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\rho} = \omega_\alpha \delta_\rho^\alpha \\
 \langle \partial_\rho, \omega \rangle &= \omega_\rho.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dessa maneira podemos ver que

$$\omega = \langle \partial_\rho, \omega \rangle dx^\rho. \tag{2.18}$$

Como $\omega \in T_p^*$, podemos afirmar que o espaço dual constitui o espaço de todos os *vetores covariantes*. Da mesma forma, podemos tomar um vetor $X \in T_p$ e verificar que

$$X = \langle X, dx^\mu \rangle (\partial_\mu)_p, \tag{2.19}$$

onde usamos $X = X^\alpha \partial_\alpha$. Assim, T_p constitui o espaço de todos os *vetores contravariantes* em p . Veja que $\forall X \in T_p, \omega \in T_p^*$, obtemos $\langle X, \omega \rangle = X^\mu \omega_\mu$, que é independente do sistema de coordenadas em p . Essa é a operação usual de contração de um vetor contravariante com um vetor covariante [23].

2.2.2 Formas diferenciais.

Um tensor do tipo (q, r) é um objeto multilinear, o qual mapeia q elementos de T_p^* e r elementos de T_p em um número real. Denotaremos o conjunto dos tensores tipo (q, r) em $p \in M$, por $(\mathcal{T}_{r,p}^q)_p$. Um elemento de $(\mathcal{T}_{r,p}^q)_p$ é escrito em termos da base como

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_r}. \tag{2.20}$$

O elemento T é um funcional linear de $\overset{q}{\otimes} T_p^* \otimes \overset{r}{T}_p$ em R [24].

A operação de simetria sobre um tensor $\omega \in \mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ é definida por

$$P\omega(V_1, \dots, V_r) \equiv \omega(V_{P(1)}, \dots, V_{P(r)}), \tag{2.21}$$

onde $V_i \in T_p(M)$ e P é um elemento de S_r (grupo de simetria de ordem r). Tomando a base coordenada $\{e_\mu\} = \{\partial_\mu\}$, a componente de ω nessa base será

$$\omega(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_r) = \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}.$$

A componente de $P\omega$ é obtida através de (2.21) como

$$P\omega(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_r) = \omega_{\mu_{P(1)}\mu_{P(2)}\dots\mu_{P(r)}}.$$

Para um tensor do tipo (q, r) , as operações de simetria são obtidas separadamente para os índices q e r . Considerando $(\omega \in \mathcal{T}_r^0)_p$, a *simetrizador* $\mathcal{S}$ é definida por

$$\mathcal{S}\omega = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} P\omega,$$

enquanto que a *antissimetrizador* $\mathcal{A}$ é

$$\mathcal{A}\omega = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P)P\omega,$$

onde $\text{sgn}(P) = +1$ para permutações pares e -1 para permutações ímpares. $\mathcal{S}\omega$ é totalmente simétrico, ou seja, $P\mathcal{S}\omega = \mathcal{S}\omega$, para todo $P \in S_r$ e $\mathcal{A}\omega$ é totalmente antissimétrico, ou seja, $P\mathcal{A}\omega = \text{sgn}(P)\mathcal{A}\omega$ [24].

Uma r -forma diferencial é um tensor antissimétrico do tipo $(0, r)$. Denotaremos o espaço vetorial das r -formas com $p \in M$ por $\Omega_p^r(M)$, cuja base é o produto exterior representado pelo símbolo “ $\wedge$ ” de r -formas

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes dx^{\mu_{P(2)}} \dots \otimes dx^{\mu_{P(r)}}, \quad (2.22)$$

que é um elemento $\omega \in \Omega_p^r(M)$, podendo ser expandido como

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (2.23)$$

onde os $\omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}$ são totalmente antissimétricos e $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ forma uma base para $\Omega_p^r(M)$, que é um espaço de dimensão $n!/r!(n-r)!$, pois na equação (2.22) temos $\binom{n}{r}$ escolhas do conjunto $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ para $(1, 2, 3, \dots, n)$ [24]. Podemos decompor um tensor de segunda ordem $\omega_{\mu\nu}$ em uma parte simétrica $\sigma_{\mu\nu}$ e na parte antisimétrica $\alpha_{\mu\nu}$ como:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= \omega_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}), \\ \alpha_{\mu\nu} &= \omega_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}). \end{aligned}$$

É fácil observar que $\sigma_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = 0$ e $\alpha_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$.

Podemos associar a cada ponto da variedade uma r -forma, definindo assim, um campo de formas $\Omega_p^r(M)$. O produto exterior de uma q -forma por uma r -forma é uma aplicação dada por

$$\wedge : \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \rightarrow \Omega_p^{q+r}(M), \quad (2.24)$$

cujas propriedades são:

- (i) $\eta \wedge \eta = 0$ se $\eta \in \Omega_p^q(M)$ e q é ímpar;
- (ii) $\eta \wedge \xi = (-1)^{qr} \xi \wedge \eta$, com $\eta \in \Omega_p^q(M)$ e $\xi \in \Omega_p^r(M)$;
- (iii) $(\eta \wedge \xi) \wedge \phi = \eta \wedge (\xi \wedge \phi)$ com $\eta \in \Omega_p^q(M)$, $\xi \in \Omega_p^r(M)$ e $\phi \in \Omega_p^s(M)$.

Assim, dada uma q -forma η e uma r -forma ξ , o produto $\eta \wedge \xi$ será uma $(q+r)$ -forma definida por

$$(\eta \wedge \xi)_{\mu_1 \dots \mu_{q+r}} = \frac{(q+r)!}{q!r!} \eta_{[\mu_1 \dots \mu_q} \xi_{\mu_{q+1} \dots \mu_{q+r}]}$$

Considere $\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ como uma r -forma. Sua derivada exterior é definida como uma $r+1$ -forma dada por

$$d\omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (2.25)$$

Podemos ver que a derivada exterior de ω é uma aplicação $d_r : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ e que satisfaz as seguintes propriedades.

- (i) d é uma operação linear $d(a\omega + b\eta) = ad\omega + bd\eta$, com ω e η formas e $a, b \in R$;
- (ii) para toda forma ω , $d^2\omega = 0$;
- (iii) se ω e η são formas diferenciais, sendo ω de ordem q , então $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^q \omega \wedge d\eta$.

Se η é uma p -forma para a qual existe uma $(p-1)$ -forma ω tal que $\eta = d\omega$, então, ela é dita *exata* (ou integrável). Uma p -forma η para a qual $d\eta = 0$, é dita *fechada*. Uma forma exata é sempre fechada, mas o inverso nem sempre é verdadeiro, ou seja, a condição $d\eta = 0$ não implica necessariamente que existe globalmente uma $(p-1)$ -forma η tal que $\eta = d\omega$.

Como exemplo de formas diferenciais, vamos tomar o caso mais simples que é o das 1-formas. Uma 1-forma diferencial ω sobre M é por definição, uma coleção de diferenciais ω_p , uma em cada ponto p . Um exemplo de uma 1-forma é a coleção de diferenciais df , onde f é uma função diferenciável definida sobre a variedade M . Esta forma será também representada por df . Analogamente a um campo de vetores X , que podíamos representar por

$$X = X^\mu(x) \partial_\mu \quad (2.26)$$

uma 1-forma ω pode ser expressa por

$$\omega = \omega_\mu(x) dx^\mu \quad (2.27)$$

com $\langle \partial_\mu, dx^\nu \rangle = \delta_\mu^\nu$ e $X = \langle X, dx^\mu \rangle \partial_\mu$, $\omega = \langle \partial_\mu, \omega \rangle dx^\mu$. Note que $\omega_\mu(x) = \langle \partial_\mu, \omega \rangle$ está bem definida, pois em cada ponto particular p de M ela assume o seu valor dado pela expressão (2.17), ou seja, $\omega_\mu(p) = \langle \partial_\mu, \omega_p \rangle$. Se as funções $\omega_\mu(x)$ são diferenciáveis, a 1-forma ω será dita diferenciável [23]. Sejam $\phi = f_i dx_i$ e $\omega = g_i dx_i$ duas 1-formas. Então, seguem as seguintes propriedades [25]:

- (i) $\phi + \omega = (f_i + g_i) dx_i$, é uma 1-forma;
- (ii) $dx_i \wedge dx_j = 0$ se $i = j$ e $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$;
- (iii) $d\phi = df_i \wedge dx_i$ é uma 2-forma;
- (iv) se h e t são funções, então,
 - (a) $d(ht) = (dh) \cdot t + h \cdot d\phi$;
 - (b) $d(h\omega) = (dh) \wedge \omega + h \wedge d\omega$;
 - (c) $d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi - \omega \wedge d\phi$.

Para ilustrar, vamos considerar alguns exemplos a seguir:

Exemplo 1. Uma função f é uma 0-forma. Sendo assim,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu.$$

Veja que a derivada exterior de f é uma 1-forma.

Exemplo 2. Sejam as 1-formas dadas por $\omega = xdx - ydy$ e $\phi = zdx + xdz$. Assim,

$$\begin{aligned} \omega \wedge \phi &= (xdx - ydy) \wedge (zdx + xdz) \\ \omega \wedge \phi &= xdx \wedge zdx + xdx \wedge xdz - ydy \wedge zdx - ydy \wedge xdz \\ \omega \wedge \phi &= x^2 dx \wedge dz - yz dy \wedge dx + yxdz \wedge dy, \end{aligned}$$

onde usamos as propriedades $dx \wedge dx = 0$ e $dy \wedge dz = -dz \wedge dy$. Veja que $\omega \wedge \phi$ é uma 2-forma.

Exemplo 3. Considere agora a 1-forma $\eta = ydz$. Assim,

$$\begin{aligned}\eta \wedge \omega \wedge \phi &= ydz \wedge (x^2dx \wedge dz - yzdy \wedge dx + yxdz \wedge dy) \\ \eta \wedge \omega \wedge \phi &= yx^2dz \wedge dx \wedge dz - y^2zdz \wedge dy \wedge dx + y^2xdz \wedge dz \wedge dy \\ \eta \wedge \omega \wedge \phi &= 0 - y^2zdz \wedge dy \wedge dx + 0 \\ \eta \wedge \omega \wedge \phi &= -y^2zdz \wedge dy \wedge dx,\end{aligned}$$

onde usamos $dz \wedge dx \wedge dz = dz \wedge dz \wedge dy = 0$. Portanto, temos que $\eta \wedge \omega \wedge \phi$ é uma 3-forma.

Exemplo 4. Seja a 1-forma dada por $\theta = yxdx + \cos(\varphi)dz$. Então,

$$\begin{aligned}d\theta &= d(yx) \wedge dx + d[\cos(\varphi)] \wedge dz \\ d\theta &= (xdy + ydx) \wedge dx - \sin(\varphi)d\varphi \wedge dz \\ d\theta &= xdy \wedge dx - \sin(\varphi)d\varphi \wedge dz.\end{aligned}$$

Portanto, $d\theta$ é uma 2-forma.

2.2.3 Geometria Riemanniana.

Uma métrica Riemanniana em M pode ser definida como o operador bilinear e simétrico g , que para cada par de campos vetoriais (X, Y) sobre a variedade M , associa um número real em cada ponto p , ou seja, $g(X, Y) \in \mathbb{R}$ e $g(X, Y) = g(Y, X)$. Vamos tomar a base $\{D_\mu\}$ para os campos vetoriais sobre M e a base dual $\{\omega^\mu\}$ para as 1-formas sobre M . Então, podemos fazer

$$g(X, Y)(p) = [g_{\mu\nu}(x) \langle X, \omega^\mu \rangle \langle Y, \omega^\nu \rangle](p) = g_{\mu\nu}(x) X^\mu Y^\nu, \quad (2.28)$$

onde usamos $g_{\mu\nu} = g(D_\mu, D_\nu) = g_{\nu\mu}$, $\langle X, \omega^\mu \rangle = X^\mu$ e $\langle Y, \omega^\nu \rangle = Y^\nu$. Observe que usamos a equação (2.14), ou seja, $\langle X, \omega^\alpha \rangle = \langle X^\mu D_\mu, \omega^\alpha \rangle = X^\mu \delta_\mu^\alpha = X^\alpha$. De modo análogo para Y^α . Uma maneira usual de expressar g é

$$g = g_{\mu\nu}(x) \omega^\mu \omega^\nu, \quad (2.29)$$

onde usamos $\omega^\mu \omega^\nu(X, Y) = \langle X, \omega^\mu \rangle \langle Y, \omega^\nu \rangle$, para todo par de campos vetoriais (X, Y) sobre a variedade M [23]. O operador g nos dá o elemento de distância do espaço-tempo ds^2 , pois dados dois pontos vizinhos p e $p + dp$, conectados pelo vetor $X = dx^\mu (\partial_\mu)_p$, o elemento de linha será dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.30)$$

Através do operador g podemos estabelecer a relação entre vetores contravariante e covariante, onde $X^\mu = g^{\mu\nu} X_\nu$ e $X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu$. Assim, índices contravariantes e covariantes são mudados um no outro, respectivamente, pelas matrizes $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$.

Uma variedade M com uma métrica g definida é denominada variedade riemanniana. Para representar o espaço-tempo da Relatividade Geral por uma *variedade riemanniana* M com métrica dada por g , vamos impor as seguintes restrições: **(a)** a variedade M será 4-dimensional; **(b)** a variedade M é localmente lorentziana, ou seja, em um dado ponto p será sempre possível escolher um sistema de coordenadas (denominadas coordenadas locais) no qual as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ assumam localmente os valores constantes da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ ou $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. A escolha de $\eta_{\mu\nu}$ é convencional [23].

Como vimos, podemos representar uma base para o espaço tangente T_p , por $\partial_\mu \equiv \mathbf{e}_\mu$. A base $\{\mathbf{e}_\mu\}$ é denominada de *base coordenada*, pois ela é tomada como derivada parcial com respeito a coordenada no ponto p . Assim, podemos escrever um vetor X como $X = dx^\mu \mathbf{e}_\mu$, com $X \in T_p$.

Vamos imaginar agora que em cada ponto p da variedade seja possível atribuir um conjunto de base vetorial $\{\mathbf{e}_{(a)}\}$, ortogonais entre si. Essas bases são denominadas de *bases ortonormais*. As componentes de um vetor escrito na base ortonormal é algumas vezes chamadas de *tetradas* ou *vierbein* (Em alemão, vierbain no caso de quatro dimensões e vielbain no caso de dimensões superiores). Sendo assim, sejam os campos vetoriais $\mathbf{e}_{(a)}$, com $a = 0, 1, 2, 3$, no espaço-tempo M , sendo que $\mathbf{e}_{(0)}$ é do tipo-tempo e $\mathbf{e}_{(i)}$, com $i = 1, 2, 3$, tipo-espaço. Desse modo teremos: $g(\mathbf{e}_{(0)}, \mathbf{e}_{(0)}) > 0$, $g(\mathbf{e}_{(i)}, \mathbf{e}_{(i)}) < 0$ e $g(\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}) = 0$ se $a \neq b$. Estes vetores podem ser normalizados de tal forma que

$$g(\mathbf{e}_{(0)}, \mathbf{e}_{(0)}) = g(\mathbf{e}_{(i)}, \mathbf{e}_{(i)}) = 1.$$

Com base no exposto acima, podemos escrever

$$g(\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}) = \eta_{ab}, \quad (2.31)$$

onde $\eta_{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Podemos ver que $\mathbf{e}_{(a)}$, com $a = 0, 1, 2, 3$, são lineamente independentes. A relação que dá a transformação entre a base coordenada $\{\mathbf{e}_\mu\}$ e a base ortonormal $\{\mathbf{e}_{(a)}\}$ é dada pela matriz $e^\mu_{(a)}$, onde

$$\mathbf{e}_{(a)} = e^\mu_{(a)} \mathbf{e}_\mu. \quad (2.32)$$

Observe que estamos utilizando *índices gregos* em referência à base coordenada e *índices latinos* com respeito a base ortonormal. A componente $e^\mu_{(a)}$ forma uma matriz inversível do tipo $n \times n$, construída com as componentes das bases ortonormais $\mathbf{e}_{(a)}$, na base de coordenadas $\mathbf{e}_\mu \equiv \partial_\mu$ [23]. Em $e^\mu_{(a)}$, o índice μ representa o *índice linha* e (a) representa o *índice coluna*. Sua inversa será dada por $e_\mu^{(a)}$. Neste caso, μ representará o índice coluna e (a) o índice linha, de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} e_\mu^{(a)} e^\mu_{(b)} &= \delta_b^a \\ e^\mu_{(a)} e_\mu^{(b)} &= \delta_a^b. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Se um vetor é escrito na base coordenada como $X = X^\mu \mathbf{e}_\mu$ e na base ortonormal como $X = X^{(a)} \mathbf{e}_{(a)}$, as componentes podem ser relacionadas por $X^{(a)} = e_\mu^{(a)} X^\mu$.

Expressando em termos de componentes,

$$g_{\mu\nu} e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} = \eta_{ab}, \quad (2.34)$$

e por contração com $e_\rho^{(a)}$ temos,

$$\begin{aligned} e^\nu_{(b)} g_{\rho\nu} &= \eta_{ab} e_\rho^{(a)} \\ e_{\rho(b)} &\equiv e^\nu_{(b)} g_{\rho\nu} = \eta_{ab} e_\rho^{(a)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

De modo semelhante, definindo a inversa de η_{ab} por $\eta^{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, podemos obter $e_\rho^{(a)} = \eta^{ab} e_{\rho(b)}$. Com isso, os índices latinos (índice de tetradas) são levantados e abaixados respectivamente com η^{ab} e η_{ab} [23]. Usando as equações (2.33) e (2.34), observamos que,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} &= \eta_{ab} \\ e_\rho^{(b)} g_{\mu\nu} e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} &= e_\rho^{(b)} \eta_{ab} \\ g_{\mu\nu} e^\mu_{(a)} \delta_\rho^\nu &= e_\rho^{(b)} \eta_{ab} \\ e_\sigma^{(a)} g_{\mu\rho} e^\mu_{(a)} &= e_\sigma^{(a)} e_\rho^{(b)} \eta_{ab} \\ g_{\mu\rho} \delta_\sigma^\mu &= e_\sigma^{(a)} e_\rho^{(b)} \eta_{ab} \\ g_{\sigma\rho} &= e_\sigma^{(a)} e_\rho^{(b)} \eta_{ab}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

As relações em (2.36), nos mostram que uma tetrada está associada com uma transformação local do sistema de coordenadas x^μ para coordenadas local $\bar{x}^a$, de tal modo que, no ponto p considerado, a métrica assume a forma de Minkowski η_{ab} .

2.3 Transporte paralelo de vetores, conexão afim e geodésicas.

Nesta seção vamos discutir um pouco a respeito de transporte paralelo de vetores ao longo de uma curva parametrizada. Uma noção intuitiva de transporte paralelo consiste em deslocar um vetor ao longo de uma curva e verificar a mudança na orientação do vetor após o deslocamento, nos permitindo assim, coletar informações sobre a curvatura nessa região. Para uma definição mais precisa, consideremos um campo vetorial $X^\mu(x)$ avaliado no ponto Q , com coordenada $x^\mu + \delta x^\mu$ vizinho ao ponto P , com coordenada x^μ . Expandindo em série de Taylor, em torno de x , temos que:

$$X^\mu(x + \delta x) = X^\mu(x) + \delta x^\nu \partial_\nu X^\mu, \quad (2.37)$$

onde desprezamos os termos de ordens superiores. Chamando o segundo termo do lado direito da equação (2.37) de $\delta X^\mu(x) = \delta x^\nu \partial_\nu X^\mu$, obtemos:

$$\delta X^\mu(x) = X^\mu(x + \delta x) - X^\mu(x) \quad (2.38)$$

Veja que $\delta X^\mu(x)$ não pode ser pensado como um tensor, uma vez que envolve diferença de tensores avaliados em pontos distintos.

A partir do transporte paralelo de vetores podemos definir o conceito de *derivada covariante*. Para isso, vamos introduzir um vetor em Q que é “paralelo” a X^μ em P . Desde que $x^\mu + \delta x^\mu$ seja fechado em x^μ , podemos admitir que o vetor paralelo difere de $X^\mu(x)$ somente por uma pequena quantidade que aqui vamos chamar de $\bar{\delta} X^\mu(x)$, como mostra a Figura 2.3.

Observe que $\bar{\delta} X^\mu$ não é um tensor, mas podemos fazer:

$$X^\mu(x) + \delta X^\mu(x) - [X^\mu(x) + \bar{\delta} X^\mu(x)] = \delta X^\mu(x) - \bar{\delta} X^\mu(x), \quad (2.39)$$

criando assim um vetor diferença que tem as características de um tensor, já que está sendo avaliado no mesmo ponto. É fácil observar que $\bar{\delta} X^\mu(x)$ será nulo quando $X^\mu(x)$ ou δx^μ também for nulo. Então, por uma simples definição podemos admitir que $\bar{\delta} X^\mu(x)$ é linear em $X^\mu(x)\delta x^\mu$, o que significa que existe um fator multiplicativo $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$, que denotaremos por

$$\bar{\delta} X^\mu(x) = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) X^\nu(x) \delta x^\rho. \quad (2.40)$$

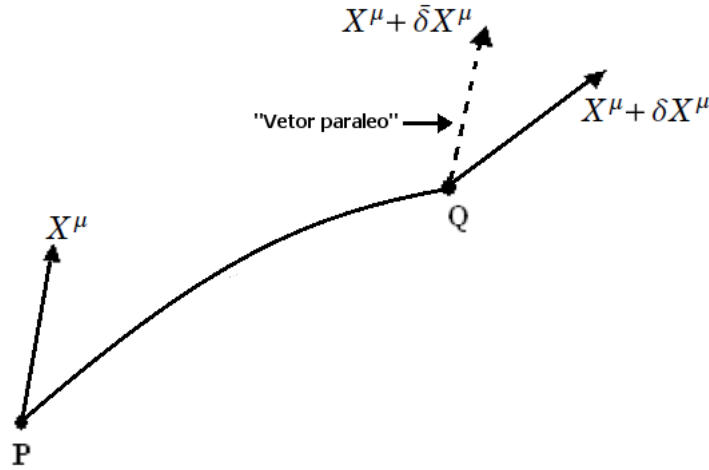


Figura 2.3: Vetor paralelo de $x^\mu + \bar{\delta}x^\mu$ em Q .

O sinal de menos é introduzido por convenção. A equação (2.40) define a lei geral de transporte de um vetor X^a definido em x para o vetor $X^\mu + \delta X^\mu$ no ponto $x + \delta x$. A quantidade $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ tem a propriedade de conectar vetores vizinhos definindo o conceito de paralelismo local, onde $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ é chamada de conexão afim ou simplesmente conexão. Para generalizar esse resultado, vamos tomar sua forma diferencial

$$dX^\mu(x) = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x)X^\nu(x)dx^\rho, \quad (2.41)$$

sendo a conexão $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ um conjunto de funções das coordenadas.

Realizado o transporte do vetor ao longo do caminho do ponto P até o ponto Q , podemos definir a derivada covariante de um vetor, que em geral é denotada por: $\nabla_\rho X^\mu$ ou $X^\mu_{;\rho}$ ou $X^\mu_{||\rho}$. Por meio do processo de limite fazendo $\delta x^\rho \rightarrow 0$,

$$\nabla_\rho X^\mu = \lim_{\delta x^\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^\rho} \{X^\mu(x + \delta x) - [X^\mu(x) + \bar{\delta}X^\mu(x)]\}$$

Em outras palavras, a derivada covariante de X^μ é a diferença entre o vetor $(X^\mu)_Q$ e o vetor paralelo a $(X^\mu)_P$, dividido pela diferença de coordenadas, no limite dessa diferença tendendo a zero. Das equações (2.37) e (2.40), encontramos:

$$\begin{aligned} \nabla_\rho X^\mu &= \lim_{\delta x^\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^\rho} [X^\mu(x) + \delta x^\nu \partial_\nu X^\mu - X^\mu(x) + \Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\nu \delta x^\rho] \\ \nabla_\rho X^\mu &= \lim_{\delta x^\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^\rho} \{\delta x^\nu \partial_\nu X^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\nu \delta x^\rho\} \\ \nabla_\rho X^\mu &= \partial_\rho X^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\nu. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Assim, partindo da definição de transporte de vetores definimos a derivada covariante de um vetor dada pela equação (2.42).

Seja um campo vetorial tangente à curva no ponto considerado $X^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ ao longo da curva $x^\mu(\lambda)$, onde λ é o parâmetro. Agora, considere um campo vetorial $V^\mu(\lambda_0)$ no ponto $x^\mu = x^\mu(\lambda_0)$ da curva. Podemos definir um campo vetorial $V^\mu(\lambda)$ ao longo da curva de tal forma que cada vetor $V^\mu(\lambda)$ pode ser transportado paralelamente ao vetor original em $x^\mu = x^\mu(\lambda_0)$. Para isto, vamos definir a derivada absoluta denotada por $\frac{DV^\mu}{d\lambda} = X^\rho \nabla_\rho V^\mu$. Dizemos que o vetor V^μ é transportado paralelamente se:

$$\frac{DV^\mu(\lambda)}{d\lambda} = X^\rho \nabla_\rho V^\mu = \frac{dx^\rho}{d\lambda} (\partial_\rho V^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\nu) = 0. \quad (2.43)$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem para V^μ . Assim, fornecendo-se um valor inicial para V^μ , a saber $V^\mu(P)$, a equação (2.43) determina o vetor ao longo da curva, que é transportado paralelamente a $V^\mu(P)$. Usando esta notação, uma geodésica afim é definida como uma curva privilegiada em que o vetor tangente ao longo da curva é propagado paralelamente a si mesmo [26], ou seja, um vetor propagado paralelamente é paralelo em todo ponto da curva, de modo que é proporcional ao vetor tangente no ponto, ou seja:

$$X^\rho \nabla_\rho X^\mu = q(\lambda) X^\mu, \quad (2.44)$$

onde $q(\lambda)$ é uma função arbitrária de λ . Usando a equação (2.42) na (2.44), temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx^\rho}{d\lambda} (\partial_\rho X^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\nu) &= q \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \\ \frac{dx^\rho}{d\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) + \Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\nu \right] &= q \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} &= q \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Se a curva for parametrizada de tal maneira que $q = 0$ (isto pode ser feito transportando paralelamente o próprio vetor tangente à curva $X^\mu = dx^\mu/d\lambda$), então, o parâmetro é um parâmetro privilegiado chamado de *parâmetro afim*, que denotaremos por s . Assim sendo, a equação (2.45) reduz-se:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0 \quad (2.46)$$

Um parâmetro afim é somente definido por uma transformação afim do tipo $s \rightarrow as + b$, onde a e b são constantes.

No espaço euclidiano podemos caracterizar uma linha reta pelo fato de que um vetor arbitrário tangente a tal reta permaneça paralelo a ela quando deslocado ao longo da

mesma. A equação (2.46) traduz esta caracterização para uma situação geral em que o espaço-tempo é curvo. Esta “linha reta” generalizada é chamada de *geodésica* e a equação (2.46) é denominada de equação geodésica.

Considerando um espaço-tempo livre de torção ($\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$), pode-se obter uma expressão para $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ em termos de $g_{\mu\nu}$, dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.47)$$

Quando a conexão é definida em termos da métrica $g_{\mu\nu}$, recebe o nome de símbolo de Christoffel ou conexão de Christoffel.

Vamos mostrar agora um método que nos permite calcular os coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ através do método variacional. Seja a lagrangeana do sistema dada por,

$$L(\dot{x}^\rho, x^\rho) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x^\rho)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \quad (2.48)$$

sendo uma função das variáveis independentes $\dot{x}^\rho$ e x^ρ . A equação de Euler-Lagrange para uma dada lagrangeana L é dada por

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.49)$$

Diferenciando a equação (2.48) com respeito a $\dot{x}^\mu$ e x^μ , pode-se mostrar que a equação (2.49) reduz-se a uma equação geodésica do tipo (2.46), ou seja,

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (2.50)$$

onde usamos $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$, sendo λ um parâmetro afim.

Como exemplo de aplicação do método variacional, vamos tomar o elemento de linha de uma esfera de raio a em R^3 , que é definido como,

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.51)$$

Queremos calcular os coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$. Nesse caso, de acordo com a expressão (2.48), a lagrangeana será dada por

$$L = \frac{1}{2}(a^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 a^2 \sin^2 \theta),$$

onde estamos usando $\dot{\theta} = d\theta/d\lambda$. Podemos ver que diferenciando L com respeito a suas

variáveis independentes, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \dot{\phi}^2 a^2 \sin \theta \cos \theta \\
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= a^2 \dot{\theta} \\
 \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \dot{\phi} a^2 \sin^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Das equações (2.49) e (2.52), podemos ver que,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \\
 \frac{d}{d\lambda} (\dot{\phi} a^2 \sin^2 \theta) &= 0 \\
 [2\dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta + \ddot{\phi} \sin^2 \theta] &= 0 \\
 \ddot{\phi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\phi} &= 0 \\
 \ddot{\phi} + \dot{\theta} \dot{\phi} \cot \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cot \theta &= 0.
 \end{aligned}$$

Por comparação com a equação geodésica (2.50), podemos concluir que $\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot \theta$. De maneira semelhante, podemos obter,

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta = 0,$$

de onde, por comparação, podemos concluir que $\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$. Assim, podemos ver que os termos não-nulos dos coeficiente da conexão são dados por $\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot \theta$ e $\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$, como era esperado.

2.4 Coeficientes de rotação de Ricci, 1-forma de rotação e as equações de estrutura de Maurer-Cartan.

Nessa seção apresentaremos as definições de alguns objetos matemáticos, como por exemplo, o coeficiente de rotação de Ricci, 1-forma de rotação e a primeira equação de estrutura de Maurer-Cartan. Vamos nos restringir sempre a uma variedade sem torção, o que equivale a afirmar que, $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$. Das leis de transformação de coordenadas,

podemos escrever

$$\begin{aligned} e^\mu_{(a)} &= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^{(a)}} \right)_p, \\ e_\mu^{(a)} &= \left(\frac{\partial \bar{x}^{(a)}}{\partial x^\mu} \right)_p, \end{aligned} \quad (2.53)$$

sendo que $\bar{x}^{(a)}$ são coordenadas de um *referencial de Lorentz local*, onde a métrica assume, em p , a forma η_{ab} . Um observador localizado em tal referencial é dito observador de Lorentz local.

Seja um sistema de coordenadas admissível em M . Vamos considerar o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (2.54)$$

onde dx^μ são as 1-formas duais aos elementos da base natural ∂_μ . Utilizando a equação (2.36) podemos fazer uma escolha de tétradas tal que

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \\ &= e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} \eta_{ab} dx^\mu dx^\nu \\ ds^2 &= \eta_{ab} \omega^a \omega^b, \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde as 1-formas são

$$\omega^a = e_\mu^{(a)} dx^\mu. \quad (2.56)$$

Por contração com $e^\nu_{(a)}$, podemos escrever a inversa de (2.56) como $dx^\mu = e^\mu_{(a)} \omega^a$.

Pela definição da (2.25), a derivada exterior da equação (2.56) será dada por

$$d\omega^a = e_{\mu|\nu}^{(a)} dx^\nu \wedge dx^\mu. \quad (2.57)$$

Como estamos considerando que a conexão é simétrica, a equação (2.57) não se altera se substituirmos a derivada $e_{\mu|\nu}^{(a)}$ por derivação covariante $e_{\mu||\nu}^{(a)}$ [23]. Tomando essas considerações, podemos reescrever a (2.57) como,

$$d\omega^\mu = e_{\mu||\nu}^{(a)} dx^\nu \wedge dx^\mu. \quad (2.58)$$

Usando as 1-formas (2.56) temos que

$$d\omega^a = e^\nu_{(b)} e^\mu_{(c)} e_{\mu||\nu}^{(a)} \omega^b \wedge \omega^c. \quad (2.59)$$

Podemos escrever a equação (2.59) como,

$$d\omega^a = \Gamma^a_{bc} \omega^b \wedge \omega^c, \quad (2.60)$$

onde definimos as quantidades

$$\Gamma^a_{bc} = e^\nu_{(b)} e^\mu_{(c)} e_{\mu||\nu}^{(a)}, \quad (2.61)$$

que são denominadas de **coeficiente de rotação de Ricci**. Definindo as **1-formas de curvatura** como

$$\omega^a_b = \Gamma^a_{bc} \omega^c, \quad (2.62)$$

a expressão (2.60) pode ser escrita na forma

$$d\omega^a + \omega^a_b \wedge \omega^b = 0. \quad (2.63)$$

Esta equação é denominada **Primeira Equação de Estrutura de Maurer-Cartan**, em um espaço-tempo sem torção. Para ser mais preciso, a 1-forma de curvatura satisfaz as equações de Estrutura de Cartan [24]:

$$T^a = d\omega^a + \omega^a_b \wedge \omega^b \quad (2.64)$$

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b. \quad (2.65)$$

onde introduzimos a **2-forma de torsão** T^a e a **2-forma de curvatura** $R^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} \omega^c \wedge \omega^d$. Observe que a equação (2.63) corresponde a equação (2.64) quando $T^a = 0$. Vale destacar algumas propriedades das 1-formas de curvatura ω^a_b . Para uma escolha de η_{ab} constantes, tomando $\nabla_c \eta_{ab} = 0$, pode-se mostrar que $\Gamma_{abc} = -\Gamma_{bac}$. Isso implica nas seguintes propriedades:

(i) $\omega_{ab} = -\omega_{ba},$

(ii) $\omega_{ab} = 0$, para todo $a = b$.

A derivada covariante de um tensor é dado pela sua derivada parcial mais o termo de correção, um para cada índice, envolvendo o tensor e o coeficiente da conexão [veja a equação (2.42), a qual expressa a derivada covariante para um vetor ou tensor de primeira ordem]. O mesmo procedimento pode ser tomado com tensores na base de tetradas, mas nesse caso, substituímos o termo $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ pela *conexão de spin* denotada por $\Gamma^a_{\mu b}$. Assim, podemos escrever:

$$\nabla_\mu X^a = \partial_\mu X^a + \Gamma^a_{\mu b} X^b. \quad (2.66)$$

Algumas vezes representamos $\Gamma_{\mu b}^a dx^\mu \equiv \Gamma_\mu dx^\mu$, onde a e b são índices tetrádicos e Γ_μ é dada por uma matriz $n \times n$, com a e b representando linha e coluna, respectivamente. Os elementos da matriz Γ_μ podem ser obtidos através das 1-forma de curvatura ω^a_b .

Lembramos que a conexão de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ não tem o mesmo significado que a conexão de spin (ou *conexões tetrádicas*) $\Gamma_{\mu c}^a$. No entanto, existe uma relação entre estas duas quantidades através da transformação de bases. Considere a derivada covariante do vetor X escrita somente na base coordenada, dada por:

$$\nabla X = (\nabla_\mu X^\nu) dx^\mu \otimes \mathbf{e}_\nu. \quad (2.67)$$

Por outro lado, também podemos escrever a derivada covariante de X em termo da base coordenada e da base ortonormal da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla X &= (\nabla_\mu X^a) dx^\mu \otimes \mathbf{e}_a \\ &= (\partial_\mu X^a + \Gamma_{\mu b}^a X^b) dx^\mu \otimes \mathbf{e}_a \\ &= \left[\partial_\mu (e_\nu^{(a)} X^\nu) + e_\lambda^{(b)} \Gamma_{\mu b}^a X^\lambda \right] dx^\mu \otimes (e_\sigma^{(a)} \mathbf{e}_\sigma) \\ &= \left[e_\sigma^{(a)} X^\nu \partial_\mu e_\nu^{(a)} + \delta_\nu^\sigma \partial_\mu X^\nu + e_\sigma^{(a)} e_\lambda^{(b)} \Gamma_{\mu b}^a X^\lambda \right] dx^\mu \otimes \mathbf{e}_\sigma \\ &= \left[\partial_\mu X^\nu + e_{(a)}^\nu X^\lambda \partial_\mu e_\lambda^{(a)} + e_{(a)}^\nu e_\lambda^{(b)} \Gamma_{\mu b}^a X^\lambda \right] dx^\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \end{aligned} \quad (2.68)$$

Veja que comparando a equação (2.68) com a equação (2.67), concluímos que

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = e_{(a)}^\nu \partial_\mu e_\lambda^{(a)} + e_{(a)}^\nu e_\lambda^{(b)} \Gamma_{\mu b}^a, \quad (2.69)$$

ou usando a equação (2.33), temos que

$$\Gamma_{\mu b}^a = e_{(b)}^\lambda e_\nu^{(a)} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - e_{(b)}^\lambda \partial_\mu e_\lambda^{(a)}. \quad (2.70)$$

A expressão (2.69) fornece a relação entre a conexão de Christoffel e a conexão de spin, por meio das tétradas $e_{(a)}^\mu$.

2.5 Variáveis de contorno e loop de Wilson gravitacional.

No formalismo das variáveis de contorno para teoria de gauge, os campos dependem do caminho ao invés de dependerem dos pontos do espaço-tempo. Um objeto matemático

originado dessa teoria é a variável de contorno, através da qual podemos descrever a dinâmica de um sistema físico. A abordagem usando variáveis de contorno foi primeiramente estendida para a gravitação por Mandelstam [6], que estabeleceu algumas equações envolvendo essas variáveis.

Em gravitação, as variáveis de contorno são matrizes que representam transporte paralelo de vetores ao longo de curvas no espaço-tempo para uma dada conexão afim ou conexão de spin. Esses objetos matemáticos contêm informações de como o vetor muda quando transportado paralelamente ao longo de uma curva aberta ou fechada. Um caso especial, de nosso interesse, é quando o contorno é fechado, daí essas matrizes são denominadas de *transformação de holonomia*, associada a uma métrica. A transformação de holonomia carrega informações topológicas muito importantes, pois como já foi visto na seção que trata de transporte paralelo de vetores, quando realizado o transporte paralelo ao longo de contornos fechados, o vetor em geral muda a direção em relação ao original. Sendo assim, os vetores (original e transportado) diferem um do outro por um ângulo que é dado pela holonomia. Do ponto de vista global, essa diferença reflete o quão o espaço-tempo em questão se desvia do espaço-tempo de Minkowski.

Como já foi mencionado, a transformação de holonomia está associada com o transporte paralelo de vetores. Dessa forma, considere um vetor V^μ avaliado em um ponto p do contorno fechado C . Transportando paralelamente V^μ ao longo de C , geramos um outro vetor $\tilde{V}^\mu$, que em geral, é diferente do vetor original transportado. Assim, podemos associar ao ponto p e ao contorno C , uma aplicação linear U^μ_ν de tal modo que para qualquer vetor V^μ avaliado em p , o vetor $\tilde{V}^\mu$ em p , resultante do transporte paralelo do vetor V^μ ao longo do contorno C , seja fornecido por

$$\tilde{V}^\mu = U^\mu_\nu V^\nu. \quad (2.71)$$

A aplicação linear U^μ_ν é denominada de *transformação de holonomia linear* ou simplesmente transformação de holonomia associada ao ponto p e ao contorno C . Escolhendo uma base de tétradas $\{e_\mu^{(a)}\}$ e um parâmetro $\lambda \in [0, 1]$ para a curva C tal que $C(0) = C(1) = p$, então, se transportarmos o vetor V^μ paralelamente ao longo de C , deslocando-o de $C(\lambda)$ para $C(\lambda + d\lambda)$, as componentes do vetor sofrem a variação dada por

$$\delta V^\mu = M^\mu_\nu[x(\lambda)]V^\nu d\lambda, \quad (2.72)$$

onde M^μ_ν é uma aplicação linear que depende das tétradas, da conexão afim do espaço-

tempo e do valor de λ , e que toma um vetor tangente em p e o transporta paralelamente ao longo do contorno C de p para p . Portanto, tomando essa aplicação linear N vezes, a transformação de holonomia será dada pelo seguinte produto ordenado das matrizes

$$U_v^\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left[\delta_v^\mu + \frac{1}{N} M_v^\mu[x(\lambda)]|_{\lambda=i/N} \right]. \quad (2.73)$$

Geralmente escrevemos a expressão (2.73) de forma reduzida como

$$U(C) = P \exp \left(\int_C M \right), \quad (2.74)$$

onde P é o operador que ordena o produto das N aplicações ao longo do caminho C . Podemos entender $U(C)$ como uma abreviação do lado direito da equação (2.73). Observemos que se M_v^μ é independente de λ , então, segue da equação (2.74) que $U_v^\mu = [\exp(M)]_v^\mu$.

Agora, vamos apresentar dois métodos para o cálculo de holonomias os quais serão aplicados em nossa investigação. Primeiro vamos definir o que aqui chamaremos de “*método exato*”, onde iremos introduzir o campo de tétradas $e_\mu^{(a)}(x)$, que satisfaz as relações (2.33) e (2.34). Como já foi exposto, para qualquer vetor V^μ , ou no caso mais geral, qualquer tensor, temos o seu correspondente na base ortonormal, em algum ponto x , dado por

$$V^a = V^\mu e_\mu^{(a)}(x). \quad (2.75)$$

Pela definição de transporte paralelo de vetores, a variação do vetor V^a , quando transportado ao longo de um caminho infinitesimal dx^μ , é definida pela expressão

$$dV^a = -\Gamma_{\mu b}^a(x) V^b dx^\mu \quad (2.76)$$

onde $\Gamma_{\mu b}^a(x)$ é a conexão de spin (ou conexão tetrádica). Integrando a equação (2.76) encontramos o transporte paralelo de V ao longo de uma curva diferenciável finita C , conectando os pontos A e B , que é realizado pela transformação de holonomia dada por

$$U_{AB}(C) = P \exp \left[\int_A^B \Gamma_{\mu b}^a(x) dx^\mu \right] \quad (2.77)$$

onde $\Gamma_{\mu b}^a$ é a conexão tetrádica e A e B são os pontos inicial e final, respectivamente, da curva C . Assim, a expressão (2.77) nos dá a variável de contorno associado com os pontos A e B ao longo do caminho C . Observe que assim obtemos por construção um objeto matemático que é uma função do caminho C . Podemos expandir a quantidade U_{AB} da seguinte forma

$$U(C) = I + \oint_C dx^\mu \Gamma_\mu(x) + \frac{1}{2!} P \oint_C dx^\mu \oint_C dy^\nu \Gamma_\mu(x) \Gamma_\nu(y) + \dots, \quad (2.78)$$

onde $\Gamma_\mu \equiv \Gamma_{\mu b}^a$ é a conexão tetrádica.

Se o contorno C é fechado, da equação (2.77) podemos obter a quantidade invariante

$$W(C) = -4 + Tr \left\{ P \exp \left[\oint_C \Gamma_{\mu b}^a(x) dx^\mu \right] \right\} \quad (2.79)$$

onde Tr é o traço da matriz $U(C)$ e o termo -4 permite obter o valor *zero* para $W(C)$ correspondente ao espaço-tempo plano, onde a transformação de holonomia $U(C)$ é igual a matriz identidade. Portanto, para um espaço-tempo plano, temos que $W(C) = -4 + 4 = 0$. A quantidade $W(C)$ é conhecida como **loop de Wilson gravitacional** e nos traz informações a respeito das propriedades geométricas e topológicas do espaço-tempo.

Um outro método que será aplicado em nossa investigação, o qual chamaremos de *método perturbativo*, será tomado no espaço-tempo clássico descrito pela variedade Lorentziana M , cuja geometria é descrita pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ com assinatura $(1, -1, -1, -1)$. Nesse caso, a variação do vetor V^μ , para um deslocamento infinitesimal dx^μ , é definido pela expressão (2.41), ou seja,

$$dV^\mu = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) V^\rho dx^\nu, \quad (2.80)$$

onde agora estamos usando a conexão de Christoffel, que em termos das componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é dada pela equação (2.47). O equivalente da equação (2.77) em termos da conexão de Christoffel é

$$U_{AB}(C) = P \exp \left[\int_A^B \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) dx^\mu \right]. \quad (2.81)$$

Se C é um caminho fechado em M , de modo análogo a situação anterior, podemos definir o loop de Wilson gravitacional como

$$W(C) = -4 + Tr \left\{ P \exp \left[\oint_C \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) dx^\mu \right] \right\}, \quad (2.82)$$

onde também estamos usando a conexão de Christoffel. Realizando uma expansão na equação (2.81), obtemos

$$U(C) = I + \oint_C dx^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) + \frac{1}{2!} P \oint_C dx^\mu \oint_C dy^\beta \Gamma_{\mu\rho}^\sigma(x) \Gamma_{\beta\nu}^\rho(y) + \dots, \quad (2.83)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ é a conexão de Christoffel e I a matriz identidade.

Como a transformação de holonomia $U(C)$ é dada por uma matriz, então vamos introduzir a seguinte notação:

$$\begin{aligned} U_\nu^\sigma(C) &= \delta_\nu^\sigma + (U_{(1)})_\nu^\sigma + (U_{(2)})_\nu^\sigma + (U_{(3)})_\nu^\sigma + \dots \\ U_\nu^\sigma(C) &= \delta_\nu^\sigma + \oint_C dx^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) + \frac{1}{2!} P \oint_C dx^\mu \oint_C dy^\beta \Gamma_{\mu\rho}^\sigma(x) \Gamma_{\beta\nu}^\rho(y) + \dots, \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde U_v^σ representa cada elemento da matriz associada com a transformação de holonomia, sendo que σ indica a *linha*, v indica a *coluna* e os números entre parêntese indica a ordem da expansão.

Da definição de U_v^σ segue que sob uma transformação de coordenadas $x \rightarrow y$, a matriz U se transforma como

$$U_v^\sigma(x, x') \rightarrow U_v^\sigma(x, x') \left(\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma} \right)_x \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \right)_{x'}. \quad (2.85)$$

No caso de um caminho fechado essa transformação é da forma

$$U \rightarrow \Omega U \Omega^{-1},$$

portanto, não afeta o traço de U , ou seja, o loop de Wilson é uma quantidade invariante com respeito às transformações de coordenadas. Assim, tanto para a conexão de Christoffel ou conexão tetrádica, temos que o loop de Wilson $W(C)$ é o mesmo. Denotando U_b^a (com índices *latinos*) como a transformação de holonomia obtida através do método exato, e U_v^μ (com índices *gregos*) obtido através do método perturbativo, podemos escrever a seguinte relação,

$$U_b^a(x, x') = e_\mu^{(a)}(x) U_v^\mu(x, x') e_{(b)}^\nu(x'), \quad (2.86)$$

ou ainda,

$$U_v^\mu(x, x') = e_{(a)}^\mu(x) U_b^a(x, x') e_{(b)}^\nu(x'). \quad (2.87)$$

A expressão (2.86) nos fornece uma relação entre os dois métodos que utilizaremos em nossas investigações. A partir de agora utilizaremos $U(C)$ para identificar a matriz de holonomia obtida através do método exato e $\tilde{U}(C)$ para representar a matriz obtida através do método perturbativo.

Capítulo 3

Cálculo das variáveis de contorno no espaço-tempo gerado por uma casca cilíndrica e nos espaços-tempo de Gödel e Friedmann-Robertson-Walker.

3.1 Introdução

Nesta seção vamos aplicar o formalismo de variáveis de contorno considerando primeiramente um campo gravitacional gerado por uma casca cilíndrica, sem rotação. Em seguida analisaremos os casos para os espaços-tempo de Gödel e Friedmann-Robertson-Walker.

No caso do espaço-tempo gerado por uma casca cilíndrica, será calculada a transformação de holonomia através do método perturbativo. Para o espaço-tempo de Gödel, usaremos o método exato. Por último, aplicaremos o método perturbativo no caso do espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker.

3.2 Variáveis de contorno no espaço-tempo gerado por uma casca cilíndrica, sem rotação.

Considere um campo gravitacional gerado por um corpo massivo correspondente à uma casca cilíndrica infinitamente longa, rotacionando lentamente em torno de seu eixo. Na aproximação de campo fraco, o elemento de linha correspondente a este cenário é representado pela expressão [15]-[11]

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{1}{2}a(\rho) \right] dt^2 + \left[1 + \frac{1}{2}a(\rho) \right] (d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2) + 2b(\rho) dt d\phi, \quad (3.1)$$

com

$$a(\rho) = -8\mu\Theta(\rho - \rho_0)\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad (3.2)$$

$$b(\rho) = 4j \left[\frac{\rho^2}{\rho_0^2} \Theta(\rho - \rho_0) + \Theta(\rho - \rho_0) \right], \quad (3.3)$$

onde Θ é a função degrau unitária, o parâmetro μ é a densidade linear de massa e o parâmetro $j = \mu\omega\rho_0$ representa a densidade de momento angular linear, sendo que ρ_0 e ω são o raio do cilindro e a velocidade angular da fonte, respectivamente. Observemos que, devido a rotação da casca cilíndrica, o termo $b(\rho)$ é proporcional a j . Na aproximação de campo fraco temos que para um potencial Newtoniano gerado por uma casca cilíndrica delgada e massiva, devemos ter $|a(\rho)| = |-4\Phi| \ll 1$, onde Φ é o potencial Newtoniano gerado pela casca cilíndrica. Desde que o campo gravitacional seja considerado fraco, podemos escrever o tensor métrico correspondente à equação (3.1) na forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, com $\eta_{\mu\nu}$ correspondendo a métrica do espaço-tempo de Minkowski e $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Nesta aproximação, o tensor de Riemann pode ser escrito como

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}). \quad (3.4)$$

Usando a equação (3.4) pode-se verificar que a curvatura na região exterior à casca cilíndrica massiva não depende do momento angular da mesma, no limite da aproximação linear ou de campo fraco. Assim, o campo gravitacional associado com uma casca cilíndrica de matéria girando lentamente não é afetado pelo momento angular. Nessa região externa, o tensor de curvatura de Riemann é completamente determinado através da função $a(\rho)$, quando desprezamos os termos da ordem $a(\rho) \cdot b(\rho)$, $|a(\rho)|^2$ e $b(\rho)^2$ [17].

Vamos considerar o caso em que a casca cilíndrica rotaciona lentamente em torno do eixo z , de tal modo que devemos ter $b(\rho) \sim 0$. Desta maneira, considerando a equação (3.1), uma casca cilíndrica infinitamente longa, e agora estática, pode ser representada pela métrica

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{1}{4}a(\rho) \right]^2 dt^2 + \left[1 + \frac{1}{4}a(\rho) \right]^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2), \quad (3.5)$$

onde usamos a aproximação de campo fraco para escrever

$$\left(1 + \frac{a(\rho)}{2} \right) = \left\{ \left[1 + \frac{a(\rho)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \sim \left[1 + \frac{1}{4}a(\rho) \right]^2. \quad (3.6)$$

Veja que na equação (3.6) foi feita uma expansão do tipo $(1 + \frac{x}{2})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + \dots$ e desprezados os termos de ordem superiores.

Agora vamos realizar os cálculos das transformações de holonomia usando o método perturbativo, para o caso da casca cilíndrica estática. Para isto, vamos inicialmente calcular as conexões de Christoffel aplicando o método variacional.

De acordo com a métrica (3.5), podemos definir a lagrangeana do sistema como

$$L = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{a}{4} \right)^2 \dot{t}^2 + \left(1 + \frac{a}{4} \right)^2 \dot{\rho}^2 + \left(1 + \frac{a}{4} \right)^2 \rho^2 \dot{\phi}^2 + \left(1 + \frac{a}{4} \right)^2 \dot{z}^2 \right]. \quad (3.7)$$

Dessa forma temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} &= \frac{a'}{4} \left(1 - \frac{a}{4} \right) \dot{t}^2 + \frac{a'}{4} \left(1 + \frac{a}{4} \right) \dot{\rho}^2 + \frac{a'}{4} \left(1 + \frac{a}{4} \right) \rho^2 \dot{\phi}^2 + \left(1 + \frac{a}{4} \right)^2 \rho \dot{\phi}^2 + \frac{a'}{4} \left(1 + \frac{a}{4} \right) \dot{z}^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} &= - \left(1 - \frac{a}{4} \right)^2 \dot{t} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= \left(1 + \frac{a}{4} \right)^2 \dot{\rho} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \left(1 + \frac{a}{4} \right)^2 \rho^2 \dot{\phi} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \left(1 + \frac{a}{4} \right)^2 \dot{z}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde usamos a linha (') para denotar a diferenciação com respeito à ρ e o ponto para denotar a diferenciação com respeito ao parâmetro afim λ , ou seja, $a' = \frac{da(\rho)}{d\rho}$ e $\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda}$. Como já foi mostrado, a equação de Euler-Lagrange para uma dada lagrangeana L é dada por

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.9)$$

Substituindo as relações dadas pela equação (3.8) na (3.9), para o tempo coordenada t , obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} &= 0 \\
\frac{d}{d\lambda} \left[- \left(1 - \frac{a}{4} \right)^2 \dot{t} \right] &= 0 \\
2 \frac{a'}{4} \left(1 - \frac{a}{4} \right) \dot{\rho} \dot{t} - \left(1 - \frac{a}{4} \right)^2 \ddot{t} &= 0 \\
\ddot{t} - \frac{a'}{4} \left(1 - \frac{a}{4} \right)^{-1} \dot{\rho} \dot{t} - \frac{a'}{4} \left(1 - \frac{a}{4} \right)^{-1} \dot{t} \dot{\rho} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Comparando a equação (3.10) com a equação geodésica (2.50), podemos extrair os coeficientes não-nulos da conexão de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^t$ dados por

$$\Gamma_{\rho t}^t = \Gamma_{t\rho}^t = -\frac{a'}{4} \left(1 - \frac{a}{4} \right)^{-1}. \tag{3.11}$$

Pela equação (3.2) podemos ver que,

$$a' = \frac{d}{d\rho} [a(\rho)] = -\frac{8\mu}{\rho}. \tag{3.12}$$

Substituindo a equação (3.12) na (3.11), podemos escrever

$$\Gamma_{\rho t}^t = \Gamma_{t\rho}^t = \frac{2\mu}{\rho} \left(1 - \frac{a}{4} \right)^{-1}. \tag{3.13}$$

Usando o mesmo procedimento para ρ , ϕ e z , podemos verificar que os coeficientes não-nulos da conexão de Christoffel são dados por:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\rho t}^t = \Gamma_{t\rho}^t &= \frac{2\mu}{\rho} \left(1 - \frac{a}{4} \right)^{-1} \\
\Gamma_{tt}^\rho &= \frac{2\mu}{\rho} \left(1 - \frac{a}{4} \right) \left(1 + \frac{a}{4} \right)^{-2} \\
\Gamma_{\rho\rho}^\rho = \Gamma_{z\rho}^z = \Gamma_{\rho z}^z = -\Gamma_{zz}^\rho &= -\frac{2\mu}{\rho} \left(1 + \frac{a}{4} \right)^{-1} \\
\Gamma_{\phi\phi}^\rho &= -\rho \left[1 - 2\mu \left(1 + \frac{a}{4} \right)^{-1} \right] \\
\Gamma_{\phi\rho}^\phi = \Gamma_{\rho\phi}^\phi &= \frac{1}{\rho} \left[1 - 2\mu \left(1 + \frac{a}{4} \right)^{-1} \right].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

No método perturbativo, cada elemento da matriz de holonomia $U(C)$ é fornecido pela expressão,

$$U_\nu^\mu(C) = \delta_\nu^\mu + (U_{(1)})_\nu^\mu + (U_{(2)})_\nu^\mu + (U_{(3)})_\nu^\mu + \dots, \tag{3.15}$$

sendo que o μ indica a *linha*, ν indica a *coluna* e no k -ésimo termo $(U_{(k)})_\nu^\sigma$, o k indica a ordem da expansão. Vale lembrar que na equação (3.15), a letra grega μ corresponde ao

índice, enquanto que na expressão (3.2) representa a densidade linear de massa da casca cilíndrica. Assim sendo, temos que

$$\begin{aligned}
 (U_{(1)})_v^\mu &= \oint_C dx^\beta \Gamma_{\beta v}^\mu(x) \\
 (U_{(2)})_v^\mu &= \frac{1}{2!} \oint_C dx^\beta \oint_C dy^\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\mu(x) \Gamma_{\alpha v}^\sigma(y) \\
 (U_{(3)})_v^\mu &= \frac{1}{3!} \oint_C dx^\beta \oint_C dy^\alpha \oint_C dz^\lambda \Gamma_{\beta\sigma}^\mu(x) \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma(y) \Gamma_{\lambda v}^\gamma(z) \\
 &\vdots = \dots
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde a matriz associada com a transformação de holonomia é dada por

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} U_t^t & U_\rho^t & U_\phi^t & U_z^t \\ U_t^\rho & U_\rho^\rho & U_\phi^\rho & U_z^\rho \\ U_t^\phi & U_\rho^\phi & U_\phi^\phi & U_z^\phi \\ U_t^z & U_\rho^z & U_\phi^z & U_z^z \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

sendo que cada elemento da matriz (3.17) é dado pela expressão (3.15).

Primeiro vamos considerar contornos no plano perpendicular ao cilindro e centrado na origem, com os valores de t , ρ e z fixos, mas com ϕ variando de $0 \rightarrow 2\pi$. Por outro lado, analisando as equações (3.14) podemos verificar que os k -ésimos termos $(U_{(k)})_v^\mu$ não-nulos serão dados para $\mu = \phi$, $v = \rho$ e $\mu = \rho$, $v = \phi$.

Sendo assim, para o termo de primeira ordem temos que

$$(U_{(1)})_v^\mu = \oint_C d\phi \Gamma_{\phi v}^\mu(\phi). \tag{3.18}$$

Como as componentes da conexão não dependem de ϕ , então, a equação (3.18) nos fornece os seguintes resultados

$$\begin{aligned}
 (U_1)_\rho^\rho &= 0 \\
 (U_1)_\phi^\phi &= 0 \\
 (U_1)_\phi^\rho &= 2\pi \Gamma_{\phi\phi}^\rho \\
 (U_1)_\rho^\phi &= 2\pi \Gamma_{\phi\rho}^\phi.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Para o termo de segunda ordem temos o seguinte:

$$(U_2)_v^\mu = \frac{1}{2!} \oint_C d\phi_1 \oint_C d\phi_2 \Gamma_{\phi\sigma}^\mu(\phi_1) \Gamma_{\phi v}^\sigma(\phi_2) = \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi\sigma}^\mu \Gamma_{\phi v}^\sigma \right). \tag{3.20}$$

Os únicos valores não-nulos de $(U_2)_\nu^\mu$ são dados, também, para $\mu = \phi$, $\nu = \rho$ e $\mu = \rho$, $\nu = \phi$, levando-nos aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 (U_2)_\phi^\rho &= \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi t}^\rho \Gamma_{\phi\phi}^t + \Gamma_{\phi\rho}^\rho \Gamma_{\phi\phi}^\rho + \Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\phi}^\phi + \Gamma_{\phi z}^\rho \Gamma_{\phi\phi}^z \right) = 0 \\
 (U_2)_\rho^\phi &= \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{\phi\rho}^t + \Gamma_{\phi\rho}^\phi \Gamma_{\phi\rho}^\rho + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\phi\rho}^\phi + \Gamma_{\phi z}^\phi \Gamma_{\phi\rho}^z \right) = 0 \\
 (U_2)_\rho^\rho &= \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi t}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^t + \Gamma_{\phi\rho}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\rho + \Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi + \Gamma_{\phi z}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^z \right) = \frac{(2\pi)^2}{2!} \Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi \\
 (U_2)_\phi^\phi &= \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^t + \Gamma_{\phi\rho}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\rho + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi + \Gamma_{\phi z}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^z \right) = \frac{(2\pi)^2}{2!} \Gamma_{\phi\rho}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\rho. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Para o termo de terceira ordem temos,

$$(U_{(3)})_\nu^\mu = \frac{1}{3!} \oint_C d\phi_1 \oint_C d\phi_2 \oint_C d\phi_3 \Gamma_{\phi\sigma}^\mu(\phi_1) \Gamma_{\phi\gamma}^\sigma(\phi_2) \Gamma_{\phi\nu}^\gamma(\phi_3) \quad (3.22)$$

$$(U_{(3)})_\nu^\mu = \frac{(2\pi)^3}{3!} \Gamma_{\phi\sigma}^\mu \Gamma_{\phi\gamma}^\sigma \Gamma_{\phi\nu}^\gamma. \quad (3.23)$$

Resultando em,

$$\begin{aligned}
 (U_3)_\rho^\rho &= (U_3)_\phi^\phi = 0 \\
 (U_3)_\phi^\rho &= \frac{(2\pi)^3}{3!} \Gamma_{\phi\rho}^\phi (\Gamma_{\phi\phi}^\rho)^2 \\
 (U_3)_\rho^\phi &= \frac{(2\pi)^3}{3!} \Gamma_{\phi\phi}^\rho (\Gamma_{\phi\rho}^\phi)^2, \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

onde na equação (3.23) fixamos os índices μ e ν , consideramos a soma nos índices σ e γ , e avaliamos de acordo com o resultado expresso nas equações (3.14).

Adotando procedimentos semelhantes, podemos encontrar:

$$\begin{aligned}
 (U_4)_\phi^\rho &= (U_4)_\rho^\phi = 0 \\
 (U_4)_\rho^\rho &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi \right)^2 \\
 (U_4)_\phi^\phi &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\rho \right)^2; \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (U_5)_\rho^\rho &= (U_5)_\phi^\phi = 0 \\
 (U_5)_\phi^\rho &= \frac{(2\pi)^5}{5!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^\phi \right)^2 (\Gamma_{\phi\phi}^\rho)^3 \\
 (U_5)_\rho^\phi &= \frac{(2\pi)^5}{5!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^\rho \right)^2 (\Gamma_{\phi\rho}^\phi)^3; \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (U_6)_\phi^\rho &= (U_6)_\rho^\phi = 0 \\
 (U_6)_\rho^\rho &= \frac{(2\pi)^6}{6!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi \right)^3 \\
 (U_6)_\phi^\phi &= \frac{(2\pi)^6}{6!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\rho \right)^3; \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

Agora vamos fazer o cálculo dos elementos não-nulos da matriz (3.17), associada com a transformação de holonomia. Para isto, substituiremos as equações (3.19), (3.21), (3.24), (3.25), (3.26) e (3.27) na equação (3.15), o que nos leva ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} U_\phi^\rho &= \delta_\phi^\rho + (U_1)_\phi^\rho + (U_2)_\phi^\rho + (U_3)_\phi^\rho + (U_4)_\phi^\rho + (U_5)_\phi^\rho + (U_6)_\phi^\rho + \dots \\ &= 2\pi\Gamma_{\phi\phi}^\rho + \frac{(2\pi)^3}{3!}\Gamma_{\phi\rho}^\phi \left(\Gamma_{\phi\phi}^\rho\right)^2 + \frac{(2\pi)^5}{5!}\left(\Gamma_{\phi\rho}^\phi\right)^2 \left(\Gamma_{\phi\phi}^\rho\right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

Se fizermos $\Gamma_{\phi\phi}^\rho = -\rho X$ e $\Gamma_{\phi\rho}^\phi = \rho^{-1}X$, com

$$X = 1 - 2\mu\left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)^{-1}, \quad (3.29)$$

a equação (3.28) poderá ser escrita como

$$\begin{aligned} U_\phi^\rho &= -2\pi\rho X + \frac{(2\pi)^3}{3!}\rho X^3 - \frac{(2\pi)^5}{5!}\rho X^5 + \dots \\ U_\phi^\rho &= -\rho \left[(2\pi X) - \frac{(2\pi X)^3}{3!} + \frac{(2\pi X)^5}{5!} - \dots \right] \\ U_\phi^\rho &= -\rho \operatorname{sen}(2\pi X), \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde usamos o fato de que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$. De forma semelhante temos que

$$\begin{aligned} U_\rho^\rho &= \delta_\rho^\rho + (U_1)_\rho^\rho + (U_2)_\rho^\rho + (U_3)_\rho^\rho + (U_4)_\rho^\rho + (U_5)_\rho^\rho + (U_6)_\rho^\rho + \dots \\ &= 1 + \frac{(2\pi)^2}{2!}\Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi + \frac{(2\pi)^4}{4!}\left(\Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi\right)^2 + \frac{(2\pi)^6}{6!}\left(\Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi\right)^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{(2\pi)^2}{2!}(\rho X)\frac{X}{\rho} + \frac{(2\pi)^4}{4!}(\rho X)^2\left(\frac{X}{\rho}\right)^2 - \frac{(2\pi)^6}{6!}(\rho X)^3\left(\frac{X}{\rho}\right)^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{(2\pi X)^2}{2!} + \frac{(2\pi X)^4}{4!} - \frac{(2\pi X)^6}{6!} + \dots \\ U_\rho^\rho &= \cos(2\pi X) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Da mesma forma temos,

$$\begin{aligned} U_\rho^\phi &= \frac{1}{\rho} \operatorname{sen}(2\pi X) \\ U_\phi^\phi &= \cos(2\pi X) \\ U_t^t &= 1 \\ U_z^z &= 1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Os demais elementos da matriz são nulos. Portanto, podemos escrever a matriz que

descreve a transformação de holonomia para esta situação da seguinte forma:

$$\tilde{U}_{2\pi,0}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi X) & -\rho \sin(2\pi X) & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \sin(2\pi X) & \cos(2\pi X) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

A transformação de holonomia $\tilde{U}(C)$ pode ser entendida como uma aplicação linear que, aplicada a um vetor V^μ , o transporta paralelamente ao longo do caminho perpendicular ao eixo da casca cilíndrica estática e com centro na origem. Observando a equação (3.33) juntamente com a (2.82), o loop de Wilson será dado por:

$$\widetilde{W}(C) = -2 + 2\cos(2\pi X). \quad (3.34)$$

Não aplicaremos o método exato para calcular a transformação de holonomia, no entanto, faremos uso da expressão (2.86) para mostrar a equivalência entre os dois métodos. Para isso, considerando a métrica dada pela (3.5), vamos definir as 1-formas:

$$\begin{aligned} \theta^0 &= \left(1 - \frac{a(\rho)}{4}\right) dt, \\ \theta^1 &= \left(1 + \frac{a(\rho)}{4}\right) d\rho, \\ \theta^2 &= \left(1 + \frac{a(\rho)}{4}\right) \rho d\phi, \\ \theta^3 &= \left(1 + \frac{a(\rho)}{4}\right) dz. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Então, para um sistema de coordenadas ($x^0 = t$, $x^1 = \rho$, $x^2 = \phi$ e $x^3 = z$), um sistema de tétradas definido por $\theta^a = e_\mu^{(a)} dx^\mu$ será:

$$\begin{cases} e_0^{(0)} &= \left(1 - \frac{a(\rho)}{4}\right) \\ e_1^{(1)} &= \left(1 + \frac{a(\rho)}{4}\right) \\ e_2^{(2)} &= \left(1 + \frac{a(\rho)}{4}\right) \rho \\ e_3^{(3)} &= \left(1 + \frac{a(\rho)}{4}\right) \end{cases} \quad (3.36)$$

onde as inversas de (3.36) são dadas por $dx^\mu = e_{(a)}^\mu \theta^a$, ou seja,

$$\begin{cases} e^0_{(0)} &= \left(1 - \frac{a(\rho)}{4}\right)^{-1} \\ e^1_{(1)} &= \left(1 + \frac{a(\rho)}{4}\right)^{-1} \\ e^2_{(2)} &= \left(1 + \frac{a(\rho)}{4}\right)^{-1} \rho^{-1} \\ e^3_{(3)} &= \left(1 + \frac{a(\rho)}{4}\right)^{-1}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Utilizando a expressão $U_b^a = e_\mu^{(a)} U_\nu^\mu e_{(b)}^\nu$ juntamente com as expressões (3.36) e (3.37), pode-se mostrar que, através do método exato, a transformação de holonomia $U(C)$ tem a seguinte forma:

$$U_{2\pi,0}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi X) & -\sin(2\pi X) & 0 \\ 0 & \sin(2\pi X) & \cos(2\pi X) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Nesse caso, podemos concluir que, quando um vetor V^μ é transportado paralelamente em torno de uma casca cilíndrica estática, este adquire uma fase

$$\begin{aligned} U_{2\pi,0}(C) &= \exp(-2\pi i X J_{12}) \\ U_{2\pi,0}(C) &= \exp \left\{ -2\pi i \left[1 - 2\mu \left(1 + \frac{a(\rho)}{4} \right)^{-1} \right] J_{12} \right\}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde J_{12} é o gerador das rotações em torno do eixo z . Como o loop de Wilson é uma quantidade invariante, ele tem o mesmo valor tanto na transformação de holonomia calculada via método perturbativo quanto no método exato, ou seja, $\widetilde{W}(C) = W(C) = -2 + 2\cos(2\pi X)$.

Agora vamos fixar ρ , ϕ e z , para calcular $\widetilde{U}(C)$ para uma translação temporal de t_1 até t_2 , utilizando o método perturbativo. Para esse caso, as únicas componentes não nulas de $(U)_\nu^\mu$ acontecem para $\mu = t$, $\mu = \rho$ e $\mu = \rho$, $\nu = t$. Fazendo os devidos cálculos, os k -termos $(U_k)_\nu^\mu$ da expansão (3.15), não-nulos, são:

$$\begin{aligned} (U_1)_\rho^t &= \Delta t \Gamma_{t\rho}^t \\ (U_1)_t^\rho &= \Delta t \Gamma_{tt}^\rho; \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} (U_2)_t^t &= \frac{(\Delta t)^2}{2!} \Gamma_{t\rho}^t \Gamma_{tt}^\rho \\ (U_2)_\rho^\rho &= \frac{(\Delta t)^2}{2!} \Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{t\rho}^t; \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} (U_3)_\rho^t &= \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left(\Gamma_{t\rho}^t \right)^2 \Gamma_{tt}^\rho \\ (U_3)_t^\rho &= \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left(\Gamma_{tt}^\rho \right)^2 \Gamma_{t\rho}^t; \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} (U_4)_t^t &= \frac{(\Delta t)^4}{4!} \left(\Gamma_{t\rho}^t \Gamma_{tt}^\rho \right)^2 \\ (U_4)_\rho^\rho &= \frac{(\Delta t)^4}{4!} \left(\Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{t\rho}^t \right)^2; \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
(U_5)_\rho^t &= \frac{(\Delta t)^5}{5!} \left(\Gamma_{t\rho}^t \right)^3 \left(\Gamma_{tt}^\rho \right)^2 \\
(U_5)_t^\rho &= \frac{(\Delta t)^5}{5!} \left(\Gamma_{tt}^\rho \right)^3 \left(\Gamma_{t\rho}^t \right)^2;
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
(U_6)_t^t &= \frac{(\Delta t)^6}{6!} \left(\Gamma_{t\rho}^t \Gamma_{tt}^\rho \right)^3 \\
(U_6)_\rho^\rho &= \frac{(\Delta t)^6}{6!} \left(\Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{t\rho}^t \right)^3; \dots
\end{aligned} \tag{3.45}$$

e assim sucessivamente. Observe que usamos $\int_{t_1}^{t_2} dt = \Delta t = t_2 - t_1$, pois as componentes da conexão de Christoffel não dependem do tempo t . Portanto, usando a expressão (3.15), podemos verificar que os elemento não-nulos da matriz $\tilde{U}(C)$ são:

$$\begin{aligned}
U_t^t &= \delta_t^t + (U_1)_t^t + (U_2)_t^t + (U_3)_t^t + (U_4)_t^t + (U_5)_t^t + (U_6)_t^t + \dots \\
&= 1 + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \Gamma_{t\rho}^t \Gamma_{tt}^\rho + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \left(\Gamma_{t\rho}^t \Gamma_{tt}^\rho \right)^2 + \frac{(\Delta t)^6}{6!} \left(\Gamma_{t\rho}^t \Gamma_{tt}^\rho \right)^3 + \dots \\
&= 1 + \frac{\left(\Delta t \sqrt{\Gamma_{t\rho}^t \Gamma_{tt}^\rho} \right)^2}{2!} + \frac{\left(\Delta t \sqrt{\Gamma_{t\rho}^t \Gamma_{tt}^\rho} \right)^4}{4!} + \dots \\
&= \cosh \left[(t_2 - t_1) \sqrt{\Gamma_{t\rho}^t \Gamma_{tt}^\rho} \right] \\
&= \cosh \left[(t_2 - t_1) 2\mu\rho^{-1} \left(1 - \frac{a}{4} \right) \right] \\
&= \cosh[(t_2 - t_1) X_t];
\end{aligned} \tag{3.46}$$

onde $X_t = 2\mu\rho^{-1} \left(1 - \frac{a}{4} \right)$.

$$\begin{aligned}
U_\rho^\rho &= \delta_\rho^\rho + (U_1)_\rho^\rho + (U_2)_\rho^\rho + (U_3)_\rho^\rho + (U_4)_\rho^\rho + (U_5)_\rho^\rho + (U_6)_\rho^\rho + \dots \\
&= 1 + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{t\rho}^t + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \left(\Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{t\rho}^t \right)^2 + \frac{(\Delta t)^6}{6!} \left(\Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{t\rho}^t \right)^3 + \dots \\
&= 1 + \frac{\left(\Delta t \sqrt{\Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{t\rho}^t} \right)^2}{2!} + \frac{\left(\Delta t \sqrt{\Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{t\rho}^t} \right)^4}{4!} + \dots \\
&= \cosh \left[(t_2 - t_1) \sqrt{\Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{t\rho}^t} \right] \\
&= \cosh[(t_2 - t_1) X_t];
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$U_\phi^\phi = \delta_\phi^\phi + (U_1)_\phi^\phi + (U_2)_\phi^\phi + (U_3)_\phi^\phi + (U_4)_\phi^\phi + (U_5)_\phi^\phi + (U_6)_\phi^\phi + \dots = 1; \tag{3.48}$$

$$U_z^z = \delta_z^z + (U_1)_z^z + (U_2)_z^z + (U_3)_z^z + (U_4)_z^z + (U_5)_z^z + (U_6)_z^z + \dots = 1; \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
U_\rho^t &= \delta_\rho^t + (U_1)_\rho^t + (U_2)_\rho^t + (U_3)_\rho^t + (U_4)_\rho^t + (U_5)_\rho^t + (U_6)_\rho^t + \dots \\
&= \Delta t \Gamma_{t\rho}^t + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left(\Gamma_{t\rho}^t \right)^2 \Gamma_{tt}^\rho + \frac{(\Delta t)^5}{5!} \left(\Gamma_{t\rho}^t \right)^3 \left(\Gamma_{tt}^\rho \right)^2 + \dots \\
&= \left(1 - \frac{a}{4} \right)^{-1} \left[\Delta t \frac{2\mu}{\rho} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left(\frac{2\mu}{\rho} \right)^3 \left(1 + \frac{a}{4} \right)^{-2} + \frac{(\Delta t)^5}{5!} \left(\frac{2\mu}{\rho} \right)^5 \left(1 + \frac{a}{4} \right)^{-4} + \dots \right] \\
&= \left(1 - \frac{a}{4} \right)^{-1} \left(1 + \frac{a}{4} \right) \sinh \left[2\mu(t_2 - t_1) \rho^{-1} \left(1 - \frac{a}{4} \right) \right] \\
&= \left(1 - \frac{a}{4} \right)^{-1} \left(1 + \frac{a}{4} \right) \sinh [(t_2 - t_1) X_t];
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$U_t^\rho = \left(1 - \frac{a}{4} \right) \left(1 + \frac{a}{4} \right)^{-1} \sinh [(t_2 - t_1) X_t], \tag{3.51}$$

onde usamos $\Gamma_{t\rho}^t = 2\mu\rho^{-1}(1 - a/4)^{-1}$, $\Gamma_{tt}^\rho = 2\mu\rho^{-1}(1 - a/4)(1 + a/4)^{-2}$, $X_t = 2\mu\rho^{-1}(1 - a/4)$ e a aproximação $(1 + a/4)^{-1} \approx (1 - a/4)$. Com esses resultados, a matriz $\tilde{U}(C)$ para uma translação no tempo é dada por

$$\tilde{U}_{t_2, t_1}(C) = \begin{pmatrix} \cosh[(t_2 - t_1) X_t] & \varepsilon^{-1} \sinh[(t_2 - t_1) X_t] & 0 & 0 \\ \varepsilon \sinh[(t_2 - t_1) X_t] & \cosh[(t_2 - t_1) X_t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

sendo $\varepsilon = \left(1 - \frac{a}{4} \right) \left(1 + \frac{a}{4} \right)^{-1}$.

Por uma transformação do tipo $U_b^a = e_\mu^{(a)} U_\nu^\mu e_{(b)}^\nu$, juntamente com as expressões (3.36) e (3.37), podemos encontrar a matriz que representa a variável de contorno quando obtida via método exato, ou seja, para uma translação no tempo entre t_1 e t_2 , encontramos a seguinte expressão:

$$U_{t_2, t_1}(C) = \begin{pmatrix} \cosh[(t_2 - t_1) X_t] & \sinh[(t_2 - t_1) X_t] & 0 & 0 \\ \sinh[(t_2 - t_1) X_t] & \cosh[(t_2 - t_1) X_t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

Ainda podemos expressar (3.53) como:

$$U_{t_2, t_1}(C) = \exp[-i X_t (t_2 - t_1) J_{14}], \tag{3.54}$$

onde J_{14} representa o gerador de boosts na direção de z .

Também calculamos $\tilde{U}(C)$ para uma translação na direção de z , com t , ϕ e ρ fixos. Para este caso, usando o método perturbativo, e considerando que as conexões (3.14) não

dependem de z , obtivemos o seguinte resultado

$$\tilde{U}_{z_2, z_1}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[(z_2 - z_1)X_z] & 0 & \text{sen}[(z_2 - z_1)X_z] \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\text{sen}[(z_2 - z_1)X_z] & 0 & \cos[(z_2 - z_1)X_z] \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

sendo $X_z = 2\mu\rho^{-1}(1 - a/4)$.

Observe que para uma transformação do tipo $U_b^a = e_\mu^{(a)} U_\nu^\mu e^\nu_{(b)}$, a matriz $\tilde{U}(C)$ coincide com a variável de contorno calculada via método exato, ou seja, $\tilde{U}(C) = U(C)$. Neste caso, podemos representar a variável de contorno para uma translação de z_1 à z_2 , por

$$\tilde{U}(C) = U(C) = \exp \left[-2i(z_2 - z_1)\mu\rho^{-1} \left(1 - \frac{a}{4} \right) J_{13} \right], \quad (3.56)$$

onde J_{13} representa o gerador de rotações em torno do eixo y . Para um vetor V^μ transportado paralelamente ao longo do eixo z , o mesmo adquire uma fase dada por (3.56). Mas caso o transporte paralelo de V^μ seja realizada muito distante da fonte ($\rho \rightarrow \infty$), para uma densidade linear de massa constante ($\mu = cte$), pela equação (3.56), a matriz $U(C)$ será unitária, o que significa que a fonte não será sensível nessa região. Daí, o espaço-tempo nessa região será o espaço-tempo de Minkowski.

3.3 Variáveis de contorno no espaço-tempo de Gödel.

Nessa seção vamos considerar o campo gravitacional correspondente a solução de Gödel, que é descrita pela métrica [18]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 + 2f(r)dtd\phi + g(r)d\phi^2, \quad (3.57)$$

onde

$$\begin{aligned} g(r) &= \text{senh}^4 r - \text{senh}^2 r, \\ f(r) &= \sqrt{2}\text{senh}^2 r. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Vamos calcular a transformação de holonomia, para o espaço-tempo de Gödel, através do

método exato. Para isto, vamos primeiro reescrever a métrica (3.57) como

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 + (f^2 d\phi^2 - f^2 d\phi^2) - dr^2 - dz^2 + 2f dt d\phi + g d\phi^2, \\ ds^2 &= (dt + f d\phi)^2 - (f^2 - g) d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \\ ds^2 &= (dt + f d\phi)^2 - dr^2 - h^2 d\phi^2 - dz^2, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde fizemos $h^2 = f^2 - g$. As 1-formas ω^a , com $a = 1, 2, 3, 4$, são definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \omega^0 &= dt + f(r) d\phi, \\ \omega^1 &= dr, \\ \omega^2 &= h d\phi, \\ \omega^3 &= dz. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Vamos considerar um sistema de coordenadas ($x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \phi$ e $x^3 = z$). Um campo de tétradas definido como $\omega^a = e_\mu^{(a)} dx^\mu$ é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} e_0^{(0)} = 1 \\ e_1^{(1)} = 1 \\ e_2^{(2)} = h(r) \\ e_3^{(3)} = 1 \\ e_2^{(0)} = f(r). \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Derivando exteriormente as equações (3.60), temos

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= f' dr \wedge d\phi \\ d\omega^1 &= 0 \\ d\omega^2 &= h' dr \wedge d\phi \\ d\omega^3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Usando a primeira equação de estrutura de Maurer-Cartan $d\omega^a = -\omega^a_b \omega^b$, podemos fazer:

$$\begin{aligned} f' dr \wedge d\phi &= -\omega^0_0 \wedge \omega^0 - \omega^0_1 \wedge \omega^1 - \omega^0_2 \wedge \omega^2 - \omega^0_3 \wedge \omega^3 \\ f' \omega^1 \wedge \omega^2 h^{-1} &= -\omega^0_0 \wedge \omega^0 - \omega^0_1 \wedge \omega^1 - \omega^0_2 \wedge \omega^2 - \omega^0_3 \wedge \omega^3 \\ \frac{f'}{2h} \omega^1 \wedge \omega^2 - \frac{f'}{2h} \omega^2 \wedge \omega^1 &= -\omega^0_1 \wedge \omega^1 - \omega^0_2 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Por comparação, podemos ver que $\omega^0_2 = -\frac{f'}{2h}\omega^1$ e $\omega^0_1 = \frac{f'}{2h}\omega^2$, onde $f' = df/dr$. Mas observando a equação (3.60), podemos escrever:

$$\begin{aligned}\omega^0_1 = \omega^1_0 &= \frac{f'}{2}d\phi; \\ \omega^0_2 = \omega^2_0 &= -\frac{f'}{2h}dr.\end{aligned}$$

Lembrando que aplicamos as propriedades $\omega_{aa} = 0$ e $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$, como por exemplo, $\omega^0_1 = \eta^{00}\omega_{01} = \omega_{01} = -\omega_{10} = -\eta_{11}\omega^1_0 = \omega^1_0$. Podemos ver também que,

$$\begin{aligned}h'dr \wedge d\phi &= -\omega^2_0 \wedge \omega^0 - \omega^2_1 \wedge \omega^1 - \omega^2_2 \wedge \omega^2 - \omega^2_3 \wedge \omega^3 \\ h'\omega^1 \wedge \omega^2 h^{-1} &= -\omega^2_0 \wedge \omega^0 - \omega^2_1 \wedge \omega^1 - \omega^2_2 \wedge \omega^2 - \omega^2_3 \wedge \omega^3 \\ -\frac{h'}{h}\omega^2 \wedge \omega^1 &= -\frac{f'}{2h}\omega^0 \wedge \omega^1 - \omega^2_1 \wedge \omega^1.\end{aligned}$$

Assim, comparando cada termo, observamos que $\omega^2_1 = \frac{h'}{h}\omega^2 - \frac{f'}{2h}\omega^0$. De acordo com a equação (3.60) podemos ver que

$$\omega^2_1 = -\omega^1_2 = -\frac{f}{2h}dt + \left(h' - \frac{f'f}{2h}\right)d\phi$$

Em resumo, as conexões tetrádicas não-nulas $\Gamma^a_{\mu b}dx^\mu$ são dadas por

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{\mu 1}dx^\mu &= \Gamma^1_{\mu 0}dx^\mu = \frac{f'}{2}d\phi \\ \Gamma^0_{\mu 2}dx^\mu &= \Gamma^2_{\mu 0}dx^\mu = -\frac{f'}{2h}dr \\ \Gamma^2_{\mu 1}dx^\mu &= -\Gamma^1_{\mu 2}dx^\mu = -\frac{f}{2h}dt + \left(h' - \frac{f'f}{2h}\right)d\phi.\end{aligned}\tag{3.63}$$

Primeiramente vamos considerar círculos centrados na origem, com t , r e z fixos, ou seja, $dt = dr = dz = 0$. Nesse caso:

$$\Gamma^a_{\mu b}dx^\mu = \Gamma_\phi d\phi.\tag{3.64}$$

Através das equações (3.63), teremos o seguinte resultado

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'}{2} & 0 & 0 \\ \frac{f'}{2} & 0 & -\left(h' - \frac{f'f}{2h}\right) & 0 \\ 0 & \left(h' - \frac{f'f}{2h}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{3.65}$$

Como Γ_ϕ independe da coordenada ϕ , podemos reescrever a holonomia como

$$U(C) = P \exp \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \Gamma_\phi d\phi \right) = \exp(2\pi\Gamma_\phi)\tag{3.66}$$

Podemos expandir a equação (3.66),

$$U(C) = \exp(2\pi\Gamma_\phi) = I + 2\pi\Gamma_\phi + \frac{(2\pi\Gamma_\phi)^2}{2!} + \frac{(2\pi\Gamma_\phi)^3}{3!} + \dots,$$

onde I é a matriz identidade. Usando as equações (3.58) e a matriz (3.65), por uma simples multiplicação de matrizes ($\Gamma_\phi \cdot \Gamma_\phi = \Gamma_\phi^2$ e $\Gamma_\phi \cdot \Gamma_\phi^2 = \Gamma_\phi^3$), podemos constatar que

$$\Gamma_\phi^3 = -L_r^2\Gamma_\phi, \quad (3.67)$$

onde definimos $L_r = [1 - 2\sinh^2(r) - 2\sinh^4(r)]^{\frac{1}{2}}$. Assim,

$$\begin{aligned} U &= I + 2\pi\Gamma_\phi + \frac{(2\pi)^2}{2!}\Gamma_\phi^2 - \frac{(2\pi)^3}{3!}L_r^2\Gamma_\phi - \frac{(2\pi)^4}{4!}L_r^2\Gamma_\phi^2 + \frac{(2\pi)^5}{5!}L_r^4\Gamma_\phi + \dots \\ &= I + \frac{\Gamma_\phi}{L_r} \left[(2\pi L_r) - \frac{(2\pi L_r)^3}{3!} + \frac{(2\pi L_r)^5}{5!} - \dots \right] + \frac{\Gamma_\phi^2}{L_r^2} \left[\frac{(2\pi L_r)^2}{2!} - \frac{(2\pi L_r)^4}{4!} + \frac{(2\pi L_r)^6}{6!} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Dessa forma, para um ciclo completo ($\phi : 0 \rightarrow 2\pi$), a equação (3.66) torna-se

$$U_{0,2\pi}(C) = I + \frac{\Gamma_\phi}{L_r} \sin(2\pi L_r) + \frac{\Gamma_\phi^2}{L_r^2} [1 - \cos(2\pi L_r)]. \quad (3.68)$$

Considerando as equações (3.58) e que $h' = 1 + 2\sinh^2 r$, $f' = 2\sqrt{2}\sinh r \cdot \cosh r$ e que também podemos escrever $h = \sinh r \cdot \cosh r$, é possível mostrar que $h' - \frac{f'f}{2h} = 1$. Levando em conta essas considerações, a matriz (3.65) poderá ser representada por

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & 0 \\ y & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

onde estamos usando $y = f'/2$. Além disso,

$$\Gamma_\phi^2 = \begin{pmatrix} y^2 & 0 & -y & 0 \\ 0 & (y^2 - 1) & 0 & 0 \\ y & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

Depois de alguns cálculos, usando as equações (3.69) e (3.70), podemos ver que o traço da matriz (3.68), correspondente ao loop de Wilson, é

$$W(C) = -4 + 4 - 2 \frac{(1 - y^2)}{L_r^2} [1 - \cos(2\pi L_r)]. \quad (3.71)$$

Mas,

$$\begin{aligned}
L_r^2 &= 1 - 2\sinh^2(r) - 2\sinh^4(r) \\
&= 1 - 2\sinh^2(r) - 2\sinh^2(r)\sinh^2(r) \\
&= 1 - 2\sinh^2(r)(1 + \sinh^2(r)) \\
&= 1 - 2\sinh^2(r)\cosh^2(r) \\
&= 1 - y^2.
\end{aligned}$$

Com isto, o loop de Wilson para esta situação será dado por

$$W(C) = -2 + 2\cos(2\pi L_r). \quad (3.72)$$

Agora, seja $\sinh(r_c) = 1$, onde r_c é, por definição, um raio crítico. Assim, para $r > r_c$, teremos $g(r) = \sinh^4 r - \sinh^2 r > 0$. Sendo assim, mantendo t e z fixos, a curva definida por $r = cte > r_c$, será do tipo-tempo, pois de (3.59) teremos que $ds^2 = g(r)d\phi^2 > 0$. Se fizermos tal consideração, a existência de tal curva violaria o princípio da causalidade. Considerando que $\sinh r = (e^r - e^{-r})/2$, é fácil mostrar que o raio crítico também pode ser escrito como $r_c = \ln(1 + \sqrt{2})$. Desde que tenhamos um raio $r > \ln(1 + \sqrt{2})$, podemos ver que $L_r^2 = 1 - 2\sinh^2 r - 2\sinh^4 r < 0$. Portanto, quando um vetor for transportado paralelamente sobre um contorno circular com raio fixo $r > \ln(1 + \sqrt{2})$, a transformação de holonomia e o loop de Wilson serão dados por

$$U_{0,2\pi}(C) = I + \frac{\Gamma_\phi}{L_r} \sinh(2\pi L_r) + \frac{\Gamma_\phi^2}{L_r^2} [1 - \cosh(2\pi L_r)] \quad (3.73)$$

e

$$W(C) = -2 + 2\cosh(2\pi L_r). \quad (3.74)$$

Observe que as funções trigonométricas *não são* naturais nessa região. Vamos escrever $L_r^2 = 1 - 2x - 2x^2$, com $x = \sinh^2(r)$. Fazendo $L_r^2 = 0$, obtemos $x = (-1 \pm \sqrt{3})/2$. Vamos escolher valores de $x > 0$. Assim, analisando a região $0 < x < (\sqrt{3} - 1)/2$, temos $L_r^2 > 0$, portanto $L_r \in \mathbb{R}$. Por outro lado, na região $(\sqrt{3} - 1)/2 < x < 1$, onde usamos o fato de que $\sinh(r_c) = 1$, temos que $L_r^2 < 0$. Portanto, $L_r \in \mathbb{C}$. Deste modo, podemos dividir a região $r < \ln(1 + \sqrt{2})$ em duas outras regiões, a saber:

$$0 < r < \operatorname{arcsenh} \left[\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]; \quad (3.75)$$

$$\operatorname{arcsenh} \left[\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] < r < \ln(1 + \sqrt{2}). \quad (3.76)$$

Na região (3.75), a matriz de holonomia (3.68) contém funções trigonométricas naturais (nessa região $L_r \in \mathbb{R}$), enquanto que na região (3.76) temos funções trigonométricas hiperbólicas, pois $L_r \in \mathbb{C}$. Portanto, $U(C)$ e $W(C)$ têm a mesma expressão para regiões onde o raio do círculo, sobre o qual o vetor é transportado paralelamente, é maior que o raio crítico r_c . Para círculos contidos na região $0 < r < r_c$, a transformação de holonomia e o loop de Wilson têm dois tipos de expressões (natural e hiperbólica).

Vamos considerar agora o transporte paralelo de um vetor ao longo da direção radial de r_1 para r_2 , mantendo t , ϕ e z constantes. Considerando (3.63), podemos obter Γ_r , ou seja,

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{f'}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f'}{2h} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mas $f' = 2\sqrt{2}\sinh(r)\cosh(r)$ e $h = \sinh(r)\cosh(r)$. Logo, $-(f'/2h) = -\sqrt{2}$. Desta forma podemos escrever:

$$\Gamma_r = -\sqrt{2}\Gamma' = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Assim, a variável de contorno $U(C)$ para este caso, será dada por

$$U_{r_1, r_2}(C) = \exp\left(\int_{r_1}^{r_2} \Gamma_r dr\right) = I - \Gamma' \sinh(\sqrt{2}\Delta r) - \Gamma'^2 \left[1 - \cosh(\sqrt{2}\Delta r)\right]. \quad (3.78)$$

Tomando as multiplicações das matrizes $\Gamma'^2 = \Gamma' \Gamma'$, podemos obter a forma matricial de (3.78), ou seja,

$$U_{r_1, r_2}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\sqrt{2}\Delta r) & 0 & -\sinh(\sqrt{2}\Delta r) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sinh(\sqrt{2}\Delta r) & 0 & \cosh(\sqrt{2}\Delta r) \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

onde usamos $\Delta r = r_2 - r_1$.

Agora, vamos considerar um segmento representado por uma translação temporal de

t_1 para t_2 , mantendo r , ϕ e z constantes. Pela equação (3.63), teremos

$$\Gamma_t = \sqrt{2} \cdot \Gamma'' = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, depois de alguns cálculos, podemos ver que a variável de contorno $U_{t_1, t_2}(C)$ será

$$U_{t_1, t_2}(C) = I + \Gamma'' \text{sen}(\sqrt{2}\Delta t) + \Gamma''^2 \left[1 - \cos(\sqrt{2}\Delta t) \right], \quad (3.80)$$

com $\Delta t = t_2 - t_1$. Na forma matricial teremos,

$$U_{t_1, t_2}(C) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\Delta t) & \text{sen}(\sqrt{2}\Delta t) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\sqrt{2}\Delta t) & \cos(\sqrt{2}\Delta t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

com $\Delta t = t_2 - t_1$.

Quanto a um segmento representado por uma translação na direção de Oz , de z_1 para z_2 , considerando t , r e ϕ , fixos, podemos ver que a variável de contorno será igual a matriz identidade. Assim,

$$U_{z_1, z_2}(C) = I, \quad (3.82)$$

o que, em gravitação, corresponde ao espaço-tempo plano. Isto significa que qualquer vetor transportado paralelamente ao longo da direção de z , não terá sua direção afetada pelo campo gravitacional.

3.4 Variáveis de contorno no universo de Friedmann-Robertson-Walker.

Nesta seção vamos calcular a transformação de holonomia para o espaço-tempo descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), utilizando o método perturbativo. Em seguida, por meio de uma transformação de coordenadas, mostraremos que é possível recuperar o resultado calculado através do método exato.

A métrica de FRW corresponde a um simples modelo do universo. Nesse modelo de universo, o mesmo é considerado isotrópico e homogêneo. Através de uma escolha conveniente de coordenadas, o elemento de linha que caracteriza tal situação tem a seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)], \quad (3.83)$$

onde $d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$ é a métrica correspondente a um 3-espaco de curvatura constante e independente do tempo, e $a(t)$ é denominado de fator de escala. O fator de escala $a(t)$ está associado com a taxa de expansão ou contração do universo. A geometria do 3-espaco é qualitativamente diferente de acordo com o valor da constante de curvatura k , que pode assumir valores -1 (universo é dito aberto), 0 (universo é dito plano) ou $+1$ (universo é dito fechado). A forma da função $f(\chi)$ depende do valor da constante de curvatura [18],

$$f(\chi) = \begin{cases} \text{sen}(\chi), & \text{se } k = +1 \\ \chi, & \text{se } k = 0 \\ \text{senh}(\chi), & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (3.84)$$

A coordenada χ varia de $0 \rightarrow \infty$, se $k = 0$ ou $k = -1$, e de $0 \rightarrow 2\pi$, se $k = +1$. Utilizando o método variacional para calcular os coeficientes da conexão de Christoffel, obtemos os seguintes termos não-nulos:

$$\begin{cases} \Gamma_{\chi\chi}^t = a\dot{a}, & \Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}f^2, & \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}f^2\text{sen}^2\theta, \\ \Gamma_{t\chi}^\chi = \Gamma_{\chi t}^\chi = \dot{a}/a, & \Gamma_{\theta\theta}^\chi = -ff', & \Gamma_{\phi\phi}^\chi = -ff'\text{sen}^2\theta, \\ \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \dot{a}/a, & \Gamma_{\chi\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\chi}^\theta = \frac{f'}{f}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\text{sen}\theta\cos\theta, \\ \Gamma_{t\phi}^\phi = \Gamma_{\phi t}^\phi = \dot{a}/a, & \Gamma_{\chi\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\chi}^\phi = \frac{f'}{f}, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot\theta, \end{cases} \quad (3.85)$$

onde estamos usando $f' = df/d\chi$ e $\dot{a} = da/dt$.

Vamos considerar somente o caso em que o transporte paralelo seja realizado ao longo de um círculo no plano equatorial ($\theta = \pi/2$), mantendo t e χ fixos ao longo da órbita. Sendo assim, podemos ver através das equações (3.85), que os k 's termos $(U_k)^\mu_\nu$, para efeito de cálculos, devem ser considerados apenas os casos em que $\mu = \phi, \nu = t; \mu = t, \nu = \phi; \mu = \phi, \nu = \chi; \mu = \chi, \nu = \phi$.

Primeiro vamos calcular o termo de primeira ordem $(U_1)^\mu_\nu$. Portanto, tomando a equa-

ção (2.84), obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned}
(U_1)_\phi^\phi &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^\phi d\phi = 0 \\
(U_1)_t^t &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi t}^t d\phi = 0 \\
(U_1)_\chi^\chi &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\chi}^\chi d\phi = 0 \\
(U_1)_t^\phi &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi t}^\phi d\phi = 2\pi\Gamma_{\phi t}^\phi \\
(U_1)_\phi^t &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^t d\phi = 2\pi\Gamma_{\phi\phi}^t \\
(U_1)_\chi^\phi &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\chi}^\phi d\phi = 2\pi\Gamma_{\phi\chi}^\phi \\
(U_1)_\phi^\chi &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^\chi d\phi = 2\pi\Gamma_{\phi\phi}^\chi.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Notem que as componentes Γ' s, de acordo com as equações (3.85), não dependem da coordenada ϕ . Para o termo de segunda ordem $(U_2)_\nu^\mu$, encontramos o seguinte:

$$\begin{aligned}
(U_2)_\phi^\phi &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\phi(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} (\Gamma_{\phi\nu}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\nu) = \\
&= \frac{(2\pi)^2}{2!} (\Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^t + \Gamma_{\phi\chi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\chi + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta) = \frac{(2\pi)^2}{2!} X \\
(U_2)_t^t &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^t(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi t}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} (\Gamma_{\phi\nu}^t \Gamma_{\phi t}^\nu) = \frac{(2\pi)^2}{2!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{\phi t}^\phi \\
(U_2)_\chi^\chi &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\chi(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\chi}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} (\Gamma_{\phi\nu}^\chi \Gamma_{\phi\chi}^\nu) = \frac{(2\pi)^2}{2!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\chi \Gamma_{\phi\chi}^\phi \\
(U_2)_\theta^\theta &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\theta(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\theta}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} (\Gamma_{\phi\nu}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\nu) = \frac{(2\pi)^2}{2!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi \\
(U_2)_t^\phi &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\phi(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi t}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} (\Gamma_{\phi\nu}^\phi \Gamma_{\phi t}^\nu) = 0 \\
(U_2)_\phi^t &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^t(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} (\Gamma_{\phi\nu}^t \Gamma_{\phi\phi}^\nu) = 0 \\
(U_2)_\phi^\chi &= (U_2)_\chi^\phi = 0.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Seguindo o mesmo procedimento, podemos calcular os outros termos de ordem superiores,

que são dados por:

$$\begin{aligned}
(U_3)_\phi^\phi &= (U_3)_t^t = (U_3)_\chi^\chi = 0 \\
(U_3)_t^\phi &= \frac{(2\pi)^3}{3!} X \cdot \Gamma_{\phi t}^\phi \\
(U_3)_\phi^t &= \frac{(2\pi)^3}{3!} X \cdot \Gamma_{\phi\phi}^t \\
(U_3)_\chi^\phi &= \frac{(2\pi)^3}{3!} X \cdot \Gamma_{\phi\chi}^\phi \\
(U_3)_\phi^\chi &= \frac{(2\pi)^3}{3!} X \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\chi;
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
(U_4)_\phi^\phi &= \frac{(2\pi)^4}{4!} X^2 \\
(U_4)_t^t &= \frac{(2\pi)^4}{4!} X \cdot \Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{\phi t}^\phi \\
(U_4)_\chi^\chi &= \frac{(2\pi)^4}{4!} X \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\chi \Gamma_{\phi\chi}^\phi \\
(U_4)_\theta^\theta &= \frac{(2\pi)^4}{4!} X \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi \\
(U_4)_t^\phi &= (U_4)_\phi^t = (U_4)_\phi^\chi = (U_4)_\chi^\phi = 0;
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
(U_5)_\phi^\phi &= (U_5)_t^t = (U_5)_\chi^\chi = 0 \\
(U_5)_t^\phi &= \frac{(2\pi)^5}{5!} X^2 \cdot \Gamma_{\phi t}^\phi \\
(U_5)_\phi^t &= \frac{(2\pi)^5}{5!} X^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^t \\
(U_5)_\chi^\phi &= \frac{(2\pi)^5}{5!} X^2 \cdot \Gamma_{\phi\chi}^\phi \\
(U_5)_\phi^\chi &= \frac{(2\pi)^5}{5!} X^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\chi;
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
(U_6)_\phi^\phi &= \frac{(2\pi)^6}{6!} X^3 \\
(U_6)_t^t &= \frac{(2\pi)^6}{6!} X^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{\phi t}^\phi \\
(U_6)_\chi^\chi &= \frac{(2\pi)^6}{6!} X^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\chi \Gamma_{\phi\chi}^\phi \\
(U_6)_\theta^\theta &= \frac{(2\pi)^6}{6!} X^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi \\
(U_6)_t^\phi &= (U_6)_\phi^t = (U_6)_\phi^\chi = (U_6)_\chi^\phi = 0; \\
\vdots &=
\end{aligned} \tag{3.91}$$

e assim sucessivamente. Aqui estamos usando $X = (\dot{a}f \operatorname{sen} \theta)^2 - \left[(f' \operatorname{sen} \theta)^2 + \cos^2 \theta \right]$. No entanto, com a restrição $\theta = \pi/2$, teremos: $X = (\dot{a}f)^2 - (f')^2$, $\Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{\phi t}^\phi = (\dot{a}f)^2$, $\Gamma_{\phi\phi}^\chi \Gamma_{\phi\chi}^\phi = -(f')^2$ e $\Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi = 0$. Sabemos que a matriz de holonomia $\tilde{U}(C)$, para o caso perturbativo, é escrita como:

$$\tilde{U}(C) = \begin{pmatrix} U_t^t & U_\chi^t & U_\theta^t & U_\phi^t \\ U_t^\chi & U_\chi^\chi & U_\theta^\chi & U_\phi^\chi \\ U_t^\theta & U_\chi^\theta & U_\theta^\theta & U_\phi^\theta \\ U_t^\phi & U_\chi^\phi & U_\theta^\phi & U_\phi^\phi \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

O nosso próximo passo agora é calcular cada elemento da matriz (3.92). Com base nas equações de (3.86) à (3.91), podemos constatar que os únicos elementos de $\tilde{U}(C)$ não-nulos são U_t^t , U_χ^χ , U_θ^θ , U_ϕ^ϕ , U_t^ϕ , U_χ^ϕ , U_θ^ϕ e U_ϕ^χ .

Portanto, tomando a equação (2.84), obtemos

$$\begin{aligned} U_t^t(C) &= \delta_t^t + (U_1)_t^t + (U_2)_t^t + (U_3)_t^t + (U_4)_t^t + \dots \\ U_t^t(C) &= 1 + \frac{(2\pi)^2}{2!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{\phi t}^\phi + \frac{(2\pi)^4}{4!} X \cdot \Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{\phi t}^\phi + \frac{(2\pi)^6}{6!} X^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{\phi t}^\phi + \dots \\ U_t^t(C) &= 1 + \frac{\Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{\phi t}^\phi}{X} \left[\frac{(2\pi\sqrt{X})^2}{2!} + \frac{(2\pi\sqrt{X})^4}{4!} + \frac{(2\pi\sqrt{X})^6}{6!} + \dots \right] \\ U_t^t(C) &= 1 + \frac{\Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{\phi t}^\phi}{X} \left[\cosh(2\pi\sqrt{X}) - 1 \right] \\ U_t^t(C) &= 1 - \frac{(\dot{a}f)^2}{L_f^2} [\cos(2\pi L_f) - 1], \end{aligned} \quad (3.93)$$

onde usamos a notação $L_f^2 = (f')^2 - (\dot{a}f)^2 = -X$ e consideramos $\cosh(2\pi i \sqrt{L_f}) = \cos(2\pi \sqrt{L_f})$.

Seguindo o mesmo procedimento, encontramos os demais elementos:

$$\begin{aligned} U_\chi^\chi(C) &= 1 + \frac{(f')^2}{L_f^2} [\cos(2\pi L_f) - 1], \\ U_\theta^\theta(C) &= 1, \\ U_\phi^\phi(C) &= \cos(2\pi L_f), \\ U_t^\phi(C) &= \frac{\dot{a}}{a L_f} \operatorname{sen}(2\pi L_f), \\ U_\phi^t(C) &= \frac{a \dot{a} f^2}{L_f} \operatorname{sen}(2\pi L_f), \\ U_\chi^\phi(C) &= \frac{f'}{f L_f} \operatorname{sen}(2\pi L_f), \\ U_\phi^\chi(C) &= -\frac{f f'}{L_f} \operatorname{sen}(2\pi L_f). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Portanto, a transformação de holonomia para esta situação será dada por

$$\tilde{U}(C) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\dot{a}f)^2}{L_f^2} [\cos(2\pi L_f) - 1] & 0 & 0 & \frac{a\dot{a}f^2}{L_f} \text{sen}(2\pi L_f) \\ 0 & 1 + \frac{(f')^2}{L_f^2} [\cos(2\pi L_f) - 1] & 0 & -\frac{ff'}{L_f} \text{sen}(2\pi L_f) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\dot{a}}{aL_f} \text{sen}(2\pi L_f) & \frac{f'}{fL_f} \text{sen}(2\pi L_f) & 0 & \cos(2\pi L_f) \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

Da equação (3.95) podemos observar que o traço da matriz $\tilde{U}(C)$ correspondente ao loop de Wilson é

$$\widetilde{W}(C) = -2 + 2\cos(2\pi L_f). \quad (3.96)$$

Consideremos agora as seguintes expressões para o fator de escala $a(t)$:

$$\begin{cases} a(t) = a_0[\cosh(\tau) - 1] & t = a_0[\text{senh}(\tau) - \tau], \quad \text{se } k = -1. \\ a(t) = \tau^2 & t = a^{3/2}\tau^3, \quad \text{se } k = 0. \\ a(t) = a_0[\cos(\tau) - 1] & t = a_0[\text{sen}(\tau) - \tau], \quad \text{se } k = +1. \end{cases} \quad (3.97)$$

onde τ é uma parâmetro qualquer. As equações representam os simples modelos de universos de Friedmann, sendo: aberto, plano e fechado, respectivamente. Lembrando que $L_f = \sqrt{(f')^2 - (\dot{a}f)^2}$ e considerando as expressões (3.84), podemos ver que quando $t \rightarrow 0$, temos como consequência que $\dot{a}(t) \rightarrow 0$. Assim, a transformação de holonomias tende a uma matriz unitária 4×4 e o loop de Wilson tende para um valor correspondente ao vácuo [18]. Portanto, ao aproximarmos da singularidade o loop de Wilson não distingue entre as três geometrias $k = -1$, $k = 0$ e $k = +1$.

Agora vamos considerar a mudança de coordenadas $r = f(\chi)$, com $dr = f'(\chi)d\chi$, onde: para $k = +1$;

$$\begin{aligned} r &= \text{sen}\chi \\ dr &= \cos(\chi)d\chi \\ dr &= \sqrt{1 - \sin^2(\chi)}d\chi \\ \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} &= d\chi. \end{aligned} \quad (3.98)$$

para $k = 0$;

$$\begin{aligned} r &= \chi \\ dr &= d\chi. \end{aligned} \quad (3.99)$$

para $k = -1$;

$$\begin{aligned}
 r &= \sinh(\chi) \\
 dr &= \cosh(\chi)d\chi \\
 dr &= \sqrt{1 + \sinh^2(\chi)}d\chi \\
 \frac{dr}{\sqrt{1 + r^2}} &= d\chi.
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

Assim, sem perdas de generalidade, podemos escrever uma expressão geral

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \tag{3.101}$$

com $f'(\chi) = \sqrt{1 - kr^2}$. Neste caso, a métrica (3.83) ficará

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \tag{3.102}$$

Além disso, podemos ver que $L_f = \sqrt{1 - (k + \dot{a}^2)r^2}$. A métrica (3.102) é uma forma alternativa para o universo de FRW.

Vamos agora considerar um caso particular, onde o universo é estático, ou seja, $\dot{a}(t) = 0$. Com isso, podemos ver que $L_f = \sqrt{1 - kr^2} = f'(\chi)$. Considerando esta situação, a transformação de holonomia (3.95) será agora dada por:

$$\tilde{U}_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi\sqrt{1 - kr^2}) & 0 & -r\sin(2\pi\sqrt{1 - kr^2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\sin(2\pi\sqrt{1 - kr^2}) & 0 & \cos(2\pi\sqrt{1 - kr^2}) \end{pmatrix}. \tag{3.103}$$

A equação (3.103) representa a transformação de holonomia obtida através do método perturbativo, num universo estático.

A fim de mostrar a equivalência entre os dois métodos utilizados (perturbativo e exato) em nosso trabalho, para o caso do universo estático, vamos primeiramente definir as 1-formas:

$$\begin{aligned}
 \omega^0 &= dt, \\
 \omega^1 &= a(t)d\chi, \\
 \omega^2 &= a(t)f(\chi)d\theta, \\
 \omega^3 &= a(t)f(\chi)\sin\theta d\phi.
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Agora seja um campo de tétradas definido por $\omega^a = e_\mu^{(a)} dx^\mu$, onde

$$\begin{cases} e_0^{(0)} &= & 1 \\ e_1^{(1)} &= & a(t) \\ e_2^{(2)} &= & a(t)f(\chi) \\ e_3^{(3)} &= & a(t)f(\chi)\text{sen}\theta. \end{cases} \quad (3.105)$$

Por uma transformação do tipo (2.86), a transformação de holonomia, obtida através do método exato, será

$$U_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi\sqrt{1-kr^2}) & 0 & -\text{sen}(2\pi\sqrt{1-kr^2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{sen}(2\pi\sqrt{1-kr^2}) & 0 & \cos(2\pi\sqrt{1-kr^2}) \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

A matriz (3.106) pode ser interpretada como gerador de rotações, onde o argumento $2\pi\sqrt{1-kr^2}$ representa a deficiência angular, obtida quando comparamos a direção final e inicial de um vetor transportado paralelamente ao longo do caminho fechado. Para o caso do universo plano ($k = 0$), observe que a matriz de holonomia é igual a matriz identidade ($U(C) = I$), o que era esperado. Assim, a transformação de holonomia pode ser usada para estudar a curvatura do universo, desde que a deficiência angular seja dependente apenas da curvatura do espaço-tempo [19].

Capítulo 4

Holonomias e loop de Wilson nos espaços-tempo da corda cósmica com estrutura e de Kottler.

4.1 Introdução.

Nesta seção vamos aplicar o método perturbativo para calcular a holonomia para um espaço-tempo da corda cósmica com estrutura e em seguida para o espaço-tempo descrito pela métrica de Kottler.

4.2 Variáveis de contorno no espaço-tempo da corda cósmica com estrutura.

As transições de fase, ocorridas no universo primitivo, devido à quebra espontânea de simetria, devem ter dado origem a objetos topológicos, dentre os quais temos a corda cósmica. Esta é de particular interesse, uma vez que, devido as flutuações de densidade, esta poderia ser responsável pela formações de galáxias no contexto em que num processo inflacionário estaria presente.

Nesta seção vamos investigar a transformação de holonomia no espaço-tempo gerado por uma corda cósmica infinitamente longa, onde a densidade de energia é constante no interior da corda e nula na região exterior. A densidade de energia dentro da corda é dada por σ , sendo nula fora dela. A métrica de Gott-Hiscock é uma solução das equações de Einstein que descreve o espaço-tempo de uma corda cósmica com estrutura interna não-nula. A métrica que descreve essa situação é dada por:

$$ds_{in}^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho_*^2 \sin^2\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) d\phi^2 - dz^2 \quad (4.1)$$

dentro da corda, e

$$ds_{ext}^2 = dt^2 - dr^2 - \frac{r^2}{v^2} d\phi^2 - dz^2, \quad (4.2)$$

fora dela, onde $\rho_* = 1/\sqrt{8\pi\sigma}$ é o raio “energético” da corda cósmica [42]. A variedade pode ser mapeada por $t \in (-\infty, +\infty)$, $\rho \in [0, \rho_0]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in (-\infty, +\infty)$, cobrindo a região interior à corda e $t \in (-\infty, +\infty)$, $r \in [r_0, +\infty)$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in (-\infty, +\infty)$, cobrindo a região exterior. As coordenadas (t, ϕ, z) são as mesmas em ambas as regiões. Por outro lado, ρ_0 e r_0 denotam o raio da corda cósmica nas coordenadas internas e externas, respectivamente. As condições na superfície da corda cósmica que conectam as duas regiões são dadas pelos parâmetros interior (v, r_0) e exterior (ρ_*, ρ) à corda. A conexão entre as regiões é estabelecida pelas relações:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho_*} &= \epsilon \\ v &= \frac{1}{\cos(\epsilon)} \\ \frac{r_0}{\rho_0} &= \frac{\tan(\epsilon)}{\epsilon} \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde ϵ é a deficiência angular, que é constante.

Das relações (4.3) temos algumas consequências. Para ρ_0 fixo, se tomarmos a densidade de energia dentro da corda tendendo a zero ($\rho_* \rightarrow \infty$), o espaço-tempo de Minkowski é recuperado¹, sendo que nessa condição a deficiência angular tende a zero ($\epsilon \rightarrow 0$). Por outro lado, nesse limite, $v = 1/\cos(\epsilon) \rightarrow 1$, $r_0 = \rho_0$ e assim ambas as métricas (4.1) e (4.2) recuperam o espaço-tempo de Minkowski. De outro modo, se fizermos a contração da

¹Para verificar isso, lembre-se que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1,$$

onde você pode fazer $u = \rho/\rho_*$ na equação (4.1).

corda ($\rho_0 \rightarrow 0$) mantendo o exterior fixo, ou seja, mantendo a deficiência angular constante ($\epsilon = cte$), devemos ter a densidade de energia σ proporcional a quantidade $\epsilon^2 / 8\pi\rho_0^2$. Uma parte finita da corda em 2-dimensões, com $(t = cte, z = cte)$, do espaço-tempo descrito pelas métricas (4.1) e (4.2) é representada na figura 4.1.

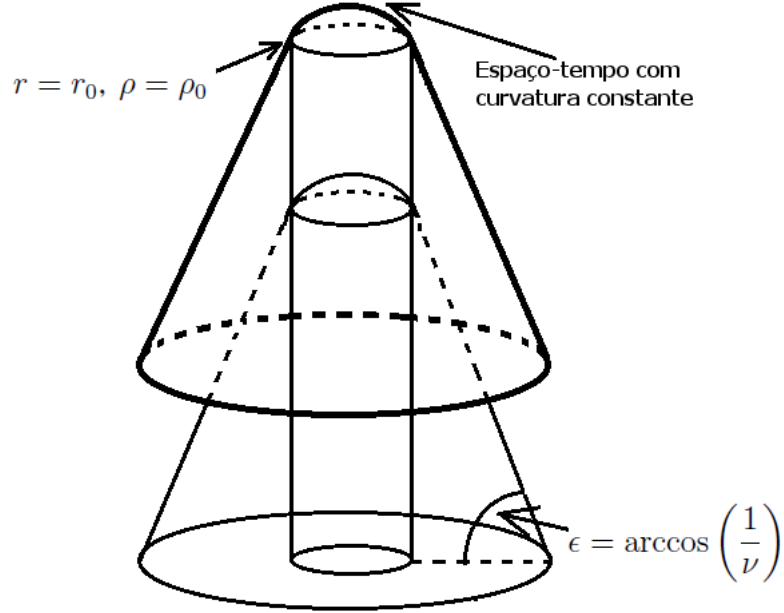


Figura 4.1: Representação em 2-dimensões de uma parte finita da corda cósmica com matéria.

Agora, a fim de calcular a transformação de holonomia através do método perturbativo, vamos aplicar o método variacional para calcular as componentes da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$. Consideremos a lagrangeana dada por

$$L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (4.4)$$

com $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$, sendo λ um parâmetro afim ao longo da curva. Por outro lado, a equação de Euler - Lagrange pode ser escrita como

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (4.5)$$

Para uma dada lagrangeana, a equação (4.5) reduz a uma equação geodésica dada por:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (4.6)$$

Considerando a métrica que descreve o interior da corda, temos pela equação (4.4) que

$$L = \frac{1}{2} \left[\dot{t}^2 - \dot{\rho}^2 - \rho_*^2 \sin^2 \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) \dot{\phi}^2 - \dot{z}^2 \right], \quad (4.7)$$

onde podemos observar que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial L}{\partial z} = 0 & \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = -\dot{z} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \dot{t} & \frac{\partial L}{\partial \rho} = -\rho_* \operatorname{sen}\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \cdot \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \cdot \dot{\phi}^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = -\dot{\rho} & \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -\rho_*^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \cdot \dot{\phi} \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Substituindo os resultados das equações (4.8) na equação (4.5), encontramos as seguintes equações geodésicas:

$$\begin{aligned} \ddot{t} &= 0 \\ \ddot{\rho} - \rho_* \operatorname{sen}\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \dot{\phi} \dot{\phi} &= 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{1}{\rho_*} \cot\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \dot{\phi} \dot{\rho} + \frac{1}{\rho_*} \cot\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \dot{\rho} \dot{\phi} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Comparando as equações (4.9) com a equação (4.6), obtemos as seguintes componentes da conexão de Christoffel não-nula:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} &= \frac{1}{\rho_*} \cot\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} &= -\rho_* \operatorname{sen}\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \cdot \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Analisando os resultados das equações (4.10), podemos concluir que os valores não-nulos para os k' s termos $U_{(k)}^{\beta}{}_{\alpha}$, com $k = 1, 2, 3, 4, \dots$, serão dados quando $\alpha = \rho$ e $\beta = \phi$ ou $\alpha = \phi$ e $\beta = \rho$. Vamos tomar caminhos fechados com t , ρ e z fixos, e com a contribuição apenas de $\phi \in [0, 2\pi]$. Inicialmente vamos calcular o termo de primeira ordem ($k = 1$), referente a expansão (2.84), ou seja, para $k = 1$. Neste caso,

$$\begin{aligned} U_{(1)}^{\rho}{}_{\rho} &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\rho} d\phi = 0 \\ U_{(1)}^{\phi}{}_{\phi} &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} d\phi = 0 \\ U_{(1)}^{\phi}{}_{\rho} &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} d\phi = 2\pi \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \\ U_{(1)}^{\rho}{}_{\phi} &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} d\phi = 2\pi \Gamma_{\phi\phi}^{\rho}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Lembramos que as componentes da conexão Γ , de acordo com as equações (4.10), não dependem da coordenada ϕ , o que nos possibilita retirá-las da integral (veja os dois últimos termos da equação (4.11)).

Para $k = 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
 U_{(2) \rho}^{\rho} &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\rho} d\phi \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\nu} d\phi = \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} d\phi \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} d\phi = \frac{(2\pi)^2}{2!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \\
 U_{(2) \phi}^{\phi} &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\phi} d\phi \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\nu} d\phi = \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} d\phi \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} d\phi = \frac{(2\pi)^2}{2!} \cdot \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \\
 U_{(2) \rho}^{\phi} &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\phi} d\phi \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\nu} d\phi = \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} d\phi \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\rho} d\phi = 0 \\
 U_{(2) \phi}^{\rho} &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\rho} d\phi \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\nu} d\phi = \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} d\phi \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} d\phi = 0.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Para $k = 3$:

$$\begin{aligned}
 U_{(3) \rho}^{\rho} &= \frac{(2\pi)^3}{3!} \cdot \Gamma_{\phi\nu}^{\rho} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} \Gamma_{\phi\rho}^{\beta} = \frac{(2\pi)^3}{3!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\rho}^{\rho} = 0 \\
 U_{(3) \phi}^{\phi} &= \frac{(2\pi)^3}{3!} \cdot \Gamma_{\phi\nu}^{\phi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} \Gamma_{\phi\phi}^{\beta} = \frac{(2\pi)^3}{3!} \cdot \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = 0 \\
 U_{(3) \phi}^{\rho} &= \frac{(2\pi)^3}{3!} \cdot \Gamma_{\phi\nu}^{\rho} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} \Gamma_{\phi\phi}^{\beta} = \frac{(2\pi)^3}{3!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} = \frac{(2\pi)^3}{3!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho}\right)^2 \cdot \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \\
 U_{(3) \rho}^{\phi} &= \frac{(2\pi)^3}{3!} \cdot \Gamma_{\phi\nu}^{\phi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} \Gamma_{\phi\rho}^{\beta} = \frac{(2\pi)^3}{3!} \cdot \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} = \frac{(2\pi)^3}{3!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi}\right)^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Para $k = 4$:

$$\begin{aligned}
 U_{(4) \rho}^{\rho} &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \Gamma_{\phi\nu}^{\rho} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} \Gamma_{\phi\gamma}^{\beta} \Gamma_{\phi\rho}^{\gamma} = \frac{(2\pi)^4}{4!} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} = \frac{(2\pi)^4}{4!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi}\right)^2 \\
 U_{(4) \phi}^{\phi} &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \Gamma_{\phi\nu}^{\phi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} \Gamma_{\phi\gamma}^{\beta} \Gamma_{\phi\phi}^{\gamma} = \frac{(2\pi)^4}{4!} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} = \frac{(2\pi)^4}{4!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho}\right)^2 \\
 U_{(4) \rho}^{\phi} &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \Gamma_{\phi\nu}^{\rho} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} \Gamma_{\phi\gamma}^{\beta} \Gamma_{\phi\phi}^{\gamma} = \frac{(2\pi)^4}{4!} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = 0 \\
 U_{(4) \phi}^{\rho} &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \Gamma_{\phi\nu}^{\phi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} \Gamma_{\phi\gamma}^{\beta} \Gamma_{\phi\rho}^{\gamma} = \frac{(2\pi)^4}{4!} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\rho}^{\rho} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

De maneira semelhante encontramos:

$$\begin{aligned}
 U_{(5) \rho}^{\rho} &= U_{(5) \phi}^{\phi} = 0 \\
 U_{(5) \phi}^{\rho} &= \frac{(2\pi)^5}{5!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho}\right)^3 \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi}\right)^2 \\
 U_{(5) \rho}^{\phi} &= \frac{(2\pi)^5}{5!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi}\right)^3 \cdot \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
 U_{(6) \phi}^{\rho} &= U_{(6) \rho}^{\phi} = 0 \\
 U_{(6) \rho}^{\rho} &= \frac{(2\pi)^6}{6!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi}\right)^3 \\
 U_{(6) \phi}^{\phi} &= \frac{(2\pi)^6}{6!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho}\right)^3.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Generalizando para n valores de k , podemos escrever:

$$U_{(n)}^{\rho}{}_{\rho} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.17)$$

$$U_{(n)}^{\phi}{}_{\phi} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.18)$$

$$U_{(n)}^{\rho}{}_{\phi} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{2}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.19)$$

$$U_{(n)}^{\phi}{}_{\rho} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{2}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.20)$$

Considerando que estamos aplicando o método perturbativo, a matriz que representa a transformação de holonomia será dada por

$$\tilde{U}(C) = \begin{pmatrix} U_t^t & U_t^{\rho} & U_t^{\phi} & U_t^z \\ U^{\rho}_t & U^{\rho}_{\rho} & U^{\rho}_{\phi} & U^{\rho}_z \\ U^{\phi}_t & U^{\phi}_{\rho} & U^{\phi}_{\phi} & U^{\phi}_z \\ U^z_t & U^z_{\rho} & U^z_{\phi} & U^z_z \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

onde cada elemento da matriz (4.21) pode ser escrita na forma

$$U^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} U_{(n)}^{\alpha}{}_{\beta}. \quad (4.22)$$

De posse dos resultados obtidos nas equações de (4.17) à (4.20), podemos verificar que

$$U_t^t = U_z^z = 1 \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} U^{\rho}{}_{\rho} &= 1 + U_{(1)}^{\rho}{}_{\rho} + U_{(2)}^{\rho}{}_{\rho} + U_{(3)}^{\rho}{}_{\rho} + U_{(4)}^{\rho}{}_{\rho} + U_{(5)}^{\rho}{}_{\rho} + \dots \\ U^{\rho}{}_{\rho} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \\ U^{\rho}{}_{\rho} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2\pi \cdot \sqrt{\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi}} \right)^n}{n!} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \\ U^{\rho}{}_{\rho} &= \cos \left[2\pi \cdot \cos \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde na equação (4.24) usamos $\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} = -\cos^2 \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)$, considerando que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$. De modo semelhante,

$$\begin{aligned} U^{\phi}{}_{\phi} &= 1 + U_{(1)}^{\phi}{}_{\phi} + U_{(2)}^{\phi}{}_{\phi} + U_{(3)}^{\phi}{}_{\phi} + U_{(4)}^{\phi}{}_{\phi} + U_{(5)}^{\phi}{}_{\phi} + \dots \\ U^{\phi}{}_{\phi} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \\ U^{\phi}{}_{\phi} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2\pi \cdot \sqrt{\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho}} \right)^n}{n!} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \\ U^{\phi}{}_{\phi} &= \cos \left[2\pi \cdot \cos \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
U^\rho_\phi &= U_{(1)\phi}^\rho + U_{(2)\phi}^\rho + U_{(3)\phi}^\rho + U_{(4)\phi}^\rho + U_{(5)\phi}^\rho + \dots \\
U^\rho_\phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\phi}^\rho\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^\phi\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{2} \\
U^\rho_\phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2\pi\sqrt{\Gamma_{\phi\phi}^\rho\Gamma_{\phi\rho}^\phi}\right)^n}{n!} \cdot \left(\frac{\sqrt{\Gamma_{\phi\phi}^\rho}}{\sqrt{\Gamma_{\phi\rho}^\phi}}\right) \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{2} \\
U^\rho_\phi &= -\rho_* \operatorname{sen}\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \cdot \operatorname{sen}\left[2\pi \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)\right], \tag{4.26}
\end{aligned}$$

onde na equação usamos $\Gamma_{\phi\phi}^\rho/\Gamma_{\phi\rho}^\phi = -[\rho_* \operatorname{sen}(\rho/\rho_*)]^2$ e consideramos que $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$. De modo semelhante podemos verificar que

$$\begin{aligned}
U^\phi_\rho &= U_{(1)\rho}^\phi + U_{(2)\rho}^\phi + U_{(3)\rho}^\phi + U_{(4)\rho}^\phi + U_{(5)\rho}^\phi + \dots \\
U^\phi_\rho &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\phi}^\phi\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^\rho\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{2} \\
U^\phi_\rho &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2\pi\sqrt{\Gamma_{\phi\rho}^\phi\Gamma_{\phi\phi}^\rho}\right)^n}{n!} \cdot \left(\frac{\sqrt{\Gamma_{\phi\phi}^\phi}}{\sqrt{\Gamma_{\phi\rho}^\rho}}\right) \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{2} \\
U^\phi_\rho &= \rho_*^{-1} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \cdot \operatorname{sen}\left[2\pi \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)\right], \tag{4.27}
\end{aligned}$$

onde na equação (4.27) usamos $\Gamma_{\phi\rho}^\phi/\Gamma_{\phi\phi}^\rho = -[\rho_* \operatorname{sen}(\rho/\rho_*)]^{-2}$.

Dessa forma, a transformação de holonomia no *interior* da corda, calculada para contornos fechados com $\phi: 0 \rightarrow 2\pi$, mantendo t , ρ e z fixos, será representada pela matriz:

$$\tilde{U}_{int}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left[2\pi \cdot \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)\right] & -\rho_* \operatorname{sen}\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \cdot \operatorname{sen}\left[2\pi \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)\right] & 0 \\ 0 & \rho_*^{-1} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \cdot \operatorname{sen}\left[2\pi \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)\right] & \cos\left[2\pi \cdot \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)\right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

Portanto, de acordo com a matriz (4.28), o *loop de Wilson* será dado por:

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{int}(C) &= -4 + \operatorname{Tr}(U_{in}) \\
\widetilde{W}_{int}(C) &= -2 + 2 \cos\left[2\pi \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)\right]. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Para calcular a transformação de holonomia na região *exterior* à corda cósmica, devemos considerar a métrica dada pela equação (4.2). Aplicando-se o método variacional, verifica-se que as componentes não-nulas das conexões são:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r}{v^2} \\ \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi &= \frac{1}{r}.\end{aligned}\quad (4.30)$$

De modo semelhante aos procedimentos adotados para encontrar as componentes da matriz de holonomia para a região interior, podemos verificar que os únicos elementos não-nulos da matriz de holonomia serão dados por:

$$U_t^t = U_z^z = 1 \quad (4.31)$$

$$U_r^r = U_\phi^\phi = \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) \quad (4.32)$$

$$U_\phi^r = -\frac{r}{v} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{v}\right) \quad (4.33)$$

$$U_r^\phi = \frac{v}{r} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{v}\right) \quad (4.34)$$

Assim, podemos escrever a transformação de holonomia na região exterior à corda cósmica como:

$$\tilde{U}_{ext} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) & -\frac{r}{v} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{v}\right) & 0 \\ 0 & \frac{v}{r} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{v}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

sendo que o *loop de Wilson* será escrito como:

$$\widetilde{W}_{ext}(C) = -2 + 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right). \quad (4.36)$$

Considerando que na superfície da corda temos $\rho = \rho_0$ e $r = r_0$, as transformações de holonomia na superfície da corda serão representadas por:

$$\tilde{U}_{int}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left[2\pi \cdot \cos\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)\right] & -\rho_* \text{sen}\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right) \cdot \text{sen}\left[2\pi \cos\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)\right] & 0 \\ 0 & \rho_*^{-1} \text{sen}^{-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right) \cdot \text{sen}\left[2\pi \cos\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)\right] & \cos\left[2\pi \cdot \cos\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)\right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

e

$$\tilde{U}_{ext}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) & -\frac{r_0}{v} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{v}\right) & 0 \\ 0 & \frac{v}{r_0} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{v}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Recordemos que pelas equações (4.3), temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho_*} &= \epsilon; \\ v &= \frac{1}{\cos(\epsilon)}; \\ \frac{r_0}{\rho_0} &= \frac{\tan(\epsilon)}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Essas relações nos permitem escrever:

$$\begin{aligned} \rho_* \sin\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right) &= \frac{r_0}{v}; \\ \cos\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right) &= \frac{1}{v}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Assim, observamos que, na região que conecta o interior e o exterior da corda, não é possível distinguir a transformação de holonomia. Portanto, $\tilde{U}_{int}(C) = \tilde{U}_{ext}(C)$, que por consequência teremos $\tilde{W}_{int}(C) = \tilde{W}_{ext}(C)$, como era esperado.

Por uma mudança de variáveis do tipo $U_b^a(x, x') = e_\mu^{(a)}(x) U_\nu^\mu(x, x') e_{(b)}^\nu(x')$, podemos encontrar uma relação entre a transformação de holonomia exata $U(C)$ e perturbativa $\tilde{U}(C)$. Aplicando essa transformação, é possível reescrever a transformação de holonomia (4.37), calculada dentro da corda, como:

$$U_{int}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left[2\pi \cdot \cos\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)\right] & -\text{sen}\left[2\pi \cos\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)\right] & 0 \\ 0 & \text{sen}\left[2\pi \cos\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)\right] & \cos\left[2\pi \cdot \cos\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)\right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Podemos interpretar a matriz (4.41) como um gerador de rotações em torno do eixo z , daí, podemos escrever $U_{int}(C) = \exp\left[-2\pi \cdot i \cos\left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right) J_{12}\right]$. De modo semelhante, podemos ver que fora da corda, a transformação de holonomia será

$$U_{ext}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) & -\text{sen}\left(\frac{2\pi}{v}\right) & 0 \\ 0 & \text{sen}\left(\frac{2\pi}{v}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

que também pode ser pensada como um gerador de rotações em torno do eixo z , sendo que $U_{ext}(C) = \exp\left[-\frac{2\pi}{v} i J_{12}\right]$.

Analisando a transformação de holonomia (4.41), calculada dentro da corda, observa-se que, considerando uma densidade de energia tendendo a zero ($\sigma \rightarrow 0$), para um dado raio fixo ρ_0 , o que equivale a $\rho_* \rightarrow \infty$, a matriz de holonomia recai numa matriz unitária $U_{int}(C) = I$, e o loop de Wilson será $W_{int}(C) = 0$. Sendo assim, para uma corda com densidade de energia tendendo a zero, o espaço-tempo tende ao espaço-tempo de Minkowski. Nessas condições, qualquer vetor transportado paralelamente ao longo do círculo centrado na origem, não terá sua direção afetada em relação a direção do vetor original.

Em um trabalho recente, Rothman *et al* [43], estudaram algumas curvas particulares onde um vetor V^μ é transportado paralelamente na geometria de Reissner-Nordström e observaram uma propriedade interessante do transporte paralelo, que denotaram como banda de invariância de holonomia. A banda de invariância ocorre para um dado raio crítico em que a holonomia é trivial. Podemos investigar de maneira semelhante, como proposto por Rothman *et al.*, o caso da corda cósmica com estrutura. A banda de invariância ocorre quando a matriz de holonomia é igual a matriz identidade $U(C) = I$. Neste caso, observando a matriz de holonomia obtida dentro da corda cósmica (4.41), temos que a mesma será unitária quando

$$\frac{\rho_0}{\rho_*} = 2\pi n, \quad (4.43)$$

onde n é um número inteiro. Mas sabemos que a densidade de energia é definida como $\rho_* = 1/\sqrt{8\pi\sigma}$ [42]. Neste caso,

$$\sigma = \frac{\pi n^2}{2\rho_0^2}. \quad (4.44)$$

Isso sugere que para um certo raio ρ_0 , existe um valor especial da densidade de energia σ , dado por (4.44), no qual a transformação de holonomia será trivial. Assim, quando um vetor transportado paralelamente dentro da corda, ao longo de um círculo centrado na origem, com raio fixo ρ_0 , não será sensível à fonte gravitacional, uma vez que sua direção não será afetada, pois $U(C) = I$.

4.3 Variáveis de contorno no espaço-tempo de Kottler.

Nesta seção, vamos estudar a transformação de holonomia para uma métrica que é solução exterior da equação de Einstein no vácuo, para um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico, com uma constante cosmológica Λ . Essa métrica é dada por [44]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2], \quad (4.45)$$

onde G é a constante universal de Newton e M é a massa da fonte. A solução de Schwarzschild é um caso particular da equação (4.45), quando $\Lambda = 0$. Na presença de uma constante cosmológica positiva $\Lambda > 0$, recebe o nome de métrica de **Schwarzschild-de Sitter** ou métrica de **Kottler**. Quando $\Lambda < 0$, é chamada de Schwarzschild-anti de Sitter.

Vamos considerar o caso em que a constante cosmológica é positiva $\Lambda > 0$. A fim de simplificar os cálculos, vamos reescrever a equação (4.45) como

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2], \quad (4.46)$$

onde,

$$\begin{aligned} A(r) &= \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) \\ B(r) &= \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para esta situação, os coeficientes da conexão de Christoffel não-nulos são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{A'}{2A} & \Gamma_{tt}^r &= \frac{A'}{2B} & \Gamma_{rr}^r &= \frac{B'}{2B} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{B} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r\sin^2\theta}{B} & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta\cos\theta & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde estamos fazendo $A' = dA/dr$ e $B' = dB/dr$.

Vamos tomar órbitas circulares, centradas na origem e com t , r e θ fixos, variando ϕ de $0 \rightarrow 2\pi$. Primeiramente, observemos que a matriz de holonomia será representada por:

$$\tilde{U}(C) = \begin{pmatrix} U_t^t & U_r^t & U_\theta^t & U_\phi^t \\ U_t^r & U_r^r & U_\theta^r & U_\phi^r \\ U_t^\theta & U_r^\theta & U_\theta^\theta & U_\phi^\theta \\ U_t^\phi & U_r^\phi & U_\theta^\phi & U_\phi^\phi \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

onde cada elemento de (4.49) é dado através da expressão

$$U^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + \sum_{k=1}^{\infty} U_{(k)}^\alpha_\beta, \quad (4.50)$$

sendo que,

$$\begin{aligned} U_{(1)}^\alpha_\beta &= \oint_C \Gamma_{\phi\beta}^\alpha(\phi_1) d\phi_1 \\ U_{(2)}^\alpha_\beta &= \frac{1}{2!} \oint_C \Gamma_{\phi\mu}^\alpha(\phi_1) d\phi_1 \oint_C \Gamma_{\phi\beta}^\mu(\phi_2) d\phi_2 \\ U_{(2)}^\alpha_\beta &= \frac{1}{3!} \oint_C \Gamma_{\phi\mu}^\alpha(\phi_1) d\phi_1 \oint_C \Gamma_{\phi\sigma}^\mu(\phi_2) d\phi_2 \oint_C \Gamma_{\phi\beta}^\sigma(\phi_3) d\phi_3 \\ &\vdots = \dots \end{aligned} \quad (4.51)$$

Analisando as expressões (4.48), percebe-se que os elementos não-nulos de U^α_β ocorrerão para os índices: $\alpha = \phi, \beta = r, \theta$; $\alpha = r, \theta, \beta = \phi$; $\alpha = \theta, \beta = r$; e $\alpha = r, \beta = \theta$. Portanto, usando as equações (4.50) e (4.51), depois de alguns cálculos, encontramos

$$\begin{aligned} U^r_r &= 1 - \frac{\text{sen}^2(\theta_0)}{B(r_0)} \frac{1}{X} \left[1 - \cos(2\pi\sqrt{X}) \right], \\ U^\theta_\theta &= 1 - \cos^2(\theta_0) \frac{1}{X} \left[1 - \cos(2\pi\sqrt{X}) \right], \\ U^\phi_\phi &= \cos(2\pi\sqrt{X}), \\ U^r_\theta &= -r_0 \frac{\text{sen}(2\theta_0)}{2B(r_0)} \frac{1}{X} \left[1 - \cos(2\pi\sqrt{X}) \right], \\ U^\theta_r &= -\frac{\text{sen}(2\theta_0)}{2r_0} \frac{1}{X} \left[1 - \cos(2\pi\sqrt{X}) \right], \\ U^r_\phi &= -\frac{r_0 \text{sen}^2(\theta_0)}{B(r_0)} \frac{1}{\sqrt{X}} \text{sen}(2\pi\sqrt{X}), \\ U^\phi_r &= \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{X}} \text{sen}(2\pi\sqrt{X}), \\ U^\theta_\phi &= -\frac{\text{sen}(2\theta_0)}{2} \frac{1}{\sqrt{X}} \text{sen}(2\pi\sqrt{X}), \\ U^\phi_\theta &= \frac{\cos(\theta_0)}{\text{sen}(\theta_0)} \frac{1}{\sqrt{X}} \text{sen}(2\pi\sqrt{X}). \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde estamos usando $X = \left[\frac{\text{sen}^2(\theta_0)}{B(r_0)} + \cos^2(\theta_0) \right]$. Considerando apenas órbitas no plano equatorial ($\theta_0 = \pi/2$), podemos escrever a transformação de holonomia como:

$$\tilde{U}_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi\sqrt{B^{-1}}) & 0 & -\frac{r_0}{B} \frac{1}{\sqrt{B^{-1}}} \text{sen}(2\pi\sqrt{B^{-1}}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{B^{-1}}} \text{sen}(2\pi\sqrt{B^{-1}}) & 0 & \cos(2\pi\sqrt{B^{-1}}) \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Nesse caso, o loop de Wilson será expresso por

$$\widetilde{W}(C) = -2 + 2 \cos \left[2\pi \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\Lambda}{3} r_0^2\right)} \right], \quad (4.54)$$

onde $B^{-1}(r) = 1 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\Lambda}{3} r_0^2$.

Para um sistema de coordenadas definido por $(x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi)$, podemos definir as 1-formas $\omega^0 = \sqrt{A(r)}dt$, $\omega^1 = \sqrt{B(r)}dr$, $\omega^2 = r d\theta$ e $\omega^3 = r \sin\theta d\phi$. Assim, sabendo que $\omega^a = e_\mu^{(a)} dx^\mu$, podemos escolher um campo de tétradas tal que:

$$e_\mu^{(a)} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin\theta \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Portanto, através da relação $U_b^a(x, x') = e_\mu^{(a)}(x) U_\nu^\mu(x, x') e_\nu^{(b)}(x')$, em conjunto com as equações (4.55), podemos obter a expressão exata da transformação de holonomia (4.53) para essa situação, cujo resultado é o seguinte:

$$U_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\Lambda}{3} r_0^2}\right) & 0 & \sin\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\Lambda}{3} r_0^2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\Lambda}{3} r_0^2}\right) & 0 & \cos\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\Lambda}{3} r_0^2}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Se tomarmos um espaço-tempo de Schwarzschild, com $\Lambda = 0$, podemos ver que para $r \rightarrow 0$, a transformação de holonomia (4.56) será trivial, e portanto nessa região o espaço-tempo será Minkowskiano. Para um espaço-tempo de de Sitter, tomando $M = 0$, com $\Lambda > 0$, a matriz $U_{0,2\pi}(C)$ não será trivial, o que implica que o espaço-tempo não será assintoticamente plano em $r \rightarrow \infty$, como era esperado.

Consideremos, agora, segmentos correspondentes ao deslocamento de θ_1 para θ_2 , mantendo r , t e ϕ constantes. Para este caso, a variável de contorno, obtida através do método perturbativo, é dada por

$$\tilde{U}_{\theta_1, \theta_2}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Delta\theta\sqrt{B^{-1}}) & -r_0\sqrt{B^{-1}}\sin(\Delta\theta\sqrt{B^{-1}}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0}\frac{1}{\sqrt{B^{-1}}}\sin(\Delta\theta\sqrt{B^{-1}}) & \cos(\Delta\theta\sqrt{B^{-1}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

A forma exata de (4.57), tomada no plano meridiano, é

$$U_{\theta_1, \theta_2}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\Delta\theta\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\Lambda}{3}r_0^2}\right) & -\text{sen}\left(\Delta\theta\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\Lambda}{3}r_0^2}\right) & 0 \\ 0 & \text{sen}\left(\Delta\theta\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\Lambda}{3}r_0^2}\right) & \cos\left(\Delta\theta\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\Lambda}{3}r_0^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

onde estamos usando $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Por último, vamos tomar um segmento correspondente a uma translação temporal entre t_1 e t_2 . Nesse caso, a variável de contorno, na forma perturbativa, é

$$\tilde{U}_{t_1, t_2}(C) = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\Delta t A'}{2\sqrt{AB}}\right) & \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \sinh\left(\frac{\Delta t A'}{2\sqrt{AB}}\right) & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \sinh\left(\frac{\Delta t A'}{2\sqrt{AB}}\right) & \cosh\left(\frac{\Delta t A'}{2\sqrt{AB}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

onde usamos $\Delta t = t_2 - t_1$. A forma exata da variável de contorno, para este caso, é dada por

$$U_{t_1, t_2}(C) = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\Delta t A'}{2\sqrt{AB}}\right) & \sinh\left(\frac{\Delta t A'}{2\sqrt{AB}}\right) & 0 & 0 \\ \sinh\left(\frac{\Delta t A'}{2\sqrt{AB}}\right) & \cosh\left(\frac{\Delta t A'}{2\sqrt{AB}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Veja que das equações (4.47), temos que $B = A^{-1}$. Assim, podemos escrever (4.60) como

$$U_{t_1, t_2}(C) = \begin{pmatrix} \cosh\left[\Delta t \left(\frac{GM}{r_0^2} - \frac{\Lambda r_0}{3}\right)\right] & \sinh\left[\Delta t \left(\frac{GM}{r_0^2} - \frac{\Lambda r_0}{3}\right)\right] & 0 & 0 \\ \sinh\left[\Delta t \left(\frac{GM}{r_0^2} - \frac{\Lambda r_0}{3}\right)\right] & \cosh\left[\Delta t \left(\frac{GM}{r_0^2} - \frac{\Lambda r_0}{3}\right)\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

onde usamos $A' = \frac{2GM}{r^2} - \frac{2\Lambda r}{3}$. Portanto, para uma translação temporal entre t_1 e t_2 , temos a seguinte expressão para a variável de contorno: $U_{t_1, t_2}(C) = \exp[(-i\frac{A'\Delta t}{2})J_{14}]$, onde J_{14} é um gerador de boosts na direção do eixo z .

Capítulo 5

Cálculo da variável de contorno no espaço-tempo de wormholes.

5.1 Introdução.

Nesta seção iremos aplicar o formalismo de variáveis de contorno para um espaço-tempo caracterizado por um wormhole (Buraco de minhocas) para uma função forma arbitrária $r(\rho)$ e em seguida analisaremos os casos particulares de $r(\rho)$. Além dessas classes de wormholes, investigaremos, também, o wormhole idealizado por Morris e Thorne. O método utilizado será o perturbativo.

5.2 Variáveis de contorno no espaço-tempo de wormhole.

Recentemente, os wormholes têm sido alvo de investigações, norteados por sua possível empregabilidade em resolver conhecidos problemas da física e/ou previsões de novos efeitos observáveis. Os wormholes são mudanças topológicas que conectam duas regiões do espaço-tempo através do que chamamos de garganta do wormhole.

Nesta seção vamos considerar um simples modelo de wormholes, onde assumiremos que a “garganta” do wormhole é muito curta, e que a curvatura na região fora da “boca” do wormhole seja relativamente fraca. Uma maneira de idealizar tal modelo é: considerar duas cópias do espaço-tempo de Minkowski, $\mathcal{M}_+$ e $\mathcal{M}_-$, com coordenadas esféricas

$(t, r_{\pm}, \theta_{\pm}, \phi_{\pm})$, sendo que os $\mathcal{M}_+$ e $\mathcal{M}_-$ compartilham o mesmo tempo coordenada t ; de cada cópia, remover uma região esférica de raio $r_{\pm} < a$, onde a é o raio da esfera; e então, identificar as fronteiras dessas regiões com $(t, r_+, \theta_+, \phi_+) \leftrightarrow (t, r_-, \theta_-, \phi_-)$. Tal geometria idealizada pode ser descrita pela seguinte métrica [45]:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - r^2(\rho)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.1)$$

onde $|\rho|$ é a distância própria, com $-\infty < \rho < +\infty$ e $r(\rho)$ é a função forma, que caracteriza cada tipo de wormhole. Da equação (5.1), podemos escrever

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - r^2(\rho)d\theta^2 - r^2(\rho)\sin^2(\theta)d\phi^2. \quad (5.2)$$

Antes de tudo, vamos primeiro aplicar o método variacional para calcular os respectivos coeficientes da conexão de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$.

Considere a lagrangeana $L(\dot{x}^\mu, x^\mu) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ como função das variáveis independentes $\dot{x}^\mu$ e x^μ , onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, com $x^0 = t$, $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$. Sendo assim, com respeito ao espaço-tempo dado pela métrica (5.2), a lagrangeana pode ser escrita como

$$\begin{aligned} L(\dot{x}^\mu, x) &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\ L(\dot{x}^\mu, x) &= \frac{1}{2}\left[\dot{t}^2 - \dot{\rho}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right], \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$, sendo λ um parâmetro afim ao longo da curva parametrizada. Por outro lado, a equação de Euler - Lagrange é dada por

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (5.4)$$

que para uma dada lagrangeana, reduz a uma equação geodésica dada por:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (5.5)$$

Considerando a lagrangeana (5.3), a diferenciação parcial nos fornecerá

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} &= 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} &= t, \\
\frac{\partial L}{\partial \rho} &= -r \cdot r' \dot{\theta}^2 - r \cdot r' \cdot \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= -\dot{\rho}, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= -r^2 \dot{\phi} \text{sen}^2 \theta, \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -r^2 \dot{\phi}^2 \text{sen} \theta \cos \theta, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= -r^2 \dot{\theta},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

onde usamos $r' = \frac{dr}{d\rho}$. Substituindo os resultados das equações (5.6) na equação (5.4), encontramos as seguintes equações geodésicas:

$$\begin{aligned}
\ddot{t} &= 0 \\
\ddot{\rho} - r \cdot r' \dot{\theta} \dot{\theta} - r \cdot r' \cdot \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta &= 0 \\
\ddot{\theta} + \frac{r'}{r} \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \frac{r'}{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\rho} - \dot{\phi}^2 \text{sen} \theta \cos \theta &= 0 \\
\ddot{\phi} + 2 \cdot \frac{r'}{r} \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\phi} + 2 \cdot \dot{\theta} \dot{\phi} \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Comparando as equações (5.7) com a equação (5.5), obtemos os seguintes coeficientes não-nulos da conexão:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\theta\theta}^{\rho} &= -r \cdot r' \\
\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} &= -r \cdot r' \text{sen}^2 \theta \\
\Gamma_{\rho\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta\rho}^{\theta} &= \frac{r'}{r} \\
\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\text{sen} \theta \cos \theta \\
\Gamma_{\rho\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} &= \frac{r'}{r} \\
\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Vamos calcular a transformação de holonomia tomando órbitas circulares com $\phi \in [0, 2\pi]$, e com os valores de θ , t e ρ fixos, ou seja $d\theta = dt = d\rho = 0$. Analisando os resultados expressos nas equações (5.8), podemos concluir que os valores não-nulos para as quantidades $U_{(k)}^{\mu}{}_{\nu}$, com $k = 1, 2, 3, \dots$, serão dados quando $\mu = \phi$ e $\nu = \rho, \theta$ e $\mu = \rho, \theta$ e $\nu = \phi$.

Além disso, devemos lembrar que os coeficientes da conexão não dependem de ϕ . Dessa forma, usando os resultados das equações (5.8), temos para o termo de primeira ordem, ou seja, para $k = 1$:

$$\begin{aligned}
U_{(1)}^\phi{}_\phi &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^\phi(\phi_1) d\phi_1 = 0 \\
U_{(1)}^\rho{}_\rho &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^\rho(\phi_1) d\phi_1 = 0 \\
U_{(1)}^\theta{}_\theta &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\theta}^\theta(\phi_1) d\phi_1 = 0 \\
U_{(1)}^\phi{}_\rho &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^\phi(\phi_1) d\phi_1 = 2\pi \Gamma_{\phi\rho}^\phi \\
U_{(1)}^\rho{}_\phi &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^\rho(\phi_1) d\phi_1 = 2\pi \Gamma_{\phi\phi}^\rho \\
U_{(1)}^\phi{}_\theta &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\theta}^\phi(\phi_1) d\phi_1 = 2\pi \Gamma_{\phi\theta}^\phi \\
U_{(1)}^\theta{}_\phi &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^\theta(\phi_1) d\phi_1 = 2\pi \Gamma_{\phi\phi}^\theta \\
U_{(1)}^\theta{}_\rho &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^\theta(\phi_1) d\phi_1 = 0 \\
U_{(1)}^\rho{}_\theta &= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\theta}^\rho(\phi_1) d\phi_1 = 0.
\end{aligned}$$

Para $k = 2$:

$$\begin{aligned}
U_{(2)}^\phi{}_\phi &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\phi(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \\
&= \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^t + \Gamma_{\phi\rho}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\rho + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi \right) = \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\rho + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta \right) \\
U_{(2)}^\rho{}_\rho &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\rho(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi \\
U_{(2)}^\theta{}_\theta &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\theta(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\theta}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi \\
U_{(2)}^\phi{}_\rho &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\phi(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^\phi \Gamma_{\phi\rho}^\rho + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\rho}^\theta \right) = 0 \\
U_{(2)}^\rho{}_\phi &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\rho(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\phi}^\phi \right) = 0 \\
U_{(2)}^\phi{}_\theta &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\phi(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\theta}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^\phi \Gamma_{\phi\theta}^\rho + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\theta}^\theta \right) = 0 \\
U_{(2)}^\theta{}_\phi &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\theta(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^\phi \right) = 0 \\
U_{(2)}^\rho{}_\theta &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\rho(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\theta}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\theta}^\phi \\
U_{(2)}^\theta{}_\rho &= \frac{1}{2!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^\theta(\phi_1) d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^\nu(\phi_2) d\phi_2 = \frac{(2\pi)^2}{2!} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\phi\rho}^\phi
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Para $k = 3$:

$$\begin{aligned}
U_{(3)}^{\phi}{}_{\phi} &= \frac{1}{3!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\phi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} d\phi_2 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\beta} d\phi_3 = \frac{(2\pi)^3}{3!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} \right) = 0 \\
U_{(3)}^{\rho}{}_{\rho} &= \frac{1}{3!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\rho} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} d\phi_2 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\beta} d\phi_3 = \frac{(2\pi)^3}{3!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\rho}^{\rho} + \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\rho}^{\theta} \right) = 0 \\
U_{(3)}^{\theta}{}_{\theta} &= \frac{1}{3!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\theta} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} d\phi_2 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\theta}^{\beta} d\phi_3 = \frac{(2\pi)^3}{3!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\theta}^{\rho} + \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} \right) = 0 \\
U_{(3)}^{\phi}{}_{\rho} &= \frac{1}{3!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\phi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} d\phi_2 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\beta} d\phi_3 = \frac{(2\pi)^3}{3!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right) \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \\
U_{(3)}^{\rho}{}_{\phi} &= \frac{1}{3!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\rho} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} d\phi_2 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\beta} d\phi_3 = \frac{(2\pi)^3}{3!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right) \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \\
U_{(3)}^{\phi}{}_{\theta} &= \frac{1}{3!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\phi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} d\phi_2 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\theta}^{\beta} d\phi_3 = \frac{(2\pi)^3}{3!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right) \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \\
U_{(3)}^{\theta}{}_{\phi} &= \frac{1}{3!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\theta} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} d\phi_2 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\phi}^{\beta} d\phi_3 = \frac{(2\pi)^3}{3!} \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right) \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \\
U_{(3)}^{\theta}{}_{\rho} &= \frac{1}{3!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\theta} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} d\phi_2 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\rho}^{\beta} d\phi_3 = \frac{(2\pi)^3}{3!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\theta}^{\rho} + \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} \right) = 0 \\
U_{(3)}^{\rho}{}_{\theta} &= \frac{1}{3!} \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\nu}^{\rho} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\beta}^{\nu} d\phi_2 \int_0^{2\pi} \Gamma_{\phi\theta}^{\beta} d\phi_3 = \frac{(2\pi)^3}{3!} \left(\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\theta}^{\rho} + \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} \right) = 0
\end{aligned}$$

De modo análogo, encontramos para $k = 4$:

$$\begin{aligned}
U_{(4)}^{\phi}{}_{\phi} &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right)^2 \\
U_{(4)}^{\rho}{}_{\rho} &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right) \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \\
U_{(4)}^{\theta}{}_{\theta} &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right) \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \\
U_{(4)}^{\theta}{}_{\rho} &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right) \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \\
U_{(4)}^{\rho}{}_{\theta} &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right) \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \\
U_{(4)}^{\phi}{}_{\rho} &= U_{(4)}^{\rho}{}_{\phi} = U_{(4)}^{\phi}{}_{\theta} = U_{(4)}^{\theta}{}_{\phi} = 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Para $k = 5$;

$$\begin{aligned}
U_{(5)}^{\phi}{}_{\phi} &= U_{(5)}^{\rho}{}_{\rho} = U_{(5)}^{\theta}{}_{\theta} = U_{(5)}^{\rho}{}_{\theta} = U_{(5)}^{\theta}{}_{\rho} = 0 \\
U_{(5)}^{\phi}{}_{\rho} &= \frac{(2\pi)^5}{5!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right)^2 \cdot \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \\
U_{(5)}^{\rho}{}_{\phi} &= \frac{(2\pi)^5}{5!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right)^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \\
U_{(5)}^{\phi}{}_{\theta} &= \frac{(2\pi)^5}{5!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right)^2 \cdot \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \\
U_{(5)}^{\theta}{}_{\phi} &= \frac{(2\pi)^5}{5!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right)^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\theta}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Para $k = 6$;

$$\begin{aligned}
U_{(6) \phi}^{\phi} &= \frac{(2\pi)^6}{6!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right)^3 \\
U_{(6) \rho}^{\rho} &= \frac{(2\pi)^6}{6!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right)^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \\
U_{(6) \theta}^{\theta} &= \frac{(2\pi)^6}{6!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right)^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \\
U_{(6) \rho}^{\theta} &= \frac{(2\pi)^6}{6!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right)^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \\
U_{(6) \theta}^{\rho} &= \frac{(2\pi)^6}{6!} \cdot \left(\Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \right)^2 \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \\
U_{(6) \rho}^{\phi} &= U_{(6) \phi}^{\rho} = U_{(6) \theta}^{\phi} = U_{(6) \phi}^{\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Depois de alguns cálculos, podemos tomar a forma geral dos k termos como :

$$U_{(n) \phi}^{\phi} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot (-X)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \tag{5.13}$$

$$U_{(n) \rho}^{\rho} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot (-X)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \tag{5.14}$$

$$U_{(n) \theta}^{\theta} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot (-X)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \tag{5.15}$$

$$U_{(n) \rho}^{\phi} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot (-X)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{2} \tag{5.16}$$

$$U_{(n) \phi}^{\rho} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot (-X)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{2} \tag{5.17}$$

$$U_{(n) \theta}^{\phi} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot (-X)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{2} \tag{5.18}$$

$$U_{(n) \phi}^{\theta} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot (-X)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{2} \tag{5.19}$$

$$U_{(n) \theta}^{\rho} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot (-X)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \tag{5.20}$$

$$U_{(n) \rho}^{\theta} = \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot (-X)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \tag{5.21}$$

onde estamos usando $\Gamma_{\phi\rho}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\rho + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -X$, com $n = 1, 2, 3, \dots$. Sabemos que a transformação de holonomia é dada pela matriz:

$$U = \begin{pmatrix} U_t^t & U_\rho^t & U_\theta^t & U_\phi^t \\ U_t^\rho & U_\rho^\rho & U_\theta^\rho & U_\phi^\rho \\ U_t^\theta & U_\rho^\theta & U_\theta^\theta & U_\phi^\theta \\ U_t^\phi & U_\rho^\phi & U_\theta^\phi & U_\phi^\phi \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

onde cada elemento da matriz (5.22) é dado por:

$$U^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + \sum_{n=1}^{\infty} U_{(n)}^\alpha{}_\beta. \quad (5.23)$$

De acordo com os resultados obtidos nas equações (5.13) à (5.21), podemos verificar que

$$U_t^t = 1 \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} U_\rho^\rho &= 1 + U_{(1)}^\rho{}_\rho + U_{(2)}^\rho{}_\rho + U_{(3)}^\rho{}_\rho + U_{(4)}^\rho{}_\rho + U_{(5)}^\rho{}_\rho + \dots \\ U_\rho^\rho &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot (-X)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \\ U_\rho^\rho &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi \cdot i \cdot \sqrt{X})^n}{n!} \cdot \frac{\Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi}{X} \cdot \frac{[(-1)^n + 1]}{2} \\ U_\rho^\rho &= 1 + \left(\frac{\Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi}{X} \right) \cdot \left[\frac{(2\pi\sqrt{X})^2}{2!} - \frac{(2\pi\sqrt{X})^4}{4!} + \frac{(2\pi\sqrt{X})^6}{6!} - \dots \right] \\ U_\rho^\rho &= 1 + \left(\frac{\Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi}{X} \right) \cdot \left[1 - 1 + \frac{(2\pi\sqrt{X})^2}{2!} - \frac{(2\pi\sqrt{X})^4}{4!} + \frac{(2\pi\sqrt{X})^6}{6!} - \dots \right] \\ U_\rho^\rho &= 1 + \left(\frac{\Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi}{X} \right) \left[1 - \cos(2\pi\sqrt{X}) \right], \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde na equação (5.25) usamos a expansão $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

De modo semelhante encontramos,

$$U_\theta^\theta = 1 + \left(\frac{\Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi}{X} \right) \left[1 - \cos(2\pi\sqrt{X}) \right], \quad (5.26)$$

$$U_\phi^\phi = \cos(2\pi\sqrt{X}), \quad (5.27)$$

$$U_\rho^\phi = \left(\frac{\Gamma_{\phi\rho}^\phi}{\sqrt{X}} \right) \cdot \text{sen}(2\pi\sqrt{X}), \quad (5.28)$$

$$U_\phi^\rho = \left(\frac{\Gamma_{\phi\phi}^\rho}{\sqrt{X}} \right) \cdot \text{sen}(2\pi\sqrt{X}), \quad (5.29)$$

$$U^\phi_\theta = \left(\frac{\Gamma^\phi_{\phi\theta}}{\sqrt{X}} \right) \cdot \text{sen} \left(2\pi\sqrt{X} \right), \quad (5.30)$$

$$U^\theta_\phi = \left(\frac{\Gamma^\theta_{\phi\phi}}{\sqrt{X}} \right) \cdot \text{sen} \left(2\pi\sqrt{X} \right). \quad (5.31)$$

$$U^\rho_\theta = \left(\frac{\Gamma^\rho_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\phi\theta}}{X} \right) \left[1 - \cos \left(2\pi\sqrt{X} \right) \right] \quad (5.32)$$

$$U^\theta_\rho = \left(\frac{\Gamma^\theta_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\phi\rho}}{X} \right) \left[1 - \cos \left(2\pi\sqrt{X} \right) \right] \quad (5.33)$$

Dessa forma, a transformação de holonomia para um *wormhole* definido pelo espaço-tempo (5.1) será representada pela matriz:

$$\tilde{U}_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\Gamma^\rho_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\phi\rho}}{X} \left[1 - \cos \left(2\pi\sqrt{X} \right) \right] & \frac{\Gamma^\rho_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\phi\theta}}{X} \left[1 - \cos \left(2\pi\sqrt{X} \right) \right] & \frac{\Gamma^\rho_{\phi\phi}}{\sqrt{X}} \cdot \text{sen} \left(2\pi\sqrt{X} \right) \\ 0 & \frac{\Gamma^\theta_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\phi\rho}}{X} \left[1 - \cos \left(2\pi\sqrt{X} \right) \right] & 1 + \frac{\Gamma^\theta_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\phi\theta}}{X} \left[1 - \cos \left(2\pi\sqrt{X} \right) \right] & \frac{\Gamma^\theta_{\phi\phi}}{\sqrt{X}} \cdot \text{sen} \left(2\pi\sqrt{X} \right) \\ 0 & \frac{\Gamma^\phi_{\phi\rho}}{\sqrt{X}} \cdot \text{sen} \left(2\pi\sqrt{X} \right) & \frac{\Gamma^\phi_{\phi\theta}}{\sqrt{X}} \cdot \text{sen} \left(2\pi\sqrt{X} \right) & \cos \left(2\pi\sqrt{X} \right) \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Portanto, de acordo com a matriz (5.34), o *loop de Wilson* será dado por:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(C) &= -4 + \text{Tr}(U) \\ \widetilde{W}(C) &= -2 + 2 \cos \left(2\pi\sqrt{X} \right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Mas observe que, considerando órbitas circulares no plano equatorial, ou seja, com $\theta = \frac{\pi}{2}$, as equações (5.8) nos fornece as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\phi\rho} &= -(r' \text{sen} \theta)^2 = -(r')^2 \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= -(\cos \theta)^2 = 0 \\ X &= - \left(\Gamma^\phi_{\phi\rho} \Gamma^\rho_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\phi\theta} \Gamma^\theta_{\phi\phi} \right) = (r')^2 \\ \Gamma^\phi_{\phi\rho} &= \frac{r'}{r} \\ \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} = 0 \\ \Gamma^\rho_{\phi\phi} &= -rr' \text{sen}^2 \theta = -rr' \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\text{sen} \theta \cos \theta = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Sendo assim, podemos reescrever a matriz (5.34) como:

$$\tilde{U}_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi \cdot r') & 0 & -r \operatorname{sen}(2\pi \cdot r') \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r^{-1} \operatorname{sen}(2\pi \cdot r') & 0 & \cos(2\pi \cdot r') \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

e o *loop de Wilson* será,

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(C) &= -4 + \operatorname{Tr}(U) \\ \widetilde{W}(C) &= -2 + 2 \cos(2\pi \cdot r'). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Observe que a transformação de holonomia, além da função forma, depende também da derivada da função forma em relação a coordenada ρ .

Estamos, agora, em condições de analisar a transformação de holonomia para algumas classes de *wormholes*, caracterizadas pela função forma $r(\rho)$. Abaixo, estão os casos os quais serão investigar:

- **1º modelo:**

Nesse modelo a função forma será dada por [47]

$$r(\rho) = \sqrt{a^2 + \rho^2}, \quad (5.39)$$

onde a representa o raio da “garganta” do wormhole.

- **2º modelo:**

Para o segundo modelo tomaremos a função forma como [47]

$$r(\rho) = \rho \coth\left(\frac{\rho}{\tau}\right) - \tau + a, \quad (5.40)$$

onde τ representa a extensão da “garganta” do wormhole. Se fizermos $y = \frac{\rho}{a}$ e $\alpha = \frac{\tau}{a}$, podemos ver que a expressão (5.40) toma a seguinte forma:

$$r(y) = a \left[y \coth\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \alpha + 1 \right]. \quad (5.41)$$

- **3º modelo:**

Neste modelo simples, a função forma $r(\rho)$, será expressa por [45]:

$$r(\rho) = a + |\rho|, \quad (5.42)$$

onde $|\rho|$ é a distância própria, com $-\infty < \rho < +\infty$. Vamos adotar $r_+ = a + \rho$ para a região correspondente à $\rho > 0$ e $r_- = a - \rho$ à $\rho < 0$.

5.2.1 Primeiro modelo de wormhole.

Agora vamos analisar o primeiro modelo, no qual a função forma é dada por:

$$r(\rho) = \sqrt{a^2 + \rho^2}, \quad (5.43)$$

que derivando em relação a ρ teremos a seguinte expressão:

$$\frac{dr}{d\rho} = r'(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}. \quad (5.44)$$

Substituído a equação (5.44) na matriz associada com a transformação de holonomia dada por (5.37), podemos ver que

$$\tilde{U}_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(2\pi \cdot \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}\right) & 0 & -\left(\sqrt{a^2 + \rho^2}\right) \text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{a^2 + \rho^2}\right)^{-1} \text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}\right) & 0 & \cos\left(2\pi \cdot \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$

Portanto, o *loop de Wilson* será

$$\widetilde{W}(C) = -2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}\right). \quad (5.46)$$

Por outro lado, podemos verificar que a forma exata da transformação de holonomia, para este caso, será

$$U_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(2\pi \cdot \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}\right) & 0 & -\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}\right) & 0 & \cos\left(2\pi \cdot \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}\right) \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

de onde podemos ver que o *loop de Wilson* será dado por

$$W(C) = -2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}\right). \quad (5.48)$$

Notemos da equação (5.48), que para distância própria $\rho \rightarrow \infty$, o espaço-tempo será assintoticamente plano, pois a transformação de holonomia será trivial e o loop de Wilson será $W(C) = 0$. Logo, neste caso, qualquer vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada no plano equatorial, não terá sua direção afetada pela presença do wormhole.

5.2.2 Segundo modelo de wormhole.

Para o segundo modelo de wormhole, se adotarmos $y = \rho/a$ e ρ/a , podemos ver que:

$$\begin{aligned} r'(y) &= a \cdot \left[\coth\left(\frac{y}{\alpha}\right) + \frac{y}{\alpha} \cdot \left(1 - \coth^2\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right) \right], \\ r'(y) &= a \cdot \left[\coth\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \frac{y}{\alpha} \cdot \operatorname{senh}^{-2}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde usamos a identidade $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, que nos fornece $\coth^2 x - 1 = \operatorname{senh}^{-2} x$. Assim, considerando o resultado da equação (5.49), a matriz de holonomia (5.37) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\tilde{U}_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi \cdot A) & 0 & -\{a[y \coth(\frac{y}{\alpha}) - \alpha + 1]\} \cdot \operatorname{sen}(2\pi \cdot A) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \{a[y \coth(\frac{y}{\alpha}) - \alpha + 1]\}^{-1} \cdot \operatorname{sen}(2\pi \cdot A) & 0 & \cos(2\pi \cdot A) \end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

com $A = a \cdot \left[\coth\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \frac{y}{\alpha} \cdot \operatorname{senh}^{-2}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \right]$. Assim, o *loop de Wilson* será,

$$\widetilde{W}(C) = -2 + 2 \cos \left\{ 2\pi \cdot a \cdot \left[\coth\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \frac{y}{\alpha} \cdot \operatorname{senh}^{-2}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \right] \right\}. \quad (5.51)$$

Observe que, considerando $\alpha = \tau/a$ com o raio da garganta do wormhole “ a ” fixo, se contraírmos a extensão da garganta de tal modo que $\tau \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$, resulta que $\frac{y}{\alpha} \rightarrow \infty \Rightarrow \coth(y/\alpha) \rightarrow 1$ e $A \rightarrow a$. Dessas considerações, observa-se que a transformação de holonomia será dada por

$$\tilde{U}_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi \cdot a) & 0 & -[a(\frac{\rho}{a} + 1)] \cdot \operatorname{sen}(2\pi \cdot a) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & [a(\frac{\rho}{a} + 1)]^{-1} \cdot \operatorname{sen}(2\pi \cdot a) & 0 & \cos(2\pi \cdot a) \end{pmatrix}, \quad (5.52)$$

e

$$\widetilde{W}(C) = -2 + 2 \cos(2\pi \cdot a). \quad (5.53)$$

Por outro lado, levando em conta que $y = \frac{\rho}{a}$, se contraírmos a “boca” do wormhole de tal modo que $a \rightarrow 0$, então, $y \rightarrow \infty$ e $\alpha \rightarrow \infty$, o que de acordo com a matriz de holonomia

(5.50), nos leva ao seguinte resultado:

$$\tilde{U}_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.54)$$

e o *loop de Wilson* será dado por $W(C) = -2 + 2 = 0$.

5.2.3 Terceiro modelo de wormhole.

Para o terceiro e último modelo de wormhole, tomaremos a derivada da função forma $r_{\pm}$ com respeito a ρ nas respectivas regiões $\rho > 0$ e $\rho < 0$. Assim, $r'_+ = 1$ e $r'_- = -1$. Portanto, considerando a equação (5.37) a matriz de holonomia terá a seguinte forma:

$$\tilde{U}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.55)$$

e

$$\widetilde{W}_+(C) = 0. \quad (5.56)$$

para $\rho > 0$, e

$$\tilde{U}_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

e

$$\widetilde{W}_-(C) = 0. \quad (5.58)$$

para a região em que $\rho < 0$. Com isto, podemos inferir que em ambos as regiões o espaço-tempo será Minkowskiano.

5.3 Variáveis de contorno para o wormhole de Morris-Thorne.

Nesta seção, o espaço-tempo de nosso interesse corresponde ao o wormhole Lorentziano, idealizado por Morris e Thorne, que é definido através da especificação de duas funções arbitrárias $b(r)$ e $\phi(r)$. Esse espaço-tempo é caracterizado, em sua versão geral, esfericamente simétrica e estática, por:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.59)$$

A função $b(r)$ é a função forma e $\phi(r)$ é chamada de função *redshift*, associada com o redshift gravitacional. A coordenada r varia de um mínimo r_0 , correspondente a garganta do wormhole, até um máximo a , correspondente a boca do wormhole. Para simplificar o cálculo das variáveis de contorno, vamos reescrever a equação (5.59) como

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad (5.60)$$

onde estamos fazendo $A(r) = \exp(2\phi(r))$ e $B(r) = (1 - b(r)/r)^{-1}$.

Tomando círculos no plano equatorial, com $\theta = \pi/2$ e t, r fixos, depois de alguns cálculos, semelhante ao usado no espaço-tempo de Kottler, a transformação de holonomia será dada por

$$\tilde{U}_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}\right) & 0 & -r_0\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}\sin\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}}\sin\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}\right) & 0 & \cos\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Nesse caso, o loop de Wilson será

$$\widetilde{W}(C) = -2 + 2\cos\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}\right). \quad (5.62)$$

A transformação de holonomia em sua forma exata será

$$U_{0,2\pi}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}\right) & 0 & -\sin\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}\right) & 0 & \cos\left(2\pi\sqrt{1 - \frac{b}{r_0}}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Como já foi colocado acima, o mínimo da coordenada r corresponde ao raio da garganta do wormhole, ou seja, $r = r_{\min}$. Por outro lado, o máximo de r é o raio da boca do wormhole, onde $r_{\max} = a$. Veja que, quando $r \rightarrow r_{\min}$, temos que $b(r_{\min}) = r_{\min}$. Nesse cenário, a transformação de holonomia em sua forma exata seria trivial. Portanto, um vetor transportado paralelamente ao longo de um círculo no plano equatorial próximo da região $r \rightarrow r_{\min}$, o mesmo não terá a direção afetada em relação ao vetor original.

Tomemos agora segmentos correspondentes ao deslocamento de θ_1 até θ_2 , mantendo t , r e ϕ constantes. Nesse caso, a variável de contorno será dada por

$$\tilde{U}_{\theta_1, \theta_2}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\Delta\theta\sqrt{1-\frac{b}{r_0}}\right) & 0 & -r_0\sqrt{1-\frac{b}{r_0}}\sin\left(\Delta\theta\sqrt{1-\frac{b}{r_0}}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b}{r_0}}}\sin\left(\Delta\theta\sqrt{1-\frac{b}{r_0}}\right) & 0 & \cos\left(\Delta\theta\sqrt{1-\frac{b}{r_0}}\right) \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

com $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$. Em sua forma exata, a matriz (5.64) será dada por

$$U_{\theta_1, \theta_2}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\Delta\theta\sqrt{1-\frac{b}{r_0}}\right) & 0 & -\sin\left(\Delta\theta\sqrt{1-\frac{b}{r_0}}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\left(\Delta\theta\sqrt{1-\frac{b}{r_0}}\right) & 0 & \cos\left(\Delta\theta\sqrt{1-\frac{b}{r_0}}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Observando a matriz (5.65), novamente temos que em $r_{\min}$ a presença do wormhole não será sensível ao vetor quando transportado paralelamente ao longo do segmento de θ_1 até θ_2 .

Capítulo 6

Conclusões

Calculamos as variáveis de contorno e as transformações de holonomias para diferentes curvas, no plano perpendicular ao cilindro de matéria, sem rotação e na aproximação de campo fraco. Estas quantidades dependem do potencial Newtoniano associado a fonte considerada. Nos casos de Gödel e Friedmann-Robertson-Walker, os resultados estão diretamente relacionados aos parâmetros que definem estes espaços-tempo.

O cálculo das variáveis de contorno no caso da corda cósmica com estrutura, nos mostram que o resultado obtido para curvas externas a corda, dependem das quantidades que definem a estrutura interna da mesma.

No caso do espaço-tempo de Kottler, existe uma dependência das variáveis de contorno com a massa da fonte e a constante cosmológica. Nos diferentes modelos de wormholes, as variáveis de contorno contém informações sobre a estrutura topológica dos mesmos, que estão expressas nos parâmetros que caracterizam estas estruturas.

É importante salientar que nesta dissertação, usamos dois métodos para o cálculos das variáveis de contorno, a saber, o que podemos chamar de exato e um outro que faz uso da expansão perturbativa. Nos casos em que usamos este último, fizemos uso da indução para obter o resultado como se estivéssemos usando o método exato. No entanto, o loop de Wilson mostra-se uma quantidade invariante em ambos os casos, como era esperado.

O presente trabalho pode ser estendido para outros espaços-tempo, com diferentes topologias, com o objetivo de investigar de que forma a topologia está codificada nas variáveis de contorno.

Referências Bibliográficas

- [1] AHARONOV,Y.; BOHM, D. *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [2] AHARONOV,Y.; BOHM, D. *Phys. Rev.* **123**, 1511 (1962).
- [3] AHARONOV,Y.; BOHM, D. *Phys. Rev.* **125**, 2192 (1962).
- [4] AHARONOV,Y.; BOHM, D. *Phys. Rev.* **130**, 1625 (1963).
- [5] WU, T. T.; YANG, C. N. *Phys. Rev.* **D12**, 3845 (1975).; *Phys. Rev.* **D14**, 437 (1976).
- [6] MANDELSTAM, S. *Ann. Phys. (NY)* **19**, 1 (1965); *Phys. Rev.* **175**, 1580 (1968).
- [7] MANDELSTAM, S. *Ann. Phys. (NY)* **19**, 24 (1962); *Phys. Rev.* **175**, 1604 (1968).
- [8] VORONOV, N. A.; MAKEENKO, Y. M.; *Sov. J. Nucl. Phys.* **36**, 444 (1962).
- [9] YANG, C. N. *Phys. Rev. Lett.* **33**, 445 (1974).
- [10] MENSII, M. I. *Lett. Math.Phys.* **2**, 175 (1978).
- [11] BEZERRA, V. B. Some Remarks on Loop Variables, Holonomy Transformation, and Gravitational Aharonov-Bohm Effect. *Annals of Physics*, **203**, 392-409 (1990).
- [12] BEZERRA, V. B.; Gravitation analogue of the Aharonov-Bohm effect in four and three dimensions. *Phys. Rev.*, **D35**, 2031-2033 (1987).
- [13] BEZERRA, V. B.; LETELIER, P. S. *J. Math. Phys.* **37**, 6271 (1996).
- [14] ASSIS, J. G.; OLIVEIRA, Silvanio B.; BEZERRA, V. B. *Mod. Phys. Lett.* **A15**, 945 (2000).
- [15] ASSIS, J. G.; BEZERRA, V. B.; FURTADO, C. *Loop variables and gravitational Berrys quantum phase in the space-time of a rotating massive body.* arXiv:gr-qc/0307107v1 (2003).

- [16] SHAO, D.; NODA, H; Shao, L.; Shao, C. G. Some Wilson Loops in gravitational metric fields . *International Journal of Modern Physics A*, **19**, 5247-5262 (2003).
- [17] ASSIS, J.G.; FURTADO, C.; BEZERRA, V. B. Loop Variables, Gravitational Aharonov - Bohm Effect and Gravitomagnetism. *Gravitation and Cosmology*, **10**, 295-299 (2004).
- [18] BEZERRA, V. B. Loop Variables in Godel and Friedmann Universes. *Revista Brasileira de Física*, **17**, 521-530, (1986).
- [19] CARVALHO, A. M de M; FURTADO, C. Holonomy transformation in FRW Metric. *General Relativity and Gravitation*, **39**, 1311-1322 (2007).
- [20] CARVALHO, A. M de M; MORAIS, Fernando; FURTADO, C. Loop variables in the geometry of a rotating black. *Classical And Quantum Gravity*, **20**; 2063-2074 (2003).
- [21] MARQUES, Geusa de A. M.; FERNANDES, Sandro G.; BEZERRA, V. B. Gravitational Aharonov-Bohm effect due to weak fields. *J. Math. Phys.*, **47**, 072504 (2006).
- [22] MODANESE, Giovanni. Wilson loops in four-dimensional quantum gravity. *Phys. Rev.*, **D49**, 6534-6542 (1994).
- [23] SOARES, I. Damião; *O Cálculo de Formas Diferenciais e a Equação de Dirac em Espaços Curvos*. v. I, p. 479-546 In: Mário Novello. (Org.). II Escola de Cosmologia e Gravitação. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (1980).
- [24] MIKIO, Nakahara. *Geometry, Topology and Physics* - Graduate Student Series in Physics, Great Britain: 1992.
- [25] ASSIS, José Gomes de. *Fatores de fase geométricos topológicos em gravitação*. 2000. 164 f. Tese (Doutorado em Física)-Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, (2000).
- [26] D'INVERNO, Ray. *Introducing Einstein's relativity*. Oxford: Clarendon Press, (1992).
- [27] FOSTER, James; NIGHTINGALE, David. *A Short Course in General Relativity*. 3 ed. New York, USA: Springer (2006).

- [28] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: Univesity of Chicago Press (1984).
- [29] CARROLL, Sean M. *Lecture Notes on General Relativity*. arXiv:gr-qc/9712019v1.
- [30] CARTAN, Élie. *Riemannian Geometry in an Orthogonal Frame*. Tradução de Vladislav V. Goldberg. Ed. World Scientific. New Jersey, U.S.A (2001).
- [31] HARTLE, J. B. *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity*. San Francisco, USA: Addison Wesley (2003)
- [32] WEINBERG, Steven. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley and Sons (1972).
- [33] SZEKERES, P. *A Course in Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert Space and Differential Geometry*. New York, USA: Cambridge (2004).
- [34] SCHUTZ, Bernard. F. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge: Cambridge University Press (1981).
- [35] PEEBLES, P. J. E. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton. Princeton University (1993).
- [36] NANDI, K. K.; ALAM, S. M. K. Stringy Wormholes. *General Relativity and Gravitation*, **30**, 1331-1340, (2007).
- [37] ELIE, Cartan. *On Manifolds With an Affine Connection and the Theory of General Relativity* Tradução de Anne Magnon e Abhay Ashtekar. Ed. Bibliopolis. Napoli, Italy (1986).
- [38] SCHUTZ, Bernade F.; *A first course in general relativity*. Cambridge: Cambridge Universidade Press, (1990).
- [39] HAMBER, H. W.; WILLIAMS, R. M. Gravitational Wilson loop and large scale curvature. *Physical Review*, **D76**, 084008 (2007).
- [40] MALDACENA, Juan. Wilson Loops in Large N Field Theories. *Phys. Rev.*, **80**, 4859 (1998).
- [41] CARMELI, Moshe; *Cosmological special relativity*. 2. ed. Singapura: World Scientific (2002).

- [42] KHUSNUTDINOV, N. R.; Bordag M. Ground state energy of a massive scalar field in the background of a cosmic string of finite thickness. *Physical Review*, **D59**, 064017 (1999).
- [43] ROTHMAN, Tony; Ellis, George F. R.; Murugan, Jeff. Holonomy in the Schwarzschild-Droste Geometry. *Classical And Quantum Gravity*, **18**, 1217-1233 (2008).
- [44] LEMOS, José P. S.; LOBO, Francisco, S. N.; OLIVEIRA, Sérgio Q. O. Morris-Thorne wormhole with a cosmological constant. *Physical Review*, **D68**, 064004 (2003).
- [45] BEZERRA, V. B.; *et al.* Vacuum stress-energy tensor of a massive scalar field in a wormhole spacetime. arXiv:1003.0344v2 (2010).
- [46] KHUSNUTDINOV, N. R.; SUSHKOV, S. V. Ground state energy in a wormhole space-time. arXiv:hep-th/0202068v1 (2002).
- [47] KHUSNUTDINOV, N. R. Semiclassical wormholes. arXiv:hep-th/0304176v1 (2003).
- [48] HAWKING, S. W. Wormholes in spacetime. *Phys. Rev.*, **D37**, 904 (1988).
- [49] MORRIS, Michael S.; THORNE, Kip S.; YURTSEVER, Ulvi. Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition *Phys. Rev.*, **61**, 1446 (1988).
- [50] FROLOV, Valey P.; NOVIKOV, Igor D. Physical effects in wormholes and time machines. *Phys. Rev.*, **D42**, 1057 (1990).