

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF



Dissertação de Mestrado

Estudos acerca de duas formulações da cosmologia
Newtoniana: discreta e contínua

Francinaldo Florencio do Nascimento

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Julho 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

Estudos acerca de duas formulações da cosmologia
Newtoniana: discreta e contínua

Francinaldo Florencio do Nascimento

Dissertação de Mestrado apresentada
à Coordenação do Programa de Pós-
Graduação em Física da Universidade
Federal da Paraíba(UFPB) como parte
dos requisitos para a obtenção do título
de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Julho de 2016

N244e Nascimento, Francinaldo Florencio do.
Estudos acerca de duas formulações da cosmologia
Newtoniana: discreta e contínua / Francinaldo Florencio do
Nascimento.- João Pessoa, 2016.
91f. : il.
Orientador: Valdir Barbosa Bezerra
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Cosmologia Newtoniana. 3. Constante
cosmológica. 4. Cosmologia Einsteiniana.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Mestrado


A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 29 de julho de 2016, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **APROVA Francinaldo Florêncio do Nascimento** na defesa de sua dissertação intitulada “*Estudos acerca de duas formulações da cosmologia newtoniana: discreta e contínua*”.

João Pessoa, 29 de julho de 2016

Orientador:


Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
(UFPB)

1º Examinador:


Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
(UFPB)

2º Examinador:

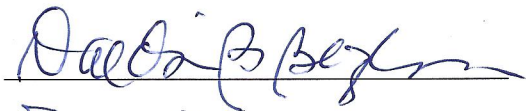

Profa. Dra. Geusa de Araújo Marques
(UFCG)

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno
Francinaldo Florêncio do Nascimento,
candidato ao Título de Mestre em Física na
Área de Concentração Gravitação e
Cosmologia.


1 Aos vinte e nove dias do mês de julho do ano de dois mil e dezesseis, às 10h00, na sala
2 de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de
5 Gravitação e Cosmologia, **Francinaldo Florêncio do Nascimento**. A comissão
6 examinadora composta pelos professores doutores: Valdir Barbosa Bezerra (DF/UFPB),
7 orientador e presidente da banca examinadora, Fábio Leal de Melo Dahia (DF/UFPB) e
8 Geusa de Araújo Marques (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Valdir Barbosa
9 Bezerra comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o
10 candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação
11 intitulado “*Estudø acerca de duas formulações da cosmologia newtoniana: discreta e*
12 *contínua*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que
13 emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da
14 Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para
15 constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, lavrei a presente ata
16 que vai assinada por mim mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João
17 Pessoa, **29 de julho de 2016**.

18

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Orientador - UFPB



Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
UFPB



Profa. Dra. Geusa de Araújo Marques
UFCG



Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário



Agradecimentos

A Deus por me conceder a vida.

À minha família, e em especial, ao meu pai e irmão pelo amor e pela confiança que depositam em mim.

Quero agradecer a todos os professores e a todas as pessoas que de forma direta ou indireta contribuíram para minha formação acadêmica.

Quero agradecer também a existência desse misterioso universo que nos fornece conteúdo para estudarmos. Aos grandes gigantes da Ciência, os quais minhas leituras sobre vida e obras influenciaram-me decididamente a estudar física.

Finalmente, não poderia esquecer de duas pessoas que foram fundamentais para esta conquista:

O professor Valdir Bezerra pela orientação e contribuição no meu aprendizado, pela compreensão e pelas palavras de consolo e de motivação nas horas que mais precisei.

E como diria Carl Sagan: "Diante da vastidão do tempo e da imensidão do universo, é um imenso prazer para mim dividir um planeta e uma época com você"; é com muito carinho e amor que dedico esta frase pra vocês Marias (Maria minha mãe, Maria minha Vó e Maria minha esposa), companheiras de todas as horas.

Resumo

Consideramos a formulação discreta da cosmologia Newtoniana adotada por Ellis e Gibbons, em artigo recente, e fazemos uma generalização para o limite do contínuo. Os resultados são obtidos com o uso das leis de Newton para partículas que interagem gravitacionalmente, que se movem homoteticamente, com suas coordenadas comóveis constituindo-se uma configuração central. Não foi necessário o uso da mecânica dos fluídos, mas tão somente, uma correspondência direta entre as grandezas discretas da formulação de Ellis e Gibbons e suas generalizações para um sistema muito denso, com um número finito de partículas. São apresentadas soluções da equação para o fator de escala, considerando a presença do termo associado à constante cosmológica. É feita uma breve apresentação da cosmologia Einsteiniana e uma comparação com a cosmologia Newtoniana.

Palavras-chaves: cosmologia Newtoniana, constante cosmológica, cosmologia Einsteiniana.

Abstract

We considered the discrete approach to Newtonian cosmology presented by Ellis and Gibbons in a recent paper, and generalize this to the continuum limit. The results are obtained using the Newton's laws for particles interacting gravitationally, which are moving homothetically, with their comoving positions constituting a central configuration. It requires no use of the fluid mechanics, but just a correspondence between the quantities which appear in the approach of Ellis and Gibbons and their generalizations for a system with high density, but with a finite number of particles. The solutions of the equation for the scale factor are presented, taking into account the presence of a term associated with the cosmological constant. We briefly present the relativistic cosmology and compare with Newtonian cosmology.

Keywords: Newtonian cosmology, cosmological constant, relativistic cosmology.

Sumário

1	Introdução	1
2	Cosmologia Newtoniana discreta	5
2.1	Introdução	5
2.2	Teoria básica	6
2.2.1	As Equações Básicas	6
2.2.2	Energia Potencial	8
2.2.3	Simetria das equações e soluções	9
2.2.4	Massa, momento linear e momento angular: conservação	11
2.2.5	Momento de Inercia e Teorema do virial	14
2.3	Soluções cosmológicas	18
2.3.1	Soluções	19
2.3.2	A Equação de Configuração Central	20
2.3.3	A Identidade fundamental	20
2.3.4	A equação de evolução	21
2.3.5	Conservação de Energia	23
2.3.6	A relação do virial	24
2.3.7	Resultado principal	24
2.3.8	Constante cosmológica	25
2.3.9	Soluções cosmológicas particulares	27
2.3.10	Soluções estáticas	27
2.3.11	Soluções com expansão	28
2.3.12	Problemas	29
2.4	A equação de configuração central	30
2.4.1	Algumas propriedades de configurações centrais	30
2.4.2	Funções Potencial	32
2.4.3	Um Princípio variacional para configurações centrais	33
3	Cosmologia Newtoniana contínua	35
3.1	A Equação de Configuração Central	35
3.2	As equações de evolução no tempo.	40
3.3	Constante Cosmológica	42
4	Cosmologia Newtoniana com constante cosmológica	45
4.1	Cosmologia Newtoniana	45
4.1.1	O Modelo Cosmológico	46
4.2	Soluções da Equação Cosmológica	49

4.2.1	Soluções da Equação Cosmológica com $\Lambda = 0$	49
4.2.2	Soluções da Equação Cosmológica para $\Lambda > 0$ e $\Lambda < 0$	51
4.3	Classificação dos Modelos Cosmológicos	55
4.3.1	Caso I: $k = -1$	55
4.3.2	Caso II: $k = 0$	56
4.3.3	Caso III: $k = +1$	56
5	Cosmologias Newtoniana e Einsteiniana: semelhanças e diferenças	58
5.1	Descrição Geométrica	59
5.2	Dinâmica do Universo	62
5.3	Discussão Qualitativa de alguns modelos de universos	67
5.3.1	Universo de Einstein	67
5.3.2	Universo de de Sitter	68
5.3.3	Universo de Friedmann	70
5.3.4	Universo de Lemaître	72
5.3.5	Universo de Eddington	73
5.4	Análise comparativa entre as soluções nos dois diferentes cenários	75
5.4.1	Equações de Friedmann	75
5.4.2	Diferenças Conceituais	76
6	Conclusões	79
	Referências Bibliográficas	80

Capítulo 1

Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (TRG), formulada em 1915, por Einstein, incorpora a ideia de que existe uma velocidade limite (velocidade da luz, no vácuo), bem como o conceito de que a medida da interação gravitacional está associada a curvatura do espaço-tempo. Portanto, ela difere da teoria Newtoniana que descreve os fenômenos gravitacionais, tendo em vista que nesta, não existe a ideia de uma velocidade limite, e a interação gravitacional é manifestada através de uma força, que age à distância, entre os corpos. Apesar destas diferenças, do ponto de vista da aplicação, em algumas situações, elas fornecem os mesmos resultados, em outras, obviamente, não. Como exemplos, de situações em que a aplicação da TRG ou da teoria da gravitação Newtoniana, fornecem os mesmos resultados, podemos citar os casos que envolvem sistemas astronômicos como galáxias ou aglomerados de galáxias, e em menores escalas, objetos estelares, como anãs brancas. Por outro lado, em sistemas estelares super compactos, os resultados obtidos no estudo destes, são bastantes distintos, e o uso da TRG se faz necessário.

De modo geral, os resultados obtidos nas duas teorias são equivalentes, diferindo por uma correção desprezível, quando as velocidades são pequenas quando comparadas à da luz, e o campo gravitacional é fraco.

Em escala cosmológica, a aplicação da TRG na descrição do universo, permitiu encontrar soluções exatas das equações de Einstein, que representavam um universo homogêneo e isotrópico, porém, em expansão, ou seja, que não era estático [1,2]. Esta previsão relativa à expansão cósmica foi confirmada, alguns anos depois, através da observação, feita por Hubble [3], de que as galáxias estão se afastando uma das outras.

Essa previsão da TRG, no contexto da cosmologia, sinaliza que esta deveria ser a teoria que descreveria o universo, sua origem e evolução. Vimos que no contexto da descrição de fenômenos gravitacionais, a TRG e a teoria da gravitação de Newton, fornecem as mesmas descrições, de alguns sistemas. Então, parece natural fazer a seguinte pergunta: Existe alguma situação semelhante no caso da cosmologia? Ou expresso de outra forma: É possível, em que situação, usar a teoria Newtoniana da gravitação para descrever o universo?

Propostas no sentido de responder a essa questão, foram apresentadas por Milne [4] e Milne e McCrea [5]. No primeiro trabalho [4] foi mostrado que, em pequena escala, os resultados obtidos a partir do uso da TRG, são os mesmos obtidos usando a teoria Newtoniana, e portanto, usando o espaço Euclidiano, o tempo e a dinâmica Newtoniana, e a lei da gravitação universal. Nesta abordagem, a expansão do universo foi associada ao movimento das partículas, no espaço euclidiano considerado, de modo que, essas partículas em movimento em um universo Newtoniano, e portanto, estático, iriam corresponder, do ponto de vista da observação, a partículas móveis em um universo Einsteiniano, em expansão. No segundo trabalho [5], foi feita uma generalização do primeiro, para uma classe de universos na cosmologia relativística e estabelecida uma correspondência com aqueles construídos com o uso da dinâmica Newtoniana, da gravitação e da relatividade Newtonianas. Desta forma, foram obtidas equações cosmológicas que são análogas na forma, às equações de Friedmann [1]. Essa generalização deu origem ao que é chamado cosmologia Newtoniana [6] (Para uma revisão, ver [7]).

Dessa forma, os trabalhos de Milne [4] e Milne e McCrea [5] mostraram que as previsões da cosmologia relativística, em pequena escala, coincidem com aquelas obtidas na cosmologia Newtoniana, quando a pressão é nula ou desprezível. Assim, a cosmologia Newtoniana, para um sistema no qual a pressão é nula ou desprezível, constituí-se em boa aproximação para os problemas cosmológicos relacionados com a origem e evolução do universo. É importante chamar a atenção para o fato de que essa dedução da equação cosmológica feita por Milne e McCrea [5] não é auto-consistente, pois, é necessário tomar emprestado hipóteses ad hoc da TRG. Outro ponto a considerar nessa abordagem, diz respeito a adoção do princípio cosmológico e a admitir que a pressão é nula ou desprezível, conforme já foi mencionado. No contexto da TRG, a pressão desempenha um papel relevante como fonte do campo gravitacional. Portanto, a construção de uma cosmologia Newtoniana que forneça a mesma descrição daquela obtida com o uso da TRG, deve incluir, necessariamente, um termo de pressão,

como elemento gerador da interação gravitacional, no tratamento Newtoniano. A inclusão da pressão foi feita algumas décadas depois, quando McCrea [8] modificou as equações básicas para incluir a pressão, e assim, ficou conhecida como cosmologia Neo-Newtoniana [9,10].

Em resumo, a abordagem de Milne e McCrea [4,5,8] para descrever o universo em expansão, para matéria sem pressão ou com pressão, faz uso da mecânica dos fluídos e da lei de Newton para partículas que interagem gravitacionalmente.

Em trabalho recente, Ellis e Gibbons [11] consideram os fundamentos da cosmologia Newtoniana, construídos dispensando o uso da hidrodinâmica. Na realidade, foram considerados partículas que interagem gravitacionalmente, e que adicionalmente, experimentam uma interação associada ao termo cosmológico, que se movem homoteticamente, com suas coordenadas comóveis constituindo-se numa configuração central. Desta forma chega-se a uma equação para o fator de escala, que algebricamente é igual à equação de Friedmann, obtida sem considerar o sistema como sendo hidrodinâmico, ou fazer qualquer aproximação que leve a um sistema contínuo, ou qualquer restrição ao tipo de partícula, de modo que os resultados são válidos para galáxias, aglomerados de galáxias ou para a matéria escura.

Na abordagem de Ellis e Gibbons [11], admite-se que existe uma distribuição discreta de um sistema de partículas, sem pressão, que satisfaz a equação de configuração central, fato este relevante, para a obtenção das soluções das equações Newtonianas. Desta forma, obtém-se uma versão Newtoniana para os modelos de Friedmann-Robertson-Walker, cuja solução corresponde a um universo que se expande homoteticamente, em concordância com a equação de Friedmann, para matéria sem pressão, não importando a natureza das partículas.

A ideia básica de Ellis e Gibbons [11] de usar a expansão homotética, que está de acordo com o princípio cosmológico, pode ser adotada para descrever um sistema correspondente, na aproximação do contínuo. Obviamente, ao fazer esta generalização, as simetrias do sistema original, discreto, não são mais observadas, no entanto, as ideias fundamentais são mantidas, quais sejam, a expansão homotética e o princípio cosmológico.

Esta dissertação possui a seguinte estrutura: no capítulo 2, fazemos uma revisão parcial do artigo de Ellis e Gibbons [11]. No capítulo 3, fazemos uma generalização dos resultados obtidos por Ellis e Gibbons [11], para um sistema altamente denso, ou seja, na aproximação do contínuo. No capítulo 4, são apresentadas as soluções da equação para o fator de escala, considerando a presença de um termo associado à constante cosmológica. No capítulo 5, apresentamos, basicamente, as noções básicas da cosmologia Einsteiniana (relativística)

e fazemos uma comparação, dos pontos de vista técnico e conceitual, com a cosmologia Newtoniana.

Capítulo 2

Cosmologia Newtoniana discreta

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma revisão parcial do artigo de Ellis e Gibbons [11] que trata da formulação discreta da cosmologia Newtoniana, usando soluções homotéticas para o problema de N-corpos. No artigo de Ellis e Gibbons [11] os fundamentos de uma teoria puramente Newtoniana da cosmologia são estabelecidas. Na abordagem adotada, somente partículas pontuais interagindo newtonianamente, são levadas em conta.

O cenário cosmológico construído desta forma é descrito por uma solução exata das equações de movimento, no qual as partículas se expandem homoteticamente¹ com as suas coordenadas comovéis constituindo uma configuração central que neste caso, pertence à classe das configurações homogêneas e isotrópicas.

Sem utilizar qualquer dinâmica de fluidos ou aproximações contínuas, mostra-se que o fator de escala satisfaz às equações de Raychaudhuri e Friedmann. Os resultados são válidos para a matéria escura fria, galáxias e aglomerados de galáxias, uma vez que não é feita nenhuma restrição com respeito às partículas pontuais. A abordagem adotada por Ellis e Gibbons [11] tem grande vantagem pedagógica em relação a outros tratamentos existentes sobre o universo em expansão, uma vez que não requer o uso da relatividade geral ou mecânica dos meios contínuos, mas concentra-se na física básica: leis de Newton para partículas que interagem gravitacionalmente.

¹Expandir-se homoteticamente significa dizer que a solução das equações de Newton para o problema de N-corpos é tal que $\mathbf{x}_i(t) = S(t)\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) para todo i , com $\mathbf{r}(t) > 0$ sendo o fator de escala, que contém informações sobre e quando o tamanho da região ocupada pelas N partículas (N-corpos) varia com o tempo. A evolução neste caso é dita homotética.

A cosmologia Newtoniana pode ser usada para descrever um universo composto por partículas pontuais que interagem, somente, gravitacionalmente. Neste caso não é adotada a relatividade geral nem tampouco a dinâmica de fluidos, ou elementos da matemática moderna como geometria diferencial, análise tensorial, e outros temas. Apenas são usadas as leis de movimento de Newton aplicadas a um conjunto de partículas que interagem segundo a lei da atração gravitacional Newtoniana. As características deste modelo são as seguintes:

- **As partículas interagem gravitacionalmente, somente, e estão imersas no vazio.**
- **O sistema tem um número finito de partículas.**
- **As condições de contorno não podem ser periódicas, pois, neste caso, o sistema não apresentaria simetria por rotação, e soluções em que o momento angular não é conservado, seriam admissíveis.**

Portanto, a partícula em questão podem ser estrelas, galáxias, aglomerados, superaglomerados, etc., ou mesmo moléculas. Na verdade, existe uma certa arbitrariedade na escolha do que é uma partícula, uma vez que qualquer subsistema isolado, esfericamente simétrico, irá produzir um campo gravitacional igual ao de uma partícula pontual localizado no centro geométrico da distribuição.

2.2 Teoria básica

Nesta seção revisaremos alguns elementos da dinâmica de N partículas pontuais [12-15] movendo-se sob a influência de um campo gravitacional Newtoniano.

2.2.1 As Equações Básicas

A equação básica para um conjunto de massas que interagem apenas entre si, é dada pela lei da atração gravitacional Newtoniana. Em geral, para descrever a interação de partículas pontuais, usando coordenadas inerciais, usamos a lei da força de Newton para partículas discretas localizadas nas posições \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) e com massa $m_i > 0$, que é descrita na seguinte forma

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{F}_i são as forças externas devido às partículas fora do conjunto considerado, e \mathbf{F}_{ij} é a força interna, de natureza arbitrária, em princípio, entre as partículas, e representa a força entre i -ésima e a j -ésima partículas. A mesma equação é válida para cada partícula no sistema. No caso em que essa força interna é de natureza gravitacional, é dada por

$$\mathbf{F}_{ij}^{(grav)} = -\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \quad (2.2)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton. Assim para o caso gravitacional, substituindo a eq.(2.2) na eq.(2.1), tem-se

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = -\sum_{j \neq i} Gm_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} + \mathbf{F}_i. \quad (2.3)$$

Note que a força externa pode anular-se em duas situações, a saber:

1. Quando o universo é composto de um número muito grande, mas finito de partículas e a lei da força é aplicada para todo o conjunto.
2. Quando a eq.(2.2) é aplicada a um subconjunto finito de todas as partículas no universo e admite-se que, por razões de simetria, a força externa devido a todas as partículas que não fazem parte deste subconjunto, cancelam-se.

Desta forma, se essas forças cancelam-se, ou se forem consideradas todas as partículas que existem, então, $\mathbf{F}_i = 0$. Logo, podemos escrever a eq.(2.3) para cada partícula (i -ésima partícula) da seguinte forma:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = -\sum_{j \neq i} Gm_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}, \quad (2.4)$$

e assim, temos que a força gravitacional total exercida sobre a i -ésima partícula devido a todas as outras, é dada por:

$$\mathbf{F}_i^{(grav)} \equiv -\sum_{j \neq i} Gm_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}, \quad (2.5)$$

e desta forma, o resultado expresso pela eq.(2.2) é generalizado.

2.2.2 Energia Potencial

A força gravitacional $\mathbf{F}_i^{(grav.)}$ atuando sobre a i -ésima partícula pode ser representada como a derivada da energia potencial gravitacional V_i desta partícula, isto é:

$$\mathbf{F}_i^{(grav.)} = -\nabla V_i(\mathbf{x}_i).$$

A energia potencial $V_i(\mathbf{x}_k)$ associada à força gravitacional que atua sobre a partícula localizada em \mathbf{x}_i é uma função da posição \mathbf{x}_i , sendo definida por

$$V_i(\mathbf{x}_i) \equiv - \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, \quad (2.6)$$

que também depende da posição \mathbf{x}_k de todas as outras partículas do sistema. Para mostrar a relação deste potencial com a força gravitacional, definimos

$$\mathbf{x}_{ji} \equiv \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i; \quad x_{ji} \equiv |\mathbf{x}_{ji}| = [(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)]^{1/2}. \quad (2.7)$$

Destas definições, para $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$, temos

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\frac{1}{x_{ji}} \right) = \left(\frac{1}{x_{ji}} \right)^3 (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad (2.8)$$

onde a derivada parcial ($\partial/\partial \mathbf{x}_i$) é tomada, mantendo todas as outras posições \mathbf{x}_j ($j \neq i$), constantes. Derivando a eq.(2.6) em relação a \mathbf{x}_i temos:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left[- \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \right] = - \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left[\frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \right],$$

como

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\frac{1}{x_{ij}} \right) = - \left(\frac{1}{x_{ij}} \right)^3 (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),$$

logo podemos escrever que

$$\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \left(\frac{1}{x_{ij}} \right)^3 (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j).$$

Usando este resultado em conjunto com a eq.(2.2) e a eq.(2.5), a relação do potencial, dado pela eq.(2.6), com a força gravitacional é a seguinte:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} = - \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}^{(grav.)} = -\mathbf{F}_i^{(grav.)}. \quad (2.9)$$

Como de costume, o valor absoluto do potencial não afeta esta relação, pois, ao se adicionar uma constante V_0 a $V_i(\mathbf{x}_i)$ dado pela eq.(2.6), o resultado não será afetado. No entanto, isso iria destruir uma propriedade importante do potencial: que é ser uma função homogênea de grau -1 . Esta propriedade desempenha um papel importante em várias relações que serão estudadas.

2.2.3 Simetria das equações e soluções

A equação fundamental dada por eq.(2.4) reafirma a importante propriedade física que diz respeito à igualdade entre as massas inercial e gravitacional (ativa e passiva). Um exame da eq.(2.4), à luz dessa propriedade física da equivalência entre as massas inercial e gravitacional (ativa e passiva), bem como da dependência com as coordenadas, nos permite concluir que ela é invariante sob as seguintes transformações:

1. Translação temporal: $t \rightarrow t + t_0$;
2. Translações espaciais: $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_0$, para qualquer i .
3. Rotações em torno da origem.
4. Boosts entre sistemas de referenciais inerciais.

Este total de 10 (dez) operações forma um grupo, chamado grupo de Galileu, que corresponde ao limite não-relativístico do grupo de Poincaré.

As simetrias das equações, geralmente, não correspondem simetrias das soluções. No entanto, essas simetrias podem ser usadas para gerar novas soluções que são essencialmente idênticas às antigas.

(1) Invariância Translacional

Como estamos usando um modelo discreto, as soluções não podem ser invariantes por translações espaciais contínuas. Adicionalmente, vamos considerar estas soluções homotéticas como tendo um centro de massa preferencial. Neste caso, no entanto, novas equações podem ser obtidas das antigas por meio de translações espaciais destas, e são fisicamente idênticas as antigas.

Por outro lado, no modelo adotado por Ellis e Gibbons [11], e que tem com base as configurações centrais, se existir um número bastante grande de partículas, o sistema irá se comportar como sendo espacialmente homogêneo. No entanto, caso o sistema seja finito, terá uma fronteira e por isso não será espacialmente homogênea, em grande escala.

A conservação do momento linear decorre da invariância por translações espaciais das equações. Este resultado será exato, mesmo que as soluções não sejam invariantes por translações espaciais.

(2) Simetria Rotacional

Essencialmente as mesmas observações feitas para translações são aplicáveis à simetria rotacional. Não pode haver simetria de rotação contínua, tendo em vista que o sistema é discreto, mas pode haver simetrias rotacionais discretas. Com um número suficiente de partículas, a solução terá, aproximadamente, simetria de rotação. Portanto, novas soluções, fisicamente idênticas, podem ser geradas através de uma rotação do sistema antigo.

A conservação do momento angular segue da invariância de rotação das equações. Este resultado será exato, mesmo que as soluções não sejam invariante por rotações.

(3) Invariância por translação temporal

As soluções são invariantes no tempo, isto é, invariantes por mudanças na origem do tempo. No caso estático, o fator de escala $S(t)$ é constante, e no caso estacionário, $S(t) = \exp(Ht)$.

A conservação da energia resulta da invariância por translação temporal das equações, e que ocorrerá em todos os casos, a menos que forças externas atuem sobre o sistema.

(4) Invariância de reversão temporal

A invariância por reversão temporal ocorrerá somente se as soluções forem estáticas. Considere o caso em que $\Lambda = 0$, e portanto, não poderá haver soluções cosmológicas estáticas, mas tão somente, dinâmicas. Neste cenário, haverá, necessariamente, um início para o universo no qual $S = 0$, e podemos considerar $t = 0$ (tempo inicial). Neste caso, podemos escolher o tempo como sendo positivo visto que o universo se expande a partir desta singularidade

inicial, de modo que $\dot{S} > 0$ para $t > 0$, e suficientemente pequeno. A direção do tempo é, então, a direção na qual t aumenta próximo a $t = 0$. Adicionalmente a essas simetrias temporais, a eq.(2.4) apresenta uma simetria temporal homotética, de forma que é invariante para

$$(t \rightarrow At, \mathbf{x}_i \rightarrow A^{-2/3}\mathbf{x}_i), \forall A, i. \quad (2.10)$$

Soluções que são invariantes pelas transformações dadas pela eq.(2.10), ou seja,

$$\mathbf{x}_i(t) = A^{-2/3}\mathbf{x}_i(At), \quad (2.11)$$

podem ser construídas. Uma classe particular de tais soluções é dado por

$$\mathbf{x}_i(t) = t^{2/3}\mathbf{r}_i, \quad (2.12)$$

onde os \mathbf{r}_i 's são independentes do tempo. A dependência temporal de $\mathbf{x}_i(t)$ consta do fator $t^{2/3}$.

2.2.4 Massa, momento linear e momento angular: conservação

A igualdade da massa gravitacional passiva e ativa e o caráter central da força gravitacional não garante somente a conservação do momento linear, momento angular e energia, mas também o chamado teorema do centro de massa, a saber, (i) o centro de massa, ou baricentro, de um sistema isolado move-se com velocidade constante e (ii) pode-se sempre passar de um sistema de referencia por meio de uma transformação de Galileu, isto é, um boost, em relação ao qual o centro de massa está em repouso. Vamos admitir que a massa da partícula é conservada:

$$\frac{dm_i}{dt} = 0 \Rightarrow m_i = \text{constante}. \quad (2.13)$$

Segue-se, então, a partir da eq.(2.13) e as simetrias da eq.(2.4), que a massa total \mathbf{M} , o momento linear \mathbf{P} e momento angular \mathbf{L} , são conservados ou seja,

$$M = \sum_i m_i = M_0(\text{constante}) > 0, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{P}_0(\text{constante}), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{L}_0(\text{constante}). \quad (2.16)$$

A conservação do momento linear, eq.(2.15), juntamente com a eq.(2.13), implica que o centro de massa move-se com velocidade constante e que um sistema de referencia, i.e, um conjunto de coordenadas inerciais, pode ser sempre escolhido de modo que o momento total anula-se e o centro de massa está em repouso, na origem. No que se segue, esta escolha será sempre feita, a menos que seja afirmado o contrário. Uma vez que o momento linear total \mathbf{P} , o momento angular total \mathbf{L} e a energia total E , dependem do sistema de referência no que se segue estas quantidades serão tomadas em relação ao centro de massa, a menos que seja afirmado o contrário.

Conservação da energia

Além das grandezas conservadas que foram mencionadas, a energia, E , também é conservada, o que significa dizer que

$$E = T + V = E_0(\text{constante}), \quad (2.17)$$

onde a energia cinética T e a energia potencial V são dadas por

$$T(\dot{\mathbf{x}}_c) \equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{x}}_i)^2, \quad (2.18)$$

$$V(\mathbf{x}_c) \equiv \sum_i V_i = - \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (2.19)$$

A energia potencial gravitacional total, $V(\mathbf{x}_c)$, é uma função homogênea ($V(a\mathbf{x}) = a^k V(\mathbf{x})$), de grau $k = -1$. É uma função negativa do conjunto das posições \mathbf{x}_i de todas as partículas do sistema, e fica mais negativa quanto mais próximas as partículas estiverem uma da outra.

As quantidades T e V são grandezas associadas ao sistema de partículas, de modo que, T representa a energia cinética total das partículas e V energia potencial total, que é dada pela soma das energias potenciais de todas as partículas.

Vamos agora demonstrar as eqs. (2.17), (2.15) e (2.16), respectivamente. Sendo a eq.(2.18) a energia cinética total do sistema de partículas, derivemos tal equação com relação

ao tempo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 \right) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i,$$

mas

$$m_i \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} V_i = -\frac{dV_i}{d\mathbf{x}_i},$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i = -\sum_{i=1}^N \frac{dV_i}{d\mathbf{x}_i} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = -\frac{dV}{dt}, \\ \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(T + V) = 0 \Rightarrow T + V = \text{constante}, \end{aligned}$$

que é a equação de conservação da energia dada pela eq.(2.17).

Vamos agora considerar o momento linear total do sistema, definido por

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (2.20)$$

Derivando a eq.(2.20) em relação ao tempo e substituindo a eq.(2.9) e depois a eq.(2.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i = -\sum_{i=1}^N \frac{dV_i}{d\mathbf{x}_i} = -\sum_{i=1}^N \left(-\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}^{(grav.)} \right) = -\sum_{i=1}^N (-\mathbf{F}_i^{(grav.)}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(grav.)}, \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left(-\sum_{j \neq i; j=1}^N Gm_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \right). \end{aligned}$$

Cada termo do 2º membro é cancelado por um outro termo de sinal oposto, i.é, os termos se cancelam em pares, e conseqüentemente,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{constante},$$

que é a equação da conservação do momento linear dada pela eq.(2.15).

E por fim, consideremos o momento angular total do sistema definido por:

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i). \quad (2.21)$$

Derivando a equação anterior em relação ao tempo, $\dot{\mathbf{x}}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i = 0$ e levando em conta a eq.(2.5), obtemos:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{x}}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{x}_i \times \ddot{\mathbf{x}}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \times \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(grav.)},$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \left(- \sum_{j \neq i; j=1}^N Gm_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \right) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N \mathbf{x}_i \times Gm_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3},$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} [\mathbf{x}_i \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)] = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} [-\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_j],$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} [\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_j] = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{constante},$$

que é a equação de conservação do momento angular dada pela eq.(2.16), onde usamos o fato de que $\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_i = 0$ e $-\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i$.

2.2.5 Momento de Inercia e Teorema do virial

As Leis de Conservação tem muitas aplicações no estudo do problema de N-corpos. Nesta seção, veremos alguns resultados relativamente simples e que serão utilizados em toda discussão subsequente: a desigualdade de Sundman² e a identidade de Lagrange-Jacobi. Estes resultados são expressos através de uma grandeza muito útil, que desempenha um papel muito importante na mecânica celeste, chamada momento de inércia do sistema de partículas, definido por:

$$I' = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = \sum_i m_i x_i^2.$$

Convencionaremos, nesta dissertação, que I é a metade do momento de inércia do sistema de partículas, logo é definido por:

$$I = \frac{1}{2} I' = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i x_i^2, \quad (2.22)$$

²Karl F. Sundman foi um matemático finlandês que deu importantes contribuições no estudo do problema de N-corpos.

que, a grosso modo, é uma medida da distribuição espacial das massas do sistema. Tal resultado desempenha um papel importante na dinâmica celeste. A quantidade $I^{1/2}$ serve como uma medida do espaçamento máximo das partículas, enquanto V^{-1} serve como uma medida do espaçamento mínimo.

Lema 2.1 (A desigualdade de Sundman): Considere o momento angular total do sistema dado pela eq.(2.16), a metade do momento de inércia dada pela eq.(2.22) e a energia cinética dada pela eq.(2.18). Então:

$$(\mathbf{L}_0)^2 + (dI/dt)^2 \leq 4IT. \quad (2.23)$$

Tal resultado desempenha um papel no teorema Newtoniano de não-singularidade que afirma que o colapso total (ou seja, no qual $I \rightarrow 0$) deve ocorrer no tempo finito, e não pode ocorrer se $\mathbf{L}_0^2 \neq 0$ [12,16].

Demonstração: Esta desigualdade é fundamental, pois, conecta os conceitos de energia cinética, momento de inércia e momento angular. Tomando o módulo do momento angular e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz da algebra linear, temos:

$$|\mathbf{L}| = \left| \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i \right| \leq \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i|, \quad (2.24)$$

onde $x_i = |\mathbf{x}_i|$, $v_i = |\mathbf{v}_i|$ e θ_i é o ângulo entre os vetores \mathbf{x}_i e \mathbf{v}_i . Fazendo $L = |\mathbf{L}|$, temos:

$$L \leq \sum_{i=1}^N m_i x_i v_i |\sin \theta_i|. \quad (2.25)$$

Tomando o módulo da equação eq.(2.25), elevando ao quadrado e considerando a desigualdade de Schwarz, temos:

$$\begin{aligned} |L|^2 &\leq \left| \sum_{i=1}^N m_i x_i v_i |\sin \theta_i| \right|^2 = \left| \sum_{i=1}^N \sqrt{m_i} x_i \sqrt{m_i} v_i |\sin \theta_i| \right|^2, \\ L^2 &\leq \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \sin^2 \theta_i. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por outro lado, derivando a eq.(2.22) com relação ao tempo, temos:

$$\dot{I} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^N m_i x_i v_i \cos \theta_i.$$

Tomando o módulo da equação anterior, elevando ao quadrado e aplicando a desigualdade de Schwarz, obtemos:

$$\begin{aligned} |\dot{I}|^2 &= \left| \sum_{i=1}^N m_i x_i v_i \cos \theta_i \right|^2 = \left| \sum_{i=1}^N \sqrt{m_i} x_i \sqrt{m_i} v_i \cos \theta_i \right|^2, \\ |\dot{I}|^2 &\leq \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \cos^2 \theta_i. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Somando as eqs.(2.26) e eq.(2.27), obtemos:

$$\begin{aligned} L^2 + \dot{I}^2 &\leq \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \left[\sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \sin^2 \theta_i + \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \cos^2 \theta_i \right], \\ L^2 + \dot{I}^2 &\leq \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \sum_{i=1}^N m_i v_i^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Mas,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \Rightarrow 2I = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2, \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2 \Rightarrow 2T = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2. \end{aligned}$$

Substituindo as relações anteriores na eq.(2.28), obtemos a chamada desigualdade de Sundman:

$$L^2 + \dot{I}^2 \leq 4IT,$$

como queríamos demonstrar.

O Teorema do virial

Este é um resultado bem conhecido, o qual depende fundamentalmente da lei do inverso do quadrado de Newton. Tomando o produto escalar de $\mathbf{F}_i^{(grav.)}$ dado pela eq.(2.5) com \mathbf{x}_i , e somando sobre i , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^{(grav.)} &\equiv - \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}, \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(grav.)} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \left(- \sum_{j \neq i; j=1}^N G m_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \right) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N \left(G m_i m_j \mathbf{x}_i \cdot \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \right), \\ \sum_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(grav.)} &= - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N G m_i m_j \frac{\mathbf{x}_i \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \partial_{\mathbf{x}_i} \left(\frac{G m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

O teorema de Euler para funções homogêneas de grau k (ou seja, funções que obedecem a relação $f(ax) = a^k f(x)$), diz que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} = kf. \quad (2.30)$$

Neste caso, $f = \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$ é de grau $k = -1$, então, o teorema de Euler permite escrever

$$\mathbf{x}_i \cdot \partial_{\mathbf{x}_i} f = -f \Rightarrow \mathbf{x}_i \cdot \partial_{\mathbf{x}_i} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \right) = -\frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (2.31)$$

Substituindo a eq.(2.31) na eq.(2.29) e considerando a eq.(2.19), obtemos:

$$\sum_i \sum_{i \neq j} \mathbf{x}_i \cdot \partial_{\mathbf{x}_i} \left(\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \right) = - \sum_i \sum_{j \neq i} \left(\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \right) = V. \quad (2.32)$$

Das equações de movimento eq.(2.4) e eq.(2.5), podemos escrever que:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(grav.)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \cdot \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2}. \quad (2.33)$$

Note que

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{x}_i \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} + \mathbf{x}_i \cdot \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} \Rightarrow \mathbf{x}_i \cdot \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{x}_i \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}. \quad (2.34)$$

Substituindo o resultado dado pela eq.(2.34) na eq.(2.33), obtemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(grav.)} &= \sum_{i=1}^N \left\{ m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{x}_i \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right] \right\}, \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(grav.)} &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \left(\mathbf{x}_i \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right) \right\} - \sum_{i=1}^N m_i v_i^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Note que:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i) = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = 2\mathbf{x}_i \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}. \quad (2.36)$$

Substituindo, então, o resultado dado por (2.36) na eq.(2.35) e levando em conta que $2T = \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$ obtemos:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(grav.)} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i) - 2T. \quad (2.37)$$

Podemos reescrever a eq.(2.37), da seguinte forma, usando as eqs.(2.22) e (2.32):

$$V = \frac{d^2 I}{dt^2} - 2T, \quad (2.38)$$

que é a *equação escalar do virial* ([17]:equação (9.16)). Em Mecânica Celeste, a eq.(2.38) é chamada de *equação de Jacobi-Lagrange*.

Tomando a média temporal $\langle \rangle$ da eq.(2.38) considerando a média da derivada segunda de $I(t)$ como sendo zero, conseguimos uma relação entre a energia cinética e potencial, dada por

$$\left\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle V \rangle = -2 \langle T \rangle, \quad (2.39)$$

a qual é chamada de teorema do virial [17].

2.3 Soluções cosmológicas

Nesta seção, serão discutidas as soluções das equações de Newton que evoluem homoteticamente no espaço Euclidiano. Soluções deste tipo foram tratadas por Lagrange e Laplace e são bastante usadas nos textos sobre mecânica celeste. Suas aplicações à cosmologia Newtoniana não são tão conhecidas.

A ideia fundamental da expansão homotética incorpora o princípio cosmológico. Neste cenário, a equação de movimento de Newton para partículas pontuais somente permitem uma expansão homotética se as coordenadas comóveis do sistema de partículas em expansão forem obrigadas a formar o que é chamado de uma configuração central.

Um fato interessante é que as configurações centrais extremizam uma certa classe de função da posição, que denotamos \tilde{V} . Em [18], ficou estabelecido que, no caso de N partículas de massa igual a m , que, para um número suficientemente grande de partículas, as configurações centrais que maximizam \tilde{V} correspondem a uma esfera homogênea. Este é precisamente o ponto de partida da análise de Milne e McCrea [4, 5]. A homogeneidade das configurações centrais composta de um grande número de partículas com massas idênticas ou quase idênticas é uma consequência direta da lei do inverso do quadrado de Newton. Configurações centrais existem, também, quando as forças variam inversamente com qualquer potência da posição, porém, apenas para a lei do inverso do quadrado elas são homogênea [18,19].

2.3.1 Soluções

Vamos obter, no que segue, uma descrição do universo em expansão, na cosmologia Newtoniana. Para isso vamos introduzir o fator homotético $S(t)$ e separar as variáveis, de modo a corresponder à cinemática do universo em expansão:

$$\mathbf{x}_i = S(t)\mathbf{r}_i, d\mathbf{r}_i/dt = 0, \quad (2.40)$$

onde \mathbf{r}_i são coordenadas comóveis da partícula i . Derivando a eq.(2.40) com relação ao tempo, temos:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \dot{S}(t) \cdot \mathbf{r}_i. \quad (2.41)$$

Isolando o fator \mathbf{r}_i na eq.(2.40), e substituindo na eq.(2.41), obtemos:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \dot{S}(t) \cdot \frac{\mathbf{x}_i}{S(t)}.$$

Definindo o parâmetro de Hubble, $H(t) \equiv \dot{S}(t)/S(t)$, podemos escrever, então,

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \dot{S}(t)\mathbf{r}_i = H(t)\mathbf{x}_i, \quad (2.42)$$

que é conhecida como lei da velocidade-distância, ou lei de Hubble, ou ainda, lei da velocidade-distância de Slipher-Lemaître-Hubble. Note que a partícula na origem está movendo-se inercialmente, e apenas se $H(t) = H_0 t$, as outras partículas também estarão movendo-se inercialmente.

Substituindo a eq.(2.40) na eq.(2.4), e lembrando que \mathbf{r}_i é independente do tempo, chegamos a seguinte equação:

$$m_i \mathbf{r}_i \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{S^2(t) |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (2.43)$$

Definindo

$$C(t) \equiv S^2(t) \frac{d^2 S(t)}{dt^2}, \quad (2.44)$$

então, a eq.(2.43) torna-se

$$C(t)m_i\mathbf{r}_i = - \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (2.45)$$

Em seguida, lembrando-se das eqs.(2.13) e (2.40), a consistência exige que $C(t)$ seja uma constante. Logo, derivando a eq.(2.45) em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (C(t)m_i\mathbf{r}_i) = 0 \Rightarrow C(t) = \text{const} \equiv -G\tilde{M}, \quad (2.46)$$

que define a constante \tilde{M} . Note que \tilde{M} tem a dimensão de massa por unidade de volume.

2.3.2 A Equação de Configuração Central

Inicialmente, vamos considerar as eqs.(2.45) e (2.46), e deste modo obtemos a seguinte equação

$$\tilde{M}m_i\mathbf{r}_i = \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad (2.47)$$

que é válida para todos os valores de i . Este conjunto de N equações não lineares independentes do tempo é conhecida como **equação de configuração central**³ [14, 18, 32], que é uma condição que garante que a eq.(2.40) possui solução. Este conjunto de condições parece muito restritiva, e não é óbvio como, na prática, pode-se, por exemplo, numericamente, impor essas condições.

2.3.3 A Identidade fundamental

A seguir, considera-se a equação de configuração central, eq.(2.47) que é multiplicada por G , e em seguida é feito o produto escalar por \mathbf{r}_i , e feita a soma em i . Após estas operações, chega-se ao seguinte resultado:

$$G\tilde{M}m_i\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \mathbf{r}_i \cdot \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3},$$

$$G\tilde{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \mathbf{r}_i \cdot \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}.$$

³Uma configuração central é um arranjo especial de partículas, que interagem segundo a lei da gravitação de Newton, e que obedece à seguinte propriedade: a aceleração gravitacional produzida sobre dada partícula, por todas as outras, deve apontar no sentido do centro de massa e ser proporcional a distância ao mesmo. A configuração central tem um papel importante no estudo do problema Newtoniano de N-corpos

$$G\tilde{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \frac{\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = - \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \cdot \partial_{\mathbf{r}_i} \left(\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right). \quad (2.48)$$

O teorema de Euler para funções homogêneas, eq.(2.31), implica que:

$$- \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \cdot \partial_{\mathbf{r}_i} \left(\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right) = \sum_i \sum_{j \neq i} \left(\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right). \quad (2.49)$$

Vamos definir o potencial efetivo $\tilde{V}_{(-1)}$ e o momento de inércia \tilde{I}_0 por

$$\tilde{V}_{(-1)} \equiv - \sum_i \sum_{j \neq i} \left(\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right) = \text{const.} \quad (2.50)$$

$$\tilde{I}_0 \equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{r}_i)^2 = \text{const.} \quad (2.51)$$

(Cf eq.(2.19) e (2.22); estas são definidos em termos da coordenada comóvel \mathbf{r}_i ao invés da coordenada física \mathbf{x}_i). Então, usando a eq.(2.49), a eq.(2.48) torna-se

$$G\tilde{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \left(\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right), \quad (2.52)$$

$$2G\tilde{M}\tilde{I}_0 = -\tilde{V}_{(-1)},$$

mostrando que o momento de inércia de configuração central, I_0 , e a energia potencial efetiva $\tilde{V}_{(-1)}$, são iguais a menos de um fator $2G\tilde{M}$. Isto pode ser considerado como um análogo do teorema do virial para configurações estáticas. Vamos chamar essa relação de equação de configuração central com vínculo, porque ela é uma relação que é necessária para a eq.(2.47) esteja correta, para todo i .

2.3.4 A equação de evolução

A obtenção da equação que descreve a evolução temporal ou equação cosmológica, pode ser obtida substituindo-se a eq.(2.46) em eq.(2.44), o que resulta nas seguintes expressões:

$$-G\tilde{M} = S^2(t) \frac{d^2 S(t)}{dt^2},$$

$$-\frac{G\tilde{M}}{S^2(t)} = \frac{d^2 S(t)}{dt^2}. \quad (2.53)$$

É importante notar que, para uma dada distribuição de massa, esta equação não é invariante sob escalonamento, a saber, $S(t) \rightarrow \hat{S} = \alpha S(t)$. Neste caso obtém-se

$$-\frac{G\tilde{M}}{\alpha^2 \hat{S}^2(t)} = \frac{d^2 (\alpha \hat{S}(t))}{dt^2}. \quad (2.54)$$

Para que a eq.(2.54) seja reduzida à forma dada pela eq.(2.53) é preciso, reescalonar, também, a massa \tilde{M} , de modo que, $\tilde{M} \rightarrow \hat{\tilde{M}} = \alpha^3 \tilde{M}$. Porém, para uma dada distribuição de massa, \tilde{M} é fixada por (2.52).

Multiplicando a eq.(2.53) por dS/dt , que deve ser diferente de zero para quase todo t , em virtude da eq.(2.43), obtemos:

$$-\frac{G\tilde{M}}{S^2(t)} \cdot \frac{dS(t)}{dt} = \frac{d^2S(t)}{dt^2} \cdot \frac{dS(t)}{dt}. \quad (2.55)$$

Sabemos que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 = \frac{d^2S(t)}{dt^2} \cdot \frac{dS(t)}{dt}. \quad (2.56)$$

Portanto, substituindo (2.56) na eq.(2.55), tem-se:

$$-\frac{G\tilde{M}}{S^2} \frac{dS(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2,$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) = -\frac{G\tilde{M}}{S^2(t)} \cdot \frac{dS(t)}{dt},$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) = -\frac{G\tilde{M}}{S^2(t)} \frac{dS(t)}{dt} = \frac{d^2S(t)}{dt^2} \frac{dS(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2. \quad (2.57)$$

a qual pode ser integrada conforme os passos que seguem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 \right] &= 0, \\ \int \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 \right] dt &= \int 0 dt, \\ \frac{G\tilde{M}}{S(t)} - \frac{1}{2} \dot{S}^2(t) + E &= 0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

e fornece a equação cosmológica que descreve a evolução do universo, e é dado por

$$\frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \right]^2 - \frac{E}{S^2(t)}, \quad (2.59)$$

que foi obtida multiplicando-se a eq.(2.58) por $1/S^2(t)$. O parâmetro E é uma constante de integração. Assim, conseguimos o mesmo resultado, para o caso da matéria sem pressão, que seria obtido usando a relatividade geral ou através de um modelo Newtoniano contínuo.

2.3.5 Conservação de Energia

De que modo, o resultado obtido da subseção anterior, está relacionado com a conservação de energia expressa pela eq.(2.17)? O resultado obtido a partir da hipótese da expansão homotética nos leva à conclusão de que a energia é conservada?

Admitindo que a evolução do sistema é homotética, eq.(2.40), a energia cinética dada por (2.18), toma a seguinte forma

$$T(\dot{\mathbf{x}}_k) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{x}}_i)^2 = \frac{1}{2} \dot{S}(t)^2 \sum_i m_i (\mathbf{r}_i)^2 = \dot{S}^2(t) \tilde{I}_0. \quad (2.60)$$

A energia potencial, por sua vez, pode ser escrita na forma

$$V(\mathbf{x}_k) = - \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = - \frac{1}{S(t)} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (2.61)$$

Substituindo a eq.(2.50) na eq.(2.61), obtemos:

$$V(\mathbf{x}_k) = - \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = - \frac{1}{S(t)} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{S(t)} \tilde{V}_{(-1)}. \quad (2.62)$$

Substituindo as eqs.(2.60) e (2.62) na equação para a energia total, eq.(2.17), obtém-se o seguinte resultado:

$$T + V = \dot{S}(t)^2 \tilde{I}_0 + \frac{1}{S(t)} \tilde{V}_{(-1)} = \epsilon_0, \quad (2.63)$$

a qual, multiplicando pelo fator $1/2S^2(t)\tilde{I}_0$, resulta em

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{S}(t)^2}{S(t)^2} + \frac{1}{S^3(t)} \frac{\tilde{V}_{(-1)}}{2\tilde{I}_0} = \frac{\epsilon_0}{2\tilde{I}_0} \frac{1}{S^2(t)}. \quad (2.64)$$

Comparando as eqs.(2.59) e (2.64), conclui-se que a concordância entre elas ocorre se

$$E = \frac{\epsilon_0}{2\tilde{I}_0}, G\tilde{M} = - \frac{\tilde{V}_{(-1)}}{2\tilde{I}_0}. \quad (2.65)$$

A equação $E = \epsilon_0/2\tilde{I}_0$ relaciona as constantes arbitrárias E e ϵ_0 , enquanto a outra equação, $G\tilde{M} = -\tilde{V}_{(-1)}/2\tilde{I}_0$ nada mais é que a equação de configuração central com vínculo, eq.(2.52). Em conclusão, podemos afirmar que as eqs. (2.59) e (2.63), são exatamente, as mesmas.

2.3.6 A relação do virial

Considerando a expansão homotética, eq.(2.40), o momento de inércia, eq.(2.22), fica dado por

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i x_i^2 = S^2(t) \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 = S^2(t) \tilde{I}_0. \quad (2.66)$$

Tomando a derivada no tempo, de (2.66), tem-se que

$$\frac{dI(t)}{dt} = 2 \frac{dS(t)}{dt} S(t) \tilde{I}_0. \quad (2.67)$$

Assim, tomando a segunda derivada, obtém-se

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} = 2 \left(\frac{d^2 S(t)}{dt^2} S(t) + \dot{S}(t)^2 \right) \tilde{I}_0. \quad (2.68)$$

Isolando o termo \dot{S}^2 na eq.(2.59) encontramos:

$$\frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \right]^2 - \frac{E}{S^2(t)} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\dot{S}^2(t)}{S^2(t)} = \frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} + \frac{E}{S^2(t)},$$

e portanto,

$$\dot{S}(t)^2 = \frac{2G\tilde{M}}{S(t)} + 2E. \quad (2.69)$$

Substituindo as eqs.(2.53) e (2.69) na eq.(2.68), obtemos:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} = 2 \left(-\frac{G\tilde{M}}{S^2(t)} S(t) + \left(\frac{2G\tilde{M}}{S(t)} + 2E \right) \right) \tilde{I}_0 = 2 \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} + 2E \right) \tilde{I}_0. \quad (2.70)$$

Potanto, à medida que o sistema se expande, o momento de inércia aumenta [veja eq.(2.67)] mas a uma taxa decrescente [veja eq.(2.69)].

Dessa forma, substituindo a eq.(2.70) na eq.(2.38), podemos reescrever a relação do virial da seguinte maneira:

$$V = 2 \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} + 2E \right) \tilde{I}_0 - 2T. \quad (2.71)$$

2.3.7 Resultado principal

Os resultados obtidos podem ser resumidos no teorema, e no corolário que são apresentados a seguir.

Teorema (*Cosmologia Newtoniana Discreta*). A lei da atração gravitacional Newtoniana, eq.(2.4), para um conjunto finito de partículas que gravitam tem uma solução homotética exata ((2.40), (2.42)) desde que a equação de configuração central independente do tempo, eq.(2.47), seja satisfeita para $i = 1, 2, \dots, N$. O efeito da atração gravitacional é produzir uma mudança homotética no tamanho do sistema, que é governada pela eq.(2.54), cuja primeira integral é dada pela eq.(2.59), que constitui a equação cosmológica, a qual fornece a evolução do universo.

Estas soluções não são espacialmente homogêneas (embora tendam a ter esta homogeneidade espacial, se o número de partículas for muito grande [18]). Na verdade, elas quebram todas as simetrias das equações mencionadas. Em particular a origem das coordenadas é um ponto preferencial: é o centro de massa (veja eq.(2.90) abaixo).

A grosso modo, a equação de configuração central é a condição para que distribuição de matéria seja homogênea em larga escala, permitindo que a quantidade \tilde{M} seja independente da posição. O efeito da atração gravitacional é manter o arranjo espacial inalterado em forma, mas alterando o tamanho de acordo com as eqs.(2.53) e (2.59). Portanto, em termos espaciais, a gravidade deixa a configuração intocada, a menos das alterações nas distâncias realizadas homoteticamente.

Corolário: Não há soluções do tipo FLRW se a equação de configuração central (2.47), não for satisfeita para todo i ($1 \leq i \leq N$). A evolução temporal dos dados que não satisfazem estas condições não podem ser homotéticas com um fator homotético espacialmente homogêneo.

2.3.8 Constante cosmológica

Em seu estágio atual o universo parece ser dominado por uma constante cosmológica. Portanto, podemos supor a existência de uma força cosmológica dada por

$$F_c = \frac{1}{3}\Lambda m_i \mathbf{x}_i, \quad (2.72)$$

que deve ser adicionada à lei da força, eq.(2.4), de modo a se obter a seguinte equação

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} + \frac{\Lambda m_i \mathbf{x}_i}{3}. \quad (2.73)$$

Considerando uma expansão homotética, eq.(2.40), podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$m_i \mathbf{r}_i \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{S(t)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{S^3(t)|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\Lambda S(t) m_i \mathbf{r}_i}{3}. \quad (2.74)$$

Multiplicando a eq.(2.74) por S^2 e considerando a eq.(2.47), podemos escrevê-la da seguinte forma

$$m_i \mathbf{r}_i S^2(t) \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = -G \tilde{M} m_i \mathbf{r}_i + \frac{\Lambda S^3(t) m_i \mathbf{r}_i}{3}, \quad (2.75)$$

com \tilde{M} definido exatamente como antes. Multiplicando a eq.(2.75) por $1/S^3 m_i \mathbf{r}_i$ obtemos a seguinte equação

$$\frac{1}{S(t)} \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = -\frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.76)$$

onde o termo de matéria causa desaceleração e com Λ causa uma aceleração [21]. Para integrar a eq.(2.76), considerando que $dS/dt \neq 0$, basta multiplicar esta equação por $S(t)dS/dt$, o que fornece o seguinte resultado

$$\frac{d^2 S(t)}{dt^2} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{G\tilde{M}}{S^2(t)} \frac{dS(t)}{dt} + \frac{\Lambda}{3} S(t) \frac{dS(t)}{dt}. \quad (2.77)$$

Vamos considerar as seguintes relações:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 = \frac{d^2 S(t)}{dt^2} \cdot \frac{dS(t)}{dt}. \quad (2.78)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) = -\frac{G\tilde{M}}{S^2} \frac{dS(t)}{dt}. \quad (2.79)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Lambda S^2(t)}{6} \right) = \frac{\Lambda}{3} S(t) \frac{dS(t)}{dt}. \quad (2.80)$$

Assim, substituindo as eqs.(2.78), (2.79) e (2.80) na eq.(2.77), obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\Lambda S^2(t)}{6} \right). \quad (2.81)$$

Vamos integrar a eq.(2.81) para obter a equação que descreve a evolução do universo com constante cosmológica (Equação de Friedmann). Assim procedendo, temos:

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 \right] dt &= \int \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) \right] dt + \int \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\Lambda S^2(t)}{6} \right) \right] dt, \\ \frac{1}{2} \int d \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 &= \int d \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) + \int d \left(\frac{\Lambda S^2(t)}{6} \right), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 &= \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) + \left(\frac{\Lambda S^2(t)}{6} \right) + E. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Multiplicando a eq.(2.82) pelo fator $1/S^2(t)$, obtemos, finalmente, a equação que descreve a evolução com constante cosmológica (equação de Friedmann),

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \right]^2 = \frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} + \frac{E}{S^2(t)} + \frac{\Lambda}{6}, \quad (2.83)$$

onde E é uma constante de integração.

Portanto, pode-se encontrar a equação cosmológica (equação de Friedmann) para $\Lambda \neq 0$, seguindo os mesmos passos do caso discreto para $\Lambda = 0$. No primeiro caso, $\Lambda \neq 0$, a equação de configuração central, exigida para que a solução seja homotética, não se altera, nem a massa gravitacional efetiva, \tilde{M} . Da mesma forma que no caso $\Lambda = 0$, nenhum cenário contínuo (fluido) foi usado na obtenção dos resultados. As configurações homotéticas comovéis não são afetadas pela constante cosmológica, a qual apenas afeta o tempo de evolução.

A introdução da constante cosmológica na eq.(2.73) quebra a simetria de translação das equações originais, eq.(2.4) e pode-se perguntar sobre o destino da conservação do momento linear e da questão relacionada ao centro de massa. Isto é discutido em detalhes em [22], onde é explicado como a invariância de Galileu da eq.(2.4) é substituída pela invariância de Newton-Hooke da eq.(2.73).

2.3.9 Soluções cosmológicas particulares

Apesar das soluções Newtonianas discretas serem espacialmente não-homogêneas, sua dependência temporal corresponde exatamente ao modelo de pressão nula da relatividade geral [23-26]. A seguir apresentamos as soluções estáticas e as soluções em expansão para o modelo considerado. Um estudo mais detalhado destas soluções será feita mais a frente no capítulo 4 desta dissertação.

2.3.10 Soluções estáticas

No caso das soluções estáticas ($S(t) = S_0 = \text{const.}$), e a eq.(2.83) já não é uma consequência da eq.(2.76), que é a única equação gravitacional a ser satisfeita, além da eq.(2.47).

Como vimos, soluções estáticas implicam que $S(t) = S_0 = \text{const.}$, logo a eq.(2.76) toma a forma

$$\frac{1}{S(t)} \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = -\frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} + \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow 0 = -\frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} + \frac{\Lambda}{3},$$

o que significa dizer que, soluções estáticas existem, se e somente se,

$$\frac{\Lambda}{3} = \frac{G\tilde{M}}{S_0^3} > 0. \quad (2.84)$$

Soluções estáticas correspondentes a massas discretas existem para qualquer configuração central de massa central (2.47), desde que $\Lambda > 0$. A única equação gravitacional a ser satisfeita, além das eqs.(2.47) e a (2.84), com $\tilde{M} > 0$ definido por (2.88). Claramente, existem soluções para qualquer valor de \tilde{M} e $\Lambda > 0$.

Estas soluções são as análogas discretas Newtonianas da solução estática de Einstein. Da mesma forma que no caso da relatividade geral, elas são instáveis [27].

2.3.11 Soluções com expansão

Os modelos dinâmicos com $\Lambda > 0$ podem fornecer boas descrições do universo real após o universo dominado pela matéria, e mais especificamente, desde o tempo do desacoplamento entre matéria e radiação [23-26].

Estas soluções dependem da forma de \tilde{M} , E e Λ , e admitem soluções monotônicas apenas se $E \geq 0$, e uma outra classe mais ampla de soluções, em outras condições. Admitindo que $\Lambda \geq 0$, *bounces* podem ocorrer se e somente se $E < 0$. No caso contrário, o universo tem um início singular onde $S(t) \rightarrow 0$. O universo se expandirá eternamente, a menos que $E < 0$, quando ele pode colapsar.

Soluções paramétricas exatas podem ser obtidas quando $\Lambda = 0$ [23]. A solução mais simples é a *solução de Einstein de-Sitter*, que pode ser obtida considerando $\Lambda = 0$ e $E = 0$ na eq.(2.83):

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \right]^2 = \frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} + \frac{E}{S^2(t)} + \frac{\Lambda}{6},$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \right]^2 = \frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} \Rightarrow \dot{S}^2(t) = \frac{2S^2(t)G\tilde{M}}{S^3(t)} \Rightarrow \dot{S}^2(t) = \frac{2G\tilde{M}}{S(t)}.$$

Resolvendo a equação anterior obtemos a seguinte solução:

$$S(t) = S_0 t^{2/3}, S_0 = \left(\frac{9}{2} G\tilde{M} \right)^{1/3}, \quad (2.85)$$

que dá uma solução para qualquer \tilde{M} (ao contrário do caso da relatividade geral, o qual não temos a liberdade de reescalonar $S(t)$). Soluções assintóticas, para t grande (no caso da expansão eterna) se dividem em três casos:

- 1) $\Lambda > 0$;
- 2) $\Lambda = 0, E > 0$;

3) $\Lambda = 0, E = 0$.

No caso 1, a solução assintótica é a *solução de de-Sitter*

$$S(t) = \alpha \exp Ht, H = \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2}, \quad (2.86)$$

onde α é arbitrário. No caso 2, a solução assintótica é a *solução de Milne*

$$S(t) = Ht, H^2 = 2E, \quad (2.87)$$

que é novamente independente de \tilde{M} . No caso 3, a solução assintótica é a mesma que a solução exata (2.85).

Estes modelos não representam bem a dinâmica do universo, nos momentos iniciais, quando a radiação dominava e os efeitos da relatividade geral, conseqüentemente, devem ser levados em conta, tanto porque a massa gravitacional ativa é $(\rho + 3p/c^2)$, ao invés de ρ [27] e porque a equação de conservação de energia tem o termo de fonte $(\rho + p/c^2)$ ao invés de ρ . No entanto, a formação de estruturas em larga escala, ocorre após o desacoplamento e assim estas equações devem fornecer uma boa descrição da realidade, naquele tempo.

2.3.12 Problemas

Para a situação tipo FLRW definido pela eq.(2.40) temos um intrigante problema de ajuste fino:

Ajuste Fino: Em boa aproximação, vemos uma expansão homotética tipo FLRW. Mas, a fim de ter este resultado, as posições iniciais das partículas devem ser obrigadas a satisfazer a eq.(2.47). Qual tipo de explicação se pode dar para um ajuste fino dos dados iniciais na cosmologia Newtoniana?

Presumivelmente a resposta deve ser procurada através de um estado relativístico inicial que resulta em tempos tardios em uma tal configuração Newtoniana. Talvez, também pode ser justificada por um princípio de mínima energia, que favorece esta distribuição, mas não está claro como isto deve funcionar.

2.4 A equação de configuração central

A equação de configuração central, eq.(2.47), dada por

$$\tilde{M}m_i\mathbf{r}_i = \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \quad (2.88)$$

é a equação de valor inicial da cosmologia Newtoniana discreta: uma vez que sendo satisfeita para um tempo inicial, será satisfeita para todos os instantes, fato este que se constitui na sua essência. Ela desempenha um papel fundamental na mecânica celeste [28, 29, 30] e suas soluções tem sido estudada com profundidade em [18], mas merece muito mais estudo.

Considerado como um problema gravitacional tridimensional, é como se houvesse uma força proporcional à distância entre as partículas, bem como a lei de atração do inverso do quadrado, i.é, é como se houvesse uma constante cosmológica nesse contexto gravitacional tridimensional. Mas não é o mesmo que uma constante cosmológica Λ , que não tem efeito sobre a equação espacial de atração gravitacional (2.88). O papel de Λ é mudar o tempo de evolução do sistema, (ver eq.(2.83)).

2.4.1 Algumas propriedades de configurações centrais

Centro de massa . O centro de massa \mathbf{r}_{CM} é dado por

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i. \quad (2.89)$$

Substituindo a eq.(2.47) na eq.(2.89), obtém-se

$$M\mathbf{r}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\tilde{M}} \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = 0, \quad (2.90)$$

porque a soma é simétrica, mas a quantidade que está sendo somada é antissimétrica. Assim, o centro de massa do sistema encontra-se na origem, que é uma localização preferencial para estas distribuições homogêneas. Substituindo a eq.(2.42) na eq.(2.20), e usando o resultado dado por eq.(2.90), obtém-se

$$\mathbf{P} \equiv \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i = \dot{S}(t) \sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0, \quad (2.91)$$

e portanto, o momento linear conservado, é zero. De forma análoga para o momento angular em torno do centro de massa, tem-se, substituindo as eqs.(2.40) e (2.42) na eq.(2.21), o seguinte resultado

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i) = S(t) \dot{S}(t) \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = 0. \quad (2.92)$$

Portanto, o momento angular total também é nulo.

Forças Efetivas. Pode-se representar a natureza da configuração central em termos de forças efetivas e potenciais (efetivas porque elas se referem a distâncias comovéis \mathbf{r}_i ao invés de distâncias reais \mathbf{x}_i), que ocorrem na equação da força (2.2) e seus potenciais resultantes (2.6).

Multiplicando a eq.(2.14) pelo fator $m_i\mathbf{r}_i$, teremos:

$$M = \sum_j m_j \Rightarrow Mm_i\mathbf{r}_i = m_i\mathbf{r}_i \sum_j m_j \Rightarrow m_i\mathbf{r}_i = \frac{1}{M}m_i\mathbf{r}_i \sum_j m_j. \quad (2.93)$$

Somando e subtraindo o termo $\frac{1}{M} \sum_j m_j m_i \mathbf{r}_j$ no segundo membro da eq.(2.93), obtém-se

$$m_i\mathbf{r}_i = \frac{1}{M}m_i\mathbf{r}_i \sum_j m_j = \frac{1}{M} \sum_j m_j m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \frac{m_i}{M} \sum_j m_j \mathbf{r}_j. \quad (2.94)$$

Usando a eq.(2.90), percebemos que o último termo da eq.(2.94) é nulo, i.é, $\sum_j m_j \mathbf{r}_j = 0$.

Logo, ficamos com a seguinte equação:

$$m_i\mathbf{r}_i = \frac{1}{M} \sum_{j \neq i} m_j m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (2.95)$$

Substituindo a eq.(2.95) na eq.(2.88), tem-se o seguinte resultado

$$\tilde{M}m_i\mathbf{r}_i = \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \Rightarrow \tilde{M} \frac{1}{M} \sum_{j \neq i} m_j m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (2.96)$$

Multiplicando a eq.(2.96) por G e reorganizando os termos, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{G\tilde{M}}{M} \sum_{j \neq i} m_j m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - G \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} &= 0. \\ \sum_{j \neq i} G m_j m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \left(\frac{G\tilde{M}}{M} - \frac{G}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Definindo $r_{ij} := |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ e a força efetiva entre partículas, $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$, da forma

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij} := m_j m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \left(\frac{G\tilde{M}}{M} - \frac{G}{r_{ij}^3} \right), \quad (2.98)$$

encontramos que a eq.(2.97) é, efetivamente, dada por

$$\sum_{i \neq j} \tilde{\mathbf{F}}_{ij} = 0, \quad (2.99)$$

que é invariante por translação, de modo que é irrelevante onde se encontra o centro de massa. Por outro lado, a força efetiva entre pares de partículas anula-se, quando $|\mathbf{r}_{ij}| = 0$, isto é, $\tilde{\mathbf{F}}_{ij} = 0$.

2.4.2 Funções Potencial

Potenciais para partículas

Escrevendo a equação de configuração central (2.88) como

$$\tilde{\mathbf{F}}_i := \tilde{\mathbf{F}}_i^{(1)} + \tilde{\mathbf{F}}_i^{(2)} = 0, \quad (2.100)$$

onde $\tilde{\mathbf{F}}_i^{(1)}$ é dado por

$$\tilde{\mathbf{F}}_i^{(1)} = \sum_{j \neq i} \tilde{\mathbf{F}}_{ij}^{(1)} = - \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad (2.101)$$

e $\tilde{\mathbf{F}}_i^{(2)}$ é definido por

$$\tilde{\mathbf{F}}_i^{(2)} := G\tilde{M}m_i \mathbf{r}_i. \quad (2.102)$$

Note que estes são definidos em termos das coordenadas comovéis, \mathbf{r}_i , ao invés de coordenadas Newtonianas \mathbf{x}_i . Definindo as energias associadas como

$$\tilde{V}_i := \tilde{V}_{(-1)i} + \tilde{V}_{(2)i}, \quad (2.103)$$

onde a energia potencial gravitacional efetiva, homogênea de grau -1 , é dada por

$$\tilde{V}_{(-1)i} := - \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|}, \quad (2.104)$$

e a energia potencial efetiva repulsiva, homogênea de grau $k = 2$, tem a seguinte forma:

$$\tilde{V}_{(2)i} := -\frac{1}{2}G\tilde{M}m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (2.105)$$

Estas também são definidas em termos das coordenadas comóveis \mathbf{r}_i .

Destas definições, como no caso da eq.(2.9), temos:

$$\tilde{\mathbf{F}}_i^{(1)} = -\frac{\partial \tilde{V}_{(-1)i}}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_i^{(2)} = -\frac{\partial \tilde{V}_{(2)i}}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (2.106)$$

As soluções da equação de configuração central são os pontos críticos de \tilde{V}_i , ou seja,

$$\tilde{\mathbf{F}}_i = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \tilde{V}_{(-1)i} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \tilde{V}_{(2)i} = 0. \quad (2.107)$$

2.4.3 Um Princípio variacional para configurações centrais

Definindo a energia total associada como

$$\tilde{V} := \tilde{V}_{(-1)} + \tilde{V}_{(2)}, \quad (2.108)$$

onde a energia potencial gravitacional total efetiva, homogênea de grau -1 , é

$$\tilde{V}_{(-1)} := \sum_i \tilde{V}_{(-1)i} = - \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|}, \quad (2.109)$$

e a energia potencial repulsiva total efetiva, homogênea de grau $k = 2$, é

$$\tilde{V}_{(2)} := \sum_i \tilde{V}_{(2)i} = -\frac{1}{2} \sum_i G\tilde{M}m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i, \quad (2.110)$$

Estas são, também, definidas em termos das coordenadas comóveis, \mathbf{r}_i . Por definição, elas são todas constantes.

A eq.(2.110) corresponde a $\tilde{V}_{(2)} := -G\tilde{M}\tilde{I}_0$, enquanto (2.52) é $2G\tilde{M}\tilde{I}_0 = -\tilde{V}_{(-1)}$. Então, combinando-se estas equações tem-se a relação tipo-virial

$$\tilde{V}_{(-1)} = 2\tilde{V}_{(2)}, \quad (2.111)$$

para a energia efetiva (veja eq.(2.39)). Isto implica que a energia total efetiva pode ser expressa em termos de um ou outro termo. Tendo em vista que

$$\tilde{V} = \tilde{V}_{(-1)} + \tilde{V}_{(2)},$$

como $\tilde{V}_{(-1)} = 2\tilde{V}_{(2)}$, logo:

$$\tilde{V} = \tilde{V}_{(-1)} + \frac{1}{2}\tilde{V}_{(-1)} = \frac{3}{2}\tilde{V}_{(-1)}$$

ou

$$\tilde{V} = \tilde{V}_{(-1)} + \tilde{V}_{(2)},$$

$$\tilde{V} = 2\tilde{V}_{(2)} + \tilde{V}_{(2)} = 3\tilde{V}_{(2)}.$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\tilde{V} = \frac{3}{2}\tilde{V}_{(-1)} = 3\tilde{V}_{(2)} \quad (2.112)$$

Pontos críticos de \tilde{V}_i são claramente pontos críticos de $\tilde{V} = \sum_i \tilde{V}_i$. Uma vez que \tilde{V} torna-se infinitamente grande e negativo à medida que dois ou mais pontos se aproximam

um do outro ou à medida que um ou mais recuam até o infinito, podemos ver que deve haver pelo menos um máximo global e nenhum mínimo global.

O artigo de Ellis e Gibbons [11] mostrou de que forma podem ser obtidas soluções exatas Newtonianas para configurações de partículas pontuais que gravitam e que movem-se homoteticamente.

Capítulo 3

Cosmologia Newtoniana contínua

Procuraremos, neste capítulo, obter um modelo cosmológico contínuo a partir do modelo discreto que vimos anteriormente. Para isto, vamos substituir a distribuição discreta de massas por uma densidade de distribuição contínua. Seguindo o princípio cosmológico, admitiremos que toda a massa do universo esteja distribuída uniformemente em cada época t . Dessa forma, a densidade de matéria vai depender apenas do tempo e, portanto, $\rho = \rho(t)$, torna-se a principal função em termos da qual o Universo será descrito.

3.1 A Equação de Configuração Central

Vamos supor que nosso modelo de universo é limitado por uma superfície esférica A , com centro em O e cujo raio será função apenas do tempo. Assim, o raio dessa esfera em qualquer tempo t será dado por $a(t)$, medida em relação à origem do sistema de coordenadas O , situada no centro da esfera.

Na cosmologia Newtoniana, a equação para o fator de escala é obtida considerando as forças que atuam sobre diferentes partículas localizadas na superfície da esfera de raio $a(t)$. Somente a massa no interior da esfera de raio $a(t)$ produz uma força gravitacional não nula sobre as partículas na superfície dessa esfera, de acordo com o teorema de Gauss para a dinâmica Newtoniana. Assim, a massa distribuída numa esfera de raio $a_i > a(t)$ não contribui para a força.

Em uma época t_0 , onde a dinâmica (movimento e a distribuição) do sistema é conhecida, a casca esférica com raio y e espessura dy , terá uma área dada por $A = 4\pi y^2$ e o volume igual a $V = 4\pi y^3/3$. Logo derivando a expressão do volume em relação a y teremos:

$$dV(y) = 4\pi y^2 dy \quad (3.1)$$

Sabendo que a densidade de matéria depende apenas do tempo, tendo em vista que estamos supondo a massa uniformemente distribuída por toda a casca esférica, podemos escrever que:

$$\rho(t_0) = \frac{m(y)}{V(y)} \Rightarrow m(y) = \rho(t_0) \cdot V(y) \Rightarrow dm(y) = \rho(t_0) \cdot dV(y). \quad (3.2)$$

Substituindo a eq.(3.1) na eq.(3.2), obtemos:

$$dm(y) = 4\pi y^2 \rho(t_0) dy. \quad (3.3)$$

Para passarmos da descrição discreta para a contínua devemos considerar que a massa total na região limitada por uma esfera A , de raio a_0 é dado por:

$$\sum_{i=1}^N m_i \Rightarrow \int_0^{a_0} dm(y). \quad (3.4)$$

Dessa forma, levando em conta a eq.(3.3), podemos definir a massa total do sistema como:

$$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i \Rightarrow M = \int_0^{a_0} 4\pi y^2 \rho_0 dy, \quad (3.5)$$

isto é,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{a_0} 4\pi y^2 \rho_0 dy = 4\pi \rho_0 \int_0^{a_0} y^2 dy \\ M &= \frac{4}{3} \pi \rho_0 a_0^3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $a_0 = a(t_0)$ e $\rho_0 = \rho(t_0)$. Vamos supor que $f(r_i)$ seja uma função qualquer das N partículas, situadas numa região limitada pela superfície esférica A . Para qualquer função $f(r_i)$, a soma $m_i f(r_i)$ pode ser escrito como:

$$\sum_{i=1}^N m_i f(r_i) \Rightarrow \int_0^{a_0} 4\pi y^2 \rho_0 f(y) dy. \quad (3.7)$$

Vimos na seção anterior, na abordagem discreta da cosmologia, que a cinemática do universo em expansão era dada por:

$$\mathbf{x}_i = S(t)\mathbf{r}_i, \quad d\mathbf{r}_i/dt = 0, \quad (3.8)$$

onde \mathbf{x}_i é a coordenada física e \mathbf{r}_i é a coordenada comóvel da partícula i . Derivando a eq.(3.8) com relação ao tempo, obtivemos:

$$\mathbf{v}_i := \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \dot{S}(t)\mathbf{r}_i = H(t)\mathbf{x}_i. \quad (3.9)$$

Também chamada de lei de Hubble. Substituindo a eq.(3.8) na eq.(2.4), e lembrando que $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t_0)$ independe do tempo, chegamos a seguinte equação:

$$m_i\mathbf{r}_i \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{S^2(t)|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (3.10)$$

Definindo,

$$C(t) := S^2(t) \frac{d^2 S(t)}{dt^2}, \quad (3.11)$$

então a eq.(3.10) torna-se

$$C(t)m_i\mathbf{r}_i = - \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (3.12)$$

Em seguida, lembrando-se das eqs.(2.13) e (3.8), a consistência exige que $C(t)$ seja uma constante. Logo, derivando a eq.(3.12) em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (C(t)m_i\mathbf{r}_i) = 0 \Rightarrow C(t) = const =: -G\tilde{M}, \quad (3.13)$$

que define a constante \tilde{M} . Note que \tilde{M} tem a dimensão de massa por unidade de volume. A partir da eq.(3.12) em conjunto com a eq.(3.13) devemos ter

$$\tilde{M}m_i\mathbf{r}_i = \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad (3.14)$$

para todos os valores de i . Este conjunto de N equações não lineares independentes do tempo é conhecida como **equação de configuração central**, que é uma condição consistente para eq.(3.8) fornecer uma solução.

Nosso objetivo aqui é escrever a forma contínua da equação de configuração central. Para isso consideremos a equação de configuração central na sua forma restrita, a qual foi demonstrada no cap.2, eq.(2.52).

$$2G\tilde{M}\tilde{I}_0 = -\tilde{V}_{(-1)}, \quad (3.15)$$

onde o potencial efetivo $\tilde{V}_{(-1)}$ e o momento de inércia \tilde{I}_0 foram definidos por

$$\tilde{V}_{(-1)} := - \sum_i \sum_{j \neq i} \left(\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right) = \text{const.} \quad (3.16)$$

$$\tilde{I}_0 := \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{r}_i)^2 = \text{const.} \quad (3.17)$$

Dessa forma, para encontrarmos a forma contínua da eq.(3.15), basta escrevermos os termos $\tilde{V}_{(-1)}$ e \tilde{I}_0 na forma contínua.

Usando a eq.(3.7), podemos escrever a equação (3.17) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_0 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{r}_i)^2 = \text{const.} &\implies \tilde{I}_0 = \frac{1}{2} \int_0^{a_0} 4\pi y^2 \rho_0 y^2 dy, \\ \tilde{I}_0 = \frac{1}{2} \int_0^{a_0} 4\pi \rho_0 y^4 dy &= \frac{4}{2} \pi \rho_0 \int_0^{a_0} y^4 dy, \\ \tilde{I}_0 &= \frac{2}{5} \pi \rho_0 a_0^5. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para calcular $\tilde{V}_{(-1)}$ na forma contínua, vamos supor que $i < j$, se a partícula j está mais distante do centro O que a partícula i . Então, o potencial gravitacional experimentado pela partícula j em um tempo t_0 , devido as partículas i situadas mais próximas do centro que j , é:

$$\Phi(\mathbf{r}_i) = -G \sum_{i=1}^{j-1} \frac{m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (3.19)$$

Podemos escrever a equação (3.16) da seguinte forma:

$$-\tilde{V}_{(-1)} := \sum_i \sum_{j \neq i} \left(\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right) = \sum_{j=1}^N m_j \sum_{i=1}^{j-1} \frac{Gm_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (3.20)$$

Substituindo a eq.(3.19) na eq.(3.20), temos:

$$-\tilde{V}_{(-1)} = \sum_{j=1}^N m_j [-\Phi(\mathbf{r}_j)]. \quad (3.21)$$

Usando a eq.(3.7), a forma contínua do potencial efetivo fica:

$$-\tilde{V}_{(-1)} = \sum_{j=1}^N m_j [-\Phi(\mathbf{r}_j)] \implies -\tilde{V}_{(-1)} = - \int_0^{a_0} 4\pi y^2 \rho_0 \Phi(y) dy, \quad (3.22)$$

onde $\Phi(y)$ é o potencial gravitacional a uma distância y de O em um tempo t_0 devido a todas as massas $M'(y)$ situadas dentro da esfera de raio y ($y \leq a_0$). Assim:

$$M'(y) = \int_0^y dm(y) = \int_0^y 4\pi\rho_0 y^2 dy,$$

$$M'(y) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 y^3. \quad (3.23)$$

Logo, o potencial gravitacional pode ser escrito como:

$$\Phi(y) = -\frac{GM'(y)}{y} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 \frac{y^3}{y},$$

$$\Phi(y) = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 y^2. \quad (3.24)$$

Note que essa expressão fornece apenas o potencial gravitacional da distribuição de massa interna a y , ou seja, apenas a fração M' de M contribui para Φ na equação anterior. Com essa expressão, podemos, finalmente, escrever a forma contínua de $\tilde{V}_{(-1)}$. Substituindo a eq.(3.24) na eq.(3.22), obtemos:

$$-\tilde{V}_{(-1)} = -\int_0^{a_0} 4\pi y^2 \rho_0 \left[-\frac{4}{3}\pi G\rho_0 y^2 \right] dy = \frac{16}{3}\pi^2 G\rho_0^2 \int_0^{a_0} y^4 dy = \frac{16}{3}\pi^2 G\rho_0^2 \frac{a_0^5}{5}$$

$$-\tilde{V}_{(-1)} = \frac{16}{15}\pi^2 G\rho_0^2 a_0^5 \quad (3.25)$$

Portanto, substituindo as eqs.(3.18) e (3.25), que são, respectivamente, as equações contínuas para o momento de inércia e para o potencial efetivo, na equação de configuração central restrita (3.15), teremos:

$$2G\tilde{M}\tilde{I}_0 = -\tilde{V}_{(-1)} \Rightarrow 2G\tilde{M}\frac{2}{5}\pi\rho_0 a_0^5 = \frac{16}{15}\pi^2 G\rho_0^2 a_0^5$$

Dessa forma temos que a *densidade de configuração central* é dado por:

$$\tilde{M} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{3\tilde{M}}{4\pi}. \quad (3.26)$$

Isolando ρ_0 da eq.(3.6) e substituindo na eq.(3.26), encontramos a importante relação:

$$\tilde{M} = \frac{M}{a_0^3}. \quad (3.27)$$

Portanto,

$$\rho_0 = \frac{3M}{4\pi a_0^3}. \quad (3.28)$$

Na medida que M é uma constante no tempo, temos que:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi \rho_0 a_0^3 \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\rho_0 a_0^3) = 0 \Rightarrow \rho_0 a_0^3 = cte. \quad (3.29)$$

Assim, $\rho(t_0) a^3(t_0) = \rho(t) a^3(t) = cte$ para qualquer tempo t . O que nos permite chegar na seguinte relação:

$$\frac{\rho(t)}{\rho_0} = \frac{a_0^3}{a^3}. \quad (3.30)$$

A eq.(3.30) nos mostra a dependência da densidade em termos do fator de escala. Esse resultado indica que se todas as dimensões lineares forem magnificadas por um fator $a(t)$, então, todos os volumes devem aumentar por um fator $a^3(t)$ e a densidade precisa igualmente diminuir.

3.2 As equações de evolução no tempo.

Substituindo a eq.(3.13) em eq.(3.11), obtemos a chamada *equação de Raychaudhuri*:

$$-\frac{G\tilde{M}}{S^2(t)} = \frac{d^2 S(t)}{dt^2}, \quad (3.31)$$

Multiplicando a eq.(3.31) por ds/dt , a qual deve ser diferente de zero para quase todos t por causa da eq.(2.43), obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) = -\frac{G\tilde{M}}{S^2(t)} \frac{dS(t)}{dt} = \frac{d^2 S(t)}{dt^2} \frac{dS(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2. \quad (3.32)$$

a qual pode ser integrada fornecendo a *equação diferencial cosmológica*:

$$\frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \right]^2 - \frac{E}{S^2(t)}, \quad (3.33)$$

onde E é uma constante de integração. Vamos reescrever a eq.(3.33) numa forma algébrica idêntica à obtida na cosmologia relativística. Isolando E , obtemos:

$$E = -\frac{G\tilde{M}}{S} + \frac{1}{2} \dot{S}^2, \quad (3.34)$$

onde $S = S(t)$. Fazendo um reescalonamento de $S(t)$, temos:

$$R(t) = \mu \cdot S(t), \quad (3.35)$$

onde μ é uma constante. Logo, em termos do novo fator de escala, teremos:

$$E = \frac{\dot{R}^2}{\mu^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{GM}{\frac{R\dot{R}^2}{\mu\mu^2}} \right],$$

$$E = \frac{\dot{R}^2}{2\mu^2} - \frac{GM\mu}{R}.$$

Isolando o fator \dot{R}^2 na equação anterior, obtemos:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} - k, \quad (3.36)$$

onde as constantes C e k são definidas respectivamente, por:

$$C \equiv 2\mu^3 GM, \quad (3.37)$$

$$k \equiv -2\mu^2 E. \quad (3.38)$$

A energia total E do sistema pode ser zero ou diferente de zero. Se $E = 0$ a constante μ pode ser escolhida arbitrariamente, mas qualquer que seja a escolha temos pela eq.(3.38) que k necessariamente será também igual a zero. Se $E \neq 0$ podemos escolher μ tal que

$$\mu^2 = \frac{1}{2|E|},$$

o que implica que se $E > 0$, $k = -1$, e se $E < 0$, $k = +1$. Assim, a escolha do reescalamento vai implicar que a constante k só poderá assumir os valores $+1$, 0 ou -1 . Nessa escolha a eq.(3.36) tem exatamente a mesma forma algébrica que a equação cosmológica obtida pela cosmologia relativística, embora a identificação quase completa somente seja possível quando calcularmos o coeficiente C em termos da distribuição contínua de matéria. Veremos nos próximos capítulos, que a interpretação do termo k na teoria Newtoniana difere da obtida na cosmologia relativística. Como podemos perceber, a teoria Newtoniana interpreta esse termo como energia, enquanto que na cosmologia relativística k vai especificar a curvatura do espaço.

Vamos agora escrever a constante C em termos da distribuição contínua de matéria. Isolando o fator $S(t)$ nas eqs.(3.8) e (3.35), obtemos:

$$\mathbf{x}_i(t) = S(t) \cdot \mathbf{r}_i(t_0) \Rightarrow S(t) = \frac{\mathbf{x}_i(t)}{\mathbf{r}_i(t_0)}.$$

$$R(t) = \mu \cdot S(t) \Rightarrow S(t) = \frac{R(t)}{\mu}.$$

Igualando ambas as equações concluímos que:

$$\frac{R(t)}{\mu} = \frac{\mathbf{x}_i(t)}{\mathbf{r}_i(t_0)}. \quad (3.39)$$

O fator de escala $R(t)$ é o mesmo para todas as partículas do substrato cosmológico, inclusive para as situadas na borda da distribuição onde $\mathbf{x}_{borda}(t) = a(t)$. Logo:

$$\frac{R(t)}{\mu} = \frac{\mathbf{x}_i(t)}{\mathbf{r}_i(t_0)} = \frac{a}{a_0}.$$

Elevando a expressão anterior ao cubo e lembrando da eq.(3.30), i.é, $\rho \cdot a^3 = \rho_0 \cdot a_0^3 = cte$ para qualquer tempo t , chegamos a importante relação entre a densidade de matéria do universo e o fator de escala $R(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{R^3(t)}{\mu^3} &= \frac{a^3}{a_0^3}. \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \frac{R^3(t)}{\mu^3}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Portanto, isolando μ^3 na eq.(3.40) e considerando a eq.(3.26), podemos desta maneira, escrever a constante C , eq.(3.37), na sua forma contínua:

$$\begin{aligned} C &= 2\mu^3 G \tilde{M} = 2 \frac{R^3(t)\rho}{\rho_0} G \frac{4}{3} \pi \rho_0, \\ C &= \frac{8}{3} \pi G \rho(t) R^3(t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.3 Constante Cosmológica

Vamos supor a existência de uma força cosmológica dada pela seguinte relação:

$$F_c = \frac{1}{3} \Lambda m_i \mathbf{x}_i. \quad (3.42)$$

Logo, adicionando esta constante cosmológica Newtoniana na lei da força, dada pela eq.(2.4), obtemos o seguinte resultado

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} + \frac{\Lambda m_i \mathbf{x}_i}{3}. \quad (3.43)$$

Considerando a eq.(3.8), podemos reescrever a eq.(3.43) na forma:

$$m_i \mathbf{r}_i S^2(t) \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = -G \tilde{M} m_i \mathbf{r}_i + \frac{\Lambda S^3(t) m_i \mathbf{r}_i}{3}. \quad (3.44)$$

Isto implica numa equação equivalente à eq.(3.31), mas com constante cosmológica. Multiplicando a equação anterior por $1/S^3 m_i \mathbf{r}_i$ temos:

$$\frac{1}{S(t)} \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = -\frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.45)$$

onde a matéria causa desaceleração e Λ causa uma aceleração. Para integrar, considerando que $dS/dt \neq 0$, basta multiplicar a eq.(3.45) pelo fator $S(t)dS/dt$ para então conseguir:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\Lambda S^2(t)}{6} \right). \quad (3.46)$$

Integrando a equação anterior, a fim de obtermos a equação cosmológica com constante cosmológica, ficamos:

$$\int \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 \right] dt = \int \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) \right] dt + \int \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\Lambda S^2(t)}{6} \right) \right] dt,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right)^2 = \left(\frac{G\tilde{M}}{S(t)} \right) + \left(\frac{\Lambda S^2(t)}{6} \right) + E.$$

Multiplicando a equação anterior pelo fator $1/S^2(t)$, obtemos finalmente a equação de Friedmann:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \right]^2 = \frac{G\tilde{M}}{S^3(t)} + \frac{E}{S^2(t)} + \frac{\Lambda}{6}, \quad (3.47)$$

onde E é uma constante de integração. Isolando E , obtemos:

$$E = -\frac{G\tilde{M}}{S} + \frac{1}{2}\dot{S}^2 - \frac{1}{6}\Lambda S^2. \quad (3.48)$$

Considerando a eq.(3.35) e isolando o fator \dot{R}^2 , obtemos:

$$E = \dot{S}^2 \left[-\frac{G\tilde{M}}{S\dot{S}^2} + \frac{1}{2} - \frac{\Lambda S^2}{6\dot{S}^2} \right].$$

$$E = \frac{\dot{R}^2}{\mu^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{G\tilde{M}}{\frac{R\dot{R}^2}{\mu\mu^2}} - \frac{1}{6}\Lambda \frac{R^2}{\mu^2} \frac{\mu^2}{\dot{R}^2} \right],$$

$$\frac{\dot{R}^2}{2\mu^2} = G\tilde{M} \frac{\mu}{R} + \frac{1}{6}\Lambda \frac{R^2}{\mu^2} + E,$$

$$\dot{R}^2 = \frac{2G\tilde{M}\mu^3}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 + 2\mu^2 E. \quad (3.49)$$

Substituindo as eqs.(3.37) e (3.38), definidas anteriormente, na eq.(3.49), obtemos finalmente a *equação cosmológica com constante cosmológica* Λ cujas soluções obteremos no próximo capítulo:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - k. \quad (3.50)$$

A passagem do modelo discreto para o contínuo permite obter a expressão para C na qual a equação diferencial cosmológica (3.50) tem exatamente a mesma forma algébrica que a obtida via relatividade geral. Isso ocorre porque a equação (3.41) é igual a obtida pelo modelo relativístico homogêneo e isotrópico de Friedmann.

Portanto os resultados apresentados até agora mostram claramente que podemos estudar os modelos cosmológicos mais simples do ponto de vista matemático, através de uma abordagem puramente Newtoniana, desde que algumas hipóteses simplificadoras básicas sejam convenientemente formuladas.

Capítulo 4

Cosmologia Newtoniana com constante cosmológica

Na cosmologia Newtoniana, admiti-se que existe um número finito de galáxias que podem ser tratados como partículas clássicas, ou que este substrato cosmológico (conjunto de objetos: galáxias, nebulosas, quasares, etc.) é constituído por um fluido, com diferentes equações de estado. Considera-se também que existe uma força cosmológica global que está relacionada com a constante cosmológica, e que depende do valor desta. A dedução da equação de movimento que descreve a evolução de um universo homogêneo e isotrópico, obtida neste contexto, são equivalentes aos obtidos na relatividade geral, quando se considera a pressão desprezível. As equações obtidas são semelhantes às de Friedmann, que são encontradas no contexto da cosmologia Einsteiniana. No entanto, as duas abordagens possuem interpretações completamente diferentes.

4.1 Cosmologia Newtoniana

Aproximadamente vinte anos após a teoria de Einstein ser anunciada e assim ser formulada a cosmologia relativística, E. A. Milne e W. H. McCrea [5] demonstraram que os resultados básicos observados poderiam ser obtidos a partir de uma perspectiva puramente Newtoniana, ou seja, usando o espaço-plano e estático, além do tempo Newtoniano.

Em larga escala, podemos tratar o Universo como se fosse preenchido por um fluido sem pressão, admitindo, assim, a hipótese do contínuo. Dessa maneira, o estudo das propriedades

do Universo pode ser efetuado se considerarmos que os elementos que o constituem se comportam como fluido. Usando esta hipótese, a Cosmologia Newtoniana utiliza as equações da hidrodinâmica para descrever o comportamento deste fluido. Desta forma, a dinâmica das partículas constituintes do Universo, caracterizada por uma interação gravitacional, pode ser descrita pelas seguintes equações:

1. Equação da Continuidade,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.1)$$

2. Equação de Euler,

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}, \quad (4.2)$$

3. Equação de Poisson,

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (4.3)$$

onde ρ é a densidade do fluido, \vec{v} é o campo de velocidades, que obedece à lei de Hubble, Φ é o potencial gravitacional e p a pressão do fluido. Geralmente, a pressão é descrita por uma equação do tipo $p = p(\rho)$, denominada equação de estado do fluido. Diferentes equações de estado indicam diferentes constituintes do Universo. Com isso, a hidrodinâmica de fluidos cósmicos é baseada nas equação acima, que são responsáveis por descrever o comportamento de um fluido que, no caso da Cosmologia Newtoniana, hipoteticamente permeia o Universo.

4.1.1 O Modelo Cosmológico

Na hipótese contínua podemos pensar o substrato cosmológico como sendo formado por uma grande nuvem gasosa onde as galáxias são as partículas desse gás ou condensações localizadas do gás intergaláctico, condensações essas que indicam o movimento médio do gás na sua vizinhança. É importante destacarmos que tal nuvem gasosa não pode ser infinitamente grande, mas tão somente arbitrariamente extensa, porém finita. O problema básico reside no fato de que a teoria Newtoniana de gravitação encontra limitações sérias quando aplicada a sistemas infinitos.

Para apresentar a cosmologia Newtoniana vamos considerar apenas a cinemática da nuvem de gás cosmológico. Na medida em que o movimento das partículas do gás é admitido ser estritamente radial, então podemos escrever:

$$r(t) = R(t) \cdot r(t_0). \quad (4.4)$$

Para a época $t = t_0$, onde t_0 representa um tempo presente, o fator de escala é tal que, $R(t_0) = 1$. A derivada da Eq.(4.4) fornece a expressão para a velocidade de uma partícula do gás, dada por:

$$v(r, H) = H(t) \cdot r(t). \quad (4.5)$$

onde $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$ representa o parâmetro de Hubble. A lei de Hubble expressa o fato de que em um universo em expansão, a velocidade radial de recessão de uma galáxia i , a uma distância r da origem do sistema de referência O , é proporcional à distância da galáxia desse mesmo ponto O . Essa lei também é conhecida como lei de velocidade-distância. Devemos impor agora a lei da conservação da massa à nuvem de gás, isto é, a equação da continuidade. Considerando a Eq.(4.5) e o fato de que $\rho = \rho(t)$ temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + 3\rho H(t) = 0. \quad (4.6)$$

Integrando essa equação obtemos:

$$\frac{\rho}{\rho(t_0)} = \frac{1}{R^3(t)}. \quad (4.7)$$

A Eq.(4.7) nos mostra como a condição de conservação de massa determina a dependência da densidade em termos do fator de escala. Esse resultado é consequência da eq.(4.4), pois se todas as dimensões lineares forem aumentadas por um fator de escala $R(t)$, então, todos os volumes devem aumentar por um fator $R^3(t)$ e a densidade deve diminuir do mesmo fator.

Vamos obter a equação da dinâmica do gás usando a equação de Euler. Então, a pressão na nuvem de gás será dada por $p = p(t)$, pois as grandezas cósmicas só dependem do tempo, de acordo com o princípio cosmológico. Neste modelo consideraremos $p = 0$, isto é, admitiremos que a nuvem de gás cosmológica é uma nuvem de poeira, cuja pressão é desprezível. Portanto, a equação de Euler toma a forma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{f} = \left(\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t) \right) r - \vec{f} = 0. \quad (4.8)$$

onde \vec{f} é a força externa por unidade de massa. Usando o fato de que a força gravitacional pode ser escrita como $\vec{f} = -\vec{\nabla} \Phi$, e usando a equação de Poisson, temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = -4\pi G\rho. \quad (4.9)$$

Calculando a divergência da eq.(4.8), obtemos:

$$3 \left(\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t) \right) = -4\pi G\rho. \quad (4.10)$$

Substituindo a eq.(4.7) na eq.(4.10) e usando a definição do parâmetro de Hubble, temos:

$$R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4}{3} \pi G \frac{\rho_0}{R} = 0. \quad (4.11)$$

As eqs.(4.7) e (4.11), que determinam as evoluções de $\rho(t)$ e $R(t)$, coincidem, exatamente, com as obtidas na teoria da relatividade geral, para o caso em que a pressão é nula. A eq.(4.11) mostra claramente que um universo estático, isto é, aquele em que $\dot{R} = \ddot{R} = 0$, só é possível no caso trivial, ou seja, quando a densidade é zero. Tal resultado foi a principal dificuldade enfrentada pela cosmologia no final do século XIX e a forma encontrada para superá-la foi admitir a existência de uma força adicional que somente seria apreciável a grandes distancias. Portanto, além da força gravitacional Newtoniana sobre uma partícula, consideraremos a existencia de uma outra força, de natureza cosmológica.

Admitindo que a força gravitacional de uma partícula em A é devida inteiramente à matéria contida em A com centro em O , então a força gravitacional será dada por:

$$\vec{f} = \ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} = -\frac{4}{3} \pi G \rho r \hat{r}. \quad (4.12)$$

A constante cosmológica pode ser introduzida se alterarmos a equação acima, adicionando a força cosmológica dada por $F = \frac{1}{3} \Lambda m r$ na eq.(4.12), temos assim que a força total experimentada pela partícula é a soma da força gravitacional e da força cosmológica dada por:

$$\vec{f} = \ddot{r} = -\frac{4}{3} \pi G \rho r + \frac{1}{3} \Lambda r, \quad (4.13)$$

o que implica na modificação da equação de Poisson para:

$$\nabla \cdot \vec{f} = -4\pi G \rho + \Lambda. \quad (4.14)$$

Portanto, com a constante cosmológica a eq.(4.11) torna-se

$$R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4}{3} \pi G \rho_0 - \frac{1}{3} \Lambda R^3 = 0. \quad (4.15)$$

Se multiplicarmos por $2\dot{R}/R^2$ e integrarmos o resultado fazendo $C = \frac{8}{3} \pi G \rho_0$, obteremos a Equação Diferencial Cosmológica:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{1}{3} \Lambda R^2 - k. \quad (4.16)$$

onde k é uma constante de integração. Ela é interpretada na cosmologia Newtoniana como energia e na relativística como curvatura do espaço, podendo assumir valores $+1$, 0 ou -1 .

Assumimos neste método que p é zero, ou seja, que a nuvem de gás cosmológica é na realidade uma nuvem de poeira.

A finitude da nuvem de poeira cosmológica é necessária, não só devido ao problema da divergência do potencial Newtoniano no infinito, mas também devido ao fato de que a lei de velocidade-distância só é válida no contexto Newtoniano para galáxias com pequenas velocidades relativas se comparadas com a velocidade da luz.

Assim, a teoria Newtoniana só é aplicável se duas galáxias vizinhas tiverem pequenas velocidade de recessão. Portanto, se quisermos calcular a aceleração dos fótons de origem cosmológica não podemos utilizar a teoria discutida acima na medida em que ela é válida apenas para o movimento de partículas (galáxias) em baixa velocidade e em volumes esféricos limitados.

4.2 Soluções da Equação Cosmológica

4.2.1 Soluções da Equação Cosmológica com $\Lambda = 0$

Nesta seção apresentaremos as principais soluções da eq.(4.16), isto é, as soluções para $\Lambda = 0$. Como vimos acima, a equação diferencial cosmológica tem a mesma forma algébrica que a equação de Friedmann e, portanto, os resultados acerca da dinâmica dos modelos cosmológicos obtidos aqui são também válidos em cosmologia relativística. Esse modelo de universo é convencionalmente chamado de modelo cosmológico padrão. Para estudarmos a evolução do universo por meio da eq.(4.16), é conveniente dividirmos o problema em três casos distintos: aqueles em que $k = 0$, $k = +1$ e $k = -1$.

Caso $k = 0$

Neste caso a eq.(4.16) fica:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - k \Rightarrow \dot{R}^2 = \frac{C}{R}. \quad (4.17)$$

Para integrarmos essa equação vamos assumir a condição inicial conhecida como a Grande Explosão (Big Bang), onde $R = 0$ quando $t = 0$. Essa condição inicial é amplamente interpretada como sendo a representação do estágio inicial do universo. Assim, a integração

da eq.(4.17) produz:

$$R = \left(\frac{9}{4}Ct^2\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow R \propto t^{\frac{2}{3}}. \quad (4.18)$$

Essa solução para o fator de escala é chamada de modelo de Einstein-de Sitter, conforme mostrado na Figura 4.1, ao final desta seção. Nesse caso o *parâmetro de Hubble* $H(t)$ e o *parâmetro de desaceleração* $q(t)$ são dados respectivamente por:

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{2}{3t}, \quad (4.19)$$

$$q(t) = -\frac{R\dot{R}}{\dot{R}^2} = \frac{1}{2}. \quad (4.20)$$

Portanto, se a eq.(4.16) descreve a dinâmica cosmológica, quaisquer que sejam os valores de k e Λ o universo se comporta como no modelo de Einstein-de Sitter para pequenos valores de t , isto é, expande a uma taxa proporcional a $t^{2/3}$ próximo a Grande Explosão. Para o caso da Cosmologia Newtoniana, se $k = 0$, a energia total é igual a zero e a expansão do universo dura um período infinito de tempo, ou seja, apenas pára para $t = \infty$.

Caso $k = +1$

Neste caso a eq.(4.16) torna-se

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} - 1. \quad (4.21)$$

Cuja solução é obtida após utilizarmos as condições iniciais da grande explosão e as mudanças de variáveis $u^2 = R/C$, $u = \text{sen}\theta$. Dessa forma a integração da eq.(4.21) fornece a solução:

$$\frac{R}{C} = \sin^2 \left[\frac{t}{C} + \sqrt{\frac{R}{C} \left(1 - \frac{R}{C}\right)} \right] \Rightarrow 0 \leq R/C \leq 1. \quad (4.22)$$

Na cosmologia Newtoniana, $k > 0$ significa dizer que a energia total do sistema ($E = T + V$) é negativo, isso implica que a energia potencial gravitacional é superior a energia cinética.

Caso $k = -1$

Com esse valor de k a equação de Friedmann torna-se:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + 1. \quad (4.23)$$

A integração da eq.(4.23) fornece a expressão:

$$\frac{R}{C} = \sinh^2 \left[\sqrt{\frac{R}{C} \left(1 + \frac{R}{C}\right)} - \frac{t}{C} \right] \Rightarrow 0 \leq R \leq +\infty. \quad (4.24)$$

Esse universo é chamado de modelo de expansão eterna. Assim, para Cosmologia Newtoniana se $k < 0$, isso quer dizer que a energia total será positiva, o que implica que a energia cinética será maior que a energia potencial. Dessa forma a expansão continua para sempre. Segue abaixo na Figura (4.1), os gráficos dos modelos de universo descritos acima.

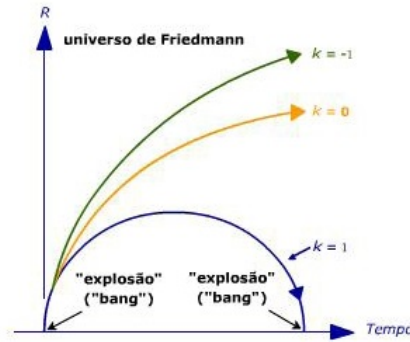


Figura 4.1: Modelos de Universos

4.2.2 Soluções da Equação Cosmológica para $\Lambda > 0$ e $\Lambda < 0$

Nossa tarefa agora é resolver a equação diferencial ordinária de primeira ordem e não linear para os diferentes valores da constante cosmológica Λ considerando um espaço plano ($k = 0$). Vale lembrar que os parâmetros da equação cosmológica são regidos pelas seguintes condições:

$$C > 0; -\infty < \Lambda < +\infty; k = -1, 0, +1 \quad (4.25)$$

Há várias formas de se resolver a equação cosmológica, em geral podemos resolvê-la usando funções elípticas, ou em vez disso, podemos usar computação gráfica para gerar as soluções numericamente. Contudo, muitos casos podem ser integrados diretamente usando as funções elementares, ou se isto não for possível, as funções elementares podem ser usadas para investigar suas características qualitativas.

Vamos restringir nossa atenção ao caso do espaço plano, ou seja, $k = 0$. Para o espaço plano a equação cosmológica reduz-se a:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2. \quad (4.26)$$

Vamos considerar dois casos distintos: para $\Lambda > 0$ e $\Lambda < 0$.

Caso em que $\Lambda > 0$

Para resolver a eq.(4.26) para $\Lambda > 0$ podemos introduzir a nova variável:

$$u = \frac{2\Lambda}{3C}R^3. \quad (4.27)$$

Diferenciando a eq.(4.27) em relação ao tempo e elevando o resultado ao quadrado, encontramos:

$$\dot{u}^2 = \frac{4\Lambda^2 R^4 \dot{R}^2}{C^2}. \quad (4.28)$$

Da equação anterior isolemos os termos $R^4 \dot{R}^2$:

$$R^4 \dot{R}^2 = \frac{\dot{u}^2 C^2}{4\Lambda^2}. \quad (4.29)$$

Multiplicando a eq.(4.26) por R^4 e substituindo no resultado obtido a eq.(4.29), obtemos:

$$\dot{u}^2 = \frac{4\Lambda^2 R^3 C}{C^2} + \frac{4\Lambda^3 R^6}{3C^2}. \quad (4.30)$$

Pela eq.(4.27) temos que:

$$R^3 = \frac{3Cu}{2\Lambda} \rightarrow R^6 = \frac{9C^2 u^2}{4\Lambda^2}. \quad (4.31)$$

Substituindo a eq.(4.31) na eq.(4.30), e fazendo algumas simplificações, obtemos:

$$\dot{u}^2 = 3\Lambda(2u + u^2). \quad (4.32)$$

Tomando a raiz quadrada positiva, temos:

$$\dot{u} = (3\Lambda)^{\frac{1}{2}}(2u + u^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.33)$$

a qual pode ser integrada por partes. Se assumirmos a condição inicial como o modelo do Big Bang, que representa o estágio inicial do universo, o qual $R = 0$ para $t = 0$, logo $u = 0$ inicialmente, então a integração dá:

$$\int_0^u \frac{du}{(2u + u^2)^{1/2}} = \int_0^t (3\Lambda)^{1/2} dt = (3\Lambda)^{1/2} t. \quad (4.34)$$

Se completarmos quadrado na integral- u e tomarmos $v = u + 1$, teremos:

$$\int_0^u \frac{du}{(2u + u^2)^{1/2}} = \int_1^v \frac{dv}{(v^2 - 1)^{1/2}}. \quad (4.35)$$

Fazendo $\cosh w = v$, teremos:

$$\int_0^u \frac{du}{(2u + u^2)^{1/2}} = \int_1^v \frac{dv}{(v^2 - 1)^{1/2}} = \int_0^w \frac{\sinh w dw}{(\cosh^2 w - 1)^{1/2}}. \quad (4.36)$$

Como $\cosh^2 w - \sinh^2 w = 1 \rightarrow \cosh^2 w - 1 = \sinh^2 w$, logo a eq. anterior fica:

$$\int_1^v \frac{dv}{(v^2 - 1)^{1/2}} = \int_0^w \frac{\sinh w dw}{(\cosh^2 w - 1)^{1/2}} = \int_0^w \frac{\sinh w dw}{(\sinh^2 w)^{1/2}} = \int_0^w dw = w. \quad (4.37)$$

Dessa forma concluímos que:

$$(3\Lambda)^{1/2}t = w. \quad (4.38)$$

Mas,

$$v = \cosh w \rightarrow w = \cosh^{-1} v. \quad (4.39)$$

Porém sabemos que $v = u + 1$, mas $u = \frac{2\Lambda R^3}{3C}$, logo:

$$v = \frac{2\Lambda R^3}{3C} + 1. \quad (4.40)$$

Substituindo a eq.(4.40) na eq.(4.39) e levando em conta a eq.(4.38), obtemos:

$$w = \cosh^{-1} \left[\frac{2\Lambda R^3}{3C} + 1 \right] = (3\Lambda)^{1/2}t. \quad (4.41)$$

Enfim, isolando o termo R^3 , obtemos:

$$R^3 = \frac{3C}{2\Lambda} [\cosh[(3\Lambda)^{1/2}t] - 1], \quad (4.42)$$

que graficamente, pode ser visto na Figura (4.2).

Caso em que $\Lambda < 0$

Para resolver a eq.(4.26) para $\Lambda < 0$ podemos introduzir a nova variável:

$$u = -\frac{2\Lambda}{3C}R^3. \quad (4.43)$$

Diferenciando-o em relação ao tempo e elevando o resultado ao quadrado, encontramos:

$$\dot{u}^2 = \frac{4\Lambda^2 R^4 \dot{R}^2}{C^2}. \quad (4.44)$$

Da equação anterior isolem os termos $R^4 \dot{R}^2$:

$$R^4 \dot{R}^2 = \frac{\dot{u}^2 C^2}{4\Lambda^2} \quad (4.45)$$

Multiplicando a eq.(4.26) por R^4 e considerando a eq.(4.45), podemos escrever que:

$$\dot{u}^2 = \frac{4\Lambda^2 R^3 C}{C^2} + \frac{4\Lambda^3 R^6}{3C^2}, \quad (4.46)$$

seguindo um raciocínio análogo ao da seção anterior é possível obtermos:

$$\dot{u} = i(3\Lambda)^{1/2}(u^2 - 2u)^{1/2}. \quad (4.47)$$

Se assumirmos a condição inicial como o modelo do Big Bang, que representa o estágio inicial do universo, o qual $R = 0$ para $t = 0$, logo $u = 0$ inicialmente, então a integração dá:

$$\int_0^u \frac{du}{(u^2 - 2u)^{1/2}} = i \int_0^t (-3\Lambda)^{1/2} dt = i(-3\Lambda)^{1/2}t. \quad (4.48)$$

Se completarmos quadrado do integrando e tomarmos $v = u - 1$, teremos:

$$\int_0^u \frac{du}{(u^2 - 2u)^{1/2}} = \int_{-1}^v \frac{dv}{(v^2 - 1)^{1/2}}. \quad (4.49)$$

Fazendo $\cos w = v$, teremos:

$$\int_0^u \frac{du}{(u^2 - 2u)^{1/2}} = \int_{-1}^v \frac{dv}{(v^2 - 1)^{1/2}} = \int_{\pi}^w \frac{-\sin w dw}{(\cos^2 w - 1)^{1/2}} = w - \pi. \quad (4.50)$$

Dessa forma concluímos que:

$$i(-3\Lambda)^{1/2}t = i(w - \pi) \Rightarrow (-3\Lambda)^{1/2}t = (w - \pi) \quad (4.51)$$

Mas,

$$v = \cos w \rightarrow w = \arccos v = \arccos(u - 1) = \arccos\left(-\frac{2\Lambda R^3}{3C} - 1\right). \quad (4.52)$$

Logo a eq.(4.51), fica:

$$(3\Lambda)^{1/2}t = \arccos\left(-\frac{2\Lambda R^3}{3C} - 1\right) - \pi. \quad (4.53)$$

Assim,

$$-\frac{2\Lambda R^3}{3C} - 1 = \cos[\pi + (3\Lambda)^{1/2}t]. \quad (4.54)$$

Sabemos que $\cos(\pi + x) = -\cos x$, logo:

$$-\frac{2\Lambda R^3}{3C} = -\cos[(3\Lambda)^{1/2}t] + 1. \quad (4.55)$$

Isolando R^3 , obtemos:

$$R^3 = \frac{3C}{2\Lambda} \{ \cos[(3\Lambda)^{1/2}t] - 1 \}. \quad (4.56)$$

Portanto, concluímos que:

$$R^3 = -\frac{3C}{2\Lambda} \{1 - \cos[(3\Lambda)^{1/2}t]\},$$

$$R^3 = \frac{3C}{2(-\Lambda)} \{1 - \cos[(3(-\Lambda))^{1/2}t]\}. \quad (4.57)$$

Que graficamente, pode ser visto na Figura 4.2.

4.3 Classificação dos Modelos Cosmológicos

Abaixo apresentamos de maneira resumida os gráficos para os diferentes modelos cosmológicos, de acordo com os possíveis valores de Λ e k .

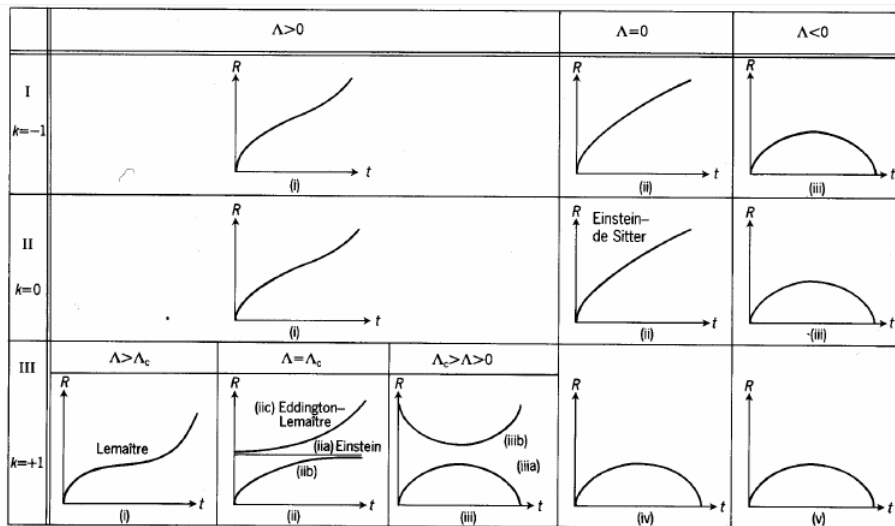


Figura 4.2: Gráficos do Modelos cosmológicos

4.3.1 Caso I: $k = -1$

Todos esses modelos tem topologia aberta.

(i). $\Lambda > 0$.

Este é um modelo de expansão indefinida, porém ele possui uma degrau no qual a taxa de expansão diminui por um período antes de crescer novamente e assintoticamente se aproximar de $\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$. Inicialmente, como todos os modelos de Big Bang, a taxa de expansão ocorre como no modelo de Einstein de Sitter, com $t^{2/3}$.

(ii). $\Lambda = 0$.

Um modelo de expansão indefinida sem degrau e para o qual varia com t assintoticamente.

(iii). $\Lambda < 0$.

Neste caso, a força cosmológica é atrativa e eventualmente pára a expansão e força o modelo a colapsar terminando em um evento chamado de Big crunch. É geralmente chamado de modelo oscilatório. Há também a possibilidade de que o modelo oscile indefinidamente com cada ciclo seguido do outro. Todos os modelos pra $\Lambda < 0$ são modelos oscilatórios.

4.3.2 Caso II: $k = 0$

Todos esses modelos possuem topologia aberta.

(i). $\Lambda > 0$.

Este é idêntico ao subcaso I(i) acima, novamente possui um degrau e assintoticamente aproxima-se da $\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$.

(ii). $\Lambda = 0$.

Este é mais conhecido como modelo de Einstein de Sitter onde $R \approx t^{2/3}$

(iii). $\Lambda < 0$.

Um modelo oscilatório.

4.3.3 Caso III: $k = +1$

Todos esses modelos possuem topologia fechada. Neste caso, existe mais possibilidades desde que haja um valor crítico positivo da constante cosmológica Λ_c dado por

$$\Lambda_c = \frac{4}{(9C^2)}, \quad (4.58)$$

e um valor crítico associado ao fator de escala R_c dado por

$$R_c = \frac{3}{2}C. \quad (4.59)$$

(i). $\Lambda > \Lambda_c$.

Este é o chamado modelo de Lemaître e novamente é similar ao modelo de expansão indefinida I(i) e II(i). Contudo, quanto mais próximo Λ é de Λ_c , mais pronunciado é o degrau e mais a expansão é levada a parar neste período.

(ii). $\Lambda = \Lambda_c$.

Há três possibilidades neste sub-caso, o qual dependem do valor de uma constante de integração.

(a). Isto é o modelo estático de Einstein no qual a atração gravitacional é exatamente contrabalanceada por uma repulsão cósmica. O fator de escala então tem um valor constante R_c .

(b). Isto é um modelo de Big Bang que assintoticamente se aproxima do modelo estático de Einstein.

(c). Isto é o modelo de Eddington-Lemaître no qual se o tempo vai para trás ele aproxima-se assintoticamente ao modelo estático de Einstein. Se o tempo vai para frente ele é um modelo de expansão eterna assintoticamente aproximando da $\exp[(\frac{\Lambda}{3})^{1/2}t]$.

(iii). $\Lambda_c > \Lambda > 0$.

Há novamente duas possibilidades dependendo da constante de integração.

(a). Um modelo oscilatório.

(b). Este é um modelo no qual tem uma fase contraída seguida por uma fase de expansão no qual o fator de escala sempre permanece positivo. É simétrico sobre seu ponto de raio mínimo com $R \approx \exp[(\frac{\Lambda}{3})^{1/2}t]$ a medida que $t \rightarrow \infty$ e $R \approx \exp[(\frac{\Lambda}{3})^{1/2}(-t)]$ a medida que $t \rightarrow -\infty$.

(iv). $\Lambda = 0$.

Um modelo Oscilatório

(v). $\Lambda < 0$.

Um modelo Oscilatório.

Capítulo 5

Cosmologias Newtoniana e Einsteiniana: semelhanças e diferenças

A teoria da Relatividade Geral aparece como uma nova teoria para a gravitação, inserida em um espaço-tempo definido como uma variedade Riemanniana, onde geometria e matéria estão estreitamente ligadas. Não existe mais o conceito de força gravitacional, como interação fundamental entre dois corpos. As órbitas dos corpos são as geodésicas que eles percorrem em um espaço-tempo curvo onde a curvatura é causada pela presença de massa, ou melhor dizendo, energia.

Segundo a teoria da relatividade geral o espaço-tempo é uma variedade quadri-dimensional em que é definida uma métrica, g_{ab} , de assinatura Lorentziana. Esta métrica está relacionada com a distribuição da matéria no espaço-tempo pela equação de Einstein. De posse dos dados observacionais e os pressupostos necessários sobre a natureza do nosso universo podemos resolver a equação de Einstein para fazer previsões relativas à evolução dinâmica do universo. Neste capítulo, investigaremos a estrutura de nosso universo como previsto pela relatividade geral sob a suposição de que o universo é homogêneo e isotrópico. Derivaremos assim as previsões dinâmicas da relatividade geral.

5.1 Descrição Geométrica

Matematicamente, um espaço-tempo é dito ser homogêneo se lá existe um parâmetro com uma família de hipersuperfícies Σ_t do tipo-espaço, foliando o espaço-tempo, conforme representado na Figura 5.1, de tal modo que para cada t e para quaisquer pontos $p, q \in \Sigma_t$ existe uma isometria da métrica do espaço-tempo, g_{ab} , que leva p em q . Um espaço-

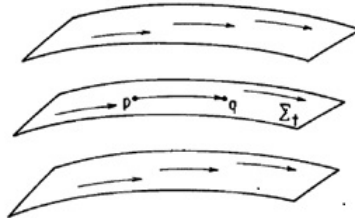


Figura 5.1: Família de hipersuperfícies Σ_t

tempo é dito ser isotrópico em cada ponto se existe uma congruência de curvas temporais, com tangentes denotados u^a , enchendo o espaço-tempo e satisfazendo a propriedade a qual afirma que dado qualquer ponto p e quaisquer dois vetores tangente unitário "espacial", $s_1^a, s_2^a \in V_p$, existe uma isometria de g_{ab} que deixa p e u^a em p fixo, mas gira s_1^a em s_2^a . Não é difícil ver que, no caso de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, as superfícies Σ_t de homogeneidade devem ser ortogonais às tangentes, u^a , para as linhas de mundo dos observadores isotrópico. O espaço-tempo métrico, u^a , induz uma métrica Riemanniana, $h_{ab}(t)$, em cada Σ_t , restringindo a ação de g_{ab} , para cada $p \in \Sigma_t$, aos vetores tangentes a Σ_t . A causa da geometria espacial das superfícies Σ_t está muito restrita aos seguintes requisitos:

(i) *Devido à homogeneidade, deve haver isometrias de h_{ab} que carrega qualquer $p \in \Sigma_t$, em qualquer $q \in \Sigma_t$.*

(ii) *Por causa da isotropia, deve ser impossível construir qualquer vetor geometricamente preferencial em Σ_t .*

Considere o tensor de Riemann $R_{abc}{}^d$, construído a partir de h_{ab} em Σ_t . Não violar a isotropia, implica que todos os autovalores de L devem ser iguais. Isto significa que L é um múltiplo do operador identidade,

$$L = KI \tag{5.1}$$

isto é,

$$R_{ab}{}^{cd} = K\delta^c{}_{[a}\delta^d{}_{b]}. \tag{5.2}$$

Assim, baixando os índices, teremos:

$$R_{abcd} = Kh_{c[a}h_{b]d}. \quad (5.3)$$

O requisito (i) de homogeneidade implica que K deve ser uma constante, i.e, não pode variar de ponto a ponto de Σ_t . Na verdade, é um fato interessante que o requisito (ii) de isotropia em cada ponto também implica na constância de K . Para provar isto, nós substituímos a eq.(5.3) na identidade Bianchi abaixo,

$$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = 0 \quad (5.4)$$

para obtermos,

$$0 = D_{[e}{}^{(3)}R_{ab]cd} = (D_{[e}K)h_{c|a}h_{b]d}, \quad (5.5)$$

onde D_a denota o operador derivada em Σ_t , associado a h_{ab} . Em uma variedade de dimensão três ou mais, o lado direito da eq.(5.5) se anula, se e somente se, $D_e K = 0$, isto é, K é constante. Assim, podemos de fato, dispensar a suposição de homogeneidade em discutir a geometria de Σ_t .

Um espaço onde a eq.(5.3) é satisfeita (com $K = \text{constante}$) é chamado de espaço de curvatura constante. Pode ser mostrado que quaisquer dois espaços de curvatura constante da mesma dimensão e assinatura métrica que têm iguais valores de K devem ser (localmente) isométricos.

Assim, a nossa tarefa de determinar a possível geometria espacial de Σ_t será concluída se enumerarmos os espaços de curvatura constante que engloba todos os valores de K . Isso é feito facilmente. Todos os valores positivos de são atingidos através das 3-esferas, definida como superfícies em um espaço plano euclidiano R^4 quadri-dimensional cujas coordenadas cartesianas satisfazem

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2. \quad (5.6)$$

Em coordenadas esféricas a métrica da 3-esfera é dado por

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.7)$$

O valor $K = 0$ é obtido pelo espaço plano tridimensional. Em coordenadas cartesianas esta métrica é dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (5.8)$$

Finalmente, todos os valores negativos de K são alcançados pelos hiperbolóides tridimensionais, definido como as superfícies em um espaço plano de Lorentz de assinatura quadridimensional (i.e., espaço-tempo Minkowski) cujas coordenadas inercial global satisfaz

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2. \quad (5.9)$$

Em coordenadas hiperbólicas a métrica do hiperbolóide é

$$ds^2 = d\psi^2 + \sinh^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.10)$$

As novas possibilidades para a estrutura espacial global do nosso universo deve ser um tensor. Na física pré-relativística, bem como na relatividade especial, assumiu-se que o espaço tinha a estrutura plana dada pela possibilidade acima para $K = 0$. Mas, mesmo sob as suposições muito restritivas de homogeneidade e isotropia, no âmbito da relatividade geral admitem-se duas outras possibilidades distintas.

A possibilidade de uma geometria 3-esfera espacial é particularmente interessante, pois é uma variedade compacta e assim descreve um universo que é finito, mas não tem limite. Esse universo é chamado de "fechado", enquanto os universos com seções espaciais não compactos, tais como os dados por geometrias planas e hiperbólicas são chamados de "aberto".

Uma vez que os observadores isotrópicos são ortogonais às superfícies homogêneas, podemos expressar a métrica do espaço-tempo quadri-dimensional como

$$g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab}(t), \quad (5.11)$$

onde para cada t , $h_{ab}(t)$ é a métrica de (a) uma esfera, (b) um espaço plano euclidiano, ou (c) um hiperbolóide, em Σ_t . Podemos escolher convenientemente coordenadas no espaço-tempo quadri-dimensional como se segue. Escolhemos, respectivamente, ou (a) coordenada esférica, (b) coordenadas cartesianas, ou (c) coordenadas hiperbólicas em uma das hipersuperfícies homogêneas. Nós, então, "carregamos" essas coordenadas para cada uma das outras hipersuperfícies homogêneas por meio de nossos observadores isotrópicos; isto é, vamos atribuir uma coordenada espacial fixa rotulado para cada observador.

Finalmente, rotulamos cada hipersuperfícies por um tempo próprio, τ , de um relógio carregado por qualquer um dos observadores isotrópicos. Assim, τ e nossas coordenadas espaciais rotulam cada evento no universo. Expressadas nessas coordenadas, a métrica do

espaço-tempo toma a forma

$$ds^2 = \begin{cases} d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ d\psi^2 + \sinh^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{cases} \quad (5.12)$$

onde as três possibilidades em chaves correspondem as três possíveis geometrias. A forma geral da métrica, eq.(5.12) é chamado de **modelo cosmológico de Robertson-Walker**.

Assim, nossas suposições de homogeneidade e isotropia nos levam apenas a determinação da métrica do espaço-tempo para três possibilidades discretas de geometria espacial e a função arbitrária positiva $a(t)$. Para determinar a geometria espacial e $a(t)$, nós recorreremos a Equação de Einstein.

5.2 Dinâmica do Universo

Nosso objetivo agora é substituir a métrica do espaço-tempo dada pela eq.(5.12), na equação de Einstein abaixo,

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi GT_{ab},$$

para obtermos previsões da evolução dinâmica do Universo. O primeiro passo é descrever o conteúdo de matéria do universo em termos do tensor energia-momento, T_{ab} , que entra no lado direito da equação de Einstein. Nas escalas cósmicas com o qual estamos lidando, cada uma das galáxias pode ser tratada como uma partícula de um gás ideal. As velocidades aleatórias das galáxias são pequenas, de modo que a "pressão" desta poeira de galáxias é desprezível.

Pela isotropia, as linhas de universo das galáxias devem coincidir com os dos observadores isotrópicos. Assim, para uma boa aproximação, o tensor de energia-momento da matéria no universo atual assume a forma

$$T_{ab} = \rho u_a u_b, \quad (5.13)$$

onde ρ é a densidade (média) de massa da matéria. No entanto, outras formas de massa-energia também estão presentes no universo. Como sabemos, uma distribuição de radiação térmica, a uma temperatura de cerca de $3K$ preenche o universo. Esta radiação também pode ser descrito por um tensor de energia-momento para o fluido perfeito, porém a sua pressão é diferente de zero; de fato, para a radiação térmica sem massa, temos $P = \rho/3$.

A contribuição desta radiação ao tensor de energia-momento do universo atual é insignificante, mas, esta radiação é prevista para fazer a contribuição dominante para T_{ab} no início do universo. Assim, em se tratando da equação de Einstein, tomaremos T_{ab} na forma de um fluido perfeito geral,

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b). \quad (5.14)$$

Não há perda de generalidade em restringir a consideração de T_{ab} desta forma, como é na verdade, a forma mais geral T_{ab} de tornar consistente com homogeneidade e isotropia.

Temos agora a tarefa de computar G_{ab} da métrica, a eq.(5.12) e equipara-la com $8\pi T_{ab}$, a eq.(5.14). A priori, nós conseguiremos 10 equações que correspondem a 10 componentes independentes de um tensor simétrico de segunda ordem. No entanto, não é difícil ver que por conta das simetrias do espaço-tempo, haverá apenas duas equações independentes neste caso.

A saber, o vetor $G^{ab}u_b$ (bem como $T^{ab}u_b$) não pode ter uma componente espacial, ou a isotropia seria violada. Assim, as componentes do "espaço-tempo" da equação de Einstein são identicamente zero. Da mesma forma, ao projetarmos os dois índices de G_{ab} na hipersuperfície homogênea e levantarmos um índice com a métrica espacial, o mesmo tipo de argumento que levou à eq.(5.1) veremos que o tensor resultante deve ser um múltiplo do operador identidade. Assim, as componentes fora da diagonal "espaço-espaço" da equação de Einstein devem anular-se, e as componentes diagonais "espaço-espaço" produzem as mesmas equações. Assim, as componentes independentes da equação de Einstein são simplesmente

$$G_{rr} = 8\pi G T_{rr} = 8\pi\rho, \quad (5.15)$$

$$G_{**} = 8\pi G T_{**} = 8\pi P, \quad (5.16)$$

onde $G_{rr} = G_{ab}u^a u^b$ e $G_{**} = G_{ab}s^a s^b$, onde s^a é qualquer vetor unitário tangente a hipersuperfície homogênea.

Nós agora temos apenas que computar G_{rr} e G_{**} em termos de $a(\tau)$. Faremos isso explicitamente para o caso da geometria plana espacial, i.e.,

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (5.17)$$

usando o método de base de coordenada. Assim, as componentes da base de coordenadas dos símbolos de Christoffel são

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\rho} g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right\} \quad (5.18)$$

Pela equação acima, as componentes não-nulas dos símbolos de Christoffel são simplesmente,

$$\Gamma^\tau_{xx} = \Gamma^\tau_{yy} = \Gamma^\tau_{zz} = a\dot{a}, \quad (5.19)$$

$$\Gamma^x_{x\tau} = \Gamma^x_{\tau x} = \Gamma^y_{y\tau} = \Gamma^y_{\tau y} = \Gamma^z_{z\tau} = \Gamma^z_{\tau z} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (5.20)$$

onde $\dot{a} = da/d\tau$. Portanto, pela equação abaixo

$$R_{\mu\rho} = \sum_{\nu} R_{\mu\nu\rho}{}^{\nu} = \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sum_{\nu} \Gamma^{\nu}_{\nu\rho} \right) + \sum_{\alpha,\nu} (\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}) \quad (5.21)$$

podemos calcular as componentes do tensor de Ricci independente, como sendo

$$R_{\tau\tau} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (5.22)$$

$$R_{**} = a^{-2}R_{xx} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (5.23)$$

Visto que temos

$$R = -R_{\tau\tau} + 3R_{**} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad (5.24)$$

nós assim obtemos,

$$G_{\tau\tau} = R_{\tau\tau} + \frac{1}{2}R = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho, \quad (5.25)$$

$$G_{**} = R_{**} - \frac{1}{2}R = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi P. \quad (5.26)$$

Usando a primeira equação, podemos reescrever a segunda como

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P). \quad (5.27)$$

Repetindo os cálculos para os casos da geometrias esférica e hiperbólica, obtemos as equações gerais para evolução da cosmologia homogênea e isotrópica:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho - \frac{3k}{a^2}, \quad (5.28)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3P), \quad (5.29)$$

onde $k = +1$ para a 3-esfera, $k = 0$ para o espaço plano, e $k = -1$ para o espaço hiperbólico. Apresentaremos as soluções exatas destas equações para o caso de poeira ($p = 0$) e radiação ($p = \rho/3$) na figura 5.2, mas primeiramente examinaremos algumas importantes propriedades qualitativas destas soluções.

Dessa forma, o universo não pode ser estático, com a condição apenas que $\rho > 0$ e $p \geq 0$. Esta conclusão segue imediatamente da eq.(5.29), que nos diz que $\ddot{a} < 0$. Assim, o universo

deve estar se expandindo $\dot{a} > 0$ ou contraindo $\dot{a} < 0$. Note a natureza desta expansão ou contração: a distância escalar entre todos os observadores isotrópicos (em particular entre galáxias) mudam com o tempo, porém não há centro privilegiado desta expansão ou contração. De fato, se a distância (medida na superfície homogênea) entre dois observadores isotrópicos num tempo τ é R , a taxa de mudança de R é

$$\nu \equiv \frac{dR}{d\tau} = \frac{R}{a} \frac{da}{d\tau} = HR, \quad (5.30)$$

onde $H(\tau) = \dot{a}/a$ é chamada de constante de Hubble. A eq.(5.30) é conhecida como **Lei de Hubble**.

Einstein ao desenvolver a Relatividade Geral e ao resolver as equações cosmológicas ficou suficientemente descontente com a previsão de um universo dinâmico, algo terrível pra época, pois os resultados observacionais apontavam para um universo estático. Logo ele propôs a modificação de sua equação, com a adição de um novo termo, como segue

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \quad (5.31)$$

Geometria Espacial	"Poeira" $P = 0$	Radiação $P = \frac{1}{3}\rho$
3-esfera, k=+1	$a = \frac{1}{2}C(1 - \cos \eta)$ $\tau = \frac{1}{2}C(\eta - \sin \eta)$	$a = \sqrt{C'}[1 - (1 - \frac{\tau}{\sqrt{C'}})^2]^{1/2}$
Plano, k=0	$a = (9C/4)^{1/3}\tau^{2/3}$	$a = (4C')^{1/4}\tau^{1/2}$
Hiperbolóide, k=-1	$a = \frac{1}{2}C(\cosh \eta - 1)$ $\tau = \frac{1}{2}C(\sinh \eta - \eta)$	$a = \sqrt{C'}[(1 + (\frac{\tau}{\sqrt{C'}}))^2 - 1]^{1/2}$

Figura 5.2: Soluções exatas das eqs.(5.28) e (5.29) para os casos de poeira e radiação

onde Λ é uma nova constante fundamental da natureza, chamada constante cosmológica. Assim, Einstein foi capaz de modificar a teoria para produzir soluções estáticas. Após as observações feitas por Hubble sobre o redshift em 1929, foi demonstrada a expansão do universo, logo a motivação original para a introdução da constante Λ foi perdida. Na sequência, vamos supor que $\Lambda = 0$.

Tendo em conta que o universo está se expandindo, $\dot{a} > 0$, sabemos a partir da eq.(5.29) que $\ddot{a} < 0$, então o universo deve ter se expandido a um ritmo cada vez mais rápido. Antes de discutir as previsões qualitativas da relatividade geral para a evolução futura do universo, é útil obter uma equação para a evolução da densidade de massa. Multiplicando a eq.(5.28) por a^2 , diferenciando-o com respeito a τ , e, em seguida, eliminando \ddot{a} via eq.(5.29), obtemos

$$\dot{\rho} + 3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (5.32)$$

Assim, para poeira ($p = 0$) encontramos:

$$\rho a^3 = cte, \quad (5.33)$$

o qual expressa a conservação da massa de repouso, enquanto para radiação ($p = \rho/3$) encontramos

$$\rho a^4 = cte. \quad (5.34)$$

Neste caso, a densidade de energia diminui mais rapidamente com o aumento de a do que com o fator de volume a^3 . A comparação das eqs.(5.33) e (5.34) mostra que embora o índice de radiação do universo atual possa ser insignificante, a sua contribuição com a densidade de massa total no passado longe $a \rightarrow 0$ deveria ser suficiente a ponto de dominar sobre o índice da matéria ordinária.

Veremos agora as características qualitativas da futura evolução do nosso universo. Se $k = 0$ ou -1 , a eq.(5.28) mostra que \dot{a} nunca pode tornar-se zero. Assim, se o universo está atualmente em expansão, ele deve continuar a se expandir para sempre. Na verdade, para qualquer matéria com $p \geq 0$, ρ deve diminuir à medida que a aumenta, pelo menos, tão rapidamente quanto a^{-3} , o valor para poeira. Assim, $\rho a^2 \rightarrow 0$ a medida que $a \rightarrow \infty$. Assim, se $k = 0$, a "velocidade de expansão" \dot{a} aproxima-se assintoticamente de zero a medida que $\tau \rightarrow \infty$, enquanto que, se $k = -1$ temos $\dot{a} \rightarrow 1$ conforme $\tau \rightarrow \infty$.

No entanto, se $k = +1$, o universo não pode se expandir para sempre. O primeiro termo do lado direito da eq.(5.28) diminui com a mais rapidamente do que o segundo termo, e, assim, uma vez que o lado esquerdo deve ser positivo, há um valor crítico, a_c , tal que, $a \leq a_c$. Além disso, a não pode aproximar-se assintoticamente de a_c , a medida que $\tau \rightarrow \infty$ porque a magnitude de \ddot{a} é delimitada abaixo por conta da eq.(5.29).

Assim, se $k = +1$, então, em um tempo finito após a origem do universo (Big Bang), o Universo atingirá um tamanho máximo a_c , e em seguida começará a contrair-se. O mesmo

argumento dado acima para a ocorrência de uma origem do Big Bang do universo atual mostra que, para um tempo finito após a contração começar, um fim do universo ("Big Crunch") ocorrerá. Assim, as equações dinâmicas da relatividade geral mostram que o universo 3-esfera espacialmente fechado existirá apenas por um período finito de tempo.

Vamos agora voltar nossa atenção para resolução das eqs.(5.28) e (5.29) exatamente para os casos de poeira e radiação. O procedimento mais eficiente para fazer isto é eliminar ρ usando a eq.(5.33) ou, respectivamente, a eq.(5.34), e substituindo na eq.(5.28). Obtemos, para a poeira,

$$\dot{a}^2 - \frac{C}{a} + k = 0, \quad (5.35)$$

onde $C = 8\pi\rho a^3/3$ é constante; e para a radiação

$$\dot{a}^2 - \frac{C'}{a} + k = 0, \quad (5.36)$$

onde $C' = 8\pi\rho a^4/3$. As soluções para $a(\tau)$ são facilmente obtidas por métodos elementares. Essas soluções para os seis casos de interesse estão resumidos na Tabela anterior.

As soluções para o universo cheio de poeira com geometria 3-esfera foi dada pela primeira vez por Friedmann (1922) e é chamado de cosmologia de Friedmann, embora em algumas referências todas as soluções da figura 5.2 são referidas como soluções de Friedmann.

5.3 Discussão Qualitativa de alguns modelos de universos

As equações relativísticas da gravitação nos conduzem a várias descrições do universo. Veremos a seguir algumas soluções obtidas e analisaremos rapidamente suas realidades físicas. Lembre-se que os modelos apresentados abaixo foram todos obtidos após cálculos matemáticos realizados sobre as equações relativísticas da gravitação, onde simplificações foram colocadas.

5.3.1 Universo de Einstein

Einstein acreditava que o universo era estático. Para satisfazer a isso ele foi obrigado a modificar as equações de campo da gravitação que havia proposto anteriormente. Sua modificação foi a introdução de uma constante cosmológica Λ em suas equações de campo.

Quando esta nova constante Λ é positiva, ela age como uma força de repulsão que se opõe à gravitação universal. Essa constante reduz o efeito dinâmico da gravidade, ou seja, sua possível expansão, mas não a curvatura do espaço. É importante notar que um universo que é estático em um determinado instante de tempo não é necessariamente estático em momentos anteriores ou posteriores a este. Outro ponto importante é que para assegurar que o universo permaneça estático, em um estado de equilíbrio, Einstein mostrou que a curvatura do universo deve ser positiva. O universo estático de Einstein é, portanto, um espaço esférico. Ele é fechado e finito e contém uma misteriosa força Λ que compensa a atração gravitacional.

O astrofísico inglês Arthur Eddington mostrou, em 1930, que o universo de Einstein é instável. Isso quer dizer que se existissem habitantes nele, eles deveriam fazer tudo de modo a não criar qualquer perturbação. Uma perturbação feita em um sentido poderia fazer a gravidade dominar e o universo colapsar para um futuro novo "big bang" em um intervalo de tempo igual ao tempo de circunavegação. Se a perturbação fosse em outro sentido a força repulsiva Λ começaria a dominar, o universo inflaria e se transformaria em um universo oscilante. Veja que um universo estático não permitiria a criação de matéria, pois isso é um efeito perturbativo!

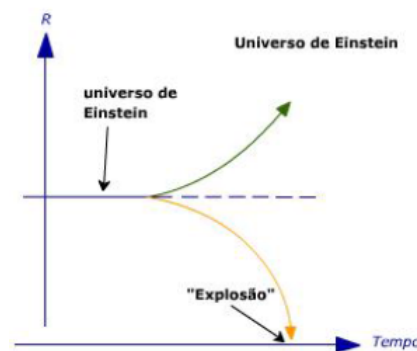


Figura 5.3: Universo de Einstein

5.3.2 Universo de de Sitter

O universo de de Sitter foi proposto em 1917. Consiste de um espaço plano e é ligeiramente absurdo no sentido de que ele não contém matéria. Mas as galáxias nos mostram que matéria existe em todo o universo. Então, qual a utilidade de um modelo desse tipo? Sim-

plesmente a maior facilidade de você estudar como se comportaria o universo em situações extremas. Um universo vazio de espaço plano, não deveria exibir propriedades não usuais e, no entanto, o universo de de Sitter o faz quando a intrigante força Λ não é zero. O universo de de Sitter está em um estado estacionário e nada muda em qualquer momento. Os termos de Hubble e o parâmetro de desaceleração são constantes e não há matéria contida nele que seja diluída pela expansão.

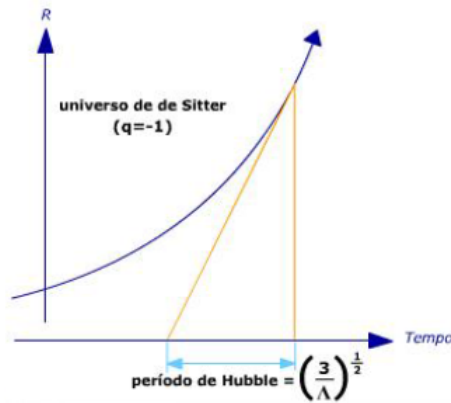


Figura 5.4: Universo de de Sitter

O universo de de Sitter tem um passado infinito e um futuro infinito e ele acelera a uma taxa constante de $q = 1$, como mostra a figura. O universo de Einstein, que contém matéria, mas não tem movimento, e o universo de de Sitter, que tem movimento mas não tem matéria, foram os primeiros modelos cosmológicos propostos. A imagem abaixo compara o universo de Einstein com o proposto por de Sitter.

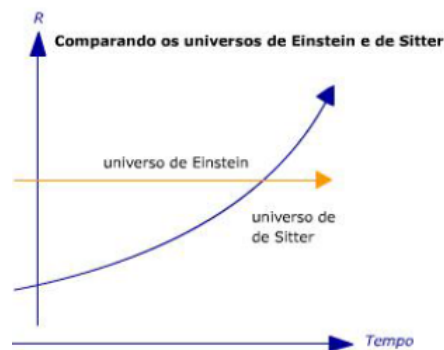


Figura 5.5: Comparação entre o universo de Einstein versus de Sitter

5.3.3 Universo de Friedmann

Alexander Friedmann nasceu na Rússia em 1888. Embora sua família tenha sido de músicos Friedmann logo se interessou por várias ciências e mais tarde tornou-se professor de matemática na Universidade de Leningrado. Friedmann foi o primeiro a perceber que havia um erro no artigo sobre cosmologia publicado por Einstein em 1917. Foi esse erro que levou Einstein à conclusão de que o universo comportava-se necessariamente de modo estático quando a força Λ era introduzida nas equações relativísticas da gravitação.

Friedmann escreveu uma carta para Einstein mostrando suas conclusões mais gerais, mas não obteve qualquer resposta. Somente após a interferência de um amigo que estava visitando Berlin é que Friedmann obteve de Einstein o que ele chamou de "uma carta irritada". Nessa carta Einstein concordava com as conclusões de Friedmann. Isso fez com que Friedmann publicasse em 1922, na conceituada revista científica alemã *Zeitschrift für Physik*, um importante artigo chamado "Sobre a Curvatura do Espaço". Em 1924 ele publicou, nesta mesma revista, um segundo artigo chamado "Sobre a Possibilidade de um Universo com Curvatura Negativa Constante". Esses dois artigos foram muito importantes para o desenvolvimento da cosmologia.

Curiosamente os artigos de Friedmann surgiram no momento certo, no momento em que foram descobertos os deslocamentos para o vermelho (redshift) das linhas espectrais dos objetos extragalácticos. Mesmo assim, embora esses artigos tenham sido publicados em uma das mais importantes revistas científica da época, eles foram praticamente ignorados pela comunidade científica, a razão disso sendo um completo mistério para os historiadores da ciência. Inacreditavelmente os artigos de Friedmann não tiveram qualquer impacto sobre a cosmologia na época de sua publicação. Somente em 1927 é que o abade francês George Lemaître redescobriu as equações originalmente formuladas por Friedmann e a cosmologia entrou em uma nova era.

Hoje, em homenagem ao trabalho pioneiro de Friedmann chamamos os universos de constante cosmológica zero e que se expandem uniformemente como sendo universos de Friedmann. Vamos descrever os universos de Friedmann. Todos os universos de Friedmann começam com "big bangs".

Vejamos alguns detalhes desses modelos de Friedmann:

Para $k = 0$:

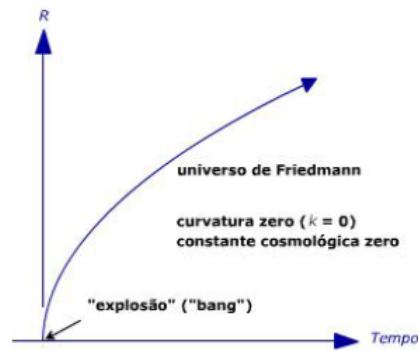


Figura 5.6: Universo de Friedmann com $k = 0$

Neste tipo de universo o espaço tempo que se expande é plano, infinito e não limitado. Esse universo se expande continuamente. Como podemos facilmente notar esse modelo de universo dura um período infinito de tempo no futuro.

O modelo de universo que estamos descrevendo é o mais simples de todos os universos conhecidos, mas não foi considerado nem por Friedmann nem por Lemaître sendo primeiro proposto por Einstein e de Sitter em 1932. Mesmo assim ele é conhecido ou como universo de Friedmann de curvatura zero ou universo de Einstein de Sitter.

Para $k = +1$:

Nesse tipo de universo o espaço tempo que se expande é esférico, finito e limitado. Esse universo se expande até um tamanho máximo e então colapsa.

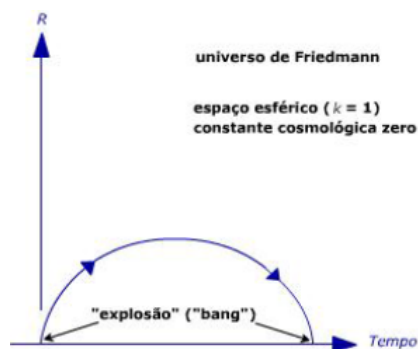


Figura 5.7: Universo de Friedmann com $k = +1$

Veja, então que esse universo existe somente por um período finito de tempo. Esse modelo é conhecido como modelo oscilatório por que após certo período, a expansão paralisa e o universo começa então a se contrair até um evento catastrófico conhecido como grande implosão (Big Crunch). Esse modelo de universo foi descoberto por Alexander Friedmann

em 1922 e posteriormente redescoberto pelo abade francês Georges Lemaître em 1927.

Para $k = -1$:

Nesse modelo de universo de Friedmann o universo em expansão é hiperbólico, infinito e não limitado. Ele se expande continuamente e dura por um período infinito de tempo no futuro. Nesse modelo cosmológico o fator de escala cresce sem limites e, como consequência, esse universo é chamado de modelo de expansão eterna. Esse modelo de universo foi descoberto por Friedmann em 1924 e foi investigado em 1932, pelo cosmólogo alemão Otto Heckmann.

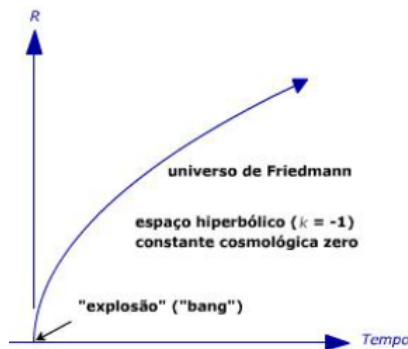


Figura 5.8: Universo de Friedmann com $k = -1$

5.3.4 Universo de Lemaître

George Lemaître nasceu em 1894 e foi ordenado padre em 1922. Em 1927, no mesmo ano em que obteve seu PhD pelo Massachusetts Institute of Technology nos Estados Unidos, Lemaître publicou seu principal trabalho sobre a expansão do universo. Como já dissemos, Lemaître redescobriu as equações cosmológicas que haviam sido desenvolvidas anteriormente por Friedmann. No meio da discussão sobre o significado e o mérito dos universos de Einstein e de de Sitter, o trabalho de Lemaître não foi notado até que o físico inglês Arthur Eddington chamou a atenção para ele, três anos mais tarde, e fez com que ele fosse traduzido para o inglês.

Lemaître foi o primeiro a advogar a existência de um estado inicial de alta densidade, que ele chamou de "átomo primitivo". Por esse motivo ele é considerado por muitos como o "pai do big bang". Lemaître destacou entre as várias possíveis soluções das equações de Friedmann aquela que descrevia um universo fechado com uma força repulsiva Λ . Neste caso a constante cosmológica é positiva.

O universo estudado por Lemaître tem os mesmos ingredientes básicos que o universo de Einstein com a importante diferença de que Λ tem um valor ligeiramente maior do que aquele escolhido anteriormente por Einstein. Por conseguinte, o universo de Lemaître não pode ser estático. O universo de Lemaître começa com um big bang e tem dois estágios de expansão. No primeiro estágio a expansão desacelera porque a gravidade é mais forte do que a repulsão da força Λ . Ele então se aproxima lentamente do raio do universo de Einstein. Aproximadamente nessa fase a repulsão se torna maior do que a gravidade e tem início o segundo estágio de expansão. O universo agora se expande a partir do raio de Einstein, a princípio lentamente e então a uma taxa crescente.

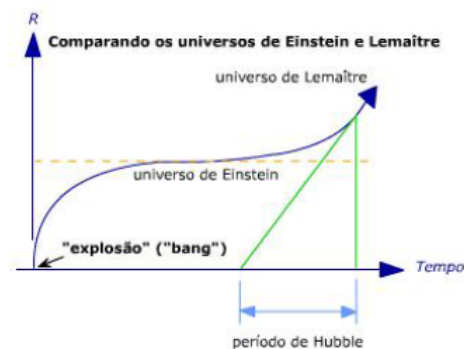


Figura 5.9: Universo de Lemaître

O universo de Lemaître, por conseguinte começa como um Big Bang, se desenvolve eventualmente em um estágio oscilante e, ao longo desse caminho, hesita quando passa pelo tamanho do universo de Einstein. Ele combina suavemente as propriedades dos universos de Einstein e de Sitter: ele é fechado como o universo de Einstein, ele tem repulsão cósmica como ambos os universos e sob o estímulo dessa repulsão ele mais tarde infla como o universo de de Sitter.

5.3.5 Universo de Eddington

George Lemaître foi atraído pelo "big bang" possivelmente por motivos religiosos. O físico inglês Arthur Eddington não gostava da ideia e a achava esteticamente desagradável. Em vez de adotar um começo abrupto para o universo, em 1930 Eddington passou a defender um novo modelo de universo no qual permitisse que a evolução começasse em um instante de tempo infinito, o que é necessário se o universo deve ter um começo natural.

O universo de Eddington existe inicialmente, durante um período infinito de tempo, de modo semelhante a um universo estático de Einstein. Então, como resultado de uma perturbação acidental, ele deixa de ser estático e começa a se expandir. Veja que esse universo existe inicialmente em um estado estático de Einstein e mais tarde muda seu comportamento para o estado de um universo de de Sitter no qual a repulsão domina a gravidade. Desse modo, o universo de Eddington junta os dois modelos de universo que previamente tinham sido discutidos por esses dois grandes cosmólogos que o antecederam.

É curioso notar que Eddington, o cientista que descobriu que o modelo de universo estático proposto por Einstein era instável, tenha escolhido numa solução de universo que existe, inicialmente, por um período indefinidamente longo no estado estático instável, exatamente como aquele descrito por Einstein. Já vimos que isso nos diz que nenhuma formação de galáxia poderia ter ocorrido e nenhuma vida existida nesse universo estático, precariamente equilibrado por tanto tempo que acordou somente há 15 bilhões de anos.

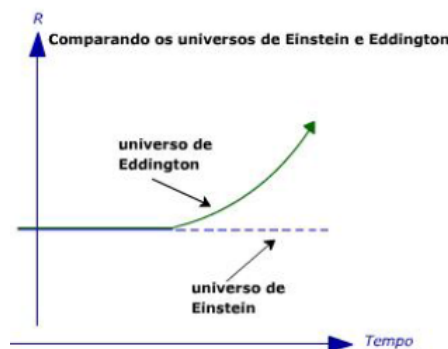


Figura 5.10: Universo de Eddington

Eddington foi forçado a postular um passado infinito para exorcisar o espectro de um começo catastrófico. Ele foi o primeiro, mas não o último, dos cosmólogos modernos a ficar terrificado pelo pesadelo de nascimento e morte cósmicos.

O universo de Eddington existe em um estado de inatividade. Ele começa a se manifestar, envelhece graciosamente e termina em uma oscilação. Entretanto não se pode escapar da implacável lei da cosmogênese: criação não pode ser considerada apenas como um evento que ocorreu no passado infinito, pois o universo contém tempo e o tempo, seja finito ou infinito, é criado com o universo, embora hoje já sejam levantadas dúvidas sobre essa última afirmação. Mas, afinal, o que é essa grande explosão chamada big bang?

O "big bang" frequentemente é citado como uma "grande explosão". Esse termo pode

nos levar a grandes erros de interpretação. Uma explosão é algo que ocorre em um ponto no espaço enquanto que o "big bang" teria sido um fenômeno englobando todo o espaço tempo existente. Em uma explosão ordinária o gás é lançado para fora de uma determinada região bem localizada no espaço por um gradiente de pressão, ou seja, uma grande diferença de pressão entre o centro da explosão e a borda do gás em expansão. No universo não existe tais gradientes de pressão porque a pressão é a mesma em todos os lugares. Não existe centro e não existe borda. O termo "bang", que seria mais bem traduzido como "barulho", sugere que ondas sonoras são emitidas e que um ruído é ouvido. No entanto, as equações que definem a possível ocorrência desse processo no universo mostram que nenhuma onda sonora é produzida. É muito comum encontrarmos, até mesmo em livros de cosmologia, termos tais como "a hipótese do big bang" e "a teoria do big bang". Se essas expressões possuem algum significado elas devem ser apenas alguma maneira disfarçada de se referir ao estado singular encontrado em vários modelos de universo previstos pela teoria relativística da gravitação.

Isso nos leva a afirmar que a expressão "big bang", ou sua contraparte em português "grande explosão", embora seja algo fácil de imaginar nos induz a uma ideia absolutamente errada sobre o que pode ter acontecido e deve ser evitada. É uma pena que o termo "big bang", introduzido casualmente e ironicamente pelo cientista inglês Fred Hoyle em uma de suas críticas aos modelos de universo em expansão feita em um programa radiofônico da companhia inglesa BBC, tenha adquirido a divulgação que ele tem hoje nos levando a entender de modo absolutamente errôneo o que pode ter acontecido nesse momento no universo.

5.4 Análise comparativa entre as soluções nos dois diferentes cenários

5.4.1 Equações de Friedmann

É notável que a equação (4.16) seja idêntica, do ponto de vista algébrico, à equação de campo de Einstein, que foi encontrada por Friedmann, em 1922. Na solução de Friedmann, $R(t)$ era um fator de escala aparecendo na métrica do espaço-tempo, e a escala era tal que k na equação (4.16) tinha o valor kc^2 onde c é a velocidade da luz e k assume os valores $+1$ se o espaço é elíptico, -1 se o espaço é hiperbólico e 0 se o espaço é plano. As diferenças com

a equação (4.16) são com respeito ao "tempo cósmico", isto é, o próprio tempo medido por relógios movendo-se com as galáxias, e a posição no espaço é mapeado em um dado momento do tempo cósmico.

Deve ser acrescentado, no entanto, que $R(t)$ nos modelos de Friedmann não é apenas um fator de escala mas pode também ter um significado físico, porque kR^{-2} é a curvatura do espaço. Se o espaço é elíptico ou hiperbólico então em princípio (embora não na prática) kR^{-2} poderia ser determinado a partir da observação, por exemplo, medindo a soma dos ângulos de um triângulo, suficientemente grande.

O desenvolvimento futuro dos universos de Friedmann, isto é, se eles irão eventualmente contrair ou expandir indefinidamente, depende do sinal de k exatamente da mesma maneira como os modelos newtonianos dependem do sinal de k , e este sinal depende da densidade da matéria por exatamente o mesmo critério da equação (4.16). O fato de que a equação cosmológica se mantém, tanto para o modelo newtoniano quanto para o modelo relativístico não é apenas uma coincidência. A teoria de Newton é uma aproximação muito próxima da relatividade geral nas condições que se aplicam em cosmologia. Em particular, duas proposições de Newton sobre os efeitos gravitacionais de cascas esféricas têm suas contrapartidas exatas em relatividade geral (Teorema Birkhoffs).

Teorema de Birkhoffs: A velocidade v de uma galáxia de massa m localizada a uma distância r de um observador O é influenciada somente pela matéria que se encontra dentro da esfera de raio r centrada em O . Dessa forma, a força atuando nas galáxias na superfície da esfera de raio r é a atração gravitacional da massa interna a r apenas, atuando como um ponto de massa em O .

- Uma casca esférica de matéria atrai uma partícula que se encontra fora da casca como se toda a massa da casca esférica estivesse concentrada em seu centro.
- Uma casca uniforme de matéria não exerce força gravitacional resultante sobre uma partícula localizada no seu interior.

5.4.2 Diferenças Conceituais

Na prática, os modelos newtoniano e Friedmaniano são muito semelhantes, de fato. Em teoria, eles diferem mais importantemente em sua derivação e porque a geometria do espaço

nos modelos de Friedmann é não-euclideana. Há, no entanto, uma outra diferença conceitual que agora devemos considerar. No modelo Newtoniano, pelo menos aqui desenvolvido, o espaço é infinito mas a quantidade de matéria no universo é finita. No modelo de Friedmann, se $k = +1$ então o espaço é elíptico, o volume do espaço é finito e a quantidade de matéria é finita; mas se $k = 0$ ou $k = -1$ o volume do espaço é infinito e então contém uma quantidade infinita de matéria uma vez que assumimos que a densidade de matéria é homogêneo ao longo de todo o espaço. Estamos acostumados à ideia de que o espaço pode ser infinito. Mas não é tão fácil aceitar um espaço que contém um número infinito de objetos ou uma quantidade infinita de matéria ou energia. Muitos, inclusive Einstein, tem visto dificuldades neste conceito.

Costuma-se dizer que se as observações eventualmente estabelecer que a densidade da matéria é definitivamente menor do que a densidade crítica, então isso implica não apenas que o universo vai se expandir indefinidamente, mas que também contém uma quantidade infinita de matéria. No entanto, isso só segue a partir do modelo de Friedmann, pois o modelo já assume que a densidade da matéria é homogênea, não só por todo o universo observável, mas também em todo o espaço fora dele também.

O modelo Newtoniano, como derivamos aqui, descreve um mundo homogêneo, mas finito de matéria que está se expandindo em um vazio infinito. Desde que o raio do globo seja suficientemente grande, um observador que está no interior do globo, mas não no centro, mesmo assim verá todas as galáxias que estão dentro de seus limites de observação se expandindo simetricamente longe dele, com um fator de escala $R(t)$ que satisfaz a equação de Friedmann. A matemática é exatamente a mesma que para uma estrela esférica com densidade homogênea que está entrando em colapso por gravidade. Ver, por exemplo, Weinberg (1972), onde é mostrado que, se as coordenadas comovéis são escolhidas então a métrica dentro da estrela é da forma Robertson-Walker com um fator de escala $R(t)$ que satisfaz a equação de Friedmann.

Através da formulação Newtoniana e Einsteiniana da cosmologia, discutidas anteriormente, é possível obter uma analogia entre as duas teorias: Newtoniana e relativística; observa-se que a equação cosmológica é algebricamente análoga a equação de Friedmann da relatividade geral, com exceção do fato de na teoria relativística k é descrita em termos de geometria enquanto que na teoria Newtoniana ele descreve a energia do sistema.

De maneira geral, podemos observar que a descrição Newtoniana para a cosmologia, só

faz sentido quando tomamos uma séria de hipóteses que apenas se firmaram com o advento da cosmologia relativística, dentre as quais, o princípio cosmológico, a expansão do Universo e a aproximação da hidrodinâmica.

O próprio Newton observou que sua teoria de gravitação apresentava problemas quando se tratava de sistemas no infinito, desta forma podemos concluir que a abordagem Newtoniana surge como consequência da cosmologia relativística e não o contrário, neste sentido, podemos afirmar que a cosmologia Newtoniana é na verdade uma aproximação, em pequena escala, da cosmologia relativística.

Capítulo 6

Conclusões

Como ponto de partida, usamos a formulação discreta da cosmologia Newtoniana feita por Ellis e Gibbons [10], que é baseada no modelo de uma partícula pontual, e de acordo com este modelo, diferentemente dos modelos usuais com fluídos, o universo é concebido como sendo constituído por um número muito grande de partículas, que interagem gravitacionalmente, e que se movem homoteticamente. Esta formulação permite que se chegue a uma equação análoga a de Friedmann, da teoria contínua.

Consideramos, então, um sistema com um número muito grande de partículas, todas com mesma massa, adensadas numa esfera de raio finito, e fizemos uma generalização para o caso contínuo, sem fazer nenhuma hipótese sobre a existência de um fluído, mas tão somente, fazendo uma correspondência entre as grandezas da formulação discreta e suas correspondentes, no limite de grande adensamento, contínuo.

A equação cosmológica, num cenário sem pressão, é a mesma nas cosmologias Newtoniana e Einsteiniana, o que significa dizer que as soluções são as mesmas, nos dois casos. No que diz respeito ao aspecto matemático, a obtenção da equação cosmológica, é bem mais simples no cenário Newtoniano. Do ponto de vista conceitual, as cosmologias Newtoniana e Einsteiniana são completamente distintas.

Referências Bibliográficas

- [1] Friedmann, A. Z Phys. 10, 377. **5**, (1922).
- [2] Lamaître, G. Ann. Soc. Sei. de Bruxellas 47, 49 (1927).
- [3] Hubble, E.P., Publ. Natu. Acad. Sci.15, 168 (1929).
- [4] Milne, E. A., *A Newtonian Expanding Universe*. Quart. J. Math. **5**, 64 (1934).
- [5] Milne, E.A. and W. H McCrea., *A Newtonian Universes and the Curvature of Space*. Quart. J.Math. **5**, 73 (1934).
- [6] Layzer, D., *On the Significance of Newtonian Cosmology*. Astron. J., **59**, 268 (1954).
- [7] Ribeiro, M. B., *Cosmologia Newtoniana*. Boletim Soc. Astron. Bras. **14**, nº2, 34 (1994).
- [8] McCrea, W.H., Proc. R. Soc. London 206, 562 (1951).
- [9] Fabris, J.C. e Velten, H.E.S, Rev. Bras. Ens. Fis. 34, 4302 (2012).
- [10] Fabris, J.C. e Velten, H.E.S, *Teorias Neo-Newtonianas*. arXiv: 1501.01614[gr-qc].
- [11] George F.R Ellis e Gary W. Gibbons, *Class. Quantum Grav.* 31 (2014) 025003.
- [12] Pollard H 1966 *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall).
- [13] Boccaletti D e Pucacco G., 1996 *Theory of Orbits 1: Integrable Systems and Non-perturbative Methods* (Berlin: Springer)
- [14] Arnold V, Kozlov V V and Neishtadt A I 2006 *Mathematical Aspects of Classical Mechanics* (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Dynamical Systems vol 3) (Berlin: Springer).

- [15] Saari D 2005 (*AMS Regional Conference Series in Mathematics vol 104 Collisions, Rings and Other Newtonian N-Body Problems* (Providence, RI: American Mathematical Society)).
- [16] Barrow J D and Götz G 1989 *Newtonian no hair theorems* *Class. Quantum Grav.* 6 1253-65.
- [17] Saslaw W C 1987 *Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [18] Battye R A, Gibbons G W and Sutcliffe P M 2003 *Central configurations in three-dimensions* *Proc. R. Soc. A* 459 911-43 (arXiv:hep-th/0201101).
- [19] Battye R, Gibbons G, Rychenkova P and Sutcliffe P 2003 *Polyhedral scattering of fundamental monopoles* *J. Math. Phys.* 44 3532 (arxiv:hep-th/0212106).
- [20] Saari D G 1971 *Implications of the inverse square law* *Astrophys. J.* 165 399-407.
- [21] Ellis G F R 1971 *Relativistic cosmology* *General Relativity and Cosmology* ed R K Sachs (New York: Academic) pp 104-179.
- [22] Gibbons G W and Patricot C E 2003 *Newton-Hooke spacetimes, Hpp-waves and the cosmological constant* *Class. Quantum Grav.*
- [23] Ellis G F R and van Elst H 1999 *Cosmological models Theoretical and Observational Cosmology* (Nato Series C: Mathematical and Physical Sciences vol 541) ed M Lachieze-Ray (Dordrecht: Kluwer) pp 1-116 (arXiv:gr-qc/9812046).
- [24] Dodelson S 2003 *Modern Cosmology* (San Diego, CA: Academic).
- [25] Ellis G F R, Maartens R and MacCallum M A H 2012 *Relativistic Cosmology* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [26] Peter P and Uzan J P 2003 *Primordial Cosmology* (Oxford: Oxford University Press).
- [27] Ellis G F R 1971 *Relativistic cosmology* *General Relativity and Cosmology* ed R K Sachs (New York: Academic) pp 104-179.

- [28] Marchal C and Saari D G 1976 *On the final evolution of the N-body problem* J. Differ. Eqns 20 150-86.
- [29] Saari D G 1971 *Expanding gravitational systems* Trans. Am. Mat. Soc. 156 219-40.
- [30] Saari D G 1980 *On the role and properties of n body central configurations* Celest. Mech. 21 9-20.
- [31] Saari D G 2013 *Central configurations: a problem for the 21st century* Preprint available from www.math.uci.edu/~dsaari/Saari_preprints_celestial.htm.
- [32] Carl Siegel Jurgen Moser (1971) *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York.
- [33] Richard Moeckel (2014) Scholarpaedia, 9, 10667.
- [34] Harrison, E. R., *Cosmology without general relativity*. Ann. of Phys. **35**,437 (1965).
- [35] Lima, J. A. S., V. Zanchin and R. Brandenberger., *On the Newtonian cosmology equations with pressure*. Mon. Not. Roy. Astron.. Soc. 291, **L1** (1994).
- [36] Callan, C., R. H. Dicke, and P. J. E. Peebles., *Cosmology and Newtonian Mechanics*. Am. J. Phys. **33**, 155 (1965).
- [37] Tipler, F. J., *Rigorous Newtonian Cosmology*. Am. J. Phys. **64**, 1311 (1996).
- [38] McCrea, W. H., *Newtonian Cosmology*. Nature, **175**, 466 (1955).
- [39] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, USA. John Wiley & Sons, 1972.
- [40] Tipler, F. J., *Newtonian cosmology revisited*. Mon. Not. R. Astron. Soc. **282**, 206 (1996).
- [41] Misner, C. W, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler., *Gravitation*, San Francisco. Freeman, 1973.
- [42] Carrol, S. M., W. H. Press, and E. L. Turner., *The Cosmological Constant*. Annu. Rev. Astron. Astrophys. **30**, 499 (1992).
- [43] Weinberg, S., *The cosmological constant problem*. Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).

- [44] Peebles, P. J. E., *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton. Princeton University Press, 1980.
- [45] Peebles, P. J. E., *Principles of Physical Cosmology*, Princeton. Princeton University Press, 1993.
- [46] Daniel Z. Freedman, Gary W. Gibbons and Martin Schnabl, *Matrix Cosmology*. arXiv: hep-th/ 0411119v2.
- [47] Bondi. H., and T. Gold., *The steady-state theory of the expanding universe*. Mon. Not. R. Astron. Soc. **108**, 252 (1948).
- [48] Jordan, T. F., *Cosmology calculations almost without general relativity*. Am. J. Phys. **73**, 653 (2005).
- [49] Souza. Ronaldo E., *Introdução à Cosmologia, São Paulo. Edusp, 2004*.
- [50] Wald, R. M. *General Relativity*, Chicago. U. of Chicago Press, 1984.
- [51] McCrea, W. H., *On the Significance of Newtonian Cosmology*. Astron. J., **60**, 271 (1955).
- [52] Peebles, P. J. E., *Tests of cosmological models constrained by inflation*. Astrophys. J., **284**, 439 (1984).
- [53] Bondi, H. *Cosmology*, 2nd edition, Cambridge University Press, 1960.