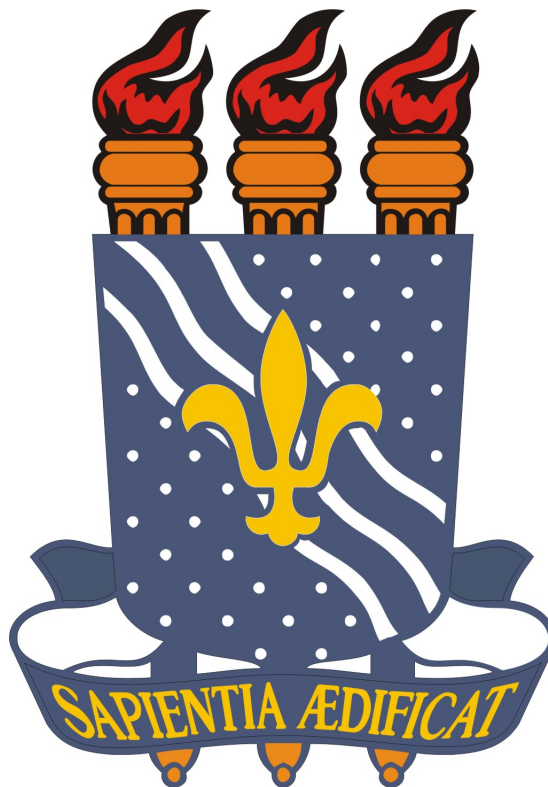


UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DOUTORADO EM FÍSICA



Paulo José Ferreira Porfírio da Silva

Teorias Modificadas da Gravitação e a Violação de
Causalidade

João Pessoa - PB

2017

PAULO JOSÉ FERREIRA PORFÍRIO DA SILVA

TEORIAS MODIFICADAS DA GRAVITAÇÃO E A VIOLAÇÃO DE CAUSALIDADE

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Física da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. JOSÉ ROBERTO SOARES DO NASCIMENTO

Co-orientador: Prof. Dr. ALBERT YU. PETROV

João Pessoa - PB

2017

PAULO JOSÉ FERREIRA PORFÍRIO DA SILVA

TEORIAS MODIFICADAS DA GRAVITAÇÃO E A VIOLAÇÃO DE CAUSALIDADE

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Física da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor.

Aprovada em Fevereiro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gonzalo J. Olmo - Examinador Externo

Universitat de València

Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha - Examinador Externo

Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Claudio Benedito Silva Furtado - Examinador Interno

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho - Examinador Interno

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Albert Yu. Petrov - Co-orientador

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento - Orientador

Universidade Federal da Paraíba

João Pessoa - PB

2017

S586t Silva, Paulo José Ferreira Porfírio da.
Teorias modificadas da gravitação e a violação de
causalidade / Paulo José Ferreira Porfírio da Silva. - João
Pessoa, 2017.
108 f. : il. -

Orientador: José Roberto Soares do Nascimento.
Coorientador: Albert Yu. Petrov.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN

1. Física. 2. Métricas Tipo Gödel. 3. Universos
Causais. 4. Gravidade Modificada de Chern-Simons.
5. Modelo de Brans-Dicke. I. Título.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Paulo José Ferreira
 Porfírio da Silva**, candidato ao Título de
 Doutor em Física na Área de Concentração
 Física das Partículas Elementares e Campos.

1 Aos vinte e dois dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezessete, às 14h00, no
 2 Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
 3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
 4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física das
 5 Partículas Elementares e Campos, **Paulo José Ferreira Porfírio da Silva**. A comissão
 6 examinadora foi composta pelos professores doutores: *José Roberto Soares do*
 7 *Nascimento* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Albert Petrov*
 8 (UFPB), coorientador do aluno, *Cláudio Benedito da Silva Furtado* (UFPB), *Dionísio*
 9 *Bazeia Filho* (UFPB), *Gonzalo J. Olmo* (Universitat de València) e *Bruno Carneiro da*
 10 *Cunha* (UFPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. José Roberto Soares do Nascimento
 11 comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao
 12 candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese
 13 intitulado “*Teorias modificadas da gravitação e violação de causalidade*”. Concluída a
 14 exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte
 15 parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o
 16 respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo
 17 Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da
 18 Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **22 de fevereiro de 2017**.
 19

Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Albert Petrov
Coorientador - UFPB

Prof. Dr. Cláudio Benedito da Silva Furtado
UFPB

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
UFPB

Prof. Dr. Gonzalo J. Olmo
Universitat de València

Prof. Dr. Bruno Carneiro da Cunha
UFPE

Lic. Danilo Wilson Lemos Menezes
Técnico em Assuntos Educacionais

The block contains the handwritten signatures of the six members of the Examining Board and the secretary, each written over a horizontal line. From top to bottom, the signatures are: José Roberto Soares do Nascimento, Albert Petrov, Cláudio Benedito da Silva Furtado, Dionísio Bazeia Filho, Gonzalo J. Olmo, Bruno Carneiro da Cunha, and Danilo Wilson Lemos Menezes. The signature of Danilo Wilson Lemos Menezes is crossed out with a large 'X'.

Dedico a minha família e para todas as pessoas que me apoiaram até este momento.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço aos meus pais por terem me dado todo o apoio necessário para galgar esse objetivo, por tudo de bom que me proporcionaram e pela ajuda nos momentos difíceis que sempre ocorre em qualquer caminhada. Em segundo lugar, agradeço ao meu orientador Prof. José Roberto Soares do Nascimento pela sua orientação, dedicação e pelo aprendizado durante esses quase quatro anos de trabalho. Agradeço também ao meu coorientador Prof. Albert Yu. Petrov pelas participações nas discussões que foram muito importantes e também pelo curso de supercampos que o mesmo ministrou brilhantemente. Gostaria de agradecer ao Prof. Joel B. F. Neto pela colaboração e pelo aprendizado nas discussões em Física gravitacional. Também agradeço ao Prof. G. J. Olmo pelo conhecimento compartilhado e pelas discussões em Física Gravitacional. Por fim, agradeço aos meus colegas de sala de pós graduação Jardson, Amaro, Gabriel, como também aos outros que de alguma forma participaram do processo.

Lista de Publicações

1) P. J. Porfírio, J. B. Fonseca-Neto, J. R. Nascimento, A. Yu Petrov, J. Ricardo and A. F. Santos. *Chern-Simons modified gravity and closed timelike curves*, Phys. Rev.D 94, 4 (2016).

2) P. J. Porfírio, J. B. Fonseca-Neto, J. R. Nascimento and A. Yu Petrov. *On the causality aspects of the dynamical Chern-Simons modified gravity*, Phys. Rev.D 94, 10 (2016).

3) J. A. Agudelo, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, P. J. Porfírio and A. F. Santos, *Gödel and Gödel-type universes in Brans-Dicke theory*, Phys. Lett.B 762, 96-101 (2016).

Lista de Figuras

- 3.1 Mostra o universo de Gödel em termos das coordenadas (t', r, ϕ) , a coordenada z' é suprimida já que a mesma gera geodésicas triviais. As geodésicas nulas emitidas pelo ponto P seguem trajetórias espirais até alcançar a superfície $t = 0$ onde a coordenada radial atinge o raio crítico r_c , em seguida a medida que o tempo cresce as geodésicas nulas começam a se fechar convergindo para o ponto P' em trajetória espiral. O mesmo ocorre para as geodésicas tipo tempo com a diferença que o valor máximo do raio é menor que o raio crítico. A figura foi retirada de [38] com pequenos ajustes. . . . 27
- 4.1 Diagrama de Feynman da anomalia triangular. As linhas internas representam férmions. 34
- 4.2 Gráfico de $\omega(k)$ e $m^2(k)$ para a solução de GCSN com poeira como única fonte de matéria. Tomamos $\rho = 1$. Perceba que a linha vertical tracejada corresponde a solução do vácuo. 57
- 4.3 Gráfico de $\omega(k)$ e $m^2(k)$ para a solução de GCSN com campo eletromagnético como única fonte de matéria. Tomamos $e^2 = 1$. Perceba que a linha vertical tracejada corresponde à solução do vácuo. 58
- 5.1 Solução de GCSD com campo eletromagnético como única fonte de matéria, tomamos $e = 2$. A linha tracejada amarela corresponde a $k = -1/3$, onde as funções m^2 e ω^2 explodem. 68

Algumas Definições Úteis

Vamos reservar as letras gregas minúsculas para a base coordenada enquanto que as letras latinas minúsculas para a base de tetradas, exceto n que corresponde à dimensão da variedade ou o fibrado tangente.

Símbolos de Christoffel de primeiro tipo:

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\nu\mu})$$

Símbolos de Christoffel de segundo tipo:

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\lambda\nu\alpha}$$

Tensor de Curvatura Riemanniano:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\mu$$

Tensor de Ricci:

$$R_{\nu\beta} = R^\mu{}_{\nu\mu\beta}$$

Escalar de Ricci:

$$R = g^{\nu\beta} R_{\nu\beta}$$

Tensor de Schouten:

$$S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{n} R g_{\mu\nu}$$

Tensor de Weyl:

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{2}{n-2}(g_{\mu[\alpha} S_{\beta]\nu} - g_{\nu[\alpha} S_{\beta]\mu}) - \frac{2}{n(n-1)} R g_{\mu[\alpha} g_{\beta]\nu}$$

Conexões de spin:

$$\omega^e_{cb} = e^e_\nu \nabla_b e^\nu_c$$

Tensor de Riemann misto:

$$R^d_{a\mu\nu} = R^\alpha_{\beta\mu\nu} e^\alpha_a e^\beta_\nu = \partial_\nu \omega^d_{a\mu} - \partial_\mu \omega^d_{a\nu} + \omega^e_{a\nu} \omega^d_{e\mu} - \omega^e_{a\mu} \omega^d_{e\nu}$$

Coeficientes de Não Holonomia:

$$\Omega^e_{bc} = \frac{1}{2}(\omega^e_{cb} - \omega^e_{bc})$$

Tensor de Riemann com todos índices de tetradas:

$$R^d_{acb} = \partial_b \omega^d_{ac} - \partial_c \omega^d_{ab} + \omega^e_{ab} \omega^d_{ec} - \omega^e_{ac} \omega^d_{eb} + 2\Omega^e_{bc} \omega^d_{ae}$$

Tensor de Ricci na base de tetradas:

$$R_{ab} = R^d_{adb}$$

Sumário

Agradecimentos	vii
Lista de Publicações	viii
Lista de Figuras	ix
Algumas Definições Úteis	x
Resumo	xiv
Abstract	xvi
1 Introdução	1
2 Elementos de Geometria Diferencial	8
2.1 Variedades Diferenciáveis e o Espaço Tangente	8
2.2 Variedade Riemanniana	10
2.3 Bases Não Coordenadas	12
2.4 Formas Diferenciais	16
2.5 Equações de Estrutura de Cartan	19
2.6 Formalismo de Tetradas da Relatividade Geral	20
3 CTC's Na Relatividade Geral	22
3.1 Violação de Causalidade e o Universo de Gödel	22
3.2 Universos Tipo Gödel	26
4 Gravidade Modificada Por Um Termo de Chern-Simons Não Dinâmico	32
4.1 Origens do Termo de Chern-Simons/Pontryagin	32
4.2 A Ação Da Teoria Modificada Não Dinâmica	38

4.3	Violação de Paridade na Gravidade Modificada de Chern-Simons	44
4.4	Universos Tipo Gödel Na GCSN	46
5	Gravidade Modificada Por Um Termo de Chern-Simons Dinâmico	59
5.1	A Ação da GCSD	60
5.2	Universos Tipo Gödel Na GCSD	61
6	Solução Tipo Gödel na Teoria de Brans-Dicke	69
6.1	Equações de Campo da Teoria de Brans-Dicke	70
6.2	Métricas Tipo Gödel Na Teoria de Brans Dicke Com Constante Cosmológica	71
6.2.1	$\varphi = \varphi(t)$	72
6.2.2	$\varphi = \varphi(z)$	73
7	Conclusão	76
A	Cálculo da Anomalia Gravitacional	79
B	Obtenção do Tensor de Cotton	82
C	Cálculo da Densidade de Pontryagin para Métricas Tipo-Gödel	84
	Referências Bibliográficas	87

Resumo

Nesta tese tratamos os Universos tipo Gödel no contexto da gravidade modificada, em particular, na gravidade modificada de Chern-Simons e na teoria de Brans-Dicke com constante cosmológica (BD- Λ). As métricas tipo Gödel vêm sendo intensamente discutidas na Relatividade Geral (RG) ao longo dos anos. Sabe-se que tais métricas apresentam Curvas tipo Tempo Fechadas (CTC's), ou seja, as próprias métricas tipo Gödel são um exemplo da violação de causalidade. Nosso objetivo é verificar a consistência das métricas do tipo Gödel dentro da gravidade modificada de Chern-Simons em ambas as formulações: não dinâmica e dinâmica. Na formulação não-dinâmica, mostramos que é possível uma solução de vácuo diferentemente da RG. Outro resultado essencialmente novo que obtemos é a presença de soluções causais para uma fonte de matéria bem motivada, em geral, as soluções não têm análogo na RG. Além disso, a solução de vácuo representa o caso limite que separa as regiões completamente causal e não causal, tal propriedade reflete as características topológicas da teoria de Chern-Simons. A característica que difere fundamentalmente as soluções da gravidade modificada de Chern-Simons e as da RG é a presença da quebra da simetria de Lorentz. Acontece que essa quebra abre um leque de novas soluções. Mostramos que as soluções não triviais de Chern-Simons na formulação não dinâmica são acompanhadas por correções de primeira ordem do parâmetro de violação de Lorentz. Além disso, na formulação dinâmica os parâmetros geométricos também são afetados por correções de segunda ordem do parâmetro de violação de Lorentz.

Investigamos também as métricas tipo Gödel no modelo BD- Λ . Obtemos uma solução de vácuo completamente causal, $m^2 = 4\omega^2$, onde para $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$ recupera-se a GR com um campo escalar e constante cosmológica. Vale a pena chamar a atenção para o papel da constante cosmológica que é fundamental neste contexto.

Palavras-chave: métricas tipo Gödel. Universos Causais. Gravidade modificada de

Chern-Simons. modelo de Brans-Dicke.

Abstract

In this thesis we deal with Gödel-type Universes in the context of modified gravity, in particular, Chern-Simons modified gravity and Brans-Dicke theory with cosmological constant (BD- Λ). The Gödel-type metrics have been intensively discussed in the General Relativity (GR) over years. It is known that such a metrics present Closed Time-like Curves (CTC's), in other words, the Gödel-type metrics are themselves an example of the causality violation. Our goal is verify the consistency of the Gödel-type metrics within the Chern-Simons modified gravity in both: non-dynamical and dynamical formulations. In the non-dynamical framework, we show that is possible a vacuum solution in contrast to GR. Another essentially new result that we get is the presence of causal solutions for a well-motivated matter source, in general, the solutions have no analogue in GR. Moreover, the vacuum solution represents the limiting case separating the completely causal and non-causal regions, such a property reflects the topological features of the Chern-Simons theory. The primordial distinguishing feature between the Chern-Simons modified gravity and GR solutions is the presence of the breaking Lorentz symmetry. It turns out this breaking opens up a range of new solutions. We show that the non-trivial Chern-Simons solutions in the non-dynamical framework is accompanied by first-order corrections of the Lorentz-violating parameter. Furthermore, in the dynamical framework the geometric parameters are also affected by second-order corrections of the Lorentz-violating parameter.

We also investigated the Gödel-type metrics in BD- Λ model. We obtain a vacuum solution which is completely causal, $m^2 = 4\omega^2$, where for $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$ one recovers the GR with a scalar field and cosmological constant. It is worth calling attention to the role of the cosmological constant that is fundamental in this context.

Keywords: Gödel-type metrics. Causal Universes. Chern-Simons modified gravity.

Brans-Dicke model.

Capítulo 1

Introdução

É notório o avanço da Física no último século, desde o advento da Teoria Quântica de Campos (TQC) e da Relatividade Geral (RG). O Modelo Padrão de Física de Partículas Elementares (MP) é uma TQC que acomoda três das quatro interações fundamentais da natureza: interações forte, fraca e eletromagnética. O MP é baseado no princípio de gauge o qual estabelece que a lagrangiana do modelo é invariante por um grupo não abeliano $G = SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, tal exigência apenas é satisfeita incluindo novos campos na ação da teoria, os chamados campos de gauge, onde suas excitações (bosóns de gauge: $A_\mu, W^\pm, Z^0$ e os glúons) são responsáveis pelas interações entre as partículas materiais (léptons e quarks). A simetria de gauge impõe ao modelo a restrição de termos de massa serem proibidos na lagrangiana, tanto para os bosóns quanto para os férmions. Portanto, inevitavelmente, a simetria de gauge deve ser quebrada espontaneamente (QES) em alguma escala de energia¹ com a finalidade das partículas “ganharem” massa.

O processo no qual isso ocorre é chamado mecanismo de Higgs, onde um campo escalar dinâmico (campo de Higgs), cuja representação é $(1, 2, 1)$ do grupo de gauge G , é introduzido no modelo acoplando-se com os campos fermiônicos via acoplamento de Yukawa, ademais uma das quatro componentes do campo de Higgs² adquire um valor esperado de vácuo (vev), a consequência é o surgimento de três bósons de Goldstone (excitações não massivas) que são “absorvidos” pelos bósons vetoriais não físicos que, por sua vez, adquirem massa transformando nos bosóns físicos $W^\pm, Z^0$, enquanto que o fóton

¹No MP a escala de energia na qual a simetria eletrofraca é quebrada corresponde a 246 GeV

²O campo de Higgs na representação dubleto de $SU_L(2)$, ou seja,

A_μ continua sem massa devido a “proteção” imposta pela identidade de Ward, portanto a quebra de simetria no MP ocorre apenas no setor eletrofraco da teoria $SU_L(2) \times U_Y(1)$ restando uma simetria residual $U_Q(1)$ neste setor do MP.

Sob outro ponto vista completamente diferente está a interação gravitacional que não é descrita por uma TQC, apesar disso tentativas foram realizadas nessa linha e mostraram que a teoria apresenta infinitos não renormalizáveis [1]. A RG é a teoria que descreve a interação gravitacional sob uma perspectiva geométrica, ou seja, o espaço-tempo é visto como uma variedade pseudo-Riemanniana (agora, o espaço-tempo pode ser curvo), onde as propriedades locais são descritas pelo tensor métrico pseudo-Riemanniano ($g_{\mu\nu}$) cujo efeito físico é o campo gravitacional. A distribuição de matéria interfere diretamente sobre a curvatura do espaço, isso pode ser observado pelas equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

o lado esquerdo é definido apenas por quantidades puramente geométricas caracterizadas pelo tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Contrariamente, o lado direito é definido apenas em termos das fontes de matéria caracterizadas na forma do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. A teoria deve satisfazer as chamadas condições de energia essas condições asseguram localmente a positividade da densidade de energia.

Experimentalmente a teoria é uma das mais bem sucedidas de toda a Física. Ela passou em todos os chamados testes clássicos: precessão do periélio de Mercúrio, deflexão da luz pelo Sol e desvio para o vermelho da luz [2]. Na escala astronômica a teoria tem sido usada para entender o comportamento de pulsares binários, recentemente no observatório (LIGO)³ foi detectado sinais de ondas gravitacionais [3, 4, 5]. Por outro lado, evidências apontam que o nosso Universo é preenchido aproximadamente por 95% de uma densidade de energia que não enxergamos. Cerca de 24% desse percentual é composto de um tipo de matéria não interagente e não relativística chamada de matéria escura, enquanto que os outros 71% é composto de um tipo de energia (acredita-se que ela é responsável pela expansão acelerada do Universo) chamada de energia escura [6, 11]. A RG por si só não consegue explicar tais evidências. Além dessas questões, ratificadas pelas evidências experimentais, existem as questões teóricas onde a RG também apresenta falhas, tais como: singularidades, censura cósmica e violação de causalidade, a saída mais natural para o problema é modificar a teoria.

³Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

A modificação mais simples que tenta explicar de maneira quantitativa a matéria e energia escura é o modelo (Λ CDM), adicionando-se um termo de constante cosmológica às equações de Einstein, no entanto o modelo tem um problema grave que é o valor muito pequeno da constante cosmológica interpretada como uma energia de vácuo no modelo [12]. Existem vários outros candidatos de modificação da RG, das quais se destacam na literatura as modificações incluindo, no setor gravitacional da ação, termos de altas ordens na curvatura (como por exemplo as teorias $F(R)$), ou incluindo novos campos, seja: campos escalares (teoria escalar-tensor), campos vetoriais (teoria vetor-tensor), campos espinoriais (supergravidade) e etc.

Duas teorias de modificação da RG vêm recebendo grande atenção nos últimos tempos: A teoria da gravidade modificada por um termo de Chern-Simons (GCS) e a teoria de Brans-Dicke (BD). A primeira delas constitui uma das mais interessantes extensões da RG que permite a implementação das quebras das simetrias CPT e Lorentz no setor gravitacional. Outra característica da teoria é que a mesma envolve termos de derivadas de terceira ordem na métrica. Originalmente, a extensão de Chern-Simons foi proposta em três dimensões onde foi mostrada ser completamente consistente com a unitariedade e causalidade. Sua generalização quadridimensional foi proposta em [55] e sua forma é caracterizada por um acoplamento não mínimo entre um campo pseudo-escalar (axion), $\phi(x)$, acoplado à gravitação via o termo topológico de Pontryagin.

Na primeira proposta da teoria (conhecida como modificação da gravitação por um termo de Chern-Simons não dinâmico (GCSN)) o campo pseudo-escalar é tratado como um campo externo não dinâmico o que pode indicar que haja uma quebra da simetria de Lorentz, já que no espaço plano campos vetoriais constantes geram quebra de Lorentz, em [55] foi mostrado a conexão entre uma forma específica do pseudo-escalar tal que o mesmo é proporcional à um vetor constante, isto é, $\phi(x) = v_\mu x^\mu$, e a violação de Lorentz. Portanto, observamos que a extensão de Chern-Simons é um ingrediente a mais da extensão mais genérica do MP que viola a simetria Lorentz. Por outro lado, ela própria pode ser estudada como um modelo mais simples de violação da simetria de Lorentz onde o termo adicionado na ação da RG é interpretado como pequenos desvios causados pela quebra da simetria de Lorentz. Uma extensão natural de GCSN é tratar o campo $\phi(x)$ não mais como um campo sem dinâmica e, sim, como um campo dinâmico. Mesmo nesse caso ainda assim podemos implementar a quebra da simetria de Lorentz, pois a exigência

de um vetor constante implicar na não dinâmica do mesmo, ou seja, $\partial_\mu v_\nu = 0$ é somente válida para o espaço plano. Por outro lado, no espaço curvo Riemanniano a constância do vetor v_μ não implica, em geral, $\nabla_\mu v_\nu = 0$.

A teoria de Chern-Simons pode ser importante para responder algumas questões relevantes em cosmologia, por exemplo, acredita-se que a violação de paridade [13, 16] no setor gravitacional é um dos mecanismos propostos para resolver o problema da assimetria bariônica e também da leptogênese [17, 18, 19], além disso, a formulação dinâmica é relevante no estudo das teorias inflacionárias. Outro efeito do termo de correção de Chern-Simons é a assimetria das duas polarizações de ondas gravitacionais. Essas questões estão sendo analisadas no CMB.

A teoria de BD é um tipo especial das teorias escalar-tensorial que constituem modificações da RG incluindo um campo escalar extra na ação da RG. O nosso objetivo nesta tese é tratar exclusivamente da teoria BD e sua extensão mais trivial BD- Λ^4 , assim, não iremos se aprofundar nas discussões a cerca das teorias escalar-tensorial mais gerais e focaremos, exclusivamente, em BD e BD- Λ . A teoria de BD foi uma das primeiras teorias gravitacionais onde se inclui um campo extra, mais precisamente um campo escalar. O modelo foi proposto em 1961 e, adicionalmente ao campo escalar, que é conhecido como campo de Brans-Dicke (φ), possui um parâmetro livre $\tilde{\omega}$ determinado experimentalmente.

Na teoria de BD a constante Newtoniana é substituída pelo acoplamento efetivo proporcional ao inverso do campo de BD, $G_{eff} \approx 1/\varphi$. Além disso, no limite $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$ pode-se mostrar a equivalência entre a teoria de BD e a RG (é esperado que nesse limite as equações de campo de Brans-Dicke reduzem-se às da RG para o mesmo tensor energia-momento, exceto para o caso onde o traço do tensor energia-momento é nulo, para mais detalhes veja [70, 71, 72]). Dados experimentais, de um experimento realizado próximo ao Sol, foram obtidos usando o parâmetro γ no formalismo PPN⁵ no regime de campo fraco e apontam para um limite de $\tilde{\omega} > 40000$ [73]. Esse dado restringe bastante a teoria de BD, de modo que deixa claro que sinais de nova Física advindas do modelo de BD em relação a RG, a nível do sistema solar, devem ser muito pequenos.

Várias soluções na teoria de BD foram obtidas das quais citamos uma das primeiras soluções conhecidas que corresponde a uma métrica estática e esfericamente simétrica

⁴Adiciona-se um termo de constante cosmológica na ação.

⁵*Parametrized-post newtonian*, formalismo usado para comparar a RG, no regime de campo fraco, com a teoria Newtoniana[32].

[77], tal solução é interessante para entender o comportamento da campo gravitacional em torno de corpos massivos na teoria BD. Também foram encontradas soluções esfericamente simétricas e não estáticas (vide [78]). Soluções de buraco negro também foram investigadas em BD, para mais detalhes veja [79]. Outras soluções relevantes são as cosmológicas, por exemplo, nas referências [80, 81] foram encontradas soluções da métrica de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) tanto para o modelos de BD quanto para BD- Λ .

Um dos problemas mais polêmicos na RG é a violação de causalidade [35]. Historicamente, a primeira solução da RG com tal problema foi encontrado por Gödel [33]. A solução encontrado por ele apresenta CTC's⁶, um tipo de curva que permite viagem ao passado. Ao longo do tempo, uma generalização da métrica de Gödel foi introduzida, na realidade é um conjunto de métricas formando uma classe de equivalência chamadas de métricas tipo Gödel. As propriedades das métricas tipo Gödel em RG foram incessantemente estudadas nos últimos tempos como pode ser visto no conjunto de artigos [42, 43]. Além da RG, as métricas tipo Gödel foram estudadas em vários outros contextos: Teoria de cordas [20] e Holografia [21]. É óbvio, soluções que apresentam CTC's são problemáticas, pois viagens no tempo vão totalmente de encontro com qualquer entendimento nosso a respeito de causalidade. Isso fica claro na célebre afirmação de Hawking: “Se viagem no tempo é possível. Onde estão os viajantes vindo do futuro?”. De acordo com nosso entendimento viagens no tempo apenas são possíveis em filmes de ficção científica, portanto é razoável verificar o comportamento de tais soluções, que apresentam essa “doença”, em extensões da RG e verificar a possibilidade de eliminar as CTC's.

A tese seguirá a seguinte estrutura: no capítulo 2 faremos uma breve digressão a cerca dos conceitos básicos sobre geometria diferencial com o intuito de fornecer o aparato matemático necessário para o entendimento dos capítulos que se sucedem. No primeiro momento, definiremos o conceito de variedade diferenciável com o objetivo de definir variedades Riemannianas, em seguida passaremos para o objetivo principal desse capítulo que é a definição de bases não coordenadas (não holonômicas) e das formas diferenciais, juntamente com as equações de estrutura de Cartan.

No capítulo 3 discutimos mais a fundo sobre as CTC's na RG explicitaremos a solução original encontrada por Gödel, bem como vamos definir matematicamente as CTC's. *A posteriori* tratamos da generalização da métrica de Gödel, um conjunto de métricas

⁶sigla em inglês *Closed Time-like Curves*

que forma uma classe de equivalência chamada de métricas tipo Gödel. Abordaremos a relevância das métricas tipo Gödel no estudo da RG. Continuando nessa linha, mostraremos que as condições necessárias e suficientes para as métricas serem homogêneas no espaço-tempo são determinadas por dois parâmetros m^2 e ω , nos quais o primeiro deles discrimina três classes de métricas: hiperbólica, trigonométrica e linear, todas definidas a partir do sinal de m^2 . Enquanto que ω é relacionado com a vorticidade ou rotação da matéria. Mostraremos que os parâmetros m^2 e ω desempenham um papel ímpar no que diz respeito à existência das CTC's nos Universos tipo Gödel.

Começaremos o capítulo 4 motivando as causas (diga-se de passagem não são poucas) que levam à extensão de Chern-Simons da RG. Definiremos a ação de GCSN, os parâmetros e campos que a compõe. Obteremos as equações de movimento, geralmente conhecidas na literatura por equações de campo modificadas, tais equações levam, inevitavelmente, à uma restrição denominada de restrição de Pontryagin. Feito isso, partiremos para outra questão relevante sobre a teoria que é a violação de paridade no setor gravitacional; falaremos sobre a consequência sobre espaços Riemannianos que possuem paridade bem definida, seja ela par ou ímpar, como exemplo discutiremos o problema da métrica de Kerr. Por fim, na última seção do capítulo tratamos das métricas tipo Gödel no cenário da GCSN. A primeira dificuldade que surge são as equações modificadas escritas na base coordenada que torna praticamente impossível de serem resolvidas, portanto utilizamos uma base ortonormal de Lorentz, essa escolha simplifica drasticamente as equações modificadas permitindo, dessa forma, resolvê-las com mais facilidade. Especificamente vamos mostrar que as métricas tipo-Gödel são soluções da GCSN e, mais ainda, a maioria dessas soluções estão vinculadas à uma quebra da simetria de Lorentz.

No capítulo 5 tratamos da GCSD onde o campo ϕ passa a ser dinâmico. Discutiremos a importância da teoria cuja principal motivação é sua forte conexão com teoria de Cordas. Em seguida definimos a ação da GCSD e obtemos suas equações de movimento, que serão diferentes da formulação não dinâmica. Observamos que nessa situação o próprio campo dinâmico deve satisfazer uma equação de movimento. Em última análise verificamos a consistência das métricas tipo Gödel no contexto de GCSD, nesse caso, como era de esperar, as equações tornam-se mais complicadas que as obtidas em GCSN, embora seja possível obter soluções analíticas das mesmas. Além disso, vamos chamar atenção para as principais diferenças entre ambas as formulações.

No capítulo 6 desta tese abordaremos as teorias BD e BD- Λ . Vamos obter relações entre os parâmetros de BD- Λ de modo que as soluções tipo Gödel sejam consistentes. Finalmente, analisaremos as possibilidades da existência de soluções causais nesse contexto.

Para fechar a tese, fazemos uma conclusão a respeito dos principais resultados obtidos nos capítulos antecedentes que servirá como endosso para algumas perspectivas de futuros trabalhos.

Capítulo 2

Elementos de Geometria Diferencial

2.1 Variedades Diferenciáveis e o Espaço Tangente

O espaço-tempo na relatividade geral é interpretado como uma variedade diferenciável quadridimensional $\mathcal{M}_4$ (conjunto de pontos) onde um ponto p sobre a variedade é identificado como um evento[22]. A fim de definir o conceito de variedade diferenciável, por questão de generalidade, vamos considerar que $\mathcal{M}$ tem uma dimensão arbitrária n , então para localizar tais pontos sobre $\mathcal{M}$ devemos introduzir um mapeamento que associa a cada ponto $p \in \mathcal{M}$ um sistema de coordenadas, ou seja, uma éupla $x^1(p), \dots, x^n(p)$ (os índices rotulam as n coordenadas e não potências). Vamos chamar o mapeamento de f e exigi-lo que satisfaça as seguintes condições: seja um para um, contínuo, invertível e, além disso, seu domínio seja definido em uma vizinhança aberta de $\mathcal{M}$, isto é, $U \subset \mathcal{M}$, portanto f associa um ponto $p \in U \subset \mathcal{M}$ para pontos $f(p) = (x^1, \dots, x^n) \in H \subset \mathbf{R}^n$. O par definido por (U, f) é chamado uma carta (ou *patche*) sobre $\mathcal{M}$ [23]. Se para quaisquer duas cartas, digamos, (U, f) e (V, g) existe um elemento $p \in U \cap V$ tal que $f(p) = (x^1, \dots, x^n)$ e $g(p) = (y^1, \dots, y^n)$, então existe um mapeamento que relaciona os y^i em termos dos x^i dado pela composição $y^i = g(p) = g \circ f^{-1}(x^i)$, onde f^{-1} é o mapeamento inverso de f ,

portanto, temos

$$\begin{aligned}
 y^1 &= y^1(x^1, \dots, x^n) \\
 y^2 &= y^2(x^1, \dots, x^n) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 y^n &= y^n(x^1, \dots, x^n).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

A equação anterior representa uma transformação de coordenadas associado a um ponto p na sobreposição entre os dois abertos U e V de $\mathcal{M}$. Se o jacobiano da transformação (2.1) existe e ele for contínua e invertível então as cartas (U, f) e (V, g) são ditas estarem relacionadas por uma transformação diferenciável. É possível cobrir toda a variedade $\mathcal{M}$ por vários cartas (U_i, f_i) (geralmente é chamado um atlas de $\mathcal{M}$) de tal modo que todos os pontos de $\mathcal{M}$ estejam em uma sobreposição de duas cartas relacionadas por uma transformação diferenciável, nesse caso $\mathcal{M}$ é dito ser uma variedade diferenciável [24]. A estrutura diferencial de uma variedade é interessante pois podemos definir quantidades importantes como por exemplo: vetores, tensores e formas diferenciais [25]. A partir de agora quando nos referirmos a variedades estaremos tratando de variedades diferenciais.

Com o objetivo de definir vetores sobre uma variedade diferenciável precisamos do conceito de curva e de vetores tangentes a esta curva em um determinado ponto. Então, uma curva suave γ é definida como o mapeamento de um intervalo $I \subset \mathbf{R}$ para uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$, onde a curva γ é parametrizada pelo parâmetro afim t , assim $\gamma(t) : t \in I \rightarrow \mathcal{M}$. Os pontos sobre uma carta (U, f) contidos na curva $\gamma(t)$ relacionam-se pela regra: $x^\mu = f(p) = f \circ \gamma(t)$. Assim, podemos definir uma função escalar ϕ como o mapeamento de um ponto p sobre a variedade para um número real, ou seja, $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Naturalmente podemos expressar a taxa de variação de ϕ sobre a curva $\gamma(t)$ em termos das coordenadas da carta (U, f) da seguinte forma

$$\frac{d\phi(p)}{dt} = \frac{d\phi(x^\mu(t))}{dt} = \frac{dx^\mu(t)}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = X^\mu(t) \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}, \tag{2.2}$$

onde $\frac{dx^\mu(t)}{dt} = X^\mu$ são as componentes do vetor tangente a curva γ assim como na geometria euclidiana. Dessa forma, podemos definir um operador diferencial que nada mais é que o vetor tangente a curva, $X = X^\mu \partial_\mu$, que atua sobre as funções escalares satisfazendo a regra $X[\phi] = X^\mu \partial_\mu \phi$. O conjunto de todos os vetores tangentes, digamos $X_1 \dots X_n$, num

ponto p em $\mathcal{M}$ forma um espaço vetorial, frequentemente chamado de espaço tangente $(T_p\mathcal{M})$ [26]. Dado um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ em $\mathcal{M}$ qualquer vetor de $(T_p\mathcal{M})$ pode ser expandido em termos do conjunto $\{\partial_\mu\}$, portanto $\{\partial_\mu\}$ naturalmente forma um base para espaço tangente, chamada de base coordenada¹. Vetores são elementos abstratos que “moram” no espaço tangente e assim não podem depender de uma particular escolha de coordenadas, logo se considerarmos dois sistemas de coordenadas x^μ e x'^μ , um vetor (V) pode ser escrito em ambas as bases da seguinte forma: $V = V^\mu \partial_\mu = V'^\mu \partial'_\mu$ e suas componentes (contravariantes) estão relacionadas pela regra

$$V'^\mu = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.3)$$

O espaço vetorial dual associado a $T_p\mathcal{M}$ é chamado de espaço cotangente $(T_p^*\mathcal{M})$ cuja base é o conjunto de 1-forma (co-vetor) $\{dx^\mu\}$ tal que a condição de dualidade é dada por $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$. Então, uma 1-forma (co-vetor) V pode ser expresso em termos da base de 1-forma $\{dx^\mu\}$ por $V = V_\mu dx^\mu$, onde V_μ são as componentes covariantes de V . Logo o produto de V e U é definido por $V(U) = V_\mu U^\mu$. Sob transformação geral de coordenadas as componentes covariantes estão relacionadas pela regra

$$V'_\mu = V_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}. \quad (2.4)$$

Generalizando o conceito de vetor definimos um tensor X de tipo (p, q) como sendo o objeto abstrato construído a partir de produtos tensoriais dos vetores da base do espaço tangente assim como de co-vetores da base do espaço cotangente, isto é,

$$X = X^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} \partial_{\mu_1} \otimes \partial_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_p} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_q}, \quad (2.5)$$

onde as componentes sob transformação geral de coordenadas satisfaz a regra

$$X'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} = X^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}} \dots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}}. \quad (2.6)$$

2.2 Variedade Riemanniana

Na seção anterior definimos alguns conceitos importantes em geometria diferencial, no entanto, não fizemos nenhuma menção a quantidades de medida como por exemplo:

¹Em relatividade geral, por razões históricas, todos os cálculos geralmente são realizados na base coordenada, no entanto existem as bases não coordenadas que veremos adiante

distância entre pontos sobre a variedade, área, ângulo ou volume. A fim de definir tais quantidades é necessário dotar cada espaço tangente de um produto interno que é definido como um mapeamento $g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$, ou seja, um operador bilinear chamado de tensor métrico ou, simplesmente, métrica que relaciona dois vetores de $T_p\mathcal{M}$ a um número real. Portanto, definimos a métrica por

$$g(U, V) = g(V, U) \equiv U \cdot V = V \cdot U, \quad (2.7)$$

o que implica que o tensor métrico é simétrico. A norma ou comprimento de um vetor U nesse espaço é dado por $g(U, U) = U \cdot U = |U|^2$. As componentes da métrica na base $\{\partial_\mu\}$ são dadas por

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu) = \partial_\mu \cdot \partial_\nu. \quad (2.8)$$

Podemos reescrever o tensor métrico em termos das 1-forma $\{dx^\mu\}$ da base, a partir da relação

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (2.9)$$

onde $g_{\mu\nu}$ forma uma matriz simétrica $n \times n$.

Em uma variedade dotada de uma métrica $g_{\mu\nu}$ ² pode se impor a condição onde o produto interno de vetores transportados paralelamente de um ponto a outro da variedade ao longo de uma curva é invariante, em outras palavras, o comprimento do vetor permanece inalterado durante o transporte paralelo. Matematicamente, isso pode ser expresso pela condição de compatibilidade métrica $\nabla_\mu g_{\nu\alpha} = 0$, cuja solução geral é dada por

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = L_{\mu\nu}^\alpha + K_{\mu\nu}^\alpha, \quad (2.10)$$

onde $L_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$ é a conexão de Levi-Civita (idêntico aos símbolos de Christoffel de segundo tipo) e $K_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}^\alpha - T_\mu^\alpha{}_\nu - T_\nu^\alpha{}_\mu)$ é o tensor de contorção definido em termos do tensor de torção $T_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha)$ [27]. No caso da geometria Riemanniana o tensor de torção é nulo, consequentemente a conexão é determinada inteiramente em termos da métrica, ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = L_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (2.11)$$

Portanto, em uma geometria Riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ o único grau de liberdade geométrico é a métrica, isto é, todas as quantidades geométricas relevantes são determinadas pela

²Na literatura por um abuso de linguagem geralmente se chama as componentes, $g_{\mu\nu}$, do próprio tensor métrico.

métrica. É claro que em geometrias mais gerais as condições impostas pela geometria Riemanniana devem ser relaxadas o que implica dizer que a conexão deve ser vista como uma grau de liberdade independente da métrica, para mais informações veja [28].

2.3 Bases Não Coordenadas

Como abordado nas seções anteriores vetores e tensores são objetos abstratos que podem ser expandidos em uma base coordenada $\{\partial_\mu\}$ de $T_p\mathcal{M}$ ou, similarmente, expandi-los na base das 1-forma $\{dx^\mu\}$ de $T_p^*\mathcal{M}$. Na verdade, a base coordenada nada mais é que uma possível escolha, natural e intuitiva, de uma base para $T_p\mathcal{M}$, no entanto existe uma infinidade de bases ³ que pode ser escolhida em cada ponto p de $\mathcal{M}$. De fato, podemos escolher uma nova base chamada de base não coordenada $\{e_a\}$ (onde as letras latinas rotulam os índices da nova base) para o espaço tangente, de modo que um vetor $V \in T_p\mathcal{M}$ pode ser expandido em ambas as bases

$$V = V^a e_a = V^\mu \partial_\mu, \quad (2.12)$$

onde V^a são as componentes contravariantes de V na nova base. Em geral, a nova base é chamada de não coordenada (não-holonômica), pois os vetores da nova base não comutam, ou seja, $[e_a, e_b] = \Omega_{ab}^c e_c$, onde Ω_{ab}^c são os coeficientes de não-holonomia. Analogamente, escolheremos uma nova base de 1-forma $\{e^a\}$ para o espaço cotangente, onde $e^a(e_b) = \delta_b^a$. Assim um co-vetor $U \in T_p^*\mathcal{M}$ pode ser expandido em ambas as bases

$$U = U_a w^a = U_\mu dx^\mu, \quad (2.13)$$

onde U_a são as componentes covariantes de U na nova base de 1-forma. As bases novas e antigas estão relacionadas via transformação de mudança de base dadas por

$$e_a = e_a^\mu(x) \partial_\mu \quad (2.14)$$

e

$$e^a = e_\mu^a(x) dx^\mu \quad (2.15)$$

³As várias possibilidades de escolhas de bases em todos os pontos constitui uma estrutura chamada de fibrado de bases.

onde $e_\mu^a(x)$ ⁴ é uma matriz de ordem n dependente da coordenada x^μ e é conhecida como tetrada ou, mais frequentemente, *vielbein*⁵. Pela condição de dualidade entre as novas bases implica que $e_a^\mu(x)$ é a sua inversa, deste modo

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a. \quad (2.16)$$

Substituindo as Eqs.(2.15, 2.16) na Eq.(2.12) relacionamos as componentes contravariantes em ambas as bases

$$V^a = e_\mu^a V^\mu. \quad (2.17)$$

De forma similar substituindo as Eqs.(2.15, 2.16) na Eq.(2.13) relacionamos as componentes covariantes em ambas as bases

$$U_a = e_a^\mu U_\mu. \quad (2.18)$$

Em geral, para um tensor de n índices contravariantes e m índices covariantes temos

$$T_{b_1 b_2 \dots b_n}^{a_1 a_2 \dots a_n} = e_{\mu_1}^{a_1} e_{\mu_2}^{a_2} \dots e_{\mu_n}^{a_n} e_{b_1}^{\nu_1} e_{b_2}^{\nu_2} \dots e_{b_m}^{\nu_m} T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}. \quad (2.19)$$

As componentes da métrica na nova base são $g_{ab} = g(e_a, e_b)$, por meio de Eq.(2.15), podemos relaciona-lás com as componentes da métrica na base antiga, ou seja,

$$\begin{aligned} g_{ab} &= g(e_a, e_b) = g(e_a^\mu \partial_\mu, e_b^\nu \partial_\nu) \\ &= e_a^\mu e_b^\nu g(\partial_\mu, \partial_\nu) \\ g_{ab} &= e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

ou,

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b g_{ab}, \quad (2.21)$$

a Eq.(2.9) pode ser escrita em termos das 1-forma $\{e^a\}$ como segue

$$g = g_{ab} e^a \otimes e^b. \quad (2.22)$$

Existe uma particular escolha de base chamada de base ortonormal que corresponde ao caso onde a métrica, com assinatura Lorentziana $(-, +, +, \dots, +)$, é dada pela métrica de Minkowski, isto é, $g_{ab} = \eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, \dots, +1)$, onde as componentes de vetores ou tensores em $T_p \mathcal{M}$ da variedade se transformam de maneira similar às tranformações

⁴Por economia omitimos o índice da coordenada x^μ no ponto p .

⁵Palavra alemã que significa muitas pernas.

de Lorentz que ocorrem na Relatividade Especial. Para vermos em mais detalhes vamos considerar a transformação de uma base ortonormal (e_a) para uma nova base ortonormal $(e_{a'})$

$$e_a \rightarrow e_{a'} = \Lambda_{a'}^a(x) e_a, \quad (2.23)$$

equivalentemente

$$e^a \rightarrow e^{a'} = \Lambda^{a'}_a(x) e^a, \quad (2.24)$$

onde $\Lambda_{a'}^a(x)$ são as matrizes transformação entre as bases ortonormais em cada ponto p da variedade e $\Lambda^{a'}_a(x)$ representa a inversa. Tais matrizes são análogas as matrizes de transformação de Lorentz que ocorre no espaço plano (Minkowski), no entanto com a diferença que agora elas são locais, portanto o intervalo é invariante e, por consequência, as matrizes são ortogonais, $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$. Além disso, elas formam um grupo de Lie⁶ o chamado grupo de Lorentz local $SO(n-1, 1)$, assim as letras latinas minúsculas, na base ortonormal, representam índices de Lorentz. Desta forma, a lei de transformação de um tensor sob ação de $SO(n-1, 1)$ é:

$$T_{b'_1 \dots b'_m}^{a'_1 \dots a'_n} = \Lambda_{a'_1}^{a_1}(x) \dots \Lambda_{a'_n}^{a_n}(x) \Lambda_{b'_1}^{b_1}(x) \dots \Lambda_{b'_m}^{b_m}(x) T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n}. \quad (2.25)$$

Na base coordenada, a derivada covariante de um tensor é dado pela sua derivada parcial mais termos de correção, associado a cada índice, envolvendo o tensor e os coeficientes da conexão afim. Já na base não coordenada, sobretudo na base ortonormal, o procedimento é similar, basta substituir os coeficientes da conexão afim $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ pelos coeficientes da conexão de spin⁷, ω_{bc}^a . Portanto, temos

$$\nabla_c T_b^a = \partial_c T_b^a + \omega_{dc}^a T_b^d - \omega_{bc}^d T_d^a. \quad (2.26)$$

Como discutimos anteriormente, na geometria Riemanniana a exigência das condições de torção nula e compatibilidade métrica ($\nabla_\mu g_{\alpha\nu} = 0$) podem ser mapeadas para a base não coordenada. A primeira das exigências, torção nula, equivale ao caso onde $\tilde{D}_\mu e_\nu^a = 0$ (muito conhecido por postulado da tetrada) [29], em que $\tilde{D}_\mu$ é uma “derivada covariante” que atua tanto nos índices de coordenada quanto nos índices de tetrada, vejamos abaixo

$$\tilde{D}_\mu e_\nu^a \equiv \partial_\mu e_\nu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a = 0, \quad (2.27)$$

⁶Grupos de Lie são grupos que possuem as propriedades de serem contínuos e diferenciáveis. Uma transformação finita é obtida a partir de infinitas transformações infinitesimais.

⁷Também é conhecido como coeficientes de rotação de Ricci

a equação anterior nos fornece uma relação entre as componentes da conexão de spin e da conexão afim, ou seja,

$$\omega^a_{b\mu} = e^a_\nu e^\alpha_b \Gamma^\nu_{\mu\alpha} - e^\alpha_b \partial_\mu e^a_\alpha, \quad (2.28)$$

que nos leva a uma conexão de spin determinada inteiramente pela tetrada, isto é, $\omega^a_{b\mu} = \omega^a_{b\mu}(e)$.

A segunda das exigências é equivalente a tomar $\nabla_c \eta_{ab} = 0$, na base ortonormal, deste modo obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla_c \eta_{ab} &= \partial_c \eta_{ab} - \omega^d_{ac} \eta_{db} - \omega^d_{bc} \eta_{ad} = 0 \\ &= -\omega_{bac} - \omega_{abc} = 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

portanto,

$$\omega_{abc} = -\omega_{bac}, \quad (2.30)$$

ou, ainda, usando a (2.19) temos

$$\omega_{ab\mu} = -\omega_{ba\mu}. \quad (2.31)$$

Assim, a compatibilidade métrica na nova base é equivalente à antissimetria da conexão de spin nos dois primeiros índices latinos. Na próxima seção esses conceitos, aqui discutidos, ficarão mais claros depois de introduzirmos formas diferenciais e as equações de estrutura de Cartan.

Do ponto de vista físico, a introdução de uma base ortonormal é de fundamental importância para o acoplamento de férmions em teorias no espaço curvo [30]. Em particular, tomemos como exemplo a Relatividade Geral onde as partículas fermiônicas são descritas por espinores, que são representações do grupo de *spin* em quatro dimensões dado pelo grupo de Lie de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ ⁸. O termo de interação de férmions com a gravidade é dado pela conexão espinorial definida localmente por

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{4} \omega^{ab}_{\mu}(x) \sigma_{ab}, \quad (2.32)$$

onde $\sigma_{ab} = \frac{1}{4} \{\gamma_a, \gamma_b\}$ são os geradores do grupo de Lorentz local na representação de *spin* e $\gamma_a = e^\mu_a \gamma_\mu$ são as matrizes de Dirac na base ortonormal.

⁸O grupo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ é o grupo de recobrimento duplo de $\text{SO}(3, 1)$, em outras palavras, existe um mapeamento de elementos de 1 para 1 que podemos expressar via o isomorfismo $\text{SO}(3, 1) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbf{Z}_2$

2.4 Formas Diferenciais

Vimos na seção sobre espaço tangente o conceito de 1-forma, que na verdade é um caso específico de uma classe mais abrangente chamadas de k -forma. Então, por definição a forma diferencial

$$\Omega = \frac{1}{k!} \Omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}, \quad (2.33)$$

é dito ser uma k -forma (obviamente com $k \leq n$). É importante tecer alguns comentários sobre (2.33): o primeiro deles diz respeito às componentes $\Omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$ que são totalmente antissimétricas, consequentemente as formas diferenciais constituem uma subclasse dos tensores do tipo $(0, m)$ definidos por (2.6) cujos índices das componentes são totalmente antissimétricos, matematicamente é equivalente a $\Omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \Omega_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k]}$. O segundo comentário é sobre o produto dos elementos da base coordenada $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}$ que significa todas as combinações antissimétricas, o símbolo $\wedge$ representa o produto exterior, logo

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} = dx^{[\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_k]}, \quad (2.34)$$

os índices entre colchetes explicitam a propriedade de antissimetria dos mesmos. No caso especial de tomarmos $k = 2$ implica que

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge dx^\nu &= dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \\ &= -(dx^\nu \otimes dx^\mu - dx^\mu \otimes dx^\nu) \\ dx^\mu \wedge dx^\nu &= -(dx^\nu \wedge dx^\mu). \end{aligned} \quad (2.35)$$

O produto exterior entre uma k -forma Ω e uma q -forma Δ é definido por

$$\Omega \wedge \Delta = \frac{1}{k!q!} \Omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \Delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \wedge dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q}, \quad (2.36)$$

tal operação fornece uma $(k + q)$ -forma onde $k + q \leq n$. De (2.35-2.36) segue uma importante relação de comutatividade entre as formas diferenciais

$$\Omega \wedge \Delta = (-1)^{kq} \Delta \wedge \Omega, \quad (2.37)$$

deste modo o produto exterior entre duas formas diferenciais pode comutar ou anti-comutar a depender do tipo de forma.

Outra importante operação envolvendo formas diferenciais é a diferenciação exterior. Considerando uma k -forma Ω sua derivada exterior $d\Omega$ é definida por

$$d\Omega = \frac{1}{k!} \partial_\alpha \Omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} dx^\alpha \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}, \quad (2.38)$$

a equação anterior deixa claro que a operação diferenciação exterior mapeia uma k -forma em uma $(k + 1)$ -forma. Uma propriedade interessante é que a derivada exterior aplicada duas vezes é sempre zero, isto é, $d^2\Omega = d(d\Omega) = 0$ este resultado é trivialmente obtido de (2.38), portanto o operador derivada exterior é nilpotente. Facilmente pode ser mostrado que a derivada exterior do produto exterior entre duas formas diferenciais é

$$d(\Omega \wedge \Delta) = d\Omega \wedge \Delta + (-1)^k \Omega \wedge d\Delta. \quad (2.39)$$

Por fim, trataremos da última operação que nos será útil nesta tese⁹, a operação dual *Hodge*. Então, dado uma k -forma Ω denota-se como o seu dual *Hodge* a $(n - k)$ -forma $^*\Omega$ e definimos por:

$$^*\Omega = \frac{1}{(n - k)!} (^*\Omega)_{\mu_1 \dots \mu_{n-k}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{n-k}}, \quad n \geq k, \quad (2.40)$$

onde

$$^*\Omega_{\mu_1 \dots \mu_{n-k}} = \frac{1}{k!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{n-k}}^{\nu_1 \dots \nu_k} \Omega_{\nu_1 \dots \nu_k}, \quad (2.41)$$

em que $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita definido a partir do símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$, isto é,

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} \sqrt{-g} & \text{se } (\mu_1 \dots \mu_n) \text{ é uma permutação par} \\ -\sqrt{-g} & \text{se } (\mu_1 \dots \mu_n) \text{ é uma permutação ímpar} \\ 0 & \text{em quaisquer outros casos.} \end{cases} \quad (2.42)$$

Uma aplicação simples e elegante das formas diferenciais pode ser feita no eletromagnetismo, mais precisamente reescrevendo as equações de Maxwell sem fontes em termos de formas. Neste caso, temos uma variedade de dimensão $n = 4$, o potencial vetor A_μ é promovido a um potencial 1-forma, $A = A_\mu dx^\mu$. Por outro lado, o tensor de Faraday, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, é promovido a um objeto 2-forma F chamado de curvatura, que nada mais é que a derivada exterior do potencial, ou seja, $F = dA$. Feito essas definições, a primeira equação de Maxwell é obtida diretamente ao tomar a derivada exterior de F , portanto

$$dF = 0, \quad (2.43)$$

⁹Existem outras operações relevantes envolvendo formas tais como *pull-back*, co-diferenciação, etc.

ou, explicitamente,

$$\begin{aligned}
dF &= \frac{1}{2} \partial_\alpha F_{\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \frac{1}{2} \partial_{[\alpha} F_{\mu\nu]} dx^\alpha \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \frac{1}{2} \nabla_{[\alpha} F_{\mu\nu]} dx^\alpha \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

usamos a identidade $\partial_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = \nabla_{[\alpha} F_{\mu\nu]}$, ainda podemos reescrever

$$\frac{1}{2} \partial_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.45}$$

assim,

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \implies dF = 0. \tag{2.46}$$

A outra equação de Maxwell é obtida da equação

$$\begin{aligned}
*d * F &= * \left(\frac{1}{4} \partial_{[\gamma} (* F_{\alpha\beta]}) dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \right) \\
&= * \left(\frac{1}{4} \nabla_{[\gamma} (* F_{\alpha\beta]}) dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \right),
\end{aligned} \tag{2.47}$$

aplicando a operação *Hodge* obtemos uma 1-forma

$$\begin{aligned}
*d * F &= \frac{1}{4} \varepsilon_\delta^{\gamma\alpha\beta} \nabla_\gamma * F_{\alpha\beta} dx^\delta \\
&= \frac{1}{4} \varepsilon_\delta^{\gamma\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \nabla_\gamma F_{\mu\nu} dx^\delta \\
&= \frac{1}{2} \left(\delta_\delta^\mu g^{\gamma\nu} - \delta_\delta^\nu g^{\gamma\mu} \right) \nabla_\gamma F_{\mu\nu} dx^\delta = \left(\nabla^\mu F_{\delta\mu} \right) dx^\delta \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

dessa forma as equações de Maxwell na ausência de fontes podem ser expressas por

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu F^{\mu\nu} &= 0 \implies dF = 0 \\
\nabla_\mu * F^{\mu\nu} &= 0 \implies *d * F = 0.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Nesta seção tratamos das formas diferenciais expandidas em termos de bases coordenadas, no entanto, frequentemente, em alguns problemas em Relatividade Geral ou em teorias gravitacionais mais gerais é conveniente descrevê-las em bases não coordenadas e, sobretudo, em uma base ortonormal. A seguir iremos abordar as formas diferenciais em bases não coordenadas por meio das equações de estrutura de Cartan.

2.5 Equações de Estrutura de Cartan

As equações de Cartan estabelecem uma relação entre a conexão de spin e a curvatura, ambas, dadas em uma base não coordenada, não necessariamente precisa ser em uma base ortonormal. Consideremos uma base não coordenada de 1-forma $\{e^a\}$, assim as equações de estrutura de Cartan são definidas por

$$\begin{aligned} T^a &= de^a + \omega^a_b \wedge e^b, \\ R^a_b &= d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde T^a é a torção 2-forma, ω^a_b é a conexão 1-forma e R^a_b é a curvatura 2-forma. Expandindo com respeito à base não coordenada podemos escrever:

$$\begin{aligned} \omega^a_b &= \omega^a_{bc} e^c, \\ T^a &= \frac{1}{2} T^a_{bc} e^b \wedge e^c, \\ R^a_b &= \frac{1}{2} R^a_{bcd} e^c \wedge e^d. \end{aligned} \quad (2.51)$$

É claro que podemos relacioná-los com uma base coordenada via as relações: $\omega^a_{bc} = e^\mu_c \omega^a_{b\mu}$, $R^a_{bcd} = e^\mu_c e^\nu_d R^a_{b\mu\nu}$ e $T^a_{bc} = e^\mu_b e^\nu_c T^a_{\mu\nu}$. Abrindo a Eq.(2.50) em termos das componentes, obtemos o tensor de torção

$$T^a_{\mu\nu} = 2(\partial_{[\mu} e^a_{\nu]} + \omega^a_{b[\mu} e^b_{\nu]}). \quad (2.52)$$

No caso especial da geometria Riemanniana em uma base ortonormal as Eqs.(2.50) reduzem-se a

$$\begin{aligned} de^a &= -\omega^a_b \wedge e^b, \\ R^a_b &= d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b, \end{aligned} \quad (2.53)$$

juntamente com a condição de compatibilidade métrica

$$D\eta_{ab} = d\eta_{ab} - \omega^c_a \eta_{cb} - \omega^c_b \eta_{ac} = 0, \quad (2.54)$$

onde D é a derivada exterior covariante.

Uma das principais motivações físicas do estudo das equações de estrutura de Cartan é sua forte conexão com uma possível descrição da Relatividade Geral como uma teoria invariante de gauge, em outras palavras, teorias de gauge em geral são renormalizáveis e, portanto, quantizáveis, tal descrição daria um passo enorme rumo à uma teoria quântica da gravitação[31].

2.6 Formalismo de Tetradas da Relatividade Geral

A Relatividade Geral é uma teoria geométrica da gravitação onde o campo gravitacional é descrito pela métrica Riemanniana $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo que é influenciada pelo conteúdo de matéria no Universo. As equações de campo da teoria adicionando uma constante cosmológica são obtidas pela ação de Einstein-Hilbert- Λ com fontes, ou seja,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (2.55)$$

onde $\kappa = 8\pi G$, Λ é a constante cosmológica, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci, $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ é o tensor de Ricci e S_m é a ação relacionada com as fontes de matéria. Variando a ação com respeito à métrica obtemos as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.56)$$

o lado direito da equação na figura do tensor energia-momento expressa o conteúdo de matéria-energia e o lado esquerdo é puramente geometria. No entanto, é possível reescrever a ação Eq.(2.55) substituindo a métrica pelos campos de tetrada e_μ^a , relacionandos entre si pela relação $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$, que implica $\sqrt{-g} = e$, onde e denota o determinante da tetrada. Portanto, para escrever a ação no formalismo de tetradas precisamos de algumas definições: primeiro vamos reescrever o escalar de Ricci da seguinte forma

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= g^{\mu\nu} R^\alpha_{\mu\beta\gamma} \delta^\beta_\alpha \delta^\gamma_\nu \\ &= \frac{1}{4} R^{\alpha\nu}_{\beta\gamma} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} \epsilon_{\alpha\nu\delta\sigma} \\ &= \frac{1}{4} e^\alpha_a e^\nu_b R^{ab}_{\beta\gamma} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} \epsilon_{\alpha\nu\delta\sigma} \\ &= e^\alpha_a e^\nu_b R^{ab}_{\alpha\nu}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

além disso o elemento de volume é definido como

$$\begin{aligned} d^4x \sqrt{-g} &= d^4x e = e^{(0)} \wedge e^{(1)} \wedge e^{(2)} \wedge e^{(3)} \\ &= -\frac{1}{4!} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d, \end{aligned} \quad (2.58)$$

ou, equivalentemente,

$$\epsilon^{abcd} d^4x \sqrt{-g} = e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \quad (2.59)$$

substituindo as Eqs.(2.57) em (2.55), ficamos com

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x e \left(e_a^\alpha e_b^\nu R_{\alpha\nu}^{ab} - 2\Lambda \right) + S_m(e_\mu^a, \psi) \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x e \left(\frac{1}{4} e_a^\alpha e_b^\nu R_{\beta\gamma}^{ab} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} \epsilon_{\alpha\nu\delta\sigma} - 2\Lambda \right) + S_m \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left(\frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\nu\delta\sigma} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} e_a^\alpha e_b^\nu R_{\beta\gamma}^{ab} - 2\Lambda e \right) + S_m \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left(\frac{1}{4} \epsilon_{abcd} e_\alpha^a e_\nu^b e_\delta^c e_\sigma^d \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} e_c^\alpha e_d^\nu R_{\beta\gamma}^{cd} - 2\Lambda e \right) + S_m \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left(\frac{1}{4} \epsilon_{abcd} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} e_\delta^a e_\sigma^b R_{\beta\gamma}^{cd} - 2\Lambda e \right) + S_m, \end{aligned} \quad (2.61)$$

por meio das Eqs.(2.58)-(2.59) podemos reescrever a ação de Einstein-Hilbert em termos de formas diferenciais

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{abcd} \left(e^a \wedge e^b \wedge R^{cd} + \frac{\Lambda}{3} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right) + S_m. \quad (2.62)$$

Para variar a Eq.(2.60) com respeito a e_μ^a precisamos da seguinte relação

$$\delta e = e e_\mu^a \delta e_\mu^a, \quad (2.63)$$

logo,

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[e \left(G_a^\mu + \Lambda \delta_a^\mu - \kappa T_a^\mu \right) \delta e_\mu^a + \nabla_\mu \left(e e_\mu^a e_b^\nu \delta \omega_\nu^{ab} \right) \right], \quad (2.64)$$

onde $G_a^\mu = R_a^\mu - \frac{1}{2} \delta_a^\mu R$ é o tensor de Einstein, o segundo termo do lado direito da equação é um termo de contorno que não contribui para as equações de movimento e o tensor energia-momento é definido por $T_a^\mu = \frac{\delta S_m}{\delta e_\mu^a}$. Portanto, as equações de Einstein nesse formalismo são

$$R_a^\mu - \frac{1}{2} \delta_a^\mu R + \Lambda \delta_a^\mu = \kappa T_a^\mu, \quad (2.65)$$

multiplicando por $e_{\mu b}$ encontra-se as equações de Einstein na base ortonormal.

$$R_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} R + \Lambda \eta_{ab} = \kappa T_{ab}. \quad (2.66)$$

É óbvio que a forma da equação anterior era esperado e vai ao encontro do que preceitua o princípio de covariância geral [32]: as equações que descrevem as leis da física são escritas na forma tensorial implicando que as mesmas independem da base ou do sistema de referência. Ficará claro, *a posteriori*, nos capítulos que tratam dos resultados originais desta tese, o porquê do uso de bases ortonormais para as equações de campo.

Capítulo 3

CTC's Na Relatividade Geral

Como discutido na introdução, a RG é uma teoria que descreve muito bem os fenômenos gravitacionais no limite de campo fraco, contudo a teoria apresenta alguns problemas. Tais problemas se configuram como fortes indícios que a teoria deva ser modificada, seja: incluindo novos termos de alta curvatura livres de fantasmas (é claro que, em teoria de cordas, as equações de movimento são de ordem arbitrariamente alta e mesmo assim a teoria se mantém sem fantasmas) ou propondo uma teoria quântica da gravitação. Neste capítulo iremos tratar em mais detalhes de um desses problemas que ocorre na relatividade geral, mais especificamente o problema de violação de causalidade.

3.1 Violação de Causalidade e o Universo de Gödel

Em 1949, K. Gödel obteve uma das primeiras soluções cosmológicas das equações de Einstein com rotação¹[33]. Tal solução foi o primeiro modelo matemático do universo no qual, a priori, viagem no tempo (mais precisamente viagem para o passado) era possível, visto que a solução apresentava CTC's, que são curvas tipo tempo fechadas o que não se confunde com geodésicas. Em outras palavras, um observador acelerado viajando ao longo dessas curvas pode voltar no tempo, ou seja, tal observador, nesse universo, pode visitar seu próprio passado. Tecnicamente falando, ocorre que para quaisquer dois pontos P e Q conectados por uma trajetória do observador através do espaço-tempo, sua linha

¹A primeira solução com rotação foi obtida por Van Stockum em 1937 [34].

de mundo, com a exigência que o evento P ocorra anteriormente (precede temporalmente) ao evento Q , é possível mostrar que existe uma curva tipo tempo conectando P e Q tal que o evento Q ocorre anteriormente ao evento P . Em outras palavras, a existência das CTC's veta a possibilidade de haver uma coordenada temporal t nesse universo de modo que quando ela aumente cada curva tipo tempo esteja direcionada para o futuro.

Intuitivamente percebemos que certos eventos devem ocorrer antes de outros eventos ou vice versa, por exemplo, o nascimento de um filho não pode ocorrer antes do nascimento do seu pai. A relação entre eventos (efeitos) que ocorrem por consequência de outros (causas) nos dá a ideia de causalidade. No universo de Gödel o conceito de causalidade é totalmente perdido (obviamente a causalidade é perdida sob o ponto de vista global já que localmente, onde a estrutura causal é a mesma da relatividade especial, ela é respeitada) devido às CTC's. Tal questão imediatamente nos remete à situações bizarras que podem ocorrer no universo de Gödel, os chamados paradoxos. Uma dessas situações pode ser ilustrada pelo clássico paradoxo do avô: alguém viaja para o passado e mata seu avô ainda criança, conseqüentemente impede o nascimento do seu pai e seu próprio nascimento (para uma discussão mais abrangente sobre paradoxos de causalidade veja [35]).

Alguns remédios foram propostos para resolver essa questão. O primeiro deles é o chamado Princípio de Auto-Consistência [36] que diz que as únicas soluções das leis da física que podem ocorrer localmente no universo real são aquelas que são globalmente auto-consistentes. Portanto, segundo esse princípio é proibido mudar o passado, todos os eventos ocorrem apenas uma única vez. Por outro lado, a segunda proposta a chamada Conjectura de Proteção Cronológica de Hawking [37] elimina quaisquer tipos de CTC's, ou seja, ela afirma que embora CTC's sejam classicamente produzidas as mesmas não seriam possíveis em uma teoria quântica da gravitação que fosse consistente, isto devido a efeitos quânticos que eliminariam quaisquer anomalias causais e, por conseguinte, viagem no tempo.

Feito essas considerações gerais, vamos agora tratar mais detalhadamente da solução encontrada por Gödel (que é apenas uma de várias soluções que apresenta anomalias causais, veja [35]) bem como analisar algumas propriedades específicas.

A solução das equações de Einstein encontrada por ele consiste de um fluido perfeito de pressão nula, poeira, como fonte de matéria cujo tensor energia-momento é dado por

$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$, onde ρ é a densidade de matéria que preenche todo o universo e u_μ é a quadrivelocidade normalizada, além disso era necessário que a constante cosmológica fosse não nula, $\Lambda \neq 0$. A variedade (espaço-tempo) desta solução tem uma topologia de $\mathcal{M}_4 = \mathbf{R}^4$ coberta pelo sistema de coordenadas globais (t, x, y, z) . Portanto, o elemento de linha² é dado por

$$ds^2 = -[dt + H(x)dy]^2 + D(x)^2 dy^2 + dx^2 + dz^2, \quad (3.1)$$

onde $H(x) = e^{mx}$ e $D(x) = \frac{e^{mx}}{\sqrt{2}}$. A métrica anterior resolve as equações de Einstein com constante cosmológica para

$$\begin{aligned} u^\mu &= \delta_0^\mu, \\ m^2 &= -2\Lambda = \kappa\rho = 2\omega^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\kappa = 8\pi G$ é a constante de Einstein e ω é o módulo da vorticidade definido a partir das componentes do vetor de rotação que é local

$$\omega^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\gamma}u_\nu\omega_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\gamma}u_\nu\nabla_\alpha u_\gamma = [0, 0, 0, -\omega], \quad (3.3)$$

onde $\omega_{\alpha\beta}$ é o tensor de rotação. Apesar de originalmente a solução ter sido obtida para poeira e constante cosmológica é possível através da seguinte transformação de variáveis, $\rho = p' - \rho'$ e $\Lambda = \Lambda' - \kappa p'$, reinterpretá-la como uma solução de fluido perfeito perfeito com pressão (p'), densidade (ρ') e constante cosmológica (Λ') onde $m^2 = 2\omega^2 = \kappa(p' + \rho')$ e $2\Lambda' = p' - \rho'$.

A métrica de Gödel pode ser decomposta em uma soma direta de uma métrica trivial dz^2 sobre $\mathbf{R}$ e de uma métrica não trivial ds_1^2 sobre $\Sigma = \mathbf{R}^3$, assim podemos reescrever a Eq.(3.1)

$$ds^2 = ds_1^2 + dz^2, \quad (3.4)$$

portanto, a topologia do universo de Gödel é $\Sigma \times \mathbf{R}$. Além disso, a métrica é homogênea no espaço e no tempo e admite um grupo de isometria G_5 , ou seja, apresenta cinco vetores

²Adotamos a métrica com a assinatura diferente da utilizada no artigo original de Gödel [33]

de Killing [38] que descrevem as simetrias da métrica, quais sejam:

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{\partial}{\partial t}; & \text{representando translação em relação ao eixo } t \\
\xi_1 &= \frac{\partial}{\partial y}; & \text{representando translação em relação ao eixo } y \\
\xi_2 &= \frac{\partial}{\partial z}, & \text{representando translação em relação ao eixo } z \\
\xi_3 &= \frac{\partial}{\partial x} - my \frac{\partial}{\partial y}, & \text{representando translação em relação ao eixo } x
\end{aligned} \tag{3.5}$$

mais uma contração em relação ao eixo y

$$\xi_4 = -\frac{2}{m}e^{-mx} \frac{\partial}{\partial t} - y \frac{\partial}{\partial x} + \left[\frac{1}{m}e^{-2mx} - \frac{m}{2}y^2 \right] \frac{\partial}{\partial y}.$$

Para obter as propriedades da métrica com mais clareza vamos definí-la em termos de coordenadas “cilíndricas” (t', r, θ, z') sobre $\mathcal{M}_4$ pelas seguintes relações

$$\begin{aligned}
e^{mx} &= \cosh 2r + \cos \theta \sinh 2r = e^{2r} \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^{-2r} \sin^2 \frac{\theta}{2}; \\
mye^{mx} &= \sqrt{2} \sin \theta \sinh 2r = \frac{\sqrt{2}}{m} (e^{2r} - e^{-2r}) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right); \\
\tan \frac{1}{2} [\theta + (t - t')] &= e^{-mr} \tan \frac{\theta}{2}; \\
z' &= z,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

e, portanto, a métrica (3.1) toma a forma

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{4}{m^2} \left[- \left(dt' + \sqrt{2}(\sinh^2 r) d\theta \right)^2 + (\sinh^2 r)(\cosh^2 r) d\theta^2 + dr^2 + dz'^2 \right] \\
&= ds_1'^2 + dz'^2,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $-\infty < t' < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty < z' < \infty$ e $ds_1'^2$ representa a métrica nas novas coordenadas sobre Σ . Com a métrica na forma (3.7) fica claro a simetria de rotação de $ds_1'^2$ em torno de quaisquer pontos do espaço. Também, nessas coordenadas, é mais simples de obter as CTC's, que são círculos definidos pelo conjunto $C = \{(t', r, \theta, z'); t' = t'_0, r = r_0, \theta \in [0, 2\pi], z' = z'_0\}$ e o elemento de linha é tipo tempo, ou seja, $ds^2 < 0$. Sendo assim, podemos obter uma expressão para o raio crítico (r_c), isto é, o raio limite do círculo que separa duas regiões: a primeira, $r > r_c$, onde existe a ocorrência de CTC's e a segunda, $r < r_c$, onde não há CTC. Substituindo o conjunto C na Eq.(3.7) e exigindo que $ds^2 < 0$, temos:

$$ds^2 = -(\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\theta^2 < 0, \tag{3.8}$$

então, devemos ter $(\sinh^4 r - \sinh^2 r) > 0$ para as curvas fechadas serem tipo tempo, simplificando obtemos que a condição exigida para a existência das CTC's é

$$\sinh^2 r > 1 \quad (3.9)$$

portanto, o raio crítico é definido pela expressão

$$\sinh^2 r_c = 1 \quad (3.10)$$

cuja solução é $r_c = \log(1 + \sqrt{2})$. A figura (3.1) representam bem a estrutura causal, as geodésicas e as CTC's no universo de Gödel. O modelo de Gödel é livre de singularidades, ou seja, ele é geodesicamente completo (para o cálculo explícito das equações geodésicas, veja [39]).

3.2 Universos Tipo Gödel

Depois da solução encontrada por Gödel várias tentativas foram feitas na busca de novas soluções cosmológicas das equações de Einstein com rotação. Entre essas tentativas destaca-se uma classe geral de soluções com a mesma forma de (3.1), chamadas de métricas tipo Gödel, tais métricas foram obtidas, inicialmente por Banerjee e Banerji [40], como solução das equações de campo de Einstein-Maxwell com constante cosmológica cuja fonte de matéria era composta de uma poeira carregada com rotação, ou seja, $p = 0$, $\Lambda \neq 0$ e um campo eletromagnético. Essas métricas são caracterizadas por dois parâmetros independentes m e ω que são determinados pelos componentes da matéria. A forma explícita das soluções encontradas são da forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= -[dt + H(x)dy]^2 + D(x)^2 dy^2 + dx^2 + dz^2 \\ &= -\left[dt + \frac{\sqrt{2}\omega}{m}dy\right]^2 + \frac{e^{2mx}}{2}dy^2 + dx^2 + dz^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde (m, ω) são parâmetros reais constantes tais que $-\infty \leq m^2 \leq 2\omega^2$ e ω é o módulo da vorticidade da matéria, desta forma não negativo. Note que o espaço-tempo de Gödel é um caso particular dessa classe geral correspondendo a $m^2 = 2\omega^2$.

De modo análogo ao realizado na subseção anterior, as propriedades mais interessantes sobre essa classe geral de soluções, tais como simetria de rotação e a existência

de CTC's, são mais facilmente percebidas ao escrever o elemento de linha em termos de

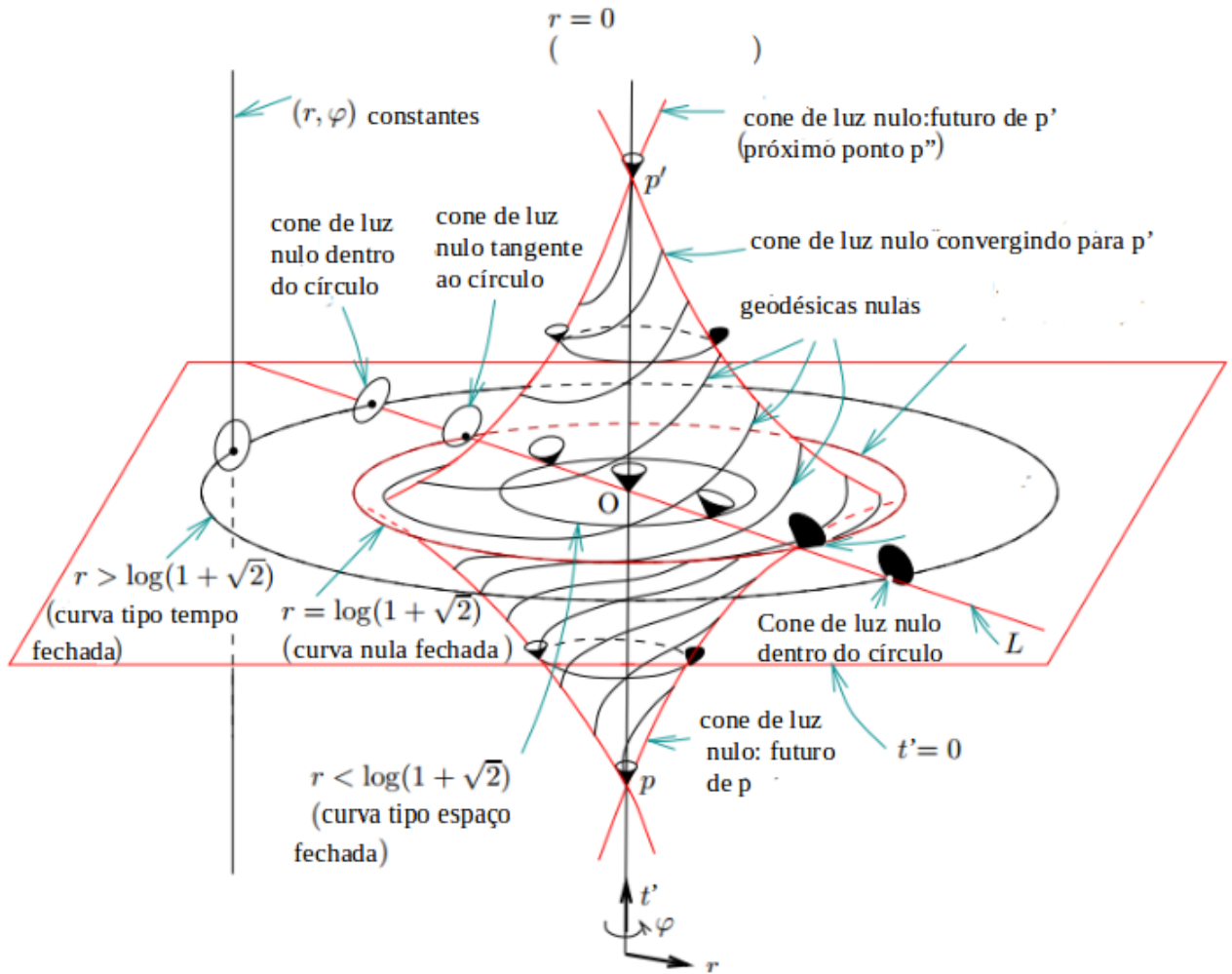


Figura 3.1: Mostra o universo de Gödel em termos das coordenadas (t', r, ϕ) , a coordenada z' é suprimida já que a mesma gera geodésicas triviais. As geodésicas nulas emitidas pelo ponto P seguem trajetórias espirais até alcançar a superfície $t = 0$ onde a coordenada radial atinge o raio crítico r_c , em seguida a medida que o tempo cresce as geodésicas nulas começam a se fechar convergindo para o ponto P' em trajetória espiral. O mesmo ocorre para as geodésicas tipo tempo com a diferença que o valor máximo do raio é menor que o raio crítico. A figura foi retirada de [38] com pequenos ajustes.

coordenadas “cilíndricas” (t', r, θ, z') que se relacionam com as coordenadas antigas por

$$\begin{aligned}
e^{mx} &= \cosh 2r + \cos \theta \sinh 2r = e^{2r} \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^{-2r} \sin^2 \frac{\theta}{2}; \\
mye^{mx} &= \sqrt{2} \sin \theta \sinh 2r = \frac{\sqrt{2}}{m} (e^{2r} - e^{-2r}) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right); \\
\tan \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{m^2}{2\omega^2} (t - t') \right] &= e^{-mr} \tan \frac{\theta}{2}; \\
z' &= z.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Assim, o elemento de linha nessas coordenadas toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -[dt' + H(r)d\theta]^2 + D(r)^2 d\theta^2 + dr^2 + dz'^2 \\
&= -\left(dt' + \frac{4\omega}{m^2} \sinh^2 \left(\frac{mr}{2} \right) d\theta \right)^2 + \frac{1}{m^2} \sinh^2(mr) d\theta^2 + dr^2 + dz'^2
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ou ainda

$$ds^2 = \frac{4}{m^2} \left[-\left(d\bar{t} + \frac{2\omega}{m} \sinh^2 \bar{r} d\theta \right)^2 + (\sinh^2 \bar{r}) (\cosh^2 \bar{r}) d\theta^2 + d\bar{r}^2 + d\bar{z}^2 \right]. \tag{3.14}$$

Foi mostrado por Raychaudhuri e Takurta [41] que as condições necessárias para homogeneidade das métricas tipo Gödel no espaço-tempo são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{H'(r)}{D(r)} &= 2\omega, \\
\frac{D''(r)}{D(r)} &= m^2,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde a linha significa derivada com respeito a r . Posteriormente foi mostrado por Rebouças e Tiomno[42] que tais condições, além de necessárias, eram suficientes. As condições (3.15) definem dois parâmetros similares ao dado pela Eq.(3.13) com a diferença no intervalo de validade de um deles: $-\infty \leq m^2 \leq \infty$. A partir de agora quando nos referirmos as métricas tipo Gödel (3.13) estaremos tratando das homogêneas no espaço-tempo dado pela condição (3.15). Podemos distinguir três classes diferentes de métricas tipo Gödel dadas em termos do sinal de m^2 :

i) *classe hiperbólica*: $m^2 > 0$, $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned}
H(r) &= \frac{2\omega}{m^2} [\cosh(mr) - 1], \\
D(r) &= \frac{1}{m} \sinh(mr),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ii) *classe trigonométrica*: $-\mu^2 = m^2 < 0$, $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{2\omega}{\mu^2} [1 - \cos(\mu r)], \\ D(r) &= \frac{1}{\mu} \sin(\mu r), \end{aligned} \tag{3.17}$$

iii) *classe linear*: $m^2 = 0$, $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned} H(r) &= \omega r^2, \\ D(r) &= r. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Além dessas citadas existe outra chamada de classe degenerada que corresponde ao caso onde $\omega = 0$, no entanto não iremos tratá-la nesta tese. A solução de Gödel faz parte da classe hiperbólica. As principais propriedades das métricas tipo Gödel podem ser resumidas em três teoremas [43], quais sejam:

Teorema 1: As condições necessárias e suficientes para uma variedade Riemanniana tipo Gödel ser localmente homogênea no espaço-tempo são aquelas dadas pela Eq.(3.15).

Teorema 2: As variedades Riemannianas tipo Gödel homogêneas no espaço-tempo são caracterizadas por dois parâmetros (m^2, ω) . Pares iguais de (m^2, ω) especificam métricas localmente equivalentes, ou seja, isométricas.

Teorema 3: As variedades Riemannianas tipo Gödel homogêneas no espaço-tempo admitem um grupo de isometrias tais que: G_5 (quando $\omega \neq 0$), G_6 (para $\omega = 0$) and G_7 (para a classe $m^2 = 4\omega^2$).

Para uma discussão em mais detalhes sobre as propriedades de causalidade é conveniente reescrever a Eq.(3.13) na seguinte forma

$$ds^2 = -dt^2 - 2H(r)dtd\theta + G(r)d\theta^2 + dr^2 + dz^2, \tag{3.19}$$

onde $G(r) = D^2(r) - H^2(r)$. A curva C definida na seção anterior é uma CTC se $G(r)$ torna-se negativo dentro do intervalo $r_1 < r < r_2$. Para a classe hiperbólica de métricas tipo Gödel ($m^2 > 0$), usando a Eq.(3.16), obtemos

$$G(r) = \frac{4}{m^2} \sinh^2 \left(\frac{mr}{2} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{4\omega^2}{m^2} \right) \sinh^2 \left(\frac{mr}{2} \right) \right], \quad (3.20)$$

facilmente é visto que a existência de CTC's apenas é possível dentro do intervalo $0 < m^2 < 4\omega^2$, consequentemente as métricas onde os parâmetros satisfazem $m^2 > 4\omega^2$ são completamente causais (livres de CTC's). O raio crítico para a classe hiperbólica é definido pelas raízes da Eq.(3.20), que nos fornece

$$\sinh^2 \left(\frac{mr_c}{2} \right) = \left(\frac{4\omega^2}{m^2} - 1 \right)^{-1}, \quad \text{para } m^2 < 4\omega^2, \quad (3.21)$$

portanto, $G(r) < 0$ para $r > r_c$ e $G(r) > 0$ para $r < r_c$. Note que o espaço-tempo de grupo de isometria máximo, $m^2 = 4\omega^2$, não apresenta CTC's pois $r_c \rightarrow \infty$.

Para a classe linear de métricas tipo Gödel ($m^2 = 0$), por meio da Eq.(3.18), obtemos

$$G(r) = r^2 - r^4 \omega^2, \quad (3.22)$$

de onde tiramos que o raio crítico é dado

$$r_c = 1/\omega, \quad (3.23)$$

tal que $G(r) < 0$ para $r > r_c$ e $G(r) > 0$ para $r < r_c$.

Para a classe trigonométrica de soluções tipo Gödel ($m^2 = -\mu^2 < 0$) a análise é um pouco mais complexa. Usando (3.17) temos que

$$G(r) = \frac{4}{\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu r}{2} \right) \left[1 - \left(1 + \frac{4\omega^2}{\mu^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\mu r}{2} \right) \right], \quad (3.24)$$

como $G(r)$ é descrita por funções harmônicas ela apresenta uma sequência infinita de raízes. Assim, existe uma sequência infinita de regiões não causais, $G(r) < 0$, e regiões causais, $G(r) > 0$, alternando entre si. Vejamos em mais detalhes, as raízes da Eq.(3.24) são obtidas pelas equações

$$\sin \left(\frac{\mu r_n}{2} \right) = 0 \quad (3.25)$$

and

$$\sin \left(\frac{\mu r_n}{2} \right) = \pm \frac{(-1)^n \mu}{\sqrt{\mu^2 + 4\omega^2}}, \quad (3.26)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ rotula as infinitas soluções de $G(r) = 0$. As soluções da Eq.(3.25) são dada por

$$r_1^{(n)} = \frac{2\pi n}{\mu}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.27)$$

e as soluções da Eq.(3.26) são dadas por

$$r_2^{(n)} = -\frac{2 \left[\arcsin \left(\frac{\mu}{\sqrt{4\omega^2 + \mu^2}} \right) + n\pi \right]}{\mu}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \quad (3.28)$$

$$r_3^{(n)} = \frac{2 \left[\arcsin \left(\frac{\mu}{\sqrt{4\omega^2 + \mu^2}} \right) + n\pi \right]}{\mu}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.29)$$

As equações anteriores mostram que as raízes dependem dos parâmetros μ e ω , no entanto o comportamento global da função $G(r)$ não depende.

No contexto da relatividade geral várias soluções tipo Gödel foram obtidas, no entanto todas essas soluções cujas fontes de matéria satisfazem a condição de energia forte se encontram na região de parâmetros delimitada por $-\infty < m^2 \leq 4\omega^2$. Vale a pena destacar a geometria $m^2 = 4\omega^2$ que corresponde a única solução completamente causal das equações de Einstein com um campo escalar como fonte, [42]. Esta solução de um lado é interessante pois é livre de CTC's, mas por outro lado a fonte é um campo escalar que como sabemos a detecção experimental é bem complicada.

Capítulo 4

Gravidade Modificada Por Um Termo de Chern-Simons Não Dinâmico

4.1 Origens do Termo de Chern-Simons/Pontryagin

O termo de Chern-Simons surgiu no contexto da matemática pura, mais precisamente no conceito de classes de características [44], também conhecido como invariantes topológicos (quantidades que são definidas globalmente, sua integral independe de métrica) tais invariantes são de fundamental importância pois conecta várias áreas da matemática pura como topologia algébrica, geometria diferencial e geometria algébrica [31]. Em duas dimensões, o invariante topológico bem conhecido é a característica ou invariante de Euler definido a partir do teorema de Gauss-Bonnet[45] que relaciona a curvatura gaussiana (K) de uma superfície orientada (S) fechada (compacta e sem contorno) com um número inteiro, ou seja,

$$\int_S K dS = 2\pi\chi(S), \quad (4.1)$$

onde $\chi(S)$ é a característica de Euler, um invariante topológico, portanto o lado esquerdo da equação anterior é dependente da métrica enquanto que o lado direito é independente da métrica (invariante topológico). Para superfícies fechadas o invariante de Euler é expresso

por $\chi(S) = 2 - 2g$, onde g é o gênero, grosseiramente falando pode ser interpretado como o número de buracos da superfície. Um exemplo prático é um copo de café e uma rosquinha (toro), ambos de gênero $g = 1$, que claramente são objetos geometricamente (localmente) distintos, no entanto topologicamente são equivalentes, podemos deformar continuamente (homeomorfismo) a rosquinha até se transformar no copo de café. Existem vários outros invariantes topológicos, dos quais serão importantes nesta tese: as classes de Chern-Pontryagin (segunda característica de Chern)[46] e Chern-Simons[47].

No contexto da física, as classes de características surgiram nas teorias de gauge no cálculo da anomalia¹ quiral [48]-[49], que surge devido as contribuições de diagramas de Feynman triangulares de férmions quirais como visto em (4.1) (existe outro método de demonstração da anomalia quiral chamado de método de Fujikawa onde é usado o formalismo de integral de trajetória [50]). Para teorias de gauge abelianas, a anomalia é dada por

$$\mathcal{A} = \partial_\mu J_5^\mu = -\frac{1}{8\pi} {}^*F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

onde $J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$ é a corrente quiral, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ e ${}^*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ é a bem conhecida densidade de Chern-Pontryagin para o caso abeliano. Para teorias não abelianas (Yang-Mills)

$$\mathcal{A} = \partial_\mu J_5^\mu = -\frac{1}{8\pi} {}^*F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a, \quad (4.3)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ é o tensor de Yang-Mills² cuja interpretação matemática é de uma curvatura sobre um fibrado vetorial com as fibras sendo cópias do grupo $SU(N)$ e A_μ é o campo de gauge (que geometricamente é interpretado como conexões sobre um fibrado vetorial de $SU(N)$).

Fisicamente falando, a anomalia é responsável pela quebra dinâmica da invariância de gauge, para ser mais preciso o que ocorre é a não invariância da ação efetiva à nível de um laço, isto é, a quebra da simetria gauge é causada por correções quânticas de primeira ordem como mostrado no diagrama acima. A quebra da invariância de gauge implica em sérios problemas do ponto de vista quântico tais como quebra da unitariedade (estados com norma negativa) e renormalizabilidade. Assim, para construir uma teoria quântica de

¹Uma teoria de gauge apresenta anomalia quando a corrente é conservada no nível clássico, enquanto que a mesma não é mais conservada no nível quântico devido às correções quânticas.

²O tensor de Yang-Mills toma um valor na álgebra de Lie de $SU(N)$, ou seja, $A_\mu = A_\mu^a T_a$, onde T_a são os geradores de $SU(N)$, assim como $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$, $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$, em que f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo determinadas pela álgebra de Lie, $[T^a, T^b] = f_{abc} T^c$.

campos invariante de gauge consistente na presença de anomalias é necessário introduzir contra-termos com o intuito de cancelar essas anomalias. Ainda nessa linha foi mostrado em [69] que o termo de Chern-Simons pode ser induzido radiativamente por correções de um laço.

O caso gravitacional também apresenta uma anomalia similar. Foi mostrado em [51] que diagramas triangulares com uma corrente quiral em um dos vértices e dois tensores energia-momento nos outros dois vértices produzem tal anomalia (para uma demonstração por outro método veja apêndice A). Portanto,

$$\mathcal{A} = \nabla_\mu J^{\mu 5} = -\frac{1}{384\pi^2} {}^*RR = -\frac{1}{384\pi^2} \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\sigma{}_{\tau\mu\nu} R^\tau{}_{\sigma\alpha\beta}, \quad (4.4)$$

onde ${}^*RR \equiv {}^*R^\mu{}_\nu{}^{\alpha\beta} R^\nu{}_{\mu\alpha\beta}$ é a densidade de Chern-Pontryagin.

Uma propriedade importante da densidade de Chern-Pontryagin é que sua integral sobre uma variedade fechada quadrimensional ($\mathcal{P}$) é um invariante topológico (número de Pontryagin ou *instanton*)

$$\int_{\mathcal{P}} d^4x \sqrt{-g} {}^*RR \in \mathbf{Z} \quad (4.5)$$

ou reescrevendo em termos de formas

$$\int_{\mathcal{P}} \text{Tr}(R \wedge R) \in \mathbf{Z}, \quad (4.6)$$

onde $\text{Tr}(R \wedge R) \equiv R^a{}_b \wedge R^b{}_a$. Deste modo, a adição dos contra-termos na ação das teorias de gauge com anomalias quirais são, na realidade, invariantes topológicos.

A forma de Chern-Pontryagin é uma forma fechada, ou seja, pode ser vista como a derivada de uma 3-forma localmente definida (é claro que globalmente nem toda forma fechada é exata como mostrado na Eq.(4.6), essa falha é “medida” pelo grupo de cohomologia de De Rham para variedades com topologias não triviais [52]), tal objeto é a bem

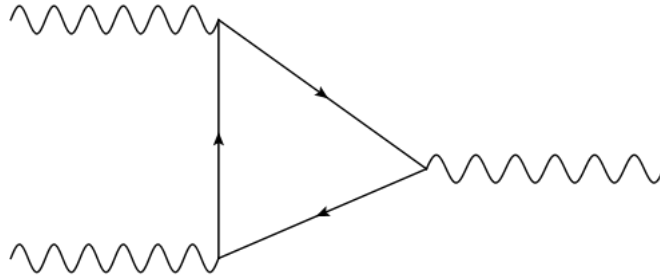


Figura 4.1: Diagrama de Feynman da anomalia triangular. As linhas internas representam férmions.

conhecida 3-forma de Chern-Simons, $\Omega_3(\omega)$,³ como vemos abaixo para o caso gravitacional

$$Tr(R \wedge R) = d\Omega_3(\omega), \quad (4.7)$$

onde

$$\Omega_3(\omega) = \omega_a^b \wedge d\omega_b^a + \frac{2}{3} \omega_a^b \wedge \omega_b^c \wedge \omega_c^a \equiv Tr \left(\omega \wedge d\omega + \frac{2}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega \right). \quad (4.8)$$

Podemos ainda reescrever a Eq.(4.7) em termos das componentes dos tensores na base coordenada como segue

$$*RR = 2\nabla_\mu K^\mu, \quad (4.9)$$

em que K^μ é a corrente topológica de Chern-Simons (idêntica a corrente quiral a menos de um fator multiplicativo) dada em termos da conexão afim

$$K^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\Gamma_{\nu\tau}^\sigma \partial_\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\tau + \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\tau}^\sigma \Gamma_{\alpha\eta}^\tau \Gamma_{\beta\sigma}^\eta \right). \quad (4.10)$$

Ambas as classes podem ser generalizadas para um espaço n -dimensional. A classe de Chern-Pontryagin ($P_n(R)$) é dada por um polinômio da curvatura R_b^a ,

$$P_{4k}(R) = R_{a_2}^{a_1} \wedge R_{a_3}^{a_2} \wedge \dots \wedge R_{a_1}^{a_{2k}} = Tr \underbrace{(R \wedge \dots \wedge R)}_{2k \text{ vezes}}, \quad (4.11)$$

onde $n = 4k$, pode-se mostrar que $P_n(R)$ é sempre nulo para dimensões ímpares do espaço. A classe de Chern-Pontryagin, além de ser um invariante topológico em 4 dimensões, como já dito, goza da importante propriedade de ser invariante por transformações de Lorentz locais conforme veremos a seguir. Usando a Eq.(2.24) temos a transformação de Lorentz local da tetrada $e_\mu^{a'} = \Lambda_a^{a'}(x) e_\mu^a$ e sob transformação infinitesimal de Lorentz local, ou seja, $\Lambda_a^{a'}(x) = \delta_a^{a'} + \lambda_a^{a'}(x)$ e sua inversa é $\Lambda_a^{a'}(x) = \delta_a^{a'} - \lambda_a^{a'}(x)$, portanto

$$\delta^L e_\mu^{a'} = -\lambda_a^{a'} e_\mu^a, \quad (4.12)$$

onde $\lambda_a^{a'}$ é uma transformação infinitesimal de Lorentz e o índice L especifica que é uma transformação de Lorentz.

Semelhantemente, usando as Eqs.(2.28-2.24) obtemos a forma como a conexão de spin e a curvatura se transformam pela ação do grupo $SO(n-1, 1)$ local, portanto

$$\begin{aligned} \omega_{b'\mu}^{a'} &= \Lambda_a^{a'} \Lambda_{b'}^b \omega_{b\mu}^a - \Lambda_{b'}^c \partial_\mu \Lambda_c^{a'}, \\ R_{b'\mu\nu}^{a'} &= \Lambda_a^{a'} \Lambda_{b'}^b R_{b\mu\nu}^a, \end{aligned} \quad (4.13)$$

³Ambas as classes podem ser definidas para uma conexão (A) e uma curvatura (F) sobre um fibrado vetorial com uma estrutura de um grupo de Lie $SU(N)$. Assim, $Tr(F \wedge F) = F_b^a \wedge F_a^b$ e $\Omega_3(A) = A_b^a \wedge dA_a^b + \frac{2}{3} A_b^a \wedge A_c^b \wedge A_a^c \equiv Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$

note que a conexão de spin se transforma de maneira não covariante enquanto que a curvatura se transforma de maneira covariante. Sob transformação infinitesimal de Lorentz a equação é escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}\delta^L \omega_{b\mu}^a &= \partial_\mu \lambda_b^a + \omega_{c\mu}^a \lambda_b^c - \omega_{b\mu}^c \lambda_c^a, \\ \delta^L R_{b\mu\nu}^a &= \lambda_b^c R_{c\mu\nu}^a - \lambda_c^a R_{b\mu\nu}^c,\end{aligned}\tag{4.14}$$

ou reescrevendo em termos de formas

$$\begin{aligned}\delta^L \omega_b^a &= d\lambda_b^a + \omega_c^a \lambda_b^c - \omega_b^c \lambda_c^a = D\lambda_b^a, \\ \delta^L R_b^a &= \lambda_b^c R_c^a - \lambda_c^a R_b^c.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Por meio da Eq.(4.15) podemos calcular a forma de Chern-Pontryagin em 4 dimensões sobre transformação de Lorentz local, assim temos

$$\begin{aligned}\delta^L \text{Tr}(R \wedge R) &= (\delta^L R_b^a) \wedge R_a^b + R_b^a \wedge (\delta^L R_a^b) \\ &= \lambda_c^a R_b^c \wedge R_a^b - \lambda_b^c R_c^a \wedge R_a^b + \lambda_c^b R_b^a \wedge R_a^c - \lambda_a^c R_b^a \wedge R_c^b\end{aligned}\tag{4.16}$$

$$\delta^L \text{Tr}(R \wedge R) = 0,$$

esse resultado continua a ser válido para um espaço n -dimensional implicando que $\delta^L P_n(R) = 0$. Portanto, a qualquer teoria gravitacional a densidade Chern-Pontryagin pode ser adicionada a ação já que a mesma é invariante por transformações locais de Lorentz.

De maneira análoga ao caso em 4 dimensões é possível escrever os $P_{4k}(R)$ como $4k - 1$ -formas de Chern-Simons, $\Omega_{4k-1}(\omega)$, localmente definidas, portanto

$$P_{4k}(R) = d\Omega_{4k-1}(\omega).\tag{4.17}$$

Realizando uma transformação infinitesimal de Lorentz local da equação anterior, ficamos com

$$\begin{aligned}\delta^L P_{4k}(R) &= \delta^L (d\Omega_{4k-1}(\omega)) \\ &= d(\delta^L \Omega_{4k-1}(\omega)),\end{aligned}\tag{4.18}$$

o lado esquerdo da equação anterior é identicamente nulo, pelo fato que o termo de Chern-Pontryagin é invariante por transformações de $SO(n-1, 1)$ local, logo (4.18) torna-se

$$d(\delta^L \Omega_{4k-1}(\omega)) = 0,\tag{4.19}$$

implicando que variações de gauge (transformações pelo grupo local $SO(n-1, 1)$) da forma Chern-Simons podem ser reescritas localmente como formas exatas,

$$\delta^L \Omega_{4k-1} = dX,\tag{4.20}$$

onde X é uma $(4k - 2)$ -forma.

O resultado anterior é bem interessante para teorias definidas sobre variedades de dimensão ímpar com contorno. De fato, se considerarmos uma ação definida por uma $(2n - 1)$ -forma de Chern-Simons sobre uma variedade de dimensão $(2n - 1)$ com contorno, a sua variação fornece um termo de contorno como mostrado abaixo

$$\delta^L S[\omega] = \int_{\mathcal{M}_{2n-1}} \delta^L \Omega_{2n-1}(\omega) = \int_{\mathcal{M}_{2n-1}} dX, \quad (4.21)$$

o que deixa claro que uma escolha apropriada das condições de contorno torna a ação anterior invariante de gauge.

Note que a invariância de gauge da ação definida por um termo de Chern-Pontryagin em um espaço de dimensão par ou por um termo de Chern-Simons em uma variedade de dimensão ímpar com contorno independe de propriedades locais (métrica) da variedade. Uma consequência fundamental disso é que teorias gravitacionais descritas por esses termos tratam a métrica (tetrada) não mais como um objeto fundamental e sim a conexão ou o campo de gauge (A). Por exemplo, foi mostrado por Achucarro e Townsend [53], e Witten [54] que a ação da Relatividade Geral em três dimensões pode ser reescrita na forma da ação de Chern-Simons de um ou dois campos de gauge a depender da constante cosmológica, ou seja, a ação da RG em três dimensões é dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{4\kappa} \int_{\mathcal{M}_3} \varepsilon_{abc} \left(e^a \wedge R^{bc} + \frac{\Lambda}{3} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right), \quad (4.22)$$

ela pode ser reescrita como uma ação de Chern-Simons

$$S_{CS} = \frac{1}{16\kappa\sqrt{\Lambda}} \left[\int_{\mathcal{M}_3} Tr \left(A^+ \wedge dA^+ + \frac{2}{3} A^+ \wedge A^+ \wedge A^+ \right) - \int_{\mathcal{M}_3} Tr \left(A^- \wedge dA^- + \frac{2}{3} A^- \wedge A^- \wedge A^- \right) \right], \quad (4.23)$$

onde $A^\pm$ representam as conexões que tomam um valor na álgebra de Lie do grupo G o qual depende do sinal da constante cosmológica. Especificamente, no caso onde $\Lambda = 0$, a ação de da RG se reduz à apenas uma única ação de Chern-Simons cuja conexão é escrita como uma combinação da tetrada e da conexão de spin dual⁴, que são tomados como independentes⁵

$$A = e^a P_a + \tilde{\omega}^a J_a, \quad (4.24)$$

⁴A conexão de spin dual é definida por $\tilde{\omega}^a = \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \omega_{bc}$

⁵O formalismo onde a conexão e a tetrada são tratados, a priori, como objetos independentes é chamado de formalismo de primeira ordem.

onde P_a e J_a são os geradores do grupo Lie G e satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[P_a, P_b] = -\Lambda \varepsilon_{abc} J^c, \quad [J_a, J_b] = \varepsilon_{abc} J^c, \quad [J_a, P_b] = \varepsilon_{abc} P^c. \quad (4.25)$$

O grupo é definido em termos do valor da constante cosmológica Λ :

- $G = ISO(2, 1)$, grupo de Poincaré, para $\Lambda = 0$;
- $G = SO(2, 2)$, grupo Anti-de Sitter, para $\Lambda < 0$;
- $G = SO(3, 1)$, grupo de Sitter, para $\Lambda > 0$.

Outros importantes contextos no qual o termo de Chern-Simons se insere são nas modificações do eletromagnetismo em 4 dimensões, em extensões do modelo padrão de física de partículas de modo a produzir violação de Lorentz no setor de matéria [65, 66] e em modelos de grande unificação, tais como: Supergravidade (SUGRA) e Teoria de cordas. Agora, trataremos sobre a questão da violação de Lorentz, mas antes disso vamos definir os dois tipos de transformações de Lorentz, são elas: as transformações de Lorentz de observadores que são aquelas onde realizamos *boosts* e rotações sobre os observadores e, nesse caso, as equações que descrevem as leis da física na sua forma covariante devem sempre ser invariantes por esse tipo de transformação, todavia existem as transformações de Lorentz de partículas que são aquelas realizadas sobre as partículas ou sobre os campos dinâmicos da teoria. Neste último caso a introdução de campos externos no sistema produzem uma direção preferencial no espaço tempo fazendo com que os observáveis físicos sofram distorções daquelas previstas quando sofrem transformações de Lorentz sobre o ponto de vista da partícula [66].

Em matéria condensada, tem sido adicionado o termo de Chern-Simons no contexto de efeito Hall quântico e supercondutividade à altas temperaturas, T_c . Na seção seguinte discutiremos sobre a violação de Lorentz no setor gravitacional.

4.2 A Ação Da Teoria Modificada Não Dinâmica

A teoria da Gravidade Modificada por um termo de Chern-Simons não dinâmico (GCSN) foi proposta originalmente por Jackiw e Pi [55], como uma versão em quatro dimensões da famosa teoria da gravitação topologicamente massiva [56]. A GCSN consiste de adicionar à ação de Einstein-Hilbert um termo topológico de Chern-Pontryagin acoplado

à um campo (pseudo)-escalar, chamado de coeficiente de Chern-Simons $\phi(x) = k^\mu x_\mu$. Trabalhos pioneiros nesta direção foram realizados no contexto das teorias de gauge (não)abelianas onde a quantidade topológica é o termo de Chern-Simons tridimensional, posteriormente foi realizada a extensão de Chern-Simons para a gravitação em três dimensões. Como exemplos mais importantes dessas classes de modelos, citamos a teoria da eletrodinâmica quântica em três dimensões estendida por um termo de Chern-Simons viabilizando um novo mecanismo de geração de massa chamado geração de massa topológica, ou seja, a inclusão do termo topológico faz surgir termos de massa para os campos de gauge. Já para o caso gravitacional tridimensional a influência do termo topológico também é notável, a consequência é o surgimento de graus de liberdade dinâmicos massivos (gráviton) o que não se observa na RG em três dimensões, que é uma teoria estática [57].

Em teorias em quatro dimensões, a modificação de Chern-Simons⁶ está relacionada com a quebra das simetrias de Lorentz e difeomorfismo (no caso de teorias gravitacionais) como também CPT. Tal proposta foi investigada, primeiramente, no contexto da eletrodinâmica de Maxwell e os seus resultados físicos foram bem interessantes. As equações de Maxwell modificadas preservam a invariância de gauge e, por consequência, o fóton continua a ter duas polarizações, no entanto no caso do vácuo essas polarizações se propagam com velocidades diferentes entre si, configurando a quebra da simetria de paridade, como também diferentes da velocidade da luz c , que causa a quebra da simetria de Lorentz. A consequência prática disso é uma birefringência da luz, isto é, as ondas eletromagnéticas nesta teoria possui duas relações de dispersão que estão associadas com o coeficiente de Chern-Simons, produzindo um efeito tipo rotação de Faraday. Alguns dados experimentais cosmológicos foram obtidos provenientes de galáxias distantes e os resultados foram de encontro aos resultados teóricos.

Agora, iremos tratar com mais detalhes o caso gravitacional. A ação de GCSN é definida por

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(R - 2\Lambda) + \frac{1}{4} \phi^* R R \right] + S_m(\psi, g_{\mu\nu}), \quad (4.26)$$

onde S_m é ação dos campos de matéria. O coeficiente de Chern-Simons ϕ é responsável pela deformação do termo de Chern-Pontryagin, em outras palavras, ele é responsável

⁶O termo de Chern-Simons é definido originalmente em três dimensões, no entanto muitos autores generalizam sua definição em quatro dimensões, onde se relaciona com forma de Chern-Pontryagin via uma classe de característica.

pelo controle da influência das características topológicas (contidas no termo de Chern-Pontryagin) sobre as equações de campo. De fato, se ϕ é uma função das coordenadas do espaço-tempo implicando que o segundo termo da ação não é mais um invariante topológico, assim o mesmo contribuirá de maneira não trivial para as equações de campo da teoria modificada. Por outro lado, se ϕ é tomado como uma constante fica claro que o segundo termo da ação se reduz à integral de um termo de Chern-Pontryagin, portanto, é um invariante topológico como já discutido, por consequência, as equações de campo recaem nas equações de Einstein com constante cosmológica que, obviamente, é um caso sem nenhuma novidade física. A não presença de termos envolvendo auto-acoplamento do campo escalar implica na existência de uma simetria global de translação do campo de Chern-Simons: $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \text{const.}$, essa simetria funciona como uma “proteção topológica” contra eventuais correções quânticas (do tipo constante). Então, o caso fisicamente relevante é aquele onde o campo é uma função do espaço-tempo, $\phi = \phi(x)$.

Na ação da teoria não há um termo cinético associado ao campo de Chern-Simons, isso ocorre porque o campo de Chern-Simons é tratado como um campo externo estático (não há uma equação de evolução para o campo), portanto ele deve ser conhecido *a priori*, no entanto, mesmo assim, o campo ϕ interage com a gravidade de maneira não trivial, veremos mais adiante que tal acoplamento implicará em uma restrição topológica sobre as possíveis soluções do espaço-tempo da teoria.

Note que a ação (4.26) pode ser reescrita em termos da corrente topológica de Chern-Simons definida em (4.9). Explicitamente, temos

$$\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \phi^* R R = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} v_\mu K^\mu, \quad (4.27)$$

onde integramos por partes a integral do lado esquerdo e definimos uma nova quantidade $v_\mu = \nabla_\mu \phi$. Reescrevendo a ação (4.26) utilizando a última equação ficamos com

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} v_\mu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\Gamma_{\nu\tau}^\sigma \partial_\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\tau + \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\tau}^\sigma \Gamma_{\alpha\eta}^\tau \Gamma_{\beta\sigma}^\eta \right) \right] + S_m(\psi, g_{\mu\nu}), \quad (4.28)$$

que talvez nessa forma torne o nome da teoria mais sugestivo, porque o segundo termo da ação é um termo de Chern-Simons quadrimensional acoplado com o vetor v_μ . O termo adicionado na ação de Einstein-Hilbert resultando na ação de GCSN, seja ele escrito em termos das densidades de Chern-Pontryagin ou Chern-Simons, é comumente se referido na literatura como correção de Chern-Simons.

A GCSN escrita na forma (4.28) deixa mais evidente a conexão entre o termo de correção de Chern-Simons e a violação de Lorentz, percebe-se que se o vetor v_μ for um vetor constante isso permite-nos introduzir um acoplamento não mínimo com a geometria de modo a produzir um termo de violação de Lorentz no setor gravitacional, tal acoplamento não é considerado em teorias do tipo vetor-tensor onde apenas é levado em consideração acoplamento mínimo [67, 68]. Vale ressaltar que no espaço curvo a exigência de um vetor ser constante não implica em sua derivada covariante ser nula, $\nabla_\mu v_\nu = 0$, contrariamente ao eletromagnetismo onde a modificação de Chern-Simons é feita no espaço de Minkowsky onde a condição necessária e suficiente para o vetor ser constante é $\partial_\mu v_\nu = 0$. Deste modo, a condição necessária e suficiente para um vetor ser constante no espaço curvo é sua norma ser constante, ou seja, $v^\mu v_\mu = \text{const.}$ como consequência v_μ não necessita ser um campo sem dinâmica para haver quebra de Lorentz.

Para uma maior clareza sobre as soluções da teoria se faz necessário analisarmos as equações de movimento, logo variando a ação (4.26) com respeito a métrica obtemos as equações de campo

$$G_{\mu\nu} + C_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.29)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $C_{\mu\nu}$ é o tensor de Cotton⁷ que surge devido a variação do termo de Chern-Simons, explicitamente é dado por (a demonstração é feita no apêndice A)

$$C^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[v_\sigma (\varepsilon^{\mu\sigma\alpha\beta} \nabla_\alpha R_\beta^\nu + \varepsilon^{\nu\sigma\alpha\beta} \nabla_\alpha R_\beta^\mu) + v_{\sigma\tau} ({}^*R^{\sigma\nu\mu\tau} + {}^*R^{\sigma\mu\nu\tau}) \right], \quad (4.30)$$

onde $v_{\sigma\tau} = \nabla_\sigma \nabla_\tau \phi = \nabla_\sigma v_\tau$. Note que o tensor de Cotton, além de ser simétrico, possui traço nulo, como vemos abaixo

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} C^{\mu\nu} &= C^\mu{}_\mu \\ &= -v_\sigma \varepsilon^{\sigma\mu\alpha\beta} \nabla_\alpha R_{\mu\beta} - \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \varepsilon^{\sigma\mu\alpha\beta} R^\tau{}_{\mu\alpha\beta} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

usamos os seguintes truques: a contração do tensor de Ricci, que é simétrico, com o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita anula o primeiro termo da segunda linha na equação anterior, enquanto que o segundo termo da segunda linha também é nulo devido a identidade de Bianchi, $R^\mu{}_{[\alpha\beta\gamma]} = 0$, válida para conexões simétricas.

⁷Esse tensor é diferente do tensor de Cotton-York definido originalmente em três dimensões, embora também exista em dimensões mais elevadas.

O tensor $T_{\mu\nu}$ da Eq.(4.29) é o tensor energia-momento definido pela variação da Lagrangiana de matéria em relação a métrica,

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (4.32)$$

Tomando o traço da Eq.(4.29), em outras palavras, multiplicando (4.29) por $g^{\mu\nu}$, temos

$$-R = \kappa T - 4\Lambda, \quad (4.33)$$

onde definimos $T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ como sendo o traço do tensor energia-momento e, ainda, usamos o fato que o tensor $C_{\mu\nu}$ tem traço nulo. Portanto, substituindo em (4.29) obtemos uma forma mais conveniente para as equações de campo,

$$R_{\mu\nu} + C_{\mu\nu} = \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (4.34)$$

Uma consequência interessante surge ao tomarmos a divergência da Eq.(4.29). Fazendo isso, obtemos

$$\nabla_\mu (G^{\mu\nu} + C^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}) = \kappa \nabla_\mu T^{\mu\nu}, \quad (4.35)$$

pelas identidades de Bianchi a divergência do tensor de Einstein é identicamente nulo, $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, já a invariância por difeomorfismo assegura que a divergência do tensor energia-momento também é nula, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Deste modo, a equação anterior nos fornece que a divergência do tensor de Cotton é nula

$$\nabla_\mu C^{\mu\nu} = 0. \quad (4.36)$$

Por outro lado, a divergência do tensor de Cotton calculada diretamente de sua definição (4.30) nos fornece

$$\nabla_\mu C^{\mu\nu} = -\frac{1}{8} v^\nu {}^*RR. \quad (4.37)$$

As Eqs.(4.36-4.37) são incompatíveis, a menos que v^ν seja nulo, que acarreta em $\phi = \text{const.}$, ou que a densidade de Chern-Pontryagin desapareça, ${}^*RR = 0$. A primeira dessas opções é rechaçada já que o campo escalar sendo constante anula todas as componentes de $C_{\mu\nu}$ fazendo com que as equações de campo modificadas reduzam-se às da Relatividade Geral, então a segunda opção é que torna as equações de campo compatíveis sem automaticamente anular o tensor de Cotton. Na literatura a exigência de

$${}^*RR = 0 \quad (4.38)$$

é frequentemente chamada de restrição de Pontryagin. Quaisquer soluções das equações modificadas devem satisfazer a restrição de Pontryagin, assim tal restrição é uma condição necessária mas não suficiente para uma determinada métrica ser solução das equações modificadas.

Tanto as equações de movimento quanto a restrição de Pontryagin podem ser obtidas sob outro ponto de vista, vejamos bem isso: se tomarmos o campo de Chern-Simons como uma variável localmente dinâmica, ou seja, como um multiplicador de Lagrange (como sabemos esses multiplicadores geram equações de vínculo) para o termo $*RR$, então, teremos duas variáveis. Consequentemente, as equações de movimento são geradas a partir da variação da ação em relação à métrica e ao campo escalar, resultando nas seguintes equações de campo

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + C_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} \\ *RR &= 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Em suma, as duas perspectivas são equivalentes com o detalhe que na primeira o campo escalar é especificado *a priori*, diferentemente do que ocorre na segunda onde o campo escalar é tomado como uma variável que deve ser determinada pelas equações de campo.

A maioria dos trabalhos na literatura relacionados com o assunto usaram a primeira perspectiva, por razões óbvias, as equações de movimento são muito mais simples de se resolver, muito embora haja um risco grande de perda de generalidade em razão de uma possível “má” escolha para o campo. Dessa forma é mais razoável determinar o campo a partir das equações de movimento.

Para ilustrar bem o que foi discutido citamos, por exemplo, a referência onde foi mostrado que a métrica de Schwarzschild continua a ser solução das equações modificadas. Os autores do artigo propuseram a seguinte escolha para o campo de Chern-Simons

$$\phi = \frac{t}{\mu} \implies v_\mu = \left[\frac{1}{\mu}, 0, 0, 0 \right], \tag{4.40}$$

onde μ é uma escala de energia, tal que $[\mu] = M$. Essa escolha reduziu drasticamente as propriedades das equações modificadas. Uma delas é o tensor de Cotton quadrimensional que se reduz à sua forma usual tridimensional, outra consequência dessa escolha, particularmente para a métrica de Schwarzschild⁸, é que todas as componentes do tensor de

⁸A métrica de Schwarzschild, como também quaisquer métricas esfericamente simétricas satisfazem a restrição de Pontryagin

Cotton anulam-se reduzindo as equações modificadas para as equações de Einstein. De fato, foi importante verificar a solução de Schwarzschild (mesmo para essa escolha padrão do campo de Chern-Simons), pois mostra que a teoria modificada comporta uma solução que passa nos três testes clássicos da Relatividade Geral e que descreve com bastante precisão o nosso sistema solar.

Outras soluções exatas foram obtidas para as equações modificadas, das quais destacam-se: as métricas de Friedman-Robertson-Walker e Reissner-Nordstrom com detalhe que ambas são soluções com a mesma escolha (4.40) do campo escalar e, assim como a solução de Schwarzschild, leva à anulação das componentes do tensor de Cotton, também foram obtidas soluções para métricas de Gödel com outra escolha para o campo de Chern-Simons que também anula o tensor de Cotton.

Note que as soluções discutidas até então satisfazem a restrição de Pontryagin como também a anulação do tensor de Cotton simultaneamente, nesses casos as equações modificadas reduzem-se a

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} \\ C_{\mu\nu} &= 0 \\ {}^*RR &= 0, \end{aligned} \tag{4.41}$$

que leva-nos as mesmas soluções das equações de Einstein devido ao desacoplamento do tensor de Cotton nas equações modificadas.

Foi analisado muito pouco na literatura soluções onde o tensor de Cotton é não nulo, essas soluções seriam muito preciosas pois trariam informações de nova física derivadas do termo de deformação topológico/violação de paridade, em outras palavras, teríamos correções nas equações de Einstein advindas do termo de Chern-Simons. Na próxima seção discutiremos, em mais detalhes, a influência da violação de paridade no setor gravitacional.

4.3 Violação de Paridade na Gravidade Modificada de Chern-Simons

Por influência da correção de Chern-Simons, no contexto do eletromagnetismo apresentar violação de paridade, surge naturalmente a pergunta qual a paridade da correção de Chern-Simons e/ou quais são seus efeitos na GCSN?

Antes de responder as perguntas anteriores é necessário definir paridade, que nada mais é que a inversão dos eixos espaciais no sistema de coordenadas, assim a paridade constitui um tipo de transformação discreta de Lorentz assim a inversão temporal. A transformação de paridade é matematicamente representada como sendo

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) \longrightarrow x'^\mu = (x^0, -\vec{x}) \quad (4.42)$$

ou,

$$x'^\mu = \delta_0^\mu x^0 - \delta_I^\mu x^I, \quad (4.43)$$

onde o índice $I = 1, 2, 3$. A equação anterior pode ser reescrita em forma matricial como segue $\mathbf{x}' = \hat{P}\mathbf{x}$, em que $\hat{P}$ é o operador de paridade dada, em termos matriciais, por

$$[\hat{P}]^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Definimos a ação do operador paridade sobre um observável B por $\hat{P}[B] = \lambda_p B$, onde o autovalor λ_p toma os seguintes valores: $\lambda_p = 1$, neste caso dizemos que a paridade é preservada ou é par, e $\lambda_p = -1$ onde é dito haver violação de paridade ou, simplesmente, de paridade ímpar.

Agora vamos analisar a paridade do termo de correção de Chern-Simons, para isso devemos perceber que o campo de Chern-Simons e o tensor de Levi-Civita são as quantidades que possuem uma paridade bem definida no termo de correção. Com efeito, tomemos explicitamente a densidade de Chern-Pontryagin,

$$*RR = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} R^\tau_{\sigma\mu\nu} R^\sigma_{\tau\alpha\beta}, \quad (4.45)$$

perceba que o produto de tensores de curvatura Riemanniano não se transforma por paridade, ou seja, tem paridade par bem definida restando analisar o tensor de Levi-Civita, tal que sob transformação geral de coordenadas,

$$\varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\sigma} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho} \varepsilon^{\mu\nu\tau\delta}, \quad (4.46)$$

usando (4.44) obtemos que o tensor de Levi-Civita tem paridade ímpar, $\varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}$. A ação da teoria é uma quantidade escalar, portanto todos os termos devem ser invariantes por transformação de paridade (a ação de Einstein-Hilbert é invariante por paridade) isso

exige que o campo de Chern-Simons tenha paridade ímpar, ou seja, ele deve se transformar como um pseudo-escalar, $\hat{P}\phi = -\phi$, mantendo o produto ϕ^*RR invariante.

No que diz respeito as equações modificadas o tensor de Cotton é invariante por paridade se o vetor v_μ preservar a paridade, $\hat{P}v_\mu = v_\mu$, que está de acordo com $\hat{P}\phi = -\phi$. É importante salientar, mesmo que a ação da teoria e as equações de campo sejam invariantes por paridade isso não implica dizer que existirá apenas soluções que respeitem essa simetria, um exemplo bem conhecido é a Relatividade Geral que é uma teoria invariante por paridade cujas equações de movimento também são invariantes, no entanto ela apresenta soluções que violam tal simetria como é o caso da solução de Kerr. Traçando um paralelo com a GCSN percebemos que a restrição de Chern-Pontryagin é satisfeita para métricas com paridade par e, assim, são potenciais soluções da GCSN. Em contrapartida, as soluções de paridade ímpar não satisfazem a restrição Pontryagin e automaticamente não são soluções de GCSN, citamos como exemplo a métrica de Kerr onde a densidade de Chern-Pontryagin é dada por

$${}^*RR = 96 \frac{aM^2r}{\Sigma^6} \cos\theta (r^2 - 3a^2 \cos^2\theta)(3r^2 - a^2 \cos^2\theta), \quad (4.47)$$

onde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$. O termo do lado direito da equação anterior é proporcional ao termo de paridade ímpar da métrica de Kerr inviabilizando-a como uma solução de GCSN, outros elementos de linha com paridade ímpar podem ser encontrados em [64].

4.4 Universos Tipo Gödel Na GCSN

Nesta seção trataremos das métricas tipo Gödel no contexto da GCSN. Os resultados que serão discutidos nesta seção constituem uma parte da pesquisa original realizada durante o doutorado.

Os universos tipo Gödel, como já fora discutido no capítulo 3, são uma classe de métricas determinadas por dois parâmetros m e ω . Em especial, na Relatividade Geral foi mostrado em [42] que as soluções com fontes de matéria que satisfazem a condição de energia forte, ou seja, com matéria bariônica, estão dentro do intervalo de parâmetros $-\infty < m^2 \leq 4\omega^2$, implicando na existência de uma única solução totalmente causal que corresponde a $m^2 = 4\omega^2$ cuja fonte de matéria é um campo escalar com dependência linear em z , vide [42] para mais detalhes. Claro que outras soluções causais, $m^2 \geq 4\omega^2$, foram

encontradas, no entanto as fontes de matéria que as geram não satisfazem a condição de energia forte e isso é um problema sério, pois as fontes de matéria ordinária que conhecemos satisfazem tal condição. Em resumo, na Relatividade Geral a única fonte de matéria ordinária que gera uma métrica tipo Gödel totalmente causal é um campo escalar material da forma $\psi(z) \propto z$, qualquer outra solução é obtida por fontes de matéria exótica.

Naturalmente surge a necessidade de verificar a consistência das métricas tipo Gödel na GCSN, bem como suas propriedades de causalidade. Para isso, o primeiro passo é verificar se tais métricas satisfazem a restrição de Pontryagin. O primeiro ingrediente para o cálculo é reescrever as métricas tipo Gödel em termos de uma base ortonormal, especificamente em uma base local de Lorentz⁹ tal que as 1-forma da base são dadas por

$$\begin{aligned} e^{(0)} &= dt + H(r)d\theta, \\ e^{(1)} &= dr, \\ e^{(2)} &= D(r)d\theta, \\ e^{(3)} &= dz, \end{aligned} \tag{4.48}$$

onde o intervalo $ds^2 = \eta_{ab}e^ae^b$ genericamente equivalente a (2.22). Reescrevendo a restrição de Pontryagin em termos de formas diferenciais temos

$$Tr(R \wedge R) = 0, \tag{4.49}$$

por outro lado, usando a Eq.(4.7) obtemos que a restrição de Pontryagin é equivalente à derivada exterior da 3-forma de Chern-Simons. Portanto,

$$Tr(R \wedge R) = d\Omega_3(\omega) = 0 \tag{4.50}$$

abrindo a equação anterior usando (4.8) e explicitando os produtos exteriores ficamos com

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4} R^a_{bcd} R^b_{aef} \right) e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f &= \left[\partial_c \left(\omega^a_{bd} \partial_e \omega^b_{af} + \frac{2}{3} \omega^a_{bd} \omega^b_{ge} \omega^g_{af} \right) \right] e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f = 0 \\ R^a_{bcd} * R^b_{a}{}^{cd} &= \partial_c \left[\varepsilon^{cdef} \omega^a_{bd} \left(\partial_e \omega^b_{af} + \frac{2}{3} \omega^b_{ge} \omega^g_{af} \right) \right] = 0 \end{aligned} \tag{4.51}$$

o termo entre colchetes é a corrente topológica (4.10) escrita na base (4.48), então é suficiente mostrar que a divergência da corrente topológica é nula para ser respeitada a

⁹É utilizado esse procedimento pois facilitará consideravelmente o cálculo

restrição de Pontryagin. No apêndice C está o cálculo explícito mostrando que de fato a divergência da corrente topológica se anula para as métricas tipo Gödel. Apesar de termos mostrado que tais métricas satisfazem a restrição para uma certa escolha de base, o resultado é geral pois qualquer tensor que toma um valor nulo em uma certa base será nulo em qualquer outra base.

O próximo passo é escrever as equações modificadas na base (4.48). Há duas formas de obtê-las: a primeira é usando o formalismo de tetradas, enquanto que a segunda é usar o princípio de covariância geral. Desta forma, elas são escritas na base local de Lorentz como

$$R_{ab} + C_{ab} = \kappa \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T \eta_{ab} \right) + \Lambda \eta_{ab} \quad (4.52)$$

onde $R_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci nessa base, $T_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento definido nessa base. O tensor de Cotton na nova base é conectado com a sua versão na base coordenada via a relação $C_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu C_{\mu\nu}$, ou, mais explicitamente (vide apêndice B),

$$C^{ab} = -\frac{1}{2} \left\{ v_c \varepsilon^{acde} \nabla_d R_e^b + v_c \varepsilon^{acde} R_e^f \omega_{fd}^b - v_c \varepsilon^{acdf} R_e^b \omega_{fd}^e + v_{cd} {}^* R^{cbad} + (a \leftrightarrow b) \right\} \quad (4.53)$$

Feito essas considerações o objetivo agora é calcular todas as componentes das equações modificadas (4.52). Para isso vamos utilizar a informação que as componentes não nulas do tensor de Ricci na base local de Lorentz são dadas por

$$\begin{aligned} R_{(0)(0)} &= 2\omega^2; \\ R_{(1)(1)} &= 2\omega^2 - m^2; \\ R_{(2)(2)} &= 2\omega^2 - m^2, \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde, claramente, são constantes e diagonais. Contrariamente ao tensor de Ricci, as componentes do tensor de Cotton não são constantes e, tampouco diagonais na base local de Lorentz (4.48). As componentes não nulas do tensor de Cotton são dadas por:

i) componentes diagonais;

$$\begin{aligned} C_{(0)(0)} &= 2 \frac{\partial \phi}{\partial z} \omega (4\omega^2 - m^2); \\ C_{(1)(1)} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \omega (4\omega^2 - m^2); \\ C_{(2)(2)} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \omega (4\omega^2 - m^2), \end{aligned} \quad (4.55)$$

ii) componentes não diagonais;

$$\begin{aligned}
C_{(0)(1)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} H(r) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} \right) \frac{(4\omega^2 - m^2)}{D(r)}; \\
C_{(0)(2)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial r} (4\omega^2 - m^2); \\
C_{(0)(3)} &= -\frac{\partial \phi}{\partial t} \omega (4\omega^2 - m^2); \\
C_{(1)(3)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} H(r) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial t} \right) \frac{(4\omega^2 - m^2)}{D(r)}; \\
C_{(2)(3)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial t} (4\omega^2 - m^2).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Observe que não foi feito qualquer tipo de escolha sobre o campo de Chern-Simons, isto é, o campo é expresso da maneira mais genérica possível, $\phi = \phi(t, r, \theta, z)$, e sua forma será determinada pelas equações de campo. Um fato interessante é que todas as componentes do tensor do Cotton são identicamente nulas para a classe $m^2 = 4\omega^2$, independentemente de qual a forma do campo de Chern-Simons. Essa situação nos remete à questão das simetrias das métricas tipo Gödel, sobretudo para variedades tipo Gödel onde $m^2 = 4\omega^2$, onde foi mostrado que elas são conformalmente planas implicando que todas as componentes do tensor de Weyl são nulas¹⁰ e por esta razão admite um grupo de isometria maximal G_7 , ou seja, maior que qualquer outra métrica tipo Gödel. Assim, nosso primeiro resultado interessante é que métricas tipo Gödel conformalmente planas ($m^2 = 4\omega^2$) implica necessariamente na anulação de todas as componentes do tensor de Cotton, desta forma as equações modificadas reduzem-se às equações de Einstein e um campo escalar de Chern-Simons arbitrário permeando o espaço-tempo.

Agora vamos implementar o outro ingrediente fundamental para resolver as equações modificadas, as fontes de matéria. Com o intuito de comparar os resultados na GCSN com a Relatividade Geral usaremos as mesmas fontes de matéria utilizadas em [42], quais sejam: um fluido perfeito, um campo escalar (logicamente não é o campo de Chern-Simons) e um campo eletromagnético. Começamos descriminando o fluido perfeito, que tem vorticidade ω , densidade ρ , pressão p e as componentes do tensor energia-momento

¹⁰O teorema de Weyl-Schouten diz que variedades Riemannianas de dimensão $n \geq 3$ são conformalmente planas se e somente se o tensor de Weyl é identicamente nulo

são dadas por $T_{ab}^{(fp)} = (\rho + p)u_a u_b + p\eta_{ab}$, em particular na base (4.48), temos

$$T_{(0)(0)}^{(fp)} = \rho, \quad T_{(1)(1)}^{(fp)} = T_{(2)(2)}^{(fp)} = T_{(3)(3)}^{(fp)} = p \quad (4.57)$$

onde a quadrivelocidade na base local de Lorentz é dado por $u^a = e_{(0)}^a = \delta_{(0)}^a$, portanto é um quadri vetor tipo-tempo ($u^a u_a = -1$). Como se era de esperar $T_{ab}^{(fp)}$ é diagonal e constante. A próxima fonte de matéria é um campo escalar sem massa ψ , portanto satisfaz a equação de Klein-Gordon $\square\psi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi = 0$. Podemos reescrevê-la na base de tetradas da seguinte forma

$$\square\psi = \eta^{ab}(\nabla_a\nabla_b\psi + \omega_{ba}^c\nabla_c\psi) = 0, \quad (4.58)$$

Por questão de haver uma direção preferencial local nos universos tipo Gödel, escolhemos o gradiente do campo ψ constante e paralelo ao eixo z . Assim, o campo toma a forma $\psi = s(z - z_0)$, onde s é a amplitude e z_0 um parâmetro, ambos são constantes. As componentes do tensor energia-momento do campo escalar são expressas por $T_{ab}^{(sf)} = \nabla_a\psi\nabla_b\psi - \frac{1}{2}\eta_{ab}\nabla_c\psi\nabla^c\psi$, onde na base local (4.48) as componentes não nulas são

$$T_{(0)(0)}^{(sf)} = T_{(3)(3)}^{(sf)} = \frac{s^2}{2}, \quad T_{(1)(1)}^{(sf)} = T_{(2)(2)}^{(sf)} = -\frac{s^2}{2}, \quad (4.59)$$

similarmente ao fluido perfeito, tal escolha do campo escalar culminou em um tensor energia-momento constante e diagonal.

Finalmente, vamos tratar da última fonte de matéria que é um campo eletromagnético cujas equações de Maxwell no vácuo são dadas pela (2.49), ou ainda, reescrevendo-as na base de tetradas as mesmas tomam a forma

$$\nabla_a F^{ab} + F^{ab}\omega_a^c{}_c + F^{ac}\omega_c^b{}_a = 0, \quad (4.60)$$

$$\nabla_{[c}F_{ab]} + 2F_{d[b}\omega_{ac]}^d = 0.$$

A direção preferencial determinada pela rotação local sugere decompor o tensor de Faraday em uma base local de Lorentz ([58]) em termos das componentes dos campos elétricos (E_a) e magnéticos (B_a), assim como da quadrivelocidade u^a definida anteriormente. Portanto, a expressão para F_{ab} é dada por

$$F_{ab} = E_a u_b - E_b u_a + \varepsilon_{abcd} u^c B^d, \quad (4.61)$$

onde $E^a = F^{ab}u_b$ e $B^a = \frac{1}{2}\varepsilon^{abcd}u_b F_{cd}$. As componentes não nulas na base (4.48) são tais que

$$F_{(0)(3)} = E, \quad F_{(1)(2)} = B. \quad (4.62)$$

Substituindo nas equações de Maxwell (4.60), ficamos com as seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial z} + 2\omega B &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial z} - 2\omega E &= 0,\end{aligned}\tag{4.63}$$

cujas solução geral é

$$\begin{aligned}E &= E(z) = e \sin[2\omega(z - z_0)] \\ B &= B(z) = -e \cos[2\omega(z - z_0)]\end{aligned}\tag{4.64}$$

onde e é a amplitude do campo eletromagnético e z_0 é uma fase, ambos são quantidades constantes.

O tensor energia-momento do campo eletromagnético na base de tetradas é dado por $T^{(ce)}_{ab} = F_a{}^c F_{bc} - \frac{1}{4} \eta_{ab} F^{cd} F_{cd}$ cujas componentes não nulas na base (4.48) são

$$T^{(ce)}_{(0)(0)} = T^{(ce)}_{(1)(1)} = T^{(ce)}_{(2)(2)} = \frac{e^2}{2}, \quad T^{(ce)}_{(3)(3)} = -\frac{e^2}{2},\tag{4.65}$$

todas as componentes não nulas são constantes e diagonais. Note que o tensor energia-momento das fontes individualmente são constantes e diagonais, dessa maneira o tensor energia-momento de todas as fontes combinadas (T_{ab}) também os serão. Ou seja,

$$T_{ab} = T^{(fp)}_{ab} + T^{(sf)}_{ab} + T^{(ce)}_{ab},\tag{4.66}$$

ou, mais explicitamente na base (4.48)

$$\begin{aligned}T_{(0)(0)} &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}s^2 + \rho, \\ T_{(1)(1)} &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}s^2 + p, \\ T_{(2)(2)} &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}s^2 + p, \\ T_{(3)(3)} &= -\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}s^2 + p.\end{aligned}\tag{4.67}$$

Levando em conta que tanto o tensor de Ricci quanto os termos de constante cosmológica e o tensor energia-momento são todos diagonais e constantes na base de Lorentz (4.48). Esse quadro é extraordinário, pois as equações modificadas ficam bastante simples de serem resolvidas, tal afirmação fica clara ao tomarmos as componentes não diagonais das equações modificadas, isto é, quando $a \neq b$ as mesmas reduzem-se a

$$C_{ab} = 0, \quad a \neq b,\tag{4.68}$$

cuja solução, usando (4.56), é dada por $\phi(t, r, \theta, z) = b(z - z_0) + f(r, \theta)$, onde b é amplitude do campo de Chern-Simons na direção z , que é uma constante, e $f(r, \theta)$ é uma função arbitrária das coordenadas r e θ . Desta forma, as componentes não diagonais das equações modificadas nos fornecem a forma do campo de Chern-Simons com uma certa arbitrariedade, por outro lado note que as componentes diagonais do tensor de Cotton envolvem apenas o gradiente do campo de Chern-Simons na direção da coordenada z , portanto se tomarmos, por exemplo, $b = 0$ automaticamente todas as componentes diagonais anulam-se e as equações modificadas reduzem-se às equações de Einstein. No entanto, estamos interessados em soluções que são afetadas pelo termo de correção de Chern-Simons, consequentemente tais soluções são geradas por $C_{ab} \neq 0$, com $a = b$. Como as componentes diagonais do tensor de Cotton envolvem apenas a derivada direcional na direção z do campo escalar $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ podemos tomar sem qualquer perda de generalidade $f(r, \theta) = 0$ (não afetará em nada as equações), além disso a constante bz_0 pode ser jogada fora, pelo fato da ação possuir simetria global de deslocamento por uma constante. Então,

$$\phi(t, r, \theta, z) = \phi(z) = bz, \quad (4.69)$$

manterá $C_{ab} \neq 0$ para $a = b$.

Veja que podemos interpretar bz como uma perturbação, no entanto tal perturbação não possui proteção topológica e, deste modo, afetará a dinâmica do sistema. A consequência pode ser analisada à luz da quebra da simetria de Lorentz, vejamos em mais detalhes: o vetor $v_a = \nabla_a \phi = [0, 0, 0, b]$, constante, adquire um valor esperado de vácuo (vev) introduzindo no sistema uma quebra da simetria de Lorentz (neste caso ocorre uma quebra da invariância de rotação) cuja consequência fundamental é a existência de uma direção preferencial no espaço tempo.

Observáveis físicos (campos dinâmicos) de alguma forma podem se acoplar com o vetor v_a produzindo uma nova quantidade que pode mudar dramaticamente a dinâmica do sistema. No caso das métricas tipo Gödel, que já gozam da propriedade de ter o eixo de rotação local como direção preferencial, o vetor v_a se acopla à métrica através do vetor ω_a definido em termos do parâmetro métrico ω . Matematicamente, ocorre que o vetor $v_a = \nabla_a \phi = [0, 0, 0, b]$ é paralelo ao vetor vorticidade $\omega_a = [0, 0, 0, -\omega]$ e alinhados com o eixo z . Isto permite-nos introduzir um novo parâmetro k definido pelo produto escalar $\omega^a v_a = -b\omega = -k$. O gradiente do campo de Chern-Simons e a vorticidade possuem o mesmo sentido quando $k < 0$, caso contrário possuem sentidos opostos.

Para visualizar os efeitos da quebra da simetria vamos substituir o campo de Chern-Simons dado por (4.69), obtido das componentes das equações modificadas não diagonais, os tensores de Ricci e Cotton na base local de Lorentz em (4.52), desta forma ficamos com um sistema de equações gerado pelas componentes diagonais (tomamos $\kappa = 1$)

$$2\omega^2 + 2b\omega(4\omega^2 - m^2) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\rho - \Lambda + \frac{3}{2}p \quad (0,0), \quad (4.70)$$

$$2\omega^2 - m^2 + b\omega(4\omega^2 - m^2) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}p + \Lambda + \frac{1}{2}\rho \quad (1,1) = (2,2), \quad (4.71)$$

$$0 = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}p + s^2 + \Lambda + \frac{1}{2}\rho \quad (3,3), \quad (4.72)$$

com a exigência que $4\omega^2 \neq m^2$.

Na GCSN a constante cosmológica Λ está relacionada exclusivamente com a fonte de matéria e determinada pela componente (3,3) por $\Lambda = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}p - s^2 - \frac{1}{2}\rho$. As outras duas equações restantes (4.70-4.71) serão usadas para determinar os parâmetros da métrica (m^2, ω) em função do conteúdo de matéria e da amplitude do campo de Chern-Simons (vev), b , que é considerado um parâmetro arbitrário¹¹, assim temos três parâmetros para duas equações. Seguindo esse procedimento, isolando m^2 de (4.71) e substituindo em (4.70), chegamos em uma equação algébrica de terceira ordem para ω . Por outro lado, levando em consideração que b aparece nas equações modificadas na forma $b\omega$, logo podemos usar o parâmetro k e substituir em (4.70-4.71). Essa substituição possibilitará às equações modificadas serem lineares com respeito a m^2 e ω^2 , consequentemente as equações modificadas restantes, substituindo o Λ , tomam a forma

$$(2 + 8k)\omega^2 - 2km^2 = \rho + s^2 + p, \quad (4.73)$$

$$(2 + 4k)\omega^2 - (1 + k)m^2 = -s^2 + e^2. \quad (4.74)$$

Como mostrado em [42] não há solução de métricas tipo Gödel para o vácuo, diferentemente da GCSN que há solução. A solução do vácuo é obtida fazendo os parâmetros das fontes de matéria iguais zero, então

$$\begin{aligned} (2 + 8k)\omega^2 - 2km^2 &= 0, \\ (2 + 4k)\omega^2 - (1 + k)m^2 &= 0, \\ \Lambda &= 0, \end{aligned} \quad (4.75)$$

¹¹É claro que o parâmetro b deve ser uma quantidade pequena, pois os seus efeitos na escala de energia da RG devem ser suprimidos.

cuja solução é

$$\begin{aligned}\Lambda &= 0, \\ m^2 &= \omega^2, \\ k &= b\omega = -\frac{1}{3}.\end{aligned}\tag{4.76}$$

A solução do vazio pertence à classe hiperbólica, como evidenciado em (4.76), e apresenta CTC's pois $0 < m^2 < 4\omega^2$, portanto vemos que a violação de causalidade pode ocorrer mesmo na ausência de matéria e o próprio coeficiente de Chern-Simons pode ser tratado como um meio especial não dinâmico. Isso ocorre devido às propriedades topológicas da correção de Chern-Simons serem tais que a intensidade entre o gradiente do campo de Chern-Simons e a vorticidade da matéria é um valor fixo, $k = -\frac{1}{3}$, que gera uma geometria não trivial do espaço-tempo. O resultado acima pode ser enxergado sob a perspectiva da quebra de Lorentz: a solução do vazio (4.76) só é possível com quebra de Lorentz, mais ainda se o vev produzir exatamente $k = -\frac{1}{3}$, como a RG é uma teoria que não há quebra de Lorentz implica que não há solução para o vazio.

As soluções com fontes matérias são obtidas a partir de (4.73-4.74), no entanto, diferentemente do caso do vazio, desta feita iremos expressar as soluções em termos do parâmetro k como mostrado abaixo

$$\begin{aligned}\omega^2(k) &= \frac{a_\omega k + b_\omega}{3k + 1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\rho + p + 3s^2 - 2e^2)k + \rho + p + s^2}{3k + 1},\end{aligned}\tag{4.77}$$

para $k \neq -\frac{1}{3}$, cujos coeficientes

$$2a_\omega = \rho + p + 3s^2 - 2e^2,\tag{4.78}$$

$$2b_\omega = \rho + p + s^2,\tag{4.79}$$

são determinados apenas pelo conteúdo de matéria. Analogamente, a solução para m^2 toma forma semelhante

$$\begin{aligned}m^2(k) &= \frac{a_m k + b_m}{3k + 1} \\ &= 2 \frac{(\rho + p + 3s^2 - 2e^2)k + \rho + p + s^2 - e^2}{3k + 1},\end{aligned}\tag{4.80}$$

para $k \neq -\frac{1}{3}$, com coeficientes dados por

$$a_m = 2(\rho + p + 3s^2 - 2e^2),\tag{4.81}$$

$$b_m = \rho + p + 2s^2 - e^2.\tag{4.82}$$

Uma análise rápida da solução nos confere que os sinais dos parâmetros da métrica ω^2 e m^2 dependem do conteúdo de matéria como também do intervalo de k . Outra importante observação a ser feita é o fato de ω ser um parâmetro real, tal condição impõe $\omega^2 > 0$, que determina o intervalo permitido para k que, por sua vez, também determina os possíveis sinais de $m^2(k)$ e, por consequência, as classes das métricas tipo Gödel dentro do intervalo permitido.

Quando o vev se anula, ou seja, $b = 0$, ou equivalentemente, $k = 0$, a solução de Chern-Simons dada por (4.77) e (4.80) reduz-se a $\omega^2 = b_\omega$ e $m^2 = b_m$, portanto recuperando a solução da RG como é de se esperar, pois o campo de Chern-Simons se anula em todo o espaço-tempo. Em outras palavras, os coeficientes b_ω e b_m da solução de Chern-Simons são reduzidos aos resultados da RG para ω^2 e m^2 , respectivamente, para as mesmas fontes de matéria.

A informação sobre as propriedades de causalidade é melhor observada ao combinar as (4.77) e (4.80), de modo a fornecer a seguinte equação

$$m^2 - 4\omega^2 = \frac{-(\rho + p + e^2)}{3k + 1}, \quad (4.83)$$

onde o intervalo permitido de valores de k determina o sinal da equação anterior já que o numerador é sempre negativo. Com efeito, a equação (4.83) separa duas regiões fisicamente distintas em relação a um ponto singular ($k = -\frac{1}{3}$), quais sejam: a primeira delas é $k > -\frac{1}{3}$ correspondendo ao intervalo de parâmetros da métrica $m^2 < 4\omega^2$, ou seja, dentro da região não causal, em contrapartida a segunda região corresponde a $k < -\frac{1}{3}$ que implica $m^2 > 4\omega^2$ e, portanto, dentro da região completamente causal.

Fisicamente falando a solução do vazio pode ser interpretada como uma solução crítica que separa duas regiões no espaço do parâmetro k : a região completamente causal, sem CTC's, e a região não causal, com CTC's.

Antes de tratar de algumas soluções específicas faz-se necessário obter algumas relações gerais entre os coeficientes de ω^2 e m^2 definidos acima, as mais relevantes são dadas por $a_m = 4a_\omega$ e $b_m = b_\omega + a_\omega$. As raízes $k_\omega = -\frac{b_\omega}{a_\omega}$ de $\omega^2(k)$ e $k_m = -\frac{b_m}{a_m}$ de $m^2(k)$ são também relacionadas entre si por $k_\omega = 4k_m + 1$. Por outro lado, existem também as restrições $a_\omega - 3b_\omega = -(\rho + p + e^2) \leq 0$ e $a_m - 3b_m = -(\rho + p + e^2) \leq 0$.

A primeira solução de Chern-Simons interessante com matéria corresponde ao caso de uma fonte somente com campo escalar $\psi(z) = s(z - z_0)$, nesta situação os coeficientes

reduzem-se a $a_\omega = 3b_\omega$ e $a_m = 3b_m$, substituindo em (4.77) e (4.80) obtemos $\omega^2(k) = b_\omega = \frac{s^2}{2}$ e $m^2(k) = b_m = 2s^2$. Essa solução implica em $m^2 = 4\omega^2$ para o qual o tensor de Cotton é identicamente nulo, naturalmente a mesma solução é encontrada na RG. Então, a solução de GCSN para uma fonte de matéria unicamente formada por um campo escalar linear na coordenada z é uma solução trivial, isto é, reduz-se à solução da RG. Isto se dá ao fato que o parâmetro de violação de Lorentz k não interfere nas equações modificadas pela simples razão do tensor de Cotton, única quantidade sensível a k , se anular.

Outros casos interessantes surgem quando exigimos que coeficientes tomem valores estritamente positivos $2a_\omega = \rho + p + 3s^2 - 2e^2 > 0$ e $2b_\omega = \rho + p + s^2 > 0$, bem como as raízes de $\omega^2(k)$ e $m^2(k)$ satisfaçam a relação $k_\omega = -\frac{b_\omega}{a_\omega} < k_m = -\frac{b_m}{a_m} < -\frac{1}{3}$. Particulaarmente, a solução de GCSN cuja fonte é apenas poeira satisfaz todas as relações anteriores, neste caso a solução dada por (4.77) e (4.80) toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2(k)}{\rho} &= \frac{1}{2} \frac{k+1}{3k+1}, \\ \frac{m^2(k)}{\rho} &= \frac{2k+1}{3k+1}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

em que as raízes são dadas por $k_\omega = -1$ e $k_m = -\frac{1}{2}$, respectivamente. Além disso, a solução deve satisfazer a exigência que $\omega^2(k) > 0$, tal exigência implica no intervalo de valores permitidos para o parâmetro k dado por $k < -1$ ou $k > -\frac{1}{3}$, onde $m^2(k) > 0$ dentro desse intervalo implicando que a solução de poeira pertence a classe hipérbolica de métricas tipo Gödel (3.16). A solução é melhor visualizada traçando o gráfico das funções $\omega(k)$ e $m^2(k)$ tomando $\rho = 1$ vide Fig.(4.2). Em resumo, vemos pelo gráfico que há uma região de possíveis valores de k , satisfazendo a solução, que se encontra a esquerda do valor crítico $k = -\frac{1}{3}$, portanto as soluções nessa região não possuem CTC's. Por outro lado, também há soluções que se encontram a direita de $k = -\frac{1}{3}$ todas não causais, sobretudo, $k = 0$ coincide com a solução da RG a qual apresenta CTC's como era de se esperar.

A solução de Gödel na GCSN pode ser obtida combinando as equações (4.77) e (4.80) de tal modo a exigir que

$$m^2 - 2\omega^2 = -\frac{(-3s^2 - \rho - p + 2e^2)k + e^2 - s^2}{3k+1} = 0, \quad (4.85)$$

resolvendo para k ficamos com

$$\begin{aligned} m^2 &= 2\omega^2 = 3s^2 + p + \rho - 2e^2 > 0, \\ b\omega &= k = \frac{e^2 - s^2}{2\omega^2}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Diferindo da RG onde a solução de Gödel é obtida apenas para fluido perfeito, a última equação deixa claro que na GCSN não apenas fluido perfeito gera solução de Gödel.

Finalmente, vamos discutir as soluções abrangendo as classes linear e trigonométrica. Nesse momento, cabe um comentário importante sobre os coeficientes a_ω , a_m , b_ω e b_m ; percebe-se que os mesmos são sempre positivos, na ausência de campo eletromagnético como fonte, culminando que todas as soluções se comportam de maneira semelhante ao caso de poeira (semelhante no sentido das soluções estarem contidas na classe hiperbólica e apresentarem soluções causais). Portanto, similarmente a RG, a presença do campo eletromagnético é necessária para obter soluções nas classes linear e trigonométrica. Na RG a solução com campo eletromagnético [42] implica em $\omega = 0$ (caso das métricas tipo Gödel chamado de degenerado), contrariamente na GCSN encontramos soluções tanto para $\omega \neq 0$ (caso mais relevante) quanto para $\omega = 0$ (solução que se reduz a da RG).

A solução da GCSN dada por (4.77) e (4.80), quando apenas o campo eletromag-

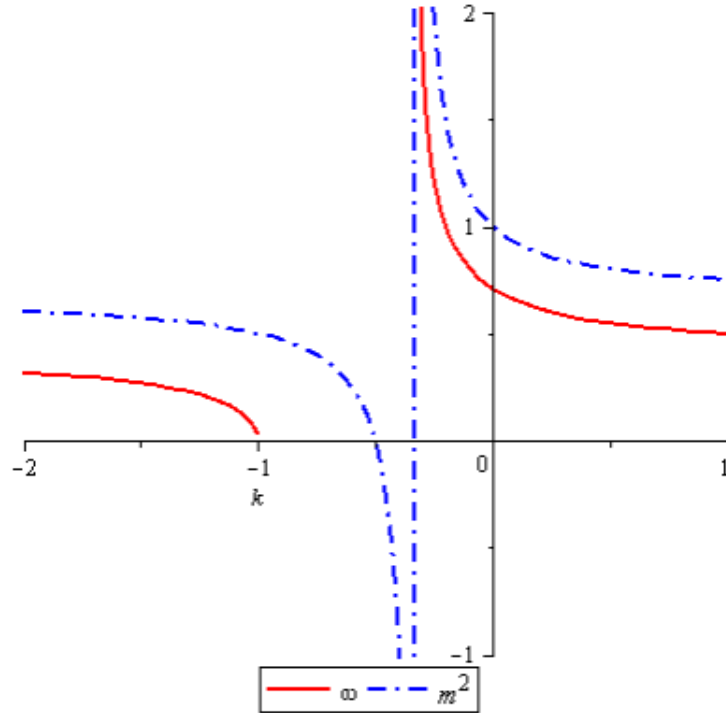


Figura 4.2: Gráfico de $\omega(k)$ e $m^2(k)$ para a solução de GCSN com poeira como única fonte de matéria. Tomamos $\rho = 1$. Perceba que a linha vertical tracejada corresponde a solução do vácuo.

nético é usado como fonte de matéria, reduz-se a

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{e^2} &= -\frac{k}{3k+1}, \\ \frac{m^2}{e^2} &= -\frac{4k+1}{3k+1},\end{aligned}\tag{4.87}$$

com constante cosmológica estritamente positiva, $2\Lambda = e^2$. As raízes de ω^2 e m^2 são $k_\omega = 0$ e $k_m = -\frac{1}{4}$, respectivamente, e não dependem da amplitude do campo eletromagnético e . Como se é exigido que a solução satisfaça $\omega^2 > 0$, teremos uma restrição sobre os valores permitidos para k . Os valores devem pertencer ao intervalo $-\frac{1}{3} < k < 0$, além disso percebe-se que dentro do subintervalo $-\frac{1}{3} < k < -\frac{1}{4}$ a solução se encontra dentro da classe hiperbólica ($m^2 > 0$), para $k = k_m = -\frac{1}{4}$ a solução corresponde à classe linear ($m^2 = 0$), enquanto que no subintervalo $-\frac{1}{4} < k < 0$ a solução pertence à classe trigonométrica ($m^2 < 0$). Esses resultados podem ser melhor visualizados na Fig.(4.3). Pelo gráfico observamos que contrariamente ao caso de poeira, agora não há soluções causais, ou seja, não existe soluções na região determinada por $k < -\frac{1}{3}$.

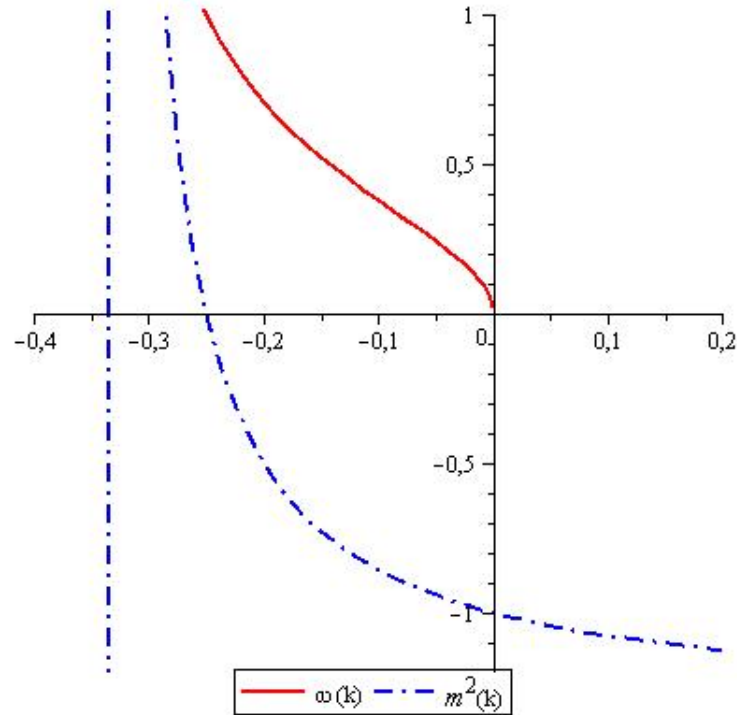


Figura 4.3: Gráfico de $\omega(k)$ e $m^2(k)$ para a solução de GCSN com campo eletromagnético como única fonte de matéria. Tomamos $e^2 = 1$. Perceba que a linha vertical tracejada corresponde à solução do vácuo.

Capítulo 5

Gravidade Modificada Por Um Termo de Chern-Simons Dinâmico

No capítulo anterior discutimos sobre GCSN, teoria esta caracterizada por um pseudo-escalar (o campo de Chern-Simons) que não evolui dinamicamente no espaço-tempo, em outras palavras, o campo não satisfaz uma equação de movimento. Por outro lado, o modelo mais realístico seria tratar o campo de Chern-Simons como sendo um campo dinâmico, assim um termo cinético deveria ser introduzido na ação de GCSN e, além disso, o campo de Chern-Simons satisfaria uma equação de movimento. Tal teoria foi primeiramente introduzida em [59] e ficou conhecida como formulação dinâmica da teoria da gravidade modificada por um termo de Chern-Simons (GCSD). A formulação dinâmica pode ser vista como uma teoria efetiva advinda de teorias mais fundamentais: teoria de cordas e *loop quantum gravity*. No contexto das teorias de cordas não perturbativas, o campo de Chern-Simons é um campo moduli, que são campos escalares não massivos que surgem no regime de baixas energias de teorias mais fundamentais [60, 61]. Já no contexto da gravidade quântica, o termo surge ao promover o parâmetro de Barbero-Immirzi à um campo escalar acoplado ao invariante topológico de Nieh-Yan [62, 63].

Tem se explorado muito na literatura soluções das equações modificadas no contexto da formulação não dinâmica, o que não se observa na formulação dinâmica, embora alguns trabalhos tenham sido realizados, por exemplo, [?] . Isso se dá ao fato que as equações modificadas na formulação dinâmica, veremos na seção seguinte, são mais complicadas do ponto de vista matemático, isto é, as equações de campo são mais complexas.

Em face desses problemas, nosso objetivo neste capítulo é verificar a consistência das classes de métricas tipo Gödel no contexto da GCSD.

5.1 A Ação da GCSD

A ação da GCSD adicionada com o termo de constante de cosmológica é descrita por

$$S_{CSD} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(R - 2\Lambda) + \frac{1}{4} (\phi * RR) - \frac{\beta}{2} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + 2V(\phi)) \right] + S_{mat}, \quad (5.1)$$

onde β é uma constante de acoplamento dimensional e $V(\phi)$ é um potencial associado ao campo de Chern-Simons. A GCSD pode ser vista como uma teoria efetiva de teorias de cordas, então o termo de potencial é relevante apenas em altas energias, mais precisamente na escala da quebra da supersimetria [60]. Portanto, para a nossa proposta, que é analisar a classe de métricas tipo Gödel em uma escala de energia próxima da RG, podemos esquecer o termo de potencial ao passo que ele é relevante apenas em altíssimas energias [64]. Em unidades naturais a ação (5.1) é adimensional, além disso a métrica também é adimensional isso pode ser facilmente visto pela equação $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu$, como consequência os tensores de Riemann ou Ricci têm dimensão do inverso de comprimento ao quadrado, $[R_{\mu\nu}] = L^{-2}$, o campo de Chern-Simons tem dimensão de comprimento ao quadrado, $[\phi] = L^2$ e a constante de acoplamento tem dimensão de inverso de comprimento elevado a quatro, $[\beta] = L^{-4}$.

Variando a ação (5.1) em relação a métrica $g_{\mu\nu}$ e ao campo de Chern-Simons ϕ , obtemos as equações de movimento, respectivamente,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + C_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\Phi; \quad (5.2)$$

$$\beta \square \phi = \beta \frac{dV}{d\phi} - \frac{1}{4} * RR, \quad (5.3)$$

onde tomamos $\kappa = 1$. O tensor $T_{\mu\nu}^\Phi$ representa o tensor energia-momento associado ao campo de Chern-Simons cuja definição é

$$T_{\mu\nu}^\phi = \beta \left[(\nabla_\mu \phi)(\nabla_\nu \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_\lambda \phi)(\nabla^\lambda \phi) - g_{\mu\nu} V(\phi) \right], \quad (5.4)$$

estamos carregando o potencial junto às expressões por motivo de completeza, mas o descartaremos no momento oportuno.

Como visto no capítulo anterior, a formulação não dinâmica está atrelada a uma limitação a chamada restrição de Pontryagin (4.38), a principal consequência disso é a teoria ser limitada a variedades Riemannianas que a satisfaçam. Por outro lado, a formulação dinâmica não apresenta qualquer limitação ou restrição tal afirmação pode ser traduzida pela equação (5.3), onde, por analogia, seria a equação equivalente à restrição de Pontryagin na formulação não dinâmica, no entanto (5.3) não representa uma restrição, mas sim, uma equação de evolução para o campo de Chern-Simons com a densidade de Pontryagin desempenhando o papel de “fonte” do campo ϕ .

Foi discutido que métricas que apresentam paridade ímpar não são soluções da teoria modificada na formulação não dinâmica e citamos como exemplo a métrica de Kerr, naturalmente surge a seguinte pergunta; as métricas com paridade ímpar e, especialmente, a métrica de Kerr podem ser soluções da teoria modificada na formulação dinâmica? A resposta é não, pelo simples fato que o tensor de Cotton é não nulo, pois a equação dinâmica do campo de Chern-Simons produz um campo escalar bastante complexo levando, inevitavelmente, à um tensor de Cotton não trivial. Tal problema foi tratado em [64] onde foram usados métodos perturbativos e encontrou-se que a métrica de Kerr deveria ter um termo de correção vinda do termo de correção de Chern-Simons.

5.2 Universos Tipo Gödel Na GCSD

Nesta seção verificaremos a consistência das métricas tipo Gödel na formulação dinâmica da gravidade modificada de Chern-Simons. Para isso vamos utilizar um procedimento similar ao utilizada na formulação não dinâmica, além disso, com o objetivo de compararmos ambas as formulações, usaremos as mesmas fontes de matéria (4.67) utilizadas no capítulo precedente. É conveniente reescrever as equações modificadas (5.2-5.3) na base local de Lorentz (4.15), então

$$R_{ab} + C_{ab} = \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T \eta_{ab} \right) + \left(T_{ab}^{\phi} - \frac{1}{2} T^{\phi} \eta_{ab} \right) + \Lambda \eta_{ab}, \quad (5.5)$$

$$\beta \square \phi = 0. \quad (5.6)$$

A primeira das equações é trivialmente obtida tomando o traço de (5.2) e expressando-a

na base (4.15), enquanto que (5.6) é obtido ao descartar o termo de potencial, como já bem explicado o motivo, e usando que *RR é identicamente nulo para métricas tipo Gödel.

A novidade nas equações modificadas na formulação dinâmica em relação à formulação não dinâmica é a presença do tensor energia-momento associado ao campo escalar ϕ tal quantidade, na base (4.15), é definida por

$$T_{ab}^\phi = \beta \left[(\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi) - \frac{1}{2} \eta_{ab} (\nabla_c \phi)(\nabla^c \phi) \right] \quad (5.7)$$

onde $T_{ab}^\phi = e_a^\mu e_b^\nu T_{\mu\nu}^\phi$.

Levando em consideração que o tensor de Ricci, o tensor energia-momento de matéria e o termo de constante cosmológica são diagonais e constantes, logo (5.5) para componentes que satisfaçam $a \neq b$ reduz-se a

$$C_{ab} = T_{ab}^\phi. \quad (5.8)$$

As componentes não nulas de T_{ab}^ϕ são:

i) componentes diagonais;

$$\begin{aligned} T_{(0)(0)}^\phi &= \beta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 (H(r))^2}{(D(r))^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{H(r)}{(D(r))^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(D(r))^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 \right]; \\ T_{(1)(1)}^\phi &= \beta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 (H(r))^2}{(D(r))^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{H(r)}{(D(r))^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(D(r))^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 \right]; \\ T_{(2)(2)}^\phi &= \beta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 (H(r))^2}{(D(r))^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{H(r)}{(D(r))^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(D(r))^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 \right]; \\ T_{(3)(3)}^\phi &= \beta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 (H(r))^2}{(D(r))^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{H(r)}{(D(r))^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(D(r))^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (5.9)$$

ii) componentes não diagonais;

$$\begin{aligned}
T_{(0)(1)}^\phi &= -\beta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r}, \\
T_{(0)(2)}^\phi &= \beta \left[\frac{H(r)}{D(r)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{D(r)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right], \\
T_{(0)(3)}^\phi &= -\beta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z}, \\
T_{(1)(2)}^\phi &= \beta \left[-\frac{H(r)}{D(r)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{D(r)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right], \\
T_{(1)(3)}^\phi &= \beta \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z}, \\
T_{(2)(3)}^\phi &= \beta \left[-\frac{H(r)}{D(r)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{D(r)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Substituindo (4.56) e (5.10) em (5.8) e exigindo que as componentes diagonais de C_{ab} e T_{ab}^ϕ sejam não triviais, obtemos a solução única

$$\phi(t, r, \theta, z) = b(z - z_0), \tag{5.11}$$

perceba que substituindo a solução (5.11) em (4.55-5.9) encontraremos C_{ab} e T_{ab}^ϕ diagonais e constantes, desta forma satisfazendo a exigência que R_{ab} , T_{ab} e o termo de constante cosmológica são diagonais e constantes na base (4.15). Nota-se que distintamente à formulação não dinâmica, onde há uma maior arbitrariedade na escolha do campo de Chern-Simons (vide discussão no capítulo anterior), na formulação dinâmica a forma do campo de Chern-Simons é mais restrita, mesmo assim continua sendo arbitrária devido ao parâmetro b . A solução (5.11) automaticamente satisfaz a outra equação modificada (5.6).

Portanto, resta-nos analisar apenas as equações diagonais de (5.5) dadas por

$$\begin{aligned}
(0, 0) : \quad & 2\omega^2 + 2k(4\omega^2 - m^2) + \Lambda - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\rho - \frac{3}{2}p = 0, \\
(1, 1) = (2, 2) : \quad & 2\omega^2 - m^2 + k(4\omega^2 - m^2) - \Lambda + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\rho = 0, \\
(3, 3) : \quad & -\Lambda - (\beta b)^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}e^2 - s^2 - \frac{1}{2}\rho = 0.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Uma inspeção direta da componente (3, 3) se verifica a não dependência da constante cosmológica em termos dos parâmetros da métrica (m^2, ω) , percebe-se a similaridade com o caso não dinâmica, embora haja uma diferença que surge na contribuição do tensor

energia-momento do campo de Chern-Simons T_{ab}^ϕ expressada pelo termo $(\beta b)^2$ na componente $(3,3)$. Seguindo nessa mesma linha, o caso particular $\beta = 0$ reduz as equações modificadas na formulação dinâmica as suas equivalentes na formulação não dinâmica, o que era de esperar. O outro extremo é o caso particular $b = 0$ tal caso destrói o campo de Chern-Simons e o tensor energia-momento do campo de Chern-Simons, portanto, as equações modificadas reduzem-se a RG. Como estamos interessados em soluções inerentes à formulação dinâmica exclusivamente, neste caso, deve-se tomar $\beta \neq 0$ e $b \neq 0$.

Antes de tratar do caso com matéria discutiremos o caso sem matéria. Nesse caso as equações modificadas tornam-se

$$\begin{aligned} 2\omega^2 + 8k\omega^2 - 2km^2 + \Lambda &= 0, \\ 2\omega^2 - m^2 + 4k\omega^2 - km^2 - \Lambda &= 0, \\ \Lambda &= -(\beta b)^2, \end{aligned} \tag{5.13}$$

veja que a constante cosmológica é sempre negativa diferentemente da solução do vácuo na formulação não dinâmica (4.75).

O sistema de equações (5.13) apresenta dois casos de soluções distintas em termos do parâmetro k , que são: a primeira delas é válida para $k \neq -1/3$ tal solução é obtida somando-se a primeira e a segunda equações de (5.13) depois de eliminar Λ delas usando a terceira equação; logo, ficamos com

$$\begin{aligned} 2\omega^2 + 8k\omega^2 - 2km^2 - (\beta b)^2 &= 0, \\ 2\omega^2 - m^2 + 4k\omega^2 - km^2 + (\beta b)^2 &= 0, \end{aligned} \tag{5.14}$$

a priori o sistema acima parece reduzir-se a uma equação cúbica na variável ω , mas somando as duas equações obtemos uma forma mais simples

$$(4\omega^2 - m^2)(1 + 3k) = 0, \tag{5.15}$$

cuja solução é $m^2 = 4\omega^2 = 2(\beta b)^2$ para $k \neq -1/3$, no entanto essa solução anula o tensor de Cotton e, desta forma se reduz as equações da RG com um campo escalar [42], com a diferença que agora o campo não é colocado “a mão” e, sim, é o próprio campo de Chern-Simons proveniente do seu acoplamento com a geometria do espaço-tempo. Por

outro lado, a segunda solução que corresponde a $k = -1/3$ é dada por

$$\begin{aligned}\Lambda &= -(\beta b)^2, \\ b\omega &= k = -\frac{1}{3}, \\ m^2 &= \omega^2 + \frac{3}{2}(\beta b)^2,\end{aligned}\tag{5.16}$$

ela é puramente pertencente à formulação dinâmica, além disso o tensor de Cotton não se anula.

A solução deve satisfazer a exigência que $\beta \neq 0$ e $b \neq 0$ para soluções puramente pertencentes à formulação dinâmica o que acarreta numa constante cosmológica negativa (estamos considerando o campo de Chern-Simons um campo escalar real, logo b é real). De (5.17) tiramos a relação $m^2 > \omega^2$, que é fruto da inclusão do termo dinâmico de Chern-Simons, deixando claro que a solução se enquadra dentro da classe de métricas tipo Gödel hiperbólica. Outra consequência relevante causada pelo termo dinâmica é a presença de soluções completamente causais, tais soluções são obtidas para valores dos parâmetros que satisfaçam $(\beta b)^2 \geq \sqrt{2}/3$ que leva a $m^2 \geq 4\omega^2$. Esse resultado nos fornece a principal diferença entre a formulação não dinâmica e dinâmica, na ausência de fontes de matéria, é que esta última possibilita a existência de variedades tipo Gödel completamente causais devido, única e exclusivamente, à presença do termo dinâmico.

O caso com fontes de matéria é mais complicado e isso fica claro através de uma rápida análise das equações (5.12) e (5.13), percebe-se que existem duas equações para três variáveis (k, m, ω) , onde duas dessas variáveis são parâmetros da métrica, logo devem ser resolvidas para as fontes de matéria. A saída para encontrar uma solução para o sistema é tratar uma das variáveis como um parâmetro independente, fisicamente falando a melhor escolha é k como parâmetro livre e o motivo é bastante simples; queremos observar a influência da correção de Chern-Simons sobre os parâmetros da métrica. Em resumo, queremos soluções do tipo $\omega^2(k)$ e $m^2(k)$, para isso vamos reescrever as equações (5.12) e (5.13), já eliminando a constante cosmológica delas por meio de (5.13), de uma maneira mais conveniente, ou seja,

$$\begin{aligned}\omega^4 &- \left(\frac{a_\omega k + b_\omega}{3k + 1} \right) \omega^2 - \frac{1}{2}(\beta k)^2 = 0, \\ m^2 &= \frac{a_m k + b_m}{3k + 1} + \frac{2(\beta k)^2}{\omega^2},\end{aligned}\tag{5.17}$$

onde as equações acima são válidas para $k \neq -1/3$ e os coeficientes são definidos por (4.78, 4.79, 4.81, 4.82).

Resolvendo (5.17), obtemos

$$\omega^2(k) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a_\omega k + b_\omega}{3k + 1} \right) + \sqrt{\left(\frac{a_\omega k + b_\omega}{3k + 1} \right)^2 + 2(\beta k)^2} \right], \quad (5.18)$$

observa-se que $\omega^2 \geq 0$ para todo k , exceto para $k = -1/3$ que corresponde a solução do vácuo e além disso é um ponto singular nas equações acima com fonte. A solução para m^2 é encontrada substituindo (5.18) em (5.17), assim

$$m^2(k) = \frac{b_m - 4b_\omega}{3k + 1} + 2 \left(\frac{a_\omega k + b_\omega}{3k + 1} + \sqrt{\left(\frac{a_\omega k + b_\omega}{3k + 1} \right)^2 + 2(\beta k)^2} \right), \quad (5.19)$$

os coeficientes junto com o parâmetro k determina os possíveis sinais de m^2 e, também, as possíveis classes de métricas tipo Gödel. Combinando (5.19) e (5.18) obtemos a mesma relação válida na formulação não dinâmica,

$$m^2 - 4\omega^2 = -\frac{\rho + p + e^2}{3k + 1}. \quad (5.20)$$

Como discutido na caso não dinâmico a equação anterior separa duas regiões: $k < -1/3$ implica em soluções completamente causais $m^2 > 4\omega^2$ e $k > -1/3$ implica em soluções com CTC's $m^2 < 4\omega^2$, a fronteira $k = -1/3$ corresponde à solução do vácuo. Além disso, ela é independente do termo dinâmico $(\beta b)^2$, evidenciando que a dinâmica do campo de Chern-Simons não interfere nas propriedades de causalidade que são exclusivamente determinadas pelas fontes de matéria e pelo acoplamento k . Distintamente da formulação não dinâmica, agora o parâmetro ω^2 é real para todo k , exceto $k \neq -1/3$.

A geometria $m^2 = 4\omega^2$ é solução quando consideramos apenas campo escalar como fonte de matéria. No caso particular dessa situação a métrica é idêntica ao caso não dinâmico gerado pela mesma fonte de matéria, claro que a solução geral é diferente pois no caso dinâmico a constante cosmológica é distinta. Além disso, o tensor de Cotton é identicamente nulo, no entanto, diferentemente do caso não dinâmico, as equações modificadas não se reduzem às equações da RG com a mesma fonte, isso ocorre devido à presença do tensor energia-momento do campo de Chern-Simons.

Agora, vamos examinar as soluções contidas nas três classes de métricas tipo Gödel: hiperbólica, trigonométrica e linear.

Primeiro, por motivo de simplicidade, vamos examinar o caso cuja única fonte é

poeira. Nesse caso, as equações (5.18) e (5.19) se reduzem a

$$\begin{aligned}\omega^2(k) &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\rho k + \rho}{3k + 1} \right) + \sqrt{\left(\frac{\rho k + \rho}{3k + 1} \right)^2 + 8(\beta k)^2} \right], \\ m^2(k) &= \frac{\rho k}{3k + 1} + \sqrt{\left(\frac{\rho k + \rho}{3k + 1} \right)^2 + 8(\beta k)^2},\end{aligned}\tag{5.21}$$

verifica-se que $m^2 > 0$ e, por consequência, a solução com poeira pertence à classe hiperbólica. Analogamente ao caso não dinâmico existem soluções causais dentro da região de parâmetros $k < -1/3$, ou seja, agora o intervalo de valores para k é maior que no caso não dinâmico.

As outras classes podem ser mapeadas ao tratar o caso com campo eletromagnético como única fonte de matéria. Em especial, as equações (5.18) e (5.19) tomam a forma

$$\omega^2(k) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2 k}{3k + 1} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{e^2 k}{3k + 1} \right)^2 + 2(\beta k)^2},\tag{5.22}$$

$$m^2(k) = -\left(\frac{2e^2 k + e^2}{3k + 1} \right) + 2\sqrt{\left(\frac{e^2 k}{3k + 1} \right)^2 + 2(\beta k)^2}.\tag{5.23}$$

Perceba que as raízes de (5.23) são obtidas ao resolver a equação de quarto grau abaixo

$$\beta^2(72k^4 + 48k^3 + 8k^2) - 4e^4 k - e^4 = 0,\tag{5.24}$$

apesar da solução analítica ser possível ela é inviável. A saída é obter soluções numéricas para isso vamos tomar $e = 2$ e $\beta = 1$; obtemos duas soluções numéricas $k_1 = -0,249$ e $k_2 = 0,839$ com precisão de três dígitos. A solução e as raízes são ilustradas na Fig.5.1. Analisando a figura podemos distinguir as três classes de métricas tipo Gödel a partir dos valores de k . A primeira, a classe hiperbólica, ocorre dentro das regiões: $k < -1/3$ correspondendo à região completamente causal, sem CTC's, enquanto que as regiões $-1/3 < k < k_1$ e $k > k_2$ correspondem à região não causal. A classe linear é obtida para $k = k_1$ ou $k = k_2$. A região de intervalo entre as raízes, $k_1 < k < k_2$, corresponde a classe trigonométrica. Portanto, na formulação dinâmica é possível obter soluções causais na presença de campo eletromagnético como única fonte de matéria, enquanto que na formulação não dinâmica não é possível.

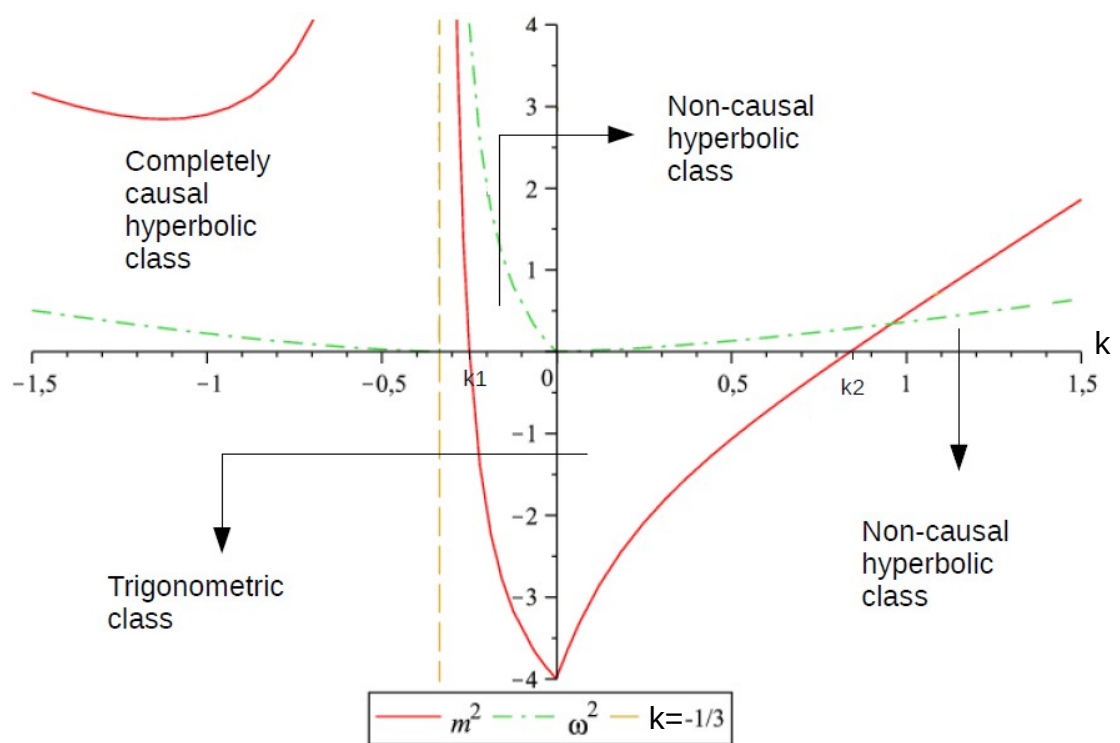


Figura 5.1: Solução de GCSD com campo eletromagnético como única fonte de matéria, tomamos $e = 2$. A linha tracejada amarela corresponde a $k = -1/3$, onde as funções m^2 e ω^2 explodem.

Capítulo 6

Solução Tipo Gödel na Teoria de Brans-Dicke

Vamos começar o capítulo introduzindo a ação que descreve o modelo de BD

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\varphi R - \frac{\tilde{\omega}}{\varphi} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + 16\pi \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right). \quad (6.1)$$

Observe na ação anterior que a depender do valor de $\tilde{\omega}$ o efeito do campo φ pode ser suprimido, em outras palavras, para valores pequenos de $\tilde{\omega}$ o campo φ passa a ter um papel fundamental para uma contribuição efetiva na ação, em contrapartida quando $\tilde{\omega}$ toma valores altos a parte do escalar de Ricci passa a ter um papel fundamental. Outra questão relevante sobre a ação (6.2) é que ela pode ser reescrita na mesma forma da ação de Einstein-Hilbert com um campo escalar minimamente acoplado, isso ocorre ao redefinir a métrica via transformação conforme, ou seja, $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-2\sigma(x)} g_{\mu\nu}$, $\sigma(x)$ é uma função arbitrária da posição. A ação da teoria resultante depois da transformação conforme é tal que as equações de campo para a nova métrica, $\bar{g}_{\mu\nu}$, são semelhantes as da RG, embora com o tensor energia-momento não conservado, conseqüentemente o conteúdo não segue geodésicas da nova métrica. A ação escrita na forma (6.2) define o chamado referencial de Jordan onde não há interação entre os campos de matéria e o campo escalar na lagrangiana de matéria, além disso nesse referencial o tensor energia-momento é covariantemente conservado e, portanto a matéria segue geodésicas da métrica. Existe uma particular escolha, dentre infinitas possíveis, chamada de referencial de Einstein que deixa a ação (6.2) na forma da ação de Einstein, tal transformação é definida por $e^{-2\sigma(x)} = \phi$ [82]. De agora em diante faremos a escolha pela referencial de Jordan.

Assim como ocorre na teoria de Chern-Simons, o campo de BD pode ser interpretado como um campo moduli (chamado de dilaton) advindo de teorias de grande unificação. Outro cenário importante onde a teoria se insere é na construção de modelos cosmológicos inflacionários. O propósito desse capítulo é estudar as métricas tipo Gödel no modelo de BD e na sua extensão mais natural incluindo um termo de constante cosmológica (BD- Λ); tais modelos, ou mais genericamente incluindo um potencial para o campo de BD, são propostos na literatura com o intuito de contemplar a expansão acelerada do Universo e a matéria escura [74, 75, 76], como também, o valor pequeno da constante cosmológica observado atualmente.

6.1 Equações de Campo da Teoria de Brans-Dicke

A ação que descreve a teoria é dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\varphi R - \frac{\tilde{\omega}}{\varphi} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + 16\pi \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right), \quad (6.2)$$

onde φ é o campo de Brans-Dicke que é tratado como uma generalização da constante de gravitação newtoniana, ou seja, a constante de gravitação passa a ser um campo dinâmico. A lagrangiana de matéria depende apenas da métrica e dos campos matéria assim como na RG, logo não há interação entre o campo de Brans-Dicke e a matéria, $\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \varphi} = 0$. A constante $\tilde{\omega}$ é o único parâmetro livre da teoria¹, conforme dito na introdução do capítulo o limite $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$ a teoria se reduz as soluções da RG.

As equações de movimento da teoria são obtidas ao variar (6.2) com respeito ao campo de Brans-Dicke e a métrica, respectivamente, fazendo isso nós ficamos com as seguintes equações de campo

$$\frac{2\omega}{\varphi} \square \varphi - \frac{\tilde{\omega}}{\varphi^2} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + R = 0, \quad (6.3)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \left(\frac{8\pi}{\varphi} \right) T_{\mu\nu} + \frac{\tilde{\omega}}{\varphi^2} T_{\mu\nu}^{(\varphi)} + \frac{1}{\varphi} [\nabla_\nu (\nabla_\mu \varphi) - g_{\mu\nu} \square \varphi], \quad (6.4)$$

onde $T_{\mu\nu}$ representa o tensor energia-momento das fontes de matéria como definido em (4.32) e $T_{\mu\nu}^{(\varphi)}$ é o tensor energia-momento associado ao campo de Brans-Dicke e definido

¹Estamos usando a notação $\tilde{\omega}$ para o parâmetro da teoria para não confundir com a vorticidade nas métricas tipo Gödel.

por

$$T_{\mu\nu}^{(\varphi)} = \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\rho \varphi \nabla^\rho \varphi. \quad (6.5)$$

Tomando o traço de (6.4) podemos escrever o escalar de Ricci em termos das fontes de matéria e do campo φ , portanto

$$R = - \left(\frac{8\pi}{\varphi} \right) T + \frac{\tilde{\omega}}{\varphi^2} T^{(\varphi)} + \frac{3}{\varphi} \square \varphi, \quad (6.6)$$

onde $T^{(\varphi)} = -\nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi$ é o traço de $T_{\mu\nu}^{(\varphi)}$. Usando (6.6) podemos eliminar o escalar de Ricci em (6.3) obtendo

$$\square \varphi = \left(\frac{8\pi}{3 + 2\tilde{\omega}} \right) T. \quad (6.7)$$

Tal equação está de acordo com o princípio de Mach, em outras palavras, mesmo não havendo um acoplamento entre o campo de Brans-Dicke com a matéria na ação (6.2), a equação (6.7) mostra que a matéria é fonte para a dinâmica de φ .

6.2 Métricas Tipo Gödel Na Teoria de Brans Dicke Com Constante Cosmológica

A ação de Brans-Dicke adicionando um termo de constante cosmológica (BD- Λ) é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\varphi (R + 2\Lambda) - \frac{\tilde{\omega}}{\varphi} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + 16\pi \mathcal{L}_m \right). \quad (6.8)$$

Como nos capítulos anteriores iremos usar as métricas tipo Gödel na base (4.48). Assim as equações de campo de (6.8) nessa base são dadas por

$$\begin{aligned} G_b^a - \delta_b^a \Lambda &= \left(\frac{8\pi}{\varphi} \right) T_b^a + \frac{\tilde{\omega}}{\varphi^2} \left(\nabla^a \varphi \nabla_b \varphi - \frac{1}{2} \delta_b^a \nabla_c \varphi \nabla^c \varphi \right) + \frac{1}{\varphi} (\nabla_b \nabla^a \varphi - \delta_b^a \square \varphi) \\ \square \varphi &= \frac{1}{2\tilde{\omega} + 3} (8\pi T + 2\Lambda \varphi) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Agora iremos adicionar o conteúdo de matéria que será composto do campo eletromagnético definido por (4.64) e de poeira tal que o tensor energia-momento das fontes de matéria na base (4.48) é dada por

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + T_{ab}^{(ce)}, \quad (6.10)$$

onde u^a corresponde a quadrivelocidade na base local de Lorentz (4.48) como já foi definido e $T_{ab}^{(ce)}$ é dado por (4.65).

Com as fontes de matéria já implementadas podemos tratar das soluções das equações de campo, a seguir vamos encontrar soluções para os casos onde $\varphi = \varphi(t)$ e $\varphi = \varphi(z)$.

6.2.1 $\varphi = \varphi(t)$

Nesta situação, o d’Lambertiano atuando sobre ϕ definido por (4.58), toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}\square\varphi &= \eta^{ab} [\nabla_b(\nabla_a\varphi) + \omega^c_{ab}(\nabla_c\varphi)], \\ \square\varphi &= \left(\frac{D^2 - H^2}{D^2}\right) \ddot{\varphi}.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Substituindo (4.54) nas equações de campo (6.9) obtemos as componentes diagonais

$$\begin{aligned}(0,0) \quad 3\omega^2 - m^2 - \Lambda &= \left(\frac{8\pi}{\varphi}\right) \rho + \left(\frac{4\pi}{\varphi}\right) e^2 + \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 + \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 \frac{H^2}{D^2} + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \frac{H^2}{D^2}, \\ (1,1) \quad -\omega^2 - \Lambda &= -\left(\frac{4\pi}{\varphi}\right) e^2 - \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 + \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 \frac{H^2}{D^2} - \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \frac{D^2 - H^2}{D^2}, \\ (2,2) \quad -\omega^2 - \Lambda &= -\left(\frac{4\pi}{\varphi}\right) e^2 - \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 - \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 \frac{H^2}{D^2} - \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}, \\ (3,3) \quad \omega^2 - m^2 - \Lambda &= \left(\frac{4\pi}{\varphi}\right) e^2 - \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 + \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 \frac{H^2}{D^2} - \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \frac{D^2 - H^2}{D^2},\end{aligned}\tag{6.12}$$

enquanto que as não diagonais são

$$\begin{aligned}(0,1) \quad \frac{HH'}{2D^2} \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} &= 0, \\ (0,2) \quad \frac{H}{D} \left[\tilde{\omega} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \right] &= 0, \\ (1,2) \quad \frac{H'D - HD'}{D} \left[\tilde{\omega} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \right] &= 0.\end{aligned}\tag{6.13}$$

A componente (0, 1) implica que $\varphi(t)$ deve ser constante, pois o H' é fixado pelas condições de homogeneidade das métricas tipo Gödel (3.15) e não é uma função constante. Nesse caso as soluções das equações de campo de BD- Λ são triviais, ou seja, se reduzem as da RG com as mesmas fontes de matéria ao identificarmos $\varphi(t) = 1/G$.

6.2.2 $\varphi = \varphi(z)$

Agora iremos tratar o campo de Brans-Dicke como função de z . Nesta situação o operador d'Lambertiano é dado por

$$\square\varphi = -\varphi'', \quad (6.14)$$

onde a linha representa a derivada com respeito à coordenada z . As equações de campo não nulas são dadas por

$$\begin{aligned} (0,0) \quad 3\omega^2 - m^2 - \Lambda &= \left(\frac{8\pi}{\varphi}\right)\rho + \left(\frac{4\pi}{\varphi}\right)e^2 + \frac{\tilde{\omega}}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + \frac{\varphi''}{\varphi}, \\ (k,k) \quad \omega^2 + \Lambda &= \left(\frac{4\pi}{\varphi}\right)e^2 - \frac{\tilde{\omega}}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - \frac{\varphi''}{\varphi}, \\ (3,3) \quad \omega^2 - m^2 - \Lambda &= \left(\frac{4\pi}{\varphi}\right)e^2 - \frac{\tilde{\omega}}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Combinando as equações anteriores obtemos as seguintes relações

$$4\omega^2 - m^2 = \left(\frac{8\pi}{\varphi}\right)(\rho + e^2), \quad m^2 + 2\Lambda = -\frac{\varphi''}{\varphi}, \quad (6.16)$$

as quais independem do parâmetro livre $\tilde{\omega}$.

Destacamos três importantes casos distintos das equações anteriores:

i) A geometria $m^2 = 4\omega^2$ é solução se $\rho = 0$ e $e = 0$, assim a solução corresponde ao caso sem matéria e pertence a classe hiperbólica, além disso é completamente causal. Notamos que tal solução é consistente com a equação do campo escalar, isto é,

$$-\varphi'' = \frac{1}{3 + 2\tilde{\omega}}(8\pi\rho + 2\Lambda\varphi), \quad (6.17)$$

o traço do tensor do tensor energia-momento é $T = \rho$ (não depende da amplitude do campo eletromagnético), que no caso atual é nulo. A solução da equação para o campo φ (6.17) é dada por

$$\varphi(z) = C_1 e^{qz} + C_2 e^{-qz}, \quad \text{com } q = \sqrt{-\frac{2\Lambda}{3 + 2\tilde{\omega}}} < 0, \quad (6.18)$$

ou

$$\varphi(z) = C_3 \cos(q'z) + C_4 \sin(q'z), \quad \text{com } q = \sqrt{-\frac{2\Lambda}{3 + 2\tilde{\omega}}} > 0, \quad (6.19)$$

onde $q = iq'$.

Usando as equações (6.16-6.17) o parâmetro m relaciona-se com q por meio da seguinte relação

$$m^2 + 2\Lambda = \frac{2\Lambda}{3 + 2\tilde{\omega}} \quad \implies \quad \frac{m^2}{4} + \Lambda = -q^2 \left(1 + \frac{\tilde{\omega}}{2}\right). \quad (6.20)$$

Nota-se que a constante cosmológica desempenha um papel fundamental pois os outros parâmetros m^2 , ω^2 e o próprio campo φ podem ser escritos em termos dela, logo a solução só existe para $\Lambda \neq 0$. Para ficar mais claro a conclusão anterior tomemos, como exemplo, $\tilde{\omega} = -2$ nesse caso a solução toma a seguinte forma

$$m^2 = 4\omega^2 = -4\Lambda \quad (6.21)$$

$$\varphi(z) = C_1 e^{\sqrt{2\Lambda}z} + C_2 e^{-\sqrt{2\Lambda}z}. \quad (6.22)$$

Em resumo, a solução do vazio representa uma solução completamente causal do universo tipo Gödel na teoria BD- Λ . Como discutimos nos capítulos anteriores a geometria $m^2 = 4\omega^2$ é solução da RG com o campo escalar definido por (4.58-4.59) como única fonte de matéria. Tomando o limite $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$ em (6.18-6.19), resulta em $\varphi(z) \approx \varphi_0(1 \pm qz)$, onde $C_1 = C_2 = \varphi_0 = 1/G$.

Usando o limite acima nas equações de campo BD- Λ (6.9) ficamos com

$$G_{AB} = \Lambda \eta_{AB} - \frac{1}{2} \Lambda \sigma_{AB} + O(1/\sqrt{\tilde{\omega}}), \quad (6.23)$$

onde $\sigma_{(3)(3)} = -3$ e $\sigma_{AB} = \eta_{AB}$, com $A, B = 1, 2$. Portanto, para o vazio a solução quando $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$ não recupera as equações de campo da RG para o vazio, como mostrado elegantemente em [71], tal situação ocorre quando o traço do tensor energia-momento é nulo. Entretanto, podemos interpretar o termo $\frac{1}{2} \Lambda \sigma_{AB}$ em (6.23) como uma contribuição de um tensor energia-momento e assim recuperar a mesma solução completamente causal obtida em [42] quando $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$. Desta forma concluímos que a solução do vazio de BD- Λ com $\varphi = \varphi(z)$ quando $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$ é equivalente à solução da RG com um campo escalar material da forma (4.58-4.59).

ii) O segundo caso relevante corresponde a $\rho > 0$ e $e = 0$ que implica na exigência de $\frac{\rho}{\varphi} = \text{const.}$, isso para que as soluções sejam consistentes com as equações (6.16)-(6.17). Além disso, observe que combinando as componentes (k, k) e $(3, 3)$ de (6.15), obtemos

$$m^2 - 2\omega^2 = \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 \implies m^2 > 2\omega^2. \quad (6.24)$$

Portanto, nesse segundo caso as soluções estão dentro do intervalo $2\omega^2 < m^2 < 4\omega^2$. Se tomarmos ρ sendo constante implica que φ também é uma constante isso devido à exigência $\frac{\rho}{\varphi} = \text{const.}$, sobretudo, nessa situação, a solução se reduz a da RG (3.1), ou seja, a métrica de Gödel $m^2 = 2\omega^2 = 8\pi G\rho = \kappa\rho$.

Existe a possibilidade de soluções não triviais do tipo $\rho(z) = C_1\varphi(z) = C_1/G_{eff}(z)$ com C_1 , entretanto tais soluções são não físicas. A explicação é bastante simples: a constante de acoplamento efetiva $G_{eff}(z) = 1/\varphi(z)$ é inversamente proporcional a densidade, $G_{eff} * \rho = C_1$, logo o aumento de matéria no Universo levaria uma diminuição da intensidade de acoplamento ou vice versa, é claro que tal situação não faz sentido para o tipo de matéria que satisfaz as condições de energia.

iii) O terceira caso corresponde à região completamente causal $m^2 > 4\omega^2$ satisfeita quando $\rho < e^2$. Essa condição necessariamente implica em uma densidade negativa o que leva a matéria exótica. No entanto, as próprias equações de campo excluem tal possibilidade. É fácil de ver, basta tomarmos $\rho = \text{const.}$ e combinar as componentes de (6.15) levando à relação

$$m^2 - 2\omega^2 = \frac{8\pi}{\varphi}e^2 \implies m^2 \leq 2\omega^2, \quad (6.25)$$

deixando claro que não há soluções possíveis nessa situação.

Capítulo 7

Conclusão

Nosso foco nesta tese foi o estudo da consistência das métricas tipo Gödel no contexto das teorias modificadas da RG, mais precisamente estudamos: as teorias modificadas de Chern-Simons, em ambas as formulações (dinâmica e não dinâmica), e a teoria de Brans-Dicke com constante cosmológica.

Começamos a tese discutindo a relevância das teoria modificadas da RG no cenário atual, repleto de várias questões desafiadoras que estão em aberto e que a RG não consegue explicar tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Já adentrando no capítulo 2 da tese discutimos o aparato matemático necessário e relevante para as seções posteriores. Mostramos, em detalhes, a conversão da base coordenada para base não coordenada, sem tal formalismo não seríamos capazes de obter os resultados dos outros capítulos. Além disso, tratamos das formas diferenciais e das equações de estrutura de Cartan, como exemplo, escrevemos a ação da RG em termos de formas diferenciais. A estrutura de formas diferenciais serão importantes nos cálculos das classes de características. Iniciamos o capítulo 3 tratando da violação de causalidade, que constitui um dos cerne desta tese, na RG, em especial, das CTC's no Universo de Gödel. Em seguida, discutimos que as soluções das métricas tipo Gödel no contexto da RG todas apresentam CTC's, exceto no caso excepcional de campo escalar linear na coordenada z como única fonte de matéria.

A partir do capítulo 4 surgiram os resultados originais do trabalho. Demos início a esse capítulo motivando as origens do termo de Chern-Simons/Pontryagin tanto fisicamente quanto matematicamente. Na seção seguinte tratamos da formulação não dinâmica da gravidade modificada de Chern-Simons (GCSN) e discutimos alguns dos seus princi-

tais efeitos, dos quais destacamos a quebra da simetria de Lorentz e violação de CPT. Com isso em mente resolvemos verificar se as métricas tipo Gödel é solução da GCSN, para isso verificamos que tais métricas satisfazem a restrição de Pontryagin, exigência necessária, porém não suficiente para ser solução. Em seguida, resolvemos as equações de modificadas e encontramos que o campo de Chern-Simons toma a forma $\phi(z) = b(z - z_0)$, podendo ser expresso em termos do seu gradiente $v_a = [0, 0, 0, b]$. Nesta última forma fica evidente a violação de Lorentz já que o vetor possui uma direção preferencial. Percebemos que tal vetor acopla-se com o vetor de vorticidade, também na direção z , onde definimos uma nova quantidade que batizamos de k . A consequência fundamental desse parâmetro é a produção de um leque de soluções bem maior que na RG, onde esta é recuperada ao tomar $k = 0$. O espectro de soluções encontrado tem uma característica bem peculiar, a solução do vazio correspondendo a $m^2 = \omega^2$ e $k = -1/3$ é um ponto crítico que separa duas regiões com propriedades de causalidade distintas, quais sejam: $k < -1/3$ corresponde às soluções completamente causais, sem CTC's, $m^2 > 4\omega^2$ e $k > -1/3$ corresponde às soluções não causais, com CTC's, $m^2 < 4\omega^2$.

No capítulo 5 trabalhamos na formulação dinâmica da teoria GCSD. O ponto de partida desse capítulo foi motivar o pôrquê de promover o campo de Chern-Simons à um campo dinâmico. Feito isso obtemos as equações modificadas, obviamente, são diferentes do caso não dinâmico. No passo seguinte verificamos que as métricas tipo Gödel são soluções das equações modificadas e a equação de evolução do campo de Chern-Simons nos fornece a mesma forma do campo que no caso não dinâmico. Portanto, pudemos definir o mesmo parâmetro de acoplamento k que na formulação não dinâmica. No entanto, encontramos um agravante nas equações modificadas no caso dinâmico que foi a presença do tensor energia-momento do campo de Chern-Simons tal complicou bastante as equações e as soluções só foram obtidas graças ao software *maple* de computação algébrica. A solução do vazio que encontramos para o caso dinâmico é semelhante ao caso não dinâmico com a diferença que haverá termo de correção de segunda ordem do parâmetro de violação de Lorentz, ou seja, b^2 . A estrutura geral das soluções em relação às propriedades de causalidade em função do parâmetro k é idêntica ao caso não dinâmico. Entendemos que essa persistência dessa propriedade é uma consequência das características topológicas da teoria.

Por fim, no capítulo 6 verificamos a consistência das métricas tipo Gödel na teoria

de Brans-Dicke com constante cosmológica. Consideramos dois casos para o campo de BD: o primeiro na forma $\varphi = \varphi(t)$ neste caso verificamos que as equações de campo apenas são satisfeitas para φ igual à uma constante, portanto a solução obtida é trivial e se a RG. O outro caso é bem mais interessante e corresponde a $\varphi = \varphi(z)$ nessa situação mostramos três casos que se destacam: o primeiro deles é a solução do vazio que implica em $m^2 = 4\omega^2$ e necessariamente com constante cosmológica não nula. Além disso, verificamos que no limite $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$ a solução se reduz a RG com um campo escalar não massivo, com algumas implicações para a constante cosmológica.

Apêndice A

Cálculo da Anomalia Gravitacional

Como já discutimos, anomalia ocorre quando uma lei de conservação clássica não se mantém à nível quântico, por outro lado, na literatura matemática anomalia é quando uma simetria global ou local é quebrada. Nesse apêndice mostraremos que ocorre anomalia gravitacional para a corrente quirial ($J^{\mu 5}$). Vamos considerar o funcional gerador no espaço Euclidiano (no final dos cálculos basta retirar o $-i$ e voltar ao espaço Lorentziano), portanto

$$Z[e_\mu^a] = e^{-\Gamma[\bar{\psi}, \psi, e_\mu^a]} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_m[\bar{\psi}, \psi, e_\mu^a]} \quad (\text{A.1})$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int d^4x e \bar{\psi} i \not{D} \psi \right), \quad (\text{A.2})$$

onde $\Gamma[\bar{\psi}, \psi, e_\mu^a]$ é a ação quântica e $\not{D} \equiv \gamma^\mu \nabla_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu)$, com Γ_μ definido por (2.32). É óbvio que a ação anterior é invariante por transformações globais quirais, ou seja,

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\alpha\gamma_5} \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

O próximo passo é verificar se a ação é invariante por transformações quirais locais, assim vamos definir um conjunto completo de autofunções do operador de Dirac ($i\not{D}$)

$$i\not{D}\phi_n = \lambda_n \phi_n, \quad \int d^4x e \phi_n^\dagger \phi_m = \delta_{nm} \quad (\text{A.4})$$

deste modo podemos expandir os espinores de Dirac em termos das autofunções

$$\bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{b}_n \phi_n^\dagger(x), \quad \psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x), \quad (\text{A.5})$$

onde a_n e $\bar{b}_n$ são variáveis Grassmanianas. A medida da integral de trajetória é definida por

$$\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_n d\bar{b}_n da_n, \quad (\text{A.6})$$

substituindo (A.4,A.5,A.6) no funcional gerador, obtemos

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int d^4x e \bar{\psi} i \not{D} \psi \right) = \int \prod_n d\bar{b}_n da_n \exp \left(- \lambda_n \bar{b}_n a_n \right). \quad (\text{A.7})$$

Realizando as transformações quirais locais e tomando o parâmetro $\alpha(x)$ pequeno,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi(x)' = e^{i\alpha(x)\gamma_5} \psi(x) = \psi(x) + i\alpha(x)\gamma_5 \psi(x) = \sum_n a'_n \phi_n(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)' = \bar{\psi}(x) e^{i\alpha(x)\gamma_5} = \bar{\psi}(x) + i\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5 = \sum_n b'_n \phi_n^\dagger(x), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

a ação torna-se

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}'\psi \exp(-S_m[\bar{\psi}', \psi', e_\mu^a]) &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(-S_m[\bar{\psi}, \psi, e_\mu^a]) \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi J(\alpha) \exp(-S_m[\bar{\psi}, \psi, e_\mu^a]) + \int d^4x e \alpha(x) \nabla_\mu J^{\mu 5}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde na primeira linha trocamos as variáveis de integração, já na segunda linha (A.9). O jacobiano $J(\alpha)$ surge da transformação (A.8), isto é,

$$\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_n d\bar{b}_n da_n = \prod_n d\bar{b}'_n da'_n \det^{-2}(J_k^i), \quad (\text{A.10})$$

onde

$$J_k^i = \int d^4x e [\phi^i(x)]^\dagger (1 - i\alpha\gamma_5) \phi_k(x) = \delta_k^i - i \int d^4x e \alpha(x) [\phi^i(x)]^\dagger \gamma_5 \phi_k(x), \quad (\text{A.11})$$

assim,

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \det^{-2}(J_k^i) = \exp \left[-2Tr \left(\delta_k^i - i \int d^4x e \alpha(x) [\phi^i(x)]^\dagger \gamma_5 \phi_k(x) \right) \right] \\ &= \exp \left[2iTr \left(\int d^4x e \alpha(x) [\phi^i(x)]^\dagger \gamma_5 \phi_k(x) \right) \right] \\ &= \exp \left[2i \int d^4x e \alpha(x) \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

desprezamos o primeiro termo pois é uma constante e consideraremos apenas termos de primeira ordem em $\alpha(x)$. Vamos agora considerar os operadores projeções (P_+ e P_-) para os sub-espços quirais ($\mathcal{H}_+$ e $\mathcal{H}_-$), isto é,

$$\begin{aligned} P_+ \psi &= \psi_+, \quad \text{com} \quad P_+ = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \\ P_- \psi &= \psi_-, \quad \text{com} \quad P_- = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

projeta os espinores para seus sub-espacos quirais de m3o direito ($\mathcal{H}_+$) e esquerda ($\mathcal{H}_-$), respectivamente. Al3m disso, a matriz γ_5 ao atuar sobre as autofun33es ϕ_n invertem os autovalores do operador de Dirac, em outras palavras,

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}(\gamma_5\phi_n) &= -\lambda_n(\gamma_5\phi_n), \\ i\mathcal{D}(-\gamma_5\phi_n) &= \lambda_n(\gamma_5\phi_n). \end{aligned} \tag{A.14}$$

Os modos zeros ($\lambda_n = 0$) s3o topologicamente “protegidos” dessa mudan3a de quiralidade na atua33o da matriz γ_5 . Substituindo (A.12) em (A.9), obtemos

$$\langle \nabla_\mu J^{\mu 5} \rangle = 2i\mathcal{A}_5 \tag{A.15}$$

onde

$$\mathcal{A}_5 = \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x), \tag{A.16}$$

3e claro que n3o temos controle sobre a soma acima, portanto 3e necess3rio regulariz3-la ent3o vamos usar o cut-off $e^{-\lambda_n^2/M^2}$ onde M 3e uma escala grande, assim

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_5 &= \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) e^{-\lambda_n^2/M^2} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-i\mathcal{D}^2/M^2} \phi_n(x) \\ &= \langle x | Tr(\gamma_5 e^{-i\mathcal{D}^2/M^2}) | x \rangle, \end{aligned} \tag{A.17}$$

apenas a diferen3a entre os modos zeros contribuem para essa soma, dessa forma temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_5 &= Tr(\gamma_5 e^{-i\mathcal{D}^2/M^2}) \\ &= (n_+ - n_-) = \text{ind}(\mathcal{D}), \end{aligned} \tag{A.18}$$

onde n_+ e n_- s3o o n3mero de modos zeros de quiralidade de m3o direita e esquerdam, respectivamente. O $\text{ind}(\mathcal{D})$ 3e o 3ndice do operador de Dirac que 3e igual ao *genus* de Dirac ($\hat{A}(\mathcal{M})$), assim a anomalia 3e

$$\langle \nabla_\mu J^{\mu 5} \rangle = 2i\hat{A}(\mathcal{M}_4), \tag{A.19}$$

o genus de Dirac em quatro dimen33es 3e definido por $\hat{A}(\mathcal{M}_4) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} Tr(R \wedge R)$ (para a defini33o geral em uma dimens3o arbitr3ria veja [45]), assim

$$\langle \nabla_\mu J^{\mu 5} \rangle = -i \frac{1}{384\pi^2} \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\sigma_{\tau\mu\nu} R^\tau_{\sigma\alpha\beta}, \tag{A.20}$$

eliminando $-i$ obtemos o resultado v3lido para espa3os Lorentzianos.

Apêndice B

Obtenção do Tensor de Cotton

O tensor de Cotton é obtido variando o termo de Pontryagin da ação de Chern-Simons com respeito à métrica, vejamos abaixo

$$\begin{aligned}\delta S_{CS} &= \frac{1}{4} \delta \left(\int d^4x \sqrt{-g} \phi^* R R \right) = \int d^4x \sqrt{-g} C^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4} \int d^4x \phi \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\sigma_{\tau\mu\nu} \delta(R^\tau_{\sigma\alpha\beta}),\end{aligned}\tag{B.1}$$

usando a identidade de Palatini, $\delta(R^\tau_{\sigma\alpha\beta}) = \nabla_\alpha \delta\Gamma^\tau_{\sigma\beta} - \nabla_\beta \delta\Gamma^\tau_{\sigma\alpha}$, temos

$$\delta S_{CS} = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} R^\sigma_{\tau\mu\nu} \nabla_\alpha \delta\Gamma^\tau_{\sigma\beta},\tag{B.2}$$

integrando por partes

$$\delta S_{CS} = -\frac{1}{2} \int d^4x \left[\nabla_\alpha (\sqrt{-g} \phi \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} R^\sigma_{\tau\mu\nu} \delta\Gamma^\tau_{\sigma\beta}) - \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (v_\alpha R^\sigma_{\tau\mu\nu} + \phi \nabla_\alpha R^\sigma_{\tau\mu\nu}) \delta\Gamma^\tau_{\sigma\beta} \right],\tag{B.3}$$

o primeiro termo trata-se de uma derivada covariante de uma densidade tensorial $J^\alpha = \phi \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\sigma_{\tau\mu\nu} \delta\Gamma^\tau_{\sigma\beta}$, ou seja,

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha (\sqrt{-g} J^\alpha) &= \partial_\alpha (\sqrt{-g} J^\alpha) + \sqrt{-g} J^\lambda (\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} - \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha}) \\ &= \partial_\alpha (\sqrt{-g} J^\alpha),\end{aligned}\tag{B.4}$$

na geometria Riemanniana $\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} = \partial_\alpha \ln \sqrt{-g}$, como consequência o primeiro termo se reduz à um termo de contorno em (B.3). Por razões distintas da anterior, o terceiro termo de (B.3) também é identicamente nulo devido à identidade de Bianchi ($\nabla_{[\alpha} R^\sigma_{\tau|\mu\nu]} = 0$). Todavia, B.3 se reduz à apenas um termo

$$\delta S_{CS} = \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} v_\alpha R^\sigma_{\tau\mu\nu} \delta\Gamma^\tau_{\sigma\beta},\tag{B.5}$$

a variação da conexão é escrita em termos da métrica

$$\delta\Gamma_{\sigma\beta}^{\tau} = \frac{1}{2}g^{\tau\lambda}(-\nabla_{\lambda}\delta g_{\sigma\beta} + \nabla_{\sigma}\delta g_{\beta\lambda} + \nabla_{\beta}\delta g_{\lambda\sigma}), \quad (\text{B.6})$$

substituindo na variação da ação, ficamos

$$\delta S_{CS} = \frac{1}{4} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} v_{\alpha} R^{\sigma\lambda}_{\mu\nu} (-\nabla_{\lambda}\delta g_{\sigma\beta} + \nabla_{\sigma}\delta g_{\beta\lambda} + \nabla_{\beta}\delta g_{\lambda\sigma}), \quad (\text{B.7})$$

note que o último termo é simétrico nos índices (λ, σ) não contribui pois está contraído com o tensor de Riemann antissimétrico nos índices $[\lambda, \sigma]$. Executando essa simplificação

$$\delta S_{CS} = \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} v_{\alpha} R^{\sigma\lambda}_{\mu\nu} \nabla_{\sigma}\delta g_{\beta\lambda}. \quad (\text{B.8})$$

Integrando por partes e jogando fora o termo de contorno semelhantemente como feito anteriormente ficamos com

$$\delta S_{CS} = -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (v_{\alpha} \nabla_{\sigma} R^{\sigma\lambda}_{\mu\nu} + v_{\sigma\alpha} R^{\sigma\lambda}_{\mu\nu}) \delta g_{\beta\lambda}, \quad (\text{B.9})$$

podemos usar a identidade de Bianchi $\nabla_{\sigma} R^{\sigma\lambda}_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} R^{\lambda}_{\nu} - \nabla_{\nu} R^{\lambda}_{\mu}$ para simplificar a equação anterior, além disso o segundo termo pode ser expresso em termos do tensor de Riemann dual, desta forma obtemos

$$\delta S_{CS} = - \int d^4x \sqrt{-g} (v_{\alpha} \epsilon^{\beta\alpha\mu\nu} \nabla_{\mu} R^{\lambda}_{\nu} + v_{\sigma\alpha} {}^*R^{\sigma\lambda\beta\alpha}) \delta g_{\beta\lambda}, \quad (\text{B.10})$$

simetrizando os índices (β, λ) , temos

$$\delta S_{CS} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (v_{\alpha} \epsilon^{\beta\alpha\mu\nu} \nabla_{\mu} R^{\lambda}_{\nu} + v_{\alpha} \epsilon^{\lambda\alpha\mu\nu} \nabla_{\mu} R^{\beta}_{\nu} + v_{\sigma\alpha} {}^*R^{\sigma\lambda\beta\alpha} + v_{\sigma\alpha} {}^*R^{\sigma\beta\lambda\alpha}) \delta g_{\beta\lambda}, \quad (\text{B.11})$$

comparando com (B.1) obtemos a fórmula definida por (4.30).

Já para mostrar a expressão do tensor de Cotton na base de tetradas devemos usar

$$\begin{aligned} C^{ab} &= e_{\mu}^a e_{\nu}^b C^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} e_{\mu}^a e_{\nu}^b \left\{ v_c \epsilon^{\mu c d e} \nabla_d R_e^{\nu} + v_{cd} {}^*R^{c\nu\mu d} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ e_{\nu}^b v_c \epsilon^{acde} \nabla_d (R_e^f e_f^{\nu}) + e_{\nu}^b e_f^{\nu} v_c \epsilon^{acd\beta} R_e^f \nabla_d e_{\beta}^e + v_{cd} {}^*R^{cbad} + (a \leftrightarrow b) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ v_c \epsilon^{acde} \nabla_d R_e^b + v_c \epsilon^{acde} R_e^f e_{\nu}^b \nabla_d e_f^{\nu} + v_c \epsilon^{acd\beta} R_e^b \nabla_d e_{\beta}^e + v_{cd} {}^*R^{cbad} + (a \leftrightarrow b) \right\} \\ C^{ab} &= -\frac{1}{2} \left\{ v_c \epsilon^{acde} \nabla_d R_e^b + v_c \epsilon^{acde} R_e^f \omega_{fd}^b - v_c \epsilon^{acdf} R_e^b \omega_{fd}^e + v_{cd} {}^*R^{cbad} + (a \leftrightarrow b) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

o que conclui a demonstração.

Apêndice C

Cálculo da Densidade de Pontryagin para Métricas Tipo-Gödel

Para obter explicitamente a densidade de Pontryagin devemos encontrar as conexões de spin para as métricas tipo Gödel. Primeiro vamos identificar as tetradas das métricas tipo Gödel na base (4.48)

$$\begin{aligned}e_0^{(0)} &= 1, \\e_2^{(0)} &= H(r), \\e_1^{(1)} &= 1, \\e_2^{(2)} &= D(r), \\e_3^{(3)} &= 1,\end{aligned}\tag{C.1}$$

as conexões são obtidas da seguinte equação de Cartan

$$de^a = -\omega^a_b \wedge e^b,\tag{C.2}$$

que pode ser reescrita em termos dos coeficientes de não-holonomia, $\Omega^a_{bc} = \frac{1}{2}(\omega^a_{cb} - \omega^a_{bc}) = e^a_\nu \nabla_{[c} e^\nu_{b]}$,

$$de^a = -\Omega^a_{bc} e^c \wedge e^b,\tag{C.3}$$

agora vamos abrir em componentes:

i) para $a = 0$

$$\begin{aligned}de^{(0)} &= -2[\Omega^{(0)}_{(0)(1)} e^{(1)} \wedge e^{(0)} + \Omega^{(0)}_{(0)(2)} e^{(2)} \wedge e^{(0)} + \Omega^{(0)}_{(0)(3)} e^{(3)} \wedge e^{(0)} + \\&\quad + \Omega^{(0)}_{(1)(2)} e^{(2)} \wedge e^{(1)} + \Omega^{(0)}_{(1)(3)} e^{(3)} \wedge e^{(1)} + \Omega^{(0)}_{(2)(3)} e^{(3)} \wedge e^{(2)}],\end{aligned}\tag{C.4}$$

usando (C.1), obtemos

$$de^{(0)} = \frac{1}{D(r)} \frac{dH(r)}{dr} e^{(1)} \wedge e^{(2)}, \quad (C.5)$$

comparando com (C.4), temos

$$\Omega_{(0)(1)}^{(0)} = \Omega_{(0)(2)}^{(0)} = \Omega_{(0)(3)}^{(0)} = \Omega_{(1)(3)}^{(0)} = \Omega_{(2)(3)}^{(0)} = 0, \quad (C.6)$$

e

$$2\Omega_{(1)(2)}^{(0)} = -\frac{1}{D(r)} \frac{dH(r)}{dr}, \quad (C.7)$$

usando a definição dos coeficientes de não-holonomia reduzimos as equações (C.6) e (C.7)

no seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \omega_{(1)(0)}^{(0)} = \omega_{(2)(0)}^{(0)} = \omega_{(3)(0)}^{(0)} = 0 \\ \omega_{(1)(3)}^{(0)} - \omega_{(3)(1)}^{(0)} = 0 \\ \omega_{(2)(3)}^{(0)} - \omega_{(3)(2)}^{(0)} = 0 \\ \omega_{(1)(2)}^{(0)} - \omega_{(2)(1)}^{(0)} = -\frac{1}{D(r)} \frac{dH(r)}{dr}, \end{cases} \quad (C.8)$$

guardando essa equação vamos obter as outras componentes da equação de Cartan.

ii) $a = 1$

$$\begin{aligned} de^{(1)} = 0 = & -2[\Omega_{(0)(1)}^{(1)} e^{(1)} \wedge e^{(0)} + \Omega_{(0)(2)}^{(1)} e^{(2)} \wedge e^{(0)} + \Omega_{(0)(3)}^{(1)} e^{(3)} \wedge e^{(0)} + \\ & + \Omega_{(1)(2)}^{(1)} e^{(2)} \wedge e^{(1)} + \Omega_{(1)(3)}^{(1)} e^{(3)} \wedge e^{(1)} + \Omega_{(2)(3)}^{(1)} e^{(3)} \wedge e^{(2)}], \end{aligned} \quad (C.9)$$

reduzimos ao seguinte sistema

$$\begin{cases} \omega_{(0)(1)}^{(1)} = \omega_{(2)(1)}^{(1)} = \omega_{(3)(1)}^{(1)} \\ \omega_{(0)(2)}^{(1)} - \omega_{(2)(0)}^{(1)} = 0 \\ \omega_{(0)(3)}^{(1)} - \omega_{(3)(0)}^{(1)} = 0 \\ \omega_{(2)(3)}^{(1)} - \omega_{(3)(2)}^{(1)} = 0, \end{cases} \quad (C.10)$$

usando do mesmo expediente para as componentes $a = 2$ e $a = 3$ da equação de Cartan encontramos os seguintes sistemas, respectivamente

$$\begin{cases} \omega_{(0)(2)}^{(2)} = \omega_{(3)(2)}^{(2)} = 0 \\ \omega_{(0)(1)}^{(2)} - \omega_{(1)(0)}^{(2)} = 0 \\ \omega_{(0)(3)}^{(2)} - \omega_{(3)(0)}^{(2)} = 0 \\ \omega_{(1)(3)}^{(2)} - \omega_{(3)(1)}^{(2)} = 0 \\ \omega_{(1)(2)}^{(2)} = \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \end{cases} \quad (C.11)$$

$$\begin{cases} \omega_{(0)(1)}^{(3)} = \omega_{(0)(3)}^{(3)} = \omega_{(2)(3)}^{(3)} = 0 \\ \omega_{(0)(1)}^{(3)} - \omega_{(1)(0)}^{(3)} = 0 \\ \omega_{(0)(2)}^{(3)} - \omega_{(2)(0)}^{(3)} = 0 \\ \omega_{(1)(2)}^{(3)} - \omega_{(2)(1)}^{(3)} = 0. \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

Resolvendo os sistemas de equações (C.8, C.10-C.12) encontra-se as conexões de spin cujas não nulas são:

$$\begin{aligned} \omega_{(1)(2)}^{(0)} &= -\omega_{(2)(1)}^{(0)} = \omega_{(0)(2)}^{(1)} = -\omega_{(0)(1)}^{(2)} = \omega_{(2)(0)}^{(1)} = -\omega_{(1)(0)}^{(2)} = -\frac{1}{2D(r)} \frac{dH(r)}{dr} = -\omega, \\ \omega_{(1)(2)}^{(2)} &= -\omega_{(2)(1)}^{(1)} = \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

que identificamos as conexões 1-forma

$$\omega_{(1)}^{(0)} = -\omega D(r) d\theta, \quad \omega_{(2)}^{(1)} = -\omega dt - \frac{dD(r)}{dr} d\theta, \quad \omega_{(2)}^{(0)} = \omega dr, \quad (\text{C.14})$$

enquanto que suas derivadas são

$$d\omega_{(1)}^{(0)} = -\omega \frac{dD(r)}{dr} dr \wedge d\theta, \quad d\omega_{(2)}^{(1)} = -\frac{d^2 D(r)}{dr^2} dr \wedge d\theta, \quad d\omega_{(2)}^{(0)} = 0. \quad (\text{C.15})$$

Agora com essas informações podemos calcular a 4-forma de Pontryagin (4.7, 4.8) explicitamente, ou seja,

$$Tr(R \wedge R) = R^a_b \wedge R^b_a = d\Omega_3(\omega) = d\left(\omega^a_b \wedge d\omega^b_a + \frac{2}{3}\omega^a_b \wedge \omega^b_c \wedge \omega^c_a\right) \equiv d\left[Tr\left(\omega \wedge d\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega\right)\right], \quad (\text{C.16})$$

primeiro vamos abrir a forma de Chern-Simons em termos das componentes não nulas, assim ficamos com

$$\begin{aligned} \Omega_3(\omega) &= \omega_{(1)}^{(0)} \wedge d\omega_{(0)}^{(1)} + \frac{2}{3}\omega_{(1)}^{(0)} \wedge \omega_{(2)}^{(1)} \wedge \omega_{(0)}^{(2)} + \\ &\quad + \omega_{(2)}^{(0)} \wedge d\omega_{(0)}^{(2)} + \frac{2}{3}\omega_{(2)}^{(0)} \wedge \omega_{(1)}^{(2)} \wedge \omega_{(0)}^{(1)} + \\ &\quad + \omega_{(2)}^{(1)} \wedge d\omega_{(1)}^{(2)} + \frac{2}{3}\omega_{(2)}^{(1)} \wedge \omega_{(0)}^{(2)} \wedge \omega_{(1)}^{(0)} \\ &= \left(-\omega \frac{d^2 D(r)}{dr^2} + \omega^3 D(r)\right) dt \wedge dr \wedge d\theta, \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

tomando a derivada exterior pode-se facilmente verificar

$$\begin{aligned} Tr(R \wedge R) &= d\Omega_3(\omega) = \frac{d}{dz} \left(-\omega \frac{d^2 D(r)}{dr^2} + \omega^3 D(r)\right) dz \wedge dt \wedge dr \wedge d\theta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Referências Bibliográficas

- [1] G.'t Hooft and M. J. G. Veltman, *One loop divergencies in the theory of gravitation*, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A20, 1974.
- [2] S. Pireaux and J. Rozelot. Solar quadrupole moment and purely relativistic gravitation contributions to Mercury's perihelion advance. Ap and SS, 284, 2003, arXiv:astro-ph/0109032.
- [3] B. P. Abbott and *et. al.*, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. 116, 2016.
- [4] B. P. Abbott and *et. al.* ,*GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. 116, 2016.
- [5] B. P. Abbott and *et. al.* , *Binary Black Hole Mergers in the first Advanced LIGO Observing Run*, Phys. Rev. X6, 2016
- [6] A. G. Riess and *et. al.*, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Supernova Search Team, Astron. J. 116, 1998.
- [7] A. G. Riess, et al., *Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution*, Supernova Search Team, Astron. J. 607, 2004.
- [8] S. Perlmutter, et al., *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, Supernova Search Team, Astron. J. 517, 1999.
- [9] P. B. Schmidt, et al., *The High Z supernova search: Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type Ia supernovae*, Supernova Search Team, Astron. J. 507, 1998.

- [10] P. J. Steinhardt, L. M. Wang and I. Zlatev, *Cosmological tracking solutions*, Phys. Rev. D59, 1999.
- [11] M. Persic, P. Salucci and F. Stel, *The Universal rotation curve of spiral galaxies: 1. The Dark matter connection*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 281, 1996.
- [12] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, *Modified Gravity and Cosmology*, Phys. Rept. 513, 2012.
- [13] S. H.-S. Alexander, M. E. Peskin and M. M. Sheikh-Jabbari, *Leptogenesis from gravity waves in models of inflation*, Phys. Rev. Lett. 96, 2006. arXiv:hep-th/0403069
- [14] S. Alexander and J. Martin, *Birefringent gravitational waves and the consistency check of inflation*, Phys. Rev. D71, 2005. arXiv:hep-th/0410230.
- [15] S. H. S. Alexander, *Is cosmic parity violation responsible for the anomalies in the WMAP data?*, arXiv:hep-th/0601034.
- [16] S. H.-S. Alexander, M. E. Peskin and M. M. Sheikh-Jabbari, *Gravileptogenesis: Leptogenesis from gravity waves in pseudo-scalar driven inflation models*, arXiv:hep-ph/0701139.
- [17] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov *On the Anomalous Electroweak Baryon Number Nonconservation in the Early Universe*, Phys. Lett. B155, 1985.
- [18] M. Fukugita and T. Yanagida, *Baryogenesis Without Grand Unification*, Phys. Lett. B174, 1986.
- [19] A. D. Sakharov, *Violation of CP Invariance, C Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe*, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 5, 1967.
- [20] J. Barrow and M. Dabrowski, *Gödel universes in string theory*, Phys. Rev. D 58, 1998, gr-qc/9803048; P. Kanti and C. E. Vayonakis, *Gödel type universes in string inspired charged gravity*, Phys. Rev. D 60, 1999, gr-qc/9905032.
- [21] K.E. Boyda, S. Ganguli, P. Horava and U. Varadarajan, *Holographic protection of chronology in universes of the Gödel type*, Phys. Rev. D67, 2003; D. Brecher, P. A.

- DeBoer and D. C. Page and M. Rozali, *Closed time - like curves and holography in compact plane waves*, JHEP 10, 2003; D. Brecher, H. Ulf Danielsson, J. P. Gregory and M. E. Olsson, *Rotating black holes in a Gödel universe*, JHEP 11, 2003; P. Klepac, *Holography in Gödel-type spacetimes and their generalizations*, J. Phys. Conf. Ser. 33, 2006.
- [22] Robert M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984.
- [23] I. Ciufolini and J.A. Wheller, *Gravitation and inertial*, Princeton University Press, 1995.
- [24] C.J. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicists*, World Scientific Lectures Notes in Physics, Vol.61, 1999.
- [25] H. Eschrig, *Topology and geometry for physics*, Lect. Notes Phys., Vol.822, 2011.
- [26] G.J. Olmo, *Introduction to Palatini theories of gravity and nonsingular cosmologies*, arXiv:gr-qc/1212.6393.
- [27] E. Cartan, *Riemannian geometry in an orthogonal frame*, World Scientific Publishing Company, 2001.
- [28] G.J. Olmo, *Palatini Approach to Modified Gravity: $f(R)$ Theories and Beyond*, Int. J. Mod. Phys. D20 (2011) 413-462, arXiv:gr-qc/1101.3864; F. W. Hehl, J. M. Dermott, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, *Metric affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance*, Phys. Rept. 258 (1995), 1-171, arXiv:gr-qc/9402012.
- [29] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity* San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004).
- [30] M. Carmeli and S. Malin, *Theory of spinors: an introduction*, World Scientific Publishing Company, 2000.
- [31] J. Zanelli, *Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities*, edition (February 2008), arXiv:hep-th/0502193; J. Zanelli, *Chern-Simons Forms in Gravitation Theories*, Class. Quant. Grav. 29 (2012), arXiv:hep-th/1208.3353.

- [32] C. W. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [33] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21**, 447 (1949).
- [34] W. J. Van Stockum, Proc. R. Soc. Edinburgh A57, 135 (1937).
- [35] F. S. N. Lobo, *Closed timelike curves and causality violation*, arXiv:1008.1127 [arXiv] [gr-qc].
- [36] J. Friedman, M. S. Morris, I. D. Novikov, F. Echeverria, G. Klinkhammer and K. S. Thorne and U. Yurtsever, *Cauchy problem in space-times with closed timelike curves*, Phys. Rev. D42, 1990.
- [37] S. W. Hawking, *The Chronology protection conjecture*, Phys. Rev. D46, 1992.
- [38] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 2011.
- [39] S. Chandrasekhar and J.P. Wright, *The Geodesics in Gödel's Universe*, Proc. Nat. Acad. Sci. **47**, 341 (1961).
Read More: <http://www.worldscientific.com/doi/ref/10.1142/S0218271816300172>.
- [40] A. Barnerjee and S. Barnerji, *Stationary distributions of dust and electromagnetic fields in general relativity*, J. Phys. A 1, 188, (1968).
- [41] A. K. Raychaudhuri and S. N. G. Thakurta, *Homogeneous space-times of the Godel type*, Phys. Rev.D22, 1980.
- [42] M.J. Rebouças and J. Tiomno, *On the Homogeneity of Riemannian Space-Times of Godel Type*, Phys. Rev.D28, 1983; M.J. Rebouças and J. E. Aman, *Computer Aided Study of a Class of Riemannian Space-times*, J. Math. Phys. 28, 1987.
- [43] A. F. F. Teixeira, M. J. Rebouças, J. E. Aman, *Isometries of Homogeneous Godel-type space-times*, Phys. Rev. D32, 3309 (1985), J. Math. Phys. 27, 1370 (1986); M. O. Calvao, M. Rebouças, A. F. F. Teixeira, W. M. Silva, *Notes on a Class of Homogeneous Space-times*, J. Math. Phys. 29, 1127 (1989); M. O. Calvao, I. D.

- Soares, J. Tiomno, *Geodesics in Godel-type space-times*, Gen. Rel. Grav. 22, 683 (1990); H. L. Carrion, M. Rebouças, A. F. F. Teixeira, *Godel - type space-times in induced matter gravity theory*, J. Math. Phys. 40, 4011 (1999), gr-qc/9904074.
- [44] S.S. Chern and J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, Annals Math. 99, 1974.
- [45] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1982.
- [46] B. A. Campbell, J.M. Duncan, N. Kaloper and K. A. Olive, *Gravitational dynamics with Lorentz Chern-Simons terms*, Nucl. Phys. B 351, 1991.
- [47] R. Jackiw, *S. S. Chern and Chern-Simons terms*, Differential geometry and physics. Proceedings, 23rd International Conference, Tianjin, China, August 20-26, 2005.
- [48] S. L. Adler, *Axial vector vertex in spinor electrodynamics*, Phys. Rev. 177, 1969.
- [49] J. S. Bell and R. Jackiw, *A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model*, Nuovo Cim. A60, 1969.
- [50] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*, Cambridge University Press., 2013.
- [51] L. Alvarez-Gaume and E. Witten, *Gravitational Anomalies*, Nucl. Phys. B 234, 1984.
- [52] C. Nash and S. Sen, *Topology and geometry for physicists*, London, Uk: Academic (1983) 311p.
- [53] A. Achucarro and P. Townsend, *A Chern-Simons Action for Three-Dimensional anti-De Sitter Supergravity Theories*, Phys.Lett. B180, 1986.
- [54] E. Witten, *(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System*, Nucl.Phys. B311, 1988.
- [55] R. Jackiw and S.-Y.Pi, *Chern-Simons modification of general relativity*, Phys. Rev. D 68, 2003.
- [56] S. Deser, R. Jackiw, R. and S. Templeton, *Topologically Massive Gauge Theories*, Annals Phys. 140, 1982.

- [57] S. Deser, R. Jackiw, R. and S. Templeton, *Three-Dimensional Massive Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. 48, 1982; S. Deser, R. Jackiw, R. and G.'T Hooft, *Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space*, Annals Phys. 152, 1984.
- [58] R. T. Jantzen, P. Carini and D. Bini, *The Many faces of gravitoelectromagnetism*, Annals Phys.215, 1992.
- [59] T. L. Smith, A. L. Erickcek, R. R. Caldwell and M. Kamionkowski, *The effects of Chern-Simons gravity on bodies orbiting the Earth*, Phys. Rev. D77, 2008.
- [60] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- [61] S. H. S. Alexander and S. J. Gates Jr., *Can the string scale be related to the cosmic baryon asymmetry?*, JCAP 0606, 018, 2006, arXiv:hep-th/0409014.
- [62] V. Taveras and N. Yunes, *The Barbero-Immirzi Parameter as a Scalar Field: K-Inflation from Loop Quantum Gravity?*, Phys. Rev. D78, 2008, arXiv:hep-th/0807.2652.
- [63] S. Mercuri and V. Taveras, arXiv:hep-th/0903.4407.
- [64] N. Yunes and F. Pretorius, *Chern-Simons Modified General Relativity*, Phys. Rep. 480, 2009.
- [65] S. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, *Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics*, Phys. Rev. D41, 1990.
- [66] D. Colladay and A. Kostelecky, *Lorentz violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D58, 1998.
- [67] T. Jacobson and D. Mattingly, *Gravity with a dynamical preferred frame*, Phys. Rev.D64, 2001.
- [68] S. Carroll and A. Eugene, *Lorentz-violating vector fields slow the universe down*, Phys. Rev.D70, 2004.
- [69] T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos, R. F. Ribeiro, *Chern-Simons-like action induced radiatively in general relativity*, Phys. Rev. D70, 2004; arXiv:hep-th/0403205.

- [70] C. Romero and A. Barros, *Does Brans-Dicke theory of gravity go over to the general relativity when $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$?*, Phys. Lett. A173, 1993.
- [71] V. Faraoni, *Illusions of general relativity in Brans-Dicke gravity*, Phys. Rev.D59, 1999.
- [72] S. Capozziello and M. De Laurentis, *Extended Theories of Gravity*, Phys. Rept. 509, 2011.
- [73] B. Bertotti, L. Iess and P. Tortora, *A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft*, Nature 425, 2003.
- [74] W. H. Lee, Y. K. Kim and Y. S. Myung, *Equations of State in the Brans-Dicke cosmology*, Eur. Phys. J. C71, 2011.
- [75] M. N. Smolyakov, *A small cosmological constant from the modified Brans-Dicke theory - an interplay between different energy scales*, arXiv:gr-qc/0711.3811v2.
- [76] H. Kim, *Can the Brans-Dicke Gravity with Λ Possibly be a Theory of Dark Matter?*, J. Korean Phys. Soc. 51, 2007.
- [77] B. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. 125, 1962.
- [78] T. Clifton, D. F. Mota, and J. D. Barrow, *Inhomogeneous gravity*. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2005, arXiv:gr-qc/0406001.
- [79] H. Maeda and G. Giribet, *Lifshitz black holes in Brans-Dicke theory*, JHEP 11, 2011.
- [80] K. Uehara and C.W. Kim, *Brans-dicke Cosmology With the Cosmological Constant*, Phys. Rev. D26, 1982.
- [81] S. Carneiro and A. E. Montenegro Jr., *Exact solutions of Brans-Dicke cosmology and the cosmic coincidence problem*, Braz. J. Phys. 35, 2005.
- [82] V. Faraoni, *Cosmology in scalar tensor gravity*, ISBN-1-4020-1988-2, 2004.