Universidade Federal da Paraiba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Tese de Doutorado

Teoria escalar-tensorial: Uma abordagem geométrica

Tony Silva Almeida

João Pessoa, Dezembro de 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Tese de Doutorado

Teoria escalar-tensorial: Uma abordagem geométrica

Tony Silva Almeida

Tese submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Dr. Carlos Augusto Romero Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

João Pessoa, Dezembro de 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
doutorado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 29 de julho de 2014, Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA COM DISTINÇÃO **Tony Silva Almeida** na defesa de sua tese intitulada ***"****Teoria escalar-tensorial da gravitação: uma abordagem geométrica****".***

João Pessoa, 29 de julho de 2014

Orientador:
Carlos Augusto Romero Filho
Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
(DF/UFPB)

1º Examinador:
Prof. Dr. Fábio Dahia
(UFPB)

2º Examinador:
Prof. Dr. Francisco Brito
(UFCG)

3º Examinador:
Prof. Dr. José Roberto Soares Nascimento
(UFPB)

4º Examinador:
Prof. Dr. Júlio Fabris
(UFES)

A447g Almeida, Tony Silva.
Teoria escalar-tensorial: Uma abordagem geométrica / Tony Silva Almeida.-- João Pessoa, 2016.
59f.
Orientador: Carlos Augusto Romero Filho
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Teoria de Brans-Dicke. 3. Geometria de Weyl. 4. Buraco de minhoca. 5. Gravitação em (2+1).

UFPB/BC CDU: 53(043)

Sumário

Resumo

Esta tese trata de tópicos relacionados às teorias escalares-tensoriais e a geometria de Weyl integrável. Nossa abordagem será no sentido de indicar a geometria de Weyl integrável como sendo um ambiente natural para a introdução de teorias escalares-tensorias. Nossa discussão será em torno da teoria de Brans-Dicke, considerada o protótipo das teorias escalares tensoriais, no entanto a discussão é facilmente estendida para essas versões mais gerais. Fazemos isso em dois momentos. Primeiro, indicando, no âmbito da teoria de Brans-Dicke, que na estrutura geométrica e de campos adotadas pela teoria existe uma relação estreita com a geometria de Weyl, inclusive associando o efeito descrito na literatura como "quinta força"(que violaria o princípio de equivalência) com o movimento geodésico da geometria de Weyl integrável, reformulando o *postulado geodésico*. E, num segundo momento, usando o método variacional de Palatini, acabamos por formular uma nova teoria escalar-tensorial, agora com ingredientes completamente geométricos, ambientada numa geometria de Weyl integrável. Estudamos ainda soluções no vazio do problema estático de uma distribuição de massa esfericamente simétrica, onde surgem objetos de interesse astrofísico como *singularidades nuas* e *buracos de minhoca*. Também formulamos a teoria conhecida por $WIST$ (Weyl Integrable Spacetimes) em $(2+1)D$, o que resulta numa teoria consistente, não sofrendo das falhas associadas à teoria da relatividade geral nessa dimensionalidade.

Palavras-chave: Teoria escalar-tensor, teoria de Brans-Dicke, geometria de Weyl, singularidade nua, buraco de minhoca, gravitação em $(2+1)D$.

Abstract

In this cool thesis, we consider an approach to Brans-Dicke theory of gravity in which the scalar field has a geometrical nature. By postulating the Palatini variation, we find out that the role played by the scalar field consists in turning the space-time geometry into a Weyl integrable manifold. This procedure leads to a scalar-tensor theory that differs from the original Brans-Dicke theory in many aspects and presents some new features. We also consider the Weyl integrable geometry to investigate gravity in (2+1)-dimensions. We show that, in addition to leading to a Newtonian limit, WIST in (2+1) dimensions presents some interesting properties that are not shared by Einstein theory, such as geodesic deviation between particles in a dust distribution. Finally, taking advantage of the duality between the geometrical scalar-tensor theory and general relativity coupled with a massless scalar field we study naked singularities and wormholes.

Keywords: Scalar-tensor theories, Brans-Dicke theory, Weyl integrable geometry, naked singularity, wormhole, (2+1) gravity.

Introdução

Esta teselia trata de tópicos relacionados às teorias escalares-tensoriais e a geometria de Weyl integrável. Nossa abordagem será no sentido de indicar a geometria de Weyl integrável como sendo um ambiente natural para a introdução de teorias escalares-tensorias. A ambientação de teorias escalares-tensoriais em geometrias não-riemannianas tem sido objeto de vários trabalhos na literatura, todos com a finalidade de dotar o campo escalar de uma natureza geométrica. Para citar alguns exemplos temos a geometrização do campo escalar através da torção [1], levando a uma teoria que contém invariância conforme no setor gravitacional mas que é quebrada na presença de matéria. Temos a não-metricidade na ausencia de matéria [2] ; e, ainda, através da adoção de variedades com dimensão maior que quatro, como as teorias de Kaluza-Klein, onde o campo escalar surge no espaço-tempo quadridimensional como componente da métrica do espaço de dimensão maior.

Teorias escalares-tensoriais são consideradas como a mais simples extensão da relatividade geral que preserva o acoplamento mínimo da gravitação com a matéria. Nessas teorias, o campo gravitacional é descrito em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e de um campo escalar φ. Com o acréscimo de um grau de liberdade através do campo escalar, essas teorias têm sido de interesse para a cosmologia nos anos recentes e estudadas como alternativa à teoria de Einstein. O interesse gerado por tais teorias é motivado por variadas razões. Uma previsão genérica de todos modelos de teorias de cordas é de que o *gráviton*, com spin 2, tenha um parceiro chamado *dilaton*, de spin-0. Nesse sentido a teoria de cordas prevê que a correta teoria da gravidade em baixas energias é uma teoria escalar-tensorial ao invés da relatividade geral [3]. De fato, o limite de baixas energias da teoria de corda bosônica corresponde à teoria de Brans-Dicke com $\omega = -1$ [4]

O estudo de campos quânticos em espaços curvos indica que o valor esperado do tensor momento-energia desses campos diverge, mesmo no estado de vácuo, o que pode ser contornado pelo procedimento de renormalização, que, nesse caso, consiste da adição, na ação gavitacional, de termos de curvatura de ordem superior [5]. Esses termos adicionais sugerem que desvios das predições da relatividade geral devem ocorrer entre a menor escala de comprimento já testada e a escala de Planck. No entanto, o estudo clássico desses termos adicionais tem sido muito aplicado à cosmologia, com as chamadas teorias $f(R)$, *Gauss-Bonnet*, $f(T)$, $f(R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu})$ etc. [6], seja no universo primordial ou recente, sendo capazes de modelar matéria e energia escura, afinal essas componetes são detectadas somente através de efeitos gravitacionais.[1].

Por outro lado, o interesse em geometrias não-riemannianas na física pode ser justificado pela investigação de estruturas não contempladas pela geometria de Riemann, as quais podem ser associadas a propriedades fisicamente mensuráveis como torção, o spin de partículas ou a não-metricidade (como é o caso aqui explorado).

[1] O problema com essa espectativa é que resta explicar como esses desvios desaparecem em escalas intermediárias, onde a RG é bem testada e sucedida [6]

Teorias escalares-tensoriais são caracterizadas por funções do campo escalar, sendo que para cada função escolhida corresponde a uma teoria. Aqui discutiremos principalmente uma teoria que é considerada o protótipo das teorias escalares-tensoriais, a saber, a teoria de Brans-Dicke. Na investigação, descrita aqui, trataremos de relacionar teorias escalares-tensoriais com a geometria de Weyl em dois momentos: primeiro (no capítulo 2) apresentamos a teoria de Brans-Dicke na sua formulação original de 1961 [7] (formulada no chamado *referencial de Jordan*), e discutimos, assim como já foi discutido por Scholz e Quiros [8, 9], como essa teoria contém os ingredientes necessários para caracterizar uma estrutura geométrica de Weyl. Tal estrutura fica explícita quando analisamos essa teoria em sua versão de 1962 (Dicke) (no chamado referencial de Einstein), em que é discutida a liberdade de se realizarem transformações conformes, ou transformações de unidades como geralmente são conhecidas [10]. Ainda nesse capítulo, discutimos a semelhança entre a teoria de Brans-Dicke e uma teoria formulada numa geometria de Weyl integrável, conhecida como WIST. Mostramos alguns resultados que evidenciam uma identidade entre as duas teorias como, por exemplo, o que é entendido em Brans-Dicke (formulada no *referencial de Einstein*) como uma "quinta força"será interpretado em WIST como sendo o movimento em geodésicas no espaço-tempo de Weyl.

Num segundo momento, no capítulo 3, considerando somente a ação gravitacional de Brans-Dicke e usando o princípio variacional de Palatini, deduzimos as equações de campo para as variáveis independentes e concluímos que, de fato, temos uma geometria de Weyl integrável. Essa informação nos leva a selecionar as geodésicas de Weyl como sendo as curvas traçadas por partículas em queda livre. Essa escolha acarreta na modificação da interação da gravitação com a matéria, o campo escalar tendo papel direto nessa modificação. Com isso obtemos uma versão modificada da teoria de Brans-Dicke, completamente geométrica. Exploramos essa teoria no problema de uma distribuição de matéria com simetria esférica e analisamos as singularidades nuas e buracos de minhoca [11] que surgem de acordo com valores do parâmetro ω [12]. Analisamos de um modo geral o sistema dinâmico das soluções cosmológicas com matéria.

A tese está organizado da seguinte forma: no capitulo 1 apresentamos uma breve revisão da geometria de Weyl e então nos restringindo ao campo integrável e construimos algumas quantidades invariantes sob transformações de coordenadas *e* de Weyl. No capítulo 2 tratamos de identificar as variáveis da teoria de Brans-Dicke com as variáveis da geometria de Weyl . No capítulo 3, formulamos a teoria de Brans-Dicke num espaço-tempo de Weyl propriamente dito, o que leva à diferenças fundamentais em relação à versão original dessa teoria.Temos então uma teoria escalar-tensorial completamente geométrica, onde investigamos o comportamento de soluções estáticas e esfericamente simétricas, evidenciando singularidades nuas e buraco-de-minhoca. No capítulo 4, apresentamos uma teoria gravitacional em geometria de Weyl $WIST$ em $(2 + 1)D$ e mostramos que esse versão da teoria satisfaz uma série de requisitos para ser considerada "consistente", como propagação dos graus de liberdade, limite newtoniano, etc, que a relatividade geral não satisfaz nessa dimensionalidade. Encontramos algumas soluções cosmológicas, com destaque para soluções sem singularidade (*bouncing*) cosmológica; exibimos também uma solução estática para uma distribuição circularmente simétrica. No capítulo 5, fazemos um sumário dos resultados da tese, seguido das conclusões e perspectivas para estender o presente estudo.

Capítulo 1

Espaço-tempo de Weyl integrável (WIST)

Em 1918, Herman Weyl concebeu uma teoria que tentava unificar gravitação e eletromagnetismo, as duas forças fundamentais conhecidas na época [13]. Para tanto, foi desenvolvida uma geometria que generalizava o espaço-tempo riemanniano da relatividade geral. O objetivo era de que esses novos graus de liberdade geométricos correspondessem ao potencial eletromagnético A_μ. Para isso, Weyl desenvolveu uma geometria invariante de calibre[1] que, apesar da engenhosidade e apelo estético, não resultou numa teoria compatível com as observações. A dificuldade era por conta da identificação dos graus de liberdade adicionais σ_μ com o eletromagnetismo, representado por A_μ. Por exemplo, esse campo σ_μ interege da mesma maneira com partículas e antipartículas, contrário a todas evidências experimentais do eletromagnetismo [14]. Por outro lado, se esses novos graus de liberdade correspondessem à própria gravitação, com importância em escalas cosmológicas, a geometria fundada por Weyl pudesse explorar novos cenários. E, de fato, foi usada por Dirac para desenvolver uma teoria gravitacional de forte apelo cosmológico, baseada na sua Hipótese dos Grandes Números [15], sendo, depois, reformulada para explorar escalas de altas energias no reino das forças nucleares e através da quebra de simetria de calibre conforme na gravitação [8, 16].

Segundo alguns autores, a geometria de Weyl é uma generalização da geometria riemanniana que tem a intenção de fazer *justiça matemática aos comprimentos* [17]. A geometria riemanniana considera que o transporte paralelo num espaço curvo[2] altera a direção de vetores, enquanto sua *norma*(ou comprimento) permanece inalterado, permitindo assim que façamos comparação entre comprimentos de vetores e intervalos de tempo[3] em pontos distantes no espaço-tempo. A generalização devida a H. Weyl relaxava essa propriedade, permitindo a variação da norma (do comprimento) devido ao transporte paralelo. Como veremos, Weyl pôde realizar tal generalização alterando a condição de compatibilidade entre a conexão e a métrica, construindo assim uma geometria inteiramente infinitesimal ou *local* (Não seriam possíveis comparações de comprimento de vetores entre pontos distantes da variedade do espaço-tempo, tal comparação só seria factível mediante determinada lei de tranporte paralelo dos comprimentos) [13].

[1] Também conhecida por *geometria invariante de escala*, onde transformações conformes da métrica fazem parte da transformação

[2] O equivalente à transposição de vetores no espaço euclidiano.

[3] Em princípio as linhas espectrais padrão, em que se baseiam relógios atômicos, poderiam estar sujeitas a pequenas variações, de modo que não haveria medidas rigorosamente padronizadas de tempo próprio.

1.1 Generalização da geometria riemanniana

A diferença essencial entre a geometria de Riemann e a geometria de Weyl é que na primeira admitimos que a derivada covariante da métrica $\nabla_\alpha g_{\mu\nu}$ é zero, enquanto que na última temos

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \sigma_\alpha g_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

onde σ_α denota as componentes de um campo de 1-forma em relação a uma base de coordenadas local. Isso é uma generalização da condição de compatibilidade entre a conexão ∇ e a métrica g, que é equivalente a condição de que o comprimento de um vetor se mantenha inalterado sob transporte paralelo [18].

A tríade (M, g, σ) onde M é uma variedade diferenciável com uma métrica g e um campo de Weyl σ, que se relaciona com g através de (1.1), será denotada como *referencial de Weyl*. É interessante notar que a condição de Weyl (1.1) permanece inalterada quando vamos para um outro referencial de Weyl $(M, \bar{g}, \bar{\sigma})$ sob as transformações simultâneas em g e σ:

$$\begin{aligned} \bar{g} &= e^f g \\ \bar{\sigma} &= \sigma + df \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde f é uma função escalar definida em M. Assim, os referenciais de Weyl constituem uma classe de equivalência, relacionados por (1.2), ou seja, qualquer quantidade métrica estará definida à menos de uma transformação de Weyl.

Analogamente à geometria riemanniana, a condição (1.1) é suficiente para determinar a conexão sem torção, ∇, em termos da métrica g e do campo de 1-forma de Weyl σ. As componentes da conexão com respeito a uma base de coordenadas arbitrárias é:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\sigma_\nu + g_{\beta\nu}\sigma_\mu - g_{\nu\mu}\sigma_\beta). \tag{1.3}$$

Por definição, a conexão de Weyl é simétrica[4]. Se existe um referencial em que o campo de Weyl se anula, $\sigma = 0$, obviamente a geometria de Weyl se reduz à geometria de Riemann neste referencial.

Vamos ver agora algumas propriedades do transporte paralelo de Weyl. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇, uma métrica g e um campo de Weyl σ. Se ∇ for compatível com g no sentido de Weyl (1.1), então para qualquer curva γ, definida pelas equações parametrizadas $x^\alpha = x^\alpha(u)$, sendo u um parâmetro, e qualquer par de vetores transportados paralelamente V e W ao longo de γ, teremos

$$\frac{d}{du} g(V, W) = \frac{dx^\alpha}{du} \nabla_\alpha \left(g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu \right) = V^\mu W^\nu \frac{dx^\alpha}{du} \nabla_\alpha g_{\mu\nu}. \tag{1.4}$$

Por outro lado, da condição (1.1) segue

$$\frac{dx^\alpha}{du} \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \frac{D g_{\mu\nu}}{du} = \sigma_\alpha \frac{dx^\alpha}{du} g_{\mu\nu}. \tag{1.5}$$

Portanto

$$\frac{d}{du} g(V, W) = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu \sigma_\alpha \frac{dx^\alpha}{du} = \sigma(\frac{d}{du} g(V, W)). \tag{1.6}$$

[4] Condição necessária e suficiente para anular localmente os coeficientes da conexão

Seja $W = V$, e $L(u)$ o comprimento do vetor $V(u)$ em um ponto arbitário da curva, então a expressão acima conduz a

$$\frac{dL}{du} = \frac{\sigma_\alpha}{2}\frac{dx^\alpha}{du}L. \tag{1.7}$$

Integrando (1.7) a partir de um ponto $P_0 = x^\alpha(u_0)$ obtemos

$$L(u) = L_0 e^{\int_{u_0}^{u} \frac{\sigma_\alpha}{2}\frac{dx^\alpha}{du'}du'}. \tag{1.8}$$

Vemos claramente que a variação no comprimento do vetor é regulada pela integral, que depende dos pontos inicial e final e da curva escolhida γ. Mais ainda, a comparação entre quaisquer quantidades métricas em diferentes pontos só se dará mediante o transporte de seu "comprimento padrão"(aqui, estabelecer um "comprimento padrão"é fixar uma métrica dentro da classe de equivalência, escolher um calibre), o que pode ser feito mediante a multiplicação pelo fator exponencial acima, também chamado função "transferência de escala". A "curvatura de comprimento"é simplesmente a derivada exterior, $F = d\sigma$, com componentes $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\sigma_\nu - \partial_\nu\sigma_\mu$. Se a curvatura de comprimento é nula, isto é, se $F = 0$, a função transferência pode ser integrada. Voltando ao resultado (1.8), temos uma peculiaridade apontada por Einstein: dois observadores partindo de um ponto em comum com relógios sincronizados ao tomarem diferentes trajetórias e alcançando um outro ponto em comum perceberão que seus relógios agora estão funcionando com intervalos diferentes. Considerando uma curva fechada $x^\alpha(u) : [a, b] \in R \to M$, ou seja $x(a) = x(b)$, temos

$$L(u) = L_0 e^{\oint \frac{\sigma_\alpha}{2}\frac{dx^\alpha}{du'}du'}. \tag{1.9}$$

Do teorema de Stokes segue que se σ for uma forma exata, isto é, se existir uma função escalar ϕ tal que $\sigma = d\phi$, então

$$\oint \frac{\partial_\alpha\phi}{2}\frac{dx^\alpha}{du'}du' = \oint \frac{d\phi}{du'}du' = \oint d\phi = 0. \tag{1.10}$$

Em outras palavras, nesse caso a integral não depende da trajetória tomada. Sendo essa integral que regula a marcha dos relógios atômicos , essa classe de geometria de Weyl não sofre da falha apontada por Einstein, e temos o que é conhecida como variedade de *Weyl integrável.*

No presente trabalho faremos uso exclusivo desse caso particular da geometria de Weyl, chamada *Geometria de Weyl Integrável.* Aqui podemos fazer a geometria de Weyl reduzir a uma geometria riemanniana, basta identificar o campo escalar acima com o fator conforme da métrica. A essa escolha nos referiremos como *referencial de Riemann*, $(M, \tilde{g}, 0)$. Se $\sigma = d\phi$ então

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}, \tag{1.11}$$

onde $\phi_{,\alpha} = \partial_\alpha\phi$, ou ainda

$$\nabla(e^{-\phi}g_{\mu\nu}) = \nabla\tilde{g}_{\mu\nu} = 0, \tag{1.12}$$

que é a condição riemanniana. Portanto, desde que trabalhemos com a versão integrável da geometria de Weyl (M, g, ϕ), escolhendo em (1.2) $f = -\phi$, teremos uma transformação para um referencial onde o campo de Weyl $\tilde{\phi}$ é nulo, ou seja, o referencial riemanniano$(M, \tilde{g}, \tilde{\phi} = 0)$.

Um fato matemático da geometria de Weyl muito importante é a invariância das geodésicas sob as transformações de Weyl (1.2). Para verificar isso, considere a equação de geodésica afim

$$\nabla_V V = 0 \tag{1.13}$$

em um certo referencial (M, g, σ), onde V denota o vetor tangente a curva geodesica. Em coordenadas locais

$$\frac{d^2x^\mu}{du^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du} = 0, \tag{1.14}$$

onde $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ denota as componentes da conexão ∇, u é um parâmetro afim e $x^\mu = x^\mu(u)$ representa equações paramétricas locais das geodésicas. Suponha que mudamos para um referencial $(M, \bar{g}, \bar{\sigma})$ através de (1.2). Obviamente em cada referencial, as componentes de ∇,isto é, $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ e $\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$, podem ser expressas em termos dos simbolos de Christoffel,$\left\{{\mu \atop \alpha\beta}\right\}$ e $\overline{\left\{{\mu \atop \alpha\beta}\right\}}$, e dos campos de Weyl σ e $\bar{\sigma}$, respectivamente, como em (1.3). Ora, como ∇ fica inalterada pelas transformações de Weyl, se $x^\alpha = x^\alpha(u)$ é solução de (1.13) no referencial (M, g, σ), então é uma solução dessa mesma equação no outro referencial $(M, \bar{g}, \bar{\sigma})$. As equações geodesicas são invariantes porque $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$, e a verdade desse fato pode ser verificada facilmente usando (1.3).

1.2 Curvatura de Weyl

A modificação da geometria riemanniana a partir da condição de Weyl (1.1) implica na modificação do tensor de curvatura $\mathcal{R}$, ou tensor de Riemann,

$$\mathcal{R} = \mathbf{R} + f(g, \sigma, \nabla\sigma), \tag{1.15}$$

onde $\mathcal{R}(g, \sigma)$ é a curvatura de Weyl, $\mathbf{R}(g)$ é a curvatura riemanniana e $f(g, \sigma, \nabla\sigma)$ e uma combinação dos termos adicionais devido a (1.1), cuja expressão encontraremos logo a seguir. Uma consequência imediata é que selecionando o espaço de métrica plana de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, onde a curvatura riamanniana é nula, $\mathbf{R} = 0$, temos uma curvatura de Weyl não-nula, $\mathcal{R} \neq 0$, dada completamente pelo campo de Weyl

$$\mathcal{R} = f(\eta, \sigma, \partial\sigma, \Box\sigma), \tag{1.16}$$

Tais espaços de Weyl, no caso integrável, foram estudados em [19] e [20] onde foram formuladas teorias da gravitação escalar no espaço de Minkowski, como a teoria de Nordström e especulações sobre a viabilidade de quantização dessa gravidade escalar. Nesse contexto, tambem existe um programa que relaciona a geometria de Weyl com a mecânica quantica relativística de Bohm, o campo de Weyl fazendo o papel de potencial quântico [21, 22].

1.2.1 Curvatura de Weyl não-integrável

Para obter a curvatura de Weyl o procedimento é idêntico ao caso riemanniano, ou seja, definimos ${\mathcal{R}^\lambda}_{\mu\alpha\beta}$ [23]

$$\nabla_\beta\nabla_\alpha V^\lambda - \nabla_\alpha\nabla_\beta V^\lambda = {\mathcal{R}^\lambda}_{\mu\alpha\beta}V^\mu, \tag{1.17}$$

de onde resulta que

$${\mathcal{R}^\lambda}_{\rho\alpha\beta} = \partial_\beta\Gamma^\lambda_{\rho\alpha} - \partial_\alpha\Gamma^\lambda_{\rho\beta} + \Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\rho\alpha} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\Gamma^\mu_{\rho\beta}. \tag{1.18}$$

Podemos agora expressar ${\mathcal{R}^\lambda}_{\mu\alpha\beta}$ em termos da curvatura riemaniana, usando a expressão para a conexão obtida em (1.3) na forma mais sucinta

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\} - W^\alpha_{\mu\nu} \tag{1.19}$$

onde

$$W^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\sigma_\nu + g_{\beta\nu}\sigma_\mu - g_{\nu\mu}\sigma_\beta). \tag{1.20}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{\lambda}{}_{\rho\alpha\beta} &= \mathbf{R}^{\lambda}{}_{\rho\alpha\beta} + \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\rho}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\mu}_{\alpha})\left(\tilde{\nabla}_\mu\sigma_\rho + \frac{1}{2}\sigma_\mu\sigma_\rho - \frac{1}{2}g_{\rho\mu}\sigma^\gamma\sigma_\gamma\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\mu}_{\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}\right)\left(\tilde{\nabla}_\nu(g_{\rho\mu}\sigma^\lambda) + \frac{1}{2}g_{\rho\mu}\sigma_\nu\sigma^\lambda\right)
\end{aligned} \tag{1.21}$$

onde $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\sigma_\beta - \partial_\beta\sigma_\alpha$ é a "curvatura de comprimento" [24] e a derivada covariante $\tilde{\nabla}$ representa a conexáo riemanniana. O tensor de Ricci, é dado por

$$\mathcal{R}_{\rho\beta} = \mathcal{R}^{\alpha}{}_{\rho\alpha\beta} = \mathbf{R}_{\rho\beta} + \frac{1}{2}F_{\rho\beta} - \tilde{\nabla}_\beta\sigma_\rho - \frac{1}{2}g_{\beta\rho}\tilde{\nabla}_\alpha\sigma^\alpha - \frac{1}{2}\sigma_\beta\sigma_\rho + \frac{1}{2}g_{\rho\beta}\sigma^\gamma\sigma_\gamma \tag{1.22}$$

Note que o tensor de Ricci tem uma parte antissimétrica, que corresponde à "curvatura de comprimento". Contraindo com a métrica temos o escalar de Ricci

$$\mathcal{R} = \mathbf{R} - 3\tilde{\nabla}_\alpha\sigma^\alpha + \frac{3}{2}\sigma^\gamma\sigma_\gamma. \tag{1.23}$$

Para o caso de Weyl integrável, $\sigma = d\phi$, as expressões acima são facilmente adaptadas e a parte antissimétrica do tensor de Ricci, $F_{\rho\beta}$, a "curvatura de comprimento", se anula.

1.2.2 Identidade de Bianchi para Weyl integrável

O tensor de Riemann definido por

$$\mathcal{R}^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} \tag{1.24}$$

tem a propriedade

$$\nabla_\sigma\mathcal{R}^{\alpha}_{\mu\beta\nu} + \nabla_\beta\mathcal{R}^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} + \nabla_\nu\mathcal{R}^{\alpha}_{\mu\sigma\beta} = 0. \tag{1.25}$$

Multiplicando por δ^{β}_{α} temos

$$\nabla_\sigma\mathcal{R}^{\beta}_{\mu\beta\nu} + \nabla_\beta\mathcal{R}^{\beta}_{\mu\nu\sigma} + \nabla_\nu\mathcal{R}^{\beta}_{\mu\sigma\beta} = 0 \tag{1.26}$$

Pela definição do tensor de Ricci, $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\beta}_{\mu\beta\nu}$, e, considerando o tensor $F_{\mu\nu} = 0$, portanto o tenosr de Ricci agora é simétrico, usando a simetria do tensor de Riemann $\mathcal{R}^{\beta}_{\mu\sigma\beta} = -\mathcal{R}^{\beta}_{\mu\beta\sigma} = -\mathcal{R}_{\mu\sigma}$, temos

$$\nabla_\sigma\mathcal{R}_{\mu\nu} + \nabla_\beta\mathcal{R}^{\beta}_{\mu\nu\sigma} - \nabla_\nu\mathcal{R}_{\mu\sigma} = 0. \tag{1.27}$$

Agora, multiplicando por $g^{\mu\sigma}$, segue

$$g^{\mu\sigma}\nabla_\sigma\mathcal{R}_{\mu\nu} + g^{\mu\sigma}\nabla_\beta\mathcal{R}^{\beta}{}_{\mu\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\nabla_\nu\mathcal{R}_{\mu\sigma} = 0. \tag{1.28}$$

Assim,

$$\nabla_\sigma\mathcal{R}^{\sigma}{}_{\nu} - \mathcal{R}_{\mu\nu}\nabla_\sigma g^{\mu\sigma} + \nabla_\beta\mathcal{R}^{\beta\sigma}{}_{\nu\sigma} - \mathcal{R}^{\beta}{}_{\mu\nu\sigma}\nabla_\beta g^{\mu\sigma} - \nabla_\nu\mathcal{R} + \mathcal{R}_{\mu\sigma}\nabla_\nu g^{\mu\sigma} = 0. \tag{1.29}$$

O terceiro termo da equação acima pode ser reescrito como $\mathcal{R}^{\beta\sigma}{}_{\nu\sigma} = \mathcal{R}^{\sigma\beta}{}_{\sigma\nu} = \mathcal{R}^{\beta}{}_{\nu}$ e, somado com o primeiro termo, nos dá

$$2\nabla_\sigma \mathcal{R}^\sigma{}_\nu - \nabla_\nu \mathcal{R} - \mathcal{R}_{\mu\nu}\nabla_\sigma g^{\mu\sigma} - \mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\sigma}\nabla_\beta g^{\mu\sigma} + \mathcal{R}_{\mu\sigma}\nabla_\nu g^{\mu\sigma} = 0, \tag{1.30}$$

ou ainda

$$2[\nabla_\sigma(\mathcal{R}^\sigma{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\nu \mathcal{R})] = \nabla_\beta g^{\mu\sigma}(\mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\sigma} + \delta^\beta_\sigma \mathcal{R}_{\mu\nu} - \delta^\beta_\nu \mathcal{R}_{\mu\sigma}). \tag{1.31}$$

Usando (1.11), temos

$$2[\nabla_\sigma(\mathcal{R}^\sigma{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\nu \mathcal{R})] = -\phi_{,\beta}(g^{\mu\sigma}\mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\sigma} + g^{\mu\beta}\mathcal{R}_{\mu\nu} - g^{\mu\sigma}\delta^\beta_\nu \mathcal{R}_{\mu\sigma}), \tag{1.32}$$

o que conduz a

$$2[\nabla_\sigma(\mathcal{R}^\sigma{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\nu \mathcal{R})] = -2\phi_{,\beta}(\mathcal{R}^\beta{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\beta_\nu \mathcal{R}). \tag{1.33}$$

Por fim, temos o resultado

$$\nabla_\nu G^\nu{}_\mu = -\phi_{,\nu} G^\nu{}_\mu \tag{1.34}$$

que mostra que a contribuição não-nula para a divergência do tensor de Einstein é devido a não-metricidade,ou *campo de Weyl*

1.3 Invariância da ação e geometria de Weyl

Um resultado importante, conseqüencia da invariância dos coeficientes da conexão sobre as transformações de Weyl, é que tanto o tensor de curvatura, quanto o tensor de Ricci, são invariantes sob estas transformações. Esse resultado facilita em muito os cálculos comparando com o caso de transformações puramente conformes na métrica, onde temos que usar expressões semelhantes. Ao se tratar com a geometria de Weyl não temos esse inconveniente. Tais invariantes são de interesse quando queremos encontrar um funcional para construir a ação de alguma teoria. Por exemplo, considere a ação, de alguma teoria gravitacional, numa variedade de Weyl

$$S = \int \sqrt{-g}W. \tag{1.35}$$

Onde W aqui denota um escalar construido com as curvaturas de Weyl. Sob uma transformação de Weyl, o deteminante se transforma como

$$\sqrt{-\tilde{g}} = e^{2f}\sqrt{-g}. \tag{1.36}$$

Portanto, o funcional escolhido W deve se transformar com $\tilde{W} = e^{-2f}W$, de modo que a ação seja invariante de Weyl. O escalar mais simples, depois do determinante da métrica, é o escalar de Ricci, que se transforma com

$$\tilde{\mathcal{R}} = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = e^{-f}\mathcal{R} \tag{1.37}$$

Portanto, podemos escolher $W = \mathcal{R}^2$, que satisfaz a condição necessária. De fato, na formulação original da teoria de Weyl que unificava através da geometria a gravitação ($g_{\mu\nu}$) e o eletromagnetismo (σ_μ), a ação escolhida foi

$$S = \int \sqrt{-g}\left(\mathcal{R}^2 + F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \tag{1.38}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \sigma_\nu - \partial_\nu \sigma_\mu$ é a "curvatura de comprimento"que passa a ser interpretado como o tensor eletromagnético de Maxwell, invariante de calibre. Weyl ainda exigiu a escolha de um calibre para obter as equações de campo, $\mathcal{R} = \Lambda$, onde Λ é uma constante. Para mais detalhes sobre a teoria de Weyl e suas modificações com a intenção de unificação devido a Eddington, Schroedinger, Pauli, Bergman, Einstein e outros indicamos os excelentes livros de cada um dos autores citados, [13]. A geometria de Weyl foi revisitada por Dirac na década de 70, numa tentativa de implementar questões cosmológicas, com a ação

$$S = \int \sqrt{-g} \left(\beta \mathcal{R} + \frac{\kappa}{\beta} D_\alpha \beta D^\alpha \beta + \Lambda \beta^4 + F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \tag{1.39}$$

onde β é um campo escalar auxiliar, $D_\alpha = \partial_\alpha + w\sigma_\alpha$ é a derivada covariante da função escalar β, de peso w sob uma transformação de Weyl. Nessa teoria não temos mais a interpretação de σ_μ como potencial eletromagnético, correspondendo agora a novos graus de liberdade da gravitação. Variações dessa teoria, foram estudadas por Lee Smollin [16] e S. Adler [25] . Versões mais recentes são usadas no contexto de quantização da gravidade depois que foi mostrada a relação entre o campo de Weyl (em alguns trabalhos integrável e em outros não integrável) e o potencial quântico, por exemplo, Carrol [26], Quiros [9] e Shojai [21]. Outras aplicações são a modelagem de matéria escura e energia escura Israelit [27].

Visto que os resultados dessa tese se restringem ao reino da geometria de Weyl integrável, a partir de agora passaremos a discutir essa estrutura. No próximo capítulo, apresentamos uma revisão da teoria de Brans-Dicke, o protótipo das teorias escalares-tensoriais, e na seção 2.5 apresentamos uma discussão sobre o conteúdo geométrico contido na teoria de Brans-Dicke. Mais precisamente veremos como a teoria de Brans-Dicke contém os ingredientes necessários para caracterizar uma geometria de Weyl integrável. No capítulo 3, apresentamos o resultado principal dessa tese, uma teoria inspirada completamente nos atributos geométricos da geometria de Weyl.

Capítulo 2

Teorias escalares-tensoriais

A característica básica das teorias escalares-tensoriais é a presença de um campo escalar que, juntamente com a métrica, descreve os fenômenos gravitacionais. Nesse sentido, teorias escalares-tensoriais são, em conjunto, uma modificação da relatividade geral (RG), na qual o campo gravitacional é descrito somente pelo tensor métrico.

A idéia original remonta aos trabalhos de Jordan [28], Brans e Dicke [7], com destaque especial para esse dois últimos, cujo objetivo era a implementação do princípio de Mach numa teoria gravitacional, que, em poucas palavras, sugere que os efeitos locais de inércia são determinados pela distribuição de matéria no universo. Através da hipótese dos grandes números, Dirac sugere que o acoplamento gravitacional G deve variar com o tempo cósmico t, mais precisamente

$$G \propto \frac{1}{t}. \tag{2.1}$$

Para uma formulação covariante dessa hipótese, Carl Brans e Robert Dicke impõem que o acoplamento gravitacional passe a ser determinado por um campo escalar.

$$G = \frac{1}{\varphi}. \tag{2.2}$$

A teoria de Brans-Dicke é de fato o protótipo das teorias escalares-tensoriais e limitaremos a discussão em torno dessa teoria. A extensão dos resultados para as teorias escalares-tensoriais é direta para o formalismo geral, entretanto a análise de soluções exige um novo estudo.

A renovação no interesse na teoria de Brans-Dicke e na sua generalização, as teorias escalares-tensoriais surgiu no contexto cosmológico inflacionário. Foi mostrado que o problema chamado "gracefull exit"(uma vez iniciado o processo de inflação é necessário algum mecanismo para interrompê-lo, daí a expectativa de uma "saída graciosa"desse processo) era bem resolvido na teoria de Brans-Dicke, desde que o parâmetro da teoria tivesse um limite superior, $\omega < 25$ [29].

Uma liberdade arbitrária apresentada por essa teoria é a presença do parâmetro livre acima mencionado, ω, que regula a interação da matéria com o campo escalar, e espera-se que seja da ordem da unidade $\omega \sim 1$[1]. Acredita-se que no limite $\omega \to \infty$ a teoria de Brans-Dicke seja idêntica a Relatividade Geral [30]. Os experimentos no âmbito do sistema solar

[1] A renovação de interesse na teoria de BD foi também devida à importância de campos escalares nas teorias de unificação modernas, em particular o *dilaton* das teorias de cordas. No limite de baixas energias a teoria de corda bosônica produz uma teoria de BD com $\omega = -1$ [10].

têm imposto limites inferiores para $\omega > 500$ [31] e ainda maiores quando consideradas medições mais recentes. Essa discrepância nos valores de ω entre a aproximação de campo fraco e campos intensos, em escalas astrofísicas e cosmológicas, sugere que esse parâmetro não seja uma constante, mas uma função do campo escalar. É nessa generalização, com a adição de uma função potencial do campo escalar, que consistem as chamadas teorias escalares-tensoriais [32].

Talvez a motivação mais importante para o estudo dessas teorias em escalas cosmológicas seja a recente descoberta da expansão acelerada do universo [33], que parece exigir mais graus de liberdade gravitacionais do que os presentes na Relatividade Geral.

Como tem sido explorado desde muito tempo, a inclusão de graus de liberdade adicionais na gravitação pode ser feita através da adoção de geometrias não-riemannianas, em que torção ou não-metricidade estão presentes [34]. Essa é uma abordagem que, além de fornecer uma excelente fundamentação para os graus de liberdade extras, recupera a concepção do campo gravitacional como um efeito puramente geométrico, como acontece na relatividade geral. Além disso, a associação de campos escalares com a métrica parece ser inevitável nas mais recentes

2.1 Teoria de Brans-Dicke

A teoria da gravitação de Jordan-Brans-Dicke [10, 28] comumente chamada de teoria de Brans-Dicke (à qual nos referiremos daqui em diante por "BD") é o protótipo das teorias gravitacionais alternativas à relatividade geral. A ação no chamado referencial de Jordan é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\varphi R + \frac{\omega}{\varphi}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}\right) + \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_{(m)}, \tag{2.3}$$

onde $\varphi_{,\mu}$ representa a derivada do escalar φ em relação as coordenadas x^{μ}, o último termo descreve a matéria comum (qualquer forma de matéria excluído o campo escalar φ) e ω é um parâmetro adimensional. O fator φ no denominador do segundo termo no setor gravitacional é introduzido para manter ω adimensional. A matéria não está diretamente acoplada com φ, no sentido de que a densidade lagrangeana $\mathcal{L}_{(m)}$ não depende de φ (acoplamento mínimo para a matéria), mas φ está diretamente acoplado com o escalar de Ricci [10]. O campo gravitacional é descrito pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e pelo campo escalar φ, que, juntos com a matéria determinam a dinâmica do espaço-tempo. Um potencial do campo escalar, $V(\varphi)$, as vezes é incluído quando a teoria de BD é usada em modelos do universo primordial ou cenários de quintessência no universo recente. Ainda que campos escalares livres sejam legítimos em teorias gravitacionais clássicas, eles são incomuns em físicas de altas energias, pois correções quânticas produzem interações que levam a potenciais $V(\varphi)$ [10].

Tomando a métrica e o campo escalar como campos fundamentais e independentes e variando a ação com relação a esses campos gera as seguintes equações de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi}{\varphi}T_{M\mu\nu} - \frac{\omega}{\varphi^2}(\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi^{,\alpha}\varphi_{,\alpha}) - \frac{1}{\varphi}(\varphi_{\nu;\mu} - g_{\mu\nu}\Box\varphi). \tag{2.4}$$

$$\Box\varphi = \frac{8\pi}{2\omega+3}T^{\mu}_{M\mu} \tag{2.5}$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \tag{2.6}$$

Como podemos ver nas equações (2.4) e (2.5) o campo escalar φ tem a chamada matéria não-conforme (matéria com traço $T^{(m)} \equiv T_{\mu}^{(m)\mu} \neq 0$) como sua fonte, mas o campo escalar não é diretamente acoplado á $T_{\mu\nu}$ ou $\mathcal{L}^{(m)}$. O campo φ atua sobre a matéria comum somente através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, como determinado por (2.5) e (2.4). A forma da ação (2.3) ou das equações de campo (2.4) e (2.5) sugere que o campo φ desempenha o papel de inverso do acoplamento gravitacional

$$G_{eff}(\varphi) = \frac{1}{\varphi}, \tag{2.7}$$

que se torna uma função dos pontos do espaço-tempo. Por essa razão, os valores $\varphi > 0$, correspondendo a gravidade atrativa são geralmente escolhidos. O parâmetro ω na ação (2.3) é um parâmetro livre da teoria: do ponto de vista teórico um valor do parâmetro ω da ordem da unidade (intensidade do acoplamento gravitacional) seria natural e ele aparece no limite de baixas energias das teorias de cordas. Entretanto, valores de ω dessa ordem são excluídos pelos testes disponíveis para teorias gravitacionais no limite de campo fraco [10].

Uma formulação alternativa da teoria de BD, no chamado referencial de Einstein [7], é de interesse para nós e será discutida na seção 3.

2.2 Limite de BD para RG O($\frac{1}{\omega}$)

Sendo a teoria de Brans-Dicke o protótipo das teorias escalares-tensoriais, é conveniente estudar como as soluções dessa teoria diferem das soluções da relatividade geral. Para isso é adotado o limite do parâmetro ω. é possível mostrar, e o faremos logo abaixo, que, na presença de matéria com tensor momento-energia de traço não-nulo as soluções da RG são obtidas no limite $\omega \to \infty$. A discussão que segue é extraída da referência [30].

O ponto de partida de Brans e Dicke é a idéia de Mach, de que o fenômeno da inércia deve surgir de acelerações com relação a distribuição geral de massa do universo. Assim as massas inerciais das partículas elementares não devem ser constantes fundamentais, mas sim representar a interação dessas partículas com algum campo cósmico. Mas essa escala absoluta das massas das partículas elementares só pode ser medida através de medições de acelerações gravitacionais, $\frac{GM}{r^2}$. Assim, uma conclusão equivalente é que a constante gravitacional G deve estar relacionada ao valor médio de um campo escalar acoplado a densidade de massa do universo. A mais simples equação de campo geralmente covariante para tal campo escalar seria

$$\Box\varphi = 4\pi\lambda T^{\mu}{}_{\mu}, \tag{2.8}$$

onde $\Box = \varphi^{;\mu}{}_{;\mu}$ é o d'Alembertiano, λ uma constante de acoplamento e $T_M^{\mu\nu}$ o tensor momento-energia da matéria do universo. Podemos fazer uma estimativa grosseira do valor esperado do campo φ calculando o potencial central de uma esfera de gás com a densidade de massa $\rho \approx 10^{-29} g.cm^{-3}$ e raio da ordem do universo observável $R \approx 10^{28} cm$ [2]. Isso dá um valor esperado da ordem de

$$< \varphi > \approx \lambda\rho R^2 \approx \lambda \times 10^{27} g.cm^{-3}. \tag{2.9}$$

Note que esse valor é bem próximo de $\frac{1}{G} = 1.35 \times 10^{28} g.cm^{-3}$. Portanto normalizando φ tal que

$$< \varphi > \simeq \frac{1}{G}, \tag{2.10}$$

[2]Isso é o mesmo que calcular o potencial Newtoniano $\varphi = \frac{M}{R} \approx \frac{\rho R^3}{R} = \rho R^2$

vemos que (2.9) sugere que λ seja adimensional e da ordem da unidade. Essas considerações levaram Brans e Dicke a sugerir que as equações de campo corretas para a gravitação são obtidas trocando G por um campo escalar φ e incluindo um tensor momento energia $T^{\mu\nu}_{\varphi}$ para o campo φ como fonte do campo gravitacional

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\frac{8\pi}{\varphi}[T^{\mu\nu}_{M} + T^{\mu\nu}_{\varphi}]. \tag{2.11}$$

De modo a manter o bem sucedido princípio de equivalência, o que implica a igualdade da massa inercial e gravitacional, e o redshift gravitacional, Brans e Dicke exigiram que somente $g_{\mu\nu}$, e não φ, entrasse na equação de movimento das partículas e fótons [30]. Portanto, a equação que descreve a troca de energia entre matéria e gravitação é a mesma da teoria de Einstein, ou seja,

$$T^{\mu}_{M\nu;\mu} = 0. \tag{2.12}$$

Pelas identidades de Bianchi, a divergência covariante do lado esquerdo de (2.11) deve ser nula. Assim, mutiplicando (2.11) por φ e tomando a divergência covariante encontramos

$$(R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R)\varphi_{;\mu} = -8\pi T^{\mu}_{\varphi\nu;\mu}. \tag{2.13}$$

Essa condição é suficiente para determinar $T^{\mu\nu}_{\varphi}$. O tensor simétrico mais geral que podemos construir com duas ou uma derivada do campo φ e o campo φ em si é

$$T^{\mu}_{\varphi\nu} = A(\varphi)\varphi^{;\mu}\varphi_{;\nu} + B(\varphi)\delta^{\mu}_{\nu}\varphi^{;\alpha}\varphi_{;\alpha} + C(\varphi)\varphi^{;\mu}{}_{;\nu} + D(\varphi)\delta^{\mu}_{\nu}\Box\varphi. \tag{2.14}$$

Um cálculo direto dá

$$\begin{aligned} T^{\mu}_{\varphi\nu;\mu} &= (A' + B')\varphi_{;\nu}\varphi^{;\alpha}\varphi_{;\alpha} + (A + 2B + C')\varphi^{;\mu}\varphi_{;\nu;\mu} \\ &+ (A + D')\varphi_{;\nu}\Box\varphi + D(\Box\varphi)_{;\nu} + C\Box(\varphi_{;\nu}), \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde a linha indica derivada com relação à φ e usamos a identidade $\varphi_{;\alpha;\beta} = \varphi_{;\beta;\alpha}$ no último termo.

O primeiro termo de (2.13) é obtido pela definição da curvatura

$$\varphi^{;\lambda}{}_{;\alpha;\beta} - \varphi^{;\lambda}{}_{;\beta;\alpha} = R^{\lambda}{}_{\rho\beta\alpha}\varphi^{;\rho} \tag{2.16}$$

e fazendo $\lambda = \alpha$. O segundo termo do lado esquerdo é obtido tomando o traço de (2.11) e usando (2.8). Temos, então,

$$R = \frac{8\pi}{\varphi}\left((A + 4B)\varphi^{;\alpha}\varphi_{;\alpha} + (\frac{1}{4\pi\lambda} + C + 4D)\Box\varphi\right) \tag{2.17}$$

De modo que o lado esquerdo de (2.11) é dado por

$$\begin{aligned} (R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R)\varphi_{;\mu} &= (\Box\varphi)_{;\nu} - \Box(\varphi_{;\nu}) - \\ &\frac{4\pi}{\varphi}\varphi_{;\nu}\left[(A + 4B)\varphi^{;\alpha}\varphi_{;\alpha} + (\frac{1}{4\pi\lambda} + C + 4D)\Box\varphi\right]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Igualando os coeficientes de (2.15) e (2.18) através de (2.13) encontramos

$$\begin{array}{rl} 1 = -8\pi D, \quad -1 = -8\pi C & , \\ -\frac{4\pi}{\varphi}\left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C + 4D\right) = -8\pi(A + D') & , \\ -\frac{4\pi}{\varphi}(A + 4B) = -8\pi(A' + B') & , \\ A + 2B + C' = 0 & , \end{array} \tag{2.19}$$

cuja única solução é

$$\begin{array}{c} D(\varphi) = -\frac{1}{8\pi}, \quad C(\varphi) = \frac{1}{8\pi} \\ A(\varphi) = \frac{\omega}{8\pi\varphi} \quad B(\varphi) = -\frac{\omega}{16\pi\varphi} \\ \omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2} \quad \lambda = \frac{2}{2\omega+3} \end{array}$$

As equações da teoria de Brans-Dicke são, portanto,

$$\Box\varphi = \frac{8\pi}{2\omega + 3} T^{\mu}_{M\mu} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= -\frac{8\pi}{\varphi}T_{M\mu\nu} - \frac{\omega}{\varphi^2}(\varphi_{;\mu}\varphi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi^{;\alpha}\varphi_{;\alpha}) \\ &\quad -\frac{1}{\varphi}(\varphi_{;\nu;\mu} - g_{\mu\nu}\Box\varphi). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Estimamos que λ é da ordem da unidade, o mesmo deve ser verdade para o ω. Se ω é muito maior que a unidade, então (2.5) fornece $\Box\varphi \approx O(\frac{1}{\omega})$, portanto

$$\varphi = <\varphi> + O(\frac{1}{\omega}) = \frac{1}{G} + O(\frac{1}{\omega}) \tag{2.22}$$

Usando isso em (2.4) temos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{M\mu\nu} + O(\frac{1}{\omega}) \tag{2.23}$$

Assim a teoria de BD tende à teoria de Einstein quando $\omega \to \infty$.

Deve ser ressaltado que o papel do campo escalar na teoria de Brans-Dicke é restrito a seu efeito nas equações do campo gravitacional ($g_{\mu\nu}$). Uma vez $g_{\mu\nu}$ calculado, os efeitos da gravitação em sistemas físicos arbitrários são determinados exatamente como na RG.

2.2.1 Limite de BD para RG O($\frac{1}{\sqrt{\omega}}$)

Mesmo sendo uma crença generalizada, o resultado estabelecido acima não é verdadeiro em geral. Como foi apontado por Romero e Barros [35] várias soluções exatas da teoria de Brans-Dicke não correspondem à soluções da relatividade geral no limite $\omega \to \infty$, tendo um diferente comportamento assintótico:

$$\varphi \sim <\varphi> + O(\frac{1}{\sqrt{\omega}}). \tag{2.24}$$

Banerjee e Sen [36] concluíram que esse comportamento assintótico "anômalo"parece estar associado com soluções correspondendo a tensores energia-momento de traço nulo, $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$. Para verificar essa associação, note que na estimativa da ordem do campo escalar

(2.22) é necessário tomar a equação (2.8) como premissa. Se $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$ nada podemos concluir usando a mesma dedução. Sendo assim, Banerjee e Sen [36] mostram a partir de uma estimativa de magnitude, confirmada com algumas soluções exatas específicas que incluem os exemplos citados por Romero e Barros [35], que a crença de que a teoria de Brans-Dicke reduz á relatividade geral para grandes valores de ω é verdade somente quando $T^{\mu}{}_{\mu} \neq 0$. Se $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$ então a teoria de BD não se reduz à relatividade geral no limite de ω grande.

Um melhor entendimento das soluções de Brans-Dicke associadas com traço nulo $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$ que não se reduzem à sua contraparte da RG aparece com o trabalho de V. Faraoni [38] que relaciona esse fenômeno com a propriedade de invariância contida na teoria de Brans-Dicke sob transformções conformes "especiais". Vejamos como isso ocorre em detalhes.

O ponto inicial da análise é a ação de Brans-Dicke no chamado referencial de Jordan:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(\varphi R + \frac{\omega}{\varphi}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}) + S_m, \tag{2.25}$$

onde S_m é a ação da matéria, que é independente do campo escalar φ. As equações de campo correspondente são (2.5) e (2.4).

Considere inicialmente somente o setor gravitacional. Sob uma transformação conforme

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \tag{2.26}$$

onde $\Omega(x)$ é uma função suave e não-nula, o escalar de Ricci e o determinante da métrica se transformam como

$$\tilde{R} = \Omega^{-2}\left(R + \frac{6\Box\Omega}{\Omega}\right), \qquad \sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^4\sqrt{-g}. \tag{2.27}$$

O integrando do setor gravitacional é

$$\mathcal{L}_{BD}\sqrt{-g} = \sqrt{-\tilde{g}}\left[\Omega^{-2}\varphi\tilde{R} - \frac{6\varphi\Box\Omega}{\Omega^5} + \frac{\omega}{\Omega^2\varphi}\tilde{g}^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}\right] \tag{2.28}$$

A escolha

$$\Omega = \varphi^{\alpha}, \tag{2.29}$$

com $\alpha \neq \frac{1}{2}$, e a redefinição do campo escalar

$$\tilde{\varphi} = \varphi^{1-2\alpha} \tag{2.30}$$

conduzem a

$$\mathcal{L}_{BD}\sqrt{-g} = \sqrt{-\tilde{g}}(\tilde{\varphi}\tilde{R} + \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\varphi}}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\varphi}_{,\alpha}\tilde{\varphi}_{,\beta}) \tag{2.31}$$

com

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega - 6\alpha(\alpha-1)}{(1-2\alpha)^2}. \tag{2.32}$$

Assim o setor gravitacional fica inalterado pela transformação $\mathcal{F}_{\alpha}$ consistindo pela transformação conforme (2.26) e (2.29), e da redefinição do campo escalar (2.30), para $\alpha \neq 1/2$. As transformações

$$\mathcal{F}_{\alpha} : (M, g^{(\omega)}, \varphi^{(\omega)}) \rightarrow (M, \tilde{g}^{(\tilde{\omega})}, \tilde{\varphi}^{(\tilde{\omega})}) \tag{2.33}$$

mapeiam um espaço-tempo de Brans-Dicke $(M, g^{(\omega)}, \varphi^{(\omega)})$ em outro e constitui um grupo de simetria abeliano de um parâmetro, com uma singularidade em $\alpha \neq 1/2$. Para provar essa afirmação note que duas transformações consecutivas $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{F}_\beta$ do tipo (2.26), (2.29) e (2.30) é um mapa do tipo:

$$\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_\gamma \tag{2.34}$$

onde $\gamma(\alpha, \beta) = \alpha + \beta - 2\alpha\beta$. Além disso $\alpha, \beta \neq 1/2$ implica $\gamma \neq 1/2$. Note que $\alpha = 0$ corresponde à identidade. Para $\alpha < 1/2$, a inversa $(\mathcal{F}_\alpha)^{-1}$ da transformação $\mathcal{F}_\alpha$ é o mapa $\mathcal{F}_\delta$ onde

$$\delta = -\frac{\alpha}{1 - 2\alpha}. \tag{2.35}$$

Finalmente, como $\gamma(\alpha, \beta) = \gamma(\beta, \alpha)$, o grupo $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ é comutativo.

O grupo estabelece uma relação de equivalência: dois espaços-tempo de Brans-Dicke $(M, g^{(\omega)}, \varphi^{(\omega)}) \to (M, \tilde{g}^{(\tilde{\omega})}, \tilde{\varphi}^{(\tilde{\omega})})$ são equivalentes se eles são relacionados por uma transformação. Todos espaços-tempo (M, g, φ) relacionados por esse mapa formam uma classe de equivalência ε. Essa propriedade é crucial no entendimento do comportamento anômalo das soluções de Brans-Dicke quando $\omega \to \infty$ e $T = 0$. Como veremos a seguir, $\omega \to \infty$ constitui um elemento desse grupo e, portanto, o espaço-tempo obtido por essa transformação pertence à classe de equivalência ε.

Em geral, quando a matéria, representada por um tensor momento-energia $T^{(m)}_{\alpha\beta}$, é adicionada ao setor gravitacional da teoria, a invariância conforme descrita acima é quebrada. Na teoria de BD, por exemplo, veremos que a lei de conservação após uma transformação conforme fica

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = -\sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega + 3}} \tilde{T} \partial^\mu \tilde{\varphi}. \tag{2.36}$$

Entretanto, se seu traço $T^{(m)}$ é nulo, a equação de conservação

$$\nabla^\alpha T^{(m)}_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.37}$$

regulando a dinâmica dessa matéria é conformalmente invariante [37]. Como o tensor $T^{(m)}_{\alpha\beta}$ da matéria conforme fica inalterado pela transformação conforme, a ação completa (2.88) é invariante. A mudança de parâmetro $\omega \to \tilde{\omega}$ é novamente equivalente a uma transformação $\mathcal{F}_\alpha$ que leva a teoria de Brans-Dicke em uma classe de equivalência ε. Assim também a mudança de parâmetro $\omega \to \tilde{\omega}$ para valores grandes de $\tilde{\omega}$ é equivalente ao limite $\omega \to \infty$. Aqui chamamos a atenção para o fato de que a relatividade geral não faz parte dessa classe de equivalência ε, por isso, como veremos a seguir, desde que $T^{(m)} = 0$, não devemos esperar obter a RG no limite $\omega \to \infty$. Com a introdução desse método podemos facilmente obter o comportamento do campo de Brans-Dicke quando $\omega \to \infty$ e assim comparar com a teoria da relatividade geral

Sem perda de generalidade, tome o valor $\omega = 0$ do parâmetro de BD. De fato, podemos obter qualquer valor do parâmetro $\tilde{\omega}$ a partir de $\omega = 0$ usando $\mathcal{F}_\alpha$. Resolvendo a eq. (2.32) para α temos

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\tilde{\omega} + 3}}\right) \tag{2.38}$$

para $\tilde{\omega} > -3/2$. Quando $\tilde{\omega} \to \infty$ e $\alpha \to 1/2$ obtemos

$$\tilde{\varphi} \approx 1 \mp \left(\frac{3}{2\tilde{\omega}}\right)^{1/2} \ln \varphi, \tag{2.39}$$

que coincide com o comportamento "anômalo"expresso em (2.24). O valor do campo antigo φ correspondendo a $\omega = 0$ não é afetado pelo limite $\tilde{\omega} \to \infty$, e a única dependência de $\tilde{\varphi}$ em $\tilde{\omega}$ é a que vemos em (2.39). Em termos das equações de campo quando $\tilde{\omega} \to \infty$, o segundo termo do lado direito em (2.4),

$$\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\varphi}^2}(\tilde{\varphi}_{;\mu}\tilde{\varphi}_{;\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}^{;\alpha}\tilde{\varphi}_{;\alpha}), \tag{2.40}$$

não tende a zero, mas para

$$\frac{3}{2}(\varphi_{;\mu}\varphi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi^{;\alpha}\varphi_{;\alpha}) \tag{2.41}$$

onde (2.39) foi usada, e as equações de campo (2.4) não se reduzem às equações de Einstein com o mesmo tensor momento-energia $T^{(m)}_{\mu\nu}$. O comportamento assintótico do campo escalar determina se certa solução das equações de campo de BD convergem para a correspondente solução das equações de Einteis ou não. Pode ser mostrado que a expressão (2.40) não pode se anular identicamente, e está sempre presente nas equações de campo (2.4), com a única exceção correspondendo aos espaços de Einstein com $\varphi = constante$, e as equações de campo na aproximação de campo fraco em primeira ordem. O fato de que o limite $\omega \to \infty$ da teoria de BD nem sempre reproduz a RG sinaliza uma diferença conceitual entre as duas teorias. Na teoria de BD, o acoplamento gravitational é determinado por toda matéria no universo, de acordo com o princípio de Mach. Portanto é um tanto vago (apesar de que tecnicamente possível) considerar soluções de vácuo, para as quais $T^m = 0$ trivialmente, na teoria de BD. Uma excessão seria a situação em que o campo escalar domina sobre todas formas de matéria, como é o caso próximo da singularidade do "big bang"de espaços-tempo FRW em que φ se comporta como um fluido rígido,($P = \rho$). Matéria conforme, que também contém $T^m = 0$, não atua como fonte de φ em (2.5) à esse respeito. A teoria de Einstein, pelo contrário, com seu acoplamento gravitacional constante, permite-nos considerar importantes soluções no vazio [3] com $R_{\mu\nu} = 0$. Então o limite $\omega \to \infty$ não levará soluções de BD com $T^m = 0$ à soluções da RG, e correspondem a situações conceitualmente distintas.

2.3 Transformações conformes e referencial de Einstein

O uso de transformações conformes como ferrementa matemática em teorias escalares-tensoriais e outras teorias alternativas da gravidade é de grande utilidade [7, 10]. A idéia é realizar uma transformação conforme na métrica,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\varphi)g_{\mu\nu} \tag{2.42}$$

e redefinir o campo escalar, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\varphi)$, de modo a obter um novo conjunto de variáveis $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\varphi})$, em termos das quais o setor gravitacional da teoria assume a forma familiar da teoria da relatividade geral e o novo campo escalar, $\tilde{\varphi}$, tem uma densidade de energia cinética canônica. Esse novo conjunto de variáveis $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\varphi})$ é chamado de *referencial de Einstein*, em oposição às variáveis $(g_{\mu\nu}, \varphi)$ que constitui o **referencial de Jordan**.

Importante mencionar que mesmo sendo muito útil, a técnica de transformações conformes abriu um debate sobre se os dois referencias conforme são físicamente equivalentes, ou alternativamente, qual dos referenciais conformes seria o físico.

[3] Note que nesse caso o acoplamento gravitacional G desaparece das equações de campo, enquanto o mesmo não ocorre com o campo BD $\varphi = G^{-1}_{eff}$ nas equações de campo no vazio

De acordo com Dicke [7] e, mais recentemente, Faraoni [39], os dois referencias conformes são realmente equivalentes físicamente desde que levemos em conta o fato de que no referencial de Einstein, as unidades de comprimento, massa e tempo usados escalem com o campo escalar de modo apropriado. Muitos autores esquecem esse ponto, atribuindo significado físico ao referencial de Einstein com essas unidades *fixas*, e descartando o referencial de Jordan. Esse procedimento resulta em um teoria que é fisicamente diferente da original. Outros autores descartam o referencial de Einstein, como sendo não-físico, considerando o referencial de Jordan como o físico. Existe ainda uma terceira classe de autores que consideram os referenciais de Jordan e Einstein com unidades fixas como sendo fisicamente equivalentes. Para detalhes sobre cada um desses pontos de vista indicamos uma ótima revisão do tema em [10].

2.3.1 Referencial de Einstein

O fator conforme da transformação (2.42) que permite escrever o setor gravitacional da ação de BD (2.3) na forma da relatividade geral de Einstein é dado por [7]

$$\Omega^2 = \frac{\varphi}{\varphi_0}. \tag{2.43}$$

Então, a redefinição do campo escalar

$$\tilde{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{2\omega+3}{16\pi G}} \ln\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right) \tag{2.44}$$

com $\varphi_0 = \frac{1}{G}$, $\varphi \neq 0$ e $\omega > -3/2$, coloca o termo de densidade de energia cinética do campo escalar na forma canônica. O resultado é a formulação da teoria de BD no *referencial de Einstein*:

$$S = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}(\tilde{R} + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\varphi}_{,\alpha}\tilde{\varphi}_{,\beta}) + \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}e^{-8\sqrt{\frac{\pi G}{2\omega+3}}\tilde{\varphi}}\mathcal{L}_m. \tag{2.45}$$

A possibilidade de realizar a transformação conforme acima às vezes é usada como argumento para restringir os valores do parâmetro no referencial de Jordan a $\omega > -3/2$.

Olhando somente para a ação (2.45) poderíamos supor que no referencial de Einstein, a gravidade fosse descrita pela relatividade geral, mas temos duas diferenças básicas. Em primeiro lugar, o campo escalar livre $\tilde{\varphi}$ agindo como fonte de gravidade estará sempre presente, ou seja, não podemos considerar soluções das equações da campo no vazio,$\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$, no referencial de Einstein como é feito na relatividade geral. O campo $\tilde{\varphi}$ permeia o espaço-tempo e não pode ser eliminado, uma característica remanescente da origem cosmológica de φ (o inverso do acoplamento gravitacional determinado pela matéria distante) na teoria original de BD.

A segunda diferença, mais importante ainda, entre a teoria de Brans-Dicke formulada no referencial de Einstein e a relatividade geral é que o setor da matéria na lagrangeana agora é multiplicado por um fator exponencial, que descreve um acoplamento anômalo da matéria comum com o escalar $\tilde{\varphi}$ (anômalo porque não ocorre na RG). Esse acoplamento é responsável pelo fato que o tensor momento-energia $\tilde{T}_{\mu\nu}$ da matéria comum no referencial de Einstein, não satisfaz a equação de conservação usual (2.12), mas uma versão diferente como veremos adiante. Outras consequências, que mostraremos na próxima seção, são: a modificação da *equação geodésica* e da equação de *desvio geodésico*, e a violação do *princípio de equivalência* no referencial de Einstein.

Modificação da lei de conservação

Sob a transformação conforme (2.26) é fácil obter a transformação do tensor momento-energia a partir de

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\frac{\delta(\sqrt{-\tilde{g}}\mathcal{L}_m)}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = \Omega^{-2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = \Omega^{-2}T_{\mu\nu}. \tag{2.46}$$

Temos, também, que

$$\tilde{T}^{\mu}{}_{\nu} = \Omega^{-4}T^{\mu}{}_{\nu}, \qquad \tilde{T}^{\mu\nu} = \Omega^{-6}T^{\mu\nu}, \quad e \ \ \tilde{T} = \Omega^{-4}T. \tag{2.47}$$

Os coeficientes da conexão se transformam como

$$\left\{{}^{\nu}_{\alpha\mu}\right\}_g = \left\{{}^{\nu}_{\alpha\mu}\right\}_{\tilde{g}} - \frac{1}{\Omega}\left(\delta^{\nu}_{\mu}\partial_{\alpha}\Omega + \delta^{\nu}_{\alpha}\partial_{\mu}\Omega - \tilde{g}_{\mu\alpha}\tilde{g}^{\nu\beta}\partial_{\beta}\Omega\right) \tag{2.48}$$

$$\left\{{}^{\nu}_{\alpha\nu}\right\}_g = \left\{{}^{\nu}_{\alpha\nu}\right\}_{\tilde{g}} - \frac{4}{\Omega}\partial_{\alpha}\Omega. \tag{2.49}$$

Agora podemos obter a lei de conservação no referencial de Einstein da seguinte forma. Partindo da lei de conservação no referencial de Jordan, fazemos as substituições como indicado acima:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} &= \partial_{\mu}T^{\mu\nu} + \left\{{}^{\mu}_{\alpha\mu}\right\}_g T^{\alpha\nu} + \left\{{}^{\nu}_{\alpha\mu}\right\}_g T^{\mu\alpha} \\
&= \partial_{\mu}(\Omega^6\tilde{T}^{\mu\nu}) + \left[\left\{{}^{\mu}_{\alpha\mu}\right\}_{\tilde{g}} - \frac{4}{\Omega}\partial_{\alpha}\Omega\right](\Omega^6\tilde{T}^{\alpha\nu}) \\
&\quad + \left[\left\{{}^{\nu}_{\alpha\mu}\right\}_{\tilde{g}} + \frac{1}{\Omega}\left(\delta^{\nu}_{\mu}\partial_{\alpha}\Omega + \delta^{\nu}_{\alpha}\partial_{\mu}\Omega - \tilde{g}_{\mu\alpha}\tilde{g}^{\nu\beta}\nabla_{\mu}T^{\mu\nu}\right)\right](\Omega^6\tilde{T}^{\mu\alpha}) \\
&= \Omega^6\left[\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{T}^{\mu\nu} + \frac{\tilde{T}}{\Omega}\partial^{\mu}\Omega\right].
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Daqui, obtemos [10]

$$\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{T}^{\mu\nu} = -\frac{d\ln\Omega^2}{2d\varphi}\tilde{T}\partial^{\mu}\varphi, \tag{2.51}$$

e, levando em conta (2.43), temos

$$\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\varphi}\tilde{T}\partial^{\nu}\varphi \tag{2.52}$$

ou, ainda, em termos do escalar do referencial de Einstein (2.44),

$$\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{T}^{\mu\nu} = -\sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega+3}}\tilde{T}\partial^{\mu}\tilde{\varphi}. \tag{2.53}$$

Podemos agora deduzir a equação geodésica a partir de (2.53). Considere um fluido do tipo "poeira", sem pressão, descrito pelo tensor-momento energia

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \rho u^{\mu}u^{\nu} \tag{2.54}$$

e $\tilde{T} = \rho$. Da equação (2.53) segue

$$u^{\nu}u^{\mu}\tilde{\nabla}_{\mu}\rho + \rho u^{\nu}\tilde{\nabla}_{\mu}u^{\mu} + \rho u^{\mu}\tilde{\nabla}_{\mu}(u^{\nu}) = -\rho\frac{1}{2\varphi}\partial^{\nu}\varphi \tag{2.55}$$

Introduzindo um parâmetro afim λ ao longo das linhas de universo do fluido com tangente u^α, a equação (2.55) é escrita como

$$u^\nu\left(\frac{d}{d\lambda}\rho+\rho\tilde{\nabla}_\mu u^\mu\right)+\rho\left(\frac{d}{d\lambda}u^\nu+\frac{1}{2\varphi}\partial^\nu\varphi\right)=0, \tag{2.56}$$

o que é equivalente a

$$\frac{d}{d\lambda}\rho+\rho\tilde{\nabla}_\mu u^\mu=0 \tag{2.57}$$

e

$$\frac{d}{d\lambda}u^\nu=-\frac{1}{2\varphi}\partial^\nu\varphi. \tag{2.58}$$

A equação geodésica então é modificada de acordo com [10, 32] para

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda}+\left\{{}^{\nu}_{\alpha\mu}\right\}_{\tilde{g}}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda}=-\frac{1}{2\varphi}\partial^\nu\varphi=-\sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega+3}}\partial^\nu\tilde{\varphi} \tag{2.59}$$

no referencial de Einstein. Existe uma "quinta"força proporcional ao gradiente de $\tilde{\varphi}$ que se acopla da mesma maneira à qualquer partícula-teste. Por conta desse acoplamento, teorias escalares-tensoriais no referencial de Einstein são ditas não-métricas. A universalidade da queda livre -todos os corpos caem com a mesma aceleração em um campo gravitacional, independente de sua massa e composição- é violada pela correção da quinta-força à equação geodésica. Todas teorias métricas da gravidade, ao contrário, satisfazem o princípio de equivalência fraco ou de Einstein (WEP ou EEP) [31].

As equações de geodésicas nulas não são afetadas pela transformação conforme: não aparece correção da quinta-força no referencial de Einstein para partículas-teste sem massa. De fato as equações de geodésica nulas são obtidas das equações de Maxwell, e estas são invariantes sob transformações conformes em quatro dimensões espaço-temporais. Alternativamente, note que o tensor momento-energia do campo eletromagnético tem traço nulo, $T=0$, e portanto a equação de conservação (2.55) fica inalterada pela transformação conforme [10].

2.4 Soluções estáticas com simetria esférica

As soluções das equações de campo de Brans-Dicke para uma distribuição de massa estática simetricamente esférica, no vazio, já são conhecidas desde a apresentação da teoria [7]. Dentre elas, a que será de interesse para a nossa discussão é a chamada solução de *classe I* de Brans-Dicke, ou classe I BD. Tal solução é dada por

$$ds^2=e^{\alpha_0}\left(\frac{1-\frac{B}{\rho}}{1+\frac{B}{\rho}}\right)^{\frac{2}{\lambda}}dt^2-e^{\beta_0}\left(1+\frac{B}{\rho}\right)^4\left(\frac{1-\frac{B}{\rho}}{1+\frac{B}{\rho}}\right)^{\frac{2(\lambda-C-1)}{\lambda}}(d\rho^2+\rho^2d\Omega^2), \tag{2.60}$$

$$\varphi=\varphi_0\left(\frac{1-\frac{B}{\rho}}{1+\frac{B}{\rho}}\right)^{\frac{C}{\lambda}} \tag{2.61}$$

sendo $\alpha_0,\beta_0,\varphi_0,C,\lambda$ todos constantes, e

$$\lambda^2\equiv(C+1)^2-C(1-\frac{\omega C}{2}). \tag{2.62}$$

A constante $C = C(\omega)$ é uma função arbitrária do parâmetro ω. No limite de campo fraco a relação funcional é [41]

$$C = -\frac{1}{\omega + 2}. \tag{2.63}$$

Considerando essa expressão para C, e realizando uma transformação de coordenadas com

$$r = \rho(1 + \frac{B}{\rho})^2, \qquad B = \frac{r_0}{2}. \tag{2.64}$$

com

$$A(r) = A(r(\rho)) = 1 - \frac{2r_0}{r(\rho)} = \left(\frac{1 - \frac{B}{\rho}}{1 + \frac{B}{\rho}}\right)^2 \tag{2.65}$$

e

$$dr = \left(1 - \frac{B}{\rho}\right)\left(1 + \frac{B}{\rho}\right) d\rho. \tag{2.66}$$

e ainda, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, a solução toma a forma

$$ds^2 = A(r)^{m+1}dt^2 - A(r)^{n-1}dr^2 - r^2 A(r)^n d\Omega^2 \tag{2.67}$$

$$\varphi = \varphi_0 A(r)^{-\frac{m+n}{2}} \tag{2.68}$$

$$A(r) = 1 - \frac{2r_0}{r} \tag{2.69}$$

onde

$$\omega = -2\frac{m^2 + n^2 + nm + m - n}{(m+n)^2}. \tag{2.70}$$

Essa solução é conhecida como espaço-tempo de *Campanelli-Lousto* [41] [40]. Calculando a área de uma esfera de raio $r = r_0$ definida por $t = constante$ encontramos

$$A = \int \sqrt{g_{22}g_{33}} d\theta d\varphi = 4\pi r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^n |_{r=r_0} = 0 \tag{2.71}$$

A área é nula em $r = r_0$ para $n > 0$, configurando uma singularidade nua. A área é infinita para $n < 0$, o que configurará um buraco de minhoca [41]. Para ilustrar esse buraco de minhoca note que a coordenada "areal"

$$R = r(1 - \frac{2r_0}{r})^n \tag{2.72}$$

tende a infinito quando $r \to \infty$. A partir daí, quando nos aproximamos de r_0, a coordenada R atinge seu valor mínimo em $r_m = 2r_0(1-n)$ ($r_m > r_0$, pois $n < 0$) e finalmente, quando $r \to r_0$ temos $R \to \infty$. Portanto essa coordenada indica que temos duas regiões infinitas, conectadas por um valor mínimo (garganta) $r = r_m$. Para caracterizar sem ambiguidade essa solução devemos calcular os invariantes de curvatura, que deve colocar restrições mais fortes sobre os parâmetros.

O escalar de Kretschmann, como mostrado em [40], tem sua divergência dada em termos do escalar de curvatura $\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}$ que é

$$\bar{R} = \frac{(2\omega + 3)(m+n)^2 r_0^2}{r^4}\left(1 - \frac{2r_0}{r}\right)^{-(n+1)}, \tag{2.73}$$

o que claramente indica que temos uma singularidade nua em $r = r_0$, para $n > -1$, pois o escalar diverge nesse ponto. Temos um buraco de minhoca para $n < -1$, onde o escalar se anula [40, 41] .

2.4.1 Solução de Campanelli-Lousto no referencial de Einstein

Será de interesse para nós analisar a solução de Campanelli-Lousto [40] no referencial de Einstein. Para isso precisamos realizar a transformação conforme já conhecida para o referencial de Einstein $(\bar{g}_{\mu\nu}, \tilde{\varphi})$.

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\varphi}{\varphi_0} g_{\mu\nu} \qquad \tilde{\varphi} = \sqrt{\frac{2\omega+3}{16\pi}} \ln\varphi \tag{2.74}$$

Realizando a transformação, temos

$$d\bar{s}^2 = \varphi ds^2 = A(r)^{-\frac{m+n}{2}} \left(A(r)^{m+1} dt^2 - A(r)^{n-1} dr^2 - r^2 A(r)^n d\Omega^2 \right) \tag{2.75}$$

$$d\bar{s}^2 = A(r)^{\frac{m-n+2}{2}} dt^2 - A(r)^{\frac{n-m-2}{2}} dr^2 - r^2 A(r)^{\frac{n-m}{2}} d\Omega^2 \tag{2.76}$$

ou

$$d\bar{s}^2 = A(r)^S dt^2 - A(r)^{-S} dr^2 - r^2 A(r)^{1-S} d\Omega^2 \tag{2.77}$$

com $S = \frac{m-n+2}{2}$. Note que, agora, os parâmetros m, n aparecem somente na combinação $S = \frac{m-n+2}{2}$. Portanto, temos agora de fato somente um parâmetro livre, S, que em última instância é uma função determinada de ω. Com isso, tal solução toma a forma conhecida por Fisher-Janis-Newman-Winnicor-Wyman [42–44] em coordenadas de Schwarzshild. O campo escalar do referencial de Einstein fica

$$\tilde{\varphi} = -\sqrt{\frac{(1-S)(1+S)}{16\pi G}} \ln(1 - \frac{2r_0}{r}). \tag{2.78}$$

Para que o campo escalar seja real é necessário que $S \leq 1$. Como veremos a seguir, esse restrição fará com que essa solução exiba apenas uma singularidade nua.

Calculando a área de uma esfera de raio $r = r_0$ definida por $t = constante$, encontramos

$$A = \int \sqrt{g_{22}g_{33}} d\theta d\varphi = 4\pi r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{1-S} |_{r=r_0} = 0 \tag{2.79}$$

O escalar de Kretschmann, como mostrado em [48], tem sua divergência dada em termos do escalar de curvatura $\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}$ que é

$$\bar{R} = \frac{(1+S)(1-S)}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{S-2}, \tag{2.80}$$

o que claramente indica que temos uma singularidade nua em $r = r_0$, pois $0 < S < 1$, não havendo o menor resquício do buraco de minhoca presente na solução no referencial de Jordan.

2.5 Similaridades entre a teoria de BD e geometria de Weyl

Um dos objetivos desse trabalho é estender as idéias de E.Scholz, apresentadas em [8] onde é discutido o conteúdo de uma geometria de Weyl integrável contido na teoria de BD, as quais apresentamos essa relação a seguir. Nas subseções (2.5.1) e (2.5.2), apresentamos alguns resultados que fortalecem essas relações A partir da ação de BD, que está escrita em termos de quantidades riemannianas,

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}(R\Phi + \frac{\omega}{\Phi}\Phi_\alpha\Phi^\alpha) \tag{2.81}$$

com $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu} = \partial_\nu\{^{\alpha}_{\alpha\mu}\} - \partial_\alpha\{^{\alpha}_{\mu\nu}\} + \{^{\rho}_{\alpha\mu}\}\{^{\alpha}_{\rho\nu}\} - \{^{\rho}_{\mu\nu}\}\{^{\alpha}_{\rho\alpha}\}$, onde $\{^{\rho}_{\mu\nu}\}$ são os símbolos de Christoffel da métrica g, selecionamos as seguintes características [8]:

a Temos uma conexão $\nabla = \{^{\rho}_{\mu\nu}\}$ e um campo escalar Φ;

b Permitimos o rescalonamento da métrica e do campo escalar sem modificar a conexão;

c Utilizamos amplamente a transformação entre referenciais.

Apenas com essas características, vemos que essa teoria especifica uma variedade de Weyl, (M, g, Φ). Dois referenciais exercem papel central: **O referencial de Jordan** e o **referencial de Einstein**.

No *referencial de Jordan*, a conexão é a de Levi-civita da métrica g. Isso implica que o campo de Weyl é nulo, ou constante, o que identifica esse referencial ao **referencial de Riemann** de uma variedade de Weyl [8], (M, g, Φ_0).

No *referencial de Einstein*, a conexão afim é diferente da conexão de Levi-Civita relativamente à métrica $\tilde{g}$. Visto que a maioria dos autores escreve a equação de geodésica em termos da conexão de Levi-civita da métrica $\tilde{g}$, o resultado é uma equação de movimento modificada, o que é interpretado como ("quinta") força [8]. Como mostraremos mais adiante, essa equação corresponde a geodésicas de Weyl. Portanto identificamos o referencial de Einstein com o **referencial de Weyl** $(M, g, \tilde{\Phi})$.

Por tanto, fica claro o porquê do debate de qual referencial deve ser considerado como "físico". Geralmente, não é notado o caráter invariante do movimento das partículas e nem sempre fica claro o caráter equivalente, visto que esses referenciais pertencem à mesma classe de equivalência conectados por uma transformação de Weyl.

No seu artigo de 1962, que introduz as transformações conformes na teoria, Dicke argumenta:

> *"It is evident that the particular values of the units of mass, length, and time employed are arbitrary and that the laws of physics must be invariant under a general coordinate dependent change of units"* [7].

Por *"mudança de unidades geralmente dependente de coordenadas"*, Dicke indica um rescalonamento das unidades básicas dependente do ponto no espaço-tempo. As unidades usuais são: de tempo t, comprimento l, e massa m. Por exemplo, no referencial de Jordan, as unidades de tempo, comprimento e massa, são constantes, enquanto o acoplamento gravitacional,$G = \frac{1}{\Phi}$, varia. Já no referencial de Einstein, relacionado ao de Jordan por uma transformação de unidades, as unidades de tempo, comprimento e massa escalam com o fator conforme, dependem do ponto e o acoplamento gravitacional G_N se torna constante.

Essa liberdade na escolha das unidades e a exigência de que as leis da física devem ser invariantes sob transformações locais de unidade é uma condição facilmente satisfeita pelos espaços-tempo de Weyl, pois essa estrutura incorpora um grupo de transformação de unidades de medida,(1.2), e permite a construção de invariantes frente a essas transformações. Portanto, a geometria de Weyl é uma estrutura melhor adaptada à teoria de BD do que a geometria riemanniana [8]

2.5.1 A transformação de Weyl como transformação de unidades

Nessa seção, vamos mostrar que realizar uma transformação de Weyl na ação de Brans-Dicke (2.88) é idêntico a realizar uma transformação de "unidades dependentes do ponto", ou seja, a transformação conforme que relaciona o referencial de Jordan ao referencial de Einstein.

Na seção anterior, identificamos o referencial de Jordan com o nosso referencial *riemanniano* $(M, g, 0)$, ou seja, a conexão é de Levi-Civita em relação à métrica g. Portanto, o campo de Weyl é nulo ou constante. Por conveniência vamos escolher um valor constante qualquer, denotado por $\phi = \phi_0$. A transformação de Weyl que vamos realizar, a partir de (1.2), é[4]

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-f} g_{\mu\nu} \qquad \tilde{\phi} = \phi_0 - f. \tag{2.82}$$

Então, reescrevendo a ação de BD com a redefinição $\ln \Phi = -\tilde{\phi}$, temos

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\tilde{\phi}} (R + \omega g^{\alpha\beta} \tilde{\phi}_\alpha \tilde{\phi}_\beta) + \int d^4x \sqrt{-g} L_m(g) \tag{2.83}$$

Realizando a transformação de Weyl, temos

$$\sqrt{-g} e^{\tilde{\phi}} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = (\sqrt{-\tilde{g}} e^{-2f})(e^{\tilde{\phi}})(\tilde{g}^{\mu\nu} e^f) \tilde{R}_{\mu\nu} = \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} e^{\tilde{\phi} - f} \tag{2.84}$$

para o primeiro termo, e, para o segundo termo,

$$\sqrt{-g} e^{\tilde{\phi}} g^{\mu\nu} \tilde{\phi}_\mu \tilde{\phi}_\nu = (\sqrt{-\tilde{g}} e^{-2f})(e^{\tilde{\phi}})(\tilde{g}^{\mu\nu} e^f) \tilde{\phi}_\mu \tilde{\phi}_\nu = \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\phi}_\mu \tilde{\phi}_\nu e^{\tilde{\phi} - f} \tag{2.85}$$

Como a transformação de Weyl escolhida implica $\tilde{\phi} - f = \phi_0$, escrevendo $e^{-\phi_0} = G$, nos dá

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} (\tilde{R} + \omega \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\phi}_\alpha \tilde{\phi}_\beta) + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{-2(\tilde{\phi} - \phi_0)} L_m(\tilde{g}). \tag{2.86}$$

Para colocar na forma conhecida do referencial de Einstein, basta redefinir o campo escalar por

$$\tilde{\varphi} = \sqrt{\frac{2\omega}{16\pi G}} (\tilde{\phi} - \phi_0), \tag{2.87}$$

e a ação toma a forma (2.45), ou seja

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{\tilde{R}}{16\pi G} + \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\beta \right) + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{-8\sqrt{\frac{\pi G}{2\omega}} \tilde{\varphi}} L_m(\tilde{g}). \tag{2.88}$$

Note que a única diferença é que no fator exponencial que aparece na lagrangiana da matéria aparece o valor (2ω) ao invés de $(2\omega + 3)$, isso ocorre porque quando realizamos uma transformação conforme, como geralmente é feito em Brans-Dicke, (2.45), o escalar de curvatura se transforma adicionalmente com um termo cinético do tipo $(\frac{3}{2} \varphi_\alpha \varphi^\alpha)$, e esse termo não aparece sob uma transformação mais simples, como em (2.85).

[4] Note que, em relação à transformação (1.2), fizemos $f \to -f$, o que indica que estamos realizando a transformação inversa (saindo do referencial de Riemann pra um referencial de Weyl genérico), com isso mantemos a convesão da tese unificada, de modo que em cada referencial de Weyl $(M, \tilde{g}, \tilde{\phi})$ tenhamos $\nabla_\alpha \tilde{g}_{\mu\nu} = +\tilde{\phi}_\alpha \tilde{g}_{\mu\nu}$. Poderíamos, o invés de mudar o sinal da função f, estabelecer que a métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ sempre designasse o referencial Riemanniano, mas aí teríamos que reescrever toda discussão desse capítulo em termos dessa métrica. A convensão adotada de mudar o sinal de f tem consequência mínima e só será feita nessa seção.

2.5.2 Conservação de energia-momento modificada e geodésicas de Weyl

A partir da discussão na seção (2.3.1), vimos que a equação de conservação é modificada, de modo que, agora, a matéria passa a interagir diretamente com o campo escalar, o que implica na modificação da equação de geodésica. Nessa seção, vamos mostrar que esse efeito, as vezes chamado "anômalo", ocorre porque estamos analisando as geodésicas da métrica $\tilde{g}$. Se, ao invés disso, analisarmos as geodésicas de Weyl, veremos que as partículas seguem, de fato, essas trajetórias, *o que implica que partículas livres no referencial de Einstein se movem em geodésicas de Weyl.* Para mostrar isso vamos partir da equação (2.53), que reescrevemos aqui para conveniência do leitor:

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = -\sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega+3}}\tilde{T}\partial^\nu\tilde{\varphi}. \tag{2.89}$$

Com a redefinição do campo escalar

$$-\sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega+3}}\tilde{\varphi} = \tilde{\phi}, \tag{2.90}$$

fica

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\tilde{T}}{2}\partial^\nu\tilde{\phi}. \tag{2.91}$$

Vamos agora reescrever a conexão $\tilde{\nabla}$, que é a Levi-Civita da métrica $\tilde{g}$, em termos da conexão de Weyl $\tilde{\nabla}^W$, a partir da expressão (1.3) do capítulo 1, o que resulta em

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{\nabla}^W_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} - 3\tilde{\phi}_\mu\tilde{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\tilde{T}\tilde{\phi}^\nu \tag{2.92}$$

Usando essa expressão em (2.91) obtemos

$$\tilde{\nabla}^W_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 3\tilde{\phi}_\mu\tilde{T}^{\mu\nu}. \tag{2.93}$$

Agora, para obter a equação de geodésicas de Weyl, vamos usar um fluido perfeito não-interagente, ou seja, poeira. Então, $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$, $u^\alpha u_\alpha = 1$, $u^\alpha \nabla^W_\gamma u_\alpha = -\frac{\phi_\gamma}{2}$ e $u_\alpha \nabla^W_\gamma u^\alpha = \frac{\phi_\gamma}{2}$. A equação (2.93) fica

$$u^\beta\tilde{\nabla}^W_\alpha(\rho u^\alpha) + \rho u^\alpha\tilde{\nabla}^W_\alpha u^\beta \;=\; 3\tilde{\phi}_\alpha\rho u^\alpha u^\beta. \tag{2.94}$$

Multiplicando (2.94) por u_β, temos

$$\tilde{\nabla}^W_\alpha(\rho u^\alpha) \;=\; \frac{5}{2}\rho\tilde{\phi}_\alpha u^\alpha \tag{2.95}$$

Finalmente, substituindo essa expressão em (2.94), obtemos temos a equação de movimento

$$u^\alpha\tilde{\nabla}^W_\alpha u^\beta \;=\; \frac{1}{2}\tilde{\phi}_\alpha u^\alpha u^\beta, \tag{2.96}$$

que, aparentemente, não descreve o movimento de partículas livre. Todavia, introduzindo o parâmetro λ de uma curva cujo vetor tangente é $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$, (4.19) toma a forma

$$\frac{D}{d\lambda}\left(\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right) - \frac{1}{2}\frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda}u^\beta \;=\; 0, \tag{2.97}$$

$$\tag{2.98}$$

ou ainda,

$$e^{\frac{-\phi}{2}}\frac{D}{d\lambda}\left(e^{\frac{-\tilde{\phi}}{2}}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}\right) = 0. \tag{2.99}$$

Assim, apenas com a reparametrização $d\sigma = e^{\frac{\tilde{\phi}}{2}}d\lambda$, temos, finalmente,[5]

$$\frac{D}{d\sigma}\left(\frac{dx^{\beta}}{d\sigma}\right) = 0 \tag{2.100}$$

Ou seja, a equação acima descreve o movimento geodésico numa geometria de Weyl. Portanto, a afirmação de que no referencial de Einstein existe uma "quinta"força nada mais é do que uma consequência do uso de geodésicas riemannianas ao invés das geodésicas de Weyl. Desse modo, mantemos a validade do princípio de equivalência em ambos referenciais, Jordan e Einstein, já que a conexão de Weyl é invariante frente às transformações de Weyl. No referencial de Jordan (identificado com o referencial de Riemann), a conexão de Weyl é idêntica à conexão de Levi-Civita da métrica g.

[5]Como veremos no próximo capítulo essa reparametrização consiste em usar o tempo próprio invariante numa variedade de Weyl, que ´e equivamente a usar o tempo próprio com unidades não constantes, $\tau \to e^{\frac{\tilde{\phi}}{2}}\tau$

Capítulo 3

Teoria escalar-tensorial geométrica

É fato bem conhecido que existem no mínimo dois métodos diferentes de se obterem as equações de campo da teoria da relatividade geral(RG) de Einstein: o *método métrico* ou de Hilbert em que o tensor métrico é tomado como única variável independente, a geometria riemanniana sendo adotada *a priori*; e o *método de Palatini* em que temos como variáveis independentes a métrica e uma conexão simétrica. No caso da RG acontece que ambos métodos levam às mesmas equações, com a vantagem de que pelo método de Palatini a geometria riemanniana é deduzida de um princípio variacional [23] em que a conexão de Levi-Civita surge como um extremo da ação.

Para teorias gravitacionais com ação mais geral que a de Einstein-Hilbert já não podemos mais esperar que o resultado seja idêntico se escolhermos um ou outro método variacional. Por exemplo, é bem conhecido que a substituição do escalar de curvatura por uma função genérica $f(R)$ leva a distintas equações de campo dependendo de qual dos métodos variacionais é usado nas suas derivações [6]. Ao usar o método de Palatini, uma espécie de estrutura bi-métrica no espaço-tempo é identificada e conectada com as transformações conformes em teorias escalar-tensoriais [50]. A aplicação do método de Palatini também foi explorada em uma classe de teorias escalares-tensoriais por Lindström [51], onde foi identificada uma conexão diferente da de Levi-Civita. Com isso, vemos que o método de Palatini está diretamente relacionado com a exploração de propriedades geométricas da ação gravitacional e possibilita explorar características que vão além da geometria riemanniana.

Neste capítulo, vamos explorar o conteúdo geométrico de teorias escalar-tensoriais (TET) através do método de Palatini. Mais especificamente usaremos a teoria original de Brans-Dicke (BD) [7], que é conhecida como protótipo das teorias escalares-tensoriais, denotaremos daqui em diante BD. Veremos que, ao variar a ação de BD em relação à conexão, obtemos uma condição de compatibilidade que corresponde à geometria de Weyl integrável. Com isso, encontramos um ambiente que contém naturalmente os graus de liberdade gravitacionais, um escalar e um tensor, como entes geométricos.

A maneira de acoplar matéria e gravitação agora deve incorporar ambos os campos gravitacionais,g e ϕ, ao contrário do que é feito na versão original das teorias escalares-tensoriais, em que o acoplamento é mínimo, à maneira da (TRG). Veremos que essa modificação é suficiente para que tenhamos o movimento de particulas descrito por geodésicas de Weyl, satisfazendo, assim, o *princípio de equivalência de Einstein* (PEE) ou *fraco*. Lançando mão de uma característica marcante da geometria de Weyl, as *transformações de calibre ou de Weyl*, que definem referenciais, exploramos a analogia com as transformações conformes entre referenciais das teorias escalares-tensoriais e mostramos que em nenhum referencial de Weyl é violado o princípio de equivalência, ao contrário das teorias escalares-tensorias formuladas em geometrias riemannianas.

Fazendo uso da liberdade de escolha de referencial, consideramos uma transformação para o referencial riemanniano, onde a teoria geométrica toma a forma da RG com um campo escalar sem massa neste referencial, apresentamos soluções correspondentes a de uma distribuição estática de massa M com simetria esférica e discutimos a presença de buracos de minhoca e singularidades nuas. A validade dos resultados num referencial de Weyl genérico é discutida através da construção de invariantes.

3.1 Não-metricidade em teorias escalares-tensoriais (ST)

A maneira de descrever teorias escalares-tensoriais (ST) de um ponto de vista completamente geométrico pode ser alcançada, como já foi dito, com a adoção do método variacional de Palatini. Sem perda de generalidade, para ilustrar esse fato vamos adotar a teoria de BD. Iniciamos com a ação de Brans-Dicke [7]

$$S_G = \int d^4x\sqrt{-g}(\Phi R + \frac{\omega}{\Phi}\Phi^{,\alpha}\Phi_{,\alpha}), \tag{3.1}$$

onde R é o escalar de curvatura, e Φ é o campo escalar de Brans-Dicke. Visto que usaremos o método variacional de Palatini, o escalar de curvatura é definido como $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma)$, onde o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, assim como o tensor de Riemann $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}(\Gamma)$, são consideradas funções apenasda conexão.

Para uma simplificação na notação, façamos a mudança de variável $\Phi = e^{-\phi}$. A ação, então, fica

$$S_G = \int d^4x\sqrt{-g}e^{-\phi}(R + \omega\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}). \tag{3.2}$$

Realizando a variação de (3.2) em relação à conexão temos

$$\nabla_\alpha(\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\nu}) = 0, \tag{3.3}$$

que pode ser escrito, na sua forma covariante, como

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \phi_\alpha g_{\mu\nu}. \tag{3.4}$$

Vemos claramente que a equação acima expressa a chamada condição de compatibilidade de Weyl entre a metrica e a conexão (também chamada de condição de não-metricidade de Weyl). Dessa maneira o campo escalar ϕ adquire um caráter geométrico claro, enquanto o espaço-tempo é naturalmente munido de uma conexão de Weyl integrável $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ que, em termos da métrica g e do campo escalar ϕ, fica dada por

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\phi_\nu + g_{\beta\nu}\phi_\mu - g_{\nu\mu}\phi_\beta). \tag{3.5}$$

Depois de determinada a geometria do espaço-tempo, é natural que o próximo passo seja considerar a variação da ação em relação ao campo escalar geométrico. Isto consiste em propor uma extensão do método variacional de Palatini, pois temos três entidades geométricas independentes envolvidas no processo de variação: a métrica, o campo escalar e a conexão. A métrica é responsável pelas medidas de ângulos e comprimentos, a conexão regula a regra de transporte paralelo e define a derivada covariante de campos vetoriais e tensoriais, enquanto o campo escalar define a não-metricidade, também participando do transporte paralelo de vetores ao modificar seus comprimentos em cada ponto do espaço-tempo.

Antes de passar para as variações da métrica e do campo escalar vamos estabelecer como a matéria será confinada a se mover em geodésicas de Weyl. Para isso, faremos uma breve digressão sobre a construção de invariantes para as transformações introduzidas.

3.1.1 Construindo invariantes

As trasformações de Weyl dadas por

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu} \tag{3.6}$$
$$\tilde{\phi} = \phi + f, \tag{3.7}$$

definem uma relação de equivalência entre referenciais que mantém a condição de compatibilidade $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \phi_\alpha g_{\mu\nu}$ invariante. Estes referenciais serão designados por (M, g, ϕ). Portanto parece natural focar a atenção na classe de equivalência desses referenciais ao invés de se ater a algum referencial particular. Assim, uma variedade de Weyl pode ser pensada uma classe de referenciais (M, g, ϕ). Desse modo, variedades de Weyl podem ser caracterizadas escolhendo um referencial da classe de equivalência e aplicando somente construções invariantes ao referencial escolhido. Nesse sentido, será natural redefinir alguns conceitos riemannianos para satisfazer a condição de invariância segundo as transformações de Weyl.

Para construir quantidades geométricas invariantes, vamos começar pelos objetos mais básicos ao nosso dispor. Note que a combinação entre o campo de Weyl e a métrica dada por

$$\gamma_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu} \tag{3.8}$$

já é em si um invariante. Assim, objetos construídos exclusivamente com essa combinação, chamada de *métrica efetiva*, serão invariantes. De interesse para nós será a transformação para o referencial riemanniano, $(M, \tilde{g}, 0)$, onde o campo de Weyl é nulo. Nesse caso a combinação invariante acima toma a forma $\tilde{g}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$.

Como vimos no capítulo 1, os coeficientes da conexão também são invariantes em relaç ao a (3.32) e (3.33). Daí as componentes do tensor de curvatura

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu}, \quad e^\phi g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^\phi R \tag{3.9}$$

serem também invariantes sob as transformações de Weyl (3.32) e (3.33).

Visto que no presente trabalho trataremos de caracterizar horizontes de eventos através do cálculo de áreas no entorno de singularidades, no mesmo espírito discutido acima devemos modificar a integração de formas exteriores. Por exemplo, a forma volume p-dimensional riemanniana,

$$\Omega = \int \sqrt{-g} dx^1 \wedge ... \wedge dx^p \tag{3.10}$$

que não é invariante sob (3.32) e (3.33), deve ser substituída por

$$\Omega = \int \sqrt{-g} e^{-\frac{p}{2}\phi} dx^1 \wedge ... \wedge dx^p \tag{3.11}$$

Outra importante modificação concerne a definição de comprimento de uma curva ou *comprimento de arco*, Δs, que nas teorias métricas da gravitação formam a base da hipótese do relógio: uma partícula livre, com um relógio, se movendo ao longo de uma curva mede o tempo próprio, $\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c}$. Assim, para fazer com que as partículas livres se movam em geodésicas de Weyl, que são invariantes sob as transformações (3.32) e (3.33), devemos garantir que elas meçam um tempo próprio invariante. Com isso em mente, devemos redefinir o tempo próprio $\Delta\tau$ medido por um relógio movendo-se ao longo de uma curva tipo-tempo parametrizada $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ entre $x^\mu(a)$ e $x^\mu(b)$, de tal maneira que $\Delta\tau$ seja o mesmo em todos os referenciais de Weyl. Isso nos leva seguinte definição

$$\Delta\tau = \int_a^b e^{-\frac{\phi}{2}} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda.$$

É fácil ver que $\Delta\tau$ é invariante, e se reduz ao tempo próprio da relatividade geral no referencial riemanniano. Além disso, $\Delta\tau$ pode ser obtido diretamente da relatividade especial pela prescrição $\eta_{\mu\nu} \to e^{-\phi} g_{\mu\nu}$.

Em se tratando do movimento de partículas em geodésicas e da medição de tempo próprio estamos tratando do comportamento da matéria. Na próxima seção consideraremos uma *prescrição* geral que acopla o campo escalar diretamente com a matéria e é compatível com a redefinição do tempo próprio acima.

O acoplamento com a matéria

Sendo o espaço-tempo descrito por dois campos geométricos, $g_{\mu\nu}$ e ϕ, é razoável esperar que ambos se acoplem com a matéria, de preferência de um modo invariante, como já indicado na seção anterior. Mais uma vez, vamos apelar para a combinação invariante que aparece em (3.8), a chamada métrica efetiva, para construir a ação da matéria S_m. A ação mais simples que pode preencher os requisitos exigidos é

$$S_m = \int \sqrt{-g} e^{-2\phi} d^4x L_m(e^{-\phi} g, \Psi, \nabla_W \Psi)$$

onde L_m designa a lagrangiana da matéria, Ψ representa genericamente os campos de matéria e ∇_W é a conexão de Weyl. A langrangiana L_m então é dada, a partir da sua contraparte na relatividade especial, pela prescrição

$$\eta_{\mu\nu} \to e^{-\phi} g_{\mu\nu}, \quad \partial \to \nabla_W \tag{3.12}$$

.

Para compor as equações de campo, o tensor momento-energia será definido por

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \delta \int \sqrt{-g} e^{-2\phi} d^4x L_m(e^{-\phi} g, \Psi, \nabla_W \Psi). \\ &= \int \sqrt{-g} e^{-2\phi} d^4x T_{\mu\nu}(e^{-\phi} g, \Psi, \nabla_W \Psi) \delta(e^{\phi} g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

onde a variação do lado esquerdo deve ser realizada simultaneamente em $g_{\mu\nu}$ e ϕ. Com isso, ao realizar as variações da métrica e do campo escalar, para obtermos as equações de campo, teremos a expressão acima fornecendo as contribuições

$$\int \sqrt{-g} e^{-2\phi} d^4x T_{\mu\nu}(e^{-\phi} g, \Psi, \nabla_W \Psi) \left(e^{\phi} \delta g^{\mu\nu} + e^{\phi} g^{\mu\nu} \delta\phi \right) = \int \sqrt{-g} e^{-\phi} d^4x \left(T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + T \delta\phi \right),$$

onde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ e ressaltamos que para escrever explicitamente o tensor momento-energia nas equações de campo é necessário usar a prescrição (3.12).

Fluido perfeito

Para ilustrar como funciona nossa prescrição, considere no espaço-tempo de Minkowski o tensor momento-energia de um fluido perfeito com densidade ρ, pressão P e quadrivelocidade $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ satisfazendo $\eta_{\mu\nu}u^\alpha u^\beta = 1$, com $d\tau = \sqrt{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$

$$T^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu(\rho + P) - \eta^{\mu\nu}P \tag{3.13}$$

Usando a prescrição acima temos que $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\bar{\tau}}$, com $d\bar{\tau}^2 = e^{-\phi}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ o tensor-momento energia se torna

$$T^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu(\rho + P) - \gamma^{\mu\nu}P. \tag{3.14}$$

Evidenciando a dependência com o campo ϕ vem

$$T_{\mu\nu}(\phi, g) = e^{-\phi}\left[(\rho + P)u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}P\right], \tag{3.15}$$

onde, por convenção, os índices são abaixados e levantados com a métrica g e a 4-velocidade u está parametrizada pelo tempo próprio, $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, $d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$.

Compactamente,

$$T_{\mu\nu}(\phi, g) = e^{-\phi}T_{\mu\nu}(g). \tag{3.16}$$

Campo escalar

Para um campo escalar ξ com massa m (constante na relatividade especial) o tensor momento energia é dado por

$$T_{\mu\nu}(\eta, \xi) = \partial_\mu\xi\partial_\nu\xi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi\partial_\beta\xi - m\xi^2\right). \tag{3.17}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(\phi, g, \xi) &= \partial_\mu\xi\partial_\nu\xi - \frac{1}{2}e^{-\phi}g_{\mu\nu}\left(e^\phi g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi\partial_\beta\xi - m\xi^2\right) \\ &= \partial_\mu\xi\partial_\nu\xi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi\partial_\beta\xi - (me^{-\phi})\xi^2\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Essa última expressão sugere que a massa das partículas elementares escalares escalem com o campo de Weyl, isto é, $\bar{m}_\xi = me^{-\phi}$.

3.1.2 Equações de campo

Tendo motivado a introdução da geometria de Weyl integrável na descrição da teoria de Brans-Dicke e discutido como fazer o acoplamento da gravitação com a matéria, podemos, agora, fazer a variação da ação em relação a métrica g e obter as equações de campo em termos das curvaturas de Weyl. Assim, temos

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu}\phi_{,\alpha}, \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= -\kappa T_{\mu\nu} - \omega(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}), \\ \Box\phi - \phi^{;\alpha}\phi_{,\alpha} &= 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde $\Box\phi = \nabla_\alpha \phi^\alpha$ é calculado com a conexão de Weyl. Em termos das curvaturas riemannianas temos $R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \phi_{\mu;\nu} - \frac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\phi^\alpha\phi_\alpha - \tilde{\Box}\phi\right)$ e $R = \tilde{R} - 3\tilde{\Box}\phi + \frac{3}{2}\phi^\alpha\phi_\alpha$, onde a derivada covariante riemanniana da métrica g está sendo denotada por ";" e $\tilde{\Box}\phi = \phi^{\alpha}_{;\alpha}$, todas quantidades com o *"tilde"*, $\tilde{A}$, sendo riemannianas, ou seja, calculadas somente com a métrica g.

Em termos riemannianos, as equações, então, se apresentam na forma:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = -\kappa T_{\mu\nu} - (\omega - \frac{1}{2})\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\omega + \frac{1}{2})\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} + \phi_{\nu;\mu} - g_{\mu\nu}\tilde{\Box}\phi \quad (3.20)$$

Para comparar com as equações de Brans-Dicke vamos escrever a equação acima em termos da variável $\Phi = e^{-\phi}$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = -\kappa T_{\mu\nu} - \frac{2\omega - 3}{2\Phi^2}\left(\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Phi^{,\alpha}\Phi_{,\alpha}\right) - \frac{1}{\Phi}\left(\Phi_{\nu;\mu} - g_{\mu\nu}\tilde{\Box}\Phi\right) \quad (3.21)$$

e

$$\tilde{\Box}\Phi = 0. \quad (3.22)$$

Note que na ausência de matéria as equações de campo são idênticas, a diferença entre a teoria métrica de Brans-dicke e a presente abordagem geometrica consistindo no movimento geodésico. Na presença de matéria, a equação do campo Φ não se altera, enquanto que a equação do campo métrico $g_{\mu\nu}$ tem como fonte um tensor-momento energia, $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(g, \Phi)$ construído a partir da relatividade especial pela prescrição descrita anteriormente. Além disso, na equação do campo métrico aparece o parâmetro de Brans-Dicke modificado $\omega' = \omega - 3/2$, essa modificação sendo característica do método de Palatini, já tinha sido identificada por Lindström [51].

Dessas equações, a lei de conservação associada com a segunda identidade de Bianchi é

$$\nabla_\alpha(e^\phi T^\alpha_\mu) = 0. \quad (3.23)$$

Note que o campo de Weyl aparece explicitamente na lei de conservação. Como seria esperado, há uma interação dos campos de matéria com o campo de Weyl, afinal, este faz parte do espaço-tempo. Note tambem que devido a propriedade de não-metricidade, a expressão acima adquire a forma diferente, seja levantando o indice μ ou abaixando o indice α do tensor-momento energia.

3.1.3 Limite newtoniano

Para determinar o limite de campo fraco e de baixas velocidades vamos fazer $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e o campo $h_{\mu\nu}$ é tal que suas componentes satisfazem $|h_{\mu\nu}| << 1$. Para o campo de Weyl, teremos $\phi \approx a + \epsilon$, com a constante e $\epsilon << a$. É conveniente escrevermos a equação (3.19) na forma

$$R_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) - \omega\phi_\mu\phi_\nu. \quad (3.24)$$

Para tomar o limite da gravitação newtoniana será suficiente considerarmos os termos de 1^a ordem nas equações com as perturbações $h_{\mu\nu}$ e ϵ considerando somente a componente (00) das equações acima. Para o lado esquerdo teremos $R_{00} \approx -\partial_i\Gamma^i_{00}$, com $\Gamma^i_{00} \approx -\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j(h_{00} - \epsilon)$. Para o lado direito, usando o tensor momento energia (3.16) de um fluido tipo poeira, desprezando pressões e considerando a fonte em repouso, temos

$T_{00} = e^{-\phi}\left(\rho u_0 u_0\right) \approx e^{-a}(1-\epsilon)\rho$ e $T = e^{-a}(1-\epsilon)\rho$. Sendo as densidades já de primeira ordem em nossas aproximações teremos $T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}T \approx \frac{1}{2}e^{-a}\rho$,

$$\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_i\partial_j(h_{00}-\epsilon) = -\frac{\kappa}{2}G\rho, \tag{3.25}$$

onde $G = e^{-a}$. Lembrando da equação de campo newtoniana

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G_n\rho \tag{3.26}$$

onde G_n é constante newtoniana, temos $\frac{\varphi}{4\pi G_n} = \frac{\epsilon - h_{00}}{\kappa G}$. Resta-nos, agora, determinar o limite das equações de movimento. Como vimos, a equações de movimento de partículas são as equações de geodésicas de Weyl

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} \tag{3.27}$$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{00}\frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dx^0}{d\lambda} \tag{3.28}$$

Portanto,

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = -\nabla\left(\frac{\epsilon - h_{00}}{2}\right) \tag{3.29}$$

comparando com a equação de movimento newtoniana

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = -\nabla(\varphi), \tag{3.30}$$

donde identificamos $\varphi = \frac{\epsilon - h_{00}}{2}$ o que resulta na identificação de $\kappa = 8\pi$ e

$$G = G_n. \tag{3.31}$$

Vemos que, ao contário da teoria de BD, não observamos qualquer modificação na constante newtoniana.

3.2 Transformação de Weyl: relação com a relatividade geral

Até agora nos restringimos a um referencial de Weyl genérico (M, g, ϕ), ou seja, um referencial definido por uma variedade diferenciável M munida de uma métrica g e um campo escalar de Weyl não-nulo ϕ. Podemos, no entanto, realizar uma transformação para o referencial de Riemann, onde o campo de Weyl é constante, isto é, $\bar{\phi} = \phi_0$. Basta escolher a função arbitrária f como $f = \phi_0 - \phi$. As transformações de Weyl serão

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-(\phi-\phi_0)}g_{\mu\nu} \tag{3.32}$$

$$\tilde{\phi} = \phi_0, \tag{3.33}$$

Com isso temos um referencial $(M, \tilde{g}, \phi_0)$. Vejamos como a ação e as equações de campo são afetadas. Os termos da ação (3.2) [1]

[1] Temos as relações adicionais $\sqrt{-\tilde{g}} = e^{-2(\phi-\phi_0)}\sqrt{-g}$ e $\tilde{g}^{\mu\nu} = e^{(\phi-\phi_0)}g^{\mu\nu}$

$$\sqrt{-g}e^{-\phi}R = e^{+2(\phi-\phi_0)}\sqrt{-\tilde{g}}e^{-\phi}e^{-(\phi-\phi_0)}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} = \sqrt{-\tilde{g}}e^{-\phi_0}\tilde{R} \tag{3.34}$$

$$\sqrt{-g}\phi_\alpha\phi_\beta g^{\alpha\beta}e^{-\phi} = \sqrt{-\tilde{g}}\phi_\alpha\phi_\beta\tilde{g}^{\alpha\beta}e^{-\phi_0} \tag{3.35}$$

E temos portanto

$$S = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}e^{-\phi_0}(\tilde{R}(\tilde{g},0) + \omega\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}) + 8\pi S_m(\tilde{g},\Psi,\nabla^{\tilde{g}}\Psi), \tag{3.36}$$

onde $\tilde{R}(\tilde{g},\phi_0) = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu}(\tilde{g},0)$ são termos inteiramente riemannianos (pois $\tilde{\phi} = \phi_0$). É importante notar a presença na ação do termo envolvendo ϕ num referencial onde, formalmente, o campo de Weyl é dado por uma constante, $\tilde{\phi} = \phi_0$. A presença desse termo deve ser considerada como resquício da transformação sofrida pela ação. Como veremos, no referencial riemanniano o campo ϕ não desempenha um papel geométrico [2], como ocorre no referencial de Weyl, e deve ser interpretado como um campo físico. Assim a ação resultante é a de Einstein-Hilbert, da RG, minimamente acoplada com um campo escalar sem massa e com o acoplamento mínimo com a matéria. Com esse resultado, podemos identificar a constante de acoplamento gravitacional, ou newtoniana, com $G_N = e^{\phi_0}$; portanto lançando luz sobre o papel do campo de Weyl em referenciais arbitrários.

Claro está que, por construção, a ação da matéria e o tensor-momento energia adquirem sua forma canônica, isto é, $S_m(\tilde{g},0) = S_m(g,\phi)$ e $T_{\mu\nu}(\tilde{g},0) = T_{\mu\nu}(g,\phi)$. Dito de outra forma a ação da matéria e o tensor-momento energia são invariantes em relação a essa transformações. As equações de campo são

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} = -8\pi GT_{\mu\nu} - \omega\left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right), \tag{3.37}$$

e

$$\tilde{\Box}\phi = 0, \tag{3.38}$$

onde $\tilde{R}_{\mu\nu}$, $\tilde{R}$ e $\tilde{\Box}\phi$ são todos definidos em relação à métrica $\tilde{g} = e^{-\phi}g$. Portanto, as equações de campo dessa teoria escalar-tensorial, vista pelo referencial de Riemann, são dadas pela ação da relatividade geral com um campo escalar sem massa minimamente acoplado ao campo gravitacional.

3.2.1 Lei de conservação da energia-momento da matéria

Nessa seção obtemos a lei de conservação da energia e momento da materia na teoria escalar-tensor geometrica, através da divergência das equações de campo. Calculando a divergência de (3.37) e usando (3.38) temos

$$G^{\nu}_{\mu;\nu} = -\kappa^* T^{\nu}_{\mu;\nu} - \omega\left(\phi^{,\nu}\phi_{,\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right)_{;\nu}. \tag{3.39}$$

Por outro lado, usando a identidade de Bianchi para Weyl integrável, segue que

$$G^{\nu}_{\mu;\nu} = -\phi_{,\nu}G^{\nu}{}_{\mu}. \tag{3.40}$$

Então usando (3.37), (3.38) e (3.40) em (3.39), temos

$$\kappa^* T^{\nu}_{\mu;\nu} = \phi_{,\nu}G^{\nu}_{\mu} + \frac{\omega}{2}\phi_{,\mu}\phi_{,\beta}\phi^{,\beta}. \tag{3.41}$$

[2] Afinal de contas, $\nabla_\alpha\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}\partial_\alpha(\phi_0) = 0$, a conexão é a de Levi-Civita da métrica $\tilde{g}$.

Finalmente obtemos

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = -T^{\nu}{}_{\mu}\phi_{,\nu}, \tag{3.42}$$

ou

$$(e^{\phi}T^{\nu}_{\mu})_{;\nu} = 0. \tag{3.43}$$

É importante lembrar que a forma final da lei de conservação depende do tipo de acoplamento que realizamos entre a matéria e o campo gravitacional. De um modo geral a divergência do tensor momento energia não será zero, o que implica a sua na não-conservação. Esse resultado em teorias escalar-tensoriais é muito comum e representa fenomenologicamente a presença de efeitos quânticos em espaços-tempos curvos [5] [52]. Recentemente a violação da conservação de energia foi associada à emergencia de uma constante cosmológica efetiva [**?**].

3.3 Distribuição esfericamente simétrica e estática no vazio: a solução de Wyman

Nesta seção, vamos estudar o problema clássico de determinar o campo gravitacional no vazio devido a uma distribuição esférica e estática de matéria. Esse problema tem grande importância, pois auxilia na compreensão da teoria, ao determinar a dinâmica de espaços-tempos nessa configuração reduzida (simetria simples). Outro aspecto importante deve-se ao fato de que tal configuração serve de modelo para objetos da astrofísica como estrelas e objetos compactos, como buracos negros e singularidades nuas, que podem servir de laboratório para teorias da gravitação quântica.

Vimos na seção anterior que as transformações de Weyl nos permite estabelecer uma conexão entre a teoria da relatividade geral minimamente acoplada com um campo escalar sem massa e a presente teoria escalar-tensorial geométrica. Aqui, vamos tirar vantagem desse fato para investigar espaços-tempos estáticos com simetria esférica usando as correspondentes soluções da relatividade geral já conhecidas na literatura.

Historicamente, a primeira solução estática com simetria esférica da relatividade geral minimamente acoplada com um campo escalar sem massa foi encontrada por Fisher [42]. Essa solução foi encontrada novamente por outros autores e atualmente também é designada como solução de Janis-Newman-Winicor [43] . O caso mais geral, e o foco de nosso interesse, é devido a Wyman [44].

A conexão entre a teoria escalar-tensor geométrica (no referencial de Weyl) e a relatividade geral com um campo escalar sem massa (no referencial riemanniano) nos leva naturalmente à questão de como os fenômenos físicos descritos em cada referencial se relacionam. Esse ponto é de extrema importância e nos remete a controversa questão envolvendo os chamados referenciais de Jordan e de Einstein nas teorias escalares-tensorias. No presente caso, com relação aos fenômenos físicos que só dependem do movimento de partículas com massa e sem massa, sob influência da gravidade unicamente, ambas descrições são completamente equivalentes. Isso ocorre devido ao fato das geodésicas serem invariantes sob transformações de Weyl; como consequência, a estrutura causal do espaço-tempo permanece imutável em todos os frames de Weyl. Mais ainda, como consequência da conexão entre os dois referenciais todos resultados que eventualmente encontrarmos na relatividade geral com um campo escalar sem massa pode ser levado automaticamente para a teoria escalar-tensorial geométrica.

3.4 A solução de Wyman

Vamos agora considerar a solução estática com simetria esférica assintoticamente plana das equações (3.37)(3.38). Como indicado em [44], essa solução,denotada por $\bar{g}_{\mu\nu}$, pode ser escrita como

$$d\bar{s}^2 = W(r)^S dt^2 - W(r)^{-S} dr^2 - r^2 W(r)^{1-S} d\Omega = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3.44}$$

$$\phi = -\frac{\sqrt{\beta}}{2\eta} \ln |W(r)| \tag{3.45}$$

$$W(r) = 1 - \frac{r_0}{r} \tag{3.46}$$

onde $S = \frac{M}{\eta}$, $r_0 = 2\eta$, $\eta = \sqrt{M^2 + \tilde{\omega}}$, $\tilde{\omega} = \beta\omega$, $\beta > 0$ é uma constante com dimensão de quadrado de massa introduzida para manter o parâmetro ω adimensional, e $M > 0$ é a massa do corpo no centro do sistema de coordenadas. Como antes, $\omega \in [-\infty, \infty]$, e aqui podemos interpretar $\tilde{\omega}$ como a carga escalar do corpo no centro de coordenadas. O domínio da coordenada r é $r_0 < r < \infty$. Recentemente, usando o formalismo de parametrização pós-newtoniano, foi mostrado que mesmo para valores da ordem de $\tilde{\omega} \approx 10^5 M$ a solução acima prediz os mesmos efeitos da solução de Schwarzschild em experimentos no sistema solar ($\gamma = 1, \beta = 1$) [45]. Assim, concluímos que, considerando experimentos no sistema solar, devido a invariância das geodésicas sob mudança de referenciais, a teoria escalar-tensorial geométrica aqui apresentada produz os mesmos resultados previstos pela relatividade geral.

Como veremos em seguida, para M e $\tilde{\omega}$ positivos, ou seja, $0 < S < 1$, temos um espaço-tempo com uma singularidade nua. O caso $\tilde{\omega} = 0$, ou seja, $S = 1$ corresponde ao espaço-tempo de Schwarzschild. O caso $M > 0$ e $-2M^2 < \tilde{\omega} < 0$, o mesmo que $S > 1$, remove a singularidade e corresponde a um buraco de minhoca.

3.5 Singularidades nuas e buracos de minhoca como fenômenos geométricos

Foi mostrado que a presença de um campo escalar na relatividade geral faz com que os horizontes de eventos das soluções de Schwarzschild, Reissner-Nordstrom e Kerr sejam reduzidos a um ponto, levando ao surgimento de singularidades nuas [46]. Outro resultado importante é o surgimento de singularidades nuas como resultado do colapso não só de um campo escalar sem massa, como também em sistemas de fluidos realísticos não-homogêneos (densidade no centro maior que na periferia) e com pressão (radiação).

3.5.1 Singularidades nuas para $\tilde{\omega} > 0$

No caso da solução de Wyman (3.44) e (3.45) quando calculamos a área de uma esfera de raio $r = r_0$ definida por $t = constante$ encontraremos

$$A = \int \sqrt{g_{22} g_{33}} d\theta d\varphi = 4\pi r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{1-S} |_{r=r_0} = 0 \tag{3.47}$$

O escalar de Kretschmann, como mostrado em [48], tem sua divergência dada em termos do escalar de curvatura $\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu}$ que é

$$\bar{R} = \frac{\tilde{\omega}}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{S-2}, \tag{3.48}$$

o que claramente indica que temos uma singularidade nua em $r = r_0$, pois $0 < S < 1$.

3.5.2 Buracos de minhoca para $-2M^2 < \tilde{\omega} < 0$, ou seja, $S > 1$

Para o caso em que $S > 1$, a área (3.47) diverge e o escalar de curvatura (3.48) vai a zero para $S > 2$. Isso é um forte indício, do qual trataremos de demonstrar logo abaixo, de que estamos na presença de um buraco de minhoca: a área infinita indica que r_0 agora mapeia um "infinito"(que se encontra do outro lado de uma garganta, a qual devemos ser capazes de identificar); e o escalar de curvatura indo a zero para $r \to r_0$ indica que estamos numa região (assintoticamente) plana.

De fato, já foi apontado na literatura o comportamento "tipo buraco de minhoca"para a solução de Wyman, simplesmente analisando-se a "coordenada areal"

$$R = rW^{\frac{1-S}{2}} \tag{3.49}$$

para $S > 1$ [47]. Aqui vamos analisar a solução (3.44) usando os critérios definidos por Morris e Thorne em [54]. Essa análise resultou no trabalho [11] onde verificamos também a viabilidade de atravessar esse buraco de minhoca por seres humanos. Resulta que esse buraco de minhoca não satisfaz os critérios de [54] para que possa ser atravessado por humanos.

Para mostrar que estamos diante de um buraco de minhoca, seguindo [54], a solução (3.44) deve satsfazer as seguintes condições:

1 A geometria espacial deve ser a de um buraco de minhoca , ou seja, deve ser possível escrever o elemento de linha na forma

$$ds^2 = e^{\Phi}dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{b}{R}} - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{3.50}$$

onde $b = b(R)$ é chamada e função de "forma", pois é responsável pela forma da superfície que define a garganta do buraco e minhoca. Por outro lado, $\Phi = \Phi(R)$ é chamada de função "desvio", pois controla o desvio para o vermelho de raios de luz que se aproximam da garganta, a simetria esférica śendo considerada meramente por conveniência, para simplificar os calculos.

2 a garganta se encontra no valor de extremo mínimo de R, denotado por R_m (aqui teremos $R_m = b_m \equiv b(R_m)$;

3 devemos ter $1 - \frac{b}{R} \geq 0$ por todo espaço-tempo;

4 quando $l \to \pm\infty$, onde $l =$ (**distância radial própria do buraco de minhoca medida por observadores estáticos**)

5 Ausência de horizonte de eventos ou singularidades, ou seja, Φ é finito por todo o espaço-tempo

6 t mede o tempo próprio em regiões assintoticamente planas, ou seja, $\Phi \to 0$ quando $l \to \pm\infty$.

Para escrever a métrica (3.44) na forma dada por (3.50), apenas comparamos as expressões (3.44)-(3.45) com (3.50). Essa comparação mostra que

$$R = rW^{(1-S)/2}, \tag{3.51}$$

$$\Phi(R) = \frac{S}{2}\ln W(r(R)), \tag{3.52}$$

$$b/R = 1 - \frac{1}{W(r(R))}\left[1-(1+S)\frac{r_0}{2r(R)}\right]^2, . \tag{3.53}$$

Da Eq. (3.51), encontramos que o valor mínimo de R ocorre em

$$r_m = \frac{S+1}{2}r_0, \tag{3.54}$$

o que leva a

$$R_m = r_m\left(\frac{S-1}{S+1}\right)^{(1-S)/2}. \tag{3.55}$$

Fica claro que a relação entre as coordenadas radiais R e r é injetiva somente para certo valores de r, que depende dos possíveis valores de S. Para $S \geq 1$, essa relação é injetiva em $r \in [r_m, \infty)$ e os valores de R estão no intervalo$[R_m, \infty)$. Se $S < 1$, os valores de R seriam $(0, \infty)$. Mesmo assim, ao contrário de R, o domínio de r é sempre (r_0, ∞). Como veremos adiante ,existe uma garganta em r_m que "separa"as regiões (r_0, r_m) e (r_m, ∞).

A estrutura tipo buraco de minhoca da solução de Wyman

Coordenada própria w

Em se tratando de buracos de minhoca, é interessante trabalhar com uma coordenada que não possui singularidades. Tal coordenada pode ser criada a partir da distância radial própria medida por observadores estáticos. Denotando por w essa coordenada, vamos definí-la a partir da integral

$$w = \int_{r_m}^{r} W^{-S/2}dr, \tag{3.56}$$

onde $w = 0$ corresponde a r_m (a garganta). Vamos chamar A a região com valores negativos de w e B, a outra região.

Uma solução analítica de (3.56) para um S arbitrário pode não existir. Então vamos considerar a seguinte expansão para o integrando

$$(1-r_0/r)^{-S/2} = 1 + \frac{Sr_0}{2}\frac{1}{r} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{r_0^n}{2^n n!}r^{-n}\prod_{j=1}^{n}(S+2j-2). \tag{3.57}$$

Substituindo a expansão (3.57) na integral (3.56), obtemos a expressão

$$w = r - r_m + \frac{Sr_0}{2}\ln(r/r_m) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{r_0^n}{2^n n!(n-1)}\left(r_m^{1-n} - r^{1-n}\right)\prod_{j=1}^{n}(S+2j-2). \tag{3.58}$$

Usando o teste da razão, podemos facilmente provar que a série acima converge para $r > r_0$ e $S > 1$, mas o teste de Raabe mostra que ela diverge em r_0 para $S > 2$ (a série converge para $1 < S < 2$); da integral (3.56), vemos que w é infinito em r_0 para $S = 2$. Esse último resultado mostra que a região A é infinita para $S \geq 2$.

A região A é assintoticamente plana?

Uma maneira de averiguar se a região A é assintoticamente plana é avaliar as componentes do tensor de Riemann em r_0. Da Eq. (8) na referência [54], vemos que as componentes não-nulas desse tensor tem a forma:

$$Form_1 = (1 - b/R)\left[-\Phi'' + \frac{1}{2}\frac{(b' - b/R)}{R - b}\Phi' - (\Phi')^2\right], \tag{3.59}$$

$$Form_2 = -\frac{(1 - b/R)}{R}\Phi', \tag{3.60}$$

$$Form_3 = \frac{b'R - b}{2R^3} \tag{3.61}$$

$$Form_4 = \frac{b}{R^3}. \tag{3.62}$$

Das eq. (3.51)-(3.53), podemos avaliar a eq. (3.59) em r_0 para obter

$$Form_1(r_0) = \frac{S}{r_0^2}[1 - (1 + S)/2]\lim_{r\to r_0}(1 - r_0/r)^{S-2} = \begin{cases} 0 & S > 2, \\ \text{finite} \neq 0 & S = 2, \\ \infty & 1 < S < 2. \end{cases} \tag{3.63}$$

As expressões restantes ficam

$$Form_2 = -\frac{W_m^2}{W}\frac{\Phi'}{R} = -\frac{r_0 S W_m}{2r^3}W^{S-2}, \tag{3.64}$$

$$Form_3 = -\frac{Sr_0}{2r^3}\left[1 - \frac{(1 + S)}{2S}\frac{r_0}{r}\right]W^{S-2}, \tag{3.65}$$

$$Form_4 = \frac{W - W_m^2}{r^2}W^{S-2}, \tag{3.66}$$

onde aqui estamos usando $W_m = 1 - r_m/r$. É direto ver que as 'formas' (3.64)-(3.66) levam ao mesmo resultado qualitativo que a Eq. (3.63). Portanto, a região A é assintoticamente plana para $S > 2$.

Condição 2

O corte equatorial de um espaço tridimensional caracterizado por um momento fixo no tempo e $\theta = \pi/2$ não pode ser imerso num espaço euclidiano tridimensional. Podemos ver isso de seguinte maneira. Da Eq. (27) in Ref. [54], temos

$$\frac{dz}{dR} = \pm(R/b - 1)^{-1/2}, \tag{3.67}$$

onde z é a coordenada$-z$ do sistema de coordenada cilíndrico. Para $r < r_1$[3] , o termo $R/b - 1$ é negativo. Assim, o intervalo $(r_0, r_1]$ não pode ser usado na Eq. (3.67).

[3] $r_1 = (\frac{S+1}{2S})r_m$ é o ponto de partida da viagem,onde a coordenada própria l toma valores negativos e $r_0 < r_1 < r_m$

Condições $3, 4, 5, 6$

Da Eq. (3.53) e do fato de que $r \in (r_0, \infty)$, temos $1 - b/R \geq 0$ por todo o espaço-tempo.

A condição $w \to \infty \Rightarrow b/R \to 0$ é facilmente satisfeita, pois $b/R \to 0$ quando $r \to \infty$. Entretanto, quando $w \to -\infty$, o que é equivalente a $r \to r_0$, nós temos $b/R \to -\infty$ para $S > 1$ [veja Eq. (3.53)]. Em consequência, a condição 5 não é satisfeita.

É evidente da Eq. (3.52) que Φ é finito para $r > r_0$.

Da Eq. (3.52), vemos que a condição 6 não é satisfeita porque $w \to -\infty$ (que é o mesmo que $r \to r_0$) implica $\Phi \to -\infty$.

Com isso mostramos que o espaço-tempo (3.44) contém uma solução tipo buraco de minhoca conectando duas regiões assintoticamente planas para $S > 2$, enquanto que para $1 < S \leq 2$ uma dessa regiões não possui essa propriedade. Mesmo que muitas das condições para um buraco de minhoca ordinário existir não tenham sido satisfeitas, podemos ainda assim fazer a pergunta: "é possível atravessar a região $r = r_m$?". Afinal de contas, o raio areal se comporta como se existisse um típico buraco de minhoca em r_m. Para responder essa questão, remetemos o leitor a refer?ncia [11], onde também conectamos duas cópias da soluçaõ de Wyman, construindo, assim, um buraco de minhoca que conecta duas regiões assintoticamente planas. Esse buraco de minhoca satisfaz todas as condições apresentadas; no entanto, apresenta os mesmos problemas em relação a atravessabilidade que encontramos no primeiro caso.

3.6 A solução de Wyman na teoria escalar-tensor geometrica

Para analisar a solução de Wyman no referencial de Weyl poderimos esperar que fosse necessário realizar novamente a análise da solução transformada. Afinal de contas, parte da transformação de Weyl consiste numa transformação conforme na métrica e essa depende do campo escalar e também dos parâmetros introduzidos. Então é de se esperar que haja modificações não só no domínio dos parâmetros como também na natureza de objetos, tais como, singularidades nuas e buracos de minhoca. De fato isso ocorre em teorias escalares-tensoriais [49],onde são realizadas somente transformaçoes conformes, dando origem a certa ambiguidade em relaçao à qual o referencial conforme seria o físico. Aqui esse problema não existe, primeiro, porque a transformação que realizamos não é unicamente conforme, mas também envolve o campo escalar; segundo, porque vamos exigir (como uma espécie de realização da expectativa do próprio Dicke) que a física seja invariante sob as transformações de Weyl (ou invariante sob rescalonamento local das unidades de medida, segundo Dicke). Seguindo a discussão da Sec (3.1.1) vamos caracterizar o espaço-tempo de Wyman no referencial de Weyl usando quantidades invariantes. Por exemplo, usando o escalar de curvatura Weyl-invariante podemos concluir que o comportamento em $r = r_0$ será divergente para $S < 2$ (singularidade nua) e assintoticamente plano para $S > 2$, assim como foi no referencial riemanniano (3.48). A área também dará o mesmo resultado que em (3.47) desde que adotemos a área invariante de Weyl.

Com isso fica claro concluir que os mesmos resultados que encontramos no referencial riemanniano podem ser convertidos para o referencial de Weyl, ou seja, para a teoria escalar-tensorial geométrica. Em termos do parâmetro original ω, temos o seguinte limite para os valores do parâmetro:

- se $\tilde{\omega} > 0$ temos singularidade nua no referencial de Riemann. Essa condição no referencial de Weyl é o mesmo que $\omega > 0$;

- se $-2M^2 < \tilde{\omega} < 0$ temos wormhole no referencial de Riemann. Esse limite é o mesmo que $-2M^2 < \omega\beta < 0$, lembrando que a constante β tem dimensão de quadrado de massa e foi introduzida para manter ω adimensional, o limite para ω no referencial de Weyl é $-2 < \omega < 0$;

- para o caso em que temos um buraco de minhoca ligando duas regiões assintoticamente planas, $S > 2$, que é o mesmo que $\tilde{\omega} < -3/2M^2$ ou seja, $\omega < -3/2$, ficamos assim com estreita faixa $-2 < \omega < -3/2$ para buracos de minhoca com ambas regiões assintoticamente planas.

Capítulo 4

Gravitação em (2+1)D: WIST

O interesse em espaços-tempos com dimensão dois e três surge da espectativa de que modelos simplificados nessas dimensões forneçam um melhor entendimento da gravitação em quatro dimensões e também auxiliem na compreensão das características que estão fortemente relacionadas ao fato de que o espaço-tempo tem quatro dimensões. Antes de apresentar a teoria gravitacional de Weyl integrável (WIST) em três dimensões, vamos fazer uma revisão da relatividade geral com essas dimensões [57].

4.1 A relatividade geral em (2+1) dimensões

À primeira vista, a ação natural para a RG nessa dimensionalidade seria dada por

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x (R - 2\Lambda + L_m) \tag{4.1}$$

onde R é o escalar de curvatura do espaço-tempo, Λ, a constante cosmológica e L_m, a lagrangiana da matéria. Em unidades naturais, com $c = 1$, a constante gravitacional deve ter a dimensão de comprimento (para que a ação seja adimensional) em (2+1)D. É conveniente escolher ainda $8\pi G = 1$. Variando a ação, obtemos as equações de Einstein em (2+1)D como sendo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \tag{4.2}$$

ou

$$R_{\mu\nu} = -(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T - \Lambda g_{\mu\nu}) \tag{4.3}$$

com os índices μ, ν tomando os valores $0, 1, 2$.

Uma propriedade bem conhecida da geometria diferencial é que para $D > 3$ o tensor de curvatura $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ pode ser decomposto em termos do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, o escalar de curvatura R e o tensor de Weyl $W_{\lambda\mu\nu\kappa}$.

Entretanto, se $D = 3$, então $W_{\lambda\mu\nu\kappa}$ é identicamente nulo, e temos a seguinte expressão para $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ [30]:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\nu} R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} R_{\mu\nu} + g_{\mu\kappa} R_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\kappa} - \frac{R}{2} \left(g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu} \right). \tag{4.4}$$

Da equação acima vemos que a distribuição de matéria descrita por $T_{\mu\nu}$ determina completamente o tensor de curvatura do espaço-tempo de maneira puramente algébrica. Segue que em regiões do espaço-tempo sem matéria, onde $T_{\mu\nu} = 0$, o tensor de curvatura é nulo e o espaço-tempo é localmente plano (se $\Lambda = 0$), localmente de Sitter (se $\Lambda > 0$) e localmente anti-de Sitter (se $\Lambda < 0$). Não há propagação dos graus de liberdade da gravitação em 3D.A ausência de campo gravitacional fora da distribuição de matéria também implica que não há um limite newtoniano natural para essa teoria. Apesar dessa estrutura, um tanto quanto trivial é possível encontrar algumas soluções interessantes para (4.2).

4.1.1 O buraco negro BTZ

Um solução bastante estuda na literatura é o chamado buraco negro de *Banãdos-Teitelboin-Zaneli* (BTZ) [58], que corresponde a tomar $T_{\mu\nu} = 0$ e $\Lambda = -(\frac{1}{l^2}) < 0$. A métrica é dada por

$$ds^2 = Fdt^2 - \frac{1}{F}dr^2 - r^2(d\phi - \Omega dt)^2 \tag{4.5}$$

onde $F = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}$. O parâmetro M é análogo à massa do buraco negro e J análogo ao momento angular. Essa métrica possui singularidade em

$$r_{\pm}^2 = \frac{Ml^2}{2}\left(1 \pm \left[1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2\right]^{1/2}\right) \tag{4.6}$$

a qual é devida à escolha do sistema de coordenadas de maneira análoga à singularidade em $r = 2m$ da métrica de Schwarzschild. A componente g_{00} se anula em $r = r_{erg}$, onde $r_{erg} = M^{1/2}l = (r_+^2 + r_-^2)^2$. Como na solução de Kerr em (3+1)D, $r < r_{erg}$ determina uma ergosfera: curvas tipo-tempo nessa região necessariamente têm $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ (quando $J > 0$), e portanto, todos observadores são arrastados pela rotação do buraco negro.Se $|J| > Ml$, então os horizontes (4.6) desaparecem e ficamos com uma singularidade nua central em $r = 0$.

4.1.2 Cosmologia em 2+1 dimensões

Com relação aos teoremas de singularidades, a diferença essencial do que acontece em $3 + 1$ dimensões será em relação às condições de energia que devem ser impostas ao conteúdo material do espaço-tempo para garantir a convergência de geodésicas sob ação da gravidade [59]. A condição fraca de energia exige que $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu > 0$ para todos vetores tipo-tempo, independentemente da dimensão espacial, correspondendo à condição de que os observadores co-móveis vejam uma densidade de matéria positiva ($\rho > 0$ para o tensor momento-energia de um fluido perfeito). A condição forte de energia é a mais restritiva, assegura que o efeito último da gravidae é fazer convergir a congruência geodésica, isto é, $R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \leq 0$ para todo vetor u^ν tipo-tempo. Portanto, de 4.3 temos

$$(T_{\mu\nu} - Tg_{\mu\nu})u^\mu u^\nu > 0. \tag{4.7}$$

Em um espaço-tempo de $(d + 1)D$ a relatividade geral com um tensor energia-momento de um fluido perfeito, a condição acima fica $(d - 2)\rho + pd > 0$. Em (3+1) dimensões tal condição implica em $\rho + 3p > 0$, mas para (2+1) temos $p > 0$. Em (2+1) dimensões as condições de energia impõem condições de positividade *independentes* para a densidade e a pressão.

Considere modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos em (2+1) dimensões. A métrica será determinada por um fator de escala dependente do tempo $a(t)$

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\varphi^2) \tag{4.8}$$

O fator de escala será determinado pela equação tipo-Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{M}{a^{2\gamma}} - \frac{k}{a^2}, \qquad M \geq 0, \quad k \;\; constantes, \tag{4.9}$$

quando o conteúdo material é um fluido perfeito de equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$, com γ constante.

Para $1 < \gamma \leq 2$, as soluções de (4.8) serão modelos cosmológicos fechados, abertos ou planos, conforme a constante k seja positiva, negativa ou nula. Todas soluções possuem singularidade inicial, pois o fluido satisfaz as condições de energia. Note que, se $\gamma = 1$ a situação é anômala: todas as soluções de (4.8) expandem com $a(t) \sim t$ independentemente do sinal de k. Isso reflete o desaparecimento da gravidade quando $p = 0$, pois, nesse caso, $(T_{\mu\nu} - Tg_{\mu\nu})u^\mu u^\nu = 0$. Um fenômeno idêntico ocorre em (3+1) dimensões quando $(\rho + 3p) = 0$.

4.2 Alternativas à relatividade geral

A inadequação da teoria da gravitação de Einstein em (2+1)D para ser o substituto relativístico da gravitação newtoniana em três dimensões tem levado alguns autores a investigar o mesmo problema em outras teorias da gravidade. Foi provado que, ao menos em duas teorias distintas o limite newtoniano pode ser restabelecido. Essas são a teoria de Brans-dicke e a gravitação teleparalela, uma teoria métrica em que gravidade é puramente atribuída a torção [7]. Outra abordagem para essa questão é considerar a gravitação (2+1)D como sendo obtida através do método de redução dimensional a partir da gravitação de Einstein em (3+1)D [60]. A motivação básica em muitas dessas considerações é buscar caminhos alternativos, além da relatividade geral, para novos *insights* em problemas que não têm uma descrição satisfatória dentro da teoria de Einstein. Com essa ideia em mente, consideramos esse tema no contexto de outra teoria da gravitação, a teoria de espaço-tempo de Weyl integrável, (WIST) [61]. Nessa abordagem, a geometria não é riemaniana, mas corresponde a a geometria de Weyl integrável. Mostramos que além de comportar um limite newtoniano, WIST em (2+1)D apresenta propriedades interessantes não compartilhadas pela teoria de Einstein, tais como desvio geodésico entre partículas de poeira e a propagação dos graus de liberdade gravitacionais no vazio. Mostramos também uma solução de estática devido a uma distribuição de massa com simetria circular, e soluções cosmológicas com *bouncing* [62].

4.3 A teoria WIST em n dimensões

Na teoria WIST, a dinâmica do campo gravitacional em n dimensões é dada pela seguinte ação [61]:

$$^{(n)}\mathcal{S} = \int d^n x \sqrt{|g|} \left[\mathcal{R} + \xi \phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + \kappa_n e^{-2\phi} L_m\right] \tag{4.10}$$

onde ξ é um parâmetro arbitrário, $\phi_\alpha \equiv \phi_{,\alpha}$ denota as derivadas $\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}$ do campo de Weyl ϕ, $\mathcal{R}$ é o escalar de curvatura de Weyl, L_m é a lagrangiana de matéria, e o ponto-e-vírgula (;) indica derivada covariante com respeito à conexão de Weyl e κ_n é a constante de Einstein em n dimensões, cuja expressão será definida pelo limite newtoniano correspondente. Expressando a ação acima em termos das quantidades riamannianas,

$$^{(n)}\mathcal{S} = \int d^n x\sqrt{|g|}\left[R + \frac{(n-1)(n-2)-4\xi}{4}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + \kappa_n e^{-2\phi}L_m\right],$$

onde agora R representa o escalar de curvatura calculado com a conexão riamanniana. Variando a ação $^{(n)}\mathcal{S}$ em relação à métrica $g_{\alpha\beta}$ e ao campo de Weyl ϕ obtemos, espectivamente, as seguintes equações na presença de matéria:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{(n-1)(n-2)-4\xi}{4}\left[\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}\right] = -\kappa_n T_{\mu\nu}e^{-2\phi} \tag{4.11}$$

$$\Box\phi = \frac{-4L_m\kappa_n}{(n-1)(n-2)-4\xi}e^{-2\phi} \tag{4.12}$$

onde $^{(n)}\Box$ indica o operator D'Alembertian n-dimensional definido com a conexão riemanniana.

4.4 WIST em espaço-tempo de (2+1)-dimensões

Considere WIST em um espaço-tempo de (2+1)-dimensões na ausência de matéria. Nessas circunstâncias , $n = 3$,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{(1-2\xi)}{2}\left[\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}\right] = 0. \tag{4.13}$$

$$\Box\phi = 0$$

Por outro lado, tomando o traço da equação (4.11) obtemos

$$R = \frac{1}{2}(2\xi - 1)\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}. \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) na equação (4.13) nos dá

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(2\xi - 1)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}. \tag{4.15}$$

Levando em conta (4.14) e (4.15) podemos expressar (4.4) como

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2}(2\xi-1)\left[g_{\alpha\mu}\phi_{,\beta}\phi_{,\nu} + g_{\beta\nu}\phi_{,\alpha}\phi_{,\mu} - g_{\alpha\nu}\phi_{,\beta}\phi_{,\mu} - g_{\beta\mu}\phi_{,\alpha}\phi_{,\nu}\right] \\ &+ \frac{1}{4}(2\xi-1)\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\right)\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Essa expressão indica que mesmo na ausência de matéria, o espaço-tempo não é necessariamene plano devido à presença do campo escalar de Weyl. Assim, ao contrário da relatividade geral, em WIST o campo gravitacional não necessariamente se anula na ausência de suas fontes. Na próxima seção, vamos investigar o limite newtoniano de WIST no regime de campo fraco

4.5 No limite newtoniano

Uma teoria métrica da gravitação é dita possuir um limite newtoniano no regime não-relativistico de campo fraco se podermos obter a segunda lei de Newton a partir da equação geodésica e a equação de Poisson a partir das equações de campo. Vejamos se WIST preenche tais requisitos.

Sabemos que na mecânica newtoniana a geometria do espaço é euclidiana e o fenômeno da gravitação é independente do tempo. Portanto, um campo gravitacional fraco numa teoria geométrica da gravitação deve se manifestar como um fenômeno métrico através de uma pequena perturbação independente do tempo no espaço-tempo de Minkowski. Assim escrevemos o tensor métrico independente do tempo na forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \tag{4.17}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor de Minkowski, ϵ é um pequeno parâmetro e o termo $\epsilon h_{\mu\nu}$ representa uma perturbação independente do tempo devido à presença de alguma distribuição de matéria. Como estamos trabalhando no regime não-relativístico, vamos supor que a velocidade V da partícula é muito menor que c, de modo que o parâmetro $\beta = \frac{V}{c}$ será considerado muito pequeno; portanto, somente termos de primeira ordem em ϵ e β serão considerados. O mesmo tipo de aproximação será feito em ϕ, que será suposto pequeno e estático, i.e., da mesma ordem de ϵ, e para enfatizar esse fato, vamos tomar $\phi = \epsilon\varphi$, onde φ é finito.

Adotando coordenadas cartesianas no espaço-tempo de Minkowski o elemento de linha (4.17) se escreve

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - \epsilon h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

que em nossa aproximação fica

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cong c^2(1 + \epsilon h_{00}). \tag{4.18}$$

Vamos considerar a aproximação descrita acima na equação geodésica

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\ \alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0, \tag{4.19}$$

lembrando que $\Gamma^\mu_{\ \alpha\beta}$ representa as componentes da conexão de Weyl. De (3.5) é fácil ver que, em primeira ordem de ϵ, temos

$$\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} = \frac{\epsilon}{2} n^{\alpha\lambda}[h_{\lambda\mu,\nu} + h_{\lambda\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\lambda} + n_{\mu\nu}\varphi_{,\lambda} - n_{\lambda\mu}\varphi_{,\nu} - n_{\lambda\nu}\varphi_{,\mu}] \tag{4.20}$$

Não é difícil ver que, a menos que $\mu = \nu = 0$, o produto $\Gamma^\mu_{\ \alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$ é da ordem $\epsilon\beta$ ou maior. Assim as equações geodésicas (4.19) se tornam, em primeira ordem de ϵ e β

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\ 00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = 0$$

Levando em conta (4.18), a equação acima pode ser escrita como

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + c^2\Gamma^\mu_{\ 00} = 0. \tag{4.21}$$

Para $\mu = 0$ a equação (4.21) se reduz a uma identidade. Por outro lado, se μ é um índice espacial, um calculo simples dá $\Gamma^i_{00} = -\frac{\epsilon}{2}\eta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}(h_{00} - \varphi)$, e a equação geodésica nessa aproximação fica, em notação vetorial

$$\frac{d^2\overrightarrow{X}}{dt^2} = -\frac{\epsilon}{2}c^2\overrightarrow{\nabla}(h_{00} - \varphi),$$

que é simplesmente a equação do movimento de Newton num campo gravitacional clássico, desde que identifiquemos o potencial newtoniano como sendo

$$U = \frac{\epsilon c^2}{2}(h_{00} - \varphi). \tag{4.22}$$

É interessante notar a presença do campo de Weyl φ na equação acima. É a combinação $h_{00} - \varphi$ que gera o potencial newtoniano.

Vamos agora estabelcer o limite newtoniano, em n-dimensões, das equações de campo de WIST na presença de matéria, dadas por (4.11) e (4.12). É conveniente reescrever a equação (4.11) na forma

$$R_{\mu\nu} = -\kappa_n T_{\mu\nu}e^{-2\phi} - \frac{(n-1)(n-2) - 4\xi}{4}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + g_{\mu\nu}\frac{\kappa_n}{n-2}Te^{-2\phi} \tag{4.23}$$

na aproximação de campo fraco, i.e. quando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$. É fácil mostrar que em primeira ordem em ϵ, temos $R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2\epsilon h_{00}$, onde ∇^2 denota o operador laplaciano do espaço euclidiano. Por outro lado, como estamos admitindo o regime estático, $\phi_{,0} = \partial_\phi = 0$, e a equação (4.23) para $\mu = \nu = 0$ fica

$$\nabla^2 h_{00} = \frac{\kappa_n}{n-2}Te^{-2\phi}.$$

Tomemos uma configuração de fluido perfeito descrito por $T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)V_\mu V_\nu - pg_{\mu\nu}$, onde ρ, p e V^μ denotam, respectivamente, a densidade da massa de repouso, pressão e velocidade. Seguindo o método de Ray [63] para deduzir as equações de movimento de um princípio variacional, escrevemos a densidade lagrangiana para um fluido perfeito como $L_m = \rho[c^2 + E(\rho)]$, onde E é a densidade de energia interna. Resulta que num limite não-relativistico temos $L_m \simeq \rho c^2$ e podemos negligenciar p em relação a ρ, que implica $T \simeq \rho c^2$. Como nessa aproximação ρ e $\phi = \epsilon\varphi$ são quantidades pequenas, temos $Te^{-2\phi} \simeq \rho(1 - 2\epsilon\varphi) \simeq \rho$.Assim teremos

$$\frac{\epsilon}{2}\nabla^2 h_{00} = \left(\frac{3-n}{n-2}\right)k_n\rho c^2. \tag{4.24}$$

Na mesma aproximação (4.12) fica

$$\epsilon\nabla^2\varphi = \frac{-4\kappa_n\rho c^2}{(n-1)(n-2) - 4\xi}. \tag{4.25}$$

De (4.22), (4.24) e (4.25) temos, enfim, o limite newtoniano da equação de Poisson em n-dimensões

$$\nabla^2 U = -K_n\rho, \tag{4.26}$$

onde $K_n = \kappa_n c^4 \left(\frac{3-n}{2-n} + \frac{2}{(n-1)(n-2)-4\xi}\right)$ desempenha o papel da constante gravitacioanl em n dimensões. Nesse ponto relembramos que a relatividade geral em n-dimensões tem um limite correspondente a (4.26), que é (veja, por exemplo, [64])

$$\nabla^2 U = \left(\frac{n-3}{n-2}\right) k_n \rho c^4. \tag{4.27}$$

Para $n = 3$ o lado direito da equação acima se anula e, assim, a teoria de einstein linearizada falha em reproduzir a gravitação newtoniana. Entretanto, devido a presença do campo escalar, $K_n \neq 0$. Assim, WIST tem um limite newtoniano para $n \geq 3$.

4.6 Uma solução estatica com simetria circular

Nessa seção encontramos uma classe de soluções no vazio de um espaço-tempo estático gerado por uma distribuição circularmente simétrica de materia. Por simplicidade, vamos supor que o campo de Weyl tem depêndencia somente radial, isto é, $\phi = \phi(r)$. Vamos escrever a metrica na forma mais geral de uma distribuição com simetria circular [65]

$$ds^2 = e^{2N} dt^2 - e^{2P} dr^2 - r^2 d\theta \tag{4.28}$$

onde N e P são funções somente da coordenada radial. As equações a serem resolvidas são (4.15), que ficam

$$\frac{N''}{N'} + (N' - P') - \frac{1}{r} = 0 \tag{4.29}$$

$$\frac{N''}{N'} + (N' - P') - \frac{P'}{r} = \frac{2\xi - 1}{2} \phi'^2 \tag{4.30}$$

$$\phi' = \frac{B}{r} \tag{4.31}$$

Da componente, $R_{\theta\theta} = 0$, obtemos $N' - P' = 0$, o que facilita a resolução, e por fim temos o elemento de linha

$$ds^2 = r^{2B} dt^2 - \eta r^{2B} dr^2 - r^2 d\theta \tag{4.32}$$

Com B, C e η são constantes relcionadas por $C^2 = -\frac{4B}{2\xi - 1}$. Por outro lado, o campo escalar é dado por

$$\phi(r) = \phi_0 \ln r^C \tag{4.33}$$

com ϕ_0 =constante. É possível determinar a constante B em termos da massa M da distribuição de matéria. Vemos que se $B \to 0$ a métrica (4.32) se torna a metrica do espaçotempo de Minkowski, que corresponde à M=0. portanto para pequenos valores de B temos $g_{00} \approx 1 + 2B \ln(r)$. Por outro lado, no limite de campo fraco, para obtermos a gravitação newtoniana devemos ter $g_{00} \approx 1 + 2GM \ln(r)$ [66], onde estamos usando para a velocidade da luz, $c = 1$. Comparando temos $B = GM$.

Esta métrica contém as seguintes propriedades:

(a) Não há singularidades para $r \neq 0$ (singularidade nua). Podemos ver isso calculando o invariante

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = B^2 (B^2 - 2B - 3) r^{-2(B+2)}. \tag{4.34}$$

considerando massa positiva, temos $B > 0$.

(b) O espaçotempo não é assintoticamente plano

4.7 Desvio geodésico

Um aspecto do comportamento da relatividade geral tridimensional, apontado por Giddings et al [64], é a predição de que não há desvio geodésico das linhas-de-universo de partículas de poeira. Isso é equivalente a dizer que mesmo que o espaço-tempo tenha curvatura essa partículas não sentem o campo gravitacional. Vamos investigar o mesmo fenômeno em WIST.

Suponha como fonte do campo gravitacional um fluido perfeito. Nesse caso, o tensor energia-momento do fluido é dado por

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + P)u^{\alpha}u^{\beta} - g^{\alpha\beta}P \tag{4.35}$$

onde $u^{\alpha} = u^{\alpha}(x)$ denota as componentes do campo de velocidades , ρ é a densidade de energia e P é a pressão do fluido . Seja V^{α} o "vetor desvio"da congruência geodésica determinada por u^{α}. A equação do desvio geodésico é dada por

$$\frac{D^2V^{\lambda}}{ds^2} = R^{\lambda}_{\alpha\beta\delta}u^{\alpha}u^{\beta}V^{\delta} \tag{4.36}$$

onde o operador $\frac{D}{ds}$ indica a derivada absoluta ao longo da congruência geodésica. Considere a curvatura em 3D na forma

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\nu}(R_{\mu\kappa} - \frac{1}{2}g_{\mu\kappa}R) - g_{\mu\nu}(R_{\lambda\kappa} - \frac{R}{2}g_{\lambda\kappa}) - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu}. \tag{4.37}$$

Usando as equações de campo com o tensor momento-energia mencionado temos a aceleração do "vetor desvio geodésico"igual à

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\mu\nu\kappa}u^{\mu}u^{\nu}V^{\kappa} &= -\kappa_3 h^{\alpha}{}_{\mu}V^{\mu}P \\ &\quad -\lambda\left[h^{\alpha}{}_{\mu}\phi^{\mu}\phi^{\kappa}V_{\kappa} - \frac{1}{2}h^{\alpha}{}_{\mu}\phi_{\beta}\phi^{\beta}V^{\mu} + \phi^{\alpha}\phi^{\beta}u_{\beta}u_{\kappa}V^{\kappa} - \phi^{\mu}\phi^{\kappa}\phi^{\beta}u_{\beta}u_{\kappa}V^{\alpha}\right] \end{aligned}$$

onde $h^{\alpha}{}_{\mu} = u^{\alpha}u_{\mu} - \delta^{\alpha}{}_{\mu}$ é o tensor projeção no espaço bidimensional ortogonal à quadri-velocidade u^{α}. Portanto, se o campo de Weyl é constante e o fluido é livre de pressões (poeira) então não há desvio geodésico, ou seja acelerações relativas entre as partículas do fluido, como deveria ser esperado da relatividade geral em 3D. Mas em WIST, o campo de Weyl não é nulo e mesmo na ausência de pressão as partículas experimentam um desvio em relação umas às outras, que nessas condições é causado unicamente pelo campo de Weyl.

4.8 Modelos cosmológicos

Um forte apelo da teoria WIST em (3+1)D é a possibilidade de evitar o problema da singularidade inicial,o "big bang", através do mecanismo de "bouncing", sustentado pelo campo escalar geométrico de Weyl [61]. Veremos que esse fenômeno observa-se em (2+1)D com soluções elementares. Para isso vamos analisar alguns modelos na ausência de matéria, isto é, quando $T_{\mu\nu} = 0$. Primeiro vejamos como fica a condição para o aparecimento de singularidades. Usando a equação (4.13) podemos escrever

$$R_{\mu\nu} = \lambda\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} \tag{4.38}$$

$$\Box\phi = 0$$

com $\lambda = \frac{2\xi-1}{2}$. A equação acima é equivalente a equação de campo de Einstein em que o campo de Weyl ϕ produz a fonte de curvatura riemanniana. Pela condição forte de energia, a convergência de geodésicas ocorrerá sempre que $R_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} \leq 0$. Através de (4.38), vemos que isso implica em $\lambda\dot{\phi}^2 \leq 0$, onde $\dot{\phi} = \phi_{\mu}u^{\mu}$ e concluímos que haverá singularidades sempre que $\lambda \leq 0$, e o campo escalar se comporta como qualquer campo e matéria com densidade de energia positiva. Aqui, o campo escalar tem natureza geométrica e não há nenhuma restrição sobre valores do parâmetro λ. Portanto, vamos nos ater ao caso em que $\lambda \geq 0$ e é fácil ver que nesse caso temos a equação de Einstein com um campo escalar de energia negativa.

4.8.1 Solução correspondente ao vazio

Tratando de modelos isotrópicos e homogêneos, representados pelo elemento de linha (4.8), integrando uma vez a equação do campo escalar temos

$$\dot{\phi}a^{-2} = C, \quad com\ C \quad constante. \tag{4.39}$$

As equações de Einstein ficam

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -\frac{\lambda}{2}\dot{\phi}^2, \tag{4.40}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\lambda}{2}\dot{\phi}^2 \tag{4.41}$$

Combinando (4.39) e (4.40), tomando $k = -1$ temos

$$\dot{a}^2 = 1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \tag{4.42}$$

onde $a_0 = (\frac{\lambda C^2}{2})^{1/2}$ é o limite mínimo que o fator de escalar pode alcançar; portanto esse modelo, como seu correspondente em (3+1)D [61] evita o problema da singularidade inicial. A solução é imediata por integração de (4.42), o que dá

$$a(t) = \left(a_0^2 + t^2\right)^{1/2} \tag{4.43}$$

e para o campo de Weyl

$$\phi(t) = C \arctan\left(\frac{t}{a_0}\right) \tag{4.44}$$

Nesse caso de dimensão reduzida a solução é em termos de um solução elementar mas qualitativamente contem todas as características do correspondente em (3+1)D. Considere a evolução do universo em retrospectiva, seguindo na direção de seu passado. Próximo a esse valor a_0, o universo está em grande condensação, o campo de Weyl é ativado de acordo com (4.39), nesse caso $\dot{\phi} \sim a_0^{-1}$, e consequentemente a condensação infinita,a singularidade do big-bang, é evitada. O universo atinge assim seu valor mínimo, acenando assim para uma época anterior em colapso, tendo assim toda essa era de colapso infinito para se tornar homogêneo e isotrópico, evitando assim problema do horizonte. Note que para tempos grandes o fator de escalar cresce com $a \sim t$, assim a configuração geométrica se torna riemanniana, pois $\dot{\phi} \to 0$ na forma de um espaço plano de Mikowski (no sistema de coordenadas de Milne, $k = -1$).

4.8.2 Solução na presença de matéria, $\rho \neq 0$

Na presença de matéria as equações são

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \kappa_3 \rho e^{-2\phi} + \frac{\lambda}{2}\dot{\phi}^2, \tag{4.45}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa_3(\gamma - 1)\rho e^{-2\phi} - \frac{\lambda}{2}\dot{\phi}^2 \tag{4.46}$$

e

$$\frac{1}{a^2}\frac{d}{dt}(a^2\dot{\phi}) = -\frac{\kappa}{\lambda}L_m e^{-2\phi}. \tag{4.47}$$

Dessas equações deduzimos a equação de conservação:

$$\frac{d\rho}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) - \dot{\phi}(2\rho + L_m) = 0. \tag{4.48}$$

Usando o formalismo de Ray (ver [63]) a densidade lagrangiana para um fluido perfeito é $L_m = \rho$, e aqui ρ denota tanto energia de repouso quanto energia interna. Introduzindo isso em (4.48), junto com a condição barotrópica, $P = (\gamma - 1)\rho$, podemos integrar e obter

$$\rho = \frac{C}{a^{2\gamma}}e^{3\phi}. \tag{4.49}$$

Com essa expressão, temos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa_3 C}{a^{2\gamma}}e^{\phi} + \frac{\lambda}{2}\dot{\phi}^2 \tag{4.50}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa_3(\gamma - 1)C}{a^{2\gamma}}e^{\phi} - \frac{\lambda}{2}\dot{\phi}^2 \tag{4.51}$$

$$\frac{d}{dt}(a^2\dot{\phi}) = -\frac{\kappa}{\lambda}\frac{C}{a^{2(\gamma-1)}}e^{\phi}. \tag{4.52}$$

Para o caso plano, $k = 0$, soluções particulares do tipo "lei de potência"podem ser encontradas fazendo

$$A(t) = A_0 t^p, \quad e^{-\phi(t)} = \Phi_0 t^q \tag{4.53}$$

com

$$p = \frac{2\lambda(2-\gamma)}{1 + 2\lambda\gamma(2-\gamma)} \tag{4.54}$$

$$q = \frac{2}{1 + 2\lambda\gamma(2-\gamma)} \tag{4.55}$$

and $2\gamma p + q = 2$. A restrição sobre o parametro é $\lambda \neq -\frac{1}{2\gamma(2-\gamma)}$.

Para o chamado "falso vácuo", ou seja $\gamma = 0$, como única (ou dominante) forma de matéria temos

$$a(t) = a_0 t^{4\lambda} \qquad e^{-\phi} = \Phi_0 t^2 \tag{4.56}$$

Esse tipo de solução apresenta inflação para $\lambda > 1/4$ e aparece em modelos inflacionários de Brans-Dicke, conhecidos como *inflação por lei de potência* [10].

Conclusão

Apresentamos algumas relações entre geometria de Weyl integrável com a classe de teoria teorias escalares-tensoriais e discutimos essas relações em detalhes para a teoria de Brans-Dicke. Mostramos que a estrutura básica necessária para a construção de uma teoria escalar-tensor geral, a saber, uma variedade diferenciável M, um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e um campo escalar φ, se encaixa perfeitamente numa geometria de Weyl integrável, onde definimos o conceito de *referenciais* de Weyl, (M, g, φ), relacionados através de transformações de Weyl (ou de calibre conforme). Com isso fica evidente a estrutura geométrica weyliana presente em teorias gravitacionais onde a interação gravitacional é devida ao tensor métrico e a um campo escalar. Mas especificamente, mostramos que, ao realizar uma transformação de Weyl na teoria de Brans-Dicke formulada no *referencial de Jordan*, obtemos a versão do *referencial de Einstein*, a diferença sendo somente no valor do parâmetro no fator conforme que acopla com a matéria. Além disso mostramos que o movimento geodésico é ditado pela conexão de Weyl. Portanto, o que é correntemente entendido como "quinta força"e que eventualmente violaria o *principio de equivalência fraco* seria apenas uma interpretação inadequada da geometria do espaço-tempo.

Ainda explorando as relações entre geometria de Weyl e teoria escalar-tensorial, postulamos o princípio variacional de Palatini ao considerar o setor gravitacional de Brans-Dicke e findamos por obter uma teoria gravitacional escalar-tensorial completamente geométrica [12]. Interessante por si é a versão dessa teoria no *referencial de Riemann*, tomando a forma da relatividade geral minimamente acoplada com um campo escalar sem massa. Verificamos que a teoria é compatível com os experimentos clássicos da gravitação e que o limite obtido para o parâmetro ω é superior, e não inferior, como ocorre em Brans-Dicke. No entanto, com o remanescente da transformação de Weyl resta um parâmetro livre que abre o ensejo de discutir o buraco de minhoca $(-2 < \omega < -3/2)$ [11] e um contra-exemplo, bastante conhecido, à *conjectura de censura cósmica*, a singularidade nua para o maior domínio desse parâmetro $(0 < \omega < \infty)$. No contexto cosmológico, apresentamos ainda alguns resultados iniciais com respeito ao sistema dinâmico de soluções que tem como único atrator a solução de Milne, espaço vazio de curvatura negativa. Como continuação do estudo dessa teoria no contexto cosmológico, podemos introduzir um potencial para o campo escalar e analisar o fenômeno de aceleração da expansão do universo em diferentes época, seja como inflação ou energia escura. No contexto astrofísico, pretendemos averiguar se o colapso da matéria na presença do campo escalar pode dar origem (através de uma processo dinâmico) a singularidade nua.

Apresentamos, no capítulo 4, uma versão em $3D$ da chamada teoria WIST, que é uma teoria escalar-tensorial ambientada numa geometria de Weyl. Mostramos que essa teoria satisfaz uma série de critérios de consistência, que a relatividade geral nessa dimensionalidade falha em satisfazer [62].

Como continuação do trabalho aqui iniciado pretendemos explorar a dualidade entre as soluções exatas obtidas em WIST e as soluções obtidas em BD, já que essas teorias se mostram relacionadas por uma transformação de Weyl, como foi indicado em [18].

Referências Bibliográficas

[1] Sen,D.K., e Dunn,K.A., *A ScalarTensor Theory of Gravitation in a Modified Riemannian Manifold* J. Math. Phys. 12, 578 (1971)

[2] Ross,D.K. *A geometrical scalar-tensor theory of gravitation* Phys.Rev.D 5, 284 (1972)

[3] Damour,T., Piazza,F., Veneziano,G.*Runaway Dilaton and Equivalence Principle Violations* Physical Review Letters, v89 081601 (2002)

[4] Callan,C.G., Friedan,D., Martinec,E.J., Perry,M.J.*Strings in background fields* Nuc.Phys.B v262, p593 (1985)

[5] Ford,L. *Quantum field theory in curved space* Report TUTP-97-9, gr-qc/9707062

[6] S. Capoziello and V. Faraoni, *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitation Theories for Cosmology and Astrophysics*, ch. 3 (Springer, 2011).

[7] C. H. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 (1961). R. H. Dicke, Phys. Rev. **125**, 2163 (1962).

[8] Scholz,E. *Paving the way for transitions - a case for Weyl geometry*, arXiv:1206.1559 [gr-qc];

[9] Quiros,I. *Scale invariance and broken electroweak symmetry may coexist together* Preprint arXiv:1312.1018

[10] Valerio Faraoni, *Cosmology in scalar-tensor gravity*, Kluwer Academics Publishers, Holanda (2004)

[11] Formiga,J.B., Almeida.T.S., *Wormholes in Wyman spacetime* artigo submetido para publicação, versão online arXiv:gr-qc/1404.0328

[12] Almeida,T.S., Pucheu,M.L., Romero,C., Formiga,J.B. *From Brans-Dicke gravity to a geometrical scalar-tensor theory* Phys.Rev.D 89 064047 (2014)

[13] H. Weyl,*Space, Time, Matter*, Dover, Nova Iorque, (1952); W. Pauli, *Theory of Relativity*, Dover, Nova Iorque, (1958); Peter G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*-Nova Iorque:Dover Publications (1976)

[14] Blagojevic, M. *Gravitation and gauge symmetries*,Londres: Institute of Physics Publishing (2002)

[15] Dirac,P.A.M. *Long range forces and broken symmetries*, Proceedings Royal Society London A 333:403?418, 1973

[16] Smolin,L.. *Towards a theory of spacetime structure at very short distances*, Nuclear Physics B 160:253?268 1979

[17] Afriat,A. *How Weyl stumbled across electricity while pursuing mathematical justice* Stud.His.Phil.Mod.Phys. 40, Issue 1, Pages 20?25 2009.

[18] Romero,C., Fonseca,J.B., Pucheu,M.L. *General relativity and Weyl geometry* Class.Quan.Grav. 29 155015 2012

[19] Romero,C., Fonseca,J.B. e Pucheu,M.L., *Conformally flat spacetimes and weyl frames* Found. Phys. 42, 224, (2012).

[20] T. S. Almeida, *Geometria de Weyl e teoria gravitacional de Nordstroen,* Dissertação de Mestrado, UFPb, (2010).

[21] Shojai,F e Golshani,M. *On the geometrization of Bohmian mechanics: A new approach to quantum gravity* Int. J. Mod. Phys. A 13, 677 (1998).

[22] Falciano,F.T., Novello,M., Salim,J.M. *Geometrizing Relativistic Quantum Mechanics*Foundations of Physics 40, pp 1885-1901,(2010)

[23] Novello,M. *Theoretical Cosmology Proceedings of VII Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, pg 344, (1972)

[24] Rosen,N., *Weyl geometry and physics* Foundations of Physics, 12, 213, (1982)

[25] Adler,S.L.,*Einstein gravity as a symmetry-breaking effect in quantum field theory*, Reviews of Modern Physics 54, 729, (1982).

[26] Carrol,R. *Remarks on gravity and quantum mechanics* arxiv.org/pdf/1007.4744 ?(2010)

[27] Israelit,M. *A Weyl-Dirac cosmological model with DM and DE* General Relativity and Gravitation, 43, 751, 2011

[28] Jordan, P. *Schwerkraft und Weltall.* Braunschweig: Vieweg. 2nd revised edtion 1955; Scholz, E. *Paving the way for transitions*, arxiv:1206.1559[gr-qc]

[29] La,D. e Steinhardt,P.J., Phys. Rev Lett 62 376 (1989); também Mathiazhagan,C. e Johri, V. B., An inflationary universe in Brans-Dicke theory: a hopeful sign of theoretical estimation of the gravitational constant Class. Quantum Grav. 1 L29 1984

[30] Weinberg,S. *Gravitation and Cosmology*, ed.Wiley, 1972.

[31] Will,C.M., *Theory and Experiment in Gravitational Physics* Cambridge University Press, Cambridge,Inglaterra, 1993. idem, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Rev. Relativity 9 (2006), 3

[32] Wagoner,R.V., *Scalar-Tensor Theory and Gravitational Waves*, Phy.Rev.D 12 3209 1970; Bergman,P.G., *Comments on scalar-tensor theory* IJTP 1 25.

[33] Edmund J.C., Sami,M.e Tsujikawa,S., *Dynamics of dark energy*, Int. J. Mod. Phys. D 15, 1753 (2006).

[34] Hehl,F.W.,McCrea,J.D.,Mielkea,E.W.,Ne'eman,Y., *Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance* Volume 258,1?171, 1995; Dereli,T. e Tucker, R.W.: *Non-metricity induced by dilaton gravity in two dimensions*, Class. Quantum Grav. 11 2575 (1994)

[35] Romero,C. e Barros,A., *Brans-dicke cosmology with cosmological constant*General Relativity and Gravitation 23,491, 1993; idem General Relativity and Gravitation 25, 1305, 1993; idem Phys.Lett.A 173,243, 1993

[36] Banerjee,N. e Sen,S.,*Does Brans-Dicke theory always yield general relativity in the infinite ω limit?* Phys. Rev. D 56, 1334, 1997.

[37] Wald,R.M. *General relativity.* Chicago: Chicago University Press, 1984.

[38] Valerio, F., *Illusions of general relativity in Brans-Dicke gravity*,Phys.Rev.D, 59, 084021 1999.

[39] V. Faraoni and Shahn Nadeau, Phys. Rev. D **75**, 023501 (2007). Iain A. Brown and A. Hammami, JCAP 1204 (2012), 002. É. É Flanagan, Class. Quantum Grav. **21**, 3817 (2004).

[40] Campanelli,M. Lousto,C. *Are black holes in Brans-Dicke theory precisely the same as in general relativity* IJMP D, 2, 451 1993

[41] Agnese,A. G.e La Camera,M.*Wormholes in Brans-Dicke theory* Phys. Rev. D 51, 2011,(1995); Vanzo,L.,Zerbini,S. e Faraoni,V.*Campanelli-Lousto and veiled spacetimes* Phys.Rev.D 86, 084031 (2012)

[42] I. Z. Fisher, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 18, 636 (1948)

[43] A. I. Janis, E. T. Newman, and J. Winicour, Phys. Rev. Lett. 20, 878 (1968)

[44] M. Wyman, Phys. Rev. D 24, 839 (1981); M. D. Roberts, Gen. Relativ. Gravit. 21, 907 (1989)

[45] Formiga,J.B, *Massless scalar field and solar-system experiments* Phys. Rev. D 83, 087502 (2011)

[46] Agnese,A.G. LaCamera,M., *Gravitation without black hole* Lettere al Nuovo Cimento, v35, p365 (1982)

[47] Oliveira-Neto,G., e Takakura,F.I., *Wyman's solution, self-similarity, and critical behavior* J. Math. Phys. 46, 062503 (2005)

[48] A. Abdolrahimi and A. A. Shoom, Phys. Rev. D **81**, 024035 (2010).

[49] K.A. Bronnikov,K.A., *Scalar-tensor gravity and conformal continuations* arXiv:gr-qc/0204001v1 (2002)

[50] G. Allemandi, M. Capone, S. Capozziello e M. Francaviglia, *Conformal aspects of the Palatini approach in Extended Theories of Gravity* Gen. Relativ. Gravit. 38 (1) 33 (2006)

[51] U. Lindstrom, *The Palatini variational principle and class of scalar-tensor theories*, Il Nuovo Cimento B 35 (1976)

[52] Bezerra,Eugênio M.; Fabris, Julio C.;Hartmann, Betti. *Abelian-Higgs strings in Rastall gravity* Class. Quantum Grav. 32 085009 (2015). Caramês,Thiago R. P.; Daouda,Mahamadou H.; Fabris, Júlio C.; de Oliveira, Adriano M. ; Piattella, Oliver F.; Strokov, Vladimir. *The Brans-Dicke-Rastall theory* Eur. Phys. J. C74 3145 (2014). Batista,C. E. M.; Fabris,J. C.; Piattella,O. F.; Velasquez-Toribio, A. M.*Observational constraints on Rastall's cosmology* Eur. Phys. J. C73 2425 (2013)

[53] Josset, Thibaut; Perez, Alejandro; and Sudarsky, Daniel. *Dark Energy from Violation of Energy Conservation*, Phys. Rev. Lett. 118, 021102, (2017)

[54] Morris,M., Thorne,K. *Wormholes in Spacetime and Their Use for Interstellar Travel: A Tool for Teaching General Relativity*, American Journal of Physics, 56, 395-416 (1988).

[55] Mukhanov,V. *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, 2005).

[56] I. Zlatev, L. Wang, and Paul J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* 82, 896 (1999). V. Sahni and L. Wang, Phys. Rev. D 62, 103517 (2000).

[57] Padmanabhan,T. *Gravitation: Foundations and Frontiers*, Cambridge University Press, 2010.

[58] Bañanos,M. Telteboim,C. Zanelli,J. *Black hole in three-dimensional spacetime* Phys.Rev.Lett. 69 1849

[59] J. D. Barrow, A. B. Burd and D. Lancaster, Class. Quantum Grav. **3**, 551 (1986). J. L. Alonso, J. L. Cortés, and V. Laliena, *Phys. Rev.* **D67**, 024023 (2003). T. Kawai, *Phys. Rev.* **D48**, 5668 (1993). C. Romero and F. Dahia, *Int. J. Theor. Phys.* **33**, 2091 (1994).

[60] Y. Verbin, *Phys. Rev.* **D50**, 7318 (1994). S. Rippl, C. Romero and R. Tavakol, *Class.Quant.Grav.***12**, 2411 (1995).

[61] M. Novello, L.A.R. Oliveira, J.M. Salim, E. Elbas, Int. J. Mod. Phys. **D1** (1993) 641-677. J. M. Salim and S. L. Sautú, Class. Quant. Grav. **13**, 353 (1996). H. P. de Oliveira, J. M. Salim and S. L. Sautú, Class.Quant.Grav. **14**, 2833 (1997). V. Melnikov, *Classical Solutions in Multidimensional Cosmology* in Proceedings of the VIII Brazilian School of Cosmology and Gravitation II (1995), edited by M. Novello (Editions Frontières) pp. 542-560, ISBN 2-86332-192-7. K.A. Bronnikov, M.Yu. Konstantinov, V.N. Melnikov, Grav.Cosmol. **1**, 60 (1995). J. Miritzis, Class. Quantum .Grav. **21**, 3043 (2004). J. Miritzis, J.Phys. Conf. Ser . **8**,131 (2005).

[62] Aguilar,J., Romero,C., Fonseca-Neto,J.B., Almeida,T.S., Formiga,J.B *(2+1)-dimensional gravity in Weyl integrable spacetime*, Classical and Quantum Gravity, n 21,vol 32 (2015).

[63] J. R. Ray, *J. Math. Phys.* **13**, 1451 (1972).

[64] S. Giddings, J. Abbott and K. Kuchar, Gen. Rel. Grav.**16**, 751 (1984).

[65] Cornish,N.J., e Frankel,N.E. Phys.Rev.D 43 2555 (1991)

[66] C. Romero and F. Dahia, *Int. J.Theor. Phys.* **33**, 2091 (1994)